# BONNES VIEILLES PAGES

## *Préface de l'EUCLIDES DANICUS de Georg Mohr*

### *par Johannes HJELMSLEV* (1928)

Avertissement

Le mathématicien danois Georg Mohr fit paraître en 1672 un ouvrage de géométrie élémentaire intitulé l'Euclide danois, présentant la résolution au compas seul d'un certain nombre de problèmes euclidiens. En 1928, le mathématicien Johannes Hjelmslev préfaça en allemand la publication du fac-similé de l'édition de 1672. C'est cette préface que nous vous proposons aujourd'hui, traduite en français par Jean-Pierre Friedelmeyer de l'IREM de Strasbourg.

*Le livre qui paraît ici en une nouvelle publication en fac-similé de l'édition danoise originale et accompagnée d'une traduction allemande, 256 années après sa première parution, est l'œuvre du mathématicien danois Georg Mohr. Elle fut imprimée en Hollande du temps de la splendeur de ses universités, mais n'a recueilli jusqu'à présent aucun intérêt.*

*L'œuvre qui parut en 1672 en deux éditions, l'une danoise, l'autre hollandaise, contient le traitement élégant et complet des constructions euclidiennes, en n'utilisant que le seul cercle. On sait que Mascheroni (Geometria del compasso, Pavia, 1797) a montré que toutes les constructions que l'on peut effectuer à la règle et au compas peuvent l'être aussi à l'aide du cercle seul. Georg Mohr connaissait ce résultat de Mascheroni, souvent admiré, 125 ans plus tôt et l'avait présenté systématiquement. Le livre est composé de deux parties, dont la première donne les véritables fondements systématiques. En voici les idées principales, re-exposées librement dans les termes actuels de la géométrie.*

1. *Etant donné deux points A et B, on peut décrire un cercle de centre B passant par A. Reportant le rayon de proche en proche, à partir de A, on retombe sur A au bout de six étapes. Après trois reports, on arrive au point C diamétralement opposé à A et après deux reports, à l'extrémité d'une corde correspondant à un angle de 120°. Ainsi, l'on met en évidence la façon de trouver sur la ligne AB le point C tel que AB = BC et comment construire les longueurs 2a et* $a\sqrt{3}$ *lorsque a est donné.*

2. *Soit donné une longueur AB ; en construire une seconde BC, perpendiculaire à AB. La longueur de BC n'est pas imposée, on demande tout au plus que BC soit plus grand qu'une longueur donnée.*

*Prolongeons AB = a au-delà de B jusqu'à D, de telle façon que AD = 2 AB. Avec AD comme base, construire un triangle isocèle ADC dont les côtés soient suffisamment grands. Alors, BC est la longueur cherchée.*

3. *Avec la construction décrite en 2. On résout également le problème suivant : étant données deux longueurs p et q (p > q), construire x tel que* $x^2 = p^2 + q^2$ .

*Ensuite, si l'on a construit 2q, on peut élever sur q un triangle isocèle de côtés égaux p. Entre autres, cela permet ainsi de construire* $a\sqrt{2}$ *du fait que* $\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2$

4. *Soit à résoudre l'équation* $x^2 = p^2 + q^2$ *où p et q sont deux longueurs données.*

*Comme* $x^2 = 2p^2 - \left(p^2 - q^2\right) = \left(p\sqrt{2}\right)^2 - \left(p^2 - q^2\right)$, *on peut effectuer la construction d'après 3.*

*A partir de cette solution, Mohr en donne encore une seconde, dans l'édition hollandaise (qui avait paru après sa traduction en danois avec quelques compléments).*

*Celle-ci se décrit ainsi :* $x^2 = 4p^2 - \left(3p^2 - q^2\right) = (2p)^2 - \left[\left(p\sqrt{3}\right)^2 - q^2\right]$.

*Comme on le voit le principe fondamental de l'artifice de Mohr réside en ceci que l'on peut choisir une longueur y (y > q) arbitraire, puis construire x à partir de l'équation* $x^2 = \left(p^2 + y^2\right) - \left(y^2 - q^2\right)$. *Comme on peut élever une perpendiculaire BC sur AB, puis trouver un triangle rectangle BCD, dont le second côté de l'angle soit donné par BD, on est en mesure de construire a + b et a - b, lorsque a et b sont donnés.*

5. *Il suffit maintenant de savoir trouver le milieu d'une longueur AB = a. Mohr donne plusieurs solutions distinctes de ce problème. La première consiste en ceci qu'il détermine sur la droite AB les points C et D tels que CA = AB = BD ; puis il construit le triangle isocèle ECD avec EC = ED = 2a, et enfin il décrit les demi-cercles de diamètres EC et ED, qui se coupent au milieu cherché de AB.*

*Dans la foulée, on trouve la projection de A sur BC en construisant le triangle* $BCA_1$ *symétrique du triangle BCA donné, et en prenant le milieu de* $AA_1$.

*Lorsque l'on projette orthogonalement deux segments a et b situés sur une même droite et se rencontrant en un point, sur une droite passant par ce point, on obtient deux segments c et x qui sont dans un même rapport que a et b. Cela permet de fonder la construction de la quatrième proportionnelle x, lorsque a, b et c sont donnés avec a > c. Il suffit en effet de construire un triangle rectangle d'hypoténuse a et de côté c, de construire dans le prolongement de a, la longueur b et de projeter ce b dans le prolongement de c.*

*Si a < c, on prendra des multiples ma et mb, m étant choisi assez grand pour que ma > c. La moyenne proportionnelle est alors facile à trouver. Il suffit de remarquer que l'on trouvera le point d'intersection du demi–cercle et des droites considérées, en cherchant l'image symétrique du demi–cercle par rapport à la droite.*

*La première partie se termine avec les exercices d'application des aires, dont la solution est équivalente à la résolution/construction de l'équation générale du second degré.*

*Au total, la première partie de cet écrit comprend un traitement de tous les problèmes de construction survenant dans les Eléments d'Euclide. La seconde partie contient des applications supplémentaires, par exemple la résolution de certains problèmes d'interpolation qui conduisent à une équation réciproque du 4ème degré. Mohr traite encore d'autres problèmes intéressants, tels celui–ci par exemple : déterminer tous les triangles de base a donnée, tels que le rapport de* $b^2 + c^2$ *à l'aire du triangle ait une valeur donnée ; également, on trouve traité par Mohr le problème dit de Pothenot, déjà résolu par Snellius dans son Eratosthène Batavus*

*(1617). Le livre se termine par quelques applications à la perspective. Dans les constructions traitées ici, la détermination du point d'intersection de deux droites présente un intérêt majeur : ce problème n'avait pas été considéré en effet comme fondamental dans la première partie ; dans la seconde partie il est traité dans les applications et résolu au moyen de la quatrième proportionnelle.*

*On ne connaît pas d'autre écrit de Mohr*[1] *que celui présenté ici. Mais il est mentionné en passant, par Leibniz dans une lettre adressée à Oldenburg datée du 12 mai 1676, comme « Georgius Mohr Danus in Geometria et Analysi versatissimus ». Comme Leibniz l'indique, il avait appris, par l'intermédiaire de ce mathématicien danois, que Collins, en Angleterre, était en possession de développements en séries pour sin x et arcsin x, et il sollicite Oldenburg pour qu'il lui fournisse des renseignements sur leurs démonstrations, du fait qu'il s'occupe lui-même de questions semblables. De cette manière, Georg Mohr avait déjà gagné une place certaine quoique modeste dans l'histoire des mathématiques. Mais personne n'avait guère soupçonné qu'il est l'auteur d'un écrit que l'on aurait pu compter parmi les œuvres classiques de la Géométrie.*

*Euclides Danicus est signalé dans plusieurs catalogues d'auteurs (J. Worm, Forfatterlexikon, Kobenhavn, 1773 ; Murhard, Bibliotheca mathematica, Leipzig, 1797–1805 ; et quelques uns plus récents, entre autres Niels Nielsen, Mathematiken i Danmark 1526–1800) ; mais les indications parcimonieuses qui y sont données, montrent que l'on considérait le traité comme une compilation, ou même comme une traduction d'Euclide.*

*Le signe le plus manifeste que le livre fût effectivement lu, a été que l'un de mes auditeurs, Herr stud. Math. V Beck, trouva un exemplaire de l'édition hollandaise chez un antiquaire, et m'interrogea sur la valeur du livre.*

*Jusqu'à présent, il n'a pas été possible d'établir des données biographiques sur l'auteur, en dehors du fait qu'il est né à Copenhague le 1er avril 1640, comme il est indiqué dans le lexique de J. Worm mentionné. On peut conjecturer qu'il a été étudier dans les célèbres universités hollandaises, qui était fréquentées par nombre de ses contemporains nordistes. Dans la préface se dessine le portrait d'une personnalité sympathique, modeste et pourtant consciente de sa valeur. Il écrit dans la dédicace au roi du Danemark : « L'amour pour sa patrie qui accompagne un homme à sa naissance ne s'oublie pas facilement, mais aspire continuellement à lui témoigner son service, d'une façon ou d'une autre, et particulièrement par ce que l'on comprend ou que l'on aime le plus. C'est pourquoi, poussé par le sentiment de la reconnaissance et du devoir, je n'ai pu négliger de composer avec mes modestes possibilités ce petit ouvrage mathématique, le premier fruit de mes investigations mathématiques ; je l'ai écrit dans notre langue maternelle danoise, d'après la présentation d'Euclide et quelques autres auteurs, mais résolu d'une toute autre manière, ce qui, je présume, n'a été éclairé, jusqu'à présent, dans aucune autre langue de cette façon ».*

*Dans l'épilogue, son point de vue scientifique est exposé avec esprit : « J'espère que ce qui est contenu dans ce petit ouvrage pourra être reproduit (refait) par quiconque a quelques connaissances des débuts d'Euclide (car cela ne semble pas être difficile) ; de même les démonstrations (et les prémisses manquants d'Euclide) qui sont laissées de côté, seront facilement effectuées par chacun. Cependant, s'il devait s'en trouver certains à qui cette*

[1] J. Hjelmslev ignorait l'existence d'un second ouvrage intitulé *Compendium Euclidis curiosi* publié en hollandais à Amsterdam en 1673. Une traduction en anglais par Joseph Moxon a été publiée à Londres en 1677. Il s'agit d'un texte reprenant les constructions d'Euclide à l'aide d'une règle et d'un compas fixe. Cette information est également omise dans le *Dictionnary of Scientific Bibliography*.

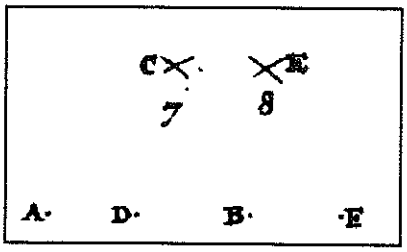
*manière de résolution devait ne pas plaire, sous prétexte qu'elles sont plus faciles à réaliser avec la règle et le compas, qu'ils sachent que cela m'est parfaitement connu ; mais mon seul but a été d'étudier quelque chose de la nature du cercle, à savoir si sa caractéristique ne réside justement pas en ce que l'on peut réaliser les constructions planes (sans utiliser la règle) par la seule intersection de cercles, comme cela a été développé ici . Je prie le lecteur intéressé de recevoir ceci au mieux, surtout s'il devait s'y trouver une erreur, conscient que toutes nos œuvres sont imparfaites[2] ».*

*Johannes HJELMSLEV*

Cette préface, bien que succincte, nous permet d'entrevoir le travail réalisé par Georg Mohr et se caractérise par sa relative simplicité et sa grande clarté. Cependant, dans le paragraphe 5 de cette préface (qui correspond au § 15 du texte de Mohr), Johannes Hjelmslev laisse supposer qu'une construction délicate n'a pas été traitée avec l'attention nécessaire. Johannes Hjelmslev indique que pour finir la construction proposée, il est nécessaire de tracer des cercles dont on connaît un diamètre (deux points diamétralement opposés) et la longueur du rayon, mais pas le centre. Alors que les constructions précédentes sont bien détaillées, Johannes Hjelmslev présente ces constructions comme si elles étaient évidentes, ce qui n'est pas le cas. Aussi, nous avons souhaité vérifier que Georg Mohr avait effectivement résolu ce problème. Dans ce § 15, Georg Mohr fait référence à deux propositions (§§ 8 & 9) qui valident la construction et qui n'ont pas été citées par Hjelmslev. Nous vous en proposons une traduction libre.

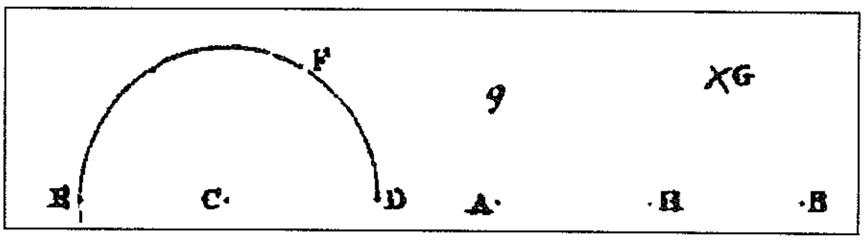
§ 8 . Problème : Construire un triangle DEF semblable et de même grandeur qu'un triangle donné ACB.

Construction : construis DE de même longueur que AC et DF de même longueur que AB et EF de même longueur que CB. Voilà réalisé ce qui était demandé.




§ 9. Problème : Etant donné deux droites proposées, l'une AB double de l'autre CD ; il faut décrire un cercle sur la plus longue AB dont le rayon soit la plus courte CD.

Construction : décris un demi-cercle avec CD [...] construis sur AB un triangle AGB égal au triangle EFD et un triangle GBH égal au triangle FDC (comme au § 8) ; alors H est le milieu de AB et le centre du cercle cherché.




[2] Traduction de Jean-Pierre Friedelmeyer.