INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

N°14

JUIN 1998

M : A.T.H.

MNEMOSYNE

UNIVERSITE DENIS DIDEROT

PARIS VII

Cette brochure est réalisée par l'IREM PARIS 7 DENIS DIDEROT avec le concours de la D.L.C., des MAFPEN de Paris, Créteil et Versailles.

Mnémosyne

personnification de la mémoire.

Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite;

de cette union naquirent les neufs Muses.

(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture: « **La mémoire** »

gravure allégorique d'après Gravelot (XVII^ème^ siècle)

N°14

JUIN 1998

MNEMOSYNE

M: *Mathématiques*

A. *Approche par les*

T. *textes*

H. *historiques*

SOMMAIRE

gravé par Gaillard d'après un tableau de Le Prince (XVIII$^{\text{ème}}$ siècle)

EDITORIAL

Voici enfin le 14éme numéro de *MNEMOSYNE*, longtemps attendu...

Ses *Bonnes vieilles pages* vous proposent la première traduction en français de l'introduction à une réédition de *l'Euclide Danois*, ouvrage du XVIIème siècle, présentant la résolution au compas seul d'un certain nombre de problèmes euclidiens.

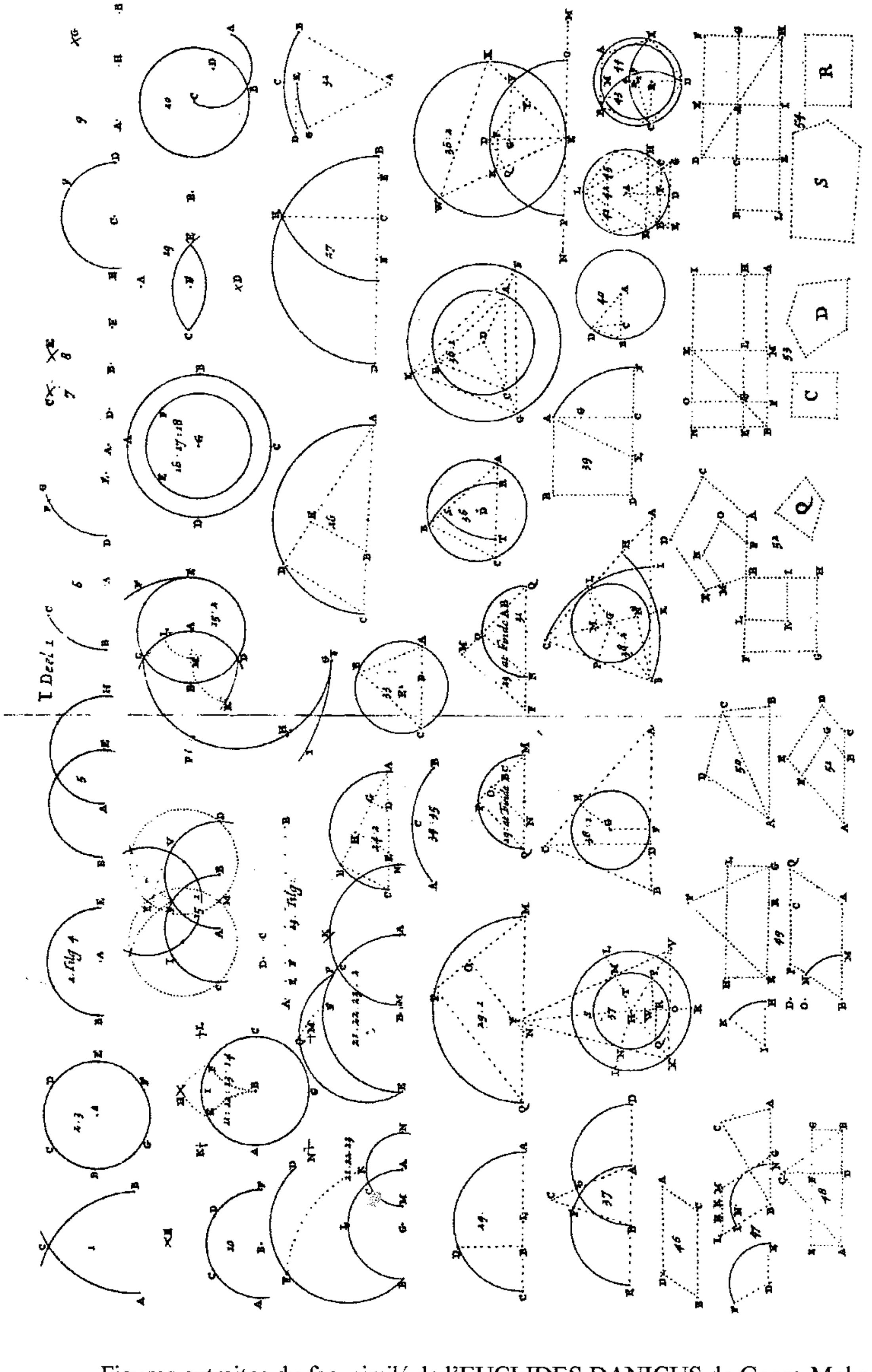
L'*Etude* analyse sur quelques exemples et de façon très précise la méthode des pesées qu'Archimède a développée au IIIème siècle avant J.-C., pour résoudre des problèmes qui relèvent aujourd'hui du calcul intégral : évaluer des surfaces limitées par des lignes courbes, des volumes de solides de révolution, déterminer des centres de gravité...Michèle Bathier-Fauvet y défend que les démarches d'Archimède dans le traité de *La Méthode* peuvent être rapprochées de celles qui seront développées au XVIIème siècle dans le cadre de la méthode des indivisibles.

Les *Contes du lundi* rendent compte de deux exposés de nos réunions du lundi après-midi, auxquelles tous nos lecteurs sont cordialement invités (demandez le programme !) :

Marianne Guillemot nous a parlé de Diophante d'Alexandrie et fait une sélection parmi les problèmes de ses *Arithmétiques*.

Martine Bühler, dans le second, présente, à partir d'un extrait de *l'Invention nouvelle en l'algèbre* de A. Girard, une méthode trigonométrique de résolution d'une équation du troisième degré dans le cas dit « irréductible », où la méthode de Cardan conduirait à extraire la racine cubique d'un nombre complexe. Girard a généralisé un procédé, ébauché par Viète. Un problème pour des terminales S, que vous trouverez dans la rubrique *Dans nos classes*, s'inspire de ces idées.

Un de nos fidèles lecteurs nous a adressé un courrier en réaction au dernier numéro de *MNEMOSYNE* et à propos des recherches de courbes quadratrices d'autres courbes... Nous l'en remercions vivement... et espérons que ce numéro inspirera également nos lecteurs...



Figures extraites du fac–similé de l'EUCLIDES DANICUS de Georg Mohr

BONNES VIEILLES PAGES

Préface de l'EUCLIDES DANICUS de Georg Mohr

par Johannes HJELMSLEV (1928)

Avertissement

Le mathématicien danois Georg Mohr fit paraître en 1672 un ouvrage de géométrie élémentaire intitulé l'Euclide danois, présentant la résolution au compas seul d'un certain nombre de problèmes euclidiens. En 1928, le mathématicien Johannes Hjelmslev préfaça en allemand la publication du fac-similé de l'édition de 1672. C'est cette préface que nous vous proposons aujourd'hui, traduite en français par Jean-Pierre Friedelmeyer de l'IREM de Strasbourg.

Le livre qui paraît ici en une nouvelle publication en fac-similé de l'édition danoise originale et accompagnée d'une traduction allemande, 256 années après sa première parution, est l'œuvre du mathématicien danois Georg Mohr. Elle fut imprimée en Hollande du temps de la splendeur de ses universités, mais n'a recueilli jusqu'à présent aucun intérêt.

L'œuvre qui parut en 1672 en deux éditions, l'une danoise, l'autre hollandaise, contient le traitement élégant et complet des constructions euclidiennes, en n'utilisant que le seul cercle. On sait que Mascheroni (Geometria del compasso, Pavia, 1797) a montré que toutes les constructions que l'on peut effectuer à la règle et au compas peuvent l'être aussi à l'aide du cercle seul. Georg Mohr connaissait ce résultat de Mascheroni, souvent admiré, 125 ans plus tôt et l'avait présenté systématiquement. Le livre est composé de deux parties, dont la première donne les véritables fondements systématiques. En voici les idées principales, re-exposées librement dans les termes actuels de la géométrie.

1. *Etant donné deux points A et B, on peut décrire un cercle de centre B passant par A. Reportant le rayon de proche en proche, à partir de A, on retombe sur A au bout de six étapes. Après trois reports, on arrive au point C diamétralement opposé à A et après deux reports, à l'extrémité d'une corde correspondant à un angle de 120°. Ainsi, l'on met en évidence la façon de trouver sur la ligne AB le point C tel que AB = BC et comment construire les longueurs 2a et* $a\sqrt{3}$ *lorsque a est donné.*

2. *Soit donné une longueur AB ; en construire une seconde BC, perpendiculaire à AB. La longueur de BC n'est pas imposée, on demande tout au plus que BC soit plus grand qu'une longueur donnée.*

Prolongeons AB = a au-delà de B jusqu'à D, de telle façon que AD = 2 AB. Avec AD comme base, construire un triangle isocèle ADC dont les côtés soient suffisamment grands. Alors, BC est la longueur cherchée.

3. *Avec la construction décrite en 2. On résout également le problème suivant : étant données deux longueurs p et q (p > q), construire x tel que* $x^2 = p^2 + q^2$.

Ensuite, si l'on a construit 2q, on peut élever sur q un triangle isocèle de côtés égaux p. Entre autres, cela permet ainsi de construire $a\sqrt{2}$ *du fait que* $\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2$

4. *Soit à résoudre l'équation* $x^2 = p^2 + q^2$ *où p et q sont deux longueurs données.*

Comme $x^2 = 2p^2 - \left(p^2 - q^2\right) = \left(p\sqrt{2}\right)^2 - \left(p^2 - q^2\right)$, *on peut effectuer la construction d'après 3.*

A partir de cette solution, Mohr en donne encore une seconde, dans l'édition hollandaise (qui avait paru après sa traduction en danois avec quelques compléments).

Celle-ci se décrit ainsi : $x^2 = 4p^2 - \left(3p^2 - q^2\right) = (2p)^2 - \left[\left(p\sqrt{3}\right)^2 - q^2\right]$.

Comme on le voit le principe fondamental de l'artifice de Mohr réside en ceci que l'on peut choisir une longueur y (y > q) arbitraire, puis construire x à partir de l'équation $x^2 = \left(p^2 + y^2\right) - \left(y^2 - q^2\right)$. *Comme on peut élever une perpendiculaire BC sur AB, puis trouver un triangle rectangle BCD, dont le second côté de l'angle soit donné par BD, on est en mesure de construire a + b et a - b, lorsque a et b sont donnés.*

5. *Il suffit maintenant de savoir trouver le milieu d'une longueur AB = a. Mohr donne plusieurs solutions distinctes de ce problème. La première consiste en ceci qu'il détermine sur la droite AB les points C et D tels que CA = AB = BD ; puis il construit le triangle isocèle ECD avec EC = ED = 2a, et enfin il décrit les demi-cercles de diamètres EC et ED, qui se coupent au milieu cherché de AB.*

Dans la foulée, on trouve la projection de A sur BC en construisant le triangle BCA_1 *symétrique du triangle BCA donné, et en prenant le milieu de* AA_1.

Lorsque l'on projette orthogonalement deux segments a et b situés sur une même droite et se rencontrant en un point, sur une droite passant par ce point, on obtient deux segments c et x qui sont dans un même rapport que a et b. Cela permet de fonder la construction de la quatrième proportionnelle x, lorsque a, b et c sont donnés avec a > c. Il suffit en effet de construire un triangle rectangle d'hypoténuse a et de côté c, de construire dans le prolongement de a, la longueur b et de projeter ce b dans le prolongement de c.

Si a < c, on prendra des multiples ma et mb, m étant choisi assez grand pour que ma > c. La moyenne proportionnelle est alors facile à trouver. Il suffit de remarquer que l'on trouvera le point d'intersection du demi-cercle et des droites considérées, en cherchant l'image symétrique du demi-cercle par rapport à la droite.

La première partie se termine avec les exercices d'application des aires, dont la solution est équivalente à la résolution/construction de l'équation générale du second degré.

Au total, la première partie de cet écrit comprend un traitement de tous les problèmes de construction survenant dans les Eléments d'Euclide. La seconde partie contient des applications supplémentaires, par exemple la résolution de certains problèmes d'interpolation qui conduisent à une équation réciproque du 4ème degré. Mohr traite encore d'autres problèmes intéressants, tels celui-ci par exemple : déterminer tous les triangles de base a donnée, tels que le rapport de $b^2 + c^2$ *à l'aire du triangle ait une valeur donnée ; également, on trouve traité par Mohr le problème dit de Pothenot, déjà résolu par Snellius dans son Eratosthène Batavus*

(1617). Le livre se termine par quelques applications à la perspective. Dans les constructions traitées ici, la détermination du point d'intersection de deux droites présente un intérêt majeur : ce problème n'avait pas été considéré en effet comme fondamental dans la première partie ; dans la seconde partie il est traité dans les applications et résolu au moyen de la quatrième proportionnelle.

On ne connaît pas d'autre écrit de Mohr[1] *que celui présenté ici. Mais il est mentionné en passant, par Leibniz dans une lettre adressée à Oldenburg datée du 12 mai 1676, comme « Georgius Mohr Danus in Geometria et Analysi versatissimus ». Comme Leibniz l'indique, il avait appris, par l'intermédiaire de ce mathématicien danois, que Collins, en Angleterre, était en possession de développements en séries pour sin x et arcsin x, et il sollicite Oldenburg pour qu'il lui fournisse des renseignements sur leurs démonstrations, du fait qu'il s'occupe lui-même de questions semblables. De cette manière, Georg Mohr avait déjà gagné une place certaine quoique modeste dans l'histoire des mathématiques. Mais personne n'avait guère soupçonné qu'il est l'auteur d'un écrit que l'on aurait pu compter parmi les œuvres classiques de la Géométrie.*

Euclides Danicus est signalé dans plusieurs catalogues d'auteurs (J. Worm, Forfatterlexikon, Kobenhavn , 1773 ; Murhard, Bibliotheca mathematica, Leipzig, 1797–1805 ; et quelques uns plus récents, entre autres Niels Nielsen, Mathematiken i Danmark 1526–1800) ; mais les indications parcimonieuses qui y sont données, montrent que l'on considérait le traité comme une compilation, ou même comme une traduction d'Euclide.

Le signe le plus manifeste que le livre fût effectivement lu, a été que l'un de mes auditeurs, Herr stud. Math. V Beck, trouva un exemplaire de l'édition hollandaise chez un antiquaire, et m'interrogea sur la valeur du livre.

Jusqu'à présent, il n'a pas été possible d'établir des données biographiques sur l'auteur, en dehors du fait qu'il est né à Copenhague le 1er avril 1640, comme il est indiqué dans le lexique de J. Worm mentionné. On peut conjecturer qu'il a été étudier dans les célèbres universités hollandaises, qui était fréquentées par nombre de ses contemporains nordistes. Dans la préface se dessine le portrait d'une personnalité sympathique, modeste et pourtant consciente de sa valeur. Il écrit dans la dédicace au roi du Danemark : « L'amour pour sa patrie qui accompagne un homme à sa naissance ne s'oublie pas facilement, mais aspire continuellement à lui témoigner son service, d'une façon ou d'une autre, et particulièrement par ce que l'on comprend ou que l'on aime le plus. C'est pourquoi, poussé par le sentiment de la reconnaissance et du devoir, je n'ai pu négliger de composer avec mes modestes possibilités ce petit ouvrage mathématique, le premier fruit de mes investigations mathématiques ; je l'ai écrit dans notre langue maternelle danoise, d'après la présentation d'Euclide et quelques autres auteurs, mais résolu d'une toute autre manière, ce qui, je présume, n'a été éclairé, jusqu'à présent, dans aucune autre langue de cette façon ».

Dans l'épilogue, son point de vue scientifique est exposé avec esprit : « J'espère que ce qui est contenu dans ce petit ouvrage pourra être reproduit (refait) par quiconque a quelques connaissances des débuts d'Euclide (car cela ne semble pas être difficile) ; de même les démonstrations (et les prémisses manquants d'Euclide) qui sont laissées de côté, seront facilement effectuées par chacun. Cependant, s'il devait s'en trouver certains à qui cette

[1] J. Hjelmslev ignorait l'existence d'un second ouvrage intitulé *Compendium Euclidis curiosi* publié en hollandais à Amsterdam en 1673. Une traduction en anglais par Joseph Moxon a été publiée à Londres en 1677. Il s'agit d'un texte reprenant les constructions d'Euclide à l'aide d'une règle et d'un compas fixe. Cette information est également omise dans le *Dictionnary of Scientific Bibliography*.

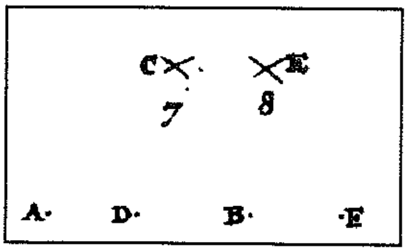
manière de résolution devait ne pas plaire, sous prétexte qu'elles sont plus faciles à réaliser avec la règle et le compas, qu'ils sachent que cela m'est parfaitement connu ; mais mon seul but a été d'étudier quelque chose de la nature du cercle, à savoir si sa caractéristique ne réside justement pas en ce que l'on peut réaliser les constructions planes (sans utiliser la règle) par la seule intersection de cercles, comme cela a été développé ici. Je prie le lecteur intéressé de recevoir ceci au mieux, surtout s'il devait s'y trouver une erreur, conscient que toutes nos œuvres sont imparfaites[2] ».

Johannes HJELMSLEV

Cette préface, bien que succincte, nous permet d'entrevoir le travail réalisé par Georg Mohr et se caractérise par sa relative simplicité et sa grande clarté. Cependant, dans le paragraphe 5 de cette préface (qui correspond au § 15 du texte de Mohr), Johannes Hjelmslev laisse supposer qu'une construction délicate n'a pas été traitée avec l'attention nécessaire. Johannes Hjelmslev indique que pour finir la construction proposée, il est nécessaire de tracer des cercles dont on connaît un diamètre (deux points diamétralement opposés) et la longueur du rayon, mais pas le centre. Alors que les constructions précédentes sont bien détaillées, Johannes Hjelmslev présente ces constructions comme si elles étaient évidentes, ce qui n'est pas le cas. Aussi, nous avons souhaité vérifier que Georg Mohr avait effectivement résolu ce problème. Dans ce § 15, Georg Mohr fait référence à deux propositions (§§ 8 & 9) qui valident la construction et qui n'ont pas été citées par Hjelmslev. Nous vous en proposons une traduction libre.

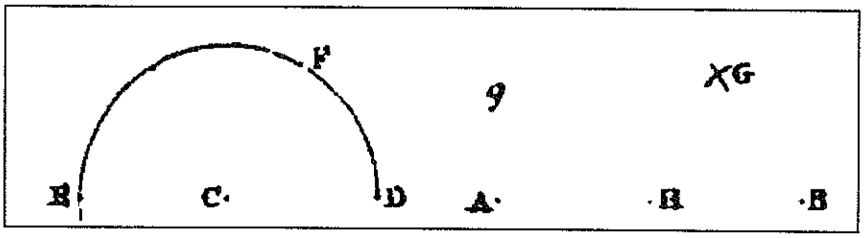
§ 8 . Problème : Construire un triangle DEF semblable et de même grandeur qu'un triangle donné ACB.

Construction : construis DE de même longueur que AC et DF de même longueur que AB et EF de même longueur que CB. Voilà réalisé ce qui était demandé.



§ 9. Problème : Etant donné deux droites proposées, l'une AB double de l'autre CD ; il faut décrire un cercle sur la plus longue AB dont le rayon soit la plus courte CD.

Construction : décris un demi-cercle avec CD [...] construis sur AB un triangle AGB égal au triangle EFD et un triangle GBH égal au triangle FDC (comme au § 8) ; alors H est le milieu de AB et le centre du cercle cherché.



[2] Traduction de Jean-Pierre Friedelmeyer.

EUCLIDES DANICUS,

Bestaande udi Too Deele.

Dend Første Deel: Handler udaf de Sex Første / EUCLIDES Bøger / de der udi begreffne Maalkunstige Werckstycker.

Dend Anden Deel: Giffver Anledning Atskillige Werckstycker at giøre / som Skæring / Røring / Deeling / Skinbar Tegenkonst oc Soole-viisere. Alleniste med en Circkel (Foruden Linial at bruge) med Skærelser af Rimder.

Forestillet.

Af

Georg Mohr.

Prentet i Amsterdam af Jacob van Velsen.
For Authore, Aar 1672.

Amicorum Anton. David

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΠΑΝΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

ARCHIMEDIS OPERA
QVAE EXTANT.

NOVIS DEMONSTRATIONIBVS
COMMENTARIISQVE ILLVSTRATA.

Per DAVIDEM RIVALTVM A FLVRANTIA Cœnomanum, è Regia Turma ſacri Cubiculi, ſanctioribuſque regni Conſiliis & à literarum pietatiſque ſtudiis Chriſtianiſſimi Gallorum & Nauarræ Regis LVDOVICI XIII. ſemper Auguſti.

Operum Catalogus ſequenti pagina habetur.

PARISIIS.

Apud CLAVDIVM MORELLVM, via Iacobæa, ad inſigne Fontis.

CIϽ IϽC XV

EX REGIS PRIVILEGIO.

LA METHODE DES PESEES CHEZ ARCHIMEDE : METHODE HEURISTIQUE, METHODE DEMONSTRATIVE, EN ROUTE VERS LES INDIVISIBLES.

Michèle Bathier-Fauvet

Ce texte souhaite être un élément de réponse à la question suivante : mais comment ont donc fait les Anciens pour évaluer des aires et des volumes, alors qu'ils ne disposaient pas de la notion d'intégrale ? Il a l'ambition de pouvoir être lu par un bon élève de Terminale ou de Math. sup. curieux de ces questions, mais tout de même assez tenace.

Déjà dans le Livre XII des *Eléments* d'Euclide, la proposition 10 établissait : "*Un cône est la troisième partie d'un cylindre qui a la même base, et une hauteur égale.*" , la proposition 18 : "*Les sphères sont entr'elles en raison triplée de leurs diamètres.*"[1] , la proposition 6 : "*Les pyramides qui ont la même hauteur, et qui ont des polygones pour bases, sont entr'elles comme leurs bases.*", et le corollaire de la proposition 7 : "*Toute pyramide est la troisième partie d'un prisme qui a la même base et la même hauteur qu'elle.*".

Ces propositions sont démontrées pour 6 et 7 par des découpages astucieux de figures et utilisation de la proposition 5, pour 5, 10 et 18 par la méthode d'exhaustion. Il sera ici largement question de cette méthode démonstrative, aussi appelée méthode « par compression » , « par double réduction à l'absurde » , « par la géométrie » , « apagogique », et qui sera utilisée jusqu'au XVII^e^ siècle. Pascal parle de la « méthode des Anciens » lorsqu'il y fait référence[2].

Ici, j'ai voulu plus particulièrement expliquer différentes utilisations de la méthode des pesées d'Archimède (vers 287-212 av. J.-C.). Nous nous pencherons d'abord sur un exemple simple : la quadrature de la parabole[3], en étudiant la proposition 1 de *La Méthode*. Nous verrons ensuite comment, plus de dix-huit siècles après Archimède, Torricelli (1608-1647) met en oeuvre une idée comparable - la méthode des indivisibles - pour résoudre le même problème, alors qu'il ignorait l'existence du traité de *La Méthode* d'Archimède. Puis nous examinerons comment Archimède utilise « rigoureusement » une méthode de pesées pour établir ce même résultat dans *La Quadrature de la parabole* ; nous aurons là un très bel exemple de

---

[1] Cela signifie, en langage moderne, que si la sphère S a pour volume V et pour diamètre D, la sphère s pour volume v et pour diamètre d, alors $V/v = (D/d)^3$.

[2] Le nom de « méthode d'exhaustion » est dû à Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) qui l'emploie dans son *Opus geometricum Quadraturae circuli et sectionum coni* (i.e. Traité géométrique de la Quadrature du cercle et des sections coniques) (1647).

Pour avoir plus d'informations concernant cette méthode, le lecteur pourra se référer à l'article de J. P. Le Goff "*De la méthode dite d'exhaustion : Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)*" paru dans les actes du colloque INTER-IREM de Besançon des 12 et 13 mai 1989 (pp. 196-220). Il pourra aussi consulter le numéro 1 de *Mnémosyne* d'avril 1992.

raisonnement « par double réduction à l'absurde ». Le lecteur s'étant ainsi familiarisé avec les idées essentielles de cette technique des pesées, nous pourrons ensuite étudier la démonstration particulièrement astucieuse de quelques propositions de *La Méthode*.

1. Découverte de la géométrie des indivisibles

2. Archimède et Torricelli : la quadrature de la parabole

2.1. Archimède, <u>La Méthode</u>, proposition 1
2.2. Torricelli, <u>Opera Geometrica</u>, livre De dimensione parabolae, proposition 20
2.3. Archimède, <u>La Quadrature de la parabole</u>, propositions 14 à 17 : une démonstration « rigoureuse » utilisant la mécanique

3. <u>La Méthode</u> d'Archimède : différentes utilisations de l'idée de pesée

3.1. Les propositions établies
3.2. <u>La Méthode</u>, proposition 6 : centre de gravité d'un hémisphère
3.3. <u>La Méthode</u>, propositions 12 et 13 : une substitution de poids

4. <u>La Méthode</u>, proposition 14 : il n'est plus question de pesées ; l'idée est celle de la méthode des indivisibles

N.B. : pour toutes les démonstrations, le mode d'exposition sera le même. Je ne reprendrai pas mot à mot le texte archimédien ; le lecteur pourra se référer aux documents joints pour lire quelques textes originaux s'il le souhaite et je remercie très vivement les éditions Les Belles Lettres de nous avoir autorisés à les reproduire.

Mon premier objectif est de donner au néophyte quelques clés afin qu'il puisse aborder plus facilement ces textes ; le second est de permettre au lecteur pressé de comprendre rapidement la mise en oeuvre de cette méthode. C'est pourquoi j'insisterai surtout sur l'enchaînement des idées, tout en suivant l'argumentation d'Archimède ; les développements et références nécessaires à une compréhension complète seront rejetés en notes. Les démonstrations seront exposées en langage moderne. En particulier, la phrase " *ΓΑ est à ΑΞ comme ΜΞ est à ΞΟ* " qui signifie que le rapport de proportionnalité entre les segments ΓΑ et ΑΞ est le même que celui entre les segments ΜΞ et ΞΟ sera traduite, pour plus de commodité, par : $\frac{\Gamma A}{A\Xi} = \frac{M\Xi}{\Xi O}$[4].

---

[3] Il s'agit d'évaluer l'aire de la portion de plan limitée par une parabole et une corde de cette parabole.

[4] Peut-être avez-vous déjà remarqué, en quatrième de couverture d'un cahier d'écolier d'autrefois, les lignes :
SIGNES ABREVIATIFS EMPLOYES EN ARITHMETIQUE :
Plus + Moins − Multiplié par × Divisé par : Egale = Comme ::

Nous utilisons très couramment les cinq premiers, mais plus du tout le dernier, celui qui permettait de traduire l'égalité de rapports de proportions. Ainsi, on écrivait : 2:3 :: 10:15 , ce qui signifie que les nombres 2 et 3 ont le même rapport de proportionnalité que les nombres 10 et 15, et qui se lisait : "2 est à 3 comme 10 est à 15".(cf. Euclide Livre V).

Dans *A History of Mathematical Notation*, § 244, Cajori signale qu'en 1631, dans son livre *Clavis mathematicae*, William Oughtred (1574-1660) utilise la notation a.b :: c.d, pour écrire que le rapport de proportionnalité entre les nombres a et b est le même que celui entre les nombres c et d. C'est en 1651 qu'apparaît chez l'astronome Vincent Wing, dans son *Harmonicon coeleste*, la notation a:b :: c:d.

D'ailleurs, que fait le mathématicien moderne lorsqu'il écrit : $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$?

Il sait que (2,3) et (10,15) sont deux représentants de la même classe de $Z\times Z^*/\Re$, $\Re$ étant la relation d'équivalence définie dans $Z\times Z^*$ par : $\forall (a,b) \in Z\times Z^*, \forall (a',b') \in Z\times Z^*, (a,b)\,\Re\,(a',b') \Leftrightarrow ab' = a'b$. En fait, $(a,b)\,\Re\,(a',b')$ signifie que le rapport de proportionnalité entre a et b est le même que celui entre a' et b'. (Rappelons que **Q** est l'ensemble des classes

Le texte original ne comporte aucune figure dans l'espace ; toutes les figures planes dans le corps de cet article reproduisent celles de *Archimède*, Les Belles Lettres, collection G. Budé, à cette différence près que les minuscules grecques ont été remplacées par des majuscules grecques et que quelques lettres ont été introduites pour faciliter l'exposé ; elles sont alors notées entre parenthèses.

1. Découverte de la géométrie des indivisibles

En 1644, dans ses *Opera Geometrica*, Torricelli écrit : *"Que cette géométrie des indivisibles soit une découverte entièrement nouvelle, je n'oserais l'affirmer. Je croirais plus volontiers que les anciens Géomètres se sont servis de cette méthode dans la découverte des théorèmes les plus difficiles, bien qu'ils aient préféré une autre voie dans les démonstrations, soit pour cacher les secrets de l'art, soit pour ôter à des détracteurs jaloux l'occasion de les contredire. Quoiqu'il* (sic.) *en soit, il est certain que cette géométrie est un merveilleux abrégé pour la découverte, et qu'elle permet d'établir d'innombrables théorèmes presque impénétrables par des démonstrations brèves, directes et positives, ce qui ne peut se faire par la théorie des anciens*[5]*. C'est là en effet, la voie vraiment Royale dans les broussailles mathématiques, et le premier qui l'ouvrit et l'aplanit pour le profit de tous, c'est l'artisan des découvertes admirables : Cavalieri".*[6]

Et, en effet, nous savons maintenant que les Anciens avaient eu une idée de cette nature. La découverte en 1899 par le paléographe Papadopoulos Kerameus, au monastère du Saint Sépulcre à Jérusalem, d'un palimpseste (c'est un vieux parchemin) présentant des traces d'un traité mathématique grec va permettre de l'affirmer. Le parchemin, mal effacé avant une réutilisation entre le XII^e et le XIV^e siècle, révèle un texte transcrit au X^e siècle. Le savant danois J.L. Heiberg, qui avait déjà publié en 1880 la première édition critique des œuvres d'Archimède connues à l'époque, se chargea de déchiffrer ce texte et de le traduire ; il acheva ce travail en 1906.

Trois traités d'Archimède sont ainsi mis au jour : *Le Stomachion*[7], *La Méthode*[8] et *Le Traité des Corps Flottants*. On ne connaissait pas les deux premiers. Ce qui conduira Heiberg à faire, entre 1913 et 1915, une seconde édition critique de l'œuvre d'Archimède !

La Méthode est d'une importance capitale : c'est le testament scientifique d'Archimède qui, plus de dix-

---

d'équivalence de cette relation $\mathfrak{R}$). En écrivant : $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, ce qu'il écrit en réalité, c'est classe de (2,3) = classe de (10,15), classe de (2,3) étant le rationnel noté $\frac{2}{3}$.

[5] Il s'agit de la méthode d'exhaustion qui, comme le souligne Torricelli, permet d'établir un résultat dont on pense qu'il est vrai, mais qui ne permet pas d'avoir l'intuition ni l'idée de ce résultat.

[6] Torricelli traduit par De Gandt F., *L'œuvre de Torricelli, science galiléenne et Nouvelle Géométrie*, publication de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de Nice, p. 155.

[7] En fait, il ne s'agit que d'un fragment de ce traité considéré d'ailleurs comme une œuvre mineure. Un autre fragment a été découvert dans un manuscrit arabe par l'orientaliste H. Suter qui en a publié une traduction en 1899. L'ensemble de ce qui nous est pour l'instant parvenu du *Stomachion* ne contient que l'équivalent de trois propositions. Archimède y traite d'un problème de pavage de carrés et d'un rectangle à l'aide de plaquettes ayant, pour la plupart, la forme de triangles, pour quelques-unes celle de polygones, et possédant la propriété remarquable d'être contenues un nombre entier de fois dans la figure initiale.

[8] Le titre complet est : *La Méthode d'Archimède relative aux propositions mécaniques, à Eratosthène.*

huit siècles avant Cavalieri (1598-1647)[9], avait, pour reprendre les mots de Torricelli, *"ouvert et aplani cette voie Royale pour le profit de tous"*. La lettre d'introduction à son ami et pair, Eratosthène, est on ne peut plus significative (voir document 1)[10].

Archimède y annonce la démonstration de deux résultats déjà soumis à la sagacité d'Eratosthène, que nous noterons respectivement théorèmes 1 et 2 et qu'en langage moderne nous pouvons énoncer :

Le volume de l'onglet cylindrique vaut 1/6 de celui du cube.

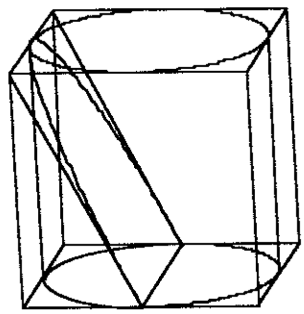


Fig. 1

Le volume de l'intersection de deux cylindres d'axes orthogonaux et concourants, inscrits dans un cube, est égal aux 2/3 de celui de ce cube.

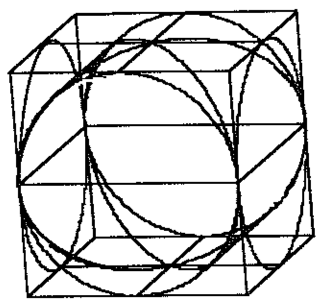


Fig. 2

Ainsi, une figure partiellement curviligne *"est trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans"*[11]. Voilà sans doute pourquoi Archimède estime que *"ces théorèmes diffèrent de ceux qui ont été trouvés antérieurement"*[12] ; il y pressentait probablement un pas vers la résolution du problème de la quadrature du cercle [13]: une constructibilité d'un « rectiligne » ou d'un « plat » équivalent à du « rond ».

"J'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes ; certaines

---

[9] Cavalieri B., *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadem ratione promota*, Bononiae, 1635.

[10] A ce propos, le lecteur remarquera la structure habituelle des traités d'Archimède qui ne s'adresse qu'à ses pairs : il commence par une lettre d'introduction à son correspondant, ici Eratosthène (vers 276-194 av. J.-C.) ; viennent après les lemmes ou propriétés utiles à la compréhension de ce qui suit et, le plus souvent, établis dans des traités antérieurs ; il passe ensuite à la rédaction proprement dite des propositions et de leurs démonstrations (il y en a quinze dans *La Méthode*). Dans d'autres traités, entre la lettre amicale et les lemmes, il intercale des définitions et des postulats.

Eratosthène, connu de nos jours pour son « crible » qui permet de trouver les nombres premiers dans une liste de nombres, était alors le conservateur en chef de la Grande Bibliothèque d'Alexandrie. Il fut aussi précepteur des enfants royaux. Quand on saura qu'à cette époque Alexandrie était aux scientifiques ce qu'Athènes était aux poètes et aux philosophes, que cette Bibliothèque était celle du *Mousséion*, institution royale abritée dans de somptueux bâtiments près des palais royaux et qui pensionnait les plus grands savants, on comprendra mieux l'importance du personnage.

[11] ARCHIMEDE, *La Méthode*, tome III, p. 83.

[12] Ibid. p. 83.

[13] Peut-on construire, en n'utilisant que la règle et le compas, un carré qui ait la même aire qu'un cercle de rayon donné ? C'est ce problème qui s'appelle le problème de la quadrature du cercle. Il a occupé les mathématiciens pendant de nombreux siècles. On sait, depuis 1882, que la réponse est NON ; c'est une conséquence des travaux du mathématicien allemand F. von Lindeman (1852-1939) sur le nombre π. Il a établi que π est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucune équation polynomiale à coefficients rationnels. En conséquence, par application d'un résultat établi en 1837 par le Français M. L. Wantzel (1814-1848), π n'est pas constructible.

Wantzel, alors qu'il était élève ingénieur à l'Ecole des Ponts et Chaussées, publie le célèbre article intitulé : *"Recherche sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas "*. Il montre en particulier que tout nombre constructible est algébrique, c'est-à-dire racine d'une équation polynomiale à *propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas susceptible de démonstrations ; car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance*"[14], écrit-il ensuite.

En substance, cette méthode « ne vaut pas », mais « elle marche » parce qu'elle permet d'avoir l'intuition d'un résultat ; ce qui est particulièrement important car, si la méthode « par la géométrie »[15] est une méthode démonstrative parfaitement convaincante, elle n'a, elle, aucun pouvoir heuristique : il faut connaître le résultat à l'avance pour pouvoir le prouver ainsi. C'est pourquoi Archimède rend hommage à Démocrite (vers 460-370 av. J.-C.), occupé lui aussi de problèmes de calculs de volumes, qui énonça des résultats qu'il n'établit pas, mais qu'Eudoxe (vers 408-vers 355 av. J.-C.) put ensuite démontrer : une pyramide a un volume égal au tiers de celui du prisme de même base et de même hauteur (c'est la proposition XII-7 des *Eléments* d'Euclide), et un cône a un volume égal au tiers de celui du cylindre de même base et de même hauteur (c'est la proposition XII-10 des *Eléments* d'Euclide) . Nous avons déjà parlé de ces propositions en introduction.

Et Archimède sait à quel point sa découverte est importante : "*...je suis convaincu d'apporter une contribution très utile à la recherche mathématique. Je suis persuadé en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas encore venues à l'esprit*"[16].

2. Archimède et Torricelli : la quadrature de la parabole

2.1. Archimède, La Méthode, proposition 1 (voir document 2)

« Je dis que le segment ABΓ est équivalent aux quatre tiers du triangle ABΓ »[17].

Archimède affirme que cette proposition a été "*la première à [lui] être révélée par la mécanique*"[18]. Il va donc commencer par exposer sa méthode sur cet exemple simple. Les deux idées actives sont de considérer qu'une aire "*est constituée de segments de droites*" et d'effectuer des pesées fictives sur de tels segments bien choisis. La rédaction de ce raisonnement, assez longue, reviendra toujours au cours de ce traité ; il n'en fera jamais l'économie. Il conclut : "*la proposition n'est, certes, pas démontrée par ce que nous venons de dire, mais elle donne une certaine idée que la conclusion est vraie*"[19] . Il renvoie ensuite aux démonstrations déjà faites dans *La Quadrature de la parabole.*

---

coefficients rationnels (la réciproque est fausse). Le lecteur intéressé pourra trouver la reproduction de cet article de Wantzel dans *Mnémosyne,* numéro 3, d'avril 1993.

[14] ARCHIMEDE, *La Méthode*, tome III, pp. 83-84.

[15] Il s'agit, vous l'avez reconnue, de la méthode d'exhaustion.

[16] Ibid. p. 84.

[17] Ibid. p. 86.

[18] Ibid. p. 84.

[19] Ibid. p. 88.

Il s'agit donc d'établir que l'aire de la portion de plan comprise entre l'arc de parabole et la corde AΓ est égale aux quatre tiers de celle du triangle ABΓ (voir Fig. 3).

ΓZ est tangente à la parabole en Γ, AZ est parallèle au diamètre[20] ainsi que BΔ, donc :

BΔ = BE[21] et BΓ coupe AZ en son milieu K .

---

[20] Actuellement, on appelle **diamètre,** non seulement **d'une parabole**, mais d'une conique en général, **le lieu géométrique des milieux des cordes de direction donnée. Il est porté par une droite**.
Par exemple, soit la parabole $(\mathfrak{I})$ d'axe de symétrie D. Soit une corde quelconque [AΓ] de direction (∂). Les milieux de [AΓ] sont tous situés sur une même droite D' qui, de plus, est parallèle à D.
Au sens de la définition précédente, D et D' sont donc des diamètres de $(\mathfrak{I})$.
Cependant, ce qu'Archimède appelle *''diamètre''*, c'est **uniquement** l'axe de symétrie de la parabole ; dans les autres cas, il parle de *''droite parallèle au diamètre''*.

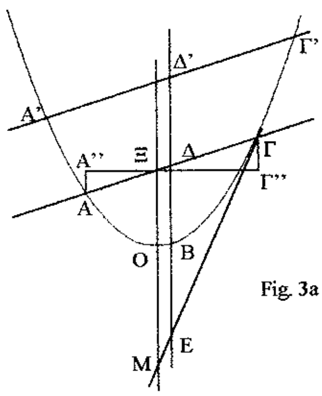


Fig. 3a

<u>Pour un élève de Terminale</u> : établissons le résultat énoncé dans cette note.
Soit la parabole $(\mathfrak{I})$ d'équation $y = px^2$.
Soit $A(a, pa^2)$, $\Gamma(b, pb^2)$ deux points quelconques de $(\mathfrak{I})$ et Δ le milieu de [AΓ].
La droite (AΓ), est dirigée par le vecteur $\vec{v}\,(1, p(a+b))$.
Soit $A'(a', pa'^2)$ et $\Gamma'(b', pb'^2)$, tels que (AΓ) et (A'Γ') soient parallèles.
$(A\Gamma) \,//\, (A'\Gamma') \Leftrightarrow \vec{v}$ et $\vec{v}\,'$ sont colinéaires
$\Leftrightarrow p(a+b) = p(a'+b')$.
Alors Δ', milieu de [A'Γ'], a même abscisse que Δ, soit : (a+ b)/2 ; (ΔΔ') est donc parallèle à l'axe des ordonnées, axe de symétrie de $(\mathfrak{I})$.
N.B. Remarquons que si (ΔΔ') coupe $(\mathfrak{I})$ en B, alors la tangente à $(\mathfrak{I})$ en B est parallèle à (AΓ) : cette tangente est obtenue comme position limite de la droite (A'Γ').

<u>Pour un élève de Math. sup.</u> :
Le théorème des accroissements finis appliqué à f : $x \mapsto px^2$, continue et dérivable sur [a,b], assure l'existence de $c \in]a,b[$ tel que : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Or, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{p(b^2-a^2)}{b-a} = p(b+a) = f'(\dfrac{a+b}{2})$.
La tangente à $(\mathfrak{I})$ au point B d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ est donc parallèle à (AΓ) et c'est aussi la tangente à $(\mathfrak{I})$ parallèle à n'importe quelle corde [A'Γ'] parallèle à (AΓ). Donc : $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a'+b'}{2}$. Ainsi les milieux respectifs de [AΓ] et [A'Γ'], Δ et Δ', ayant même abscisse, (ΔΔ') est parallèle à l'axe de $(\mathfrak{I})$.

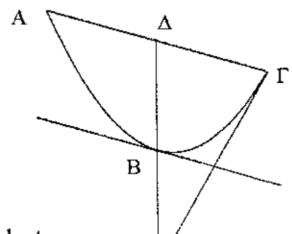


Fig. 3b

[21] Dans la proposition 2 de *La Quadrature de la parabole,* Archimède rappelle sans démonstration que : ***''Si on a une parabole ABΓ, une droite BΔ parallèle au diamètre ou elle même diamètre, une droite AΔΓ parallèle à la tangente à la conique au point B, et une droite EΓ tangente à la conique au point Γ, BΔ et BE seront égaux. ''***.(cf. Apollonius I, 35), (ARCHIMEDE, tome II, pp. 166–167) .
<u>Pour un élève de Terminale</u> : reprenons la parabole $(\mathfrak{I})$ définie dans la note précédente.
Une équation de la tangente à $(\mathfrak{I})$ en Γ est : $y = bp(2x-b)$.
La droite (AΓ), a pour pente p(a+b) et le point B en lequel la tangente à $(\mathfrak{I})$ est parallèle à (AΓ) a pour abscisse x tel que : $2px = p(a+b)$, soit : $x = (a+b)/2$. B a donc même abscisse que Δ milieu de [AΓ]. Est-ce que ça vous étonne vraiment ?
Soit E le point d'intersection de (ΔB), qui est donc un diamètre de $(\mathfrak{I})$, et de la tangente à $(\mathfrak{I})$ en Γ.
Alors : $E(\,(a+b)/2\,,\ abp\,)$; or : $\Delta(\,(a+b)/2\,,\ p(a^2+b^2)/2\,)$.
Le milieu de [ΔE] a donc pour coordonnées $(\,(a+b)/2\,,\ p(a+b)^2/4\,)$. Nous reconnaissons les coordonnées de B qui est donc le milieu de [ΔE].

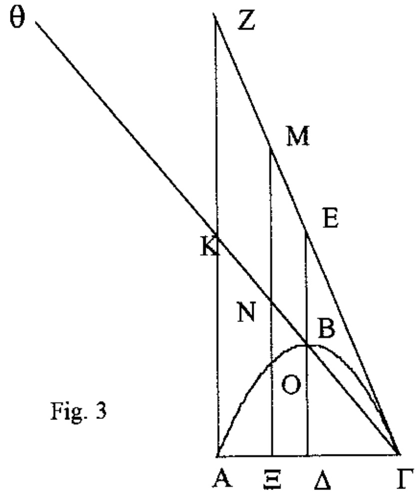


Fig. 3

On construit Θ tel que K soit le milieu de ΘΓ vu comme un levier de point d'appui K[22].

La méthode consiste à montrer que le segment ABΓ déplacé en Θ [23] équilibre, autour de K, le triangle AZΓ restant en place. On en déduira que :

$$\text{segment}(AB\Gamma) = \frac{1}{3}\text{triangle}(AZ\Gamma).$$

D'où le résultat par des considérations élémentaires sur les triangles ABΓ et AZΓ : en effet, l'aire du triangle AZΓ vaut le quadruple de celle du triangle ABΓ.

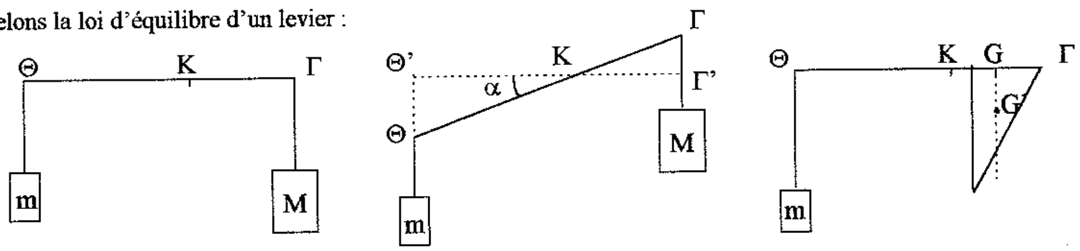
Soit MΞ une sécante parallèle à ΔE.

On a : $\dfrac{\Gamma A}{A\Xi} = \dfrac{M\Xi}{\Xi O}$ [24]. D'où : $\dfrac{M\Xi}{\Xi O} = \dfrac{\Theta K}{KN}$ car : $\dfrac{\Gamma A}{A\Xi} = \dfrac{\Gamma K}{KN}$ et : $\Gamma K = K\Theta$.

N étant le milieu de MΞ, il est le centre de gravité du segment MΞ donc, le segment OΞ déplacé de façon que Θ soit son milieu, équilibre par rapport à K, le segment MΞ restant en place[25]. Le même raisonnement s'appliquant à toutes les parallèles MΞ à EΔ, *"...toutes les parallèles à EΔ menées dans le*

---

[22] Rappelons la loi d'équilibre d'un levier :



Aux extrémités Θ et Γ du levier ΘΓ de point d'appui K, on suspend les masses m et M respectivement. Ce levier sera en équilibre si et seulement si : $\Theta K \times m = K\Gamma \times M$.
Cet équilibre est réalisé, que le levier soit horizontal ou non ; il est donc indifférent. En effet, en situation d'équilibre avec un bras non horizontal, on a : $m \times K\Theta' = M \times K\Gamma'$, donc : $m \times \Theta K \times \cos\alpha = M \times K\Gamma \times \cos\alpha$, d'où : $\Theta K \times m = K\Gamma \times M$.
Un solide S de masse M, accroché sur le bras de levier KΓ (Archimède utilisera des triangles, des trapèzes, etc...), a la même action sur ce levier que cette masse M suspendue au point G de KΓ qui est à l'aplomb de G' centre de gravité de S. Ainsi, pour équilibrer S, il faudra suspendre en Θ une masse m telle que : $m \times K\Theta = M \times KG$.

[23] "Le segment ABΓ déplacé en Θ" signifie que ce segment est déplacé de façon que son centre de gravité coïncide avec Θ, ou soit à l'aplomb de Θ.

[24] Car d'après la proposition 5 de *La Quadrature de la parabole* : $\dfrac{O\Xi}{OM} = \dfrac{A\Xi}{\Xi\Gamma}$, donc : $\dfrac{\Xi\Gamma}{A\Xi} = \dfrac{OM}{\Xi O}$ et on peut en déduire que : $\dfrac{(A\Xi + \Xi\Gamma)}{A\Xi} = \dfrac{(\Xi O + OM)}{\Xi O}$ soit : $\dfrac{A\Gamma}{A\Xi} = \dfrac{M\Xi}{\Xi O}$.

<u>Pour un élève de Terminale</u> : montrons que : $\dfrac{O\Xi}{OM} = \dfrac{A\Xi}{\Xi\Gamma}$; pour cela, reprenons parabole ($\mathfrak{I}$) de la note 20 et les mêmes points A et Γ. Soit Ξ le point de la corde [AΓ] d'abscisse α, O le point de ($\mathfrak{I}$) d'abscisse α et M le point d'intersection de la droite (ΞO) et de la tangente à ($\mathfrak{I}$) en Γ.

On a : $\Xi\,(\alpha,\ p(a+b)\alpha - abp)$, $O\,(\alpha,\ p\alpha^2)$, $M\,(\alpha,\ bp(2\alpha - b))$.

Si A'' et Γ'' ont même abscisse que A et Γ respectivement, et même ordonnée que Ξ, on peut écrire :

$$\frac{A\Xi}{\Xi\Gamma} = \frac{A''\Xi}{\Xi\Gamma''} = \frac{\alpha - a}{b - \alpha}.$$

Or : $\dfrac{O\Xi}{OM} = \dfrac{O\Xi}{MO} = \dfrac{p(a+b)\alpha - abp - p\alpha^2}{p\alpha^2 - 2pb\alpha + b^2 p} = \dfrac{(a-\alpha)(\alpha - b)}{(b-\alpha)^2} = \dfrac{\alpha - a}{b - \alpha}$. D'où le résultat.

triangle ZAΓ feront équilibre, en restant en place, aux segments, découpés d'eux par la parabole et transportés au point Θ de manière que le centre de gravité de la grandeur composée des uns et des autres soit le point K. Et du moment que le triangle ΓZA est constitué par les segments de droites menés dans le triangle ΓZA, et le segment ABΓ constitué par les segments de droites pris dans le segment (sc. de parabole) de la même manière que ΞO, le triangle ZAΓ fera équilibre, en restant en place, au segment de parabole placé autour du centre de gravité Θ, l'équilibre se faisant par rapport au point K, de façon que le centre de gravité de la somme des deux grandeurs soit le point K "[26]. La position du centre de gravité du triangle AZΓ étant connue (*Equilibre des Figures Planes I,* proposition 14 et *La Quadrature de la parabole, proposition 6*) on a

donc : $\dfrac{\text{segment(AB}\Gamma)}{\text{triangle(AZ}\Gamma)} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\Gamma K}{K\Theta} = \dfrac{1}{3}$.

2.2. Torricelli, Opera Geometrica, livre De dimensione parabolae, proposition 20

Avant de voir comment Archimède, dans *La Quadrature de la parabole,* utilise autrement l'idée des pesées pour fournir une démonstration qu'il pourra considérer comme satisfaisante (propositions 14 à 17), étudions une des 21 démonstrations données par Torricelli dans ses *Opera Geometrica,* livre *De dimensione parabolae.* Par ce texte il veut convaincre le lecteur que la méthode des indivisibles est la plus élégante et il établit :

Proposition 20 : " ***Une parabole est grande comme les 4/3 du triangle construit sur la même base et ayant la même hauteur.*** "[27]

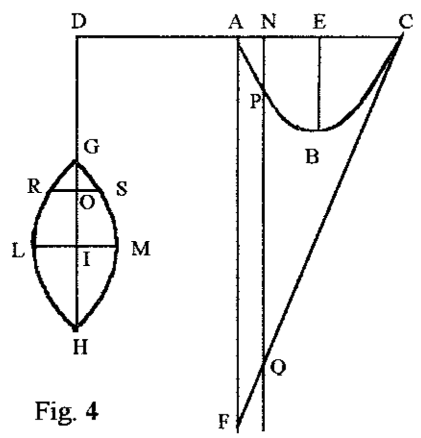


Fig. 4

Torricelli précise : *"Soit la parabole ABC, et supposons que son diamètre BE soit perpendiculaire à l'horizon..."*[28]

" Prolongeons CA jusqu'en D, de manière que CA égale AD ; et que DC soit une balance dont le point d'appui est en A."[29], écrit-il ensuite.

Il suspend sur DH, parallèle à EB, deux segments de parabole, GLH et GMH tels que :

LM = EB , IM = LI , GH = AC et IG = IH.

Le « ballon » GLHM ainsi obtenu a même aire que le segment ABC[30].

On prend : IO = NE, donc : NP = RS.

D'où : $\dfrac{QN}{RS}\ (= \dfrac{QN}{NP} = \dfrac{AC}{AN}) = \dfrac{DA}{AN}$.

[25] D'après ARCHIMEDE, *De l'Equilibre des Figures Planes I,* tome II, proposition 6 et proposition 7 (dans lesquelles on reconnaît ce que nous avons expliqué en note 22).

[26] ARCHIMEDE, tome III, pp. 87–88.

[27] Torricelli cité par De Gandt F., *L'œuvre de Torricelli, science galiléenne et Nouvelle géométrie,* p. 156.

[28] Ibid. p. 156.

[29] Ibid. p. 156.

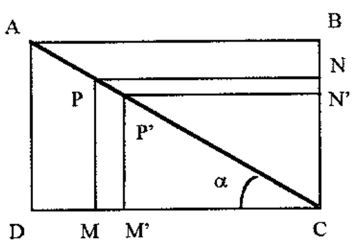
[30] Torricelli l'a établi dans un lemme précédent.

"Donc les droites QN et RS se font équilibre, et cela dans tous les cas. Donc toutes les lignes du triangle AFC prises ensemble (c'est-à-dire ce triangle lui-même) font équilibre à toutes les lignes de la figure GLHM prises ensemble (c'est-à-dire à cette figure GLHM elle-même)".[31]

D'où la conclusion puisque l'on connaît la position du centre de gravité du triangle AFC.

La méthode est exactement dans le même esprit que celle d'Archimède ; si le levier est différent, on a quand même effectué une pesée fictive de segments ; et si le « poids » qui équilibre le triangle AFC n'est plus le segment de parabole ABC, c'est une figure qui a la même aire ; la propriété de la parabole qui permet de conclure est la même que celle utilisée par Archimède ; Torricelli, comme Archimède, était encombré de deux inconnues dans ce problème : l'aire du segment de parabole et son centre de gravité. L'un et l'autre se débarrassent de la seconde : Archimède en choisissant un levier moins simple, mais sans toucher à la parabole, Torricelli en découpant la parabole en une surface équivalente, ayant l'avantage de présenter un axe de symétrie sur lequel est situé son centre de gravité, qui se trouve ainsi heureusement à l'aplomb d'une des extrémités du levier. Enfin Torricelli, comme Archimède, considère que "*toutes les lignes du triangle AFC prises ensemble*", c'est la même chose que le triangle AFC lui-même.

Ces raisonnements particulièrement élégants vous ont sans doute convaincus. Ils ne sont pourtant pas sans danger. En effet, que pensez-vous de la démonstration suivante ?



Dans le rectangle ABCD de diagonale AC, considérons les segments PM et PN. Quelle que soit la position de P sur le segment AC, PM < PN. Or les segments PM constituent le triangle ADC et les segments PN, le triangle ABC.

D'où : triangle(ADC) < triangle(ABC).

Ce qui est faux, bien sûr.

C'est parce que PM et PN n'ont pas la même inclinaison sur AC que le raisonnement est faux. Du fait de cette différence d'inclinaison, les trapèzes infinitésimaux PM et PN n'ont pas la même hauteur et donc leurs aires ne sont pas dans le même rapport de proportionnalité que leur bases (les deux bases de PN sont "presque égales" - son épaisseur étant infinitésimale - tout comme celles de PM).

$NN' = PP' \times \sin\alpha$ et : $MM' = PP' \times \cos\alpha$.

D'autre part : $PN = PC \times \cos\alpha$ et : $P'N' = P'C \times \cos\alpha$, enfin : $PM = PC \times \sin\alpha$ et : $P'M' = P'C \times \sin\alpha$.

Donc : $(PN+P'N') \times NN' = \cos\alpha \times (PC+P'C) \times PP' \times \sin\alpha = (PM+P'M') \times MM'$.

Les trapèzes PNN'P' et PMM'P' ont donc la même aire, aussi petites que soient leurs hauteurs.

2.3. Archimède, <u>La Quadrature de la parabole</u>, propositions 14 à 17 : une démonstration « rigoureuse » utilisant la mécanique

Dans *La Quadrature de la parabole*, Archimède résout le problème de deux façons différentes. Après

[31] Ibid. p. 157.

avoir établi dans les propositions 1 à 5 des résultats sur la parabole et, dans les propositions 6 à 13, différentes propriétés d'équilibre de triangles et de trapèzes, il passe, dans les propositions 14 à 17, à la démonstration proprement dite du théorème. La fin du traité est consacrée à établir le résultat uniquement « par la géométrie ».

a) Propositions 14 et 15 : on établit un encadrement

Archimède encadre le triangle BΔΓ par le triple d'aires de polygones, d'une part inscrits dans le segment de parabole, d'autre part le contenant, que BΓ soit perpendiculaire au diamètre de la parabole (proposition 14) ou non (proposition 15). Il utilise pour cela une méthode de pesées fictives de trapèzes et de triangles (voir Fig. 5).

BΓ est divisé "*en autant de segments partiels égaux qu'on voudra, soit BE, EZ, ZH, HI, IΓ*"[32].

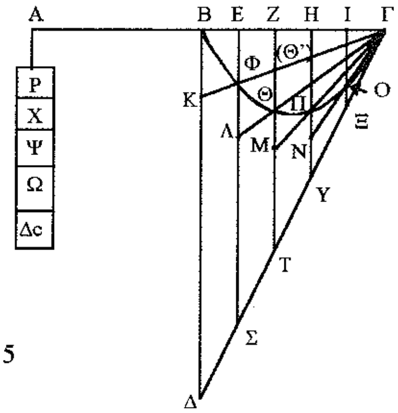


Fig. 5

<u>**N.B.** Le trapèze de diagonale KE sera noté [KE].</u>

Il s'agit d'établir que :

triangle(BΔΓ) < 3([KE]+[ΛZ]+[MH]+[NI]+triangle(IΞΓ))

et que :

3([ZΦ]+[HΘ]+[IΠ]+triangle(IOΓ)) < triangle(BΔΓ).

Archimède considère pour cela AΓ comme un levier de point d'appui son milieu B ; il y suspend le triangle BΔΓ d'un côté et, en A, les aires P, X, Ψ, Ω et Δc équilibrant respectivement [ΔE], [ZΣ], [TH], [YI] et le triangle ΞIΓ.

P+X+Ψ+Ω+Δc équilibre donc le triangle BΔΓ et, compte tenu de la loi d'équilibre d'un levier et de la position du centre de gravité d'un triangle :

$$\text{aire}(B\Delta\Gamma) = 3(P+X+\Psi+\Omega+\Delta c).$$

Sachant que[33] : $\dfrac{B\Gamma}{BE} = \dfrac{E\Sigma}{E\Phi} = \dfrac{BA}{BE}$,

on peut écrire [34] : $\dfrac{BA}{BE} = \dfrac{[\Delta E]}{[KE]}$.

Or P équilibre [ΔE] donc[35] : aire P < [KE]. **(a)**

---

[32] ARCHIMEDE, *La Quadrature de la parabole*, tome III, p. 178.

[33] Voir la note 24.

[34] En effet : $\dfrac{[\Delta E]}{[KE]} = \dfrac{E\Sigma + B\Delta}{E\Phi + BK}$ (car ces parallélogrammes ont la même hauteur). On a déjà : $\dfrac{E\Sigma}{E\Phi} = \dfrac{BA}{BE}$.

D'autre part : $\dfrac{E\Phi}{BK} = (\dfrac{E\Gamma}{B\Gamma} =) \dfrac{E\Sigma}{B\Delta}$. D'où : $\dfrac{B\Delta}{BK} = \dfrac{E\Sigma}{E\Phi} = \dfrac{BA}{BE}$. Donc : $\dfrac{[\Delta E]}{[KE]} = \dfrac{BA}{BE}$.

<u>**Pour un élève de Terminale**</u> : on rappelle que si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, alors : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$.

Ce résultat était connu des Grecs, et même sous une forme beaucoup plus générale ; en effet, une traduction moderne de la proposition V-1 des *Eléments* d'Euclide est :

Si pour tout i de [1,n], on a : $\dfrac{a_i}{b_i} = k$, alors : $\sum_{i=1}^{i=n} a_i / \sum_{i=1}^{i=n} b_i = k$.

[35] Ce résultat est établi explicitement dans la proposition 10 de *La Quadrature de la parabole.*

De même : $\frac{AB}{BZ} = \frac{[\Sigma Z]}{[\Lambda Z]}$ **(1)** et aussi : $\frac{[Z\Sigma]}{[Z\Phi]} = \frac{AB}{BE}$ [36] **(2).**

Or X équilibre $[Z\Sigma]$, donc[37] : $[Z\Phi] < X < [\Lambda Z]$ **(b)**

De même : $[\Theta H] < \Psi < [MH]$ **(c)**

$[\Pi I] < \Omega < [NI]$ **(d)**

triangle(ΓIO) $< \Delta c <$ triangle(ΞIΓ). **(e)**

Par addition des inégalités **(a)** à **(e)**, on a :

$[Z\Phi]+[\Theta H]+[\Pi I]+\text{triangle}(\Gamma IO) < P+X+\Psi+\Omega+\Delta c < [KE]+[\Lambda Z]+[MH]+[NI]+\text{triangle}(I\Xi\Gamma)$.

Or : $P+X+\Psi+\Omega+\Delta c = \frac{1}{3}\text{triangle}(B\Delta\Gamma)$. D'où le résultat.

N.B. Pour la proposition 15, Archimède ne fait pas la démonstration complète. Il se contente d'indiquer comment on peut se ramener à un raisonnement analogue.

b) Application à la résolution du problème posé : proposition 16

Dans la proposition 16, Archimède établit alors très classiquement, par la méthode apagogique, que :

$$\text{segment}(B\Gamma\Theta) = \frac{1}{3}\text{triangle}(B\Gamma\Delta).$$

N.B. Soit Z une aire égale à $\frac{1}{3}\text{triangle}(B\Gamma\Delta)$.

• <u>Si segment($B\Theta\Gamma$) > Z</u>

Soit n un entier tel que (segment($B\Theta\Gamma$) – Z)×n > triangle($B\Gamma\Delta$)[38].

En vous inspirant de la justification moderne du résultat un petit peu plus complexe étudié en note 37, vous pouvez établir cette propriété.

[36] Car : $\frac{[Z\Sigma]}{[Z\Phi]} = \frac{ZT+E\Sigma}{Z\Theta'+E\Phi}$. On a déjà : $\frac{E\Sigma}{E\Phi} = \frac{BA}{BE}$; on a aussi : $\frac{Z\Theta'}{E\Phi} = (\frac{Z\Gamma}{E\Gamma} =) \frac{ZT}{E\Sigma}$; d'où le résultat car $\frac{ZT}{Z\Theta'}$ est, lui aussi, égal à $\frac{E\Sigma}{E\Phi}$. (Remarquons que ce raisonnement est le même que celui fait en note 34).

[37] Ce résultat a été établi explicitement dans la proposition 12 de *La Quadrature de la parabole*.

On peut cependant en donner une justification moderne. Comme : $\frac{[Z\Sigma]}{[Z\Phi]} = \frac{AB}{BE}$ **(2)** et : $\frac{[Z\Sigma]}{[\Lambda Z]} = \frac{AB}{BZ}$ **(1)**, on a :

$BE\times[Z\Sigma] = AB\times[Z\Phi]$ **(2')** et : $BZ\times[Z\Sigma] = AB\times[\Lambda Z]$ **(1')**.
Or, X équilibre $[Z\Sigma]$, il existe donc L entre E et Z tel que : $BL\times[Z\Sigma] = AB\times X$ **(3)**.
Comme : BE < BL < BZ, on a : $BE\times[Z\Sigma] < BL\times[Z\Sigma] < BZ\times[Z\Sigma]$.
Donc : $AB\times[Z\Phi] < AB\times X < AB\times[\Lambda Z]$, d'où le résultat par simplification par AB.

[38] La proposition X-1 des *Eléments* d'Euclide établit :"*Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées*" (EUCLIDE, p. 258).
En fin de démonstration, il est d'ailleurs précisé :"*La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés*".
Explicitons cela en langage moderne, si a et b sont ces grandeurs avec : a > b, dans le cas où de a, puis de chaque reste, on retranche sa moitié. Les restes successifs seront : $\frac{a}{2}, \frac{a}{2^2}, \frac{a}{2^3}, \ldots \frac{a}{2^q}, \ldots$.. Il existera donc un entier q tel que : $\frac{a}{2^q} < b$.
En appliquant ceci à : a = triangle($B\Gamma\Delta$) et : b = segment($B\Theta\Gamma$)–Z, il suffit de choisir $n = 2^q$ pour réaliser l'inégalité souhaitée.

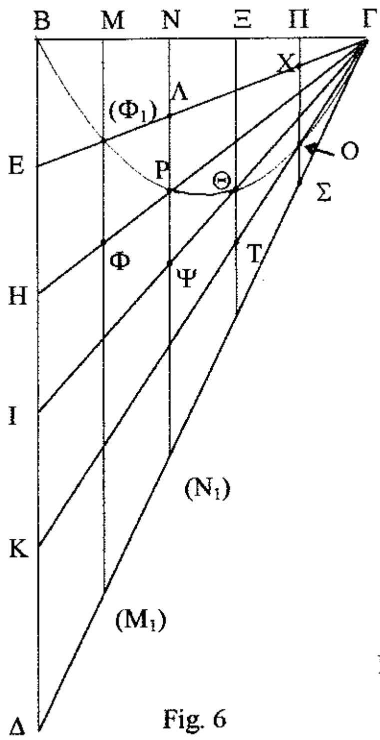


Fig. 6

Il est possible de choisir un triangle BΓE, rectangle en B, plus petit que la différence (segment(BΘΓ)-Z) et qui soit contenu un nombre entier de fois, k [39], dans le triangle BΔΓ. Alors BE sera, lui, contenu k fois dans BΔ. Divisons alors BΔ en k segments égaux à BE, par exemple BE, EH, HI, IK, et KΔ[40].

Par construction : segment(BΘΓ) – Z > triangle(BΓE).

Donc : triangle(BΓE) + Z < segment(BΘΓ).

Or : [ME] + [ΦΛ] + [ΘP] + [ΘO] + triangle(ΓOΣ) = triangle(BΓE)

car : [MΛ] = [ΦΛ] (E étant le milieu de BH, ces trapèzes ont des bases égales et même hauteur).

[ΛΞ] = [ΘP]

[XΞ] = [OΘ]

triangle(ΓOΣ) = triangle(ΓXΠ).

D'où : Z < segment(BΘΓ) – [ME] – [ΦΛ] – [ΘP] – [OΘ] – triangle(ΓOΣ)

à fortiori, Z < [MΛ] + [ΞP] + [ΘΠ] + triangle(ΠOΓ).

D'où, par définition de Z :

triangle(BΓΔ) < 3× ([MΛ] + [ΞP] + [ΘΠ] + triangle(ΠOΓ)) ,

Or, comme : BM = MN = NΞ = ΞΠ = ΠΓ, par application de la proposition 14, on a :

3× ([MΛ] + [ΞP] + [ΘΠ] + triangle(ΠOΓ)) < triangle(BΓΔ), d'où une contradiction.

- Si segment(BΘΓ) < Z

De la même façon, il est possible de trouver un triangle BΓE, tenant un nombre entier de fois, k par exemple, dans le triangle BΓΔ et tel que : triangle(BΓE) < Z – segment(BΘΓ) (< triangle(BΓΔ)).

On refait les constructions déjà faites dans la première partie de cette démonstration.

D'où : triangle(BΓE) + segment(BΘΓ) < Z = $\frac{1}{3}$triangle(BΔΓ)

< [EM] + [ΦN] + [ΨΞ] + [ΠT] + triangle(ΓΠΣ)[41].

Ainsi, triangle(BΓE) < [EM] + [ΦN] + [ΨΞ] + [ΠT] + triangle(ΓΠΣ) – segment(BΘΓ)

< [EM]+[ΦΛ]+[PΘ]+[OΘ]+triangle(ΓOΣ) = triangle(BΓE) d'où une contradiction.

Nous constatons que la méthode des pesées a été employée là pour établir une double inégalité qui sert ensuite à faire aboutir la méthode d'exhaustion.

---

[39] Voir note précédente. $k = n = 2^q$ convient.

[40] Le lecteur qui se référera aux textes des Belles Lettres remarquera que la figure 6 ci–dessus et la figure donnée p. 183 de *La Quadrature de la parabole,* ne sont pas les mêmes. Dans cette dernière, c'est BΓ qui est divisé en segments égaux, pas BΔ, alors que la suite de la démonstration utilise l'équidécoupage de BΔ.....et aussi celui de BΓ. C'est que les deux sont vrais et équivalents. En effet, d'après la proposition 5 de *La Quadrature de la parabole* : $\frac{BM}{B\Gamma} = \frac{M\Phi_1}{MM_1}$,

or : $\frac{M\Phi_1}{MM_1} = \frac{BE}{B\Delta}$. De même : $\frac{BN}{B\Gamma} = \frac{NP}{NN_1} = \frac{BH}{B\Delta} = 2\frac{BE}{B\Delta}$ donc : BN = 2BM.

N.B. On obtient ainsi une technique de construction point par point d'une parabole.

[41] Par application directe de la proposition 14.

3. La Méthode d'Archimède : différentes utilisations de l'idée de pesée

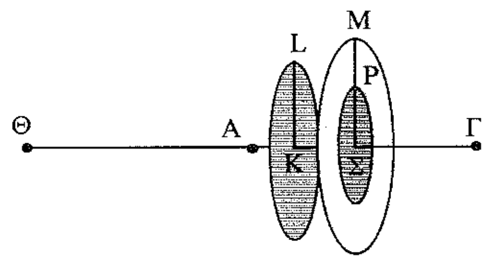
3.1. Les propositions établies

Les tableaux ci-dessous répertorient les propositions établies et, pour chacune d'elles, mentionnent leur parution dans les traités d'Archimède que nous connaissons ainsi que les principales idées utilisées pour les démontrer. Ils mettent clairement en évidence qu'il y a des traités d'Archimède qui ne nous sont pas (encore) parvenus.

Mise à part la proposition 1 qui concerne une figure plane et que nous avons déjà étudiée, les autres **s'appliquent à des figures de révolution définies à partir de coniques**[42]. Un des grands principes est d'établir sur une figure plane contenant l'axe de révolution $A\Gamma$ une relation du type :

$\frac{A\Theta}{A\Sigma} = \frac{\text{somme de carrés de segments}}{\text{somme de carrés de segments}}$, où : $A\Theta = A\Gamma$ et où les segments dont on prend le carré s'appuient orthogonalement sur $A\Gamma$, ceux figurant au numérateur coupant $A\Gamma$ en Σ.

Par exemple :



Les segments orthogonaux à $A\Gamma$ sont ici KL, ΣP et ΣM.
Ils vérifient :

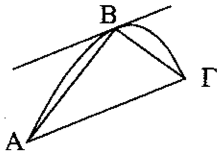
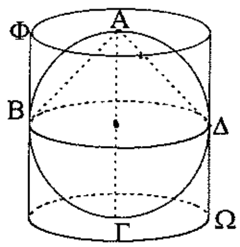
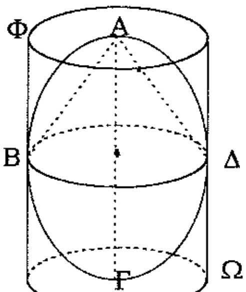
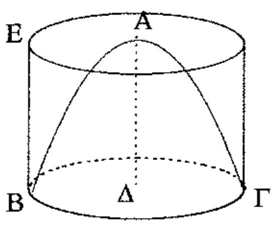
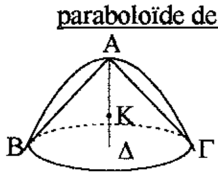
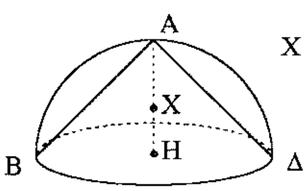
$$\frac{A\Theta}{A\Sigma} = \frac{\Sigma P^2 + \Sigma M^2}{KL^2}$$

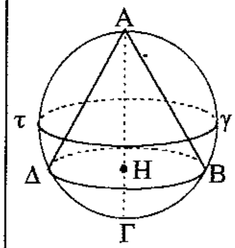
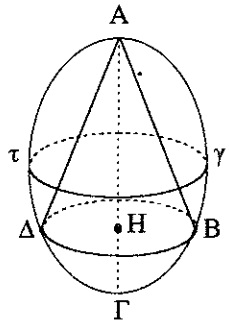
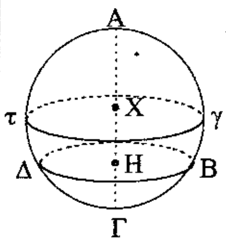
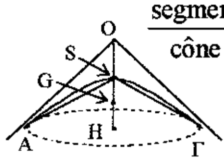
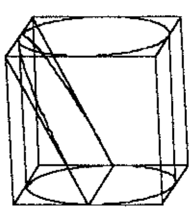
Par rotation autour de $A\Gamma$, ces segments engendrent des disques (Archimède dit "*des cercles*") ; l'aire d'un disque étant proportionnelle au carré de son rayon, on peut ensuite en déduire l'équilibre, autour de A, de disques déplacés en Θ (ceux dont le rayon figure au dénominateur), et de disques qui restent centrés en Σ (ceux dont le rayon est au numérateur).

Dans l'exemple de la figure ci-dessus, nous pourrons donc dire que le disque de diamètre KL, déplacé en Θ, équilibre autour de A les disques de diamètres ΣP et ΣM restant en place.

Les solides considérés dans les différentes propositions étudiées étant "*remplis par les cercles*" ainsi pris, Archimède en déduit des équilibres de solides autour de A ; d'où les résultats par application de lemmes et de propriétés établis antérieurement.

[42] La réunion de deux droites parallèles ou sécantes étant un cas de dégénérescence de coniques, on peut donc inclure sous ce vocabulaire toutes les situations étudiées.

Prop.	Résultat établi	parution antérieure	Méthode et idées principales
1	Quadrature de la parabole  segment ABΓ = $\frac{4}{3}$ triangle ABΓ	La quadrature de la parabole	• Méthode des pesées fictives segment à segment.
2	Volume de la sphère  sphère = 4 × cône ABΔ cylindre ΦΩ = $\frac{3}{2}$ Sphère	De la sphère et du cylindre Prop. I. 34 Corollaire Prop. I. 34	• Pesées fictives de disques dans 3 surfaces de révolution d'axe AΓ. • On connaît tous les centres de gravité ; on peut comparer les volumes.
3	Volume de l'ellipsoïde de révolution  cylindre ΦΩ = $\frac{3}{2}$ ellipsoïde $\frac{1}{2}$ ellipsoïde = 2 × cône ABΔ	Sur les conoïdes et les sphéroïdes Prop. 27	• Comme dans la proposition 2
4	Volume d'un segment de paraboloïde de révolution  BΓ ⊥ AΔ segment ABΓ = $\frac{3}{2}$ cône ABΓ	Sur les conoïdes et les sphéroïdes Prop. 21 (cas de révolution) Prop. 22 (cas général)	• AΘ = AΔ. • Pesées fictives de disques • On en déduit l'équilibre autour de A du cylindre EΓ et du paraboloïde (dont on ne connaît ni le volume, ni le centre de gravité) déplacé en Θ. On supprime ainsi une inconnue : le centre de gravité du paraboloïde.
5	Centre de gravité d'un segment de paraboloïde de révolution  K, tel que : KA = 2 KΔ		• AΘ = AΔ. • Le cône inscrit déplacé en Θ équilibre par rapport à A le paraboloïde restant en place. Tout est connu sauf le centre de gravité du paraboloïde.
6	Centre de gravité d'un hémisphère  X tel que : $\frac{AX}{XH} = \frac{5}{3}$		• AΘ = AH. • Le cône ABΔ déplacé en Θ équilibre par rapport à A l'hémisphère et le cône restant en place. • Introduction de masses fictives réunies équilibrant l'hémisphère et le cône restant en place. On se ramène à la résolution d'un problème linéaire à une seule inconnue : AX.

7	Volume segment de sphère / volume cône  $\dfrac{\text{segment } AB\Delta}{\text{cône } AB\Delta} = \dfrac{\frac{1}{2}A\Gamma + H\Gamma}{H\Gamma}$	De la sphère et du cylindre Prop. II.2	• $A\Theta = A\Gamma$. • Un cylindre connu restant en place équilibre autour de A le segment et un cône connu déplacés en Θ. De deux inconnues, volume et centre de gravité du segment, on se ramène à une seule, le volume du segment en le déplaçant en Θ.
8	Volume segment ellipsoïde / volume cône  $\dfrac{\text{segment } AB\Delta}{\text{cône } AB\Delta} = \dfrac{\frac{1}{2}A\Gamma + H\Gamma}{H\Gamma}$	Sur les conoïdes et les sphéroïdes Prop. 29 et 31 N.B. Prop. 30 et 32 montrent que le résultat reste vrai lorsque les axes sont inclinés.	• Démonstration non faite : « *De la même manière ...* »
9	Centre de gravité d'un segment de sphère  le point X tel que : $\dfrac{AX}{XH} = \dfrac{AH + 4H\Gamma}{AH + 2H\Gamma}$		• $A\Theta = A\Gamma$. • On équilibre autour de A le cône ABΔ déplacé en Θ par le segment et le même cône restant en place. On a donc une équation linéaire du 1er degré à une inconnue : le centre de gravité du segment.
10	Même chose pour un segment d'ellipsoïde		• Démonstration non faite.
11	Volume hyperboloïde de révolution / volume cône $\dfrac{\text{segment } AS\Gamma}{\text{cône } AS\Gamma} = \dfrac{SH + 3OS}{SH + 2OS}$  Centre de gravité G d'un segment d'hyperboloïde $\dfrac{SG}{GH} = \dfrac{3SH + 8OS}{SH + 4OS}$	Sur les conoïdes et les sphéroïdes Prop. 25	• Démonstration non faite.
12 13 14 15	Démonstration du théorème 1 : volume de l'onglet cylindrique  onglet = $\dfrac{1}{6}$ cube		Il « fait voir » 12, 13 • Méthode de pesées fictives. • Un astucieux changement de poids permet de remplacer une équation à deux inconnues par une équation à une seule inconnue. 14 • Méthode des indivisibles (sans pesées). 15 • Démonstration par « la géométrie ».

L'examen des méthodes d'investigation montre que, souvent, un problème à deux inconnues – volume et centre de gravité – se ramène, par déplacement de la bonne figure en Θ, extrémité d'un bras de levier, à un problème à une seule inconnue. Mais il y a parfois plus d'inconnues et le problème se complique. Les propositions 6 et 12-13 sont particulièrement intéressantes pour voir comment Archimède gère alors la difficulté.

Dans la proposition 6, l'introduction de masses fictives réunies, équilibrant respectivement l'hémisphère et le cône restant en place, ramène le problème à la résolution d'un problème linéaire à une seule inconnue AX, X étant le centre de gravité de l'hémisphère.

Dans les propositions 12 et 13, un astucieux changement de poids lui permet de se tirer d'affaire.

3.2. La Méthode proposition 6 : centre de gravité d'un hémisphère (voir document 3)

"Dans tout hémisphère, le centre de gravité est situé sur son axe, en un point qui divise l'axe de manière que le rapport de la partie située du côté de la surface de l'hémisphère à la partie restante soit égal au rapport de cinq à trois."[43]

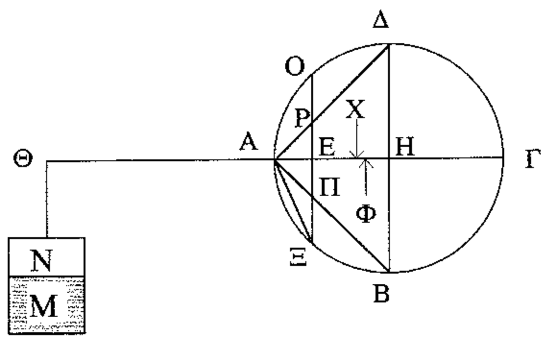


Fig. 7-a

Remarquons que la figure ci–dessus n'est pas exactement celle de la page 102 du document 3, soit :

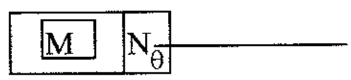


Fig. 7-b

Nous verrons pourquoi en cours de démonstration.

La figure 7-a représente la section de la sphère par un plan passant par son centre.

Archimède introduit le cône ayant pour sommet A et pour base droite le cercle de diamètre BΔ situé dans le plan orthogonal à AΓ contenant BΔ. Il considère ΘΓ comme un levier ayant pour point d'appui son milieu A.

ΞO est un segment parallèle à BΔ qui coupe le demi-cercle BAΔ en Ξ et O, AΓ en E, AB en Π et AΔ en P.

Par rotation d'axe AΓ, ΞO engendre un disque de l'hémisphère et ΠP un disque du cône.

---

[43] ARCHIMEDE, tome III, p. 102.

Alors : $\dfrac{A\Theta}{AE} = \dfrac{\Xi E^2 + E\Pi^2}{E\Pi^2} \overset{44}{=} \dfrac{\text{cercle de diamètre } \Xi O + \text{cercle de diamètre } \Pi P}{\text{cercle de diamètre } \Pi P}$.

"Il s'ensuit que la somme des deux cercles de diamètres ΞO et ΠP, restant en place, fera équilibre autour du point A au cercle de diamètre ΠP, déplacé et posé au point Θ de manière que Θ soit son centre de gravité."[45] *"Dès lors, l'hémisphère et le cône étant remplis par les cercles, tous les cercles dans l'hémisphère et dans le cône, restant en place, feront équilibre autour du point A à tous les cercles dans le cône, déplacés et posés au point Θ du levier de manière que leur centre de gravité soit Θ;"*[46]

Donc, le cône ABΔ déplacé en Θ équilibre par rapport à A le cône et la demi sphère qui restent en place.

Une **idée nouvelle** consiste à remplacer le cône ABΔ déplacé en Θ par un cylindre équivalent, MN, suspendu en Θ, ce cylindre étant fictivement coupé par un plan perpendiculaire à son axe en deux parties M et N équilibrant respectivement le cône ABΔ et l'hémisphère[47].

Soit $\Phi \in AH$ tel que : $A\Phi = 3\Phi H$. Donc par application du lemme 10 (cf. document 1), Φ est le centre de gravité du cône.

N.B. Ce qui suit reproduit fidèlement le raisonnement d'Archimède.

On construit $X \in AH$ tel que : $\dfrac{AH}{AX} = \dfrac{8}{5}$.

Or, M équilibre le cône ABΔ ; donc : $\dfrac{M}{\text{cône}} = \dfrac{\Phi A}{A\Theta} = \dfrac{3}{8}$ (car : $A\Theta = A\Gamma$).

Or : cône = M+N ; donc : $\dfrac{M+N}{M} = \dfrac{8}{3}$; d'où : $\dfrac{N}{M+N} = \dfrac{5}{8}$. Ainsi : $\dfrac{\text{cône}}{N} = \dfrac{8}{5} = \dfrac{AH}{AX}$ **(a)**.

Or, (d'après la proposition 2 de *La Méthode*) : $\dfrac{\text{sphère}}{\text{cône}} = 4$, donc : $\dfrac{\text{hémisphère}}{\text{cône}(AB\Delta)} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{A\Theta}{AH}$ **(b)**.

En conséquence (par produit de **(a)** et de **(b)**) : $\dfrac{\text{hémisphère}}{N} = \dfrac{A\Theta}{AX}$.

Comme par construction N suspendu en Θ équilibre l'hémisphère par rapport à A, X est bien le centre de gravité de l'hémisphère.

N.B. On peut regretter que les canons de la démonstration grecque imposent de ne livrer que la synthèse d'une étude. On choisit ici un point X satisfaisant à une condition miraculeuse puisque, justement, on peut établir que c'est bien le point cherché. Alors qu'en appelant Y le centre de gravité de l'hémisphère, indéterminé sur le segment AH, on pourrait, en suivant exactement la même démarche, aboutir au résultat qui prend alors un caractère plus accessible. **Remarquons qu'en fait, considérer cette masse M est équivalent à une soustraction mais l'évite.**

---

44 Les triangles AΞΓ et AEΞ étant semblables : $\dfrac{A\Gamma}{A\Xi} = \dfrac{A\Xi}{AE}$, donc : $\dfrac{A\Gamma}{AE} = \dfrac{A\Xi^2}{AE^2}$. Or : $A\Xi^2 = E\Xi^2 + AE^2$ et : $AE = E\Pi$, donc : $\dfrac{A\Gamma}{AE} = \dfrac{\Xi E^2 + E\Pi^2}{E\Pi^2}$. D'où le résultat car : $A\Gamma = A\Theta$.

45 Ibid, pp. 103-104.

46 Ibid, p. 104.

3.3. La Méthode propositions 12 et 13 : une substitution de poids

Dans ces propositions, Archimède va, selon ses termes, "*faire voir*"[48] que le théorème que nous avons noté théorème 1 – relatif au volume de l'onglet cylindrique – est vrai, avant d'en faire une démonstration par la méthode d'exhaustion en proposition 15. La proposition 14 établit aussi le résultat ; autrement comme nous le verrons en ***4***.

a) Proposition 12.

La rédaction est un peu différente de celle des propositions précédentes : Archimède décrit une figure, développe un raisonnement et il faut attendre les dernières lignes pour savoir où il voulait en venir. C'est une démonstration qui paraît plus spontanée : par exemple, il ne considère un levier qu'au moment où il s'avère utile dans la réflexion.

La figure 8-a n'est pas dans le texte original, mais j'y ai condensé la description de plus d'une page des constructions faites et des notations utilisées.

N.B. : Dans le texte original, N est employé deux fois en des sens différents, c'est pourquoi, afin d'éviter toute confusion, le N archimédien de la figure 8-b sera remplacé par N'.

D'autre part, le lecteur qui se référera aux textes remarquera que, en fait : I = X, E = Π et Z = Ξ. Comme nous l'avons vu, Archimède ne donne aucune représentation spatiale des figures et on peut penser qu'une telle double notation permettait de savoir dans quelle coupe ces différents points étaient considérés ; à moins qu'il ne s'agisse d'une modification apportée par un copiste dans le but de faciliter la lecture. Car on comprend mal que le Grand Archimède, si précis dans la description des figures et dans les raisonnements, fasse cela sans le dire, ni établir que ces points sont les mêmes. Mais je raisonne là en lecteur du XX^e^ siècle. Peut-être y a-t-il une tout autre explication (et pourquoi pas plusieurs), liée à la pratique des raisonnements de géométrie dans l'espace à l'époque d'Archimède et que je ne soupçonne pas, n'ayant pas une habitude suffisante de cette culture.

On peut se demander quand des figures ont été pour la première fois représentées en perspective dans les traités mathématiques. On en trouve dans les livres XI, XII et XIII des *Eléments* d'Euclide. Mais on ne peut être certains qu'elles aient été ainsi dans les textes originaux. En effet, comme nous l'avons vu par exemple pour *La Méthode*, ce traité ne nous est parvenu que grâce à une transcription faite au X^e^ siècle ; et il a dû y en avoir d'autres entre celle-là et l'écrit du Maître. Si à chacune de ces copies le texte court le risque d'être modifié, ce risque est plus grand encore pour les figures. Cependant, à l'époque d'Archimède et même d'Euclide, on connaissait déjà des règles de représentation en perspective comme l'atteste Vitruve (1^er^ siècle av. J.-C.) : *« C'est ainsi qu'Agatharcus ayant été instruit par Eschyle, à Athènes, de la manière de faire les décorations de théâtres pour les tragédies, il fit le premier un livre sur l'art de les peindre ; il apprit ensuite ce qu'il en savait à Démocrite et à Anaxagore, qui ont aussi écrit sur ce sujet, et principalement sur l'artifice au moyen duquel on pouvait, en plaçant un point en un certain lieu, imiter si bien la disposition naturelle des*

---

[47] La suite du texte prouve que la figure 7-b ne convient pas : pour pouvoir appliquer les formules qui vont suivre, il faut que Θ soit à l'aplomb du centre de gravité de M <u>et</u> de celui de N ce qui est bien le cas avec la figure 7-a.

[48] Ibid, p. 114.

lignes qui sortent des yeux en s'élargissant, que, bien que cette disposition des lignes soit une chose qui nous est inconnue, on parvenait à faire illusion et à représenter fort bien les édifices dans les perspectives que l'on peignait sur la scène, où ce qui est peint seulement sur une surface plate paraît être rapproché en de certains endroits, et être plus éloigné dans d'autres ».[49]

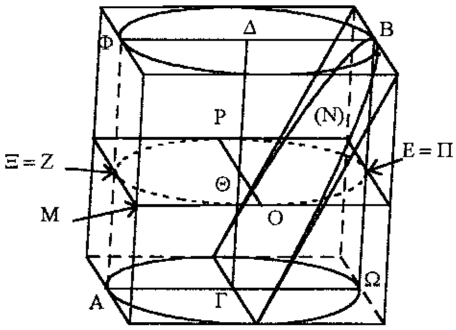


Fig. 8-a

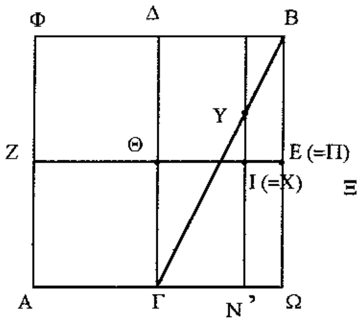


Fig. 8-b

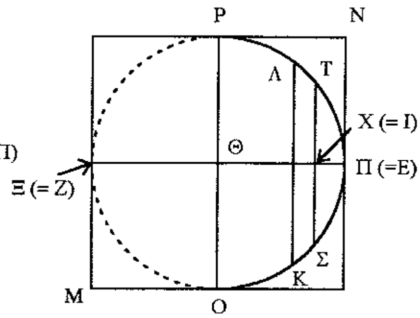


Fig. 8-c

Θ est le milieu de $A\Gamma$, axe commun au cube et au cylindre.

On coupe le demi-cylindre de section droite OEP par un plan vertical (Π) parallèle à son axe et parallèle à OP. La trace dans le plan OEP de l'intersection de ce plan (Π) avec le demi-cylindre (voir Fig. 8-c), est ΣT ; (Π) coupe donc :

- le demi-cylindre suivant le rectangle de base ΣT et de hauteur $B\Omega$.
- l'onglet suivant le rectangle de même base ΣT et de hauteur YN' (voir Fig. 8-b).

On a donc :

$$\frac{E\Theta}{\Theta I} = \frac{\Omega\Gamma}{\Gamma N'} = \frac{B\Omega}{YN'} = \frac{\text{rectangle découpé du cylindre}}{\text{rectangle découpé de l'onglet}}.$$

$$\text{Or : } E\Theta = \Theta\Xi \text{ donc : } \frac{\Theta\Xi}{\Theta I} = \frac{\text{rectangle découpé du cylindre}}{\text{rectangle découpé de l'onglet}}.$$

Donc, le rectangle du demi-cylindre, de centre de gravité X (= I), restant en place, est équilibré autour de Θ, par le rectangle de l'onglet déplacé en Ξ.

En conséquence, le demi-cylindre, restant en place, est équilibré autour de Θ par l'onglet déplacé en Ξ.

Archimède s'est ainsi débarrassé d'une des inconnues du système : le centre de gravité de l'onglet. Mais il lui en reste encore trop pour pouvoir conclure : le centre de gravité du demi-cylindre, le volume de l'onglet, le volume du demi-cylindre. Il va régler le problème en proposition 13 par une substitution de poids.

---

[49] VITRUVE, *Les dix livres d'architecture*, p. 212.
Eschyle (vers 525–456 av. J.–C.) poète tragique grec.
Agatharcus (Ve siècle av. J.–C.) peintre grec qui fit des décors de théâtre pour Eschyle.
Démocrite (vers 460–370 av. J.–C.) philosophe grec qui avait beaucoup voyagé et en particulier passé cinq ans près des géomètres égyptiens.
Vitruve (1er siècle av. J.–C.) architecte romain.

b) Proposition 13

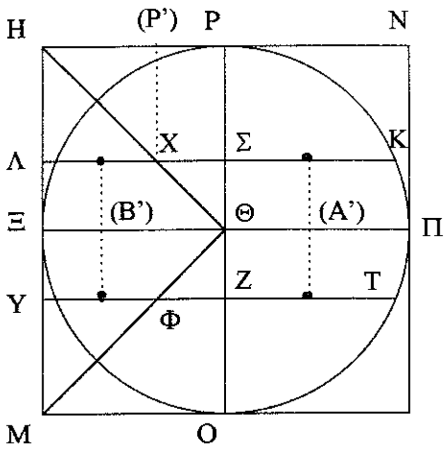


Fig. 9

N.B. J'ai conservé les notations du texte archimédien ; on revient à la même coupe que celle faite à la figure 8-c (N retrouve la signification qu'il avait au départ et n'est donc pas à confondre avec le point que nous avons noté N') ; mais les lettres Λ, X, Σ, K, T, Z, Φ ont une autre signification que celle qu'elles ont eue jusqu'à présent.

L'idée est d'équilibrer, autour de Θ, le demi-cylindre par le prisme triangulaire ayant pour base droite HΘM et pour hauteur celle du cube ; ce prisme triangulaire, substitué au demi-cylindre dans l'équilibre précédent (proposition 12), permet d'obtenir un système qui n'a plus qu'une seule inconnue : le volume de l'onglet cylindrique. En effet, si le volume et le centre de gravité de l'hémisphère sont inconnus, ceux du prisme triangulaire sont connus.

Des plans orthogonaux à PO rencontrent cette droite en deux points Σ et Z symétriques par rapport à Θ et découpent :

- dans le prisme triangulaire, des rectangles ayant pour bases ΛX et YΦ, pour hauteur celle du cylindre et que nous noterons, nous, {ΛX} et {YΦ}.
- dans le demi-cylindre, deux rectangles ayant pour bases ΣK et ZT et pour hauteur celle du cylindre.

Le manuscrit s'arrête là. En notes, C. Mugler donne la reconstitution « à la manière de...» proposée par Heiberg. La description de la figure faite par Archimède permet cependant de penser que cette « suite » est tout à fait « légitime » car elle est fidèle à l'esprit du début.

Heiberg considère deux points A' et B' qui ne sont pas sur la figure originale et que je note pour cette raison (A'), (B'). A' est à l'intersection de ΘΠ et du segment d'extrémités les milieux des segments ΣK et ZT ; A' est donc le centre de gravité de l'ensemble des rectangles {ΣK} et {ZT}. De même, B' est le centre de gravité de l'ensemble des rectangles {ΛX} et {YΦ}.

On a : ΛX = YΦ et : ΣK = ZT ; de plus les parallélogrammes considérés ont même hauteur,

d'où : $$\frac{\{\Sigma K\}+\{ZT\}}{\{X\Lambda\}+\{Y\Phi\}} = \frac{\Sigma K}{\Lambda X} = \frac{\Sigma K}{\Sigma P} \overset{[50]}{=} \frac{\Sigma K^2}{\Sigma P \times \Sigma K} = \frac{\Sigma P \times \Sigma O}{\Sigma P \times \Sigma K} \overset{[51]}{=} \frac{\Sigma O}{\Sigma K}$$

$$= \frac{\Sigma P + 2\Sigma\Theta}{\Sigma K} = \frac{\Lambda X + 2X\Sigma}{\Sigma K} = \frac{\frac{1}{2}\Lambda X + X\Sigma}{\frac{1}{2}\Sigma K} = \frac{\Theta B'}{\Theta A'}.$$

[50] ΛX = XP' = ΣP, HX étant une diagonale du carré ΛXP'H.

[51] Le triangle PKO est rectangle en K, de hauteur KΣ, donc : $\Sigma K^2 = \Sigma P \times \Sigma O$.

Comme B' est le centre de gravité de {ΛX}+{YΦ} et A' celui de {ΣK}+{ZT}, que l'ensemble de ces rectangles constituent respectivement le prisme triangulaire et le demi-cylindre, c'est donc que ce prisme triangulaire équilibre l'hémisphère autour de Θ.

On a alors : onglet $\times$ ΘΞ = $\frac{2}{3}$ ΘΠ $\times$ prisme triangulaire = $\frac{2}{3}$ ΘΠ $\times$ $\frac{1}{4}$ cube.

D'où : onglet = $\frac{1}{6}$ cube, car : ΘΞ = ΘΠ.

N.B. On ne peut qu'admirer l'astucieuse utilisation de la symétrie de la figure.

4. <u>La Méthode</u>, proposition 14 : il n'est plus question de pesées ; l'idée est celle de la méthode des indivisibles

Cette nouvelle démonstration est un tout, indépendant de ce qui précède et d'une expression parfaitement claire pour un lecteur moderne.

Il n'y est plus question de pesée avec leviers matérialisés ; un pas conceptuel de plus est franchi. Il s'agit bel et bien de la méthode des indivisibles : parce que chaque plan d'une même famille de plans parallèles découpe dans deux volumes V_1 et V_2 des surfaces S_1 et S_2 d'une part, et dans deux figures planes P_1 et P_2 des segments s_1 et s_2 d'autre part, satisfaisant à la relation : $\frac{S_1}{S_2} = \frac{s_1}{s_2}$, Archimède en déduira que : $\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_1}{P_2}$.

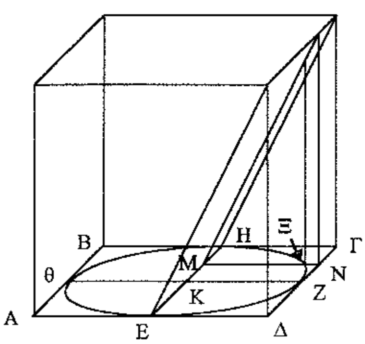


Fig. 10-a

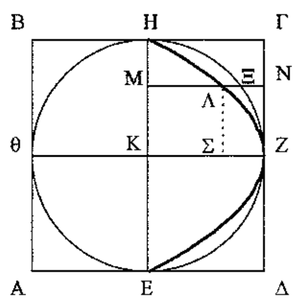


Fig. 10-b

Le plan déterminé par EH et le côté du cube à l'aplomb de ΔΓ découpe :

- dans le prisme entier, un prisme qui en est le quart.
- dans le cylindre, l'onglet qui nous occupe.

Archimède construit la parabole qui passe par les points H, Z et E.
Une droite MN parallèle à KZ coupe cette parabole en Λ et le cercle en Ξ.

Par propriétés de la parabole, on a : $MN \times N\Lambda = NZ^2$ [52] **(a)** et : $\frac{MN}{N\Lambda} = \frac{KH^2}{\Lambda\Sigma^2}$ [53] **(b)**.

[52] Cf. Apollonius, I, 11.

<u>Pour un élève de Terminale</u> : dans le repère orthonormé $(Z, \overrightarrow{Z\Gamma}, \overrightarrow{ZK})$, cette parabole admet pour équation : $y = x^2$.
Alors : MN = 1, et, x étant l'abscisse de N : $N\Lambda = x^2$ et : $NZ = x$, d'où : $MN \times N\Lambda = NZ^2$.

Le plan orthogonal à ΑΒΓΔ, contenant MN, coupe :

- le prisme triangulaire suivant un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est MN et l'autre la hauteur du prisme ;
- l'onglet suivant un autre triangle rectangle, semblable au précédent, dont un côté de l'angle droit est MΞ.

On a donc : $\dfrac{\text{triangle du prisme}}{\text{triangle de l'onglet}} = \dfrac{MN^2}{M\Xi^2}$ [54]

Comme : $MN \times M\Lambda = M\Xi^2$ (c)[55], $\dfrac{MN}{M\Lambda} = \dfrac{MN^2}{M\Xi^2}$.

D'où : $\dfrac{\text{triangle du prisme}}{\text{triangle de l'onglet}} = \dfrac{MN}{M\Lambda}$.

Cette relation étant satisfaite quelle que soit la position de la parallèle MN à KZ, Archimède en déduit : "*le rapport de tous les triangles contenus dans le prisme à tous les triangles contenus dans le segment découpé du cylindre sera égal au rapport de toutes les droites dans le parallélogramme ΔH à toutes les droites interceptées entre la parabole et la droite EH*"[56].

D'où par le raisonnement habituel : $\dfrac{\text{prisme}}{\text{onglet}} = \dfrac{[\Delta H]}{\text{parabole}} = \dfrac{3}{2}$.

Archimède en conclut le résultat, le prisme étant le quart du cube.

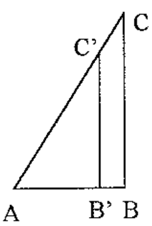
Enfin, en proposition 15, il met en rigueur l'idée exploitée en proposition 14 en encadrant le paraboloïde droit et l'onglet par des volumes réunion de parallélépipèdes rectangles ; la différence de ces volumes majorant et minorant pouvant être rendue aussi petite qu'on le voudra, la méthode d'exhaustion permettra de conclure.

---

53 1) Vous pouvez le vérifier en utilisant le repère de la note précédente.
2) C'est un résultat qui découle directement de la proposition 3 de *La Quadrature de la parabole*.
3) Vous pouvez aussi remarquer que : $\dfrac{MN}{N\Lambda} = \dfrac{MN^2}{M\Lambda \times MN} = \dfrac{MN^2}{NZ^2} = \dfrac{KH^2}{\Lambda\Sigma^2}$.

Et c'est probablement ce raisonnement qu'a fait Archimède car il écrit : "*Il est manifeste que le rectangle de côtés MN et NΛ est équivalent au carré sur NZ ; dans ces conditions, MN sera à NΛ comme le carré sur KH est au carré sur ΛΣ*" (ARCHIMEDE , tome III, p. 120).

54



Les triangles ABC et AB'C' sont semblables, on peut donc écrire : $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AB}{AB'}$, d'où :

$$\frac{\text{triangle(ABC)}}{\text{triangle(AB'C')}} = \frac{AB \times BC}{AB' \times B'C'} = \frac{AB^2}{AB'^2}.$$

55 Archimède écrit que ce résultat **(c)** "*est évident*" (ARCHIMEDE , tome III, p. 120).
Nous avons déjà vu que : $M\Xi^2 = MH \times ME$, donc : $M\Xi^2 = (HK-KM)\times(KE+KM) = HK^2 - KM^2$
$= HK^2 - NZ^2 = MN^2 - MN \times N\Lambda$ (en utilisant **(a)**)
$= MN \times (MN - N\Lambda) = MN \times M\Lambda$.

Comme : $\dfrac{MN}{M\Lambda} = \dfrac{MN \times MN}{M\Lambda \times MN}$, on a donc : $\dfrac{MN}{M\Lambda} = \dfrac{MN^2}{M\Xi^2}$.

56 ARCHIMEDE, tome III, p. 121.

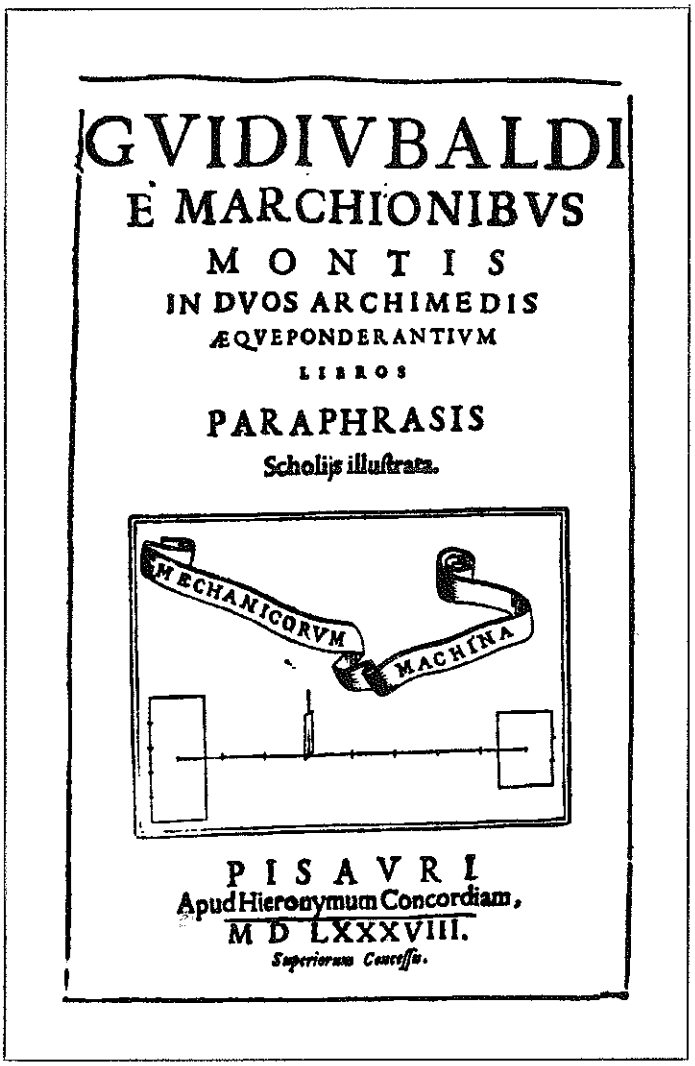
Conclusion :

Nous avons là une pensée qui paraît étrangement moderne et une magnifique illustration de la variété du génie archimédien.

Soulignons la double innovation, qui est aussi une double rupture avec la façon de penser de ses contemporains (ce qui explique peut-être en partie la rédaction tardive de *La Méthode*) :

– oser dire qu'une surface peut être considérée comme une totalité de lignes qui la composent, ce qui interroge sur la nature du continu ;

– appliquer à un domaine qui appartient au monde des idées - la géométrie - une méthode concrète, issue de l'expérimentation mécanique.



GVIDIVBALDI
E MARCHIONIBVS
MONTIS
IN DVOS ARCHIMEDIS
ÆQVEPONDERANTIVM
LIBROS
PARAPHRASIS
Scholijs illustrata.

PISAVRI
Apud Hieronymum Concordiam,
M D LXXXVIII.
Superiorum Concessu.

ARCHIMEDES PHILOSOPHE
Grec. Chap. 23.

CE grãd Geometrien & treſ-ſubtil inuenteur Archimede, duquel ie repreſente icy le naturel pourtraict, que i'ay apporté de Sicile faict en bronze, cõme vne grande medalle, que l'on trouue au fondemẽt des villes fondées par les Ceſars Romains, a eſté ſi excellent en ſon aage, que tous les hiſtoriẽs Grecs & Latins ne ſe trouuerent iamais las ne ennuyez de ſes ſubtiles inuentions, ſciences & graces.

A. Thevet, *Vrais portraits et vies des hommes illustres, grecs, latins et païens...*,livre II 1584, p. 46.

BIBLIOGRAPHIE

ARCHIMEDE, T.II, *La Quadrature de la parabole*, T.III, *La Méthode*, texte établi par C. Mugler, Les Belles Lettres, collection G. Budé, Paris, 1971.

"Archimède", *Les Cahiers de Science & Vie*, collection Les Pères Fondateurs de la Science, hors série n°18, Excelsior Publications, Paris, déc. 1993.

CAJORI, *A History of Mathematical Notations,* The Open Court Publishing Company, LA SALLE . ILLINOIS, (s.d.).

CARREGA J. C. , *Théorie des corps, La règle et le compas,* Herman, collection Formation des enseignants et formation continue, Paris, 1981.

COLLETTE, *Histoire des Mathématiques* T.I, Vuibert, Editions du Renouveau Pédagogique, Ottawa, Canada, 1973.

De GANDT F. , *L'œuvre de Torricelli, science galiléenne et Nouvelle Géométrie,* Publication de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de Nice, Nice, 1989.

EUCLIDE, *Les Œuvres d'Euclide*, traduction de F. Peyrard, Librairie A. Blanchard, Paris, réédition de 1993.

GROUPE M. :A. T.H. , d'après un travail de Marie–Françoise JOZEAU , *« De la méthode par exhaustion »* , *Mnémosyne*, n°1 (avril 1992).

GROUPE M. :A. T.H. , rubrique *Bonnes vieilles pages, Mnémosyne*, n°3 (avril 1993).

Le GOFF J.P., *« De la méthode dite d'exhaustion : Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) »', in La démonstration mathématique dans l'histoire,* INTER-IREM HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES, Actes du 7ème colloque les 12 et 13 mai 1989, IREM de Besançon et IREM de Lyon, 1989, pp. 196-220.

VITRUVE, *Les dix livres d'architecture,* éd. Balland, 1979.

DOCUMENT 1 Extrait de ARCHIMEDE, *La Méthode*, texte établi par C. Mugler, Les Belles Lettres, collection G. Budé, Paris, 1971.

LA MÉTHODE D'ARCHIMÈDE RELATIVE AUX PROPOSITIONS MÉCANIQUES, A ÉRATOSTHÈNE

Archimède à Ératosthène, prospérité !

Je t'ai envoyé antérieurement certains théorèmes que j'avais découverts, en me bornant à en rédiger les énoncés et en t'invitant à trouver les démonstrations que je n'avais pas encore indiquées ; les énoncés des théorèmes envoyés étaient les suivants ; premièrement : si on inscrit dans un prisme droit, ayant pour base un parallélogramme[1], un cylindre ayant ses bases situées dans les parallélogrammes[1] opposés et (sc. certaines de) ses génératrices dans les plans restants du prisme[2], et si on mène un plan par le centre du cercle de base du cylindre et par un des côtés du carré situé dans le plan opposé, le plan ainsi mené découpera du cylindre un segment compris entre deux plans et la surface du cylindre, l'un des plans étant le plan mené, l'autre celui qui contient la base du cylindre, et la surface (sc. cylindrique) étant comprise entre les plans indiqués, et le segment découpé du cylindre est équivalent à la sixième partie du prisme entier. L'énoncé du second théorème était le suivant : si on inscrit dans un cube un cylindre ayant ses bases situées dans des parallélogrammes[1] opposés, et sa surface tangente aux quatre plans restants, et si on inscrit dans le même cube un autre cylindre, ayant ses bases dans deux autres parallélogrammes et sa surface tangente aux quatre plans restants, la figure comprise entre les surfaces des cylindres et située à l'intérieur des deux cylindres est équivalente aux deux tiers du cube entier. Mais ces théorèmes diffèrent de ceux qui ont été trouvés antérieurement ; car dans ceux-là nous avons comparé les volumes de figures, comme les paraboloïdes, les hyperboloïdes et les ellipsoïdes de révolution, et les segments de ces figures, à des volumes de cônes et de cylindres, mais aucune de ces figures n'a été trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans, alors que chacune de ces figures, comprises entre deux plans et des surfaces cylindriques, est trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans.

1. Le contexte montre qu'il s'agit d'un carré.
2. Le cylindre est donc tangent aux quatre faces du prisme.

Ce sont donc les démonstrations de ces théorèmes que je t'envoie, rédigées dans ce livre.

M'apercevant, comme je l'ai déjà dit, que tu es studieux, que tu domines d'une manière remarquable les questions de philosophie et que tu sais apprécier à sa valeur l'enquête mathématique sur des problèmes nouveaux qui se présentent, j'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes ; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas suceptible de démonstrations ; car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance. Pour cette raison, de ces propositions sur le cône et la pyramide, dont Eudoxe fut le premier à trouver la démonstration, en particulier des théorèmes affirmant que le cône est la troisième partie du cylindre, et la pyramide la troisième partie du prisme, qui ont même base et même hauteur, on doit attribuer une part notable à Démocrite, qui le premier a formulé l'énoncé au sujet de la figure indiquée sans en donner une démonstration. Or il m'arrive que, aussi pour les propositions que je vais exposer maintenant, la découverte m'est venue de la même manière que pour les propositions précédentes ; aussi ai-je voulu rédiger et publier cette méthode, à la fois parce que j'en ai parlé antérieurement[1] et que j'ai voulu éviter de paraître à certains avoir proféré de vaines paroles, et parce que je suis convaincu d'apporter une contribution très utile à la recherche mathématique. Je suis persuadé, en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront, par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas encore venues à l'esprit.

Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m'être révélée par la mécanique, à savoir que tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur, ensuite une à une les propositions qui ont été examinées de la même manière. La fin du livre sera consacrée aux démonstrations géométriques des théorèmes dont je t'avais envoyé les énoncés antérieurement.

1. Cf. *Quadr. parab.*, fin de la lettre à Dosithée.

LEMMES

1. Si on retranche une grandeur d'une grandeur, et si le même point est centre de gravité à la fois de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, ce même point est le centre de gravité de la grandeur qui reste.

2. Si une grandeur est retranchée d'une grandeur sans que le même point soit centre de gravité à la fois de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, le centre de gravité de la grandeur restante est situé sur le prolongement de la droite joignant les centres de gravité de la grandeur entière et de la partie retranchée, à l'extrémité d'un segment découpé dont le rapport au segment compris entre les centres de gravité indiqués est égal au rapport entre le poids de la grandeur retranchée au poids de la grandeur restante[1].

3. Si les centres de gravité d'un nombre aussi élevé qu'on voudra de grandeurs sont situés sur la même droite, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera, lui aussi, situé sur la même droite[2].

4. Le centre de gravité de tout segment de droite est le point qui divise le segment en deux parties égales .

5. Dans tout triangle le centre de gravité est le point d'intersection des droites menées des sommets du triangle aux milieux des côtés .

6. Dans tout parallélogramme le centre de gravité est le point de rencontre des diagonales .

7. Le centre de gravité d'un cercle est le centre même du cercle.

8. Dans tout cylindre le centre de gravité est le point qui divise l'axe en deux parties égales.

9. Dans tout prisme le centre de gravité est le point qui divise l'axe en deux parties égales.

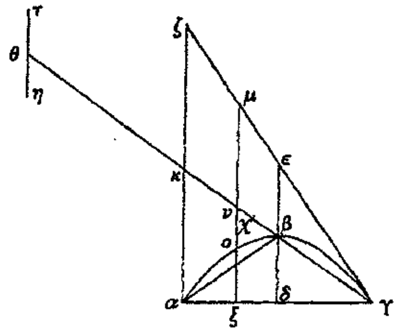
10. Dans tout cône le centre de gravité est situé sur l'axe, en un point qui divise l'axe de manière que le segment situé du côté du sommet soit triple du segment restant.

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.
2. Cf. *ibid.* I, 4 ; I, 5 ; II, 2.

DOCUMENT 2 Extrait de ARCHIMEDE, *La Méthode*, texte établi par C. Mugler, Les Belles Lettres, collection G. Budé, Paris, 1971.

1.

Soit le segment ΑΒΓ compris entre la droite ΑΓ et la parabole ΑΒΓ ; divisons ΑΓ en deux parties égales par le point Δ, menons la parallèle ΔΒΕ au diamètre et les droites ΑΒ et ΒΓ joignant Β à Α et à Γ.



Menons des points Α et Γ la droite ΑΖ parallèle à ΔΒΕ et la droite ΓΖ tangente au segment et prolongeons ΓΒ jusqu'au point Κ ; soit ΓΚ égal à ΚΘ. Imaginons que ΓΘ soit un levier de centre Κ, et choisissons une parallèle ΜΞ à ΕΔ.

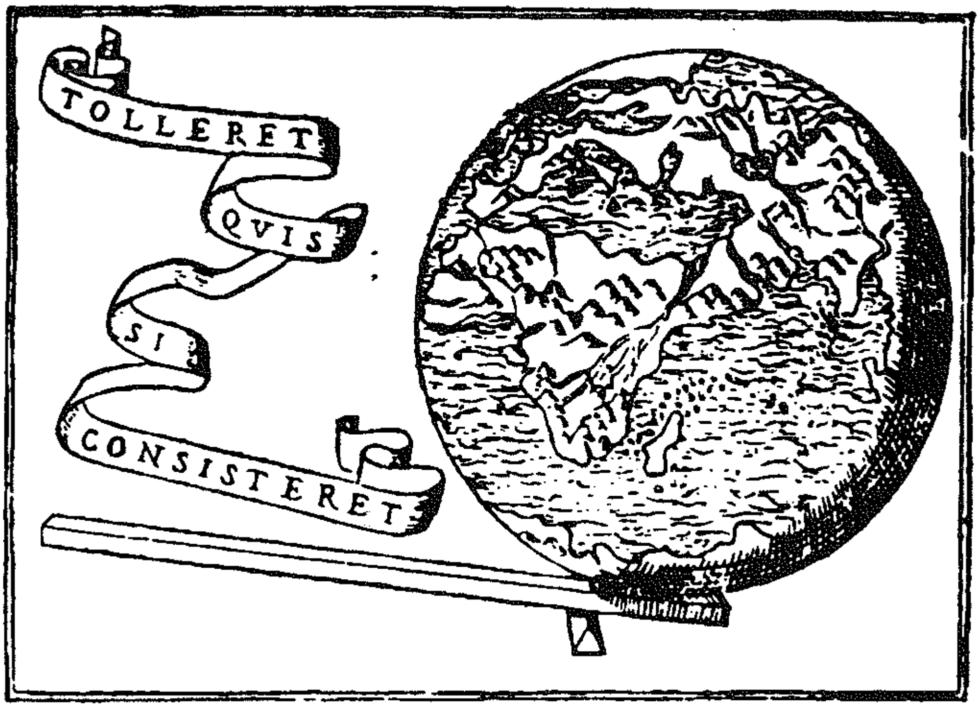
Dès lors, comme ΓΒΑ est une parabole[1], que ΓΖ est une tangente et que ΓΔ est mené d'une manière ordonnée, ΕΒ est égal à ΒΔ, comme cela a été démontré dans les *Eléments*[2] ; pour cette raison, et parce que ΖΑ et ΜΞ sont parallèles à ΕΔ, ΜΝ est égal[3] à ΝΞ et ΖΚ égal à ΚΑ. Et comme ΓΑ est à ΑΞ comme ΜΞ est à ΞΟ, comme cela est démontré dans un lemme[4], que ΓΑ est à ΑΞ comme ΓΚ est à ΚΝ, et que, enfin, ΓΚ est égal à ΚΘ, le rapport de ΘΚ à ΚΝ est égal au rapport de ΜΞ à ΞΟ, Et puisque le point Ν est le centre de gravité[5] du segment de droite ΜΞ, parce que ΜΝ est égal à ΝΞ, si nous plaçons le segment de droite ΤΗ, égal à ΞΟ, de manière que son centre de gravité soit le point Θ et que ΤΘ soit égal à ΘΗ, le segment de droite ΤΘΗ fera équilibre au segment de droite ΜΞ restant en place, parce que ΘΝ est coupé en raison inverse des poids ΤΗ et ΜΞ et que ΘΚ est à ΚΝ comme[6] ΜΞ est à ΗΤ ; il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux poids[7] est le point Κ ; de la même manière aussi toutes les parallèles à ΕΔ menées dans le triangle ΖΑΓ feront équilibre, en restant en place, aux segments, découpés d'eux par la parabole et transportés au point Θ de manière que le centre de gravité de la grandeur composée des uns et des autres soit le point Κ. Et du moment que le triangle ΓΖΑ est constitué par les segments de droite menés dans le triangle ΓΖΑ, et le segment ΑΒΓ constitué par les segments de droite pris dans le segment (sc. de parabole) de la même manière que ΞΟ, le triangle ΖΑΓ fera équilibre, en restant en place, au segment de parabole placé autour du centre

1. παραβολή dans le texte grec, mot qui provient d'une interpolation ; Archimède appelle la parabole ὀρθογωνίου κώνου τομά.
2-7. Cf. notes complémentaires.

de gravité Θ, l'équilibre se faisant par rapport au point K, de façon que le centre de gravité de la somme des deux grandeurs soit le point K. Divisons dès lors ΓK par le point X de manière que ΓK soit triple de KX ; le point X sera donc le centre de gravité du triangle AZΓ, comme cela a été démontré dans le livre *Des équilibres*[1]. Du moment donc que le triangle ZAΓ, restant en place, fait équilibre, par rapport au point K, au segment BAΓ placé autour du centre de gravité Θ, et que le centre de gravité du triangle ZAΓ est le point X, le rapport du triangle AZΓ au segment ABΓ placé autour du centre Θ est égal au rapport de ΘK à XK. Or ΘK est triple de KX ; il s'ensuit que le triangle AZΓ est à son tour triple du segment ABΓ. Mais le triangle ZAΓ est aussi quadruple du triangle ABΓ, parce que ZK est égal à KA, et AΔ égal[2] à ΔΓ ; par conséquent, le segment ABΓ est équivalent aux quatre tiers du triangle ABΓ.

2.

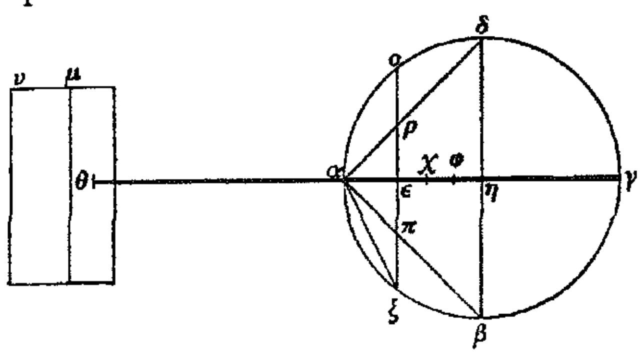
La proposition qui précède n'est, certes, pas démontrée par ce que nous venons de dire, mais elle donne une certaine idée que la conclusion est vraie ; pour cette raison, voyant que la propriété n'est pas démontrée, mais pressentant que la conclusion est vraie, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique que nous avons trouvée et publiée antérieurement[3].



Vignette de titre du *Mechanicorum Liber* de Guidobaldo del Monte, Pesare, 1577.

6.

Dans tout hémisphère, le centre de gravité est situé sur son axe, en un point qui divise l'axe de manière que le rapport de la partie située du côté de la surface de l'hémisphère à la partie restante soit égal au rapport de cinq à trois.



Soit une sphère ; coupons-la par un plan passant par son centre ; que l'intersection de ce plan avec la surface soit le cercle ΑΒΓΔ ; soit ΑΓ et ΒΔ deux diamètres de ce cercle perpendiculaires l'un à l'autre ; élevons sur ΒΔ un plan perpendiculaire à ΑΓ ; soit un cône ayant pour base le cercle de diamètre ΒΔ et pour sommet le point Α, et ΒΑ et ΑΔ deux de ses génératrices ; prolongeons ΓΑ et portons sur le prolongement le segment de droite ΑΘ égal à ΓΑ ; imaginons que ΘΓ soit un levier de centre Α et menons dans le demi-cercle ΒΑΔ la droite ΞΟ parallèle à ΒΔ ; que cette droite coupe la circonférence du demi-cercle aux points Ξ et Ο, les génératrices du cône aux points Π et Ρ, et la droite ΑΓ au point Ε ; sur ΞΟ élevons le plan perpendiculaire à ΑΕ ; ce plan coupera l'hémisphère suivant le cercle de diamètre ΞΟ et le cône suivant le cercle de diamètre ΠΡ.

Comme ΑΓ est à ΑΕ comme[1] le carré sur ΞΑ est au carré sur ΑΕ, que le carré sur ΞΑ est équivalent à la somme des carrés[2] sur ΑΕ et sur ΕΞ, et que ΑΕ est égal[3] à ΕΠ, le rapport de ΑΓ à ΑΕ est égal au rapport de la somme des carrés sur ΞΕ et sur ΕΠ au carré sur ΕΠ. Mais le rapport de la somme des carrés sur ΞΕ et sur ΕΠ au carré sur ΕΠ est égal au rapport de la somme du cercle de diamètre ΞΟ et du cercle de diamètre ΠΡ au cercle de diamètre ΠΡ, et ΓΑ est égal à ΑΘ ; le rapport de ΘΑ à ΑΕ est donc égal au rapport de la somme du cercle de diamètre ΞΟ et du cercle de diamètre ΠΡ au cercle de diamètre ΠΡ. Il s'ensuit que la somme des deux cercles de diamètres ΞΟ et ΠΡ, restant en place, fera équilibre autour du point Α au cercle de diamètre ΠΡ, déplacé et posé au point Θ

1. Cf. Eucl. III, 31 ; V, déf. 9 ; VI, 8.
2. Cf. Eucl. I, 47.
3. Cf. Eucl. VI, 4.

de manière que Θ soit son centre de gravité. Du moment donc que de la somme des deux cercles de diamètres ΞΟ et *ΠΡ*, restant en *place*, *le centre de gravité*[1] *est* le point E, et que Θ est le centre de gravité du cercle de diamètre ΠΡ, déplacé, le rapport de EA à AΘ est égal au rapport du cercle de diamètre ΠΡ à la somme des cercles de diamètres ΞΟ et ΠΡ. De même, si on mène dans la parabole une autre parallèle à la droite ΒΗΔ et qu'on élève sur la droite ainsi menée le plan perpendiculaire à ΑΓ, la somme des deux cercles déterminés, l'un dans l'hémisphère, l'autre dans le cône, restant en place, fera équilibre autour de A au cercle déterminé dans le cône, déplacé et posé sur le levier au point Θ. Dès lors, l'hémisphère et le cône étant remplis par les cercles, tous les cercles dans l'hémisphère et dans le cône, restant en place, feront équilibre autour du point A à tous les cercles dans le cône, déplacés et posés au point Θ du levier de manière que leur centre de gravité soit Θ ; par conséquent, la somme de l'hémisphère et du cône, restant en place, feront équilibre autour du point A *au cône*, *déplacé et posé au point* Θ du levier de manière que son centre de gravité soit Θ. Soit[2] donc un cylindre MN suspendu au point Θ, équivalent au cône ΑΒΔ ; que ce cylindre soit coupé par un plan perpendiculaire à l'axe de manière que le cylindre (sc. partiel) M fasse équilibre au cône autour du point A ; la partie restante, (sc. le cylindre) N, fera donc équilibre à l'hémisphère. Prenons sur AH un point Φ tel que AΦ soit triple de ΦH ; le point Φ sera donc le centre de gravité du cône[3]. Mais prenons aussi un point X tel que AH soit à AX comme huit est à cinq. Du moment donc que le cylindre M fait équilibre au cône ΑΒΔ autour du point A, le rapport du cylindre M au cône ΑΒΔ sera égal au rapport de ΦA à ΘA, *c'est-à-dire de trois à huit*. *Mais* le cône ΑΒΔ est équivalent au cylindre MN ; il s'ensuit que le cylindre MN est au cylindre M comme huit

est à trois et que, par conséquent, le cylindre N est au cylindre MN comme cinq est à huit[1], ou que le cône ΑΒΔ est au cylindre N comme huit est à cinq, c'est-à-dire comme AH est à AX. Et comme la sphère est équivalente au quadruple[2] du cône ayant pour base le cercle de diamètre ΒΔ et pour axe AH, le rapport de l'hémisphère au cône ΑΒΔ sera égal au rapport de deux à un, c'est-à-dire de AΘ à AH. Par identité[3] donc, le rapport de l'hémisphère au cylindre N est égal au rapport de AΘ à AX. De plus, le cylindre N, de centre de gravité Θ, fait équilibre à l'hémisphère autour du point A ; il s'ensuit que le centre de gravité de l'hémisphère est le point X qui divise l'axe de manière que la partie située du côté de la surface de l'hémisphère ait à la partie restante le rapport de cinq à trois.

1. Cf. lemme 7.

A propos de Diophante d'Alexandrie

Marianne Guillemot

L'oeuvre de Diophante est profondément originale, et occupe une place à part dans l'histoire des mathématiques de l'antiquité occidentale.

Elle est originale par son objet, les nombres : car elle s'intéresse aux nombres pour eux-mêmes, sans implication philosophique (contrairement à la tradition pythagoricienne) et sans lien avec la géométrie ni avec la notion de mesure (à la différence de l'oeuvre d'Euclide). Elle est originale aussi par les problèmes qu'elle pose et les méthodes variées qu'elle donne pour les résoudre. Les savants du Moyen-Age arabo-persan, qui ont connu l'oeuvre de Diophante, présentent celui-ci comme un précurseur de l'algèbre; un catalogue arabe, appelé *Fihrist,* composé vers 987 et recensant des ouvrages connus à cette époque, cite Diophante comme *"Grec d'Alexandrie qui écrivit sur l'art de l'algèbre".*

On ne sait presque rien de la vie de Diophante. L'époque même où il vécut est connue de façon très imprécise. Par un auteur (Hypsicles d'Alexandrie) qu'il invoque dans son livre sur les nombres polygones, par un autre mathématicien (Théon d'Alexandrie) qui le cite dans un commentaire, on peut situer sa vie entre le deuxième siècle avant J.C. et le quatrième siècle de notre ère. Des recherches plus précises laissent penser que Diophante a probablement vécu vers le troisième siècle de notre ère.[1]

Il nous est connu par deux oeuvres : les *Nombres polygones*, un ouvrage assez court, et surtout les *Arithmétiques,* dont le préambule indique qu'elles comportaient à l'origine treize livres. De l'oeuvre de Diophante ne subsistèrent pendant longtemps, en Occident, que quelques copies en mauvais état de manuscrits plus anciens, qui furent oubliés pendant des siècles, et ne furent redécouverts qu'à la Renaissance. Ils ne comportaient que six des treize livres annoncés par Diophante, avec des lacunes, des interpolations, des modifications dans l'ordre des problèmes.

Diophante était connu des savants arabes du Moyen-Age ; mais quand les mathématiques arabes pénétrèrent en occident vers le treizième siècle, les ouvrages d'algèbre de Léonard de Pise ne le mentionnèrent pas, bien que les connaissances nouvellement introduites, en particulier dans ses manuscrits de 1202 et 1228, restés longtemps inédits, eussent probablement subi l'influence de la démarche diophantienne. Plus tard, les traités d'algèbre de Luca Pacioli (*Summa de Arithmetica,* 1494), de Jérome Cardan (*Ars Magna,* 1545), de Tartaglia (*Trattato di numeri*, 1560), ignorèrent également Diophante. Cependant, en 1464, l'astronome Regiomontanus, qui avait traduit en latin plusieurs ouvrages scientifiques de l'antiquité grecque, (des oeuvres d'Archimède, Apollonius, Ptolémée), signala, dans une lettre, la découverte à Venise d'un manuscrit du mathématicien grec Diophante, mais ne le traduisit pas.

Le nom et l'oeuvre de Diophante restèrent donc inconnus en Occident jusqu'à ce que Rafael Bombelli publiât en 1572, vers la fin de sa vie, l'*Algebra*, ouvrage dans lequel il rassemblait toutes les découvertes algébriques de ses prédécesseurs de l'école de Bologne, et innovait de manière importante (il est l'un des créateurs du calcul des imaginaires). Bombelli annonce, dans l'introduction de son traité, la découverte, dans la Bibliothèque du Vatican, d'un manuscrit de Diophante, et indique qu'il a traduit ce texte en italien. En fait, cette traduction n'est pas fidèle: il a incorporé, dans son traité d'algèbre, un grand nombre de problèmes de Diophante mêlés à ses propres problèmes.

Au moment où Bombelli publie son traité d'algèbre en Italie, en 1572, le grand humaniste Xylander, en Allemagne, travaille à la traduction de l'oeuvre de Diophante en latin. Cette traduction est une oeuvre remarquable, malgré de nombreuses incorrections et passages obscurs, dus en partie à la mauvaise qualité du manuscrit unique dont il disposait.

C'est de Bombelli que semble s'être inspiré Simon Stevin de Bruges, qui fit paraître en français, en 1585, un traité d'arithmétique dans lequel il énonce les propositions de Diophante de manière très libre. L'*Arithmétique* de Stevin fut rééditée, corrigée et augmentée, par Albert Girard (1634), également en langue française.

Malgré leurs défauts, la traduction latine de Xylander et les adaptations en français de Stevin et de Girard eurent une grande influence sur les progrès de l'algèbre. Citons par exemple les *Zététiques* de François Viète, parues en latin vers 1590. Viète emprunte certains de ses problèmes aux problèmes les plus difficiles de Diophante ; mais il utilise pour les résoudre des méthodes très différentes, souvent géométriques, et, comme il est normal, il utilise aussi les innovations récentes de l'algèbre.

L'édition du texte grec fut enfin donnée en 1621 par Claude Gaspar Bachet de Méziriac, mathématicien et helléniste. Il travailla sur un "manuscrit de Paris", copie faite dans la deuxième moitié du seizième siècle à partir de deux manuscrits du Vatican. Bachet a utilisé les travaux de Bombelli et de Xylander (il a placé la traduction latine de Xylander en face du texte grec) ; il a remédié à certaines lacunes du texte grec en mettant entre parenthèses ce qu'il avait ajouté. Bachet fut donc un éditeur très scrupuleux. Son édition est accompagnée de commentaires sur ses propres découvertes, qui sont souvent intéressantes.

Pierre de Fermat (1601-1665) étudia de manière approfondie l'édition de Bachet : il enrichit son exemplaire de nombreuses notes et remarques manuscrites qui furent publiées sous forme de commentaires dans la réédition du Diophante de Bachet publiée par le fils de Fermat en 1670. Selon son habitude, Fermat énonce souvent ses résultats sans démonstration. Le célèbre énoncé, connu sous le nom de grand théorème de Fermat, n'a été établi que très récemment après avoir stimulé les mathématiciens pendant plus de trois siècles : citons Euler, Lagrange, Gauss (avec ses *Recherches Arithmétiques*), Cauchy... Les tentatives de démonstrations sont à l'origine de théories nouvelles comme la théorie des idéaux (Kummer, Dedekind) ou l'étude arithmétique des courbes algébriques.

---

[1] A ce propos, on pourra lire la préface de *Diophante d'Alexandrie*, traduction Paul Ver Eecke, édition Desclée de Brouwer, Bruges, 1926.

Dans les années 1893-1895 parut une édition critique, due à Paul Tannery. Cette édition comporte tout le texte grec des oeuvres connues de Diophante ; des lacunes sont comblées ; il y figure une nouvelle traduction en latin, un recueil de commentaires anciens, dont ceux dont nous avons parlé, et beaucoup de nouveaux commentaires. Il ne manquait plus qu'une bonne traduction en français de l'oeuvre de Diophante : c'est ce qu'apporta l'édition de Paul Ver Eecke (1926), qu'il présenta comme première traduction du grec en français.[2]

Cependant, toutes les traductions, éditions et commentaires dont nous avons parlé ne concernaient que six des treize livres annoncés par Diophante. Personne en Occident n'avait eu connaissance des autres livres; on savait que l'oeuvre de Diophante avait été connue dans le monde arabo-persan; mais, faute de documents, on a longtemps supposé que les livres disparus avaient été perdus avant que les Arabes en prennent connaissance. Or en 1972, Roshdi Rashed a retrouvé, dans une bibliothèque en Iran, un manuscrit en langue arabe qu'il a identifié comme la traduction d'un manuscrit de Diophante, qui pourrait être le texte "sur l'art de l'algèbre", signalé dans le *Fihrist*, que nous avons mentionné plus haut. Ce manuscrit arabe contient quatre des livres des *Arithmétiques*; Rashed a estimé qu'il s'agit des livres IV, V, VI, VII, faisant suite aux trois premiers connus en Occident, et que son traducteur était Qusta ibn Luqa, qui vivait vers le dixième siècle, et a traduit en arabe plusieurs oeuvres scientifiques importantes de l'antiquité grecque. Ces livres retrouvés ont été traduits par Roshdi Rashed d'arabe en français, puis édités.[3]

La "prose algébrique" de Diophante et sa traduction

Comment se présente le texte de Diophante, traduit en français ? (Pour simplifier, nous n'envisagerons ici que la traduction de Ver Eecke)

La question est un peu compliquée du fait que, dans le manuscrit grec, il y a quelques symboles, mais qui n'ont pas du tout la même fonction que les symboles modernes ; ils jouent le rôle d'abréviations et sont "dans le texte", que Ver Eecke appelle la "prose algébrique de Diophante". Il n'y a pas de formules ; par exemple, le signe "égal" n'existe pas. On ne fait pas les calculs sur les symboles, on les fait sur les nombres donnés, et aussi, comme nous le verrons, sur l'inconnue, qui est, dit Diophante, *"un nombre <...> qui possède en soi une quantité indéterminée d'unités"*. (Préambule du livre I, Ver Eecke, p. 2). Cette inconnue, Diophante l'appelle simplement le "nombre" (αριθμος) et lui donne pour abréviation le signe Ↄ (sigma renversé). Pour ne pas créer de confusion, Ver Eecke désigne l'inconnue par le néologisme "arithme". Voici quelques-uns des symboles-abréviations les plus utilisés par Diophante :

le symbole de la soustraction ⋔; (pour l'addition, on utilise une simple juxtaposition)

le symbole des unités $\overset{\circ}{M}$, celui de l'inconnue Ↄ ,

du carré de l'inconnue, Δ^{Y} , du cube de l'inconnue, K^{Y} ,

Ce choix de notions symbolisées montre l'importance accordée à ce que nous appellerions l'homogénéité. Les symboles des nombres de 1 à 9, des dizaines, etc... sont données par des lettres de l'alphabet grec[4].

A la différence de certains autres auteurs, Ver Eecke a pris le parti de faire une traduction littérale et de

[2] Paul Ver Eecke, *Diophante d'Alexandrie*, édition Desclée de Brouwer, Bruges, 1926.

[3] Roshdi Rashed, *Diophante, les Arithmétiques*, t. III et IV. Les Belles Lettres, 1984.

[4] Par exemple :
là où nous dirions 3x–6, Diophante dirait trois arithmes moins six unités et abrégerait Ↄ $\bar{\gamma}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\,\bar{\varsigma}$ $(\bar{\gamma} = 3, \bar{\varsigma} = 6)$

ne pas mettre d'abréviations dans son texte, (sauf pour les nombres qu'il écrit avec nos chiffres modernes). Et comme de toute façon, avec ou sans abréviations, cette traduction littérale n'est au premier abord guère lisible pour nous, Ver Eecke met en note une traduction du problème et de sa solution, en notation moderne, accompagnée d'explications, ce qui rend ensuite beaucoup plus facile la lecture de la traduction littérale.[5]

Les problèmes de Diophante

Le traité de Diophante se présente comme un recueil de problèmes (189 problèmes dans les six livres traduits par Ver Eecke). Ce sont en général des problèmes du premier, second ou troisième degré, souvent indéterminés ; Diophante s'arrange presque toujours pour abaisser le degré, en jouant avec l'indétermination.

Ce sont généralement des problèmes à plusieurs inconnues, de une jusqu'à six; mais Diophante n'utilise qu'un seul symbole pour l'inconnue, et exprime toutes les quantités cherchées en fonction d'une seule inconnue, ou donne des valeurs arbitraires à certaines d'entre elles, transformant en problème déterminé un problème au départ indéterminé.

Diophante ne demande et ne donne en général qu'une solution, même si le problème est indéterminé (sauf exception). Il donne quelquefois explicitement une condition d'existence, mais en général ne donne ni ne demande de justification d'existence ni d'unicité. Il n'accepte que des solutions positives et rationnelles. Il connaissait pourtant les nombres irrationnels (pour certains problèmes, de type arithmétique, cette exigence de solution rationnelle est justifiée, car le problème serait "trivial" si on admettait les solutions irrationnelles).

Par ailleurs, bien que ne voulant pas de solutions négatives, Diophante connaît ce que nous appelons la "règle des signes" : *"ce qui est de manque, multiplié par ce qui est de manque, donne ce qui est positif (υπαρξις, existence), tandis que ce qui est de manque, multiplié par ce qui est positif, donne ce qui est de manque"* (Préambule du livre I, Ver Eecke, p. 7).

L'énoncé du problème est toujours abstrait et général mais la résolution se fait en donnant des valeurs particulières aux nombres (les données) dont on parle de façon générale dans l'énoncé. (Cela s'est fait d'ailleurs encore longtemps par la suite).

Certaines solutions de problèmes font référence à des porismes qui auraient figuré dans des textes antérieurs. Ces porismes, (méthodes de résolution de divers types de problèmes, par exemple de certaines équations du second degré), n'ont jamais été retrouvés. Ils étaient probablement à l'origine incorporés dans des problèmes particuliers ; peut-être ont-ils été réunis à part, au cours d'un recopiage du manuscrit, et perdus par la suite.

La recherche des solutions entières ou rationnelles de systèmes algébriques indéterminés, objet de la plupart des problèmes de Diophante, est aujourd'hui d'actualité; elle fait partie de la théorie algébrique des nombres, et ces problèmes sont qualifiés de diophantiens. Et c'est par le détour de la géométrie algébrique que Andrew Wiles, en 1994, a démontré la fameuse conjecture de Fermat, laquelle, comme on sait, avait été écrite dans une marge des *Arithmétiques* de Diophante.[6]

---

[5] Voyez, en document 1, la page 21 de l'introduction, note 1.
[6] Cf. Catherine Goldstein, *Autour du théorème de Fermat*, in Mnémosyne n° 7, p. 35.

Les extraits choisis

Nous présentons ci-dessous, d'abord, une page de l'introduction de Ver Eecke, comportant en note, un passage du texte grec de Diophante, sa traduction littérale et sa transcription moderne (Document 1) ;

ensuite, trois des 189 problèmes des *Arithmétiques*, pris aussi dans le livre de Ver Eecke, et donnant un aperçu sur les problèmes posés et les méthodes variées employées pour les résoudre :

- le problème VIII du livre II est celui que Fermat a rendu célèbre. On remarque, dans sa résolution, comment Diophante utilise l'indétermination pour se ramener à un calcul simple qui donne une solution rationnelle (Document 2) .

- le problème XI est traité de deux manières différentes, dont la première est celle de la "double équation", un des rares procédés auxquels Diophante donne lui-même un nom, et où il fait intervenir ce que nous appelons une "identité remarquable" ; la seconde manière utilise substitution et abaissement de degré (Document 3) .

- le problème XXIV du livre IV est du troisième degré; Diophante y a recours, comme il le fait fréquemment, à une «fausse position provisoire »[7], qui abaisse le degré, et dont l'examen lui permet de trouver ensuite une solution qui lui convient (Document 4).


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

[7] Cf. Autour des méthodes de fausse position » in J. L. Chabert et alii, *Histoire d'algorithmes*, Belin, Paris 1994.

INTRODUCTION

Diophante a écrit son œuvre dans la forme classique du discours continu, comme les prédécesseurs anonymes qu'il a éclipsés, et auxquels il a sans doute emprunté certaines de ses propositions, lesquelles trahissent des époques assez différentes. C'est à peine si Diophante, usant de moyens qu'il prend soin de nous indiquer dans son préambule, abrège un peu son verbe dans sa langue grecque qui exprime déjà l'idée mathématique d'une manière très concise (1). Ces moyens sont d'ailleurs peu nombreux, et il serait exagéré d'y voir l'ébauche d'une véritable notation algébrique ; car ils se bornent à de simples abréviations de mots, au remplacement de quelques mots très fréquents par leurs lettres initiales ou terminales, et à l'emploi d'un sigle, qui ne paraît être qu'une contraction de deux lettres du mot signifiant « ce qui est de manque », pour indiquer la soustraction d'une expression ; tandis que les expressions à ajouter sont simplement juxtaposées (2).

C'est à peu près de la même manière que nous voyons régner une prose continue dans les œuvres des algébristes arabes et persans, lesquels ont très probablement puisé dans les ouvrages grecs, et

---

On pourra consulter au sujet de l'origine des notations algébriques :

LÉON RODET. *Sur les Notations numériques et algébriques antérieurement au XVI^e^ siècle.* Paris, 1881.

PAUL TANNERY. *Notions Historiques.* (Voir éd. précitée des Mémoires scientifiques de Paul Tannery, vol. III, pp. 158-187.) Cette étude a été publiée d'abord dans l'ouvrage de JULES TANNERY : *Notions de Mathématiques.* Paris, 1903, pp. 322-348.

TROFKE. *Geschichte der Elementar-Mathematik.* Erster Band. Leipzig, 1902, pp. 310-332. Ibidem. Zweite, verbesserte und sehr vermehrte Auflage, dritter Band. Berlin und Leipzig, 1922, pp. 119-148.

1. Comme exemple de la prose algébrique de Diophante, nous donnons ici une phrase prise au hasard, dans le texte de la proposition 39 du Livre IV (Cf. éd. précitée du Diophante de Tannery, vol. I, p. 304, 11, 1-5), avec notre traduction française du corps de l'ouvrage et une transposition en notations algébriques actuelles : ὁ ἄρα ὑπὸ ϛς̄ Μ̊ ιβ̄ καὶ Μ̊ ᾱ ἐλάσσω ἐστὶν τοῦ ὑπὸ δυάδος καὶ ΔΥ ᾱ ⋔ Μ̊ γ̄, τουτέστιν ϛς̄ Μ̊ ιβ̄ ἐλάσσονές εἰσιν ΔΥ β̄ ⋔ Μ̊ ς̄. καὶ κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ Μ̊ ς̄. ϛς̄ Μ̊ ιη̄ ἐλάσσονες ΔΥ β̄. Donc, le produit de 6 arithmes (ou nombres inconnus) plus 12 unités et de 1 unité est plus petit que le produit de deux unités et de 1 carré d'arithme moins 3 unités, c'est-à-dire que 6 arithmes plus 12 unités sont plus petits que 2 carrés d'arithme moins 6 unités. Ajoutons de part et d'autre les 6 unités ; 6 arithmes plus 18 unités sont plus petits que 2 carrés d'arithme.

On aurait donc en notations actuelles :

$$(6x+12)\times 1<2\times(x^2-3),\ \text{ou}\ 6x+12<2x^2-6,\ \text{ou}\ 6x+18<2x^2.$$

2. Le texte grec de Diophante a fait l'objet de diverses études plus ou moins étendues au point de vue paléographique de la part de Nesselmann, de Hultsch et de Tannery, dans leurs ouvrages déjà cités. Ces études ont été excellemment résumées, critiquées et complétées par Heath. (*Diophantus of Alexandria, a study in the history of greek algebra.* Cambridge, 1910, pp. 32-53.)

VIII

Partager un carré proposé en deux carrés (3).

Proposons donc de partager 16 en deux carrés.

Posons que le premier nombre est 1 carré d'arithme. Dès lors, l'autre nombre sera 11 unités moins 1 carré d'arithme. Il faut donc que 16 unités moins 1 carré d'arithme soient égaux à un carré.

Formons le carré d'une quantité quelconque d'arithmes diminuée d'autant d'unités qu'en possède la racine de 16 unités. Que ce soit le carré de 2 arithmes moins 4 unités. Ce carré sera donc 4 carrés d'arithme plus 16 unités moins 16 arithmes. Égalons-le à 16 unités moins 1 carré d'arithme ; ajoutons de part et d'autre les termes négatifs, et retranchons les semblables des semblables. Il s'ensuit que 5 carrés d'arithme sont égaux à 16 arithmes, et l'arithme devient $\frac{16}{5}$. Dès lors, l'un des nombres sera $\frac{256}{25}$, et l'autre sera $\frac{144}{25}$. Or, ces deux nombres additionnés forment $\frac{400}{25}$, c'est-à-dire 16 unités, et chacun d'eux est un carré (1).

3. Problème de la forme : $X^2+Y^2=a^2$.

C'est ce problème de Diophante qui a donné lieu à une note célèbre que Fermat avait écrite en marge de son exemplaire de l'édition greco-latine de Diophante, donnée pour la première fois par Bachet de Meziriac, à Paris, en 1621. Cette note énonce de la manière suivante ce que l'on a appelé *le grand théorème de Fermat :* « Par contre, il est impossible de partager un cube en deux cubes, ou un bicarré en deux bicarrés, ou, plus généralement, une puissance quelconque, hormis celle du carré, en deux puissances ayant même exposant. J'ai découvert une démonstration vraiment merveilleuse de la chose ; mais la marge est trop petite pour la contenir ». (Voir cette note dans la réimpression de l'édition de Bachet, avec les notes de Fermat, donnée par Samuel, fils de Fermat, à Toulouse, en 1670. Voir aussi : *Œuvres de Fermat* par P. Tannery et Ch. Henry, vol. I, texte latin, pp. 289-342, Paris 1891, et vol. III, traduction française, pp. 241-274, Paris, 1896).

Le théorème de Fermat pose, en d'autres termes, que l'équation $x^m+y^m=z^m$ ne peut être résolue en nombres rationnels pour toute puissance exprimée par un nombre $m>2$. Comme la démonstration n'a jamais été retrouvée dans les papiers délaissés par Fermat, on incline à croire que malgré son génie, il n'a pu en surmonter les grandes difficultés. Une démonstration générale de ce théorème est encore toujours attendue, car Euler n'a réussi à en donner la démonstration que pour les exposants 3 et 4 ; Lejeune-Dirichlet pour l'exposant 5 ; tandis que la démonstration la plus récente de Kummer, laquelle fait usage de calculs transcendants, est encore en défaut pour certaines valeurs particulières de l'exposant qui ne se présentent cependant pas en dessous de 100.

1. La solution de Diophante considère l'équation : $X^2+Y^2=16$. Posons : $X^2=x^2$, d'où : $Y^2=16-x^2$. L'expression de Y^2 devant être un carré, identifions-la avec une expression de la forme : $(mx-\sqrt{16})^2$, dans laquelle on adopte, par exemple, la détermination rationnelle et positive $m=2$. Dès lors, $(2x-4)^2=16-x^2$, ou, comme le texte : $4x^2+16-16x=16-x^2$, ou : $5x^2=16x$, d'où : $x=\frac{16}{5}$. En conséquence : $X^2=\left(\frac{16}{5}\right)^2=\frac{256}{25}$, et $Y^2=\frac{144}{25}=\left(\frac{12}{5}\right)^2$; valeurs qui constituent une solution, car $\left(\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{400}{25}=16$.

Le manuscrit de Madrid (Codex Matritensis 48) du XIIIe siècle porte en marge cette curieuse annotation qui a été relevée par Tannery, (Cf. loc. cit. Vol. II, p. 260) : Ἡ ψυχή σου, Διόφαντε, εἴη μετὰ τοῦ Σατανᾶ ἕνεκα τῆς δυσκολίας τῶν τε ἄλλων σου θεωρημάτων καὶ δὴ τοῦ παρόντος θεωρήματος, c'est-à-dire : « Que ton âme, Diophante, soit avec Satan, pour la difficulté de tes autres théorèmes, et surtout de ce théorème-ci ».

DOCUMENT 3 Extrait de *Diophante d'Alexandrie*, traduction Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1926.

XI

Ajouter un même nombre à deux nombres donnés, de manière que chacun d'eux forme un carré (0)

Soient les nombres 2 et 3, et que le nombre à ajouter soit 1 arithme. Dès lors, 1 arithme plus 2 unités, et 1 arithme plus 3 unités devront être égaux à des carrés. Nous appelons une telle expression (1), une double équation (2), et nous la résolvons de la manière suivante. Considérant leur différence (3), cherchons deux nombres dont le produit constitue cette différence. Tels sont 4 unités et un $\frac{1}{4}$ d'unité. Égalons soit leur demi-différence, multipliée par elle-même, à la plus petite expression, soit leur demi-somme, multipliée par elle-même, à la plus grande expression. Or, leur demi-différence, multipliée par elle-même, est $\frac{225}{64}$; ce que nous égalons à 1 arithme plus 2 unités, et l'arithme devient $\frac{97}{64}$. D'autre part, la demi-somme des nombres, multipliée par elle-même, est $\frac{289}{64}$; ce que nous égalons à la plus grande expression, c'est-à-dire à 1 arithme plus 3 unités, et l'arithme devient de nouveau $\frac{97}{64}$. En conséquence, le nombre à ajouter sera $\frac{97}{64}$, et la proposition est manifeste (4).

0. Formules générales du problème : $X+a=\alpha^2$, et $X+b=\beta^2$, dans lesquelles α^2, β^2 sont des nombres rationnels, entiers ou fractionnaires.

1. εἶδος, forme, figure, c'est-a-dire ce que nous appelons une expression algébrique.

2. διπλοισότης, ou ailleurs : διπλῆ ἰσότης, ou, ailleurs encore : διπλῆ ἴσωσις : expressions identiques par lesquelles Diophante désigne deux fonctions de l'inconnue devenant simultanément des carrés. Les anciennes versions latines de Xylander et de Bachet rendent l'expression par « duplicata aequalitas ». La version latine récente de Tannery (cf. loc. cit. Vol. I, p. 97) dit : « dupla aequatio ». LAGRANGE *(Corollaires aux propositions algébriques d'Euler)*, et BRASSINE *(Précis des œuvres mathématiques de P. Fermat et de l'arithmétique de Diophante.* Toulouse, 1853), rendent l'expression par « double égalité ». Enfin HEATH (cf. loc. cit. p. 146) dit en anglais : « double-equation ». Nous traduisons donc par les mots « la double équation ».

3. C'est-à-dire la différence des deux expressions ou équations.

4. Pour résoudre le système de double équation : $X+a=\alpha^2$, et $X+b=\beta^2$, Diophante considère la différence $X+a-(X+b)=a-b=\alpha^2-\beta^2$ comme étant le produit de deux facteurs, m, n, choisis cependant de manière à obtenir des solutions rationnelles qu'il admet exclusivement, et il pose : $X+a-(X+b)=m.\,n$. Dès lors, s'appuyant sur l'identité : $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=m.\,n$, il en identifie les termes mêmes avec les termes de l'équation précédente, et pose d'une part : $X+a=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$, d'où : $X=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-a$, et, d'autre part : $X+b=\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$, d'où la valeur nécessairement identique $X=\left(\frac{m-n}{2}\right)^2-b$.

Si nous adoptons, comme dans la solution, les nombres $a=3$, et $b=2$, on a : $a-b=1=4\times\frac{1}{4}$, c'est-à-dire que nous adoptons les facteurs $m=4$ et $n=\frac{1}{4}$. Dès lors, les expressions qui précèdent deviennent, comme dans le texte, d'une part : $X+3=$

XXIV

Partager un nombre donné en deux nombres, et faire en sorte que le produit de ces nombres soit un cube à moins de la racine de ce cube.

Que le nombre donné soit 6. Posons que le premier nombre est 1 arithme, et il s'ensuit que le second nombre restant sera 6 unités moins 1 arithme.

Il faut encore avoir que le produit de ces nombres soit un cube à moins de sa racine. Mais le produit des nombres sera 6 arithmes moins 1 carré d'arithme ; ce qui doit être égal à un cube à moins de sa racine. Formons le cube d'une quantité quelconque d'arithmes moins 1 unité, notamment le cube de 2 arithmes moins 1 unité. Le cube de cette expression, diminué de cette expression même, forme 8 cubes d'arithme plus 4 arithmes moins 12 carrés d'arithme ; ce que nous égalons à 6 arithmes moins 1 carré d'arithme. Or, si les quantités d'arithmes étaient égales de part et d'autre dans l'équation, il resterait des cubes d'arithme égaux à des carrés d'arithme, et l'arithme serait rationnel. Mais 4 arithmes proviennent d'un excédent sur 2 arithmes, notamment de l'excédent de trois fois 2 arithmes. D'autre part, si trois fois 2 arithmes sont diminués de 2 arithmes, ils forment deux fois 2 arithmes, tandis que 6 a été pris arbitrairement par hypothèse. Dès lors, nous sommes amenés à trouver, comme pour 2, qui est la quantité d'arithmes, un nombre qui, pris deux fois, forme 6. Or, ce nombre est 3. En conséquence, cherchons à égaler 6 arithmes moins 1 carré d'arithme à un cube à moins de sa racine. Posons maintenant que la racine du cube est 3 arithmes moins 1 unité ; le cube de cette racine, diminué de cette racine même, forme 27 cubes d'arithme plus 6 arithmes moins 27 carrés d'arithme ; ce que nous égalons à 6 arithmes moins 1 carré d'arithme, et l'arithme devient $\frac{26}{27}$.

Revenant aux choses posées, le premier nombre sera $\frac{26}{27}$, et le second sera $\frac{136}{27}$.

Une méthode de résolution d'équation du troisième degré par Albert Girard

Martine Bühler

Albert Girard (1595-1632) est un mathématicien lorrain protestant exilé en Flandres. Le texte présenté ci-dessous est extrait de l'*Invention Nouvelle en Algèbre* (1629). Outre l'*Invention...*, Girard a publié une *Table des Sinus, tangentes, sécantes* (La Haye,1626), comportant un traité de trigonométrie ; il a également édité une traduction française de Stevin.

L'*Invention Nouvelle en Algèbre* est un ouvrage remarquable : on y trouve énoncé le théorème fondamental de l'algèbre (sans démonstration, suivi d'*explications* qui sont en fait des exemples) et également l'énoncé général des relations entre coefficients d'une équation polynomiale et fonctions symétriques des racines, qui seront au coeur des recherches ultérieures sur la résolution algébrique des équations ; ces résultats nécessitent la prise en compte de toutes les racines, y compris les racines négatives et imaginaires , comme le remarque Girard[1] :

"De même, si $1(4)$ *est égal à* $4(1)-3$... *les quatre solutions seront* $1, 1, -1+\sqrt{-2}, -1-\sqrt{-2}$ *,...on pourrait dire : à quoi servent les solutions qui sont impossibles ? Je réponds, pour trois choses : pour la certitude de la règle générale ; et qu'il n'y ait pas d'autre solution; et pour son utilité".*

Girard montre même l'usage des racines négatives en géométrie : *"la solution par – s'explique en géométrie en rétrogradant et le moins recule où le plus avance".*

Les notations, modernes pour l'époque, sont reprises de Stevin. Le degré de l'inconnue est seul noté, sans l'inconnue, comme étant l'essentiel. Ainsi $2x^2-3x=1$ s'écrit $2(2)-3(1)$ égal à $1(0)$.

L'extrait étudié ici donne une méthode de résolution de l'équation $x^3=px+q$ dans le cas dit "irréductible", c'est-à-dire lorsque $-4p^3 + 27q^2 \langle 0$.

Quel est le problème ? La méthode dite "de Cardan" aboutit dans ce cas à une équation auxiliaire du second degré dont les deux racines sont imaginaires ; en effet, si on pose $x=u+v$, l'équation $x^3=px+q$ devient : $u^3+v^3+3uv(u+v)=p(u+v)+q$. La méthode consiste à résoudre le système :

$\begin{cases} u^3+v^3=q \\ uv=\dfrac{p}{3} \end{cases}$ *i.e.* $\begin{cases} u^3+v^3=q \\ u^3v^3=\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$ donc à résoudre l'équation en t du second degré: $t^2-qt+\dfrac{p^3}{27}=0$ dont u^3 et v^3 sont racines, puis à extraire les racines cubiques de ces solutions .

[1] Pour lire cet extrait du texte de Girard, il faut savoir que $1(4)$ signifie x^4 et $4(1)-3$ signifie $4x-3$.

Or le discriminant est $\Delta = \dfrac{27q^2 - 4p^3}{27}$ et, dans le cas que nous étudions, Δ est strictement négatif. On sait que Bombelli eut l'audace de passer outre l'impossibilité de résoudre dans ce cas l'équation auxiliaire, en introduisant un opérateur *"più di meno"* qui deviendra à terme notre nombre i. Mais Bombelli choisit bien ses exemples, de façon à pouvoir sans mal extraire la racine cubique nécessaire. Il en va tout autrement si l'équation de départ n'est pas "bien choisie". On peut certes résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation auxiliaire mais l'extraction **sous forme algébrique** des racines cubiques d'un nombre complexe se révèle impossible (Newton jeune y occupera d'ailleurs -vainement- une partie de son temps) et la méthode échoue, alors même que l'équation de départ a trois racines réelles.

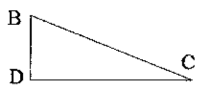
C'est pour éviter ce problème que Girard propose une autre méthode de résolution, s'appuyant sur la trigonométrie.

Viète est sans doute le premier à avoir remarqué la relation étroite entre la division d'un arc en parties égales et la résolution de certaines équations. A l'occasion d'un défi lancé par Adriann Van Roomen (1561-1615), Viète expose ses idées dans une réponse à Roomen : *Problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum.* Le problème de Roomen est la résolution d'une équation de degré 45.

PROBLEMA MATHEMATICVM OMNIBVS ORBIS MA- "
THEMATICIS AD CONSTRVENDVM PROPOSITVM. "

Si duorum terminorum prioris ad poſteriorem proportio ſit, ut 1 (1) ad "
45 (1) — 3795 (3) + 9,5634 (5) — 113,8500 (7) + 781,1375 (9) — 3451,2075 (11) + 1, "
0530,6075 (13) — 2,3267,6280 (15) + 3,8494,2375 (17) — 4,8849,4125 (19) "
+ 4,8384,1800 (21) — 3,7865,8800 (23) + 2,3603,0652 (25) — 1,1767,9100 "
(27) + 4695,5700 (29) — 1494,5040 (31) + 376,4565 (33) — 74,0459 (35) + "
11,1150 (37) — 1,2300 (39) + 945 (41) — 45 (43) + 1 (45) deturque terminus "
poſterior, invenire priorem.

Viète remarque l'analogie avec l'expression de $\sin 45\theta$ à l'aide de $\sin\theta$. Il donne ainsi 23 solutions de l'équation, négligeant les solutions négatives. Il explique également comment sa méthode permet de résoudre un certain type d'équations. Dans un triangle rectangle BCD d'hypoténuse $BC = 2$, BD est le double du sinus de l'angle $\widehat{BCD}$. Appelons $BD = 1N$ (notation de Viète pour l'inconnue dont il note le carré Q et le cube C). Alors :



$BC = 2$
$1N = 2 \sin \widehat{BCD}$

2 — 1 Q	Æquabitur	Basi	Anguli	Dupli.
3 N — 1 C		Perp.		Tripli.
2 — 4 Q + 1 QQ		Basi		Quadrupli.
5 N — 5 C + 1 QC		Perp.		Quintupli.
2 — 9 Q + 6 QQ — 1 CC		Basi		Sextupli.
7 N — 14 C + 7 QC — 1 QQC		Perp.		Septupli.
2 — 16 Q + 20 QQ — 8 CC + 1 QCC		Basi		Octupli.
9 N — 30 C + 27 QC — 9 QQC + 1 CCC		Perp.		Noncupli.

Et eo infinitum continuando ordine, adſcita ſi placet numerorum continue triangulorum ſuum à binario ducentium incrementum tabella.

c'est-à-dire : $2 - 1Q$ est le double du cosinus de l'angle double de $\widehat{BCD}$;

en effet, $2 - 1Q = 2 - N^2 = 2 - 4\sin^2 \widehat{BCD} = 2\cos(2\widehat{BCD})$. De même, 3N −1C est le double du sinus de l'angle triple ; en effet, $3N - 1C = 3N - N^3 = 6\sin\widehat{BCD} - 8\sin^3 \widehat{BCD} = 2\sin(3\widehat{BCD})$, etc. Dans le texte de Viète, "perpendicularis" est le double du sinus de l'angle alors que "basis" est le double du cosinus. On peut donc résoudre facilement une équation du type $3x - x^3 = a$ (avec $a \in [-2 \,;\, +2]$) .

Viète donne l'exemple suivant :

> ***In notis 3 N — 1 C, æquetur √ 2. Quoniam poſito 1 ſinu toto, ſit √ 2 ſinus duplus anguli partium XLV, ideo 1 N eſt ſinus duplus anguli partium XV, vel etiam eſt ſinus duplus anguli partium XLV. Erit igitur 1 N radix binomia 2 — √ 2. Vel etiam √ 2.***
>
> ***3 N — 1 C, æquetur 1. Quoniam poſito 1 ſinu toto, ſit 1 ſinus duplus anguli partium XXX, ideo 1 N eſt ſinus duplus anguli partium X, vel etiam eſt ſinus duplus anguli partium L.***

Soit à résoudre : $3x - x^3 = \sqrt{2}$. On sait que $\sqrt{2} = 2\sin 45°$ donc si on pose $x = 2\sin\theta$, on a $2\sin 3\theta = 2\sin 45°$ donc $\theta = 15°$. Or, $\sin 15° = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30°}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ donc $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.[2]

Girard va exploiter totalement une idée similaire.

"Reigle pour résoudre l'équation de 1(3) esgale à (1)+(0) lors que le cube du tiers du nombre est majeur au quarré de la moitié des (0) par l'aide de la table des Sinus"

Il s'agit bien de résoudre $x^3 = px + q$ lorsque $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \rangle \left(\dfrac{q}{2}\right)^2$ c'est-à-dire $-4p^3 + 27q^2 \langle 0$.

Suivons donc pas à pas la « *Reigle pour résoudre l'équation de 1 (3) esgale à (1) + (0) ...* » .

L'exemple "générique" que traite Girard est $x^3 = 13x + 12$ mais nous allons exposer, en regard des citations du texte de Girard, l'algorithme de résolution dans le cas général $x^3 = px + q$.

D'une part, on considère $\dfrac{p}{3}$ puis sa racine $\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ et on fait leur produit : $\dfrac{p}{3}\sqrt{\dfrac{p}{3}}$. Le produit de ces deux nombres sera le « *diviseur* » de l'opération suivante.

« *le tiers du nombre des (1) est* $4\frac{1}{3}$ » (*i.e.* $\dfrac{p}{3} = \dfrac{13}{3} = 4 + \dfrac{1}{3}$)

« *Sa racine est en disme 20816(4)* » (le (4) signifie que la racine est 2,0816 avec 4 chiffres significatifs après la virgule)

« *leur produit est 9.0203(4) , diviseur* »

D'autre part, on considère $\dfrac{q}{2}$.

« *la moitié du (0) est 6* » (i.e. $\dfrac{q}{2} = 6$)

« *le raid 100 000, leur produit 600 000 dividende* ».[3]

[2] On trouve cette méthode utilisée dans certains problèmes de baccalauréat : par exemple le problème du bac E, Amiens 1984 (voir page 66 des Annales Nathan pour le Bac S 96).

[3] Le sinus d'un angle à l'époque n'est pas défini comme actuellement à l'aide du cercle trigonométrique de rayon 1, mais dépend du rayon du cercle considéré. Ce choix du raid 100 000, c'est-à-dire du rayon 100 000, correspond au fait qu'on prendra 5 chiffres significatifs pour le sinus (le sinus de Girard étant ainsi égal au nôtre multiplié par 100 000).

Le quotient est $\dfrac{\frac{q}{2}}{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}}$ qui est le sinus[4] d'un certain angle α: 41°41'87" . On ajoute 180° ; on obtient 221°41'87" (c'est-à-dire α+180°) ; on divise par 3, ce qui donne 73°53'52" ($\theta = \dfrac{\alpha+180}{3}$).

On prend le sinus de cet angle qu'on double puis multiplie par $\sqrt{\frac{p}{3}}$. Le résultat est donc $2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\theta$, qui est la solution de l'équation à résoudre.

« Or ayant ainsi un dividende et un diviseur, on aura un quotient 66515.

Sinus de	*41 deg.41.37*
adjoutez y par reigle	*180*
somme	*221. 41.37.*
son tiers	*73. 53. 52.*
son sinus	*96078*
son double	*192156*
multiplié par	*20816(4)*
viendra	*400000*

lequel divisé par le raid 100000

viendra 4 la valeur de 1(1) principale »

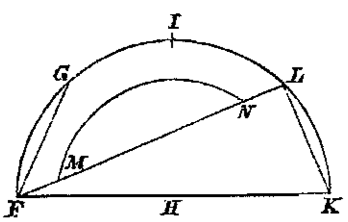
Girard ne donne pas de justifications de son résultat ; il s'agit en fait comme dans les calculs de Viète de l'utilisation de la formule donnant $\sin 3\theta$ à l'aide de $\sin\theta$. En effet, on obtient alors :

$x^3 - px = 8\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\sin^3\theta - 2p\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\theta = 2\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}(4\sin^3\theta - 3\sin\theta)$; or on reconnaît dans la parenthèse $-\sin 3\theta = -\sin(\alpha+180) = \sin\alpha$. Donc $x^3 - px = 2\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\alpha = q$.

Les deux autres solutions sont alors données grâce aux relations entre les coefficients et les racines de l'équation : une solution étant connue, on obtient facilement la somme et le produit des deux autres et donc l'équation du second degré qu'elles vérifient.

Girard propose ensuite « ***la mesme en geometrie de facile expedition*** » méthode géométrique que nous allons expliquer en langage moderne.

On construit la moyenne proportionnelle entre $\frac{p}{3}$ et 1, qu'on appelle FH. On a: $\dfrac{1}{FH} = \dfrac{FH}{\frac{p}{3}}$ i.e. $FH = \sqrt{\frac{p}{3}}$.



On considère alors le demi-cercle de centre H et de rayon FH. Alors : $\dfrac{q}{\frac{p}{3}} \langle 2FH$ car $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \langle \left(\frac{p}{3}\right)^3$ donc il existe un point G sur le demi-cercle tel que $FG = \dfrac{q}{\frac{p}{3}}$. Soit L tel que l'arc LK soit égal au tiers de l'arc GK.

On trace le cercle de centre H de rayon LK ; il coupe (FL) em M et N.

Alors les racines de l'équation sont FL, $-FN$, $-FM$.

Girard donne ce résultat sans l'expliquer. On peut cependant le comprendre en utilisant les lignes trigonométriques des angles concernés (en se souvenant que, contrairement à nous, Girard utilise des sinus et non des cosinus) :

[4] *"Or ayant ainsi un diviseur et un dividende, on aura un quotient 66 515"* : avec notre sinus, on obtiendrait 0,66 515.

$\dfrac{FL}{FK} = \cos\widehat{LFK} = \cos\theta$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{FG}{FK} = \cos\widehat{GFK} = \cos 3\theta$

Or $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ $\quad$ donc $\quad \dfrac{FG}{FK} + 3\dfrac{FL}{FK} = 4\dfrac{FL^3}{FK^3}$ $\quad$ d'où $\quad FL^3 = FK^2.\dfrac{FG}{4} + \dfrac{3}{4}.FK^2.FL$

Or $FK = 2\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ $\quad$ donc: $FK^2 = 4\times\dfrac{p}{3}$ $\quad$ soit $FG = \dfrac{q}{\frac{p}{3}} = 3\times\dfrac{q}{p}$ $\quad$ d'où $\quad FL^3 = 4\times\dfrac{p}{3}\times\dfrac{3q}{p}\times\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\times 4\times\dfrac{p}{3}\times FL$

Et finalement $\qquad FL^3 = pFL + q$

On peut également remarquer que FL est bien égal à la solution trouvée dans la règle algébrique :

$\dfrac{FL}{FK} = \cos\widehat{LFK} = \sin(90° - \widehat{LFK}) = \sin(90° - \dfrac{1}{3}\widehat{GKF}) = \sin(90° - \dfrac{1}{3}(90° - \widehat{GKF})) = \sin(60° + \dfrac{1}{3}\widehat{GKF})$.

Donc $FL = 2FH\sin\dfrac{180° + \widehat{GKF}}{3}$. Or $\widehat{GKF}$ est l'angle dont le sinus est $\dfrac{FG}{FK} = \dfrac{q}{\frac{p}{3}}\times\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{p}{3}}}$ et on retrouve la

règle énoncée plus haut.

FL est donc bien solution de $x^3 = px + q$.

Les deux autres solutions doivent vérifier :

$\begin{cases} x_1 + x_2 + FL = 0 \\ x_1 x_2 FL = q \end{cases}$ Or $FM = NL$ (cercles concentriques), donc $FM + FN = FM + MN + NL = FL$,

c'est-à-dire $(-FM) + (-FN) + FL = 0$.

De plus : $FM \,.\, FN = FH^2 - LK^2$ (puissance du point F par rapport au cercle de centre H de rayon LK).

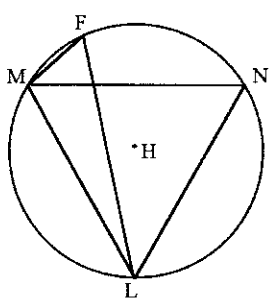
Donc : $FM \,.\, FN = FH^2 - (FK^2 - FL^2) = FH^2 - (4FH^2 - FL^2)$ car $FK = 2FH$.

$\qquad = FL^2 - 3FH^2 = FL^2 - p$ car $FH = \sqrt{\dfrac{p}{3}}$

Donc : $FM \,.\, FN \,.\, FL = FL^3 - pFL = q$ car $FL^3 = pFL + q$.

Donc : $(-FM).(-FN).FL = q$, $-FM$ et $-FN$ sont donc bien les deux autres solutions de l'équation.

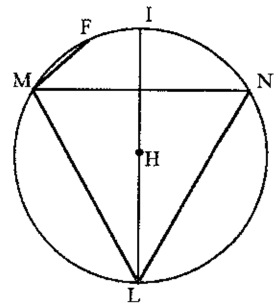
La fin du texte donne une autre méthode de construction géométrique des racines $-FM$ et $-FN$ de l'équation, FL ayant été trouvé comme précédemment.



On trace le triangle équilatéral LMN inscrit dans le cercle de centre H et de rayon $FH = \sqrt{\dfrac{p}{3}}$. Alors les deux autres racines de l'équation sont $-FM$ et $-FN$, résultat que Girard donne sans démonstration. On peut cependant comprendre ce résultat, soit à l'aide de propriétés géométriques démontrées par Ptolémée dans l'*Almageste* soit de manière plus moderne en utilisant des rotations (voir page suivante).

Girard donne ainsi une méthode élégante et originale pour résoudre les difficultés d'ordre algébrique posées par la méthode de Cardan dans le cas irréductible, en exploitant d'une manière remarquable les idées de Viète. Cette méthode est équivalente à mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe dont on doit extraire une racine cubique. Cette méthode « trigonométrique » reste toujours intéressante et peut être pratiquée par nos élèves comme dans le problème proposé à la rubrique « Dans nos classes ».

Une justification de la construction géométrique de Girard à l'aide du théorème de Ptolémée



$$LM = MN = NL = \sqrt{3} \times rayon = \sqrt{3}\sqrt{\frac{p}{3}} = \sqrt{p}$$

Comme $FL^3 = pFL + q$, on a:

$$FL^2 = p + \frac{q}{FL} \rangle\ p \quad \text{donc} \quad FL \rangle\ LM \quad \text{et} \quad FL \rangle\ MN$$

donc F est sur le petit arc MN.

Remarque :

Le quadrilatère FMNL est inscrit dans un cercle, donc : $FL \times MN = FM \times NL + FN \times ML$ (il s'agit de la relation communément appelée « théorème de Ptolémée », que celui-ci démontre dans l' *Almageste*) .

donc : $FL = FM + FN$ ou $-FM - FN + FL = 0$ (première relation souhaitée pour que FM et FN soient les deux autres solutions de l'équation).

Par ailleurs, I étant diamétralement opposé à L, on a :

$FL \times IM = FM \times IL + FI \times ML$ car FILM est inscrit dans un cercle

$FN \times IL = FI \times NL + IN \times FL$ car FINL est inscrit dans un cercle.

Donc $FM \times FN \times IL^2 = (FI \times NL + IN \times FL)\ (FL \times IM - FI \times ML)$

Or $IM = IN$ et $ML = NL$ donc on obtient :

$$FM \times FN \times IL^2 = (IN \times FL + FI \times NL)(FL \times IN - FI \times NL) = FL^2 \times IN^2 - FI^2 \times NL^2$$

Or $IL^2 = 4R^2 = \frac{4p}{3}$ et $IN^2 = R^2 = \frac{p}{3}$ et $FI^2 = IL^2 - FL^2 = \frac{4p}{3} - FL^2$

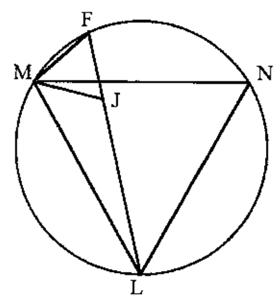
On obtient $FM \times FN \times \frac{4p}{3} = FL^2 \times \frac{p}{3} - \left(\frac{4p}{3} - FL^2\right) \times 3\frac{p}{3} = \frac{4p}{3} \times FL^2 - \frac{4p}{3} \times p$

$FM \times FN = FL^2 - p$

$FM \times FN \times FL = FL^3 - pFL = q$ car $FL^3 = pFL + q$

c'est-à-dire $(-FM)(-FN)FL = q$ ce qui est la deuxième relation que doivent satisfaire $-FM$ et $-FN$. Donc $-FM$ et $-FN$ sont bien les deux autres solutions de l'équation à résoudre.

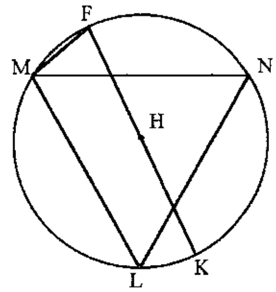
Une justification à la manière du bac S



Soit de même F sur le petit arc MN. Soit J sur [FL] tel que $FJ=FM$. Le triangle FMJ est équilatéral car $\widehat{(JFM)}=\widehat{(FMJ)}$ et $\widehat{(JFM)}= \widehat{(LNM)} = 60°$ (angles inscrits interceptant le même arc).

La rotation de centre M d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie donc L sur N et J sur F, donc $LJ = NF$.

Or $J \in [FL]$ donc $FJ + JL = FL$ donc $FM + FN = FL$, c'est-à-dire : $(-FM)+(-FN)+FL = 0$ (première relation souhaitée).



Rappelons que [FK] est un diamètre du cercle. Alors :

$$\frac{FM}{FK} = \cos\widehat{MFK} = \cos\left(\widehat{MFL} + \widehat{LFK}\right) = \cos\left(60°+\widehat{LFK}\right)$$

$$\frac{FN}{FK} = \cos\left(60°-\widehat{LFK}\right)$$

donc $$\frac{FM}{FK} \times \frac{FN}{FK} = \cos\left(60°+\widehat{LFK}\right) \times \cos\left(60°-\widehat{LFK}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 120° + \cos\left(2\widehat{LFK}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\cos 120° + 2\cos^2 \widehat{LFK} - 1\right)$$

Or $\cos\widehat{LFK} = \dfrac{FL}{FK}$ donc $\dfrac{FM}{FK} \times \dfrac{FN}{FK} = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{FL^2}{FK^2}$.

On obtient alors : $FM \times FN = -\dfrac{3}{4} FK^2 + FL^2$ or $FK^2 = 4 \times \dfrac{p}{3}$ donc: $FM \times FN = FL^3 - \dfrac{3}{4} \times \dfrac{p}{3}$

$FM \times FN \times FL = FL^3 - pFL = q$ *car* $FL^3 = pFL + q$

donc $(-FM)\,(-FN)\,FL = q$ (deuxième relation souhaitée).

Invention nouvelle

EN

L'ALGEBRE,

PAR

ALBERT GIRARD

MATHEMATICIEN.

Tant pour la solution des equations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science.

A AMSTERDAM.

Chez Guillaume Iansson Blaeuw.

M. DC. XXIX.

Extrait de *Invention nouvelle* EN *L'ALGEBRE* (paragraphe intitulé *Des équations ordonnées*)
par Albert GIRARD, G. I. Blaeuw, Amsterdam, 1629.

Reigle pour resoudre l'equation de 1 (3) esgale à (1) + (0) lors que le cube du tiers du nombre de (1) est majeur au quarré de la moitié des (0) par l'aide des tables de Sinus.

Soit 1 (3) esgale à 13 (1) + 12

Le tiers du nombre des (1) est $4\frac{1}{3}$	la moitié du (0) est 6
sa √ est en disme ☞ 20816 (4)	le raid 100000
leur produit est 9,0203 (4), diviseur	leur produit 600000, dividende

Or ayant ainsi un dividende & diviseur, on aura un quotient 66515

Sinus de 41 deg. 41'. 37''.
adjoustez y par reigle 180

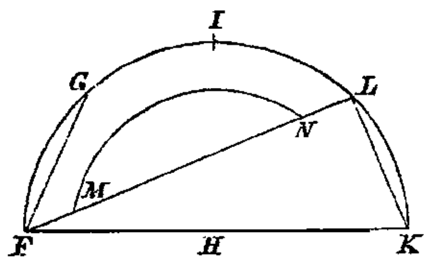
somme 221. 41. 37
son tiers 73. 53. 52
son sinus 96078
son double 192156
multiplié par ☞ 20816 (4)
viendra 400000

lequel divisé par le raid 100000
viendra 4 la valeur de 1 (1) principale

Car il y a encor deux valeurs qui sont chacune faite par —; parquoy appliquant (1) à la valeur trouvée 4, & ledit divisant l' (0) donné 12 : viendra 3, donnant le signe — à chacun, puis par reigle

1 (2) esgale à — 4 (1) — 3
les valeurs seront — 1 & — 3

Donc les 3 valeurs requises seront $\begin{cases} 4 \\ -3\,. \\ -1 \end{cases}$



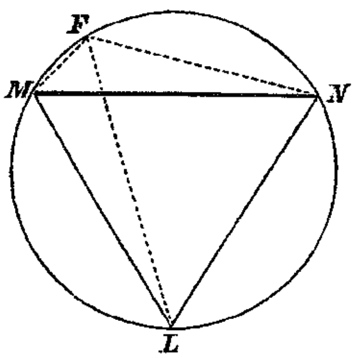
Le mesme en Geometrie de facile expedition.

Cy dessus 1 (3) estoit esgale à 13 (1) + 12 Le $\frac{1}{3}$ du 13 est $4\frac{1}{3}$, entre iceluy & l'unité soit trouvé une moyenne proportionnelle FH, icelle comme raid soit fait un demicercle, Or ledit $4\frac{1}{3}$ divisant le 12 donné, viendra $2\frac{10}{13}$, qui sera tousjours moindre au diametre de necessité, en l'accident present selon le tiltre de ceste equation: soit dont F G adaptée esgale à $2\frac{10}{13}$, puis soit trouvé geometriquement par le moyen de l'hyperbole le tiers de l'arc G K, ou bien mechaniquement avec le compas, (car il est impossible de coupper tout arc proposé en 3, sans user d'autres lignes que la droite & circulaire) & soit LK, puis de l'intervalle de la droite LK, comme raid, soit fait l'arc MN homocentrique, couppant la ligne F L en M, N, alors les trois valeurs de la 1 (1)

$$\text{seront}\left\{\begin{array}{l} FL \\ -FN \\ -FM \end{array}\right.$$

Notez, que si on eust proposé 1 (3) esgale à 13 (1) — 12, les trois valeurs eussent esté les mesmes, apres avoir changé les signes, assavoir

$$\left\{\begin{array}{l} -FL \\ FN \\ FM \end{array}\right.$$



On eust peu faire dans le cercle entier, apres avoir trouvé F L comme dessus, un triangle equilateral commençant en L ou à F, comme icy en L, puis de l'autre extremité F mener FM & FN, qui devront estre esgales aux F M, FN precedentes; aussi M N se trouveroit estre esgale à $\sqrt{13}$ (des 13 (1) données.)

Ceste equation donc qu'on n'a peu faire jusques à present est en Algebre litterale.

A cube esgal à (B q + B C + C q) A + B C (B + C) par l'aide de laquelle je l'avois bien resoute par deux ou trois manieres sans les Tables de Sinus; mais la maniere generale qui suivra en son lieu est à preferer: or icy A vaut B + C, ou — B, ou — C.

Une méthode de résolution d'une équation du troisième degré par François Viète

Martine Bühler

Adriaan Van Roomen (1561-1615) proposa aux mathématiciens de l'Europe un défi : résoudre une équation du 45ème degré. François Viète (1540-1603) y reconnut des similitudes avec l'expression de sin 45θ en fonction de sinθ et réussit ainsi, par un « changement de variable », à résoudre l'équation dont il donna les 23 solutions positives. Il explique dans « Ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum » (Paris 1595), comment cette méthode permet de résoudre certains types d'équations.

La réponse de Viète inspire le problème suivant qui a été donné en devoir à la maison dans une classe de Terminale Scientifique.

L'intérêt du problème réside dans la résolution d'une équation du troisième degré dans le cas dit « irréductible » : la méthode de Cardan mènerait à une équation du second degré dont les solutions sont complexes, et donc à l'extraction d'une racine cubique de nombre complexe (voir à ce sujet le conte du lundi du présent numéro et le texte de Girard sur les équations du troisième degré). Le problème reprend une méthode de Viète consistant à faire un changement de variable introduisant les fonctions trigonométriques, puis à utiliser les formules permettant d'exprimer sin $3a$ à l'aide de sin$a$. La fin du problème permet de souligner la généralité des liens entre coefficients et racines d'une équation polynomiale, liens que les élèves ne rencontrent que pour le second degré.

I Préliminaires

A) Soit $Z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

1) Mettre Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2) En déduire : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

B) 1) Développer $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$

2) En déduire l'expression de $\sin 3\alpha$ en fonction de $\sin\alpha$ et celle de $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$.

II Etude du nombre de solutions réelles distinctes de l'équation (E) : $x^3 - 3x + a = 0 \quad (a \in IR)$

1) Montrer, en justifiant soigneusement toutes vos affirmations que si $a \in\ ]-2\ ;\ 2[$, (E) possède trois racines réelles distinctes x_1, x_2, x_3 , toutes trois situées dans $]-2\ ;\ 2[$.

2) En indiquant rapidement la méthode employée, mais sans justifications précises, indiquer le nombre de racines réelles distinctes de (E) lorsque :

a) $a = 2$ b) $a = -2$ c) $a > 2$ d) $a < -2$

Pour c) et d), on pourra examiner le signe de $x^3 - 3x + a$ pour $x = -a$.

III Intermède pour les latinistes

Viète écrit le texte suivant à la fin du XVI$^{\text{ème}}$ siècle. $1N$ désigne l'inconnue (notre « x »). $1C$ désigne le cube de l'inconnue (« x^3 »)

1) Pouvez-vous traduire le texte? (Attention! « radicem binomiae $2-\sqrt{3}$ » désigne le nombre $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Vous interpréterez de façon analogue l'expression « radicem trinomiae a+b+c ».)

P R O B L E M A I.

Data magnitudine cui æquatur 3 N − 1 C, invenire 1 N.

I. 3 N — 1 C, æquetur $\sqrt{}$ 2. Dico 1 N esse radicem binomiæ 2 — $\sqrt{}$ 3.
Vel etiam, $\sqrt{}$ 2.

II. 3 N — 1 C, æquetur radici binomiæ $\frac{3}{2}$ — $\sqrt{}$ $\frac{5}{4}$. Dico 1 N esse radicem trinomiæ $\frac{9}{4}$ — $\sqrt{}$ $\frac{5}{16}$ — rad. bin. $\frac{15}{8}$ + $\sqrt{}$ $\frac{45}{64}$.
Vel etiam, radicem binomiæ $\frac{3}{2}$ + $\sqrt{}$ $\frac{5}{4}$.

III. 3 N — 1 C, æquetur radici binomiæ $\frac{5}{2}$ + $\sqrt{}$ $\frac{5}{4}$. Dico 1 N esse radicem trinomiæ $\frac{7}{4}$ — $\sqrt{}$ $\frac{5}{16}$ + rad. bino. $\frac{15}{8}$ + $\sqrt{}$ $\frac{45}{64}$.
Vel etiam, rad. bino. $\sqrt{}$ $\frac{5}{4}$ — $\frac{5}{2}$.

Sed 3 N — 1 C, æquetur 1. Ecquis vero 1 N primam, secundam-ve (est enim duplex) accurate construxerit?

2) A quel cas étudié au II se rapporte chacun des exemples de Viète?

Plus loin dans le texte, Viète indique sa méthode de résolution que la partie IV du problème va reprendre dans notre langage moderne.

IV Résolution de (E) : $x^3 - 3x + \sqrt{2} = 0$

1) a) En utilisant les résultats obtenus au II, indiquer le nombre de racines réelles distinctes de (E) et leur localisation.

b) Pourquoi peut-on poser, pour résoudre (E), $x = 2\sin\alpha$ avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$?

2) On pose $x = 2\sin\alpha$ avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer : x solution de (E) $\Leftrightarrow$ $\sin 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, l'équation d'inconnue α : $\sin 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) En utilisant $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

d) Déduire de ce qui précède les valeurs des trois racines x_1, x_2, x_3. de (E). Comparer vos résultats avec ceux donnés par Viète.

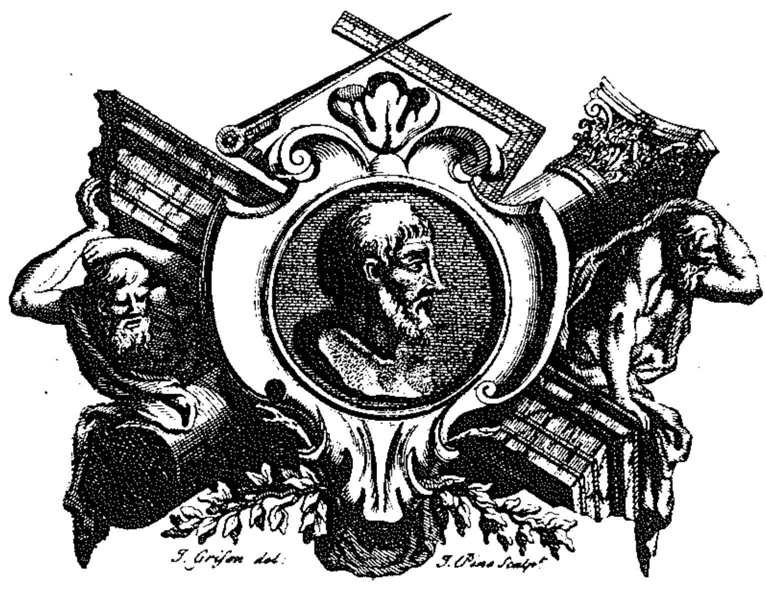
V Remarque sur les coefficients et les racines de l'équation.

1) Factoriser $x^3 - 3x + \sqrt{2}$

2) Calculer : $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$ puis $\sqrt{2-\sqrt{3}}.\sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{3}}$

VIETE (1540-1603) est une figure dominante du XVI$^{\text{ème}}$ siècle. Il est célèbre pour son traité d'algèbre In artem analyticam isagoge, publié en 1591, où il développe l'algèbre symbolique.

Il fut un des premiers à mettre en évidence les relations entre les formules trigonométriques et la résolution d'équations polynomiales.



FRANCISCI VIETÆ

AD

PROBLEMA, QVOD OMNIBVS MATHEMATICIS TOTIVS ORBIS CONSTRUENDUM PROPOSUIT

ADRIANUS ROMANUS,

RESPONSVM.

SI toto terrarum orbe non errat ADRIANVS ROMANVS, dum Mathematicos totius terrarum orbis unius ſui Problematis ſolutioni vix cenſet idoneos, non ille ſaltem Gallias, nec Galliarum Lycia ſuo dimenſus eſt radio. Cedat ROMANO Belga, cedat ROMANVS Belgæ, vix ſinet Gallus à ROMANO vel Belga gloriam ſuam ſibi præripi. Ego qui me Mathematicum non profiteor, ſed quem, ſi quando vacat, delectant Mathematices ſtudia, Problema ADRIANICVM ut legi ut ſolvi, nec me malus abſtulit error. Sic trihorio ingens prodii Geometra. Neque vero placet barbarum idioma, id eſt; Algebricum. Geometrica Geometrice tracto, Analytica Analytice. Curabo tamen ut me, ſive quaſi Geometram ſive novum Analyſtam, vulgus Algebriſtarum ſatis exaudiat.

CAPVT I.

Proponentis Adriani Romani verba.

PRimum igitur Adriani Romani proponentis ipſa verba refero, ne immutato quidem commate.

PROBLEMA MATHEMATICVM OMNIBVS ORBIS MATHEMATICIS AD CONSTRVENDVM PROPOSITVM. "

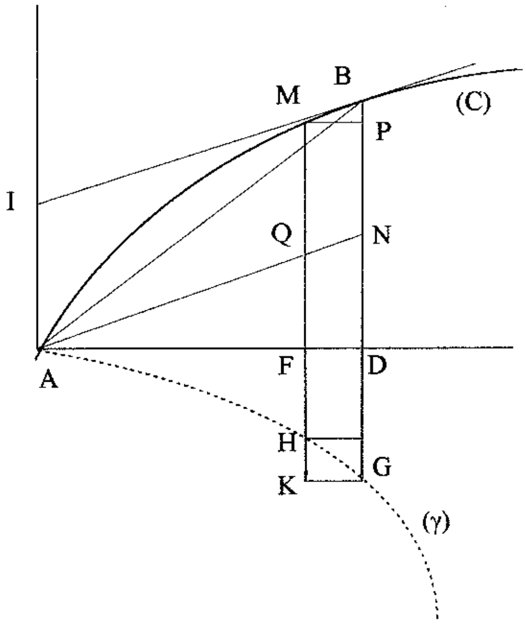
Si duorum terminorum prioris ad poſteriorem proportio ſit, ut 1 (1) ad "
45 (1) — 3795 (3) + 9,5634 (5) — 113,8500 (7) + 781,1375 (9) — 3451, 2075 (11) + 1, "
0530, 6075 (13) — 2, 3267, 6280 (15) + 3,8494, 2375 (17) — 4, 8849, 4125 (19) "
+ 4,8384, 1809 (21) — 3, 7865, 8800 (23) + 2, 3603, 0652 (25) — 1, 1767, 9100 "
(27) + 4695, 5700 (29) — 1494, 5040 (31) + 376, 4565 (33) — 74, 0459 (35) + "
11, 1150 (37) — 1, 2300 (39) + 945 (41) — 45 (43) + 1 (45) deturque terminus "
poſterior, invenire priorem.

Viète Opera Mathematica recognita F. à Schooten, Leyde, 1646, p 305.

COURRIER DES LECTEURS

Voici un courrier qui nous a été adressé par Henry Plane, suite à la publication du numéro précédent, dans lequel il a été question, à plusieurs reprises, de courbes quadratrices utilisées par Leibniz.

Les aires équivalentes, outil de démonstration.
La « quadratrice géométrique »
OZANAM *Géométrie pratique* (fin 17ème siècle)



Soit un arc AB d'une courbe (C) de « diamètre » AD (le diamètre est la droite orthogonale à la « touchante » (tangente) en A à (C)), [BD] est l' «ordonnée » de B. (l'angle $\widehat{ADB}$ est droit). Les tangentes en A et B se coupent en I. La parallèle en A à (BI) recoupe (BD) en N. Ozanam prolonge BD de DG = AI =BN. Lorsque B décrit (C), G engendre une courbe (γ) la « quadratrice géométrique» de (C). Si on envisage un point M de (C) voisin de B, son ordonnée MF coupe (AN) en Q et (γ) en H. On ajoute les points P et K tels que : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{KG}$, selon les notations actuelles.

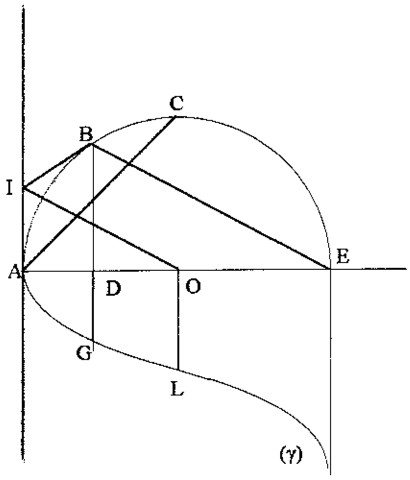
Alors Ozanam écrit : « *M est infiniment proche de B ; l'arc BM est infiniment petit et pourra passer pour une ligne droite partie de la touchante BI* ».

Il s'ensuit que l'aire du rectangle DGKF équivaut à l'aire du « parallélogramme » BNQM (base DG = base BN et même hauteur FD). Si on considère maintenant ce parallélogramme de base MB et de hauteur la distance de A à [BI] son aire sera double de celle du triangle ABM.

Enfin lorsque M tend vers B, H tend vers G sur (γ) ainsi que K.

Si on additionne tous les triangles AMB relatifs à l'arc de (C) d'une part et tous les rectangles DGKF de (γ) il est, avec Ozanam, « *aisé de conclure* » :
Aire (ADGH) = 2 Aire du segment AB de (C) (Segment : portion du plan entre un arc de courbe et sa corde). Ainsi est établie une relation entre une aire liée à (C) et une liée à sa quadratrice géométrique (γ).

Application : cas du cercle



Soit un demi–cercle ACE de diamètre AOE = 2r. Avec les notations précédentes il apparaît, en plus, que (OI) et (EB) sont parallèles et que les triangles OAI et EDB sont semblables .

L'aire de la surface limitée par (γ) ADOLG est le double de l'aire du segment AC du disque :

Aire ($\frac{1}{4}$ disque) = Aire (segment AC) + Aire (Triangle AOC)

$$= \frac{1}{2} \text{ Aire (ADOLG)} + \frac{r^2}{2}.$$

Par ailleurs les triangles semblables permettent d'écrire :

$$\frac{AI}{AO} = \frac{BD}{DE}, \quad \text{ou : } \frac{AI^2}{AO^2} = \frac{BD^2}{DE^2} = \frac{AD.DE}{DE^2}, \quad \text{donc : } \frac{DG^2}{r^2} = \frac{AD}{DE} \ \textbf{(1)}.$$

Recherche d'une équation cartésienne de (γ).

Prenons comme axes la tangente en A et le diamètre AE. Soient GG' et LL' les coordonnées de G et L sur le premier axe. Posons : AG' = DG = x et AD = y.

(Toutes ces grandeurs sont ainsi positives, Ozanam ne l'imaginait pas autrement).

La relation **(1)** s'écrit : $\frac{x^2}{r^2} = \frac{y}{2r - y}$, alors : $y\,r^2 = x^2\,(2r - y)$

soit : $y\left(r^2 + x^2\right) = 2r\,x^2$ et donc : $y = \frac{2rx^2}{r^2 + x^2}$.

Ozanam écrit cette relation : $y = \frac{2x^2}{r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{r^2}}$, expression qu'il développe :

$$y = \frac{2x^2}{r} \cdot \left[1 - \frac{x^2}{r^2} + \frac{x^4}{r^4} - \frac{x^6}{r^6} + \ldots\right] = \frac{2x^2}{r} - \frac{2x^4}{r^3} + \frac{x^6}{r^5} + \ldots$$

Il peut alors en usant de la sommation des puissances donnée par Pascal, calculer l'aire S de la surface (AGLL') limitée par (γ) avec x variant de 0 à r ($AL' = OA$). De là, il tirera l'aire de la surface (AGLOD).

Ozanam sait donc que la somme de 0 à r des x^2 est $\frac{r^3}{3}$, des x^4 est $\frac{r^5}{5}$, etc...

Il a donc : $$S = \frac{2r^3}{3r} - \frac{2r^5}{5r^3} + \frac{2r^7}{7r^5} + \ldots = r^2\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \ldots\right]$$

Ensuite : Aire (AGLOD) = Aire (AL'LO) – Aire (AL'LG) $= r^2 - S$

$$= r^2\left[1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \ldots\right]$$

Mais : Aire (segment AC) = $\frac{1}{2}$ Aire (AGLOD) $= r^2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...\right]$

Aire ($\frac{1}{4}$ disque) = Aire (segment AC) + Aire (triangle AOC)

= Aire (segment AC)+ $\frac{r^2}{2}$ $= r^2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...\right]$

Ozanam peut écrire : Aire (disque) = $\frac{1}{2}$ (longueur du cercle × rayon), d'où la relation :

$$\frac{1}{4}.\frac{r.cercle}{2} = r^2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...\right] \quad \text{et : } \frac{cercle}{2r} = 4\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...\right]$$

c'est à dire le rapport : $\frac{cercle}{diamètre} = 4\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...\right]$.

Ozanam effectue les différences deux à deux $1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}-\frac{1}{7} = \frac{2}{5.7}$; etc...

Il retient : $\frac{circonférence}{diamètre} = 8\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+...\right]$.

Cette série hélas converge très lentement. Les dix premiers termes donnent 3,092 ! Ozanam en a calculé 315 et obtient le rapport 3,14000528. Il écrit : nous nous servirons de $\frac{314}{100}$ parce que cela suffit pour les calculs ordinaires de la géométrie pratique.

<u>Autre application :</u> <u>cas de la parabole.</u>

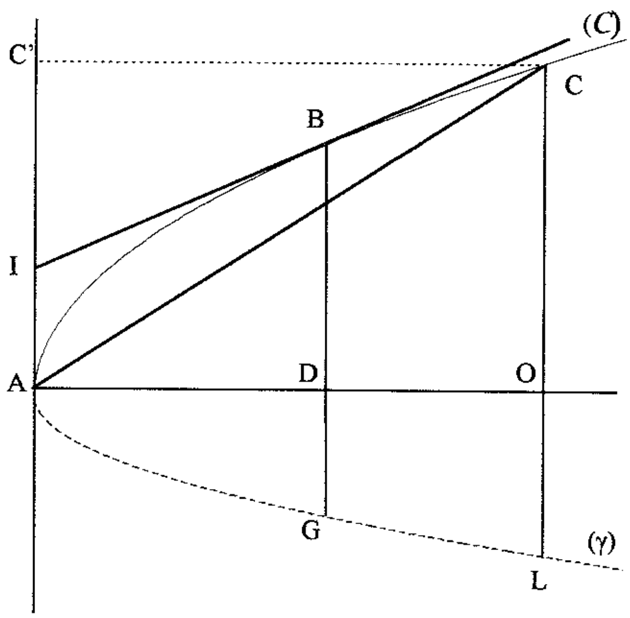
Il n'est pas besoin ici de la sommation des puissances. La démonstration est toute géométrique à partir de la propriété de la quadratrice géométrique.

Avec les mêmes notations : l'arc ABC est celui d'une parabole et on connaît la propriété : $AI = \frac{1}{2}\ DB$.

Donc la quadratrice (γ) est également une parabole puisque $DG = \frac{1}{2} DB$.

Ozanam ne parle pas d'affinité mais il sait que : Aire (ADOLG) = $\frac{1}{2}$ Aire (ADOCB). Comme on a toujours : Aire (ADOLG) = $\frac{1}{2}$ Aire (segment ABC de la parabole),

il vient : 4 × Aire (segment ABC) = Aire (ADOCB).



Mais : Aire (ADOCB) = Aire (segment ABC) + Aire (triangle AOC)

donc : 3 × Aire (segment ABC) = Aire (triangle AOC).

Comme l'aire du triangle AOC est la moitié de l'aire (AOCC'), on peut écrire :

Aire (ADOCB) = 4 × Aire (segment ABC)

Aire (AOCC') = 6 × Aire (segment ABC),

et, avec Ozanam : « *L'aire de la parabole est à celle du parallélogramme de même base et de même hauteur comme 2 est à 3* ».

En effet, la propriété est exacte si A est un point quelconque de la parabole et non seulement son sommet. Il est accessoire que le « diamètre » AD soit orthogonal à la « touchante » en A.

Généralisation.

Selon ce raisonnement, on démontrera que pour toute courbe (C) telle que : $DB^k = AD$ $(y^k = x)$, on aura :

$$\text{Aire (AOCB)} = \frac{k}{k+1} \times \text{Aire (AOCC')}.$$

L'aire sous la courbe (C) est à celle d'un parallélogramme de même base et de même hauteur comme k est à k+1.

Le groupe M.:A.T.H.
(Mathématiques : Approche par les Textes Historiques)

vous propose :

La revue Mnémosyne pour échanger expériences et réflexion à propos de l'histoire et de l'enseignement des mathématiques.

Numéro 1 : La démonstration par exhaustion chez les grecs et les arabes M.F. Jozeau	26F	200 gr
Numéro 2 : La querelle entre Descartes et Fermat à propos des tangentes. M. Grégoire	30 F	210 gr
Numéro 3 : Fragments d'une étude des systèmes linéaires A. Michel-Pajus	30 F	220 gr
Numéro 4-5 : Elaboration du calcul des variations et ses applications à la dynamique F. Viot	40 F	300 gr
Numéro 6 : Leibniz et l'école continentale J.L Verley	30 F	220 gr
Numéro 7 : Autour du théorème de Fermat C. Goldstein	33 F	230 gr
Numéro 8 : Isaac Newton. Détermination de tangentes à des courbes à l'aide de la méthode des fluxions J.L. Verley	33 F	250 gr
Numéro 9 : Desargues et Pappus R. Tossut	33 F	240 gr
Numéro 10 : Le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries A. Michel-Pajus	33 F	260 gr
Numéro 11 : Des cartes-portulans à la formule d'Eward Wright : l'histoire des cartes à "rumbs" M.T. Gambin	33 F	255 gr
Numéro 12 : Histoire de quelques projections cartographiques M. Benedittini	33 F	250 gr
Numéro 13 : Histoire et origine du calcul différentiel G.W. Leibniz / présentation de A. Michel-Pajus	33 F	200 gr
Numéro spécial : Histoires de Pyramides M. Grégoire	46 F	380 gr

Nous vous indiquons le prix des brochures sans le port, le poids et le tarif postal pour calculer le coût du port.

Poids jusqu'à	Ordinaires
20 g	3,00 F
50 g	4,50 F
100 g	6,70 F
250 g	11,50 F
500 g	16,00 F
1000 g	21,00 F
2000 g	28,00 F
3000 g	33,00 F

BON DE COMMANDE

Je désire recevoir les numéros suivants de Mnémosyne:

prix port

n°1

n°2

n°3

n°4

n°5

n°6

n°7

n°8

n°9

n°10

n°11

n°12

n°13

n°14

n°spécial

Total :

Nom:

Prénom:

Adresse:

Date:

Ci-joint un chèque d'un montant de

à l'ordre de l'Agent Comptable de l'Université Denis Diderot Paris 7

Désirez-vous recevoir une facture? oui non

Comité de rédaction:

Philippe BRIN	*Lycée Technique E.Branly Créteil* *Animateur à l'IREM Paris VII*
Martine BÜHLER	*Lycée Flora Tristan Noisy le Grand* *Animatrice à l'IREM Paris VII*
Michèle GREGOIRE	*Lycée Lavoisier Paris* *Animatrice à l'IREM Paris VII*
Maryvonne HALLEZ	*Collège Paul Bert Paris* *Animatrice à l'IREM Paris VII*
Marie-Françoise JOZEAU	*Lycée G. de Nerval Luzarches* *Animatrice à l'IREM Paris VII*
Odile KOUTEYNIKOFF	*Lycée Lakanal Sceaux* *Animatrice à l'IREM Paris VII*
Anne MICHEL-PAJUS	*Lycée Claude Bernard Paris* *Animatrice à l'IREM Paris VII*
Jean-Luc VERLEY	*Université Paris VII* *IREM Paris VII*

avec la collaboration de :

Michèle BATHIER-FAUVET, Lycée Langevin Wallon Champigny/Marne

Jean-Pierre FRIEDELMEYER, IREM de Strasbourg

Marianne GUILLEMOT et Henry PLANE

<u>Courrier à adresser à</u> : **Groupe M.: A.T.H.**

IREM de l'Université Denis DIDEROT
Paris VII
Tour 55-56 3ème étage
75 005 PARIS

Pour échanger expériences et réflexions à propos de l'histoire et de l'enseignement des mathématiques

M.: *Mathématiques*
A. *Approche par les*
T. *Textes*
H. *Historiques*

SOMMAIRE

En vente au prix de 5,00 Euros

Editeur : IREM
Directeur responsable de la publication :
M. ARTIGUE
Dépôt légal : Juillet 1998
ISBN : 2–86612–174–0
IREM Université Paris VII Denis Diderot
Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel : 01 44 27 53 83