INTEGRATION DE CALCULATRICES COMPLEXES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU LYCEE

M. ARTIGUE, B. DEFOUAD, M. DUPERIER,
G. JUGE, J.B. LAGRANGE

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE 1

PARTIE I. PRESENTATION GLOBALE DE L'ETUDE

I.1. Problématique 3
I.2. Cadre théorique 6
I.3. Méthodologie 11

PARTIE II. OBSERVATIONS DE CLASSE ET INGENIERIE

Le projet d'ingénierie : les choix initiaux 13
L'expérimentation 14
Chapitre 1. Observations de classe 1995-96 15
INTRODUCTION 15
OBSERVATION 1 (Classe A) : introduction de la notion de dérivée 19
OBSERVATION 2 (Classe B) : introduction de la notion de dérivée 27
OBSERVATION 3 (Classe A) : La cuve, un problème d'optimisation 33
OBSERVATION 4 (Classe B) : La cuve, un problème d'optimisation avec généralisation 44
Chapitre 2. Ingénierie : introduction des limites et dérivées
INGENIERIE 1. Le travail algébrique et fonctionnel préparatoire à l'analyse 56
INGENIERIE 2. Une première approche des limites 75
INGENIERIE 3. Les dérivées 94
Chapitre 3. Ingénierie : propriétés et applications des limites et dérivées
INGENIERIE 4. Propriétés algébriques des limites et dérivées 138
INGENIERIE 5. Interprétation cinématique de la notion de dérivée 169
INGENIERIE 6. Recherche de fonctions sous contraintes : le raccord de tuyaux 182

PARTIE III. LES SUIVIS D'ELEVES

Chapitre 1. Le suivi par questionnaires aux élèves 194
Le premier questionnaire 195
Le deuxième questionnaire 214
Le troisième questionnaire 230
Synthèse et comparaison des deux classes 243
Interprétation 247
Chapitre 2. Le suivi par entretiens
Les élèves suivis 250
Les entretiens 253
Synthèse des observations sur chaque élève 328
Synthèse des observations réalisées par entretiens dans chaque classe 333
Interprétation 337

CONCLUSION

Les processus d'instrumentation des TI92 chez les élèves 370

L'intégration des TI92 dans le quotidien de la classe 376

Table des annexes

PARTIE II. OBSERVATIONS DE CLASSE ET INGENIERIE

Chapitre 1

Annexe : Enoncé donné aux élèves (cuve : observations 3 et 4) 64

Chapitre 2

Annexe 1 : Rappel des étapes du cours sur les limites 86
Annexe 2 : Limites de racines d'une équation du second d° 92
Annexe 3 : Résumé de cours sur les dérivées 94

Chapitre 3

INGENIERIE 4

Annexe 1, limites : fonctions à entrer et résultats TI92 158
Annexe 2, limites : polycopié élève 159
Annexe 3 : exemples des élèves pour les limites de produits 161
Annexe 4, dérivées : polycopié élève 165
Annexe 5, dérivées : prévisions des élèves pour les dérivées 168

INGENIERIE 5

Annexe 1 : Diagrammes phase 1 178
Annexe 2 : Diagrammes phase 2 179
Annexe 3 : Diagrammes phase 3 180
Annexe 4 : Diagrammes produits par des élèves 181

PARTIE III. LES SUIVIS D'ELEVES

Chapitre 2. Le suivi par entretiens

Annexe 1 : Enoncé du devoir spécifique TI-92 339
Annexe 2 : Correction du devoir spécifique TI-92 340
Annexe 3 : Données recueillies sur chaque élève (classe A) 342
Annexe 4 : Données recueillies sur chaque élève (classe B) 362

INTRODUCTION GENERALE

L'objet de ce rapport est l'étude des modes d'appropriation de calculatrices complexes intégrant des possibilités de calcul symbolique et de géométrie par des élèves de lycée. Il s'agit aussi d'étudier la mise en relation de ces modes d'appropriation avec les stratégies développées par les enseignants pour intégrer efficacement ces outils à l'enseignement des mathématiques.

La recherche porte plus précisément sur l'intégration de la calculatrice TI92, seul produit de ce type actuellement sur le marché, dans deux classes de 1ere S situées l'une à Chartres (classe A dans la suite), l'autre à Caen (classe B dans la suite) et dont les enseignants respectifs Michèle Dupérier et Guy Juge avaient été membres du groupe Calcul Formel de la DITEN. L'expérimentation de Caen a été suivie et analysée par Jean–Baptiste Lagrange, celle de Chartres par Michèle Artigue en collaboration avec Badr Defouad, doctorant en didactique des mathématiques.

L'étude se situe dans le prolongement de la recherche menée de 1993 à 1995 par l'équipe DIDIREM sur l'intégration du logiciel DERIVE à l'enseignement des mathématiques (Abboud, Artigue, Drouhard, Lagrange, 1995) ; c'est pourquoi ce sont les dimensions déjà présentes dans le logiciel DERIVE, c'est à dire les dimensions de calcul symbolique et de représentation graphique qui ont plus spécialement été prises en compte.

Pour ne pas risquer d'aborder les questions d'intégration sous un angle trop réducteur par rapport à la complexité des processus qui nous semblaient en jeu, nous avons décidé de recueillir et de croiser l'analyse d'un ensemble de données diversifiées issues notamment :

- d'observations régulières de séances de classe, au cours des années 1995-96 et 1996-97, portant sur l'enseignement de l'analyse,
- du suivi des élèves des deux classes par le biais de trois questionnaires passés un par trimestre pendant l'année 1995-96,
- du suivi par entretien pendant l'année 1995-96 d'un nombre plus limité d'élèves (neuf dans une classe et sept dans l'autre) choisis pour présenter des profils diversifiés tant dans leur rapport aux mathématiques que dans leur rapport aux technologies informatiques.

Nous rendons compte dans ce rapport du travail effectué. Après avoir précisé la problématique et la méthodologie de l'étude (partie I), nous présentons successivement ses différentes composantes : l'observation de classes et l'ingénierie construite à partir de ces observations sur limites et dérivées (partie II), le suivi des élèves par questionnaire et entretien (partie III). Nous terminons classiquement en tirant les leçons de cette recherche et en indiquant les directions dans lesquelles elle se poursuit actuellement.

Pour la partie II, nous avons effectué une synthèse, à partir d'un certain nombre d'observations menées dans l'une ou l'autre classe pendant l'année 1995-96 qui nous semblaient particulièrement représentatives et réorganisé la présentation autour de celle de l'ingénierie élaborée à l'issue de ces observations, ingénierie qui a, elle, été testée pendant l'année 1996-97. Pour la parties III, après une introduction générale, nous présentons les résultats et analyses, questionnaire par questionnaire, puis entretien par entretien, en différenciant à chaque fois les deux classes.

Nous voudrions, pour terminer cette introduction, remercier tous ceux qui nous ont aidés à la réalisation de cette étude et notamment les élèves qui ont accepté, avec tant de gentillesse, notre intrusion dans leur travail privé lors des observations, ainsi que dans les entretiens.

PARTIE I.
PRESENTATION GLOBALE DE L'ETUDE

Nous allons dans cette partie présenter tout d'abord la problématique de l'étude, ses fondements théoriques ainsi que les principaux choix méthodologiques effectués. Nous en viendrons ensuite à une description suivant les trois composantes expérimentales distinguées dans l'introduction : observations de classes, suivis d'élèves et questionnaires. Pour chaque composante, nous préciserons les objectifs du travail mené, les formes qu'il a prises dans les deux classes et la façon dont il en est rendu compte dans les parties correspondantes du rapport.

1. Problématique

La problématique de cette étude est celle de l'intégration des technologies informatiques dans l'enseignement des Mathématiques. Il est bien connu qu'en dépit des multiples actions institutionnelles menées avec constance depuis plus de dix ans, pour soutenir l'équipement informatique des établissements, la production de logiciels, la formation des enseignants, l'innovation et la recherche, l'intégration des technologies informatiques reste très limitée.

Ces difficultés tendent à enfermer l'intégration des technologies informatiques dans une sorte de cercle vicieux : les difficultés rencontrées tendent à maintenir le système éducatif dans la phase de "militantisme pionnier" qui accompagne régulièrement les innovations technologiques. Cet esprit militant permet à l'innovation de survivre et se développer, dans un système éducatif qui, le plus souvent, n'est pas écologiquement prêt à l'accepter. Mais inversement, nous faisons l'hypothèse que cet état qui perdure empêche de poser de façon satisfaisante et efficace les problèmes d'intégration, en conduisant à sous-estimer ou même à occulter des problèmes épistémologiques, cognitifs ou institutionnels importants.

Cette analyse renvoie automatiquement à une autre question : celle de la légitimité et de la légitimation des moyens de l'enseignement. Qu'est-ce qui peut motiver, légitimer dans l'institution scolaire, une évolution des moyens de l'enseignement , qu'est-ce qui peut inciter l'institution et ses acteurs à en supporter le coût qui n'est jamais, quoi qu'en disent les militants enthousiastes, un coût faible ? Si l'on examine les discours tenus à propos des technologies informatiques, on voit apparaître deux grandes catégories de raisons :

- des raisons que nous qualifierons d'externes car elles puisent leurs arguments en dehors de l'Ecole même, dans l'intégration de ces technologies à notre culture, dans le fonctionnement actuel de notre société et expriment le fait que l'Ecole ne peut rester un point singulier dans cette intégration culturelle globale, faute de perdre sa crédibilité,
- des raisons que nous qualifierons d'internes car elles puisent leurs arguments dans le souci d'améliorer l'efficacité du fonctionnement du système scolaire lui-même. Il s'agit alors d'affirmations sur les gains permis tant au niveau des apprentissages que de la gestion des enseignements par ces technologies. Dans cette optique, les technologies informatiques sont présentées comme des outils de remédiation pour le système scolaire. Il s'agit grâce à elles de surmonter les motivations défaillantes, de résoudre les problèmes difficiles et récurrents que pose l'apprentissage des mathématiques.

Il s'agit là d'une tendance normale. On la retrouve à l'oeuvre dans chaque tentative de modification, réussie ou non, des moyens de l'enseignement. De la même façon, et c'est inévitable, on verra les promoteurs de ces nouveaux moyens, pour vaincre les résistances, être induits à minimiser les coûts et difficultés du changement et à en surestimer les bénéfices potentiels, à forcer sur la dimension « remède miracle ». Mais le déficit d'analyse, le déficit en formations efficaces qui en résultent, jouent en revanche à l'encontre du changement et si ce dernier ne s'impose pas rapidement, le système risque de s'enfoncer dans le cercle vicieux que nous mentionnions plus haut.

Ce dont nous faisons aujourd'hui l'hypothèse, de part notre expérience d'enseignement et de recherche dans ce domaine, c'est que la dimension « remédiation » n'est pas celle qui peut assurer aujourd'hui l'intégration des technologies informatiques. Ce qui va permettre leur développement, c'est en premier lieu, leur légitimité culturelle mais aussi scientifique. Les technologies informatiques sont les instruments du mathématicien d'aujourd'hui, et nous prenons ici le terme mathématicien au sens large pour inclure toute personne entretenant un rapport professionnel soutenu à cette discipline. Les questions qui se posent alors sont les suivantes :

- Qu'est-ce qu'apprendre des mathématiques avec de tels instruments ?
- Comment gérer au mieux la progression dans les instruments disponibles au fil de l'apprentissage mathématique ?
- Quelles connaissances sont nécessaires à la gestion efficace de ces technologies comme instruments du travail mathématique pour l'élève, comme moyens de l'enseignement pour le professeur ?
- Comment ces connaissances imbriquent-elles connaissances mathématiques et connaissance de l'outil ? Comment s'articulent-elles avec les connaissances attendues de l'institution qui sont encore aujourd'hui définies essentiellement indépendamment de ces outils ? A quels problèmes d'incompatibilité, de décalages peut-on s'attendre ? Comment les surmonter ?

Ces questions multiples mais imbriquées sont au coeur de l'étude présente. Nous voudrions préciser un peu plus notre position par rapport à la première d'entre elles. Le travail que nous avons mené sur l'intégration du logiciel DERIVE a en effet attiré notre attention sur un certain nombre de phénomènes qu'il nous semble nécessaire de prendre en compte dans l'étude de cette question. Nous voudrions en évoquer ici trois plus particulièrement :

Les phénomènes liés à l'informatisation des savoirs mathématiques et de leur gestion

Nous avons montré que l'introduction d'un environnement informatique tel que DERIVE, par les transpositions du savoir mathématique et des moyens d'accès à ce savoir qu'il implique, du fait de l'informatisation, tant au niveau interne qu'à l'interface, produit des phénomènes spécifiques qui influent de façon importante sur le fonctionnement des élèves et des situations de classe. Nous avons en particulier identifié des phénomènes de pseudo-transparence, liés à de subtils décalages entre les caractéristiques DERIVE et papier/crayon, et des phénomènes de double transposition qui influent sur l'interprétation que les élèves vont se faire d'une tâche donnée, des moyens légitimes pour la résoudre, de la nature même des résultats attendus.

Les phénomènes liés aux rapports entre dimensions technique et conceptuelle de l'activité mathématique

Nous avons aussi mis en évidence des décalages importants entre les attentes des enseignants et la réalité du fonctionnement des classes que nous étions amenés à observer et ceci nous a conduit à interroger une hypothèse plus ou moins explicite dans ces attentes, concernant les capacités offertes par de tels environnements pour déplacer l'activité mathématique de l'élève du « technique » vers le « stratégique » et le « conceptuel ». Nous avons sur ce point montré que la réalité était beaucoup plus complexe et que le travail dans l'environnement DERIVE mettait en jeu deux tendances antagonistes :

- la première favorisant effectivement une certaine distanciation par rapport à l'action et le travail réflexif souhaité,
- la seconde favorisant au contraire l'économie de la réflexion ou la diminution de la cohérence globale des actions,

un équilibre satisfaisant entre ces deux tendances n'étant pas toujours évident à trouver.

D'autre part, nous avons été amenés à constater que, même s'il prenait des formes différentes, le travail technique continuait à jouer, dans l'environnement DERIVE, un rôle essentiel.

A la réflexion, la question du déplacement du « technique » vers « l'heuristique » et le « conceptuel » apparaît comme une question fortement marquée idéologiquement et il importe, nous semble-t-il, de prendre en compte dans son analyse, cet environnement idéologique et nous reprenons sur ce point un extrait de (Artigue, 1996).

« Le développement des technologies informatiques pour l'enseignement et l'apprentissage est contemporain du rejet des théories behaviouristes de l'apprentissage et de la montée en puissance des théories constructivistes, qui se distinguent par les formes plus ou moins radicales qu'elles ont pu prendre, mais qui toutes partent du principe que l'apprentissage est un processus adaptatif de l'individu confronté à des situations problématiques pour lui, que la connaissance n'est pas reçue passivement via les sens ou la communication mais résulte de l'activité du sujet.

Ces théories amènent à jeter un regard très critique sur les pratiques traditionnelles de l'enseignement, perçues comme des pratiques de type « transmissif », fondées sur le discours de l'enseignant et non sur l'activité de l'élève, où d'autre part le souci d'une efficacité technique fondée sur l'imitation et la répétition semble l'emporter sur le souci de compréhension, de conceptualisation.

La réalité du fonctionnement des pratiques traditionnelles est sans aucun doute plus complexe que cette description schématique ne tend à le suggérer mais ce n'est pas notre propos ici. Nous voudrions simplement souligner que les technologies informatiques vont « naturellement » trouver leur place dans l'édifice qui se construit : les micro mondes tels LOGO reflètent les principes théoriques du constructivisme, les activités de programmation permises par les langages informatiques permettent de passer du niveau de l'action à celui de la planification et du contrôle de l'action, les moyens techniques offerts par ces nouveaux outils du travail mathématique laissent entrevoir la possibilité d'un meilleur équilibre dans l'enseignement entre le développement de l'efficacité technique et celui de la compréhension.

La volonté ensuite de promouvoir l'intégration des technologies informatiques, une intégration qui se heurte, dans l'institution scolaire, à des obstacles matériels mais aussi culturels particulièrement résistants, va favoriser la transformation d'hypothèses raisonnables en convictions assurées, en arguments de promotion des technologies nouvelles.

De même, la critique des pratiques d'enseignement traditionnelles va conduire à une péjoration du travail technique en mathématiques, perçu comme un travail vide de sens, et à une opposition forte entre ces deux dimensions pourtant étroitement imbriquées dans l'activité mathématique que sont la dimension technique et la dimension conceptuelle »

Les phénomènes liés à la complexité de l'outil

En effet, dans la recherche DERIVE, nous avons été confrontés très souvent aux effets induits par une connaissance insuffisante du logiciel, l'utilisation essentiellement épisodique du logiciel repérée favorisant bien sûr l'apparition de ces phénomènes. Nous avons aussi été frappés par le caractère secondaire que revêtait cette dimension de connaissance de l'outil dans les anticipations que nous étions à même de faire des séances prévues. Il est clair que l'utilisation dans l'enseignement d'objets complexes comme DERIVE ou la TI92 modifie profondément les rapports qui, culturellement, se sont installés vis à vis des instruments dans le travail mathématique et que la recherche doit se donner les moyens de surmonter en quelque sorte des rapports culturels inadaptés.

2. Cadre théorique

Le cadre théorique de l'étude, compte tenu de ce qui précède, ne peut se réduire à un simple cadre cognitif, même si c'est souvent le cas dans les travaux concernant l'apprentissage des mathématiques en environnement informatique, notamment dans les recherches menées jusqu'à présent sur les systèmes de mathématiques symboliques. Nous faisons même l'hypothèse que, dans une certaine mesure, nous devons rompre avec des modes de pensée fortement induits par ces approches.

Comme pour la recherche DERIVE déjà citée, nous nous appuierons donc sur des approches permettant, au delà du seul cognitif, de prendre en compte les transpositions du savoir en jeu dans les environnements informatiques d'apprentissage ainsi que les interactions entre maître, élèves et savoir qui se nouent dans la structure sociale que constitue la classe. Nous faisons là référence aux instruments conceptuels de la théorie des situations didactiques classique (Brousseau, 1986, 1988) et à la notion de transposition informatique développée par N. Balacheff (Balacheff, 1994) dans le cadre plus global de la théorie de la transposition didactique.

Mais une telle approche nous semble aujourd'hui à elle seule insuffisante pour poser et étudier efficacement les problèmes d'intégration des technologies informatiques dont les dimensions écologique, culturelle et institutionnelle sont essentielles. Nous trouvons sur ce plan un appui dans l'approche anthropologique développée par Y. Chevallard (Chevallard, 1991, 1992).

Nos fondements théoriques doivent enfin nous permettre de prendre en compte de façon efficace la dimension instrumentale des apprentissages en environnement informatique. Sur ce plan particulier, il nous a semblé intéressant de nous référer aux travaux des chercheurs en ergonomie cognitive qui, contrairement à nous mathématiciens, ont l'habitude de travailler sur des apprentissages prenant place dans des environnements technologiquement complexes.

Nous précisons ci-après ce que nous retenons en priorité de ces différentes approches.

A. Ce que nous retenons en priorité de la théorie des situations didactiques

Cette théorie nous conduit à percevoir, de façon classique, l'apprentissage comme un processus d'adaptation, où les connaissances apparaissent comme des moyens de maîtriser des situations de nature sociale, et à distinguer, dans la modélisation des phénomènes d'adaptation en jeu dans une session d'enseignement, deux catégories principales : des adaptations qualifiées d'a-didactiques et des adaptations qualifiées de didactiques, le fonctionnement global de l'élève résultant d'une imbrication de ces deux types d'adaptation.

Les adaptations a-didactiques sont celles qui mettent en jeu un sujet modélisé comme sujet "cognitif" : les adaptations s'effectuent par rapport à une situation vécue comme mathématiquement problématique, mais sans que l'on y fasse intervenir pour autant de régulation didactique. Elles sont analysables en termes d'actions (dont la mise en oeuvre de techniques), organisées ou non en stratégies, de coût ; leur signification est recherchée en identifiant les prises de décisions dans un ensemble de possibles, compte tenu des possibilités d'actions et des rétroactions offertes par le "milieu".

L'introduction d'environnements informatiques nous conduit à prendre en compte dans l'analyse de ces adaptations a-didactiques la nécessaire imbrication d'adaptations de nature mathématique et d'adaptations à l'environnement informatique. Nous y reviendrons à propos de la notion de milieu.

Les adaptations didactiques sont celles qui mettent en jeu un sujet modélisé comme sujet "institutionnel". Elles s'effectuent en particulier en s'appuyant sur les connaissances de l'élève relatives à la coutume didactique et au contrat didactique, c'est à dire relevant de règles parfois explicites mais le plus souvent implicites qui règlent les attentes respectives et le jeu des acteurs de la relation didactique.

Dans la théorie des situations didactiques, le "milieu a-didactique" (Brousseau, 1988) est défini comme le système antagoniste du sujet dans le jeu a-didactique qui modélise une situation donnée. L'élève agit sur le milieu et les modifications du milieu fournissent en retour à l'élève des rétroactions qui vont guider les adaptations. C'est par le milieu qu'est médiatisée la relation a-didactique au savoir mathématique et son analyse est donc essentielle. Le milieu a-didactique est composé d'objets, objets matériels mais aussi objets mathématiques suffisamment familiers pour que le rapport des élèves à ces derniers puisse être considéré comme stable (au moins momentanément). Dans l'enseignement traditionnel des mathématiques, la complexité du milieu est directement liée à celle de ses composants mathématiques, les composants matériels sont en effet généralement simples et peu nombreux. L'utilisation d'environnements informatiques ou même de calculatrices bouleverse ces équilibres usuels entre composants mathématiques et non mathématiques et confronte l'enseignant et le didacticien à des difficultés nouvelles. Comme nous l'avions montré dans (Abboud, Artigue, Drouhard, Lagrange, 1995), nous avons en particulier tendance à considérer trop rapidement comme des rapports inertes, stabilisés, les rapports des élèves aux éléments basiques de l'environnement informatique, à minimiser et mal contrôler le rôle joué dans l'adaptation a-didactique par l'adaptation à cet environnement. En d'autres termes, nos analyses ne prennent pas suffisamment en compte tout le passage du logiciel et de l'ordinateur plus généralement, de l'état d'artefact à celui d'instrument au service du travail mathématique de l'élève. Nous reviendrons sur ce point dans la partie III.

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, il nous semble donc ici particulièrement important de s'interroger sur les caractéristiques générales des milieux intégrant l'utilisation de la TI92, mais aussi sur les caractéristiques du milieu dans telle ou telle situation précise, pour donner sens aux comportements observés. Il nous semble aussi important de s'interroger sur le pilotage possible de certaines de ces caractéristiques pour favoriser les adaptations souhaitées ainsi que sur les décalages éventuels constatés entre analyse a priori et réalisations effectives, entre les rapports supposés des élèves à l'environnement informatique et les rapports effectifs.

B. Ce que nous retenons en priorité de la transposition informatique des savoirs

Une autre dimension essentielle, du point de vue théorique, nous semble celle du fonctionnement des savoirs. Nous nous référons sur ce point à la théorie de la transposition didactique développée elle aussi par Y. Chevallard (Chevallard, 1985), mais en incorporant à cette dernière, les raffinements introduits par N. Balacheff, via la notion de transposition informatique (Balacheff, 1994). Le concept de transposition didactique renvoie à un besoin : celui de ne pas confondre les mathématiques enseignées avec de simples élémentarisations de la connaissance savante et de se donner les moyens, pour les comprendre, de prendre en compte les processus qui les façonnent. Même dans les cas, fréquents en mathématiques, où le savoir enseigné semble dériver directement des mathématiques savantes, ces processus sont en effet complexes. La théorie de la transposition didactique nous aide à éviter toute naïveté dans ce domaine, elle nous aide aussi à repérer les régularités existantes dans les différentes étapes du processus de transposition, des savoirs de référence aux savoirs effectivement enseignés dans les classes et à en identifier les raisons.

L'introduction d'environnements informatiques nous conduit à complexifier le schéma classique : savoirs de référence - savoirs à enseigner - savoirs enseignés, en prenant en compte les contraintes liées à l'implémentation informatique des savoirs (transposition informatique). Ces nouvelles contraintes vont intervenir à deux niveaux différents : celui de la représentation et du traitement interne des savoirs en machine, et celui de la représentation et du traitement à l'interface.

Le travail analytique d'identification des contraintes est essentiel pour comprendre les fonctionnements possibles du savoir permis par un logiciel donné, pour analyser les décalages nécessairement existants avec les fonctionnements scolaires usuels de ce savoir et identifier les conflits et les problèmes de légitimité institutionnelle qui peuvent en résulter. Il permet aussi, à un second niveau, comme le souligne Balacheff d'aborder la question de la validité épistémologique du logiciel, une validité qui, selon lui, s'inscrit dans trois dimensions au moins : celle de l'espace de problèmes auquel l'environnement donne accès, celle des caractéristiques fonctionnelles et sémiotiques de l'interface, celle enfin de la cohérence interne et de la tolérance du dispositif qui met en jeu à la fois l'univers interne et l'interface.

C. Ce que nous retenons en priorité de l'approche anthropologique

Nous nous référons ici à l'approche anthropologique du didactique développée ces dernières années par Y. Chevallard et ses élèves (Bosch, 1994). Cette approche nous semble essentielle pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, elle nous permet de penser la question de l'intégration, de façon globale, en la considérant comme un phénomène social et institutionnel, et de prendre de la distance avec les cadres d'analyse épistémologiques et cognitifs, qui sont le plus souvent utilisés, pour restituer leur place nécessaire aux dimensions écologiques et institutionnelles de l'analyse.

En particulier, elle nous conduit à interroger, en termes de viabilité écologique, les environnements utilisés, qu'il s'agisse de DERIVE ou de la TI92, compte tenu des contraintes institutionnelles actuelles et à rapporter les données recueillies à cette analyse. Elle nous conduit aussi à nous interroger sur le coût didactique des fonctionnements observés et à analyser, en fonction de ces coûts, leurs possibilités d'intégration par le système. Ces questions, de l'ordre du macrodidactique, sont essentielles dans la perspective qui est la nôtre.

Ensuite, l'approche anthropologique nous aide également à penser la dimension technique et instrumentale du travail mathématique qui, dans les analyses didactiques, est souvent laissée au second plan, au profit d'analyses de nature plus conceptuelle. Pour Y. Chevallard, les objets mathématiques n'existent pas en eux-mêmes mais émergent de systèmes de pratiques, des pratiques qui sont nécessairement des pratiques institutionnelles, au sens large donné à ce terme dans la théorie. Il appelle "praxèmes" ces objets pris dans des pratiques, en insistant sur le fait que, si certains objets mathématiques nous paraissent exister par eux-mêmes, c'est du fait de la naturalisation des pratiques associées : stables, naturalisées, elles nous deviennent transparentes.

Cette approche par les pratiques conduit à accorder une attention toute particulière à la dimension "technique" de l'activité mathématique ainsi qu'à ses moyens sémiotiques. En effet, toute activité mathématique provient alors de la mise en pratique, par les acteurs de cette activité, d'une technique - le mot technique prenant bien sûr par là même un sens beaucoup plus général que celui qui lui est attribué usuellement - les techniques les plus fréquentes tendant à être normalisées au sein des institutions dans lesquelles elles vivent sous formes de "techniques officielles". Le travail technique s'appuie sur des "ostensifs" qui sont les moyens sémiotiques de l'activité et appartiennent à des registres sémiotiques variés. La question de l'analyse de l'activité mathématique se pose alors en termes d'analyse de techniques, de technologies (discours accompagnant et justifiant ces techniques) et de théories conçues, à un second niveau, comme technologies de la technologie. La question de l'apprentissage mathématique se pose, quant à elle, en termes de rapports personnels et institutionnels à des objets donnés et de leur développement articulé.

Ce point de vue nous semble particulièrement intéressant dans un contexte comme celui étudié ici où l'introduction d'un nouvel instrument pour l'activité mathématique peut déstabiliser le champ des pratiques associées à un objet donné et où il appartient donc, pour comprendre certains phénomènes didactiques, d'étudier ces déstabilisations. Pour ce faire, il faut d'une part rendre à nouveau visibles et interrogeables par l'analyse didactique, des pratiques devenues transparentes, d'autre part s'interroger sur les modifications susceptibles d'intervenir dans l'économie des techniques et leur signification en termes d'apprentissage du fait des modifications sémiotiques et instrumentales apportées à l'activité mathématique.

D. Ce que nous retenons en priorité des travaux en ergonomie cognitive.

Nous nous référons plus particulièrement au cadre théorique développé par P. Rabardel à propos de la notion d'instrument dans un ouvrage de synthèse publié récemment (Rabardel, 1995). La transformation d'artefacts en instruments y apparaît comme le résultat de processus

complexes qui mettent en jeu à la fois le sujet avec ses compétences cognitives, l'artefact et l'objet vers lequel l'action instrumentale est dirigée, les relations entre ces trois pôles (sujet - artefact - objet) étant conditionnées par les environnements sociaux dans lequel elles s'inscrivent. Ceci conduit P. Rabardel à considérer un instrument comme une entité mixte formée :

- « d'une part, d'un artefact, matériel ou symbolique, produit par le sujet ou par d'autres,
- d'autre part, d'un ou des schèmes d'utilisation associés, résultant d'une construction propre du sujet, autonome ou d'une appropriation de schèmes sociaux d'utilisation déjà formés extérieurement à lui . » (p.117)

Ces schèmes d'utilisation sont pluri-fonctionnels : ils remplissent en effet « des fonctions épistémiques tournées vers la compréhension des situations, des fonctions pragmatiques tournées vers la transformation de la situation et l'obtention de résultats, des fonctions heuristiques orientant et contrôlant l'activité » (p.116). Ils peuvent prendre différentes formes et P. Rabardel distingue entre ce qu'il appelle des schèmes d'usage associés aux tâches dites « secondes » (relevant de la gestion des caractéristiques et propriétés spécifiques de l'artefact) et des schèmes d'action instrumentée, en référence à la notion d'acte instrumental chez Vygotsky, associés aux tâches dites « premières » (orientées vers l'action sur objet de l'activité).

L'analyse de la genèse instrumentale s'organise alors suivant deux dimensions principales :

- « l'instrumentalisation » dirigée vers l'artefact et pouvant produire, via l'attribution de fonctions à l'artefact, des transformations de ce dernier ou des phénomènes de catachrèse[1],
- « l'instrumentation » dirigée vers le sujet qui conduit à l'élaboration ou l'appropriation de schèmes d'usage et d'action instrumentée.

L'analyse du rôle des artefacts dans l'activité des sujets s'organise, elle aussi, suivant deux dimensions principales :

- la première est celle des contraintes introduites par l'artefact et de leurs effets,
- la seconde est celle des possibilités permises par l'artefact, formulées en termes de ressources, types d'actions, formes d'organisations.

Dans la recherche menée avec la TI92, la référence à un tel cadre théorique nous semble particulièrement utile pour essayer de comprendre les processus qui sous-tendent l'intégration de la machine à l'activité mathématique des élèves et les transformations que la machine fait subir à cette activité, pour essayer de comprendre ce que peut signifier une instrumentation mathématique efficace, au niveau d'enseignement considéré, identifier les contraintes auxquelles elle doit faire face, penser des stratégies d'enseignement viables et raisonnablement efficaces.

[1] « Métaphore lexicalisée (qui n'est plus sentie comme une figure). Ex. : les ailes d'un château, d'un moulin » (Dictionnaire Le Robert).

3. Méthodologie

Compte tenu de ce qui précède, il nous a semblé nécessaire de recourir pour l'étude à un recueil de données diversifié, concernant à la fois les enseignants, les élèves, le fonctionnement des classes ainsi que plus globalement le fonctionnement institutionnel.

Pour ce qui est des élèves, nous avons choisi d'essayer de cerner les processus d'intégration de la calculatrice et l'effet de cette intégration sur les représentations des élèves et sur leurs pratiques mathématiques, à la fois par des questionnaires et des entretiens. Les questionnaires nous permettaient de nous adresser "économiquement" à l'ensemble des classes concernées mais ne nous donnaient accès que très superficiellement aux rapports que nous cherchions à cerner. Les entretiens nous permettraient, nous l'espérions, d'appréhender plus en profondeur les processus d'intégration et leurs effets, en nous aidant à reconstituer des biographies d'élèves et à essayer de déterminer l'influence sur ces biographies de certaines variables qui nous paraissaient a priori pouvoir jouer un rôle important dans les processus étudiés.

Pour ce qui est des enseignants, nous avons décidé d'essayer de cerner leurs stratégies d'intégration de la calculatrice à travers les documents produits pour faciliter aux élèves la prise en mains de la machine, la progression au fil de l'année dans l'introduction des commandes de la calculatrice, le type d'intégration effectivement pratiqué dans les séances d'enseignement. Nous souhaitions nous appuyer sur trois types de données : les documents de familiarisation, les cahiers de bord des enseignants, l'observation régulière de séances d'enseignement. En fait, la rédaction régulière d'un cahier de bord mentionnant pour chaque séance son thème et ses objectifs, les types d'utilisation et leur durée approximative au cours de la séance, les applications et commandes sollicitées, en distinguant ce qui était a priori prévu de ce qui résultait de décisions en temps réel, le tout accompagné des commentaires nécessaires à la compréhension de décisions prises, s'est révélé beaucoup trop coûteux pour cette première année d'expérimentation où tout était à mettre en place dans l'urgence. Nous nous sommes donc finalement contentés des deux autres sources de données.

Pour ce qui est du fonctionnement des classes, nous avons procédé à des observations régulières : une par mois environ, l'éloignement des sites d'observation rendant une fréquence plus grande peu réaliste. Nous avons cherché de ce fait à centrer les observations sur la partie analyse de l'enseignement qui correspondait plus directement aux choix globaux effectués.

Pour ce qui est du fonctionnement institutionnel, nous avons profité du système de contrôles communs bi-trimestriels qui existait dans l'établissement de Chartres, pour, à partir des textes de ces contrôles négociés au sein de l'équipe enseignante, avoir accès aux attentes de l'institution à ce niveau. Les élèves de la classe expérimentale disposaient des calculatrices pour ces contrôles. Nous avons systématiquement organisé les entretiens peu après un contrôle commun pour pouvoir faire reconstituer par les élèves leur utilisation de la machine lors du contrôle et essayer de mettre en rapport cette reconstitution avec leur production écrite et leurs résultats. Nous n'avons pas en revanche systématiquement comparé les résultats de la classe à ceux des autres classes, comme nous aurions pu le faire. Selon l'enseignante, l'utilisation des machines n'entraînait visiblement pas de décalage important entre les résultats de la classe expérimentale et ceux des autres classes. Compte tenu de cette appréciation, il ne nous a pas paru judicieux d'accorder plus d'importance dans le recueil des données et l'analyse à cette dimension.

Nous avons enfin organisé en fin d'année, un contrôle spécifique machine pour les deux classes. Lorsque les élèves disposaient de leurs machines pour les contrôles communs, les rédactions fournies ne devaient pas porter la trace de l'utilisation de la machine. Le contrôle spécifique visait à instaurer, quant à lui, un tout autre contrat plus conforme à l'idée d'intégration et à étudier son fonctionnement. Il comportait des questions considérées à ce moment là de l'année comme routinières du point de vue des techniques et compétences mises en jeu. Pour ces questions, les élèves n'avaient pas à justifier les productions de la machine. En revanche, pour les questions relatives à des tâches que l'on ne pouvait considérer comme routinières, les élèves ne pouvaient se contenter de s'appuyer sur les résultats fournis par la machine. Le contrôle spécifique se distinguait également des contrôles ordinaires sur d'autres plans bien que la tâche principale envisagée soit une tâche classique d'étude de fonction : une plus grande autonomie était laissée à l'élève dans son travail mathématique classique et le contrôle comportait une question complètement nouvelle pour eux qui visait à tester leurs possibilités d'adaptation à cette nouveauté dans un environnement instrumenté. Enfin, il comportait également une question spécifique à l'instrumentation qui demandait d'expliquer des différences constatées en production machine et production papier/crayon.

PARTIE II.
OBSERVATIONS DE CLASSE ET INGENIERIE

LE PROJET D'INGENIERIE : LES CHOIX INITIAUX

Notre ambition est de construire un produit raisonnable dans le domaine de l'analyse : (dérivées, limites, études de suites), en tenant compte de la culture dominante au lycée et en exploitant les potentialités de la TI92 pour engager l'élève dans une réelle activité mathématique. Le projet, conformément à l'esprit des programmes, est centré sur le pôle de la dérivation, même s'il commence à donner sens à la notion de limite. L'exploitation de la TI92 est principalement guidée par deux principes :

- l'interaction du travail mathématique dans les cadres numériques, graphiques et algébrique,
- les potentialités offertes par le calcul formel de la machine :

  - pour susciter et soutenir un travail sur l'analyse et le sens des expressions algébriques, sur le pilotage des calculs algébriques,

  - pour étendre le travail expérimental usuellement mené dans les cadres numériques et graphiques au cadre algébrique, en prenant appui notamment sur la recherche d'analogies formelles,

  - pour faciliter l'intégration de l'algèbre au travail de preuve en mathématiques, à un moment où les compétences algébriques sont encore mal assurées,

  - pour favoriser l'engagement des élèves dans des processus de généralisation.

Il nous semble en effet important, dès le niveau du lycée, au delà de l'étude d'objets spécifiques, de commencer à faire rencontrer aux élèves des problèmes amenant à des généralisations. Nous le ferons d'une part à travers l'étude de quelques situations fonctionnelles dépendant de paramètres et où une première phase du travail sur des cas particuliers met en évidence des régularités que l'on met ensuite à l'épreuve (le problème de la bille et celui de la cuve en sont des exemples typiques), d'autre part en cherchant à formuler des lois générales à partir de données fournies par le module de calcul formel de la calculatrice, dans un processus analogue à celui développé pour les factorisations du polynôme X^n-1 dans la recherche antérieure, au même niveau d'enseignement (ceci se fera notamment pour mettre en place l'algèbre des limites et celle des dérivées). Dans ces deux types de situations, pour des raisons différentes, l'appui de la TI92 et notamment de ses possibilités de calcul formel joue un rôle essentiel.

En ce qui concerne l'intégration de la TI92 à un tel enseignement, il nous semble important également de ne pas sous-estimer les problèmes liés à l'instrumentation de la calculatrice et de les prendre en charge dans l'élaboration de l'ingénierie. Il s'agit de choisir quelles commandes seront officiellement introduites et quand, de penser la construction des connaissances spécifiques nécessaires à cette instrumentation, notamment celles nécessaires à l'interprétation et au contrôle des productions de la machine, et leur articulation avec les connaissances usuellement visées par l'institution. En particulier, pour éviter le développement de pseudo-objets formels (Monaghan, 1994), il nous semble important de ne pas introduire trop

prématurément les commandes de calcul formel de limites et de dérivées de l'application HOME.

Sur la base de ces principes généraux, de nombreux choix sont bien sûr possibles. Nous essaierons de préciser, de façon argumentée, les principaux choix que nous avons faits. Nous le ferons en distinguant trois grandes pôles dans l'ingénierie : le travail préliminaire sur l'algèbre et les fonctions, les limites, les dérivées.

L'expérimentation

Nous avons mené des expérimentations de décembre 1995 à juin 1997 dans les classes de Première S de Michèle Duperrier (classes A, Chartres) et de Guy Juge (classes B, Caen) en nous centrant sur le domaine de l'analyse.

Sur le plan de la réalisation effective, nous nous appuyons à la fois sur les expérimentations menées à Chartres et à Caen. Une fois les grands choix collectivement définis par le groupe, les séances ont de fait été élaborées sur l'un des deux sites puis transmises à l'autre, les deux groupes se partageant le travail d'élaboration. Les deux enseignants ayant des formes de travail différentes, l'un privilégiant plus un travail autonome des élèves à partir de fiches détaillées, l'autre un travail plus collectif, les scénarios élaborés ont été adaptés par l'enseignant récepteur à ses formes de travail en classe et donné lieu à des mises en scène sensiblement différentes. Nous ne chercherons pas à gommer ces différences inéluctables dans le processus d'appropriation par un enseignant d'un scénario d'enseignement, qu'il ait ou non participé à sa définition.

La première année, 1995-96, peut être considérée, pour cette composante de l'étude, comme une année de pré-expérimentation. Nous avons essayé de préciser les potentialités de la TI92 mais aussi de repérer les difficultés que pouvait poser l'intégration d'un tel outil et qu'il fallait se préparer à gérer. Nous illustrerons cette phase du travail dans un premier chapitre, en présentant quelques unes de ces situations et les analyses associées.

Sur la base de ces analyses, nous avons ensuite élaboré le projet global d'ingénierie concernant le pôle : « limites et dérivées » qui a été expérimenté pendant l'année scolaire 1996-97. Dans un deuxième chapitre, nous présentons les situations clefs de cette ingénierie concernant le travail algébrique et l'introduction des notions. Dans un troisième chapitre, nous exposons la partie de l'ingénierie qui porte sur les propriétés des limites et dérivées, l'aspect cinématique de la dérivée et sur la dimension « outil » de la notion de dérivée dans l'étude de situations fonctionnelles.

Précisons que nous nous appuierons plus spécialement sur l'expérimentation menée à Chartres pour ce qui concerne le travail préliminaire à l'analyse, l'introduction des limites et dérivées (chapitre II), et sur l'expérimentation menée à Caen pour ce qui concerne la mise en place du calcul symbolique des limites et dérivées (chapitre III).

Chapitre 1
Observations de classe 1995-96

INTRODUCTION

L'objectif des observations de classe régulièrement effectuées au cours de l'année 1995-96, était d'avoir accès de façon directe au fonctionnement de classes avec la TI92, de situer ce fonctionnement par rapport à celui observé dans l'environnement DERIVE, pour étudier notamment les modifications de contraintes apportées par le changement d'environnement, ses effets sur la gestion des situations par l'enseignant ainsi que de façon plus globale sur l'économie du système didactique. Nous précisons dans ce qui suit les situations observées dans chaque classe, les conditions d'observation et leur évolution au fil de l'année scolaire.

A. Les situations observées en 1995/96

Dans la classe A, six séances ont été observées. Les thèmes, objectifs, et formes globales de fonctionnement en sont décrites dans le tableau ci-après.

Date	Thèmes	Objectifs	Type de séance
20 Décembre	Prise en mains de la TI92 Notion de dérivée	Familiarisation TI92 Introduction cinématique de la notion de dérivée Lien vitesse / notion "algébrique" de tangente	Séance de deux heures en classe entière, alternant phases collectives et travail par binômes
22 Janvier	Optimisation	Modélisation d'une situation physique Exploitation de la notion de dérivée pour la résolution d'un problème d'optimisation.	Séance en demi-groupes (1h par demi-groupe) suivie d'une synthèse collective d'une heure
11 Mars	Limites à l'infini	Exploration avec la TI92 de situations d'indétermination Elaboration de stratégies d'étude pour les limites de fonctions polynômes et rationnelles	Séance de deux heures en classe entière
1 Avril	Dérivées de fonctions composées	Elaboration de conjectures par utilisation du tableur Formulation du théorème et exploitation	Séance de deux heures en classe entière
20 Mai	Suites	Introduction de la calculatrice dans l'étude des suites (sens de variation)	Deux séances d'une heure en demi-groupe
3 Juin	Suites	Etude d'une suite définie par récurrence avec la TI92	Séance d'une heure en classe entière

Toutes les séances observées alternent étroitement phases collectives de nature didactique et phases de travail en binômes de nature plus a-didactique.

Dans la classe B, six situations ont également été observées. Le tableau ci-après les présente globalement en distinguant trois types de fonctionnement : manipulation guidée, enseignement d'une notion, résolution de problèmes.

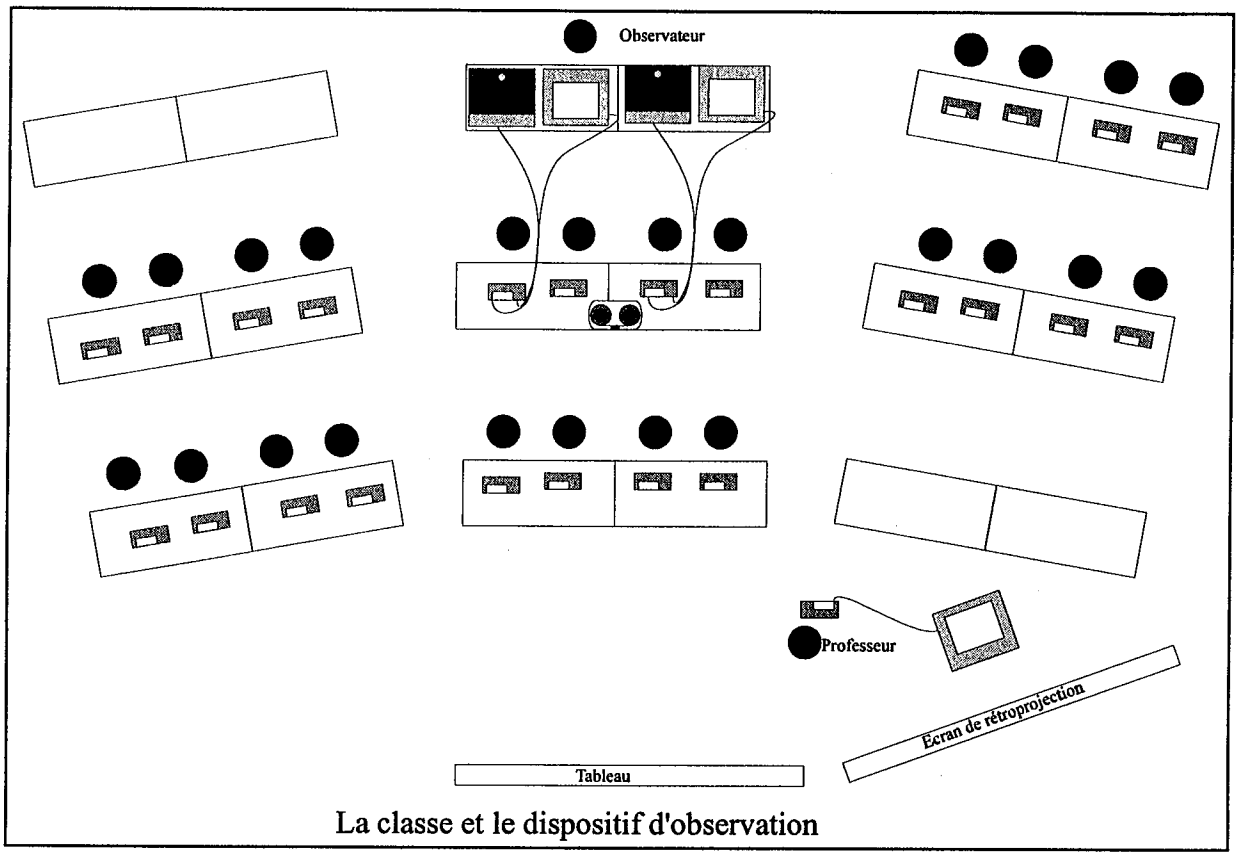
Séances	Notions abordées	Objectif	Type de situation
21 Décembre Gestion de la mémoire	Gestion des variables et "folders", échange de données entre machines	Utilisation autonome	Manipulation guidée
22 Janvier Opérations sur les limites	Limite d'une somme, d'un produit d'un quotient. Indéterminations	Découvrir des règles, à partir d'exemples donnés par la TI92	Enseignement d'une notion
12 Février Le nombre dérivé	Vitesse moyenne et instantanée, tangente, approximation affine.	Introduction d'une notion	Enseignement d'une notion
12 Mars Opérations sur les dérivées	Dérivée d'une somme, d'un produit d'un quotient.	Découvrir des règles, à partir de la dérivation de fonctions générales par la TI92	Enseignement d'une notion
29 Avril Problème d'optimisation	Étude de fonctions, généralisation algébrique.	Concevoir une méthode algébrique de recherche d'extremums.	Résolution de problèmes
20 Mai Suites numériques	Étude numérique, étude graphique, calcul de valeurs exactes.	Connaissance des fonctionnalités de la TI92 pour l'étude des suites.	Manipulation guidée suivie de travail autonome

- En « Manipulation guidée », le professeur indique, à l'aide de la tablette rétroprojetable des actions à opérer sur la TI92, en lien ou non avec un contenu mathématique. L'élève exécute ces actions.
- En « Résolution de problèmes », le professeur a peu d'interventions collectives. Il lance la recherche, puis suit le travail des groupes. Après cette phase principalement a-didactique, il y a généralement un moment de synthèse collective plus didactique visant en particulier l'institutionnalisation des notions dégagées dans la résolution.
- Les situations « Enseignement d'une notion », enfin, fonctionnent suivant le schéma classique d'alternance de phases a-didactiques et didactiques.

B. Méthodologie d'observation

Au cours de la recherche sur DERIVE, nous avions observé des groupes d'élèves travaillant sur ordinateur, le plus souvent par groupe de deux. Les entrées au clavier, les affichages obtenus à l'écran, ainsi que les interactions au sein des groupes avaient constitué la matière principale de l'observation. Dans le cas de la TI92, la petite taille de l'écran et du clavier font de la calculatrice un outil privé. Par ailleurs, la possession individuelle de la calculatrice ne produit pas les mêmes interactions que le travail en binôme sur ordinateur. Nous prévoyions donc a priori plus de difficultés pour obtenir des observables.

Voici la méthode d'observation que nous avons élaborée au fil des séances.



La classe et le dispositif d'observation

- La disposition de la classe n'est pas modifiée par rapport à la disposition habituelle dans l'établissement : les élèves sont répartis en rangées de tables faisant face au tableau et à l'écran du rétroprojecteur (dans la classe B, les tables sont groupées par deux, ce qui n'est pas le cas de la classe A).
- L'observateur se place derrière une table (respectivement un ensemble de deux tables). Il peut ainsi observer à la fois le professeur dans ses interventions collectives, et un (respectivement deux) groupes de deux élèves. Dans chaque groupe, on confie à un des élèves une calculatrice rétroprojetable. Cette calculatrice est reliée à un écran et à un micro-ordinateur situés devant l'observateur. Ainsi l'observateur peut suivre à distance le travail de l'élève sur la TI92, et enregistrer sur le micro-ordinateur l'écran aux moments qui lui paraissent les plus significatifs. Un magnétophone est placé de façon à recueillir les échanges collectifs du professeur avec la classe, et les échanges entre les membres d'au moins un des deux groupes. Le schéma ci-après figure le dispositif d'observation dans la classe B.

En fait, dans la classe A, ce dispositif d'observation n'a pu être adopté que relativement tard, car nous ne disposions pas de tablette rétroprojetable, en dehors de celle utilisée par l'enseignante. Pendant les premières séances, nous n'avons disposé que de l'enregistrement audio de la séance et des prises de notes des deux observateurs, qui ont essayé de suivre chacun quatre élèves voisins. Dès que cela a été possible, chaque observateur, s'est attaché avec tablette rétroprojetable et ordinateur portable à suivre un binôme, dans les conditions décrites ci-dessus. Dans la classe B, deux tablettes de rétroprojection ont été disponibles dès la première séance et le dispositif définitif d'observation a pu se mettre en place à partir de la deuxième observation.

Nous avons choisi de reprendre dans cette partie quatre des observations réalisées lors de cette première année parmi celles publiées dans le rapport intermédiaire de cette recherche. Deux de ces séances correspondent à l'introduction de la notion de dérivée, respectivement à Chartres et à Caen, les deux autres correspondent à l'exploitation de cette notion dans l'étude d'un problème d'optimisation : le problème de la cuve. Ces deux types de situations nous semblent illustrer clairement à la fois les potentialités de la machine dans ce domaine des mathématiques mais aussi le travail didactique nécessaire pour arriver à exploiter de façon efficace ces potentialités dans les classes, un travail que nous avons essayé d'engager pour construire le projet d'ingénierie présenté dans les parties suivantes.

OBSERVATION 1:
introduction de la notion de dérivée (Classe A)

A. Contexte et objectifs

Les machines ont été distribuées à la séance précédente ainsi que le document élaboré pour la prise en mains. Quelques élèves absents reçoivent la machine en début de séance. Sur le plan mathématique, l'enseignement en cours concerne l'introduction de la notion de dérivée. Cette notion a été préparée dans un cadre cinématique par l'étude du mouvement d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne, la distance étant une fonction polynômiale du second degré du temps. Différents calculs de vitesse moyenne ont été effectués en considérant des instants donnés et des durées données.

La séance construite a pour objectif d'assurer le passage, dans ce contexte, à la notion de vitesse instantanée, de faire le lien entre la droite passant par le point d'abscisse a de la courbe et de coefficient directeur la vitesse instantanée et la tangente à la courbe au sens algébrique du terme, c'est à dire la droite passant par ce point et ayant une intersection double avec la courbe, enfin d'approcher le point de vue approximation en demandant d'évaluer l'erreur commise en approchant la courbe par sa tangente.

Deux exercices sont prévus dont voici le texte.

Exercice 1

Un mobile se déplace sur un axe x'x et sa position à l'instant t par rapport à l'origine O, est donnée par son abscisse d(t) = 2*t^2 + 8*t avec t dans [0 ; 4].

1) Calculer la vitesse moyenne entre l'instant a et l'instant a+h.

2) Que peut-on dire de cette vitesse moyenne lorsque h tend vers 0 ?

3) a) Ecrire l'équation de la droite de coefficient directeur m, passant par le point A d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction d.

b) Peut-on déterminer m pour que cette droite coupe la précédente en deux points confondus ?

c) Déterminer la fonction g telle que y=g(t) soit l'équation de la tangente en A à la courbe.

d) Quelle erreur commet-on lorsque l'on prend g(a+h) comme valeur approchée de d(a+h) ?

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3-6x+2$.

1) Tracer la courbe représentative de f pour x appartenant à [-2 ; 2].

2) a) Ecrire l'équation de la droite de coefficient directeur m, passant par le point d'abscisse -1 de la courbe représentative de la fonction f.

b) Peut-on déterminer m pour que cette droite coupe la droite précédente en deux points confondus ?

c) Déterminer la fonction g telle que y=g(t) soit l'équation de la tangente en A à la courbe.

d) Tracer cette tangente.

e) Quelle erreur commet-on lorsque l'on prend g(-1+h) comme valeur approchée de f(-1+h) ?

3) Mêmes questions en remplaçant le point A d'abscisse -1 par le point B d'abscisse 0.

4) Mêmes questions en remplaçant le point A d'abscisse -1 par le point E d'abscisse a.

Dans le premier exercice, la fonction est, comme dans le travail préparatoire, une fonction du second degré mais on s'intéresse à un point d'abscisse a, dans le second, le même travail est proposé pour une fonction polynomiale du troisième degré, pour deux abscisses numériques -1, 0 avant de passer au ca général.

B. Scénario

Les élèves sont supposés travailler en binôme, sur une période de deux heures, l'enseignante prenant en charge des bilans collectifs réguliers. L'enseignante fait l'hypothèse que le travail dans le module formel de la TI92 va leur permettre de gérer plus facilement, les calculs algébriques relativement complexes nécessités par cette séance et aider le passage au cas général attendu.

C. Déroulement

Après distribution des machines, la séance commence par une phase collective, avec appui de la machine rétroprojetable, orientée vers la prise en mains de la machine, qui semble à l'enseignante d'autant plus nécessaire que, pour des raisons de grèves, certains élèves étaient absents à la séance précédente où les machines ont été distribuées. Cette phase va durer un quart d'heure, les élèves présents à la séance précédente y participent très activement, les réponses fusent.

8h20 : Les points suivants sont successivement abordés :

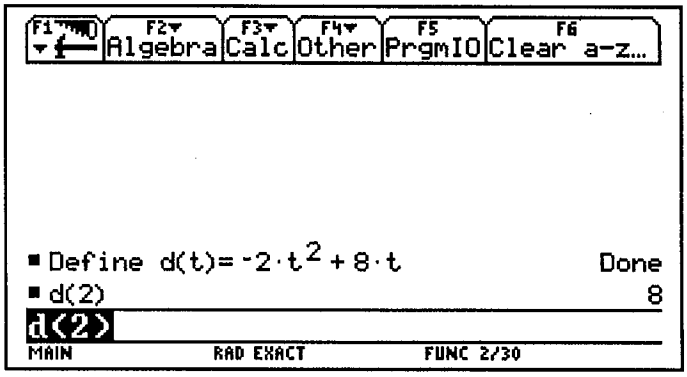
- Le changement d'applications : rappel des deux modes principaux, la touche diamant pour les applications HOME, Y=, GRAPH, WINDOW, TABLE et Tblset et la touche APPS valable pour toutes les applications.
- La touche MODE déjà utilisée pour changer les modes graphiques, pour partager l'écran en deux et préciser ce qui est mis dans chaque fenêtre, choisir le nombre de décimales en calcul approché, les unités d'angles, dans la séance d'initiation. L'enseignante passe en revue les quatre premières rubriques du menu MODE *: Graph, Current Folder, Display Digits, Angle*, en commentant chacune d'elles, puis elle passe à la page 2. Elle explicite les différents types de partage d'écran puis montre comment choisir les applications correspondant à chaque fenêtre, rappelant qu'à la séance précédente, ils ont ainsi utilisé

Window Editor pour sauver des calculs. Elle passe ensuite à *Split Screen Ratio* et explique le sens des rapports donnés.

- La création d'un répertoire. Elle fait créer un répertoire Dérive où sera sauvegardé le travail de la séance. Elle effectue les opérations à la rétroprojetable et les élèves font de même sur leur propre machine. Elle précise que le nom d'un répertoire est d'au plus 8 lettres que la commande *Newfold* non seulement crée un répertoire mais envoie automatiquement dans ce répertoire, c'est à dire l'institue comme répertoire par défaut. Elle insiste sur la nécessité de structurer en répertoires pour une machine dotée d'autant de mémoire pour s'y retrouver aisément. Suite à la demande d'un élève, elle montre comment changer de répertoire courant dans MODE, en insistant sur la nécessité d'appuyer deux fois sur ENTER..
- La ligne d'état. Elle précise le sens de toutes les indications fournies.
- Le nettoyage de l'écran par *Clear Home* dans le menu F1, et la désaffectation des variables par F6. Elle montre sur un exemple que *Clear Home* ne désaffecte pas les variables mais que F6 libère les 26 adresses mémoires d'une seule lettre de a à z. Elle insiste sur la nécessité de le faire avant de commencer un nouvel exercice.

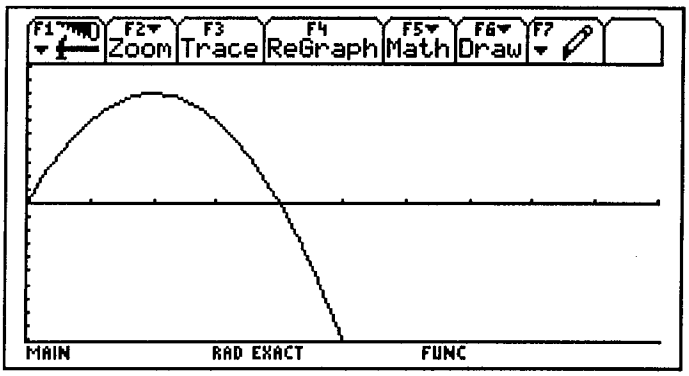
8h35 : Commence ensuite le travail sur les deux exercices qu'elle introduit en disant que, dans le premier, ils vont reconnaître quelque chose qu'ils ont fait pendant les deux séances précédentes. Collectivement, elle prend en charge la définition de la fonction d(t). Plusieurs élèves disent tout de suite qu'il faut aller dans F4 et faire *Define*, quelques uns disent F3. L'enseignante précise que si l'on a oublié que c'est dans F4, on peut toujours taper « define », et que l'on peut aussi aller chercher la commande dans 2nd CATALOG. Elle montre comment faire et leur montre qu'alors la ligne d'état précise la syntaxe de la commande, ici : var(arg1,...)=expr.

Elle entre ensuite l'expression sur la rétroprojetable, chacun le faisant à sa place et explique pour les absents qu'il n'y a pas de touche carré comme sur les calculatrices, que pour les puissances, il faut utiliser la touche ^. Plusieurs élèves ne pensent pas à faire Enter quand ils ont fini de taper l'expression, d'autres se sont trompés de signe -, chaque fois, l'enseignante, qui circule, répercute au niveau collectif.



Elle fait tester collectivement que tout va bien en faisant calculer d(2), puis passe au tracé graphique, en demandant à un élève de la piloter. Il propose d'aller dans Y=. Elle demande si c'est la seule possibilité et un autre propose « diamant GRAPH ». L'enseignante montre que ça ne marche pas et indique elle-même la possibilité utilisant la commande *Graph* du menu F4 de HOME. Elle passe ensuite à Y=. Plusieurs élèves demandent comment effacer les fonctions qui restent de la séance précédente dans Y=. D'autres élèves demandent s'ils peuvent rentrer d(t) alors que la machine indique y1(x). Elle fournit collectivement les

informations correspondantes. Ensuite, elle fait fixer la fenêtre de tracé. Il n'y a pas de problème, les élèves travaillant depuis le début de l'année avec les calculatrices graphiques et elle propose de prendre [0,10] comme intervalle pour y.

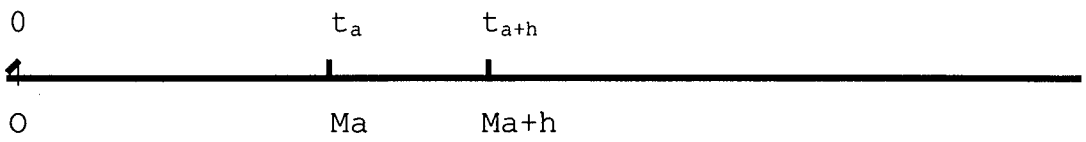


C'est la fin de ce lancement collectif qui a pris une dizaine de minutes et les élèves doivent maintenant travailler de façon autonome, l'enseignante et les observateurs étant là pour dépanner, en cas de besoin.

8h48 : Quelques problèmes liés à la calculatrice sont rencontrés : utilisation de *graph* dans HOME avec une syntaxe incorrecte : *graph d(x)=* , non nettoyage des fonctions de la séance précédente dans Y= qui conduit à des messages d'erreurs lors du passage à GRAPH : *undefined variable*, grille mise par inadvertance. L'enseignante reprend ce point collectivement en montrant l'accès via *Format* dans le menu F1 de l'application GRAPH puis les élèves se remettent au travail.

Visiblement, cela ne va pas de soi pour la plupart d'entre eux. Ils recherchent dans leurs cahiers la définition de la vitesse moyenne et ont du mal à adapter les calculs faits à la nouvelle situation où interviennent deux variables : a et h. D'autres ont du mal à substituer a+h dans l'expression de d(t). La plupart font d'abord le calcul à la main avant de passer à la machine, ils ne pensent pas qu'il suffit d'entrer le quotient $\frac{d(a+h)-d(a)}{h}$ pour obtenir le résultat.

Ils restent bloqués dans le calcul littéral à effectuer. D'autres demandent la résolution du quotient en entrant : *Solve* (d(a+h)-d(a))/h, sans succès. Au bout d'une dizaine de minutes, l'enseignante décide de faire une intervention collective, sur cette notion de vitesse moyenne. Elle dessine un axe : sur lequel elle place les instants et les noms des points :



Elle demande ensuite comment trouver la vitesse moyenne entre l'instant a et l'instant a+h. Elle évoque leurs déplacements quotidiens pour susciter des réponses. On entend un peu de tout : le temps divisé par la vitesse, le temps par la distance, la distance par le temps.

Les discussions entre élèves sont animées avant d'arriver à la réponse : $M_{a+h}M_a/h$. De plus cette intervention n'est pas suffisante pour un certain nombre qui n'arrivent pas à exprimer ce quotient avec la fonction d. Finalement, un seconde intervention collective s'avère nécessaire pour que tout le monde dispose de la formule : $\frac{d(a+h)-d(a)}{a+h-a}$.

L'enseignante demande de faire les calculs à la main et de vérifier à la machine ensuite.

On note de grands décalages entre élèves. Certains ont terminé et passent à la suite, d'autres en sont toujours à calculer d(a+h).

9h15 : Point collectif avec détail du calcul de $d(a+h)=-2(a+h)^2+8(a+h)$. L'enseignante fait expliciter par les élèves la suite des opérations à effectuer pour terminer le calcul, ce qui n'est pas inutile, certains ayant perdu le fil, s'apprêtant à factoriser par (a+h).

Ceux qui, en avance, en sont à la question suivante : « Que peut-on dire de cette vitesse moyenne lorsque h tend vers 0 ? » concluent en général rapidement au vu de l'expression formelle, en remplaçant h par 0 pour obtenir -4a+8. Le groupe de Vincent, lui, se lance dans des calculs numériques avec la calculatrice, en prenant des valeurs de h de plus en plus petites : 3/4, 0.5, 0.1, 0.01, 0.00001 et arrive à la même conclusion.

9h30 : L'enseignante récapitule le calcul au tableau arrivant à l'expression : 8-4a-2h pour la vitesse moyenne que tous ou presque ont fini par obtenir. Elle prend en charge ensuite le passage à la limite qui visiblement ne pose pas dans ce cas particulier de problème aux élèves et essaie de faire faire le lien avec la notion de vitesse instantanée. C'est difficile. Les élèves sont d'abord silencieux. Elle évoque alors l'affichage du compteur de vitesse et la réponse inattendue qui se dégage est que ce qu'affiche le compteur de vitesse est faux. Enfin, un élève parle de vitesse instantanée. L'enseignante lui demande ce que ça veut dire pour lui. Il répond : « une vitesse croissante ». Les autres sont appelés à l'aide et quelqu'un propose : « la vitesse à l'instant t » sans pouvoir préciser plus. Un autre dit alors : « la vitesse entre deux points très proches ». L'enseignante confirme que ce qu'affiche le compteur, c'est bien une vitesse moyenne entre deux instants très proches puis définit théoriquement la vitesse instantanée comme limite de la vitesse moyenne lorsque l'intervalle de temps tend vers 0.

Elle essaie ensuite de faire le lien avec le travail de la séance précédente où un calcul analogue avait été fait avec non pas t=a mais t=1 et avec des valeurs de h successives de 0.1, 0.01.... pour lequel ils étaient déjà passés à la limite. La plupart n'ont pas l'air de se souvenir vraiment. Elle les envoie chercher dans leur cahier. L'attention baisse.

Un élève ne trouve pas comme les autres parce que sa variable h était déjà affectée. L'enseignante le mentionne collectivement et insiste une fois de plus sur la nécessité de libérer les variables, chaque fois que l'on commence un nouveau travail. Elle précise aussi comment libérer une seule variable, par exemple ici h si l'on a fait des essais numériques et que l'on veut revenir au calcul littéral en utilisant la commande *Delvar*. Un élève demandant où se trouve cette commande, elle répond puis leur rappelle que s'ils ont oublié dans quel menu elle est, ils peuvent aller la chercher dans CATALOG, en tapant d pour avoir la liste des commandes commençant par d et elle détaille à nouveau l'opération correspondante.

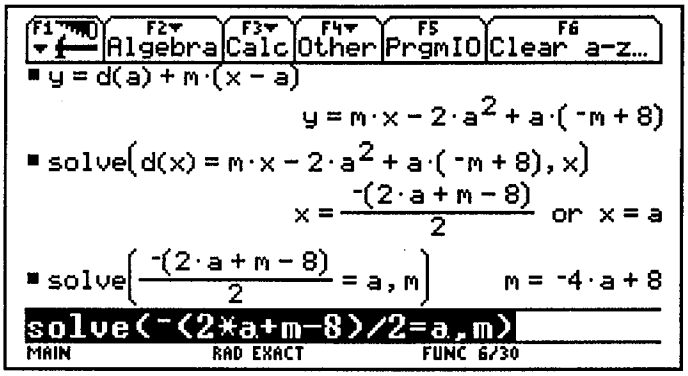
On arrive maintenant à la question 3 : l'équation de la sécante. Les équations de droites ont été revues la semaine précédente. Les élèves peuvent faire les calculs à la machine mais il leur est demandé de marquer la définition et la façon dont ils obtiennent l'équation de la droite de coefficient directeur m sur le cahier. En fait, les notes prises par les élèves jusqu'à présent sont plutôt de type brouillon. Le temps avançant très rapidement, l'enseignante reprend la main assez vite et se fait dicter par les élèves la succession des calculs permettant d'arriver à l'équation : y-d(a)=m(x-a).

Elle attire leur attention sur la nécessité, dans l'entrée en machine de cette équation de rajouter un signe de multiplication entre m et (x-a) et demande pourquoi. Un élève répond de façon floue : « sinon ça fait une variable ». Elle demande de préciser et un autre dit : « ça ferait

comme d(a) ». Elle reprend et commente cette réponse, insiste sur l'importance de ce signe multiplié et leur demande de le noter. Elle écrit elle-même au tableau :

	d(a)	m*(x-a)
	↑	↑
	fonction	multiplication

9h45 : Les élèves se remettent à travailler en binômes. L'entrée de l'équation ne pose pas de problème mais la question b : déterminer m pour que la droite coupe la courbe précédente en deux points confondus, elle, arrête presque tout le monde. Certains égalent l'équation de la droite et celle de la fonction et s'arrêtent là. D'autres sont perdu au milieu des t et des x, d'autres veulent faire tracer la droite pour voir mais la machine refuse vu la présence du paramètre m. Quelques uns enfin, avec une aide assez légère, arrivent à piloter la calculatrice pour obtenir les deux racines de l'équation d(x)=d(a)+m(x-a), en fonction de a et m, c'est à dire en demandant la résolution par rapport à x, et concluent que les deux points d'intersection seront confondus si ces deux racines sont égales. Il faut alors, si l'on travaille à la machine, résoudre une nouvelle équation, de variable m cette fois, a restant un paramètre. Inutile de dire que cela ne va pas de soi et que, la syntaxe de la machine obligeant à préciser par rapport à quelle variable on résout une équation, ils ne peuvent éviter le problème (aucun ne cherche ici à procéder par essai/erreur).



Assez vite, l'enseignante va reprendre une fois de plus la main, pour faire détailler les étapes :

- entrée de l'équation de la sécante qui donne à l'affichage : $y=mx-2a^2+a(-m+8)$
- résolution du système formé de cette équation et de l'équation de la courbe (sur proposition d'un élève).

L'enseignante fait préciser que les solutions du système seront les coordonnées des points d'intersection de la courbe et de la droite s'ils existent, qu'il y a nécessairement au moins une solution correspondant aux coordonnées du point A. Elle leur demande d'écrire le système sur leur cahier avant de résoudre avec la machine.

En fait, cela n'a pas suffi à remettre tous les élèves sur les rails ; certains sont encore perdus dans les t et les x, d'autres essaient toujours de faire tracer la droite. L'enseignante est obligée une fois de plus d'intervenir pour régler le problème de la dénomination des variables.

10h : Bilan collectif sur la stratégie de résolution du système. Les élèves proposent de procéder par substitution, en gardant l'équation de la droite. L'enseignante écrit le nouveau système au tableau :

$y=mx-2a^2+a(-m+8)$

$mx-2a^2+a(-m+8) = -2x^2+8x$

Elle rappelle que l'on connaît déjà une solution de la deuxième équation que l'on veut maintenant résoudre x=a et leur demande comment, sachant cela, ils s'y prendraient s'ils avaient à résoudre à la main. Elle veut les faire penser à la factorisation par x-a, mais ils ne sont pas du tout branchés dans cette direction et elle les laisse retravailler seuls quelques minutes.

Quelques élèves ont maintenant terminé et reconnaissent avec étonnement dans la valeur de m trouvée, la vitesse instantanée en a, calculée précédemment : 8-4a.

La fin de la séance approche et l'enseignante fait un dernier bilan, détaillant la résolution avec la machine rétroprojetable. Elle arrive ainsi à 8-4a mais n'a pas le temps d'aller plus loin. Elle demande pour les vacances, c'était la dernière séance avant Noël, de se familiariser avec la machine, de faire l'exercice 2 et d'apprendre à résoudre les systèmes avec la machine en suivant le document distribué (cf. annexe systèmes).

D. Analyse

La première phase de cette situation laisse penser que la familiarisation avec la TI92 peut s'opérer dans de bonnes conditions. Les nombreuses réponses qui fusent montrent que beaucoup d'élèves se souviennent de ce qui a été vu lors de la séance d'introduction. Dans le reste de la séance, tous les élèves ne manifestent pas le même rapport à la machine mais on ne note aucun phénomène de rejet.

Bien sûr, la petite introduction faite ne suffit pas à rendre la machine opérationnelle dans l'application HOME pour les calculs sollicités dans la suite et l'on voit l'enseignante confrontée à la multitude de petits problèmes qui se produisent dans une phase de première initiation comme ici. Comme il s'agit en général de problèmes classiques sur lesquels elle souhaite attirer l'attention de la classe, elle va très souvent les répercuter collectivement, en s'appuyant éventuellement, pour reproduire les problèmes élèves, sur la calculatrice rétroprojetable. C'est sans aucun doute intéressant vis à vis de la connaissance de la machine mais n'aide pas à maintenir le fil mathématique de la séance, déjà très difficile à tenir.

Dans la gestion de l'activité proposée ensuite pour l'approche de la notion de dérivée, l'enseignante est confrontée à de multiples difficultés que nous allons essayer d'analyser. L'hypothèse faite est que l'utilisation de la TI92 va permettre une généralisation de calculs numériques effectués dans une séance précédente et une approche cinématique de la notion de dérivée. En fait, on s'aperçoit que sur ce plan, les élèves, pour la plupart ne gardent que peu de trace de ces calculs qu'ils ont du effectuer en position d'exécutants sans en percevoir nécessairement bien le projet global. La désorganisation de cette fin d'année, du fait des grèves, n'aide sans doute pas non plus. La généralisation ne s'appuie donc pas sur un contexte déjà bien intégré. A ceci s'ajoutent des difficultés grandes dans le calcul algébrique demandé, d'autant plus visibles que les élèves sont trop peu familiers avec la machine pour savoir la piloter pour produire les résultats attendus. Le calcul de d(a+h) par exemple en arrête plus d'un très longtemps. Face à ces difficultés, l'enseignante est partagée entre deux choix :

- soit exploiter le plus possible la machine, mais en intervenant fortement du fait du manque d'instrumentation constaté pour avancer dans la résolution, quitte à revenir plus tard sur les déficiences algébriques constatées,

- soit gérer ces déficiences, en exigeant un calcul papier crayon préalable à l'entrée en machine, et en gérant tous les problèmes liés à la réalisation de ce calcul.

Le premier choix permettrait certes d'avancer plus vite, mais on peut légitimement s'interroger sur le sens que les calculs menés pourraient prendre pour les élèves. L'enseignante privilégie donc le second.

Une seconde difficulté de la situation est liée à l'approche cinématique choisie ici et à la notion de vitesse instantanée. Cette notion n'a rien de spontané et le travail que les élèves ont pu faire par ailleurs en physique ne les y prépare pas puisque les vitesses à ce niveau sont toujours des vitesses moyennes même si l'on parle de vitesse à l'instant t. En fait, il s'agit là d'un concept qui se construit par passage à la limite, comme l'ont bien montré les travaux de M.Schneider par exemple (Schneider, 1989) et on peut penser que le travail sur la notion de dérivée peut aider cette conceptualisation plutôt que l'inverse. A la réflexion, il nous semble qu'un approche géométrique ou graphique serait sans doute plus appropriée.

L'enseignante essaie aussi dans cette séance de lier la tangente au sens algébrique du terme à la parabole à l'approche cinématique effectuée, faisant reconnaître dans le coefficient directeur de la tangente, la vitesse instantanée calculée précédemment. Il s'agit sans doute là d'un choix a priori tout à fait raisonnable, l'enseignement faisant trop souvent l'impasse sur l'articulation nécessaire des conceptions de la tangente héritées du cercle avec la conception de l'analyse, avec des effets négatifs maintenant connus (Castela, 1995). En revanche, le dispositif dans lequel s'inscrit cette articulation nous semble ici très complexe, vu le niveau des élèves. Il y a sans aucun doute à organiser cette articulation, en étant très attentif dans le choix des variables de la situation, au coût technique de cette articulation.

Nous voudrions également souligner qu'une telle séance d'introduction de la notion de dérivée, quelle que soit l'approche choisie, nous semble être nécessairement une séance complexe de gestion difficile. Il nous semble peu raisonnable d'espérer pouvoir l'instituer, vu de plus les contraintes temporelles de l'enseignement, dans un fonctionnement essentiellement a-didactique. Les propositions d'activités qui en apparence vont dans ce sens, ne sont, nous semble-t-il, a-didactiques qu'en façade et mettent généralement l'élève en position d'exécution, dans une démarche expérimentale qui le dépasse. Une telle séance, si l'on veut que l'élève n'en perde pas la cohérence globale, suppose nous semble-t-il une gestion donnant à l'enseignant un rôle plus important. Il importe de trouver les moyens de problématiser réellement pour l'élève les mathématiques qui vont intervenir, de lui laisser une autonomie maximum, sans que les difficultés techniques de nature algébrique inhérentes au type de travail demandé n'effacent la cohérence globale de la situation et ne fassent perdre son fil. Même avec l'assistance de la TI92, même avec des élèves plus familiers avec cet outil, comme cela sera le cas en 1996-97, au moment de l'introduction des dérivées, ceci est loin d'aller de soi. C'est ce qui nous a incité à privilégier, pour l'année 1996-97, au niveau expérimental ce domaine de la dérivation, avec l'objectif de construire une ingénierie didactique complète et institutionnellement viable.

OBSERVATION 2:
introduction de la notion de dérivée (Classe B)

A. Le point de départ : une situation avec DERIVE

La conception de la séance est reprise de la brochure DITEN (Hirliman, 1994), chapitre "Introduction au nombre dérivé en Première scientifique". Dans ce texte, l'auteur décrit une activité en deux parties. Nous le citons :

- "La première partie est fortement guidée par le professeur; c'est essentiellement lui qui dirige l'utilisation du logiciel (...). Un seul poste de travail peut suffire (avec tablette de rétroprojection). L'enseignant peut bien sûr mettre à contribution les élèves pour les calculs avec le logiciel, mais il ne faudrait pas que les problèmes d'environnement et d'options perturbent trop la progression de l'activité".
- "La deuxième partie de l'activité est prévue pour une utilisation individuelle, par chaque élève, du logiciel. Elle est donc prévue dans une salle équipée de plusieurs postes (...). Cette deuxième partie est moins dirigée que la première."

La première partie nous intéresse ici : en reprenant notre classification elle s'apparente à l'"enseignement d'une notion", alors que la seconde partie est du type "recherche autonome". La présentation est faite à partir de l'équation horaire de la chute d'un corps. Le nombre dérivé en un point apparaît comme limite du taux d'accroissement, vu sous trois aspects :

- La vitesse instantanée. Elle est vue comme limite de la vitesse moyenne entre deux points proches. On calcule cette vitesse moyenne pour des valeurs de plus en plus proches de façon à observer la convergence vers la vitesse instantanée.
- Le coefficient directeur de la tangente. La tangente est approchée par une sécante en deux points proches.
- La notion d'approximation affine. On montre que la position du corps à l'instant 0,8+ Δt, s'écrit comme la somme de trois termes, 9, $-4.\Delta t$ et $-5.(\Delta t)^2$, et on constate que le troisième terme est négligeable.

La situation incorpore l'utilisation d'un ordinateur avec DERIVE dont l'écran est retroprojeté. Le document est accompagné de douze renvois à une utilisation du logiciel en mode collectif. Cette utilisation est conçue pour gagner du temps sur les calculs et le tracé de graphique de façon à ne perdre "le fil conducteur et l'objectif de l'activité". On peut cependant penser que cette utilisation n'interfère pas directement avec le travail mathématique des élèves. En effet, les élèves n'ont pas une connaissance suffisante de DERIVE pour que les calculs et tracés opérés avec le logiciel soient réellement discutés dans la classe. DERIVE sert surtout à exposer des résultats comme point de départ d'une discussion.

B . Analyse préalable

Nous avons voulu reprendre cette première partie, en mettant à profit la disponibilité d'une TI92 pour chaque élève. Dans chacune des phases de travail le professeur indiquera les calculs à réaliser, en donnant des indications sur les fonctionnalités de la TI92 utiles pour cette tâche. Les élèves devront mettre en oeuvre ces calculs, en opérant certains choix (par exemple les

points où calculer le taux d'accroissement). Ils devront tirer les conclusions de ces calculs. Un synthèse fera apparaître le lien avec les aspects vus dans la phase précédente.

Comme dans la situation avec DERIVE, l'utilisation de la TI92 a pour but de conserver "le fil conducteur et l'objectif de l'activité". La disponibilité d'une TI92 par élève, et la familiarité qu'ils ont acquise avec cette machine doit permettre de plus un engagement réel des élèves dans les calculs et les tracés. En effet, on peut penser qu'ils se construiront une conception du nombre dérivé d'autant plus adéquate qu'ils auront eux-mêmes mis en oeuvre les calculs où il intervient.

Concrètement, la situation se divise quatre phases bien distinctes pour une durée totale de 1 h 30. La première phase vise à l'appropriation de l'équation horaire et les suivantes correspondant aux trois aspects du nombre dérivé. Chacune de ces phases se compose d'une présentation par le professeur, de la réalisation d'une tâche par l'élève, puis d'une synthèse des résultats.

C. Déroulement

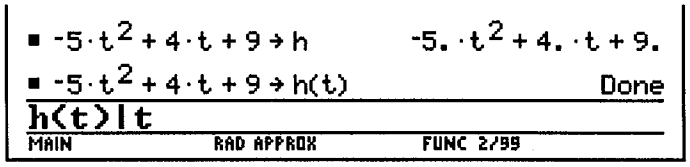
Nous avons observé les interventions du professeur et les périodes de dialogue avec la classe. Parallèlement nous avons observé un groupe de deux élèves S. et A., travaillant ensemble. Les écrans de la calculatrice de S. ont été enregistrés.

Première phase : l'introduction à la situation

La séance commence à 8h15. Après une introduction sur l'importance de la notion de dérivée dans le programme de Première, le professeur règle des détails techniques. Puis il explique la définition de H(t), équation horaire de la chute de la pierre. Il commente les questions du premier paragraphe (détermination de quelques instants particuliers).

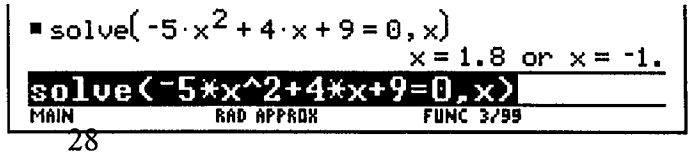
Les élèves commencent à chercher vers 8h30.

S. et A. s'interrogent sur la façon de définir h(t). Il y a en effet une différence entre affecter l'expression à une variable expression h (première ligne de l'écran ci-dessous), et définir une fonction h(t) (seconde ligne).



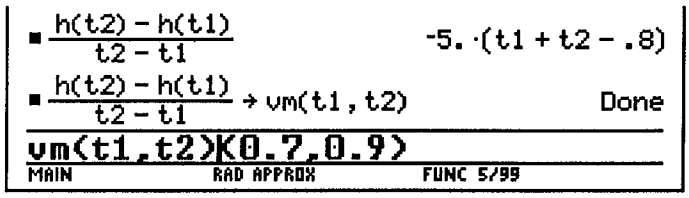
Elles cherchent ensuite les questions du premier paragraphe. S. s'interroge sur la façon de "donner" une valeur". Elle essaie l'expression *h(t)|t=..*, mais ne sait pas quelle valeur donner. Par contre, A. a compris qu'il faut résoudre une équation (à l'aide de la fonction *Solve*). En effet, la question est de trouver le *temps* pour une hauteur donnée. Finalement S. recopie sur A. la fonction *Solve*, mais résout pour la variable *x* au lieu de *t*. La machine renvoie l'expression en *t* factorisée. Elle essaie ensuite en *t*, mais elle a entré *t2* au lieu de *t^2*, et *t2* est compris par la machine comme une autre variable. Elle tente de résoudre de nouveau l'expression obtenue en *x*, sans succès, puis rajoute *=0* à l'expression : "Ca ne marche pas"

Pendant ce temps, le professeur corrige l'exercice collectivement, puis passe aux explications sur la vitesse moyenne. S. décide de recopier l'écran rétroprojeté par le professeur, mais il manque une parenthèse, et elle obtient une erreur de syntaxe. Elle efface alors toutes ses tentatives de résolution et



recopie l'écran de sa voisine. Elle obtient enfin les solutions : "J'ai mis des *x*, ça marche !"

Seconde phase : vitesse moyenne et vitesse instantanée



A 8h 50, le professeur a bien avancé dans ses explications, et a demandé d'effectuer les calculs de vitesse moyenne. S. entre la formule de la vitesse moyenne, en recopiant l'écran rétroprojeté. Le professeur demande de calculer la valeur de cette fonction pour des valeurs "proches de 0,8". Elle propose 0,7 et 0,9, et se concerte avec sa voisine sur la façon d'entrer ces valeurs. Elle tente sans succès d'utiliser la forme "|".

Pendant ce temps, le professeur commente en collectif le résultat obtenu, et demande d'affiner l'intervalle ("encore un peu plus près de 0,8") d'abord 0,79 et 0,81 puis 0,799 et 0,801. Pendant ce temps S. et A. s'interrogent sur leurs erreurs de syntaxe.

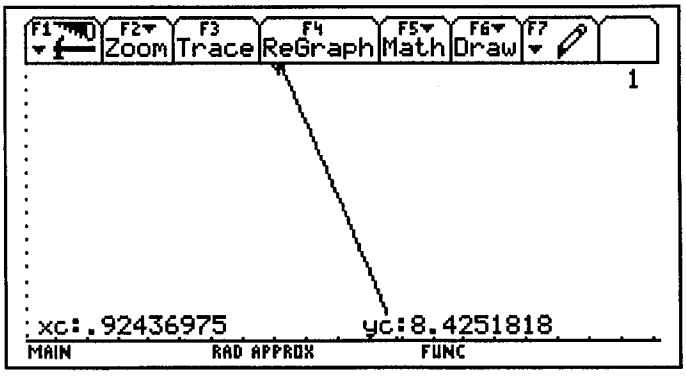
Le professeur intervient pour un élève qui n'a pas défini h, et s'étonne de ne pas obtenir les résultats, puis il demande d'approcher de la même façon la vitesse instantanée en 1,8 et 1.

S. et A. n'ont toujours pas terminé leur calcul pour la valeur 0,8. Le professeur demande à la classe le résultat pour la valeur 1,8 et le note au tableau. Il se prépare à faire de même pour la valeur 1, mais S. et A. l'interrompent "Vous allez un peu vite, nous on en est toujours là à faire ce calcul". Le professeur explique ce qui a été fait au rétroprojecteur, et elles recopient.

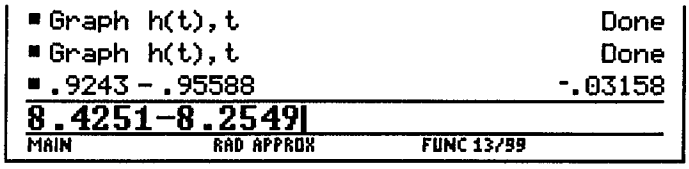
Troisième phase : les tangentes

A 9 h, le professeur explique alors qu'on va "faire une vision graphique" de la notion, lui en donner une "interprétation graphique". Il fait le lien entre le coefficient directeur d'une sécante en deux points, et la vitesse moyenne entre ces deux points et rappelle le calcul du coefficient directeur.

S. entre *graphh(t), t.* Elle obtient une erreur de syntaxe : il manque un espace ou des parenthèses. Elle supprime un des deux h et obtient le tracé d'une droite. Elle finit par corriger et obtient la parabole attendue. Elle doit ensuite effacer la droite et y parvient en passant dans la base de fonctions. Elle se fait expliquer par le professeur l'utilisation de la fonction Trace, et du Zoom. Elle zoome une autre fois en éloignant Ensuite, elle "zoome standard" par erreur, et se retrouve avec le tracé initial, mais le réticule a disparu. Elle zoome de nouveau sans retrouver le réticule. Elle s'interroge avec sa voisine sur "Zoom Dec", pose la question au professeur qui répond de façon évasive, puis s'en va. Quand il revient, il fait faire aux élèves un Zoom standard, puis zoomer avant plusieurs fois.

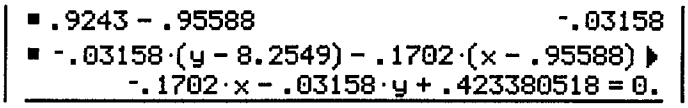


S. et A. hésitent sur les points à repérer puis décident de prendre "n'importe lesquels". Elles recopient les coordonnées de deux points qu'elles ont repérés sur la courbe, et passent dans l'application Home pour établir l'équation de la droite passant par ces deux points.



S. écrit la différence des ordonnées, puis la différence des abscisses.

Il y a ensuite une période de flottement assez longue, à l'issue de laquelle elle adapte une formule de colinéarité qu'elle lit sur la machine de sa voisine.

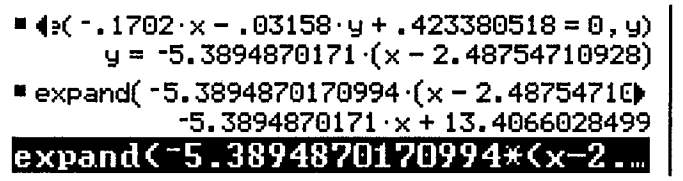


Elle obtient une équation implicite de la droite passant par ces deux points. En principe, c'est la pause, mais elles continuent à travailler.

Elle montre cette équation au professeur qui indique qu'il vaudrait mieux avoir "une équation y=...". Elle tente de résoudre en papier crayon l'équation implicite. Devant les difficultés rencontrées, elle interroge l'observateur. Celui-ci indique d'utiliser la fonction SOLVE pour faire résoudre à la machine.

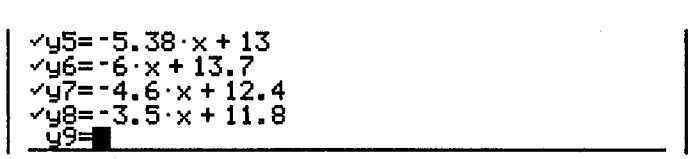
Pendant ce temps certains élèves annoncent leurs résultats au professeur. Celui-ci les inscrit au tableau : $y=-5x+13$ $y=-6x+13,7$.

S. discute avec sa voisine de l'utilisation de la fonction *Solve*. Elle obtient sans difficulté une expression correcte, qui se simplifie en une équation réduite dont le second membre est factorisé. Elle la développe avec la fonction *Expand* et annonce au professeur :"Comme le premier, -5 et 13".

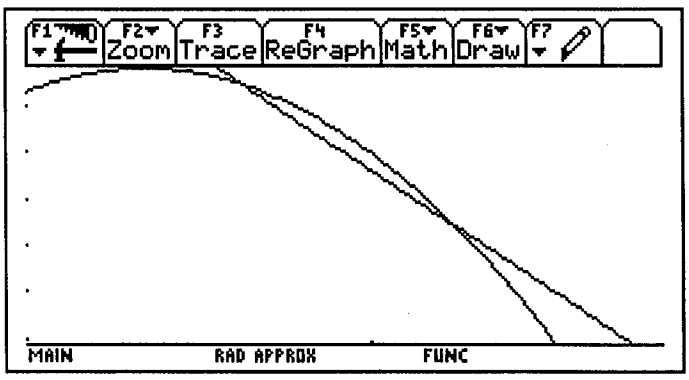


Le professeur indique qu'on va faire une vérification graphique pour savoir quelle équation "donne la meilleure précision".

S. recopie dans la base de fonctions sa solution (elle tronque le coefficient directeur à deux chiffres décimaux et le terme constant à sa partie entière), et d'autres solutions inscrites au tableau.



Après différents essais de Zoom, elle obtient l'écran ci-contre :



Elle essaie ensuite une équation que lui a indiqué sa voisine (*-4x +12.2*). Curieusement, c'est l'équation exacte de la tangente en t=0,8.

Il est probable qu'un des redoublants l'a obtenue par calcul et qu'elle a ensuite diffusé dans la classe. A l'échelle choisie cette solution paraît plus tangente : "C'est la vraie !" Elle zoome de nouveau pour

constater la coïncidence de la courbe et de la tangente : "Elles sont pratiquement confondues... elle est tangente...". Elle note l'équation de cette tangente sur son compte-rendu.

Pendant ce temps, le professeur fait rappeler aux élèves la définition de la tangente. ("une droite qui n'a qu'un seul point commun, proche de la courbe, c'est une position limite du cas où il y a deux points d'intersection..." Il tente d'obtenir que les élèves précisent le coefficient directeur de la tangente ("aux alentours de combien ? ... de -5").

Quatrième phase : l'approximation affine

Le professeur explique "qu'on va essayer d'avoir mieux le coefficient directeur". Il demande de calculer la position du corps à l'instant 0,8 + Δt. Il est obligé de s'attarder sur un détail technique : la manière d'obtenir le caractère Δ. S. et sa voisine suivent pas à pas.

Le professeur indique d'utiliser l'éditeur de données (*Data-Matrix Editor*) pour observer chaque terme. Elles passent dans ce module, effacent les données qui y sont présentes, puis entrent les titres, mais pas dans la bonne ligne.

Elles demandent au professeur comment entrer les données. Le professeur explique que le titre n'a pas à être en ligne 1 : "C'est du décor". Elles comprennent qu'il faut entrer des valeurs dans les cases des colonnes c1 et c2, et des formules dans les autres colonnes. S. hésite à entrer une formule comportant la fonction h en colonne 6. Le professeur la rassure "il y a une liaison entre les modules". S. est perdue, car les valeurs ne se calculent pas. Après un temps d'hésitation, et de concertation avec sa voisine, elle positionne le format *auto-calculate* sur *ON*.

Elle est inquiète car, à cause d'une question de largeur de colonne, son tableau n'est pas le même que celui que le professeur a fait afficher sur rétroprojecteur. Elle parcourt les cases du tableau, pour observer les résultats dans la ligne d'entrée. Mais elle ne s'y retrouve pas davantage, car le tableau du professeur a une ligne de plus. En fait, le professeur a entré une valeur de plus de Δt. De nombreux autres élèves sont perdus eux aussi, et le travail n'avance pas pendant plusieurs minutes. Le professeur s'aperçoit du problème et en donne les raisons. Puis il essaie, sur les quelques minutes qui restent, de tirer une conclusion, mais la séance se termine.

D. Analyse

On sent, tout au long de la séance la volonté du professeur d'"avancer" pour présenter aux élèves les trois aspects du nombre dérivé. Il y est aidé, dans les phases collectives, par les résultats annoncés par les élèves, souvent redoublants qui vont le plus vite. La présentation des calculs au rétroprojecteur est aussi un moyen efficace de faire "recoller" les élèves qui comme S. et A. peinent à suivre.

Côté élève, l'activité prend la forme d'une suite de tâches. Le lien entre les tâches et avec le sujet n'apparaît pas toujours :

- On aurait pu s'attendre à ce que des valeurs de la vitesse moyenne sur des intervalles encadrant de plus en plus en plus finement 0,8, s'observent comme "convergeant" vers la vitesse instantanée. Or les deux vitesses moyennes calculées autour de 0,8 sont égales. Il en est de même autour de 1. Ce phénomène ne fait pas l'objet d'un débat chez les élèves.
- Dans la troisième phase, la recherche d'une droite approchant le mieux possible la courbe constitue une motivation importante. C'est ce qui conduit S. à abandonner son propre

résultat pour celui qui diffuse dans la classe. Comme, de plus, S. a utilisé une formule de colinéarité ne faisant pas intervenir le calcul du coefficient directeur, elle ne peut pas faire le lien avec la phase précédente.

- La quatrième phase vient tard en fin de séance, les difficultés techniques dominent.

Beaucoup de difficultés mathématiques sont levées par la donnée de formules. Les élèves rencontrent malgré cela des difficultés algébriques, comme en témoigne l'observation de S. particulièrement dans la première et la troisième phase. Ainsi, les élèves maîtrisent peu les aspects mathématiques des notions présentées et ne font pas le lien entre les différents aspects du nombre dérivé (cinématique, tangente, approximation affine).

En comparant avec la classe A, la séance a lieu, pour la classe B, deux mois plus tard dans l'année. Les difficultés de manipulation sont moins présentes que dans la classe A. Néanmoins, beaucoup des difficultés rencontrées par les élèves sont liées au fonctionnement de la TI92 :

- Confusion entre fonction et expression dans la première phase,
- Difficulté dans la syntaxe des fonctions *Solve* et *Graph* et du Zoom,
- Difficultés dans l'utilisation de l'éditeur de données.

Ces difficultés contribuent à ce que les élèves "ne décollent pas" de la tâche.

La classe B est ici beaucoup plus dirigée par le professeur. Les phases a-didactiques sont très courtes, vite interrompues par des synthèses collective. Cependant, l'impression domine, comme dans la classe A, que les élèves en restent à l'exécution de tâches, à la résolution de problèmes locaux, sans compréhension des notions abordées par le professeur.

En fait, introduire le nombre dérivé sous trois aspects dans la même séance est certainement peu réaliste. La TI92 peut rendre possible certains calculs, et permettre d'aller plus vite sur d'autres, mais elle ne résout pas les difficultés conceptuelles des différents aspects de la dérivée. Bien que cette séance diffère dans sa conception et dans ses conditions de mise en œuvre, de la séance sur l'introduction des dérivées, la conclusion que nous tirons est semblable : si l'on veut des situations réellement problématiques pour l'élève sans que soit perdue la cohérence globale de la situation, il nous faut organiser dans une ingénierie globale l'étude de la dérivation et des différentes situations qui lui donnent sens. C'est ce que nous expérimenterons en 1996-97, comme ce sera rapporté dans le prochain chapitre.

OBSERVATION 3 :
La cuve, un problème d'optimisation (Classe A)

A. Contexte et organisation

C'était, à la fin du mois de janvier un des premiers problèmes d'optimisation que les élèves rencontraient. La notion de dérivée avait été introduite à la rentrée de janvier, après une phase d'approche avant les vacances de Noël.

L'observation s'est déroulée dans les conditions suivantes : deux séances de recherche d'une heure en binômes par demi-classe suivies d'une heure de synthèse collective. Il était d'autre part demandé aux élèves de rédiger individuellement pour la semaine suivante un compte-rendu du travail effectué, prenant en compte la synthèse.

Le texte du problème est en annexe à la fin de ce chapitre. L'enseignante avait réalisé dans le module GEOMETRY de la TI92 rétroprojetable une représentation géométrique de la cuve qui servait à introduire collectivement le problème.

B. Le problème d'optimisation proposé

Il s'agit d'un problème d'optimisation classique mais nettement plus complexe sur le plan de la modélisation et sur le plan du traitement technique que les deux problèmes déjà traités par les élèves (aire maximum pour un rectangle de périmètre donné, aire minimum pour une boîte de conserve de volume donné). C'est pourquoi la modélisation était relativement guidée, l'enseignante pensant que les élèves ne pouvaient dépasser à ce moment de l'année le degré d'autonomie donné ici. Les deux variables x et h étaient donc introduites et l'on précisait qu'il fallait exprimer le volume en fonction de x seul.

Pour arriver à l'expression du volume, les élèves pouvaient :

- soit décomposer le volume en sous-volumes correspondant aux parois latérales et au fond de la cuve et additionner les volumes correspondants. Les risques d'erreurs dans ce cas étaient loin d'être négligeables (problèmes d'intersection, erreurs dans les évaluations de dimensions notamment).
- soit calculer le volume de béton comme différence entre le volume extérieur de la cuve et son volume intérieur, calcul facile dès que l'on avait déterminé les dimensions extérieures de la cuve puisque le volume intérieur était connu. Il fallait en revanche penser à utiliser une démarche soustractive.

Une fois cette expression obtenue, il fallait mobiliser la relation entre x et h fournie par la donnée du volume intérieur de la cuve pour éliminer la variable h.

Ces deux opérations faisaient donc de l'opération de modélisation une opération relativement complexe et l'enseignante avait prévu de faire le point au bout d'un quart d'heure environ, pour faire expliciter l'ensemble de la démarche.

Ensuite l'étude du problème commençait par une exploration graphique se situant dans la continuité des approches développées en seconde pour ce type de problème. Elle devait conduire à conjecturer l'existence d'un minimum pour la fonction obtenu approximativement pour x=2.

La résolution exacte commençait avec la question 3 dans laquelle on demandait de calculer la dérivée à la main. L'enseignante avait fait ce choix avec plusieurs objectifs :

- un objectif d'entraînement technique avec ici la possibilité ensuite de faire comparer divers modes de calcul suivant la forme choisie pour l'expression du volume : forme semi-factorisée : $V(x) = (x+0.4)^2\left(\frac{4}{x^2}+0.2\right)$, forme développée ou fraction rationnelle et attirer l'attention sur l'importance d'un tel choix,
- un objectif de comparaison d'écritures algébriques, à partir des différentes formes trouvées, formes P/C et TI92. C'était la raison de la question 4.

La fin du problème était classique mais n'était pas techniquement évidente. En effet, la dérivée obtenue, à partir de l'expression développée était égale à

$$V'(x) = 0.4x - \frac{3.2}{x^2} + 0.16 - \frac{1.28}{x^3} .$$

La factorisation de cette expression n'allait pas de soi, sans la calculatrice. Si l'on partait pour le calcul de la dérivée de la forme semi-factorisée, la factorisation était plus facile mais l'étude du signe du second facteur : $1 - \frac{8}{x^3}$ risquait de poser problèmes aux élèves.

La TI92 permettait de mettre V'(x) sous la forme : $\frac{2(x-2)(5x+2)(x^2+2x+4)}{25x^3}$. Ensuite, il fallait remarquer que x étant positif le signe de V'(x) était celui de x-2, pour aboutir au tableau de variation et conclure qu'il y avait bien un minimum et un seul pour x=2

C. Déroulement

Nous présentons d'abord succinctement la recherche de deux élèves A. et son voisin C. dans le deuxième groupe observé. On verra que l'enseignante, tirant les enseignements du fonctionnement du premier groupe, ne laissera pas les deux élèves « sécher » trop longtemps sur la modélisation. Dans le premier groupe, elle avait voulu laisser les élèves trouver plus autonomes et avait finalement dû intervenir à plusieurs reprises, finir par faire préciser collectivement les dimensions intérieures et extérieures de la cuve et insister sur la relation donnée entre x et h via le volume intérieur. La démarche soustractive avait, quant à elle, fini par diffuser.

9h15 : Après le lancement de la séance, A. écrit sur sa feuille : "Le volume de béton" puis elle s'arrête. Assez vite, l'enseignante (M.) qui circule dans la classe vient l'aider. Elle lui fait formuler que le volume extérieur est égal au produit : longueur, largeur, hauteur. Puis elle lui rappelle qu'avec ça, elle a aussi l'intérieur de la cuve. Puis M. passe à C. qui a écrit :

$$[(x+0.4)(x+0.4)(x+0.4)] - [(x+0.2)x.x]$$

puis s'est lui aussi arrêté. Elle lui demande d'expliquer sa formule en montrant le début. C. répond que c'est un cube. M. lui montre alors la hauteur marquée sur la figure. C. acquiesce que ce n'est pas un cube mais en revanche ne voit pas comment faire les calculs sans h. M. lui conseille de les faire d'abord avec h, qu'il l'éliminera ensuite. Elle lui fait également préciser les dimensions extérieures et intérieures, remarquer le renseignement donné dans le texte (volume intérieur) et conclut en lui disant que donc il est prêt.

C. réécrit alors correctement le volume de béton sous la forme :

$$[(x+0.4)(x+0.4)(h+0.2)] - [h.x.^2]$$

A. a de son côté écrit :

Vint : h.x.x

Vext : (h+0.2)(x+0.2)(x+0.2)

A. regarde ce que fait C. et lui demande pourquoi il a mis x+0.4. Il le lui explique et elle corrige. Ensuite elle ajoutera une troisième ligne exprimant le volume de béton comme différence des deux volumes.

C. se lance dans des transformations algébriques de V(x) écrivant successivement :

$V(x) = [(x+0.4)^2(h+0.2)] - [h.x.^2]$

$V(x) = [(x^2+0.16+0.8x)(h+0.2)] - [h.x^2]$

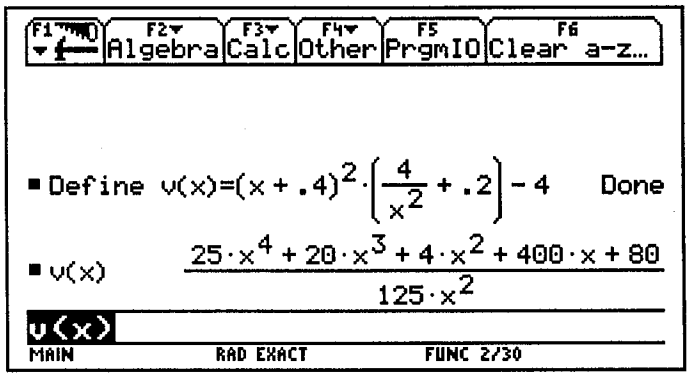
9h25 : Il peine ensuite sur le développement du produit de facteur. L'observateur (O.) lui dit qu'il peut s'aider de la TI. Il ne le fera pas.

A., après avoir demandé à C. comment il fait, transforme son expression en :

$V(x) = [(x+0.4)^2(h+0.2)] - 4.$

Ils comparent leurs résultats mais se trouvent tous les deux bloqués. O. réintervient au bout d'un moment et leur demande s'ils n'ont pas un renseignement qui leur permet d'exprimer h en fonction de x. Cette question débloque instantanément la situation. Ils écrivent $h=\frac{4}{x^2}$ puis font la substitution, arrivant enfin à : $V(x) = [(x+0.4)^2(\frac{4}{x^2} + 0.2)] - 4.$

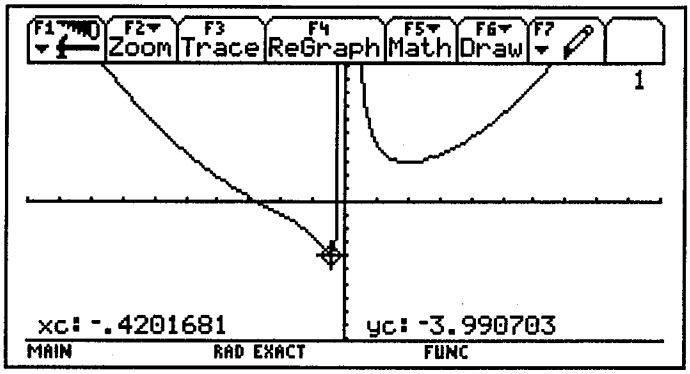
Ils passent alors à la suite. C. entre la fonction V dans la calculatrice par *F4-Define* correctement, sans oublier de parenthèses, sans oublier non plus le signe de multiplication entre les deux facteurs. L'enseignante passe et il lui demande ce qu'il doit faire maintenant avec la calculatrice. M. lui dit de faire afficher V(x) pour voir ce que cela donne. Il obtient :



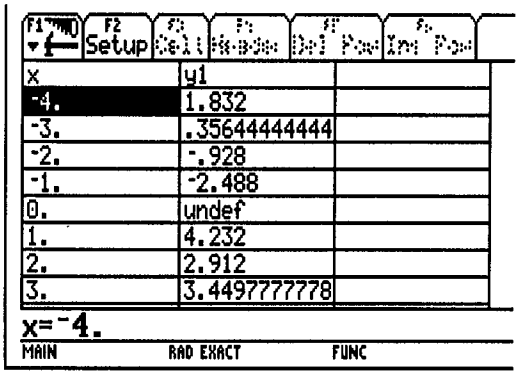
M. lui demande ce qu'a fait la machine (C. répond qu'elle a développé) puis le renvoie au texte du problème.

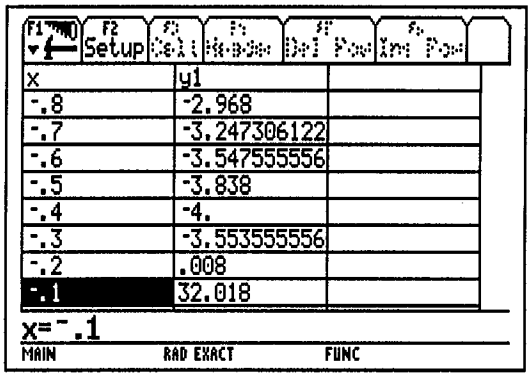
De son côté, A. a directement entré l'expression de V(x) dans Y= et elle demande à l'enseignante si ça va. M. acquiesce et s'en va.

C. passe dans Y=, entre y1(x)=V(x) puis fait tracer.

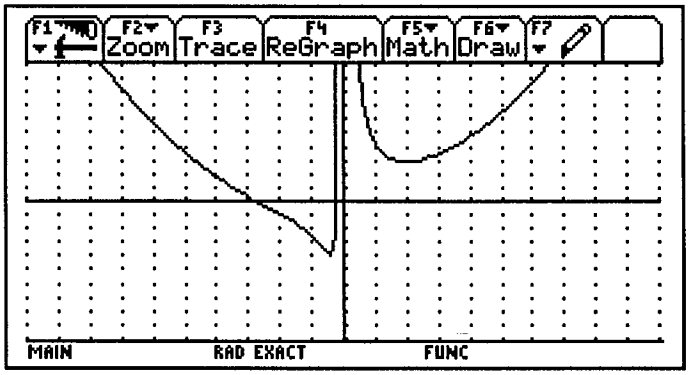


Il utilise ensuite TRACE et se positionne au minimum négatif qui est effectivement le minimum absolu. Il passe ensuite dans Tblset, fixe l'abscisse de départ à -4 et le passe à 1 et fait afficher un tableau de valeurs dans TABLE. Il passe ensuite à un pas de 0.1. Il va très vite dans ses manipulations et finalement stabilise l'affichage autour de -0.4 :



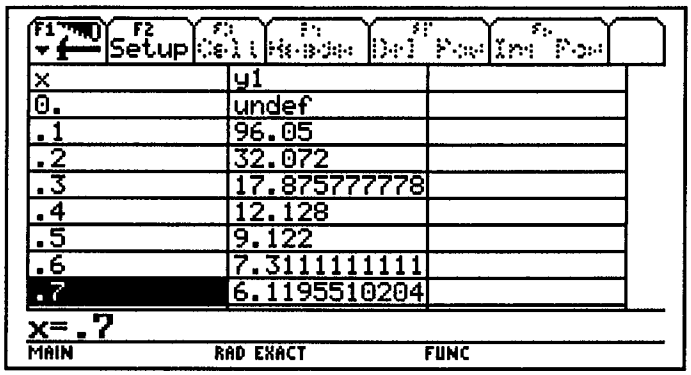


Pendant ce temps, A. rencontre des difficultés à obtenir le tracé. En effet, elle a l'option grille, ce qui lui donne ceci :



et ne sait pas comment s'en sortir. O. finit par lui expliquer comment faire.

C. est satisfait de ce qu'il a trouvé, note les valeurs trouvées dans TABLE et est prêt à passer à la suite. O. intervient une fois de plus pour lui faire remarquer que dans son problème, x est toujours positif. C. rajoute des valeurs absolues à -0.4, puis repasse dans TABLE pour voir l'évolution des valeurs, toujours par pas de 0.1 à partir de 0.



A. lui demande comment il a fait pour obtenir le minimum. C. lui dit d'aller dans TABLE et lui montre sa machine. Elle ne comprend pas bien alors il s'arrête et lui explique comment utiliser Tblset pour fixer le départ à 0 et le pas à 0.1, puis dans TABLE faire défiler les valeurs jusqu'au minimum. A. lui demande si le minimum c'est 0. C. répond que non. A. fait alors les manipulations sur sa propre machine et déclare qu'elle trouve 2. C. est d'accord et ils notent le résultat obtenu sous la forme :

"La fonction semble avoir un minimum pour x≈2."

A. rajoute à côté : ♦Tblset.

9h40 : Ils passent ensuite au calcul de la dérivée. C. part du quotient donné par la machine, en posant : $u(x) = 25x^4+20x^3+4x^2+400x+80$ et $v(x) = 125x^2$. A. part de l'expression qu'elle a obtenue : $V(x) = \dfrac{0.2[x^4+8x^3+16x^2+16x+3.2]}{x^2}$ et prend pour u(x) le terme entre crochets. Elle n'a visiblement pas repéré que l'expression donnée par la machine contient les coefficients .8 et .16 et non 8 et 16. O. ne le voit pas non plus.

C. écrit la formule de dérivation d'un quotient avec un + au lieu d'un -. O. lui fait remarquer son erreur. Ensuite il utilise la calculatrice pour faire tous les calculs de coefficients. Il réduit ensuite l'expression obtenue à la main, obtenant :

$$\frac{(650x^5+2500x^4-50000x^2-20000x)}{15625x^4}$$

Pendant ce temps, A. fait ses calculs complètement à la main et arrive à :

$$\frac{4x^5+24x^4+32x^3+16x^2-2x^5-16x^4-32x^3-32x^2-6.4x}{x^4}$$

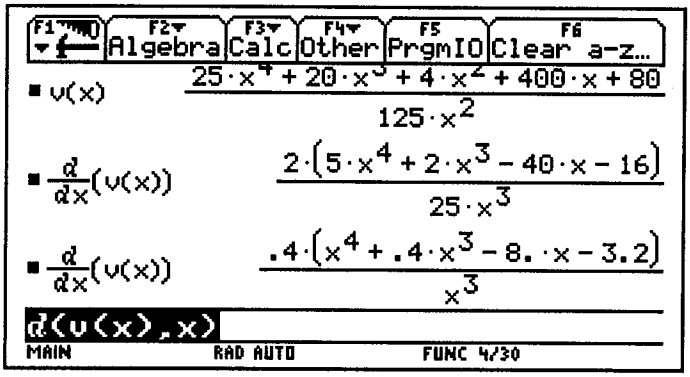
expression qu'elle réduit en :

$$\frac{2x^5+8x^4-16x^2-6.4x}{x^4}$$

et elle rajoute enfin le coefficient multiplicatif : 0.2. Ce calcul est correct, compte tenu du point de départ.

9h50 : C. fait dériver à la machine et obtient : $\dfrac{2(5x^4+2x^3-40x-16)}{25x^3}$. Il se demande si c'est la même chose que ce qu'il a déjà. M. passe et lui conseille de comparer les degrés. C. constate que du point de vue des degrés, ça marche s'il simplifie son numérateur par x, mais

trouve quand même les coefficients très différents. Pour comparer les deux résultats, il a l'idée de rentrer sa dérivée P/C et il constate alors que la machine lui renvoie l'expression de la dérivée machine. Il est très content et demande à A. où elle en est. A. a elle aussi fait calculer la dérivée à la machine. Elle est en mode automatique, ce qui explique les différences d'affichage.



Elle obtient en effet:

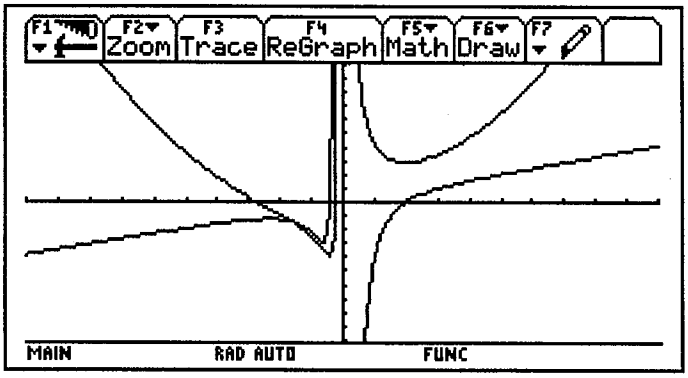
$$\frac{.4(x^4+.4x^3-8x-3.2)}{x^3}$$

qu'elle compare à sa valeur P/C :

$$\frac{0.2(2x^5+8x^3-16x-6.4)}{x^4}$$

et conclut que c'est bon.

9h55 : Ils passent à la question 5. C. définit la dérivée comme nouvelle fonction, en sachant rappeler l'expression sur la ligne de commande pour éviter de la retaper, puis il s'arrête ne sachant trop que faire. A. fait de même, en appelant u la nouvelle fonction. Elle l'entre dans Y= pour la faire tracer puis ne sait plus trop que faire non plus.

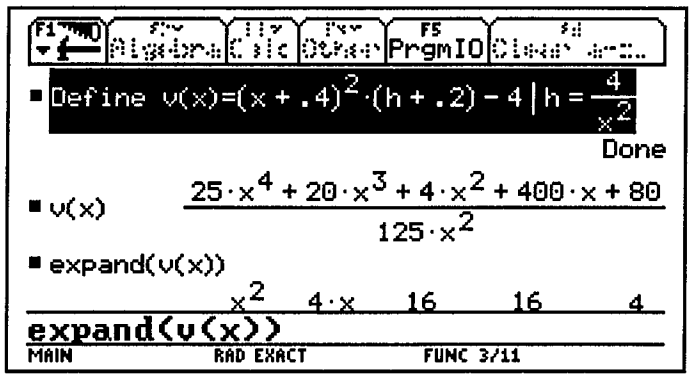


O. essaie de les aider, en leur demandant comment trouver le sens de variation. C. répond qu'il faut trouver le signe de la dérivée mais lorsque l'observateur leur demande s'ils peuvent le faire avec la machine, il n'obtient pas de réponse. O. demande alors s'ils peuvent le faire à partir du tracer de A. et ils y arrivent mais ils ne voient pas d'autre moyen possible.

Note : dans un autre groupe, un élève a pensé à demander les zéros de la dérivée mais il ne sait pas quoi en faire. M. l'aide à faire factoriser par la machine.

D. La synthèse collective

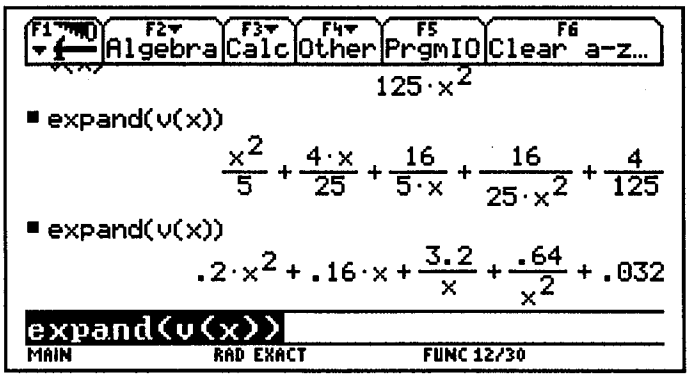
M. fait d'abord préciser les méthodes utilisées par les élèves pour calculer le volume. Les deux méthodes prévues ont été rencontrées mais, comme on pouvait s'y attendre, aucun élève ayant utilisé la méthode additive n'a abouti. M. ne rentre pas dans les détails de cette méthode et demande l'expression finalement trouvée par différence. M. l'entre dans la rétroprojetable puis fait raconter aux élèves ce qu'ils ont fait ensuite. Elle en profite pour montrer l'utilisation de la barre verticale "tel que" pour les substitutions.



Elle fait ensuite répertorier toutes les expressions différentes obtenues dans la classe à partir de la question : « Est-ce l'expression que vous aviez obtenue ? » et les écrit au fur et à mesure au tableau. Les élèves proposent bien sûr l'expression semi-factorisée et l'expression développée :

$$V(x) = 0.2x^2 + \frac{3.2}{x} + 0.16x + \frac{0.64}{x^2} + 0.032.$$

Elle demande comment obtenir cette expression à la machine. Les réponses oscillent entre *Factor* et *Expand* puis ce dernier l'emporte. Elle le fait et obtient une expression à coefficients fractionnaires qu'elle écrit au tableau. Il s'agit maintenant de savoir si elles sont égales, ce que les élèves vont vérifier collectivement, coefficient par coefficient. M. demande ensuite si l'on pourrait quand même obtenir la première forme à la machine et un élève propose de faire : ♦ ENTER. M. le fait et commente, en expliquant que la valeur approchée ainsi obtenue est en fait une valeur exacte car les dénominateurs des fractions sont des puissances de 5.



Elle passe ensuite à la définition et au tracé de la fonction qu'elle effectue à la rétroprojetable puis demande quelles sont ses particularités. Un élève dit qu'elle n'est pas définie en 0. A la question de M. : « Est-ce une surprise ? Pouvait-on le prévoir ? » , après un moment de silence quelqu'un répond : « Oui, parce qu'il y a un x au dénominateur ». M. acquiesce puis revient au

problème physique posé, en faisant remarquer que x représente une longueur et que donc l'ensemble de définition de la fonction est]0,+∞[.

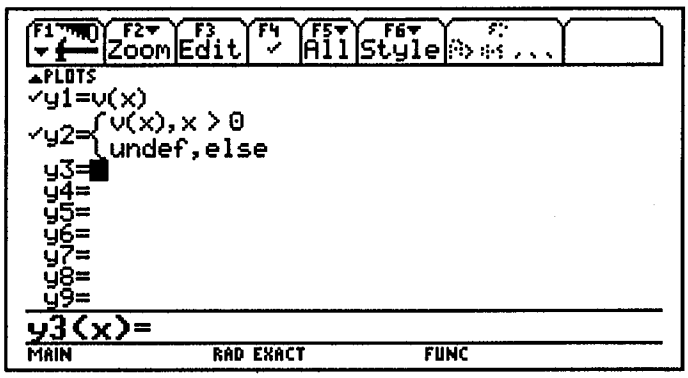
10h30 : M. profite de la circonstance pour introduire la fonction *When* qui n'a jamais été utilisée encore. Elle va la chercher dans CATALOG, explique la syntaxe :

when (x>0, v(x) , *undef*)

tout en faisant les manipulations : le symbole > est à aller chercher dans MATH *Test*, *undef* qui est un mot réservé, un nom de variable qui signifie que la fonction n'est pas définie... Ca va trop vite, les élèves sont perdus, ils n'arrivent pas à faire les manipulations correspondantes sur leur machine. Elle reprend en détail, en précisant que *when* on peut le taper directement puis en écrivant la syntaxe au tableau sous la forme : *when* (condition , valeur si oui , valeur si non).

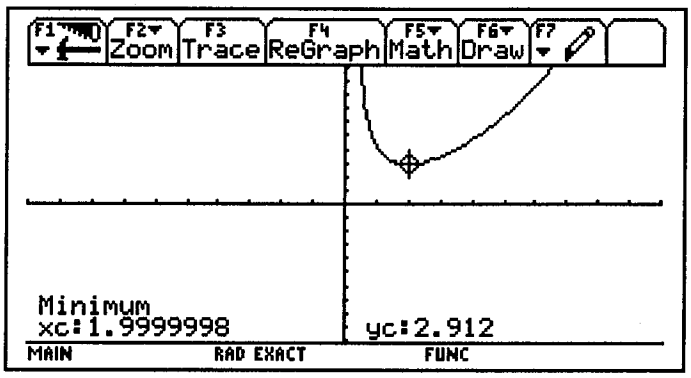
Elle passe ensuite à l'écran graphique pour leur montrer que la portion gauche de la courbe a bien disparu, puis leur laisse le temps de faire eux-mêmes les manipulations.

Certains cherchent sans succès *undef* dans CATALOG. Elle leur conseille de le taper. Elle montre ensuite que l'affichage dans Y= se fait alors sur deux lignes puis précise qu'on aurait pu utiliser la même définition dans HOME.



On revient ensuite au graphe et M. demande si la fonction semble avoir un minimum. Les élèves répondent qu'elle semble d'abord décroissante puis croissante puis proposent d'utiliser *Trace* pour chercher le minimum. Elle le fait, tout en disant qu'avec 2nd ils peuvent faire bouger le curseur plus vite et arrive à un minimum entre 1.93 et 2.10.

Elle demande ensuite comment faire pour avoir quelque chose de plus précis. Plusieurs élèves proposent d'aller dans TABLE. Elle passe d'abord dans Tblset et conseille un pas de 0.1. Puis elle revient à TABLE et fait défiler les valeurs en commentant : « On a l'air d'avoir un minimum pour 2. Est-on sûr ? ». Réponse en choeur : « Non », qui confirme ce que laissait penser l'observation de C. et A., à savoir que l'attention des élèves a été attirée sur la distinction exact / approché. Elle prend un pas de 0.05 pour confirmer puis demande comment faire pour être vraiment sûrs. Un élève propose de faire *F5-Min*. Elle le fait, en commentant encore une fois : « Vous savez que la notion de minimum est une notion locale, alors on me demande l'intervalle sur lequel il faut chercher le minimum ».



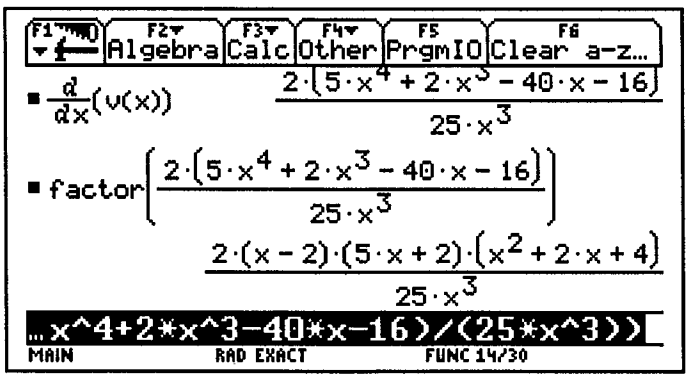
Finalement, elle obtient : 1.9999 et comme valeur 2.912 et demande : « Donc, la machine a-t-elle fait un calcul exact ? » Plusieurs élèves répondent non et elle insiste fortement sur le fait que, dans l'écran graphique, quand on utilise *F5-Min*, la machine ne calcule les valeurs que pour un nombre fini de points : 238-1 correspondant aux 238 pixels, entre xmin et xmax, qu'elle fait une table de valeurs pour ces points et ensuite donne la plus petite valeur de sa table, que c'est du calcul approché.

Après cette parenthèse, on revient à la question : comment trouver exactement ? A. propose la dérivée, parce que quand la dérivée s'annule, il y a un extremum. M. demande si c'est bien sûr et fait expliciter la condition de changement de signe. Elle revient ensuite aux quatre formes obtenues pour V(x) et demande laquelle choisir si on veut dériver à la main. L'accord se fait sur l'expression développée décimale, plusieurs disent qu'ils ont commencé avec les autres et ne s'en sont pas sortis. M. fait détailler ce premier calcul puis passe à la forme avec dénominateur $125x^2$ et conseille dans ce cas là de mettre 1/125 en facteur pour ne pas avoir des coefficients trop compliqués. Elle passe ensuite à la forme semi-factorisée et là fait détailler les calculs car visiblement certains ont essayé et se sont trompés, en introduisant des fonctions intermédiaires. Le calcul de la dérivée de $(x+0.4)^2$ pose visiblement problème et les réponses fausses fusent. M. détaille la composition.

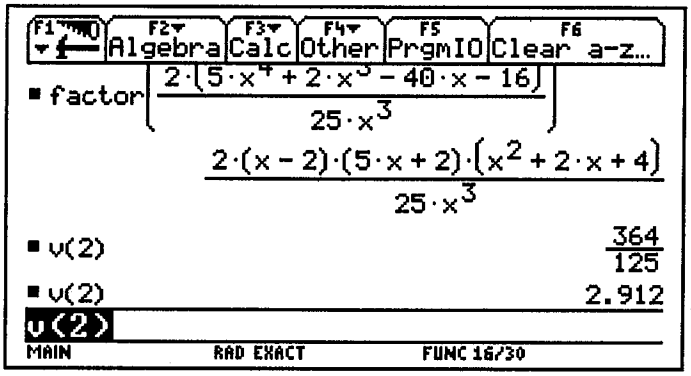
On arrive enfin au signe de la dérivée. L'expression de la dérivée dont on part est la dernière obtenue :

$$V'(x) = 0.4x.(x+0.4)\left(1 - \frac{8}{x^3}\right)$$

mais les élèves ne voient pas comment déterminer le signe du second terme. M. laisse ceci momentanément en suspens, revient à la dérivée donnée par la machine et la fait factoriser, obtenant :



Les élèves retrouvent les valeurs 2 et -0.4 déjà rencontrées et il reste le trinôme du second degré. M. fait chercher les racines, et calculer mentalement le discriminant qui se trouve être négatif. Tout est préparé maintenant, M. fait détailler tous les raisonnements qui conduisent au signe de la dérivée, tracer le tableau de variation et conclure à l'existence d'un minimum en 2, en le faisant justifier soigneusement. Elle demande ensuite quelle est la valeur du minimum. Plusieurs élèves répondent 2.912. M. fait remarquer qu'a priori c'est une valeur approchée, la valeur exacte du minimum est V(2), soit : 364/125. En faisant ♦ ENTER, on obtient 2.912, mais a-t-on égalité entre les deux nombres ou seulement égalité approchée ?



C. dit que ça doit être égal parce qu'autrement y aurait d'autres décimales. M. fait lire 364/125 comme une fraction décimale et conclure. On conclut en cherchant la hauteur de la cuve : un mètre.

La séance se termine. L'enseignante demande aux élèves de rédiger individuellement un compte-rendu du travail effectué.

E. Analyse

Le déroulement de cette séance est dans ses grandes lignes conforme à l'analyse a priori effectuée. On voit bien que l'autonomie donnée aux élèves dans la modélisation, bien qu'elle soit réduite, est déjà trop grande pour bon nombre d'élèves et que l'enseignante doit fortement aider cette modélisation. En particulier, il est clair que les élèves n'ont pas l'habitude d'avoir à gérer des éliminations de variables. Même si les situations fonctionnelles font souvent intervenir naturellement plusieurs variables, ce n'est pas eux qui ont à choisir dans les activités usuelles les variables pertinentes et le travail éventuel d'élimination est guidé pas à pas.

Une fois l'expression du volume obtenu, on rentre comme prévu dans une activité plus classique d'exploration graphique. On soulignera que les élèves observés sont en général sensibles (au-delà du binôme cité) au fait que TRACE ou TABLE ne donnent que des valeurs approchées, même si ces valeurs, comme c'est le cas ici, ont l'air de valeurs exactes. On voit sans doute là l'effet du travail soutenu sur ces questions, dans le cadre de l'instrumentation des calculatrices graphiques, au premier trimestre. Ce n'est pas aussi net pour *F5-Min*, dont le fonctionnement est plus caché et l'enseignante est obligée d'intervenir à ce niveau.

Pour le calcul de la dérivée, les élèves ne choisissent pas nécessairement la forme la plus économique, ce qui était prévu. Un certain nombre préfère partir du résultat machine, lui donnant sans doute une autorité supérieure à leur production P/C. C'est ici une erreur si l'expression machine n'est pas préalablement développée car cela les conduit à des calculs compliqués. En général, ils n'ont pas perçu non plus l'intérêt de la mise en facteur de coefficients numériques et ceci renforce la complexité des calculs à mener. Quant à ceux qui sont partis de l'expression semi-factorisée, ils ont rencontré des difficultés sérieuses,

l'expression dépassant les compétences de dérivation de la plupart des élèves à ce moment là de l'année. Néanmoins, dans les deux groupes, la plupart des élèves arrivent à obtenir l'expression de la dérivée et sont donc confrontés au problème intéressant de la comparaison avec la production machine. Le constat d'une différence est d'abord surprenant mais, le texte aidant, il n'est pas automatiquement attribué à une erreur dans le calcul P/C. Il faudra aider certains élèves à trouver des moyens de comparaison, tous n'y arrivant pas de façon autonome comme le groupe observé décrit plus haut, à ce moment de l'année.

Ce qui est aussi à remarquer, c'est que le fait de disposer de la dérivée et parfois même pour certains élèves de ses zéros ne rend pas l'étude du signe de la dérivée aussi facile que l'on aurait pu le penser. On retrouve ici un phénomène tout à fait cohérent avec les observations faites peu après lors du premier entretien. Confrontés à une situation plus complexe que les situations usuelles, ils se retrouvent démunis car ils n'ont pas réellement perçu l'intérêt de la factorisation dans l'étude du signe de la dérivée.

La synthèse collective ensuite se révèle tout à fait riche et peut fonctionner comme il avait été prévu. Les élèves y participent très activement et les difficultés qu'ils ont rencontrées mais que l'enseignante a aidé bon nombre d'entre eux à surmonter facilite la problématisation des questions que l'on souhaitait soulever. Il est clair que la complexité non standard de la situation est ici un atout pour soulever des questions intéressantes sur le plan mathématique que la confrontation aux situations gérables dans le seul environnement P/C à ce niveau d'enseignement, n'arrive pas aussi aisément à induire.

On notera aussi dans cette synthèse l'imbrication de l'avancée mathématique et de l'avancée dans la connaissance de la machine, l'enseignante saisissant visiblement toutes les opportunités qu'elle peut rencontrer, à ce moment de l'année tout au moins.

Cette séance est organisée suivant le dispositif en trois temps déjà utilisé dans la recherche DERIVE : recherche - synthèse - rapport de recherche. Ce dispositif nous semble ici bien adapté. On aurait pu cependant profiter de la dimension « rapport » pour engager les élèves dans un processus de généralisation. En effet, les valeurs obtenues pour le minimum cherché présentent certaines particularités : la valeur de x trouvée est la moitié de la mesure donnée pour le volume intérieur, la hauteur est le double de la valeur de x et l'on peut se demander si ces rapports particuliers sont ou non dépendants des paramètres du problème, à savoir l'épaisseur de la cuve et le volume intérieur. En fait, il y a indépendance de x par rapport à e, mais non par rapport au volume intérieur, la valeur minimum de x étant donnée par la racine cubique de $2V_0$, V_0 étant le volume initial. En revanche, dans tous les cas, la valeur de h trouvée pour le minimum est bien la moitié de la valeur de x. Il y a donc dans cette situation des régularités intéressantes à étudier. Cette généralisation aurait pu être soulevée à la fin de la séance, en relançant ainsi une recherche hors classe outillée par le travail de la synthèse. Les élèves ont la possibilité de tester les régularités éventuelles par d'autres choix de valeurs de l'épaisseur et du volume initial. Prouver ensuite l'indépendance conjecturée dans le cas de l'épaisseur, trouver l'expression de la dépendance dans le cas d'un volume intérieur quelconque, suppose que l'on introduise des paramètres et que l'on généralise à ce cas le travail réalisé dans les cas numériques. La machine le permet en assurant les calculs et factorisations de dérivée dans les mêmes conditions. Il est évident qu'on est là complètement sorti du type de travail accessible en papier/crayon à ce niveau, même avec aide.

Cette généralisation a été en fait présente dès la première année dans la classe de Caen et nous allons en rendre compte dans le paragraphe suivant.

OBSERVATION 4 :
La cuve, un problème d'optimisation avec généralisation (Classe B)

A. Contexte

Le même problème a été proposé aux élèves de la classe de Caen, à la fin du mois d'avril, lors d'une séance de 2 heures. Un problème du même type mais avec des données moins complexes avait été résolu au cours d'une séance précédente : « la boîte de petits pois ». Il s'agissait de déterminer les dimensions d'une boîte cylindrique de volume donné, afin de minimiser la consommation de matériau.

Le texte donné aux élèves était identique à celui proposé à Chartres mais proposait de plus deux généralisations, le professeur estimant qu'à ce moment de l'année, la résolution du problème ne prendrait pas les deux heures de la séance.

Reprendre le même problème avec une épaisseur de la cuve de e mètres (le volume de la cuve est toujours $4m^3$)
Reprendre le même problème avec une épaisseur de la cuve de e mètres, le volume de la cuve à réaliser étant V_0.

B. Déroulement

Nous avons observé deux groupes de deux élèves (deux garçons R. Et S., deux filles E. Et L .) Dans chacun des groupes, les écrans de calculatrice d'un élève ont été enregistrés, et sont restitués dans ce compte rendu.

Nous avons également relevé 21 compte rendu d'élèves. Ces compte rendu nous permettent d'avoir un état de l'avancement de la recherche dans la classe et des méthodes utilisées.

Groupe R. et S.

Les écrans sont enregistrés sur la calculatrice de R.

A 8h20 le professeur présente le travail. Il précise qu'on laisse la liberté de travailler soit à la main, soit à la machine, mais que "pour que ce soit utile" et "dans l'optique du baccalauréat", on a imposé à certains moments du texte de travailler à la main.

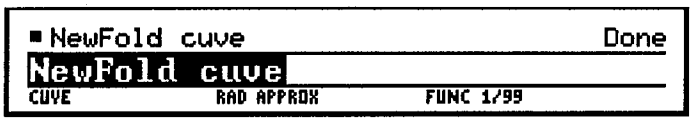
Il indique qu'il s'agit d'un problème d'étude de fonction à partir d'une situation concrète analogue à la situation de "la boîte de petits pois".

Il indique qu'on essaiera ensuite "de faire un petit plus général" et que la calculatrice sera davantage utilisée.

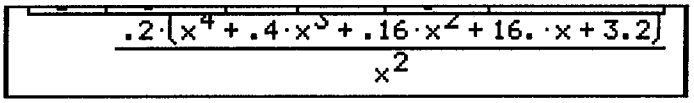
Il donne des indications sur le compte rendu à produire, et lance le travail en précisant que, dans ce problème, la calculatrice "aide bien".

Le cas numérique

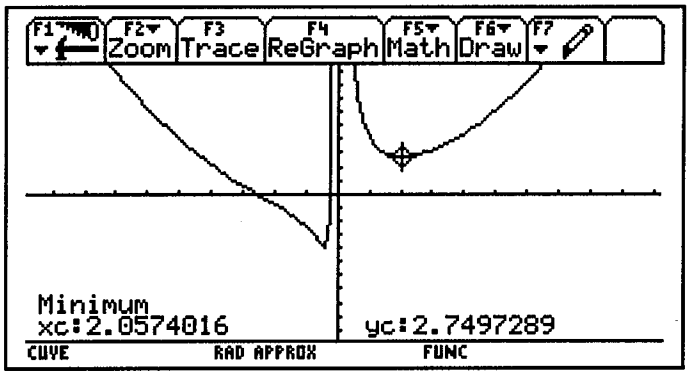
8h25 Les élèves créent un nouveau répertoire



R. travaille pendant une dizaine de minutes sur papier. Il établit h en fonction de x, puis V(x) sous forme d'une somme de trois termes : deux "grands" panneaux latéraux, deux "petits" panneaux latéraux et le fond. Il développe en papier crayon et obtient une fraction rationnelle qu'il entre dans la calculatrice. Il y a une erreur sur le terme en x^3 du numérateur. C'est la conséquence d'une erreur de modélisation : dans les "petits" panneaux latéraux, il a pris h comme hauteur au lieu de (h+0,2).



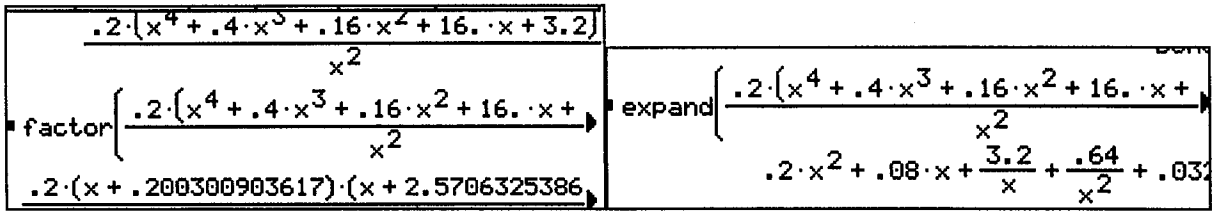
8h45 Il graphe cette fonction, et fait afficher par la machine les coordonnées du minimum.



Il ne s'est donc pas aidé de la calculatrice pour la modélisation, et les transformations algébriques qui l'accompagnent. Ce comportement est général dans la classe. On voit très peu d'utilisation de la calculatrice avant 8h45. Un élève utilise sa CASIO fx7800 pour des calculs du type 0,8x0,2. Questionné par l'observateur, il répond que sa TI92 n'a plus de piles.

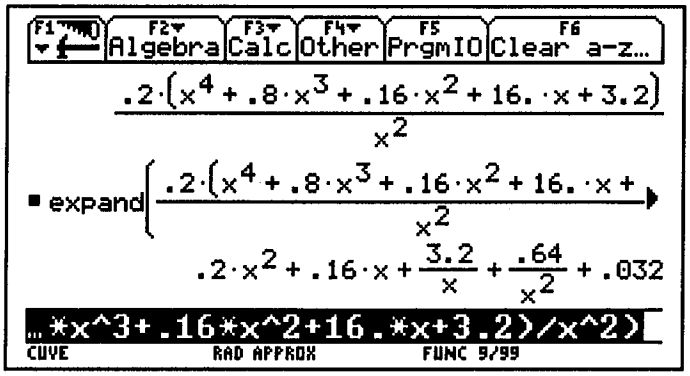
L'autre élève du groupe, S. se sert davantage de sa TI92 : il entre chacun des termes (panneaux latéraux, fond) et les fait développer. Il obtient une fraction rationnelle correcte, différente de celle de R : $\frac{0{,}2\left(x^4+0{,}8x^3+0{,}16x^2+16x+3{,}2\right)}{x^2}$. Comme R., il trace la courbe et fait afficher le minimum, qu'il obtient pour x=2. Il considère que, ayant constaté un minimum, sa fonction "est la bonne".

9h00 R. et S. comparent leur courbe. R. est ennuyé par le fait que les minimums ne sont pas obtenus pour les mêmes valeurs. A l'aide de la calculatrice, il factorise, puis développe son expression pour pouvoir comparer avec S.



A partir de 9h20, il abandonne cette recherche. Une modélisation différente diffuse dans la classe : plutôt que de calculer panneau par panneau, on peut calculer la différence du volume extérieur et du volume intérieur. R. exprime V(x) sous cette forme, entre cette formule et

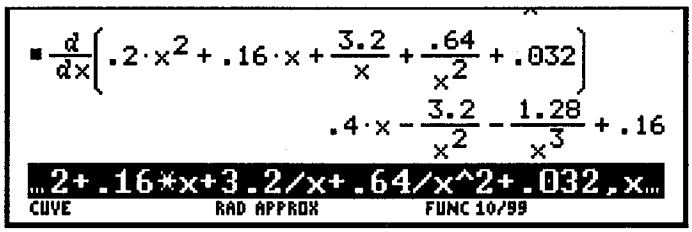
obtient la forme fraction rationnelle. Il fait développer et obtient la décomposition en éléments simples. Il constate que sa fonction est la même que celle de S. : "j'avais fait une erreur..."



Il fait tracer le graphe et afficher le minimum. Il porte sur son compte rendu la forme développée, et les coordonnées affichées du minimum : (2 ; 7,9).

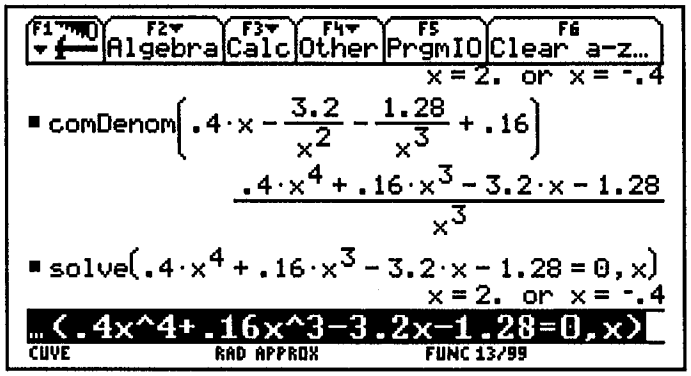
9h25 Le professeur indique pour toute la classe les deux généralisations demandées. Il précise qu'on peut utiliser largement la calculatrice.

R. et S. continuent de travailler sur le cas numérique. Ils calculent la dérivée en papier crayon à partir de la forme développée. Ils appliquent correctement la formule de dérivation de x^n. La forme qu'ils obtiennent à la calculatrice diffère seulement sur la position du terme constant : il est en seconde position dans le calcul des élèves et en dernière position sur la machine. S. note "Non, ils n'ont pas la même forme. Il faut développer les résultats obtenus".

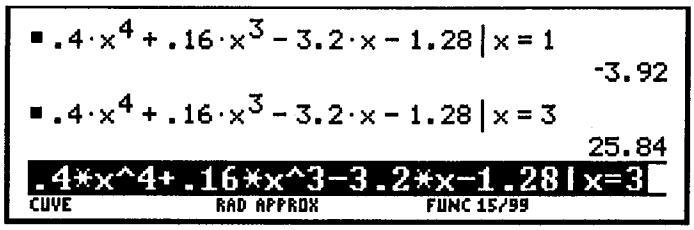


9h30 Ensuite R. et S. établissent le tableau de variations. Ce tableau est correct, mais la façon dont il est obtenu est curieuse. Sans chercher les zéros de la dérivée, ils portent la valeur x=2 dans le tableau. Ils calculent à la machine les valeurs de la dérivée pour x=1 et x=3, et indiquent dans le tableau le signe - sur l'intervalle]0;2[, et le signe + sur l'intervalle]2; infini[.

9h40 L'observateur leur fait remarquer que la valeur 2 peut être une valeur approchée (elle a été obtenue par la machine à l'aide d'une méthode numérique). Il leur indique de mettre la dérivée sous forme d'une fraction rationnelle, et d'étudier le signe du numérateur, ce qu'ils font.



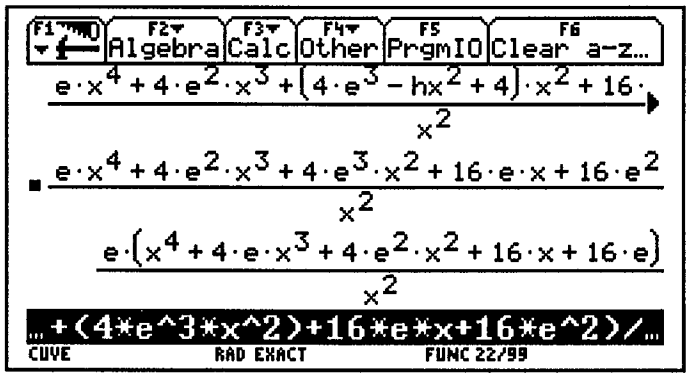
9h50 Ayant obtenu la valeur 2 comme zéro de la dérivée, ils déclarent "C'est pareil". Ils ne factorisent pas le numérateur, mais calculent comme ci-dessus les valeurs du numérateur pour x=1 et x=3.



Dans le tableau de variations, R. porte la valeur exacte de V(2), calculée à la machine, alors que S. se contente de la valeur 3.

Première généralisation

Ils abordent ensuite le problème général. R. déclare "C'est le même problème, il faut remplacer 0,2 par *e*. Je ne vois pas où est le problème". Sur son compte-rendu, il reprend la formule de calcul de V(x), raye 0,4 et écrit 2*e*. Il raye aussi 0,2 et écrit *e*. Vers 10h, il entre cette nouvelle formule dans la machine tente de la factoriser, mais, par la suite, sa recherche n'avance plus; la séance se termine à 10h05.



Groupe L. et E.

Les écrans sont enregistrés sur la calculatrice de L.

Le cas numérique

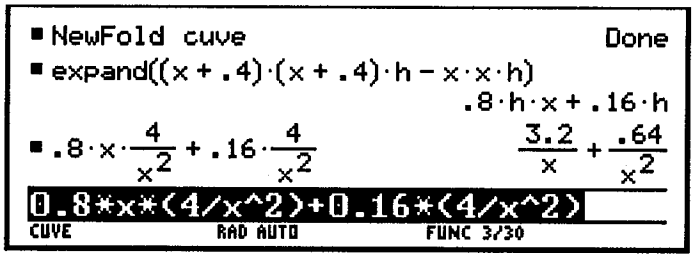
Les deux élèves travaillent pendant environ 15 minutes sur papier seulement. Elles se mettent d'accord sur une modélisation du volume de béton demandé : il suffit de faire la différence du volume extérieur et du volume intérieur. L. dit "Au grand, tu enlèves le petit". Elles notent sur leur compte rendu les termes "Volume du grand cube", et "Volume du petit cube", avec les formules correspondantes, et obtiennent une formule en x et h pour le volume de béton. Elles développent cette formule, toujours sans utiliser la calculatrice. L. a entouré la partie de la formule correspondant au volume intérieur, et a écrit =4 à côté.

Elles discutent un moment sur la présence des deux variables. L. pose des questions à E. "h, tu es obligée de le prendre ?"... "On n'a pas besoin d'avoir h ?" Elles résolvent à la main $hx^2 = 4$.

Elles tentent de simplifier la formule toujours sur papier, L. en conservant h, E. en l'éliminant. Mais elles rencontrent des difficultés. L. a pris *h* au lieu de (*h*+0,2) pour la hauteur du volume extérieur. E. simplifie $4/x^2 \times 0{,}8x$ en $0{,}32x^4$.

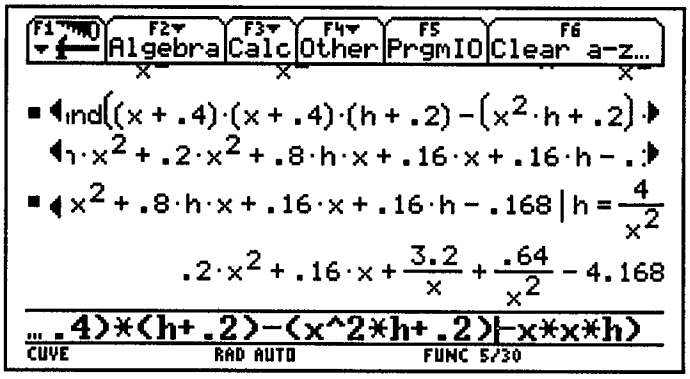
8h50 L'observateur suggère de vérifier à la calculatrice les développements faits à la main. Il demande à L. s'il n'existe pas une façon de remplacer *h* par sa valeur, de façon à l'éliminer de la formule.

L. entre sa formule (toujours avec l'erreur sur la hauteur), puis remplace à la main *h* par $\frac{4}{x^2}$.

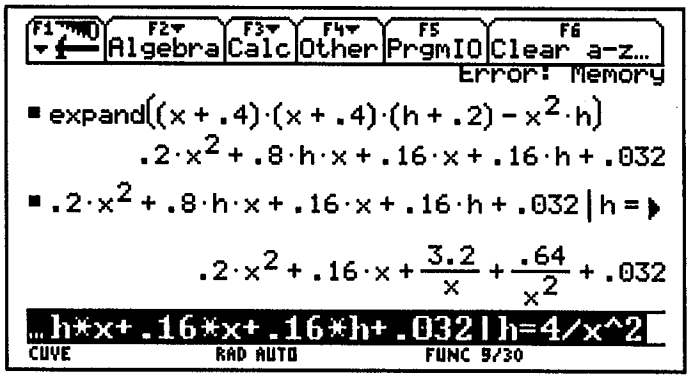


9h00 En comparant avec S., elle découvre son erreur sur la hauteur du volume extérieur. Elle corrige, mais bizarrement ajoute aussi + 0,2 à la suite du *h* de la seconde partie de la formule.

Elle confie cette fois la substitution de $\frac{4}{x^2}$ à *h* à la machine.

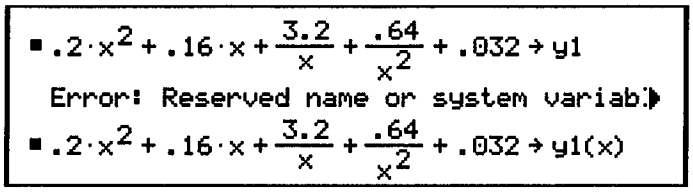


9h09 Elle corrige, toujours par comparaison avec S. Elle obtient une erreur "*Memory*", suite sans doute à une erreur de substitution. Elle recommence, toujours en substituant à la machine.

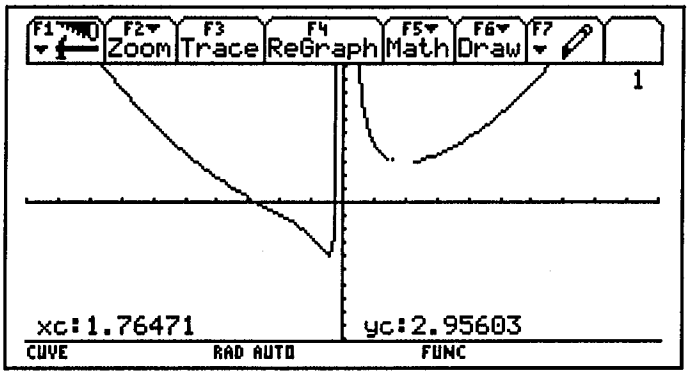


Elle est satisfaite de la formule trouvée (identique à celle de S.).

9h10 E. et L. discutent alors de la suite du problème. Elles affectent la fonction à la fonction système y1(x) de façon à obtenir son graphe. Elles y parviennent après une erreur de syntaxe.



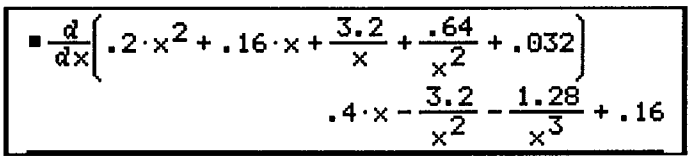
Elles cherchent le minimum en suivant la courbe.



Elles notent sur le compte rendu "Oui (il y a un minimum) en x=2 et y=2,9 est le minimum".

9h25 Elles cherchent la dérivée à la main. La TI92 leur sert à exécuter des calculs sur les nombres décimaux.

9h30 Elles vérifient leur dérivée



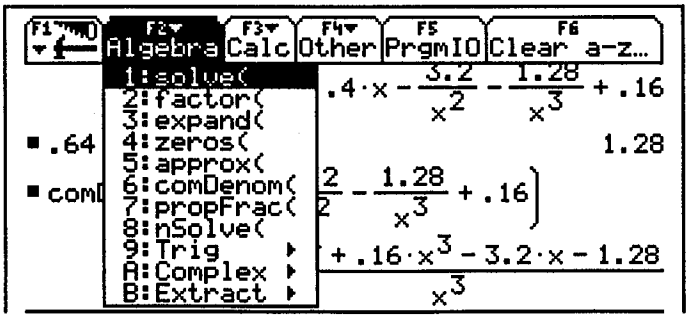
et notent : "les deux résultats ont la même forme".

Elles cherchent ensuite à tracer le tableau de variations. E. entre dans le tableur la dérivée et cherche à obtenir un tableau de valeurs. Elle fait également un tracé dans la fenêtre graphique. Elle lit la valeur 2, qu'elle porte dans son tableau de variations.

9h45 L. appelle le professeur et lui demande comment faire. Celui-ci indique de réduire au même dénominateur. Comme elles n'avancent pas davantage, l'observateur indique que la TI92 a une fonction pour réduire au même dénominateur.

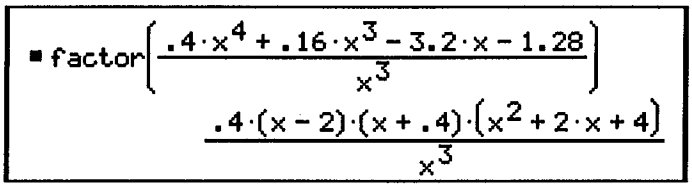
. E. "J'ai pas entendu ce qu'il t'a dit. Comment on fait pour réduire au même dénominateur ?"

L. "Tu vas dans F2, il y a ComDenom pour réduire au même dénominateur"



A l'aide de cette fonction, la dérivée est mise sous la forme d'une fraction rationnelle.

9h50 Elles semblent perdues, à cause du numérateur de degré 4. L'observateur leur suggère d'utiliser la machine pour factoriser, ce qu'elles font.

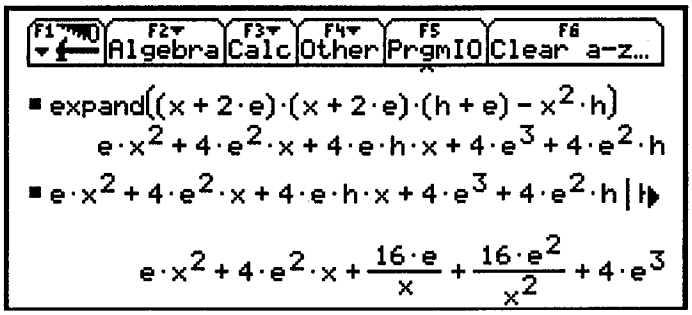


Après cette factorisation, le professeur passe voir l'avancement du travail. Il est satisfait de la factorisation et les guide pour trouver le signe de la dérivée.

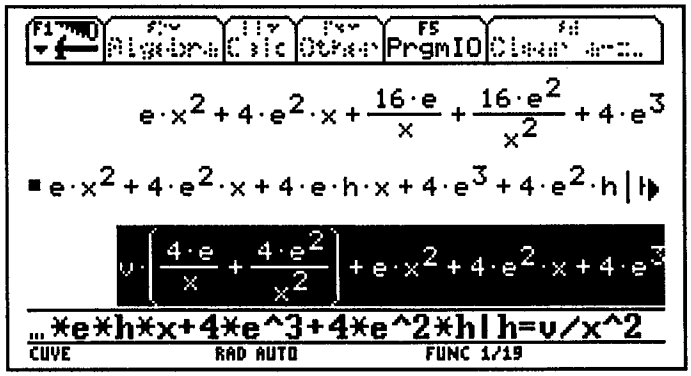
"Vous savez que x est positif. Que peut-on dire du signe de x^2, de x^3, de x+ 0,4 ? Positif, il reste juste à regarder le signe de x-2". Elles remplissent le tableau de variations et calculent à la main la valeur de h pour x=2.

Seconde généralisation

10h00 L. et E. abordent d'emblée la seconde généralisation. Elles forment facilement l'expression du volume en se guidant sur la résolution précédente, et remplacent h par sa valeur.



L. cherche ensuite l'expression dans le cas plus général où le volume intérieur est quelconque, puis arrête de chercher jusqu'à la fin de la séance.



E. quant à elle, calcule la dérivée de l'expression obtenue pour le volume de béton, puis déclare :"On ne peut plus rien faire". L'observateur lui demande pourquoi. Elle répond : "On ne peut pas tracer de courbe". L'observateur indique qu'il y a des méthodes pour se passer du tracé : "Comme on a fait tout à l'heure". Elle factorise alors à la machine, interprète le signe de la fraction rationnelle en notant e>0, remplit le tableau de variations et déclare : "C'est la même chose (que dans le cas numérique)".

C. Analyse

La modélisation

Elle conduit à une expression rationnelle, de degré 4 au numérateur et de degré 2 au dénominateur, donc plus complexe que les expressions précédemment étudiées. Les élèves valident leur résultat par comparaison avec leurs voisins. La recherche d'erreur est difficile. Dans le cas numérique, peu d'élèves pensent à utiliser leur TI92 pour obtenir et transformer cette expression, alors que c'est précisément là qu'elle serait utile. Des fonctionnalités algébriques comme la substitution, le développement, la réduction au même dénominateur et même la résolution d'équation ne sont pas employés spontanément. Elles sont moins disponibles que les fonctionnalités d'analyse comme les calculs de dérivée ou les limites qui sont employées systématiquement pour vérification de calculs à la main.

Au début de leur résolution du le cas numérique, L. et E. utilisent ces fonctionnalités seulement sur la suggestion de l'observateur. Par contre quand L. opère sa recherche d'erreur, elle se sert davantage de la machine : d'abord pour développer, puis pour substituer. Tout se passe comme si, ayant fait des opérations algébriques à la main dans un premier temps, elle se sent suffisamment familière avec ces opérations pour les confier à la machine. De même, pour produire l'expression du cas général, elles se guident sur cette utilisation précédente de la TI92.

La détermination du minimum

Dans le cas numérique, les élèves réinvestissent sans difficulté les notions vues dans l'année. Il est vrai que ce n'est pas le premier problème d'optimisation qu'ils ont à résoudre. L'observation du premier groupe (R. et S.) montre bien des perversions liées à l'utilisation de calculatrices graphiques : l'abscisse du minimum est observée sur la courbe, et non calculée comme zéro de la dérivée, le signe de la dérivée est obtenu en prenant des valeurs approchées, et non par raisonnement sur un tableau de signes. Il aurait sans doute été plus judicieux de donner des valeurs numériques n'entraînant pas une valeur entière de l'abscisse du minimum.

Le second groupe (L. et E.) est plus scrupuleux, mais est désorienté par l'expression de la dérivée, plus complexe que les exemples qu'ils ont eu à traiter. Ici aussi, l'apport de la TI92 est essentiel pour que les élèves puissent continuer leur travail.

La détermination du minimum lors des généralisations leur pose une difficulté, puisque, dans ce cas, l'étude numérico-graphique n'est plus possible. Cette difficulté, et la proximité de la fin de la séance, conduisent 3 des 4 élèves observés à arrêter leur recherche. La quatrième élève parvient sans trop de difficulté à une étude purement algébrique de la dérivée, en se guidant sur l'étude faite dans le cas numérique.

Les productions des autres élèves

Parmi les 21 compte rendu relevés :

- Deux élèves ne produisent pas de résultats significatifs. Les difficultés algébriques du cas numérique les arrêtent.
- Deux élèves se contentent de donner la valeur de x minimisant la volume de béton dans le cas numérique. L'un ne donne pas de justification. L'autre justifie par une fonctionnalité (numérique) de la TI92 (*F5 mini* du module GRAPH).

- Les 17 autres élèves donnent les variations de V(x) dans le cas numérique. Parmi ces 17 élèves, 8 obtiennent les variations par factorisation du numérateur de la dérivée. Cette factorisation d'un polynôme de degré 4 est obtenue à la machine dans 7 cas sur 8. Dans un cas, l'élève a anticipé le facteur (x-2) et procédé par division. Dans 8 autre cas, les variations sont données sans justification, et on peut penser qu'elles ont été lues sur la courbe. Un élève donne des variations fausses.
- Douze élèves abordent la première généralisation. Parmi ces 12 élèves
  - deux produisent seulement une formule du volume dépendant de l'épaisseur
  - deux élèves trouvent seulement la valeur de x minimisant le volume de béton. Ils obtiennent cette valeur en calculant à l'aide de la TI92, les zéros de la dérivée. Ces deux élèves avaient, dans le cas numérique, obtenu les variations par lecture de la courbe.
  - huit élèves justifient les variations par factorisation du numérateur de la dérivée. A une exception près, ce sont ceux qui employaient cette procédure pour le cas numérique.
- Huit élèves abordent la seconde généralisation. Parmi ces 8 élèves
  - deux élèves avaient trouvé la valeur de x minimisant le volume de béton pour la première généralisation en calculant les zéros de la dérivée à l'aide de la TI92. Ils emploient la même procédure ici.
  - un élève calcule la dérivée, mais ne donne pas ses variations
  - cinq élèves produisent la factorisation donnée par la TI92 : $\frac{-2e\left(2v-x^3\right)(x+2e)}{x^3}$ et concluent sur la valeur de x minimisant le volume de béton. L'un d'eux donne comme valeur de x minimisant le volume de béton $3\sqrt{2V}$. Les autres donnent la valeur exacte sous la forme $\sqrt[3]{2V}$. Il est à noter que cette forme est différente de la forme donnée par la TI92 : $(2V)^{1/3}$. On peut donc penser que ce résultat a été obtenu par résolution de $2v-x^3=0$ sans utilisation de la TI92.

Bilan : nécessité d'une dévolution spécifique de la généralisation

Dans la classe B, le problème est posé bien plus tard dans l'année que dans la classe A. C'est la conséquence des choix différents de progression dans les deux classes : dans la classe A, approche des limites, dérivation puis calculs de limites ; dans la classe B, limites et calculs de limites avant la dérivation. Il n'est donc pas étonnant que les élèves de la classe B soient plus à l'aise avec ce problème et avec l'utilisation de la TI92 que ceux de la classe A. Ils ont assez bien intégré la recherche d'extremum dans le cas numérique, même si, dans de nombreux cas, leur procédure de recherche s'appuie fortement sur les capacités numériques de la TI92 dans ce domaine. Ils rencontrent néanmoins d'importantes difficultés algébriques, et, pour les élèves observés, il faut une aide importante de l'observateur pour qu'ils utilisent les capacités algébriques de la TI92.

Ce n'est pas le premier problème d'optimisation que les élèves ont eu à résoudre dans cette classe. Mais ces problèmes ont été abordés seulement dans le cas numérique. C'est pourquoi,

la généralisation apparaît ici la partie la plus féconde. En premier lieu, elle conduit à l'utilisation consciente des fonctionnalités algébriques de la TI92, par généralisation des calculs faits dans le cas numérique. On voit ainsi l'élève L. prendre progressivement confiance dans les calculs opérés par la TI92 et confier une part de plus en plus importante de ces calculs à la machine.

De plus, la généralisation conduit les élèves à constater les limites de leurs procédures de recherche d'extrema numérico-graphique, et motive ainsi l'étude algébrique de la dérivée. On voit ainsi, dans les compte rendu, deux élèves passer d'une observation de la courbe dans le cas numérique, à une résolution algébrique : la recherche des zéros de la dérivée.

La lecture des compte rendu montre que la TI92 rend possible l'étude des généralisations. D'une part elle autorise la manipulation d'expressions algébriques à plusieurs variables, trop complexes en papier/crayon. D'autre part elle permet la factorisation de la dérivée, qui ne serait pas accessible aux élèves en papier crayon.

Cependant, la généralisation n'atteint pas ici sa pleine efficacité. A l'image des deux groupes observés, peu d'élèves dans la classe ont résolu les deux phases de la généralisation. De plus, il n'est pas sûr que l'intérêt mathématique de ce travail de généralisation ait été réellement ressenti par les élèves. Le texte propose de reprendre le même problème dans deux contextes différents, de plus en plus généraux et les élèves le font, respectant en cela le contrat didactique mais sans plus. L'insertion des prolongements dans le texte de la fiche proposée aux élèves ne semble donc pas, au vu de l'observation menée, suffisante pour permettre d'exploiter réellement les potentialités de la situation par rapport à la généralisation et la problématiser de façon satisfaisante. Pourquoi chercher à généraliser si n'apparaissent pas des phénomènes intéressants, des régularités dont on a envie de tester la résistance ? Pour des élèves de ce niveau, se poser spontanément ce type de question ne va pas de soi et nous semble nécessiter une mise en scène, une dévolution spécifique.

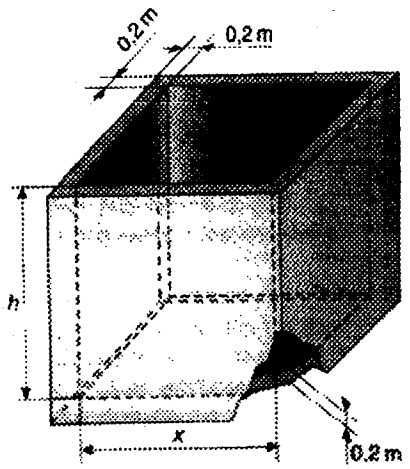
L'expérimentation du même problème avec sa généralisation l'année suivante dans les deux classes prendra en compte cette nécessaire dévolution. Cette situation y fonctionnera d'autant mieux qu'elle s'adressera alors à des élèves qui disposent cette fois de la machine depuis le début de l'année. Ceci permettra de mettre en scène la première généralisation dans le cadre même de la séance en classe, les élèves ayant à étudier hors classe le problème de la dépendance du minimum par rapport à la valeur choisie pour le volume intérieur. Les rédactions produites par les élèves seront en général de très bonne qualité et montreront qu'ils ont su exploiter la TI92 dans la généralisation à une situation dépendant de paramètres des calculs effectués dans le contexte initial.

Annexe : Enoncé donné aux élèves

Un maçon doit réaliser une cuve en béton parallélépipédique de base carrée de 20 cm d'épaisseur et pouvant contenir $4m^3$

On désigne par x (en m) le côté du carré intérieur et par h (en m) la hauteur intérieure de la cuve.

On veut déterminer x et h pour que le volume de béton utilisé soit minimal.



1) Exprimer le volume de béton en fonction de **x seul.** On notera V(x) ce volume.
2) Tracer la courbe représentative de V avec votre calculatrice.
3) La fonction V semble-t-elle avoir un minimum ?
4) Si oui, pour quelle valeur de x est-il approximativement obtenu ?
5) Calculer V'(x) à la main.
6) Vérifier votre résultat avec la calculatrice. Les deux résultats ont-ils la même forme ? Comment être sur qu'ils sont identiques ?
7) Justifier le sens de variation de la fonction V. V admet-elle un minimum ? Déterminer alors les dimensions de la cuve pour lesquelles ce volume est minimal.

Prolongement (classe B) :

8) Reprendre le même problème avec une épaisseur de la cuve de e mètres. (le volume de la cuve est toujours 4 m^3)
9) Reprendre le même problème avec une épaisseur de la cuve de e mètres. Le volume de la cuve à réaliser étant V_0.

Chapitre 2
Ingénierie : introduction des limites et dérivées

Après les observations de l'année 1995-96, les chapitres 2 et 3 exposent les ingénieries développées au cours de l'année 1996-97. Ce chapitre 2 est consacré à l'introduction des notions, alors que le chapitre 3 est orienté vers les propriétés algébriques et l'utilisation des notions comme outil.

Nous présentons trois ingénieries dans ce chapitre :

La première ingénierie concerne le travail sur les expressions et les fonctions préliminaire à l'analyse. Ce travail nous semble indispensable car les premiers apprentissages en analyse s'appuient sur des compétences dans le domaine des expressions et des fonctions, et les compétences en algèbre sont loin d'être solides pour bon nombre d'élèves à l'entrée en première S.

L'objectif de la seconde ingénierie est de mener une première approche des limites, préparatoire à la notion de dérivée. Nous restreignons volontairement l'étude aux limites en 0, en nous appuyant sur les conceptions spontanées des élèves. Les dimensions numériques et graphiques du concept sont développées, la commande *limit* de l'application HOME étant introduite ultérieurement, lors de l'étude des propriétés algébriques, exposée au chapitre suivant.

La troisième ingénierie introduit les dérivées. Nous avons essayé de nous appuyer sur les résultats des observations rapportées au chapitre précédent, et de prendre en compte les différents aspects du concept et les difficultés de leur articulation : les dimensions « outil » et « objet », les différents registres sémiotiques dans lesquels il s'exprime, les divers points de vue géométrique, cinématique, numérique, algébrique. Dans une première présentation de la notion, il importe d'opérer des choix pertinents dans ces différents aspects, de prendre en compte les limites des compétences algébriques des élèves ainsi que la nécessité pour eux de reconstruire le concept de tangente. Nous proposons donc un travail sur la dérivation en sept phases, dont deux seulement sont traitées dans ce chapitre.

INGENIERIE 1
Le travail algébrique et fonctionnel préparatoire à l'analyse

Divers travaux didactiques montrent que l'égalité d'expressions algébriques n'a pas forcément un statut clair, que le calcul algébrique n'est pas encore un outil opérationnel et qu'en particulier les élèves ont des difficultés à piloter les calculs, en fonction de l'objectif visé, en prenant en compte à la fois le sens et la référence des expressions (Drouhard, 1995). La notion de fonction occupe une place importante en seconde mais en dépit de l'accent mis par les programmes sur la modélisation, l'accès à la pensée fonctionnelle demeure limité (Pihoué, 1996). Les élèves ont pris l'habitude de travailler avec des calculatrices graphiques, mais ce travail reste le plus souvent d'ordre privé et les élèves, divers travaux le montrent, sont peu sensibles aux spécificités des tracés machine et aux effets induits (Trouche, 1996).

Ces difficultés algébriques nous conduisent à travailler les notions d'expressions et de fonctions au début de la classe de première S, en parallèle avec le développement d'un premier niveau d'instrumentation de la calculatrice, visant l'application HOME de calcul formel et son interaction avec les applications de tracé graphique et de tables de valeur, déjà présentes sur leurs calculatrices graphiques.

Cette première instrumentation de l'application HOME doit prendre en compte le fait que les expressions entrées dans la machine sont automatiquement évaluées par cette dernière, cette évaluation ne conduisant pas nécessairement aux formes de présentation conventionnelle des expressions. Il est donc important que les élèves soient sensibilisés à ce phénomène et apprennent à identifier les transformations formelles opérées, à contrôler économiquement l'équivalence d'un résultat obtenu en papier/crayon et la production de la machine et, dans une moindre mesure, à piloter la machine pour lui faire produire des formes qu'elle ne produit pas spontanément.

La machine, de plus, si elle gère formellement les calculs, laisse à la responsabilité des élèves, jusqu'à un certain point, le contrôle des conditions de validité des calculs effectués. C'est en particulier le cas dans la manipulation d'expressions avec des quotients, des radicaux ou dans la résolution d'équations contenant de telles expressions. Il nous semble là aussi important que l'élève apprenne à savoir ce qu'il peut déléguer à la machine et ce qui reste à sa charge, en dehors de toute question de contrat didactique.

Dans l'expérimentation, la gestion de ces questions d'instrumentation se fait bien sûr, en continu, en fonction des opportunités rencontrées. Il nous a semblé cependant nécessaire de construire quelques situations permettant de les travailler plus systématiquement et permettant aussi de constituer, au sein de la classe, une référence. Elles ont visé plus particulièrement :

- le travail sur l'égalité et le sens des expressions algébriques,
- la résolution d'équations assistée par la TI92,
- l'interprétation et la gestion des représentations graphiques fournies par la TI92,
- la modélisation et l'étude de situations fonctionnelles.

Dans ce rapport, nous avons choisi de présenter la première et la dernière. Précisons que, pour ce qui est du travail graphique, nous nous sommes très étroitement inspirés du travail effectué à l'IREM de Montpellier sur les calculatrices graphiques et déjà publié (Guin, Delgoulet, 1997).

SITUATION 1 : expressions algébriques

A. Contexte et objectifs

Cette séance, expérimentée en début d'année, alors que les élèves ne disposaient des calculatrices TI92 que depuis quelques jours seulement, vise à travailler sur les expressions algébriques en s'inspirant de situations élaborées par J. Delgoulet (Guin, Delgoulet, 1997) dans le cadre de l'expérimentation réalisée en seconde en 1995-96.

Il s'agit d'utiliser les transformations d'expressions algébriques possibles dans l'application HOME pour susciter un travail sur l'égalité d'expressions algébriques, notion qui n'est pas nécessairement bien maîtrisée par des élèves entrant en première S, élaborer des moyens de contrôle efficaces et économiques, enfin amorcer une réflexion sur l'intérêt de choisir tel ou tel type de forme par rapport à tel ou tel type de tâche.

Sur le plan de l'instrumentation de la TI92, il s'agit d'attirer l'attention des élèves sur le fait :

- que les expressions entrées dans l'application HOME sont traitées par la calculatrice en affichant sur la partie gauche de l'écran, une représentation spatiale de l'expression entrée en ligne et sur la partie gauche le résultat du traitement,
- que le traitement effectué peut, plus ou moins modifier l'expression, qu'il ne correspond pas nécessairement à une simplification de l'expression au sens usuel du terme en classe et peut produire des expressions tout à fait inattendues,
- que ce traitement peut faire intervenir des simplifications qui ne sont pas nécessairement toujours valides et qu'il importe donc d'apprendre à contrôler les productions de la machine (après avoir contrôlé sur la partie gauche de l'écran que l'on a bien entré ce que l'on voulait entrer) et à déterminer éventuellement le champ réel de validité de l'égalité entre expressions.

Il s'agit aussi de les familiariser avec les transformations d'expressions permises par les commandes usuelles : *Expand*, *Factor*, *comDenom*, de leur montrer les différences entre les deux formes de factorisations associées à la commande *Factor* et, de leur apprendre à gérer ces commandes pour organiser le passage entre deux expressions données.

B. Activités proposées

Elles sont au nombre de quatre.

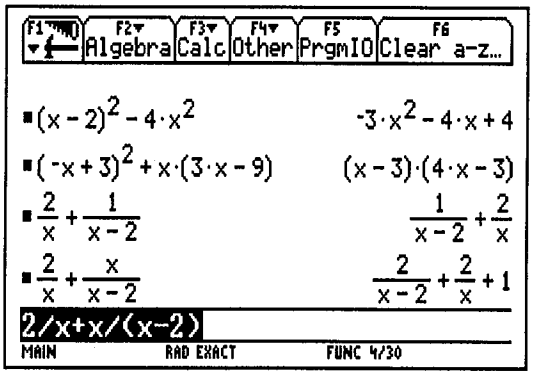
Activité 1

Un certain nombre d'expressions rationnelles sont proposées. L'élève doit les entrer dans la machine, noter l'expression affichée par la TI92 et essayer d'exprimer mathématiquement le traitement effectué.

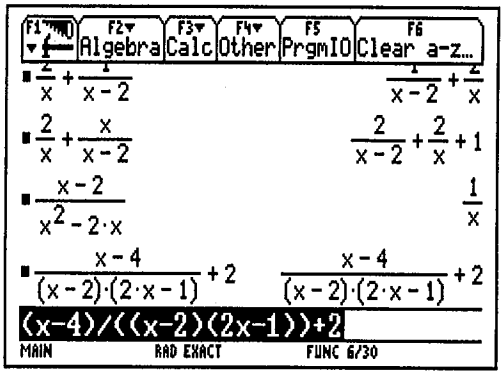
On a choisi ici volontairement des expressions d'une complexité que les élèves sont susceptibles de rencontrer à ce niveau. Les expressions sont choisies pour faire jouer les formes de traitement suivantes : développement, factorisation, simplification par un facteur (choisi pouvant s'annuler en fonction des objectifs décrits plus haut), décomposition en éléments simples, changement d'ordre des termes, renvoi de l'expression initiale, qui sont celles rencontrées avec les fractions rationnelles.

Bien d'autres choix d'expressions rationnelles sont bien sûr possibles avec les mêmes choix de variables didactiques.

On pourrait également mener un travail analogue avec des expressions incluant des radicaux. Pour une séance d'une heure, comme c'est le cas ici, il nous semble cependant plus efficace de centrer le travail sur les seules expressions rationnelles.



Ecran 1



Ecran 2

On notera également dans le choix des expressions, dans l'expression B, le signe « - », en première place, pour attirer l'attention sur les erreurs liées à l'existence de deux signes « - » sur la TI92 et le message d'erreur correspondant (*syntax error*), le facteur « x » précédant la parenthèse pour attirer l'attention sur la nécessité de rajouter le signe de multiplication et le message d'erreur correspondant (*invalid implied multiply*).

Activité 2

On explore pour les mêmes expressions le fonctionnement des commandes *expand*, *factor* avec et sans variable précisée, et *comDenom* pour les expressions non polynomiales. Le fait de choisir les mêmes expressions permet de limiter le travail de frappe, une contrainte se rajoute : choisir des expressions qui donnent une palette de transformées plus ou moins riche. Ici par exemple, l'expression E est simplifiée en 1/x quelle que soit la commande, l'expression D permet de différencier le fonctionnement de *factor* et de *comDenom*. On s'aperçoit également que les traitements automatiquement opérés sur les expressions C et D correspondent au fonctionnement de la commande *expand* mais que ce n'est pas le cas pour l'expression F.

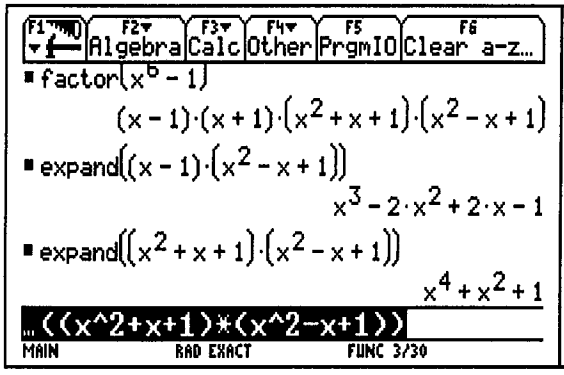
Activité 3

Trois expressions sont proposées et pour chacune d'elles trois expressions sont candidates à l'égalité. Il s'agit de déterminer dans chaque cas celles qui sont égales, en se servant de la calculatrice. Les expressions candidates à l'égalité sont choisies pour être toutes des expressions a priori crédibles, par exemple les degrés, les racines évidentes, la valeur en 0 sont respectées pour la première expression, les singularités respectées pour les expressions 2 et 3.

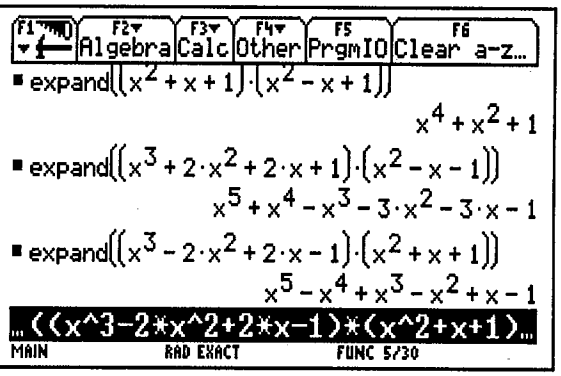
On peut, dans tous les cas, résoudre le problème avec la TI92 par un test d'égalité mais ce n'est pas la méthode la plus économique car elle oblige à rentrer toutes les expressions ; elle ne permet pas non plus de rentrer dans les raisons de l'égalité ou l'inégalité. Il nous semble bien plus probable que les élèves se situeront dans la continuité de ce qui précède et essayeront de prévoir des modes de passage entre expressions.

Pour l'expression 1 :

G	x^6-1	H	$(x^2+x+1)(x+1)(x^3-2x^2+2x-1)$
I	$(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$	J	$(x+1)(x^2-x-1)(x^3+2x^2+2x+1)$



Ecran 3



Ecran 4

Dans la mesure où les trois expressions H, I et J proposées sont des produits de facteurs avec des coefficients entiers, on peut penser que les élèves vont d'abord utiliser la commande *factor* pour factoriser G, l'expression la plus simple à entrer. On obtient ainsi la factorisation à quatre facteurs figurant dans l'écran 3, qui ne correspond à aucune des expressions proposées, ce qui résulte bien sûr d'un choix délibéré. En revanche, l'expression H contient déjà deux des facteurs de la factorisation de G. Pour vérifier l'égalité, il suffit donc de vérifier que le produit des deux autres facteurs est bien égal au premier facteur de H, ce qui peut se faire à la calculatrice, soit en développant par la commande *expand* le produit de facteurs (cf. écran 3), soit en factorisant le premier facteur de H. La seconde expression proposée : I peut se gérer de la même façon.

Pour l'expression J, compte-tenu de la similarité avec l'expression H, on peut penser à une comparaison avec H qui a été prouvée égale à G, comme par exemple celle proposée dans l'écran 4. Obtenant deux polynômes du cinquième degré de coefficients différents, on peut penser que les élèves n'hésiteront pas à conclure que les deux expressions ne sont pas égales. Dans le bilan, on pourra revenir sur ce pas de raisonnement et sur la propriété qui le fonde : une fonction polynôme est la fonction nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

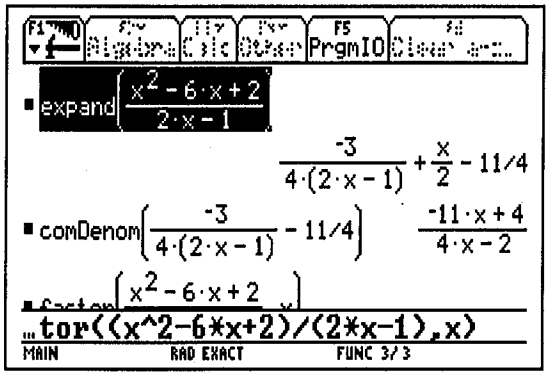
Nous avons ici cherché à limiter les entrées en tenant compte des facteurs communs. Une méthode plus brutale peut consister à entrer successivement les trois expressions H, I et J et à les faire développer. Dans les deux premiers cas, on obtiendra l'expression G, dans le troisième cas, on obtient le polynôme de degré 6 : $x^6+2x^5-4x^3-6x^2-4x-1$.

On peut aussi tester l'égalité en donnant des valeurs numériques à x. Les élèves, à ce niveau, ne savent pas que si deux polynômes de degré n prennent les mêmes valeurs pour n+1 valeurs distinctes de x, ils sont nécessairement égaux, le test ne peut donc leur permettre de conclure qu'en cas de réponse négative. Essayer une ou deux valeurs simples, dans un environnement papier/crayon peut être une stratégie économique, limitant les calculs algébriques à effectuer. Par exemple, pour x=0, les quatre expressions prennent la valeur -1, mais pour x=1, G, H et I prennent la valeur 0 et J la valeur -12. J ne peut donc être égale à G. On peut penser que la calculatrice ne va pas inciter à développer de telles stratégies. En effet, d'une part le coût faible des développements n'oblige pas à s'économiser de la sorte, d'autre part, le calcul de la

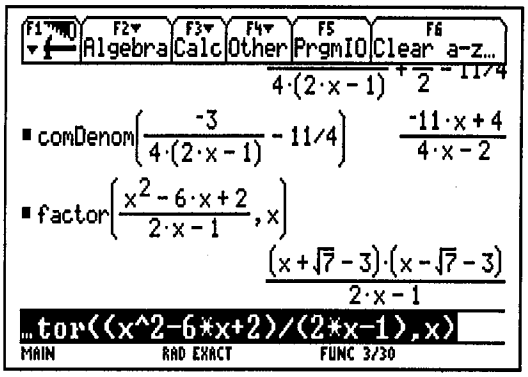
valeur d'une expression pour une valeur de la variable va passer, soit par l'entrée de l'expression et l'affectation d'une valeur à x (par exemple : x^6-2 | x=1), soit la définition de l'expression comme fonction et la demande ensuite de sa valeur pour une valeur de la variable. Ceci n'est avantageux que si l'on a plusieurs valeurs à calculer successivement. Néanmoins, il peut être intéressant de pointer le test de valeur comme méthode dans la synthèse collective, même s'il n'est pas apparu. Outre son intérêt en environnement standard, c'est une occasion de revenir sur le sens de l'égalité.

Pour l'expression 2 :

G	$\dfrac{x^2-6x+2}{2x-1}$	H	$\dfrac{3}{4(2x-1)}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{11}{4}$
I	$\dfrac{-11x+4}{4x-2}+\dfrac{x}{2}$	J	$\dfrac{\left(x+\sqrt{7-3}\right)\left(x-\sqrt{7-3}\right)}{2x-1}$



Ecran 5



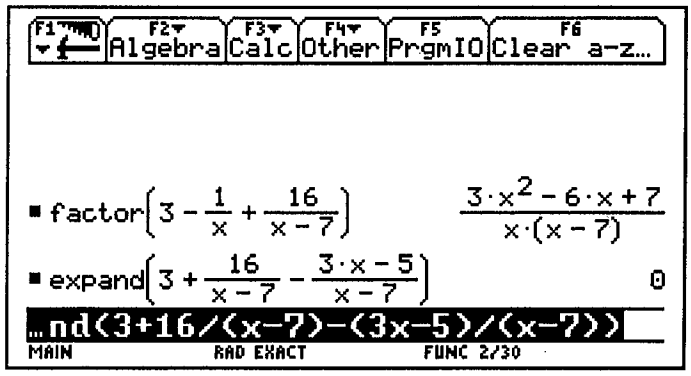
Ecran 6

Les expressions proposées H et I étant des sommes, l'expérience de l'activité 1 peut conduire les élèves à développer G pour tester l'égalité (cf. Ecran 5). Ceci permet de repérer que H est l'opposée de G, donc que, vu que l'on n'a pas : pour tout x G(x)=-G(x), G et H ne sont pas égales. On peut penser que cette dernière partie du raisonnement sera omise par les élèves qui concluront immédiatement.

De même, la forme factorisée avec radicaux de J peut conduire les élèves à faire factoriser G, en utilisant la deuxième commande de factorisation. On obtient ainsi sans difficultés l'égalité de J et G (cf. Ecran 6). Pour l'expression I, qui est elle aussi égale à G, diverses méthodes sont possibles. Sur l'écran 5, nous avons exploité la présence du x/2 et utilisé la commande de réduction au même dénominateur.

Pour l'expression 3 :

G	$3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{x-7}$	H	$-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3x-5}{x-7}$
I	$\dfrac{-3x^2+6x-7}{x(x-7)}$	J	$\dfrac{(3x+7)(x+1)}{x(x-7)}$



Ecran 7

L'expression G est donnée développée. Si on la fait factoriser par la machine, on obtient l'expression figurant sur l'écran 7 qui, par un raisonnement analogue à celui effectué pour l'expression 1, permet de conclure à la non égalité de G et I. La TI92 n'ayant pas factorisé le numérateur, l'expression J n'est sans doute pas égale à G. On peut le vérifier aisément en considérant une valeur particulière, racine de J : J s'annule pour x=-1, ce n'est pas le cas à l'évidence pour l'expression G. Mais on peut penser que les élèves choisiront plutôt de faire développer J ou son seul numérateur pour conclure. Enfin la comparaison de G et H peut, elle aussi, être traitée de différentes façons : réduction au même dénominateur, développement de la différence G-H ou d'une différence partielle comme dans l'Ecran 7, pour tenir compte du facteur 1/x commun aux deux expressions au signe près.

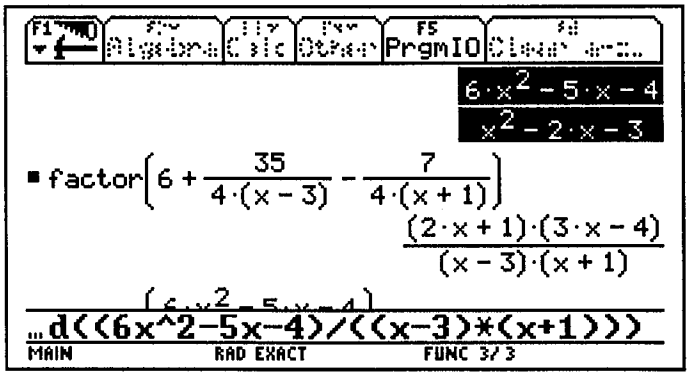
Comme ce qui précède le montre, l'utilisation de la TI92, en rendant ici compétitives une diversité de méthodes de comparaison, modifie l'économie de ce type de tâche et sa richesse potentielle sur le plan mathématique. Le fait collectif, associé à la proximité de l'activité 1, permettent de faire l'hypothèse que vont apparaître des méthodes variées susceptibles de susciter une synthèse riche, tant sur le plan mathématique que sur le plan de l'instrumentation de la calculatrice.

Activité 4

Il s'agit de trouver avec la TI92, le moyen de passer d'une expression A à une expression B et vice versa. De B vers A, le passage est immédiat par *expand* (à l'ordre des termes près), de A vers B, l'utilisation de la commande *comDenom* donne le quotient non factorisé, l'utilisation de la commande *factor* donne le quotient factorisé au numérateur et dénominateur. Il faut donc procéder en deux temps.

A

B



Ecran 8

C. Déroulement

10h15 : L'enseignante (désignée par M. dans la suite) fait sortir cahiers et machines et distribue la fiche de séance. Elle rappelle qu'il faut bien faire attention à ce qu'il n'y ait pas de variable affectée et demande comment libérer les variables. Les réponses fusent : F6. Même chose avec la question suivante : comment nettoyer l'écran ? F1-8. Elle précise qu'elle leur donne 10 minutes pour la première question, installe la rétroprojection puis circule dans les rangs. Ceci l'amène à faire préciser où lire sur l'écran ce qu'elle demande de noter. Plusieurs élèves répondent simultanément (noté Es dans la suite) : « à droite ».

10h20 : M. écrit au tableau les expressions. Dans le groupe observé (sans moyens spécifiques), A. (le garçon) en est à la 2ème expression, B. (la fille) déjà à la quatrième.

Un élève appelle M. En rentrant la deuxième expression, il a obtenu un message d'erreur. M. répercute collectivement et rentre l'expression, comme l'a fait A. sans signe de produit. Plusieurs réagissent immédiatement : il a oublié le signe multiplié.

M. acquiesce et demande de noter.

M. intervient auprès d'un autre élève ; visiblement il n'a pas rentré correctement l'une des expressions et s'étonne du résultat. M. lui indique son erreur et là encore répercute collectivement en conseillant de bien vérifier à gauche sur l'écran, si ce qui a été entré est correct.

Elle leur conseille aussi de rentrer d'abord toutes les expressions et de noter avant de chercher à identifier les transformations faites par la machine.

A. appelle M. qui lui explique que ses problèmes sont dus au fait qu'il n'est pas en *pretty print* ; elle lui montre comment s'y mettre.

A. et B. ont maintenant fini de rentrer les expressions. Ils discutent ensemble de ce qu'a fait la machine, reconnaissent développement et factorisation, mais n'écrivent rien.

M. presse les quelques retardataires.

10h30 : M. fait un bilan collectif, expression par expression. Elle entre les expressions sur la rétroprojetable et pendant ce temps, des élèves, à tour de rôle vont écrire le résultat au tableau, ce qui permet de conserver l'information. Chaque fois, les élèves précisent ce qu'a fait la machine : « Elle a développé », « Elle a factorisé », « Elle a changé l'ordre, rien d'autre ». Pour la seconde, elle fait détailler la factorisation en demandant comment passer de l'expression entrée à l'expression donnée par la machine (x-3)(4x-3). Elle les aide à formuler que $(-x+3)^2$, c'est la même chose que $(x-3)^2$ car (-x+3) et (x-3) sont opposés donc ont leurs carrés égaux.

M. passe ensuite à la quatrième expression. Un élève dit : « Elle a évité qu'il y ait un x en haut », d'autres font remarquer qu'il y a $\frac{2}{x}$ des deux côtés, qu'elle a juste transformé : $\frac{x}{x-2}$ en $\frac{2}{x-2} + 1$.

10h35 : M. leur demande de le vérifier eux-mêmes à la main, commence à circuler et très vite reprend collectivement : « Comment passer de la première expression à la seconde ? » Un élève propose d'écrire 1 comme $\frac{x-2}{x-2}$. Le calcul est écrit au tableau et M. fait remarquer que cela revient à réduire au même dénominateur. Elle conclut ensuite en disant que la machine a

mis l'expression entrée sous forme de la somme d'une constante et d'une fraction dont le numérateur est une constante.

Elle passe ensuite à la cinquième expression. Les élèves en choeur disent que la machine a simplifié l'expression. M. demande : « Ca ne vous pose pas de problème ? »

Visiblement non, à voir leur réaction. Elle insiste alors en demandant par quoi la machine a simplifié.

Es : x-2

Elle fait ensuite préciser que le dénominateur est x(x-2) puis revient au problème de la validité de la simplification.

M. : « L'année dernière, est-ce que vous simplifiez comme cela ? »

Une élève l'interrompt : elle n'a pas compris comment on arrive à 1/x. M. se fait dicter la suite des transformations algébriques et les écrit au tableau, puis revient à la question initiale.

M. : « Si vous simplifiez comme cela, croyez-vous que je serais tout à fait contente ? »

Les élèves semblent se demander où elle veut en venir.

M. choisit alors plusieurs valeurs de x : x=1 puis x=3 et fait comparer les valeurs des deux expressions : elles sont égales, ce qui n'étonne personne. Elle demande alors :

M. : « Est-ce que ce sera encore vrai pour toutes les valeurs de x ? »

B. : « Sauf pour x=0 »

M. : « Pourquoi ? »

B. : « Parce qu'on peut pas diviser par 0. »,

M. fait constater que, pour x=0, les deux expressions n'ont pas de sens, puis revient à la question initiale, en excluant 0. Un élève propose alors 2. M. détaille les calculs correspondants pour les deux expressions et on constate que l'expression de gauche n'est alors pas définie tandis que celle de droite l'est.

10h45 : M. précise que dire que deux expressions sont égales, c'est dire qu'elles sont identiques pour toutes les valeurs de x, puis elle demande : « Toutes les valeurs, qu'est-ce que ça veut dire ? »

E. : « Les entiers relatifs. »

M. : « Mais il n'y a pas que les entiers relatifs, parmi les nombres ! ».

Elle fait élargir à tous les nombres connus : décimaux, rationnels, nombres exprimés avec des radicaux..., puis demande d'écrire dans le cahier : « Pour que deux expressions soient égales, il faut qu'elles soient identiques pour toutes les valeurs de la variable ». Elle précise :

M. : « La variable, ici c'est x mais ce pourrait être t »

A. : « Ou y »

M. passe ensuite à la dernière expression que la machine renvoie sous la même forme.

A. dit à B. en aparté : « Si tu veux qu'elle fasse quelque chose tu fais : DIAMANT ENTER »[1]

---

[1] L'utilisation de cette commande au lieu de la simple commande ENTER donne l'affichage suivant :

10h48 : M. demande aux élèves de passer à la partie 2 et vérifie collectivement qu'ils savent où trouver les commandes concernées. Les élèves répondent en coeur : « F2 ». Elle demande ensuite de prévoir la factorisation par la machine de l'expression : x2-4.

Es : (x-2)(x+2)

Elle le fait à la rétroprojetable, ce qui confirme la prévision. Elle propose ensuite de remplacer 4 par 3 et demande aux élèves comment factoriser cette expression.

B. : « on n'a qu'à remplacer -3 par -4+1 »

M. : « Quand on a factorisé x^2-4, qu'a-t-on utilisé ? »

Les élèves répondent qu'ils ont utilisé l'identité remarquable a^2-b^2 et M. écrit, sous la dictée :

$x^2-4 = x^2 - 2.2$

$x^2-4 = (x-2)(x+2)$

Puis elle demande si x^2-3, c'est très différent.

Es : « Non »

M. : « Alors que fait-on ? »

B. propose à nouveau son idée.

M. écrit, sous sa dictée : $x^2-3 = (x^2-4)+1 = (x-2)(x+2)+1$

M. accepte la réponse mais fait remarquer que l'expression n'est pas factorisée. Les élèves sont d'accord. Un élève propose alors de « mettre 3 sous la racine ». M. lui fait préciser son idée puis écrit :

$x^2-3 = x^2 - (\sqrt{3})^2$

Ils arrivent alors à prévoir la factorisation associée.

M. fait factoriser par la machine en utilisant la commande *factor*. L'expression n'est pas modifiée.

Elle demande comment faire alors pour faire produire la factorisation à la machine. Un élève propose aussitôt de marquer la variable et lui rappelle qu'elle en a déjà parlé en cours.

M. conclut alors : « *Factor* factorise en utilisant des entiers, si on veut factoriser avec des racines, il faut préciser la variable », puis leur demande de faire la partie 2. Pendant ce temps, elle circule dans les rangs.

10h55 : M. : « Les expressions, vous êtes obligés de les retaper ? »

Es : « Non »

M. : « Non, vous allez les rechercher avec votre souris. »

B. travaille et dit à A. : « C'est marrant ça »

$\frac{.5(x-4.)}{(x-2.)(x-.5)} + 2$

Un élève demande s'il faut faire *comDenom* pour les premières. M. reprend collectivement et précise que l'on utilise la commande *comDenom* que lorsqu'elle a un sens, c'est à dire lorsqu'il y a un dénominateur[2].

M. intervient ensuite auprès de Benoît qui, sur sa feuille, a écrit : « *expand* = ... ». M. insiste sur la nécessité d'écrire correctement : ce n'est pas *expand* qui est égal au second membre. Voyant que certains ont du mal à organiser leurs réponses, elle leur propose de faire un tableau.

A. se lance aussitôt dans la construction du tableau. B., elle, continue à travailler avec la machine. Elle est gênée parce que la commande *expand*, pour la deuxième expression, lui donne exactement ce qu'elle avait déjà et se demande si elle ne se trompe pas. Je la rassure.

11h : B. a du mal à gérer les parenthèses associées à la commande *factor*. Si l'on entre la commande par F2-2, *factor(* s'inscrit sur la ligne d'édition, il suffit ensuite d'entrer ou recopier l'expression à factoriser et de rajouter une parenthèse correspondant à celle ouverte automatiquement à la fin. B., visiblement, trouve qu'il y a trop de parenthèses, en efface et se retrouve avec un message d'erreur. Je lui explique la syntaxe de la commande.

M. passe et dit à A. qui est toujours en train de tracer son tableau, de se dépêcher.

11h03 : M., collectivement, fait le point pour les deux premières expressions, en utilisant la rétroprojetable.

M. précise que l'on peut aller chercher les commandes dans F2 ou les taper directement. Elle fait expliquer aussi pourquoi, pour les deux premières expressions, les deux commandes de factorisation donnent le même résultat. Elle les aide à formuler que les deux expressions se factorisant en deux facteurs du premier degré à coefficients entiers, on obtient cette factorisation avec la commande *factor* simple, et elle précise que ce serait aussi le cas si les coefficients étaient rationnels.

Elle demande ensuite si tout le monde a fait l'expression 3. Seuls quelques doigts se lèvent. En effet, la plupart des élèves ont mis du temps à s'organiser, à tracer le tableau, certains ont fonctionné par commande et non par expression, ce qui accroît encore le temps passé dans la recherche des expressions sur l'écran, si on veut éviter les recopies.

M. relance le travail individuel. A., qui a fini son tableau, avance maintenant rapidement, B., elle, se met à faire un tableau pour noter les résultats.

11h10 : M. fait le point pour l'expression E, en demandant ce que donnent les commandes pour cette expression.

Es : « On a toujours 1/x »

M. acquiesce. La sonnerie retentit. M. demande de terminer la fiche pour le lundi suivant en faisant un tableau propre pour cette activité 2.

Elle conclut ensuite rapidement la séance : elle souligne qu'on peut obtenir une même expression sous plusieurs formes et elle leur demande combien ils en ont obtenu pour D ; les réponses données sont 3 pour les uns, 4 pour les autres. Elle demande alors laquelle on prendra si l'on veut résoudre l'équation D=0 et plusieurs élèves répondent : « La factorisée »

---

[2] Précisons que la commande ne bloque pas en l'absence de dénominateur, elle renvoie simplement l'expression initiale.

M. acquiesce et ajoute que, suivant le travail que l'on veut faire, que l'on ait ou pas la machine, il faut choisir la forme la plus adaptée.

D. Analyse

Il ressort du déroulement de cette séance, nous semble-t-il, un certain nombre de points :

1. La familiarité déjà acquise par les élèves avec leur machine, pour ce qui est de l'application Home, alors même qu'ils n'en disposent que depuis quelques jours. Ceci tend à confirmer les résultats obtenus en 1995-96.

2. L'intérêt de l'activité 1 et du choix effectué au niveau des variables prises en compte. Elles permettent effectivement de faire émerger les points que l'on souhaitait faire émerger. De plus, les réactions des élèves confirment la nécessité de prendre en charge effectivement, en début de première S, un travail sur l'égalité d'expressions algébriques et de revenir sur les questions de simplification, à la fois pour les besoins du travail mathématique en environnement papier/crayon usuel et pour une instrumentation efficace de la TI92, qui les amène à bien distinguer ce qui est géré par la machine et ce qu'ils ont, eux, à gérer.

En fait, à travers ces questions de simplification, se pose celle du sens de la notion d'égalité entre expressions algébriques, qui met en jeu deux dimensions :

- une dimension formelle où ce qui est pris en compte, c'est la capacité de passer d'une expression à une autre, par des manipulations algébriques syntaxiquement valides,
- une dimension sémantique où ce qui est pris en compte, c'est l'identité des dénotations des expressions, c'est à dire des références, ici des fonctions à une ou plusieurs variables qui leur sont associées, un ensemble de référence, ici les nombres réels, étant choisi[3].

La définition de l'égalité d'expression repose sur cette dimension sémantique et donc met en jeu, même si cela reste le plus souvent implicite dans l'enseignement, le choix d'un ensemble de référence. On voit très bien, dans cette séance, les difficultés réelles que cela soulève et aussi la difficulté qu'il y a à trouver des formulations qui soient à la fois correctes et accessibles aux élèves, qui prennent en compte à la fois l'égalité des domaines de définition des expressions dans un ensemble de référence donné et l'égalité des valeurs prises sur cet ensemble commun de définition[4]. Ceci est d'autant plus difficile que les élèves n'ont plus à gérer ces questions dans le domaine fonctionnel, les programmes imposant de préciser systématiquement à l'élève l'ensemble de définition des fonctions introduites. On peut penser, au vu de leurs réactions, que les conditions comme $x-2\neq 0$ qu'ils écrivent régulièrement sur leur feuille sont vécues comme des sortes de rites auxquels on sacrifie pour des raisons de contrat didactique uniquement. C'est d'ailleurs ce niveau du contrat que l'enseignante, à un moment, va essayer, économiquement, de faire jouer en demandant : « Si vous simplifiez comme cela, croyez-vous que je serais tout à fait contente ? », sans succès d'ailleurs, les élèves ne la connaissant pas encore assez, avant d'en revenir au sens, donc à la référence.

---

[3] S'il s'agissait d'équations et non d'expressions algébriques comme ici, la référence serait définie comme un sous ensemble de l'ensemble sur lequel est considérée la résolution ou, si l'on veut se situer encore dans une perspective fonctionnelle, comme la fonction caractéristique de ce sous-ensemble ou comme une application de l'ensemble de résolution dans l'ensemble {vrai, faux}.

[4] Sur ce point, on peut penser que les formulations proposées ici dans l'action pourraient être améliorées, tout en respectant les contraintes citées.

Mais d'autre part, ce que le travail sur les expressions algébriques met en jeu, c'est essentiellement un travail qui s'inscrit dans la dimension syntaxique et va permettre de transformer les expressions formellement, en étant assuré de conserver leur dénotation. Le fait que deux expressions aient la même dénotation en soi en soi nous intéresse moins que le fait de pouvoir passer de l'une à l'autre (deux identités faisant intervenir le même nombre de variables, quelles qu'elles soient, ont toujours la même dénotation). Dans le travail algébrique, les deux dimensions donc se conjuguent et l'on sait très bien, cette séance ne fait que le confirmer, que pour les élèves de niveau lycée, tout ceci est loin d'être clair.

3. Le fait que, même si les élèves manipulent leur machine sans rencontrer de difficultés particulières, l'activité 2, telle qu'elle est organisée, est coûteuse en temps. Même en utilisant les possibilités de recopie d'expressions de l'écran dans la ligne d'édition, en procédant, expression par expression, pour limiter les déplacements dans l'écran, l'obtention des résultats machine prend du temps. Si l'on ajoute à ce temps celui de la constitution du tableau, cela en fait une activité qui présente un déséquilibre trop grand entre temps d'exécution et productivité.

Diverses solutions sont envisageables : par exemple fournir un tableau aux élèves pour noter les résultats, répartir les expressions dans la classe, par rangée par exemple, pour que chaque élève n'ait à gérer que deux expressions, tout en s'arrangeant pour qu'elles soient « contrastées », voire se limiter à quelques expressions. Il est peut-être aussi inutile de prendre en charge collectivement, avant le travail des élèves, la distinction entre les deux commandes *factor*. Cela fait partie des propriétés qu'ils vont nécessairement découvrir, en suivant les consignes.

Une telle modification du scénario permettrait d'aborder en séance l'activité 3, beaucoup plus riche sur le plan mathématique et avoir de ce fait un bon équilibre dans la séance entre ce qui relève de l'instrumentation de la TI92 et ce qui relève des objectifs mathématiques au sens strict.

SITUATION 2 : une situation fonctionnelle - la bille

A. Contexte et objectifs

Cette séance a été expérimentée au début du mois de décembre avant que ne débute l'enseignement de l'analyse proprement dit. Elle conclut en quelque sorte le travail fonctionnel pré-analyse.

Elle vise à faire travailler les élèves sur un problème dont la résolution est susceptible de mettre en jeu les différentes techniques à ce moment là disponibles pour étudier un phénomène de variation continue et leur articulation (approches numériques, algébriques, graphiques). Le problème est choisi pour que des preuves algébriques soient accessibles avec l'aide de la machine et qu'elles soient susceptibles de mettre en jeu divers points de vue sur les équations et les polynômes. Le problème est de plus choisi pour que cette étude mathématique de la variation mette en défaut l'intuition et suscite assez naturellement le désir de dépasser le cadre de la situation particulière étudiée. Il y a là le souci d'engager les élèves, dans les processus d'élaboration de conjectures, de preuve et de réfutation, de recherche de résultats généraux, propres au travail mathématique, mentionné plus haut.

B. Le problème proposé

Il s'agit du problème suivant, adapté d'une activité proposée dans le manuel Terracher de 1ereS.

Dans un cylindre à base circulaire de 10 cm de rayon et de hauteur aussi grande que l'on veut, repose une bille de 8 cm de rayon que l'on recouvre d'eau jusqu'à affleurement.
On remplace la bille par une autre bille de rayon x cm, la quantité d'eau dans le cylindre restant la même.
On se propose d'étudier le problème suivant :
- la bille est-elle sous l'eau ?
- la bille sort-elle de l'eau ?
- la bille affleure-t-elle ?

On supposera que les billes reposent toutes sur le fond du cylindre.

Indication : Appeler V(x) le volume d'eau qui permet de recouvrir exactement la bille de rayon x.

- Même problème si le rayon de la bille initiale est 3 cm au lieu de 8 cm.

- *Généralisation* : Le rayon de la bille initiale est a (en cm).
  Suivant les valeurs de a, peut-on trouver des valeurs de x pour lesquelles la bille de rayon x reste totalement immergée ?

Nous en ferons d'abord l'analyse sur un plan mathématique, dans le cadre d'une résolution assistée par la TI92, avant d'envisager, en nous appuyant notamment sur les données issues de l'expérimentation, les scénarios didactiques qui nous semblent les plus appropriés.

On propose donc de traiter deux situations particulières, le cas où la bille initiale a un diamètre de 8 cm, puis le cas où la bille initiale a un diamètre de 3 cm, avant de passer à une généralisation.

Dans le premier cas, la fonction V introduite dans le texte a pour expression :

$$V(x) = 200\pi x - 4/3\pi x^3$$

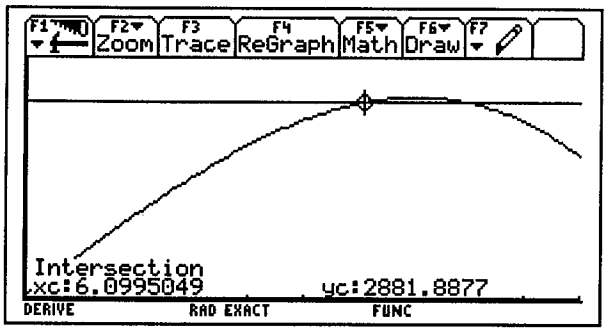
et le volume initial de l'eau est V(8).

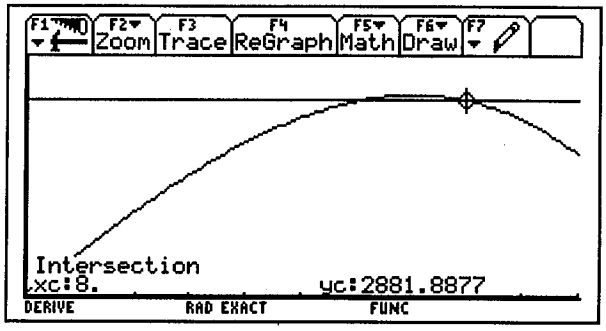
- Si $V(x) = V(8)$, la bille de rayon x affleure juste,
- si $V(x) \geq V(8)$ la bille sort de l'eau
- et si $V(x) \leq V(8)$ la bille est sous l'eau.

On est donc amené à étudier les variations de la fonction V et résoudre l'équation et les inéquations ci-dessus. Ceci peut s'appuyer sur une exploration graphique qui conduit à conjecturer qu'il existe deux solutions à l'équation dans l'intervalle [0 ; 10] : α et 8 et que l'on a les résultats suivants, non évidents a priori :

- si $x < \alpha$ la bille est sous l'eau
- si $x = \alpha$ la bille affleure
- si $\alpha < x < 8$ la bille sort de l'eau

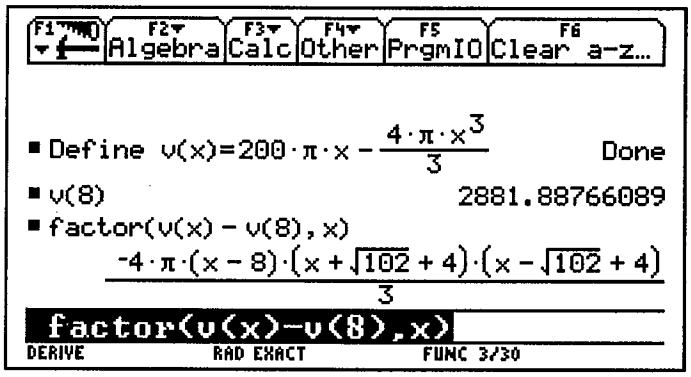
si $x > 8$ la bille est de nouveau sous l'eau.



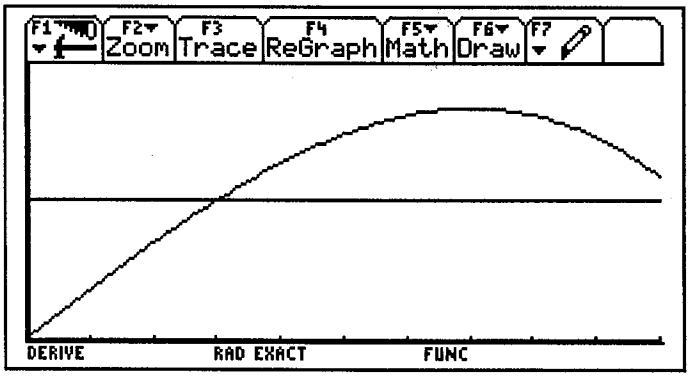


Cette exploration graphique peut être justifiée algébriquement, en étudiant l'expression :

V(x) - V(8). Cette expression est égale à : $-4/3.\pi(x^3-150x+688)$. Elle est nécessairement factorisable par (x-8) ce qui nous ramène à la résolution d'une équation du second degré qui admet bien une racine dans l'intervalle considéré : $\sqrt{102} - 4$.



Dans le cas où le rayon de la bille initiale est 3 cm, on a à étudier V(x) - V(3). Cette fois-ci la racine positive de l'équation du second degré est supérieure à 10. On est donc cette fois dans la situation conforme à l'intuition où si $x < 3$, la bille est sous l'eau et si $x > 3$, la bille est hors de l'eau.



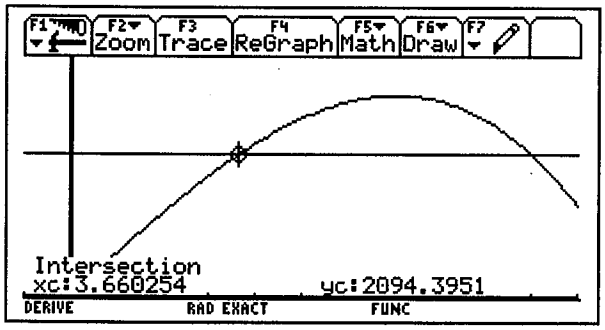
Dans le cas général d'un bille de rayon a cm, on a à étudier V(x) - V(a). L'exploration graphique systématique, prolongeant celle déjà menée dans les deux cas particuliers étudiés, conduit à conjecturer l'existence d'une valeur a_0 voisine de 3,7 telle que :

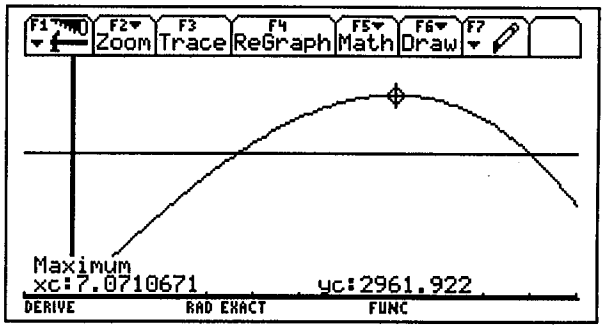
- si $0 < a < a_0$, la droite d'équation : y = V(a) a un point d'intersection unique (celui d'abscisse a) avec la courbe représentative de la fonction V dans l'intervalle considéré et l'on est dans une situation analogue à celle rencontrée pour a=3,

- si $a = a_0$, la droite d'équation : $y = V(a_0)$ a deux points d'intersection avec la courbe représentative de la fonction V sur [0 ; 10], les points d'abscisse a_0 et 10 et la bille affleure en ces deux points,
- si $a_0 < a < 10$, la droite a deux points d'intersection avec la courbe d'abscisses a et α strictement inférieures à 10. C'est dans cette situation que l'on se trouve pour a = 8.

Dans cet intervalle, l'étude graphique conduit aussi à conjecturer l'existence d'une valeur a_1 pour laquelle les deux points d'intersection se confondent, cette valeur correspondant au maximum de la fonction V. Dans ce cas particulier la bille ne sort jamais de l'eau, résultat qui là encore n'a rien d'évident.

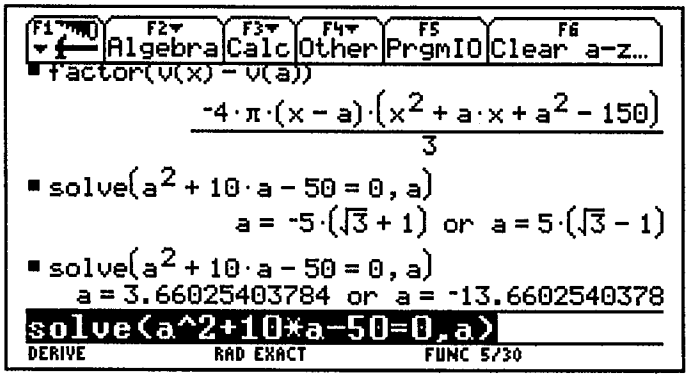
- enfin si a = 10, on retrouve la situation déjà rencontrée en a_0.



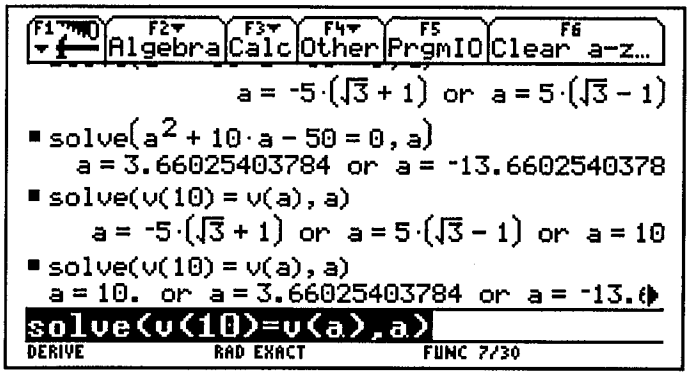


Les conjectures issues de cette exploration graphique peuvent être prouvées, avec l'aide du module de calcul formel de la TI92, en adaptant les calculs faits dans les deux cas particuliers à cette situation plus complexe puisque dépendant d'un paramètre.

Par factorisation, on obtient le facteur du second degré $x^2 + ax + a^2 - 150$. Il y a donc pour a dans [0 ; 10] toujours deux racines de signe contraire et la racine positive est inférieure à 10 si et seulement si $a^2+10a -50 < 0$, soit : $a < 5(\sqrt{3} - 1)$ avec $5(\sqrt{3} - 1) \approx 3,7$.



On peut aussi chercher à quelle condition 10 est racine de l'équation V(x) = V(a) c'est à dire résoudre l'équation en a : V(10) = V(a).



ce qui conduit bien sûr au même résultat.

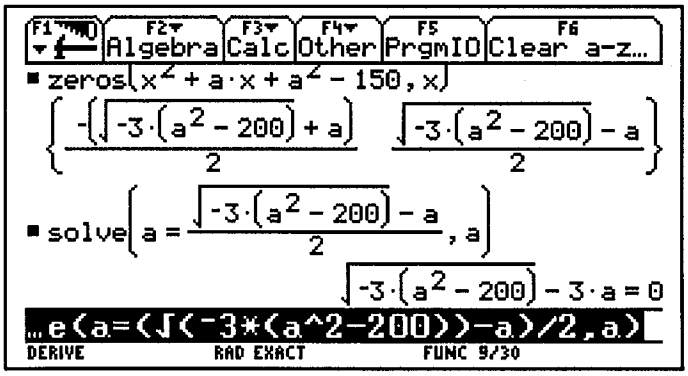
En ce qui concerne la recherche de la racine double, celle-ci peut s'effectuer, économiquement, en cherchant à quelle condition a est racine du trinôme : $x^2 + ax + a^2 - 150$, ce qui conduit à l'équation :

$3a^2 = 150$, soit $a = 5\sqrt{2}$ puisque a est positif. Pour cette valeur de a, on a :

$$V(x) - V(a) = -4\pi/3(x-a)^2(x+2a)$$

ce qui permet de conclure que la valeur trouvée correspond bien à un maximum de la fonction V et que, pour cette valeur, la bille ne sort pas de l'eau.

Précisons que si l'on résout l'équation du second degré et si l'on cherche à résoudre l'équation en a correspondant à l'égalité des racines, la machine ne fournit pas directement la solution.



C. Déroulement

Après lecture du texte et un rappel collectif sur les formules donnant le volume du cylindre et de la sphère, les élèves se lancent dans le calcul de V(x). Comme l'on pouvait s'y attendre, un certain nombre d'entre eux vont éprouver des difficultés à définir une stratégie de calcul. Un point collectif sera effectué au bout de cinq minutes, avec l'aide de la TI92 rétroprojetable, les élèves dictant à l'enseignante les expressions à entrer et les calculs à effectuer. Cette phase collective se termine par la formulation de conjectures concernant la position de la bille suivant les valeurs de x. Comme prévu, la conjecture qui est formulée et écrite au tableau est la suivante :

« Si $x < 8$, la bille est totalement dans l'eau
Si $x = 8$, elle affleure l'eau,
Si $x > 8$, la bille est hors de l'eau. »

Suit une courte phase de travail autonome où les élèves ont à trouver les moyens de prouver la véracité de leur conjecture. De fait, comme l'on pouvait s'y attendre, la reformulation du problème en comparaison de V(x) et V(8) ne va pas de soi et l'enseignante va de nouveau assez vite intervenir et s'appuyer sur des schémas dessinés au tableau pour amener collectivement à la formulation souhaitée.

Toujours collectivement, l'enseignante engage alors l'exploration graphique, les élèves conduisant parallèlement l'exploration sur leur propre machine : entrée de V(x) et V(8) dans Y=, définition d'une fenêtre d'affichage : [-1, 11], après avoir fait préciser les valeurs à considérer pour x, utilisation de *ZoomFit* pour ajuster la fenêtre verticalement, utilisation de la commande *Intersection* du menu F5 pour trouver les coordonnées approchées des deux points d'intersection, en insistant sur le fait qu'il s'agit ici de coordonnées approchées. Certains élèves ne connaissant pas bien le fonctionnement de cette commande d'intersection n'y arrivent pas et elle recommence plus lentement en précisant la fonction de chaque étape.

L'exploration graphique conduit sans difficultés à la disqualification des conjectures initiales et à leur rectification.

Cette phase a duré 12 minutes.

L'enseignante annonce que maintenant on va s'appuyer sur le calcul et non plus seulement sur le graphique et demande aux élèves s'ils ont des suggestions à faire. Vincent, un élève observé, va répondre tout de suite en proposant de résoudre l'équation V(x) = V(8). En fait, il avait anticipé sur ce travail dans la phase collective d'exploration graphique et déjà résolu cette équation dans HOME après avoir calculé une valeur approchée de V(8). L'enseignante lui demande à quoi va lui servir cette résolution ; pour lui, il s'agit de trouver les points d'intersection mais elle insiste sur le fait que pour connaître la position de la bille, il faut aussi comparer V(x) et V(8). La tâche est reformulée en étude du signe de V(x) - V(8) et les élèves sont renvoyés à un travail autonome qui sera entrecoupé de points collectifs. Le lien : étude du signe / factorisation émerge sans difficulté, mais la factorisation obtenue par la commande *Factor* n'est pas complète puisque les racines ne sont pas toutes rationnelles. C'est l'enseignante qui va rappeler l'utilisation de *Factor(expression, x)* qui permet d'arriver à un produit de trois facteurs. Elle les aide aussi à obtenir des valeurs approchées des racines, en utilisant la commande *Zeros* associée à la touche diamant. Cette manipulation visiblement ne leur est pas familière, ce qui l'amène à rappeler les liens entre les commandes *Zeros* et *Solve*. Suit la réalisation autonome d'un tableau de signes qui ne pose pas, elle, de problème et la conclusion. L'ensemble dure environ 15 minutes.

On passe ensuite à la seconde bille. Les élèves pensent au départ que la situation va être la même. La situation va être gérée en une dizaine de minutes, sans difficulté particulière, toujours dans un travail autonome coupé d'interventions collectives. Les stratégies utilisées sont soit graphiques, soit algébriques comme celle de Vincent qui, tout de suite, entre l'expression V(x) - V(3), la fait factoriser et fait aussi résoudre l'équation correspondante.

Un bilan collectif est effectué et le tableau de signes tracé au tableau.

C'est la fin de la séance et l'étude du cas général est donnée à chercher en travail à la maison.

Une synthèse collective sera organisée la semaine suivante à partir de ce travail.

D. Bilan et scénarios possibles

L'expérimentation de cette séance a confirmé globalement les attentes que nous avions à son sujet. C'est une situation intéressante du fait des résultats inattendus, de la richesse des techniques et raisonnements intervenant dans la résolution, de l'articulation qu'elle met en jeu entre travail algébrique et graphique. C'est également une situation où l'apport de la TI92 est évident, tant dans l'exploration graphique que dans le travail algébrique. Elle permet d'ailleurs de faire le point sur l'instrumentation de la machine à ce moment là de l'année, globalement au niveau de la classe et est utilisée par l'enseignante pour faire fonctionner des commandes comme *Zeros, Intersection, Factor(expression,x)* qui sont moins souvent utilisées par les élèves que les commandes *Solve, Trace, Factor.*

Ce n'est pas non plus une situation facile et des médiations de l'enseignant y sont nécessaires. Il est donc important de chercher à construire des scénarios où cette nécessité de médiation soit prise en compte, avec le souci de laisser aux élèves le maximum d'autonomie dans la recherche. Ceci n'a rien d'évident et nous pouvons chercher à déterminer ce que nous apporte ici l'expérimentation menée.

L'introduction de la situation par une phase de conjecture, qui fait ici ressortir la conjecture erronée attendue (certains élèves pourraient cependant douter de sa véracité en pensant que lorsque la bille est très grosse, il suffit de peu d'eau pour la submerger car elle occupe une grande part du volume du cylindre), nous semble tout à fait intéressante par l'enjeu qu'elle va donner au travail mathématique.

Dans le texte, nous avons choisi d'introduire la fonction qui va servir à le résoudre, estimant que le travail laissé ainsi à la charge de l'élève était déjà suffisamment important. L'expérimentation tend à conforter ce choix. Il est évident que ce faisant, nous privilégions une approche du problème parmi d'autres possibles, par exemple celle qui consiste à introduire la fonction h(x) donnant la hauteur d'eau dans le cylindre en fonction du rayon de la bille, pour une bille immergée, puis à résoudre l'inéquation $h(x) \leq 2x$ qui traduit le fait que la bille est bien immergée.

Une fois le problème reformulé en termes de comparaison de V(x) et V(8), ce qui on l'a vu ne pas de soi, l'exploration graphique qui va conduire à la formulation des conjectures nous semble tout à fait à la portée des élèves, dans un travail autonome, même si ici elle est gérée collectivement.

La justification algébrique ensuite nous semble intéressante et indispensable : elle met en jeu le caractère outil de la factorisation dans l'étude du signe d'une expression polynomiale, elle met en jeu le lien racine d'un polynôme / factorisation, un des points forts du travail sur les polynômes en 1ereS qui permet ici , en prenant en compte le fait qu'une racine est connue, de se ramener à une équation du second degré que l'on sait résoudre. Vu les compétences des élèves, elle nous semble devoir être guidée par l'enseignant et prise en charge collectivement, pour ce premier exemple. La TI92 sera mise à contribution pour produire racines et factorisations, allégeant la charge technique du travail.

Le travail peut être repris, avec plus d'autonomie cette fois, dans le cas où $a = 3$.

Pour le cas général, si l'exploration graphique et la formulation de conjectures nous semblent tout à fait accessibles de façon autonome, la preuve algébrique devrait nécessiter pour beaucoup d'élèves, encore une fois, l'aide de l'enseignant qui pourra aussi faire ressortir la diversité des démarches possibles et leur économie respective.

Lors de l'expérimentation, pour cette situation, nous avons affaire à une recherche conjuguant très étroitement les phases collectives et les phases de travail autonome des élèves. D'autres gestions seraient sans doute possibles, en ménageant des plages suffisamment longues réservées au travail autonome des élèves. Dans cette situation d'autre part, les élèves travaillent, comme c'est habituel dans la classe, par binômes. Comme le souligne L.Trouche dans (Trouche, 1997), cette taille de groupe est bien adaptée aux échanges dans le travail avec la TI92, vue la visibilité limitée de l'écran. On peut penser cependant que des groupes un peu plus nombreux, face à une situation aussi complexe, pourraient être plus productifs que de simples binômes. L'expérimentation enfin semble montrer la nécessité dans le scénario d'au moins deux phases avec apport important de l'enseignant : une première phase où on fait le point sur les calculs à mener et on reformule le problème en termes de comparaison de V(x) et V(8), qui peut succéder à une phase d'appropriation du problème, et une seconde phase où se gère la première preuve algébrique.

Dans le cadre de l'expérimentation, la séance ne permet de traiter que les cas particuliers. Ceci ne nous semble pas gênant. La conclusion de cette séance peut justement viser à assurer la dévolution du problème de la généralisation à partir de la comparaison des deux cas particuliers (cette généralisation n'a pas nécessairement à être présente dans le texte distribué initialement aux élèves) et renvoyer les élèves à un travail de recherche hors classe avec production écrite. On pourrait d'ailleurs dans ce travail écrit demander à chaque élève de choisir une valeur particulière de a, distincte des deux valeurs déjà étudiées, avant de passer au cas général, pour renforcer l'appropriation individuelle du travail effectué en classe et le passage à l'écrit. Une synthèse collective serait alors organisée sur la base des productions écrites des élèves.

INGENIERIE 2
Une première approche des limites

L'objectif de cette partie de l'ingénierie est de mener une première approche des limites, préparatoire à la notion de dérivée. On s'y limite volontairement de ce fait aux limites en 0, le thème des limites sera retravaillé ensuite, en liaison avec l'étude des branches infinies de courbes représentatives de fonctions et sera l'occasion de reprendre et adapter aux nouveaux cas considérés le travail effectué ici.

Nous souhaitons dans cette approche nous appuyer sur un langage des ordres de grandeur. Divers travaux menés (Deledicq, 1991), (Lutz et al., 1996) semblent montrer qu'il est accessible aux élèves et peut les aider à soutenir leur activité mathématique par un langage cohérent et opérationnel. Nous souhaitons ainsi introduire la notion de négligeabilité relative, à partir de la comparaison expérimentale de vitesses de convergence vers 0 et exploiter ensuite cette notion pour caractériser en analyse la tangente à une courbe en un point, parmi l'ensemble des droites qui tendent à se confondre avec la courbe lorsque l'on effectue des zooms.

Nous nous appuierons dans cette approche sur les conceptions dynamiques et statiques spontanées des élèves, en essayant de montrer la nécessité de leur dépassement mais sans chercher à contrecarrer systématiquement les conceptions monotones qui ne peuvent qu'être renforcées par les fonctions que rencontrent les élèves, à ce moment de l'année. Ce point sera repris lors de l'étude des fonctions trigonométriques en fin d'année.

Enfin, nous n'introduirons officiellement que relativement tard, dans cette approche, la commande algébrique de calcul de limites de l'application HOME. Une introduction trop précoce nous semble préjudiciable au travail que nous voulons mener, en enfermant prématurément la notion de limite dans un cadre formel. L'approche, en revanche, exploitera dès le départ, les dimensions numériques et graphiques du concept.

Le scénario est construit autour d'un ensemble de séances que nous allons présenter dans la suite. Dans cette partie du rapport, nous nous centrerons sur la phase d'introduction et, en particulier deux séances : la séance d'introduction proprement dite et la séance qui, à Chartres, a conclu cette phase d'introduction où n'était pas mobilisée la commande de calcul formel des limites de la machine. La partie de cette approche concernant la mise en place des règles de calcul algébrique sur les limites est regroupée avec la séance analogue concernant les dérivées (chapitre3). Nous joignons de plus en annexe le document distribué aux élèves, destiné à assurer la trace collective du travail effectué pendant les quatre premières séances.

SITUATION 1 : l'introduction des limites

Il s'agit dans cette première séance, prévue pour une durée de deux heures, de problématiser la notion de limite, en s'appuyant sur des approches numériques et graphiques, de mettre en place des formulations associées à la situation de limite nulle en 0 pour une fonction et les raffiner progressivement, tout en constituant un premier ensemble de critères positifs et négatifs, pouvant servir de repères aux élèves.

Nous en décrivons ci-après le scénario tel que nous l'avons reconstruit en prenant en compte les résultats de la première expérimentation. Il comporte cinq phases.

Phase 1 :

Cette phase est collective et vise à situer le travail mathématique qui va être effectué, en particulier en faisant émerger le sens que donnent les élèves au mot « limite » qui ne leur est bien sûr pas inconnu. Pour cela, on leur demande ce qu'évoque pour eux le mot limite, dans quels contextes ils l'ont déjà rencontré, utilisé, hors mathématiques et en mathématiques.

- On peut s'attendre à ce que ce soit plutôt les limites infinies qui soient ici évoquées, au moins sur le plan mathématique, associées à l'idée de grandes valeurs et de croissance, ainsi que les conceptions culturelles communes (limite comme borne, barrière, point inaccessible, fin d'un processus...), c'est ce que s'est effectivement produit lors de l'expérimentation.
- On introduit à cette occasion les distinctions entre nombres " très grands ", " très petits ", de taille " normale ", en précisant qu'elles portent sur les **valeurs absolues** des nombres et restent nécessairement un peu floues.

Phase 2 :

Cette phase est une phase d'exploration numérique et graphique, elle aussi collective, menée avec le support de la calculatrice. Elle concerne une fonction usuelle simple. Dans l'expérimentation, nous avions prévu de travailler très banalement avec la fonction : $x \mapsto x^2$, fonction qui a d'ailleurs été citée par les élèves dans la première phase (comme associée à la rencontre de limites infinies en mathématiques, l'année précédente). La calculatrice rétroprojetable est manipulée par l'enseignant, les élèves reproduisent tout au partie des manipulations sur leur propre calculatrice. La fonction choisie est explorée au voisinage de 0, après que l'on ait précisé que c'est à des problèmes de " très petit " plutôt que de " très grand " que l'on va s'intéresser pendant cette séance.

- Que peut-on dire du comportement de f(x) au voisinage de zéro ?
- Que se passe-t-il quand x devient très petit, et par exemple que peut-on dire de f(x) si :

$$-10^{-2} \leq x \leq 10^{-2}$$
$$-10^{-5} \leq x \leq 10^{-5}$$
$$-10^{-10} \leq x \leq 10^{-10}$$

L'exploration s'effectue en utilisant TABLE, GRAPH avec *Trace*, voire GRAPH avec *Zoom* (ceci a été proposé par les élèves de Chartres mais les a déçus car, contrairement à leur attente, les zooms n'aplatissaient pas nécessairement la courbe sur l'axe des x, donc ne renforçaient pas la visibilité du phénomène). Il peut être intéressant de partager l'écran en deux sous-fenêtres l'une graphique, l'autre correspondant à l'application TABLE, pour pouvoir gérer simultanément les deux approches.

Il s'agit ici d'arriver à une première formulation, nécessairement proche des représentations spontanées, une formulation que l'on fera fonctionner dans la phase suivante.

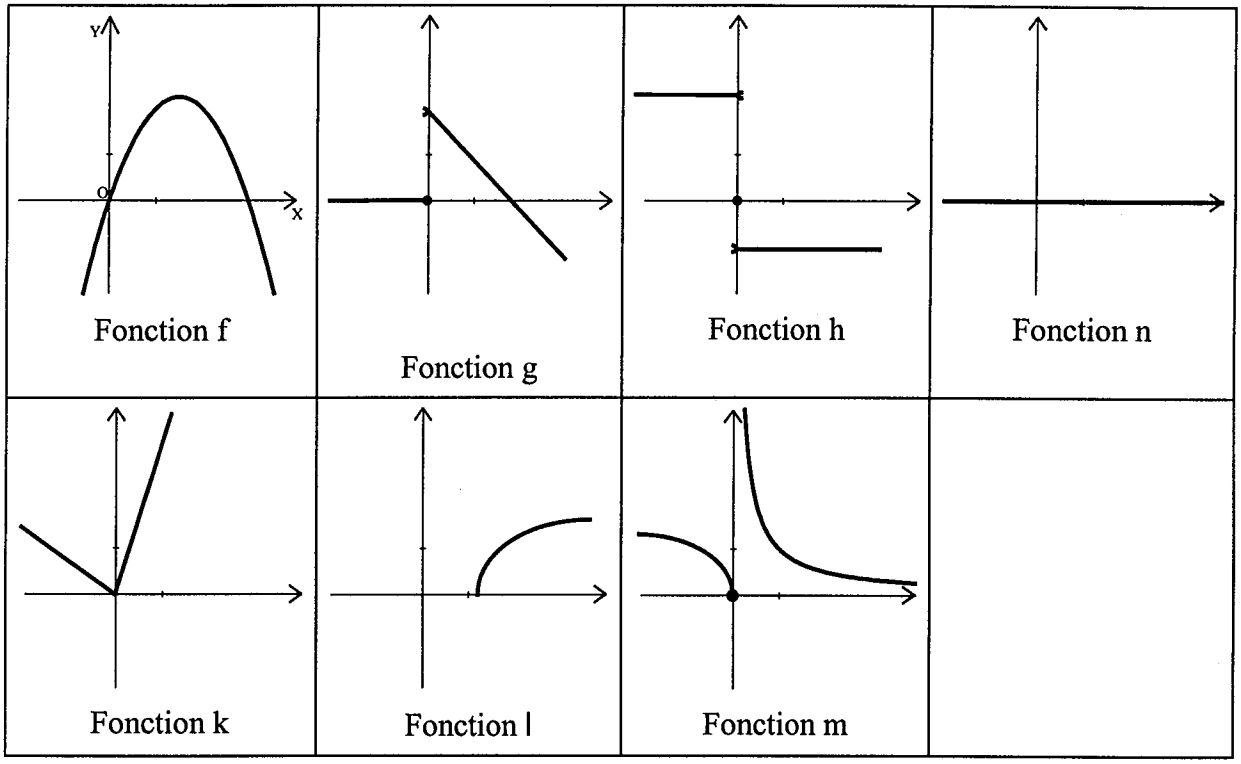
La formulation qui a été proposée par les élèves de Chartres lors de l'expérimentation était la suivante : ***" Quand x devient très petit, f(x) devient très petit "***

Elle est assez naturelle, si l'on prend en compte la situation fonctionnelle qui lui donne naissance et la force des conceptions dynamiques spontanées, renforcée ici par le travail d'exploration. On notera que les élèves se sont emparés sans difficulté du langage des ordres de grandeur qui avait été introduit préalablement par l'enseignante. A Caen, où ce langage

n'avait pas été introduit, les formulations ont été du type : « Quand x se rapproche de 0, f(x) se rapproche de 0 ».

Phase 3 :

Il s'agit d'exploiter cette première formulation dans un travail autonome en binômes, à partir de la fiche graphique ci-après, associée à la consigne suivante : « Pour chacune des représentations graphiques proposées, dites si, à votre avis, elle correspond à une fonction qui satisfait la définition que vous avez donné de la limite 0 en 0, en justifiant soigneusement votre réponse ».



Les exemples sont choisis pour mettre en place, en s'appuyant sur la définition provisoire donnée, un certain nombre de repères. On a aussi introduit la fonction nulle en faisant l'hypothèse que, pour les élèves, elle soulèvera débat, f(x) ne devenant pas très petit lorsque x l'est puisqu'il l'est déjà.

L'expérimentation menée montre que le travail ici proposé est tout à fait accessible aux élèves, en travail autonome et qu'il est productif. La mise en fonctionnement de la définition sur ces différents exemples a permis de faire ressortir, après un débat collectif, conformément aux attentes, un certain nombre de critères positifs et négatifs :

- Le problème de la limite en 0 ne se pose pas si f n'est pas définie au voisinage de 0.
- Il ne suffit pas que f(0) = 0 pour qu'il y ait une limite nulle en 0.
- Quand on cherche s'il y a une limite 0 en 0, on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe pour x très petit. Pour d'autres valeurs f(x) peut être grand et même " très grand ".
- Si une fonction est nulle sur un intervalle autour de 0, elle a forcément une limite nulle en 0.

Le cas de la fonction nulle, très discuté, conduira lors de l'expérimentation, les élèves à reformuler leur définition en :

" Quand x devient très petit, f(x) reste ou devient très petit "

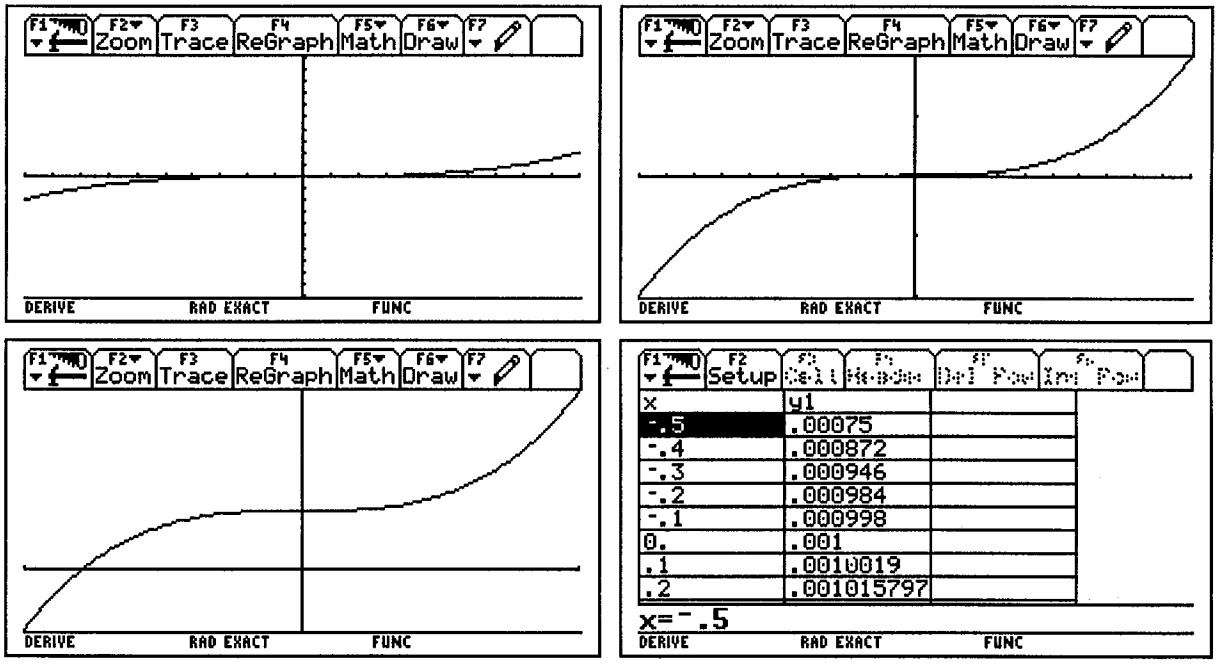
Phase 4 :

Lors de cette phase, on introduit une nouvelle fonction destinée à mettre en évidence les limitations de la définition proposée. Cette fonction est choisie, pour que graphiquement et numériquement, dans une exploration comparable à celle menée précédemment, et sur la base de la définition adoptée, on soit amené à conjecturer que la limite en 0 est 0. On fait cependant l'hypothèse que certains élèves peuvent, lors de l'exploration s'apercevoir que les valeurs de la fonction ne descendent pas au-dessous d'un certain seuil non nul au voisinage de 0 ou au moins avoir un doute. Si ce n'est pas le cas, il est prévu que l'enseignante rende ce phénomène perceptible par un questionnement comparable à celui introduit pour : $x \mapsto x^2$. La fonction choisie est la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x + 1000}$$

La question posée est : « A votre avis, la fonction f a-t-elle une limite nulle en 0 ou non ? »

Nous donnons ci-dessous des représentations graphiques machine et tables de valeurs qui lui sont associées. les deux premières représentations sont obtenues dans la fenêtre standard et en *ZoomFit* pour l'intervalle [-10,10] de cette fenêtre, la troisième correspond à un *ZoomFit* sur l'intervalle [-1,1].



Lors de l'expérimentation menée, le doute apparaîtra chez certains élèves qui concluront que la limite n'est pas 0 mais 1/1000. Les justifications proposées seront reprises par l'enseignante qui en tirera les conséquences par rapport à la nécessité de remanier la définition proposée : « Il ne suffit pas que f(x) devienne très petit, il faut qu'il devienne aussi petit que l'on veut », conclusion qu'elle précisera ensuite en complétant la première définition par l'énoncé suivant :

" Pour tout nombre a positif, aussi petit que l'on veut, on est sûr que $|f(x)| \leq a$ dès que x devient assez petit "

On cherchera ensuite collectivement, une valeur de a qui permette de prouver que la fonction donnée ne satisfait pas cette condition.

Phase 5 :

Dans cette cinquième et dernière phase, il s'agit de tester l'opérationalité du nouveau critère avec la première fonction rencontrée : $x \mapsto x^2$, puis de mettre en place sa visualisation graphique sous forme du critère des bandes et l'appliquer aux tracés étudiés dans la deuxième phase. L'enseignante souligne à cette occasion que ce critère graphique donne une indication, non une certitude dans le cas où l'on veut l'utiliser pour conclure que la limite est 0 (cf. phase 4).

SITUATION 2 : les limites des fonctions de référence

La deuxième séance est consacrée aux limites des fonctions de référence de limite nulle en 0. Dans chaque cas, on articule exploration numérique et graphique, ainsi que l'utilisation de la définition. Comme toutes les fonctions envisagées dans cette séance ont pour limite 0 en 0, ce qui les distingue et est particulièrement visible dans l'approche numérique, c'est leur rapidité de convergence vers 0. On profite donc de cette séance pour classer les fonctions de référence suivant leur rapidité de convergence et pour introduire la notion de négligeabilité d'une fonction par rapport à une autre au voisinage de 0 pour traduire ces différences de vitesses.

SITUATIONS 3 ET 4 : prolongements à d'autres cas possibles simples

Dans ces deux séances, on va aborder trois prolongements de la situation initiale :

- le cas d'une limite finie non nulle en 0. Ceci s'effectue avec les deux fonctions suivantes : $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
- le cas d'une limite infinie en 0 : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et les inverses des fonctions de référence.

Dans chacun de ces deux premiers cas, il y a adaptation et formulation des nouvelles définitions, à partir de l'exploration numérique et graphique, par les élèves.

- le cas d'une limite finie pour une fonction non définie en 0 : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Dans ce cas là, un programme spécifique s'appuyant sur le module géométrique de la TI92 a été construit et la preuve est étroitement gérée par l'enseignante.

Ces deux séances se terminent en complétant l'herbier des cas rencontrés par un exemple plus complexe de fonction sans limite en 0. L'exemple choisi est celui de la fonction f définie, pour x non nul, par : $f(x) = \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{x}$.

SITUATION 5 : réinvestissement

A. Contexte et objectifs

Il s'agit dans cette séance de réinvestir le travail effectué jusqu'à présent dans une situation de recherche, en conjuguant une fois de plus les approches numériques, graphiques et algébriques. Cette séance est prévue pour fonctionner sur une durée de deux heures, dans un travail en binômes entrecoupé de phases collectives.

En ce qui concerne l'instrumentation de la TI92, elle sera aussi l'occasion d'introduire d'une part la notion de liste et le tableur.

B. Le problème proposé

Le problème proposé, adapté d'un exercice proposé dans le manuel de 1ereS publié chez Hachette est celui de l'étude de l'évolution des racines d'une équation du second degré dépendant d'un paramètre lorsque le paramètre positif tend vers 0. Dans le cas où a est nul, cette équation se réduit de fait à une équation du premier degré admettant une racine unique : 1/2.

Le travail proposé, guidé par la fiche donnée en annexe 2, propose d'abord une approche graphique du phénomène : 8 fonctions sont introduites correspondant à 8 valeurs successives de a, de plus en plus proches de 0. On demande aux élèves de les faire tracer, de donner les valeurs approchées des racines que permet l'approche graphique et de conclure en répondant à la question : « Que devient chaque racine quand a tend vers 0 ? ».

Cette partie exploratoire nécessite une bonne instrumentation graphique de la machine, pour pouvoir être menée dans un temps raisonnable. En effet, la fenêtre standard ne permet de visualiser correctement que les deux premiers cas. Il faut ensuite adapter les fenêtres à chaque nouvelle fonction considérée, en prenant en compte la croissance rapide de la plus grande racine. La détermination des valeurs approchées des racines, dans le mode graphique, peut se faire avec la commande *Trace* ou avec les commandes plus spécifiques : *Zeros* et *Intersection*. La précision de l'approximation trouvée dépend bien sûr de l'amplitude de la fenêtre puisque l'écart entre deux valeurs calculées est donné par : $\frac{\text{Xmax - Xmin}}{296}$. De plus, un travail efficace suppose des sélections et désélections de fonctions.

Cette exploration graphique amène à conjecturer que lorsque a tend vers 0, la plus petite racine tend vers $\frac{1}{2}$ et la plus grande vers l'infini.

La deuxième partie consiste en une approche numérique : on fait calculer par la machine les racines de l'équation en fonction de a. La commande utilisée est *Zeros* car c'est celle qui donne les résultats sous forme de liste. Le tableur de la TI92 est ensuite utilisé pour obtenir rapidement des valeurs approchées des deux racines de l'équation. On met ainsi en évidence l'intérêt du tableur dans la gestion de ce type de problème par rapport à l'approche graphique.

Pour la dernière valeur de a proposée, on obtient un résultat non conforme à l'évolution conjecturée que l'on demande d'interpréter. Cette valeur a bien sûr été introduite pour poser le problème des limitations d'une telle approche numérique des limites avec la machine.

La troisième partie vise à prouver les conjectures qui ont été établies à partir des études précédentes. Vu l'expérience très limitée des élèves à ce moment de l'année dans le calcul des

limites, on fait l'hypothèse que cette preuve va nécessiter l'aide de l'enseignante. On commence par la limite en $+\infty$ qui peut s'appuyer sur une algèbre des limites intuitive, dont on se satisfera. Pour la plus petite racine, l'expression algébrique obtenue conduit à une indétermination. Il est prévu que le problème soit explicitement posé, avant de proposer le détour consistant à passer par le produit des racines qui permet de lever l'indétermination.

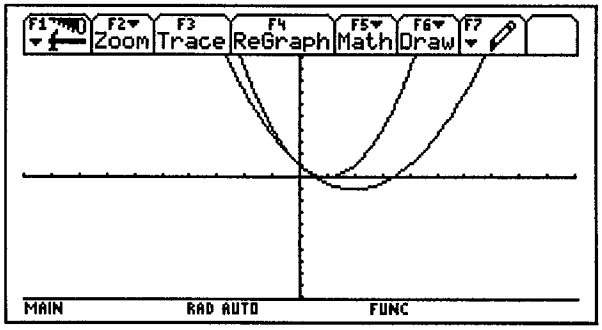
Il nous semble intéressant même si ce n'est pas mentionné dans la fiche de faire ensuite le lien avec le cas a=0.

C. Déroulement

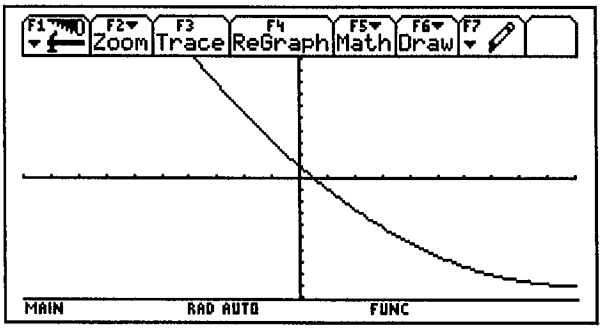
Nous rendons compte ici synthétiquement du déroulement de l'expérimentation de cette séance à Chartres. La première partie va occuper environ 45 minutes, la seconde et la troisième environ 25 minutes.

Comme l'on pouvait s'y attendre, l'exploration graphique prendra du temps, et ce même si les élèves montrent dans leur grande majorité une aisance certaine dans le travail graphique avec la machine. Suivons par exemple le travail de Vincent observé pendant cette séance. Ne suivant pas exactement les consignes, sans doute par souci d'économie, il commence par définir la fonction f dans HOME puis entre la fonction correspondant à a=1 dans l'application Y= par : y1=f(x) | a=1. La TI92 semble accepter cette définition mais lui renvoie le message d'erreur : « Undefined variable » lorsqu'il demande le tracé dans GRAPH. Il aurait fallu en effet qu'il définisse f comme une fonction des deux variables x et a pour pouvoir procéder ainsi.

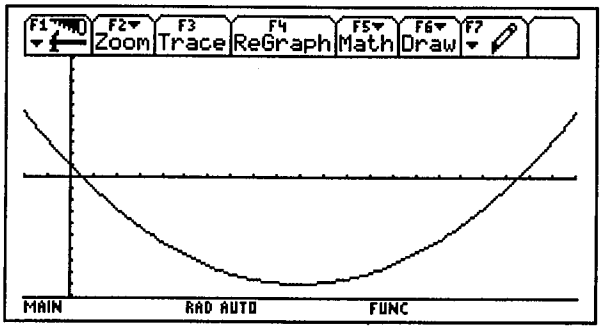
Il entre alors les deux premières fonctions dans Y= de façon standard et les fait tracer :



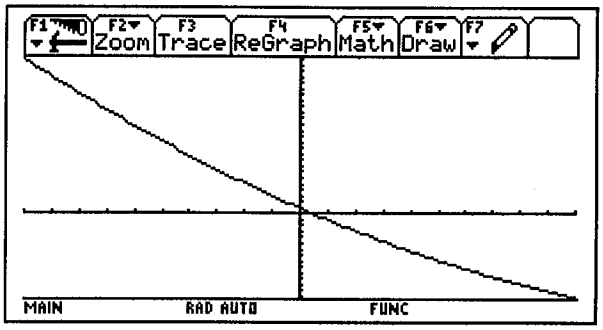
puis désélectionne y1 pour pouvoir visualiser les zéros de y2 seule. Ensuite il définit y3, désélectionne y2 et fait tracer, obtenant le tracé ci-après :



Il passe alors dans Windows, choisit l'intervalle [-2, 22] pour y et obtient :

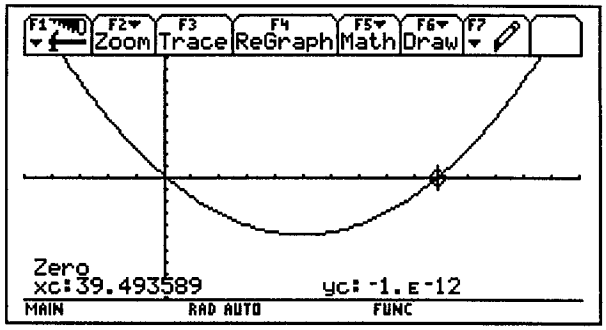


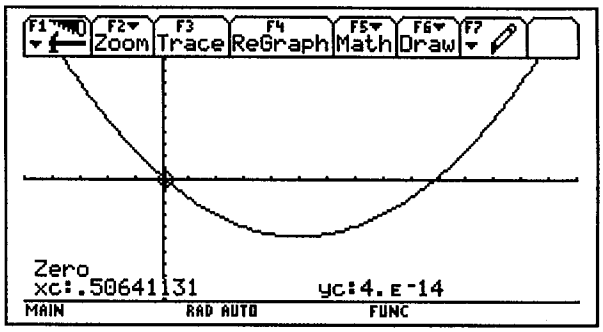
Il passe alors à y4, fait tracer la courbe en *ZoomStd* puis en *ZoomFit*, obtenant ceci :



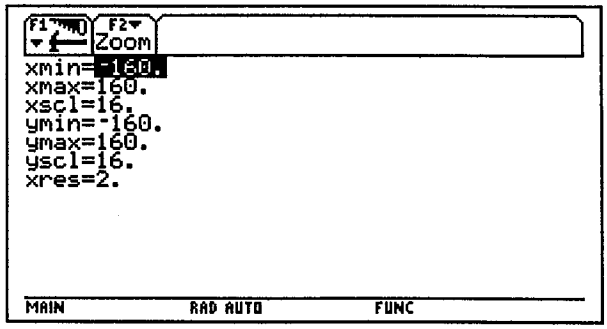
Dix minutes se sont écoulées, l'enseignante fait un point collectif, à partir des deux premières fonctions, montrant comment lorsque l'on utilise *Trace*, on bascule d'une courbe à l'autre avec les flèches haut et bas de la souris. Pour mieux visualiser la racine inférieure, les élèves proposent de faire *ZoomBox*, l'enseignante explique que l'on peut faire aussi *ZoomIn* et *ZoomOut*, et donne les facteurs correspondants. Un élève propose ensuite d'utiliser la commande *Zeros*. L'enseignante la fait fonctionner puis demande comment utiliser la commande *Intersection,* avant de faire le point sur les différentes méthodes à leur disposition.

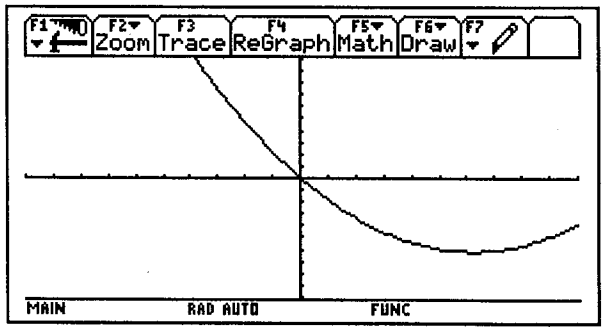
Pendant ce temps, Vincent avance, exploitant la commande *Zeros* avec y4 avec d'abord une inversion des bornes inf et sup de l'intervalle qui génère un message d'erreur.

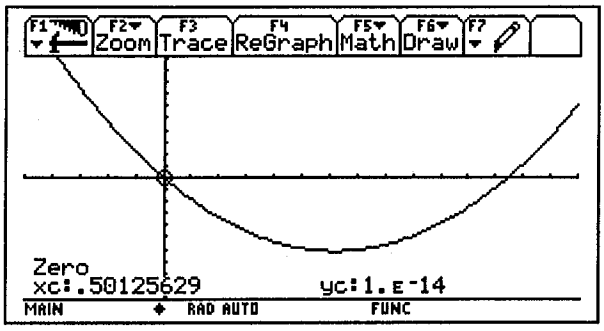


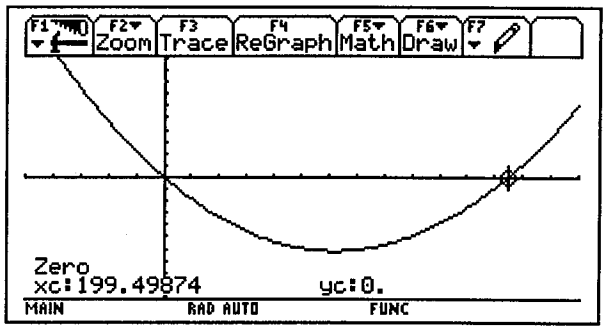


Il passe ensuite à y5, la fait tracer et par deux *ZoomOut* successifs à partir de l'origine obtient un tracé adapté puis utilise la commande *Zeros* pour approcher les racines :





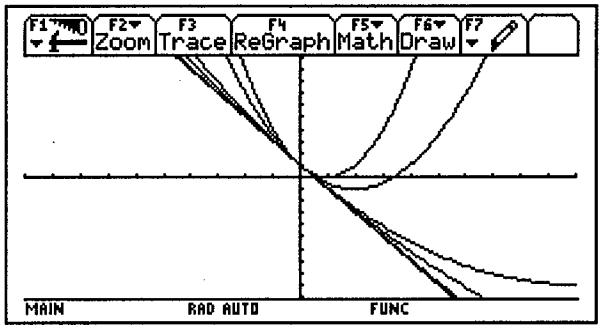




Au bout de 20 minutes, Vincent en est à y7. A ce moment, répondant à une question d'un élève, l'enseignante s'adresse à toute la classe pour savoir si la machine calcule exactement dans le module GRAPH. La réponse est clairement : « Non ». Elle est également obligée de revenir sur la commande d'intersection que des élèves ont du mal à utiliser. Vincent continue à travailler, adaptant ses fenêtres par le choix de valeurs, sans plus faire de zooms et utilisant systématiquement la commande *Zeros*. Il note soigneusement au fur et à mesure les valeurs approchées trouvées pour les racines.

Quand l'enseignante interrompt le travail individuel pour un bilan au bout de 30 minutes, il a pratiquement terminé.

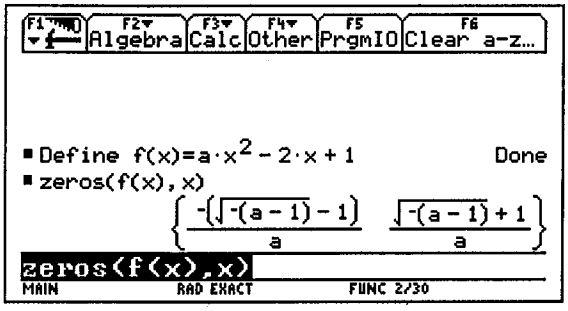
Dans le bilan, mené avec la calculatrice rétroprojetable, l'enseignante s'intéresse d'abord à la racine inférieure dans un tracé en *ZoomStd*.

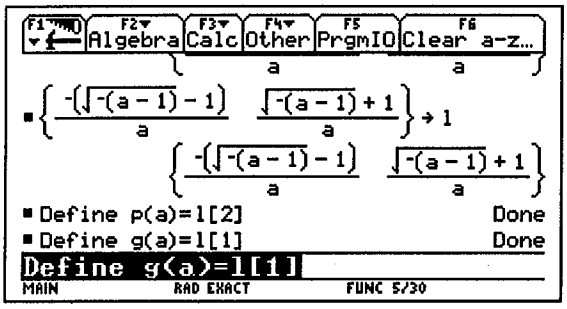


La première constatation faite par les élèves est que les courbes ont toutes l'air de passer par le même point mais que ce n'est pas tout à fait vrai, puis que les courbes ressemblent de plus en plus à des droites. Ceci va conduire à tracer la droite d'équation y=-2x+1 proposée comme un élève comme très proche de y8 et qui effectivement ne s'en distingue pas graphiquement. Ensuite l'enseignante oriente les élèves vers des conjectures concernant la racine. Elle obtient sans difficulté que cette racine a l'air de tendre vers 1/2. Les différents constats sont écrits au tableau puis l'enseignante revient sur la proximité parabole/droite en demandant la différence entre les valeurs correspondantes de y pour une même valeur de x : ax^2 et en la faisant évaluer pour x=1/2 et différentes valeurs de a.

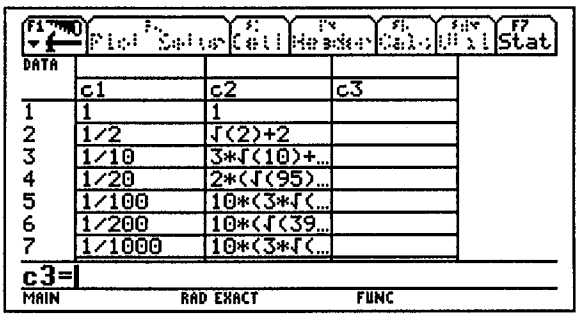
Pour la seconde racine ensuite, les élèves disent successivement qu'elle est positive et s'éloigne de 0, qu'elle est de plus en plus grande, puis qu'elle a l'air de tendre vers l'infini.

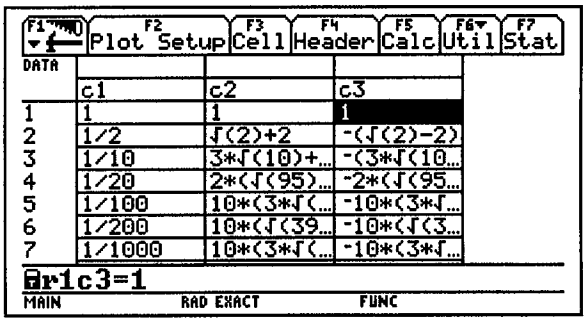
Pour démarrer l'approche numérique, l'enseignante fait nettoyer les variables, en précisant que F6 ne nettoie que les variables à une lettre. Elle demande aussi de mettre si ce n'est pas déjà fait les machines en mode exact. Vincent démarre tout de suite et ne rencontre pas de difficulté à suivre les instructions de la fiche.



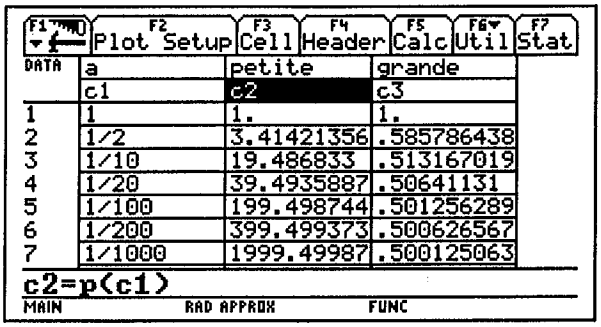


Les élèves travaillent avec leur fiche et l'enseignante effectue parallèlement les manipulations sur la rétrojetable. Elle précise assez vite que ceux qui n'obtiennent pas les racines correctes ont vraisemblablement oublié le signe * entre a et x, la TI92 considérant alors ax comme une seule variable. Elle demande ensuite quelle est la plus petite racine et fait détailler le raisonnement. Un élève demande ce qui se passe quand a est supérieur à 1. Cette question est réglée par le calcul du déterminant et on précise que l'on se limite bien aux valeurs de a comprises entre 0 et 1. Dans la définition des fonctions p et g, un petit problème apparaît car, suivant les EPROM, c'est la plus petite ou la plus grande racine qui est le premier terme de la liste. Ce problème est rapidement réglé et l'enseignante passe au tableur en soulignant qu'il va permettre d'automatiser le calcul des valeurs de p et g pour différentes valeurs de a. Pendant la phase suivante, les élèves reproduisent sur leur machine ce que l'enseignante fait avec la rétroprojetable, en le commentant. Soulignons que Vincent avait déjà ouvert le tableur que visiblement il a déjà utilisé seul. Il commet d'abord une erreur en définissant c2 comme p(c2) mais rectifie rapidement, agrandit la taille des cellules quand il voit l'affichage, puis définit c3=g(c1).





L'enseignante dit aux élèves de nommer leur fichier (Vincent le fait), puis leur indique comment mettre les colonnes à la même largeur que sur la rétroprojetable. Elle passe ensuite à la définition des colonnes, en commençant par les titres et en expliquant la fonction des guillemets. Voyant cela, Vincent rajoute des titres à ses colonnes. L'enseignante explique ensuite comment remplir la colonne c1, comment aller sur c2 et la définir. Un élève s'étonne de voir apparaître un cadenas, l'enseignante explique. Assez vite, après un petit moment de flottement, les tableaux sont remplis et l'enseignante demande de passer en mode approché puisque ce sont les valeurs approchées qui les intéressent ici.



Pour 10^{-14}, la TI92 renvoie la valeur 0 pour la plus petite racine. Ceci suscite des questions. Un élève explique que c'est « parce que la machine n'est pas capable d'aller jusque là » mais il n'est pas capable de préciser davantage, l'enseignante fait remarquer que le numérateur et le dénominateur de la racine sont alors très petits puis exploite le doute suscité par ce zéro intempestif pour proposer de démontrer les conjectures faites.

La justification de la limite infinie visiblement ne pose pas de problème et l'enseignante fait détailler le raisonnement. Pour la petite racine, face au produit d'un nombre très petit par un nombre très grand, les réponses sont variées : une élève propose R tout entier, un autre dit que 1/2, c'est comme la moitié entre 0 et l'infini. L'enseignante va alors revenir aux fonctions de référence et étudier divers cas conduisant à des limites nulles, finies ou infinies, avant de conclure que l'on ne peut a priori rien dire et que l'on reviendra sur ces questions quand on retravaillera les limites plus tard. La preuve est ensuite gérée collectivement, sans difficulté particulière, une fois retrouvée l'expression du produit des racines.

L'enseignante leur demande ensuite de faire un travail analogue, de façon autonome lorsque a est négatif et tend vers 0, en regardant ce qui va changer. Vincent reproduit en l'adaptant le calcul de la limite de g(a) puis utilise le tableur pour vérifier. Ensuite il adapte aussi la preuve pour la seconde racine. Au bout de cinq minutes environ, l'enseignante qui circulait dans la classe, fait formuler les conjectures, réadapter la preuve puis termine la séance en revenant sur ce qu'ils avaient dit au départ : que la courbe se rapprochait d'une droite et en faisant le lien avec l'expression de la fonction pour a=0 et la limite 1/2.

D. Bilan

L'expérimentation de la séance confirme globalement les prévisions qui avaient été initialement faites. Sans doute grâce aux interventions de l'enseignante, mais aussi parce que les élèves, à ce moment de l'année, commencent à disposer de stratégies assez efficaces pour gérer le fenêtrage, la première phase a pu se dérouler en un temps raisonnable. On peut voir cependant que la succession des actions de la commande *Intersection*, qui apparaît ici comme un raffinement de la commande *Trace*, n'est pas encore maîtrisée par beaucoup d'élèves. Cette phase aboutit sans difficulté particulière à la formulation des conjectures attendues. L'introduction du tableur, très soigneusement gérée ici collectivement, compte tenu des difficultés rencontrées la première année, ne pose pas elle non plus de problème particulier. Enfin la phase de démonstration, à laquelle la valeur aberrante trouvée apporte une motivation particulière, semble, telle qu'elle est conduite, avec l'aide de l'enseignante, accessible aux élèves.

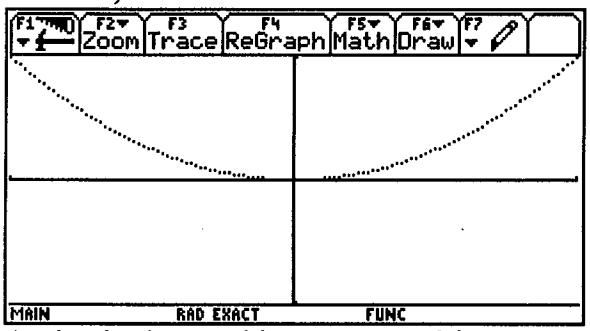
C'est à l'issue de cette séance que, dans l'expérimentation, est introduite officiellement la commande formelle de calcul des limites et précisée sa syntaxe.

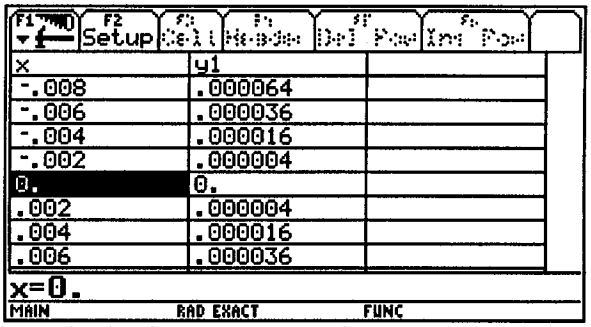
Annexe 1 : Rappel des étapes du cours sur les limites

LIMITES EN UN POINT

I <u>Fonctions ayant une limite nulle en zéro</u>.

a) La fonction carré :



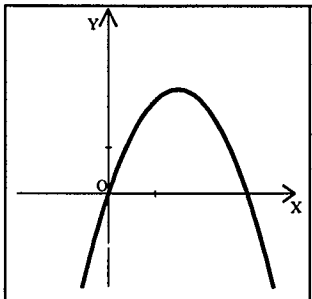


Après étude graphique et numérique avec la calculatrice on est arrivé à une première définition :

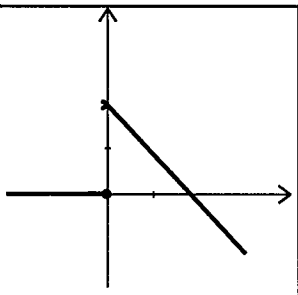
On dit que la fonction f a pour limite 0 en 0 si :

" quand x devient "très petit" f(x) devient "très petit". "

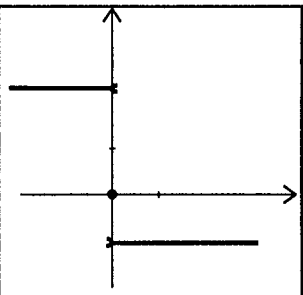
b) On fait fonctionner cette première définition sur des fonctions données par leurs courbes représentatives :



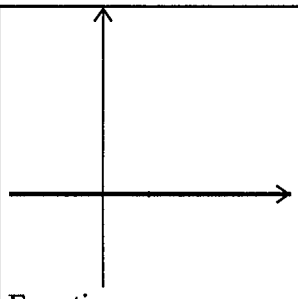
Fonction f



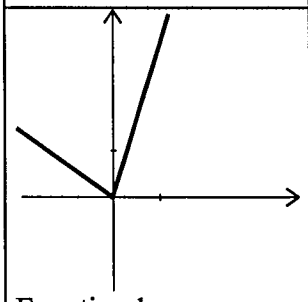
Fonction g



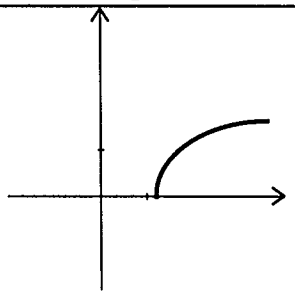
Fonction h



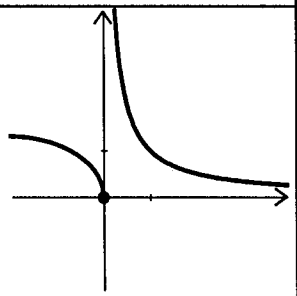
Fonction n



Fonction k



Fonction l



Fonction m

Les seules fonctions qui semblent vérifier cette définition sont : f, k et n

Premières remarques :

- Le problème de la limite en 0 ne se pose pas si f n'est pas définie au voisinage de 0 (fonction l).
- Il ne suffit pas que f(0) = 0 pour qu'il y ait une limite nulle en 0 (fonction h).
- Quand on cherche s'il y a une limite 0 en 0, on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe pour x " très petit ". Pour d'autres valeurs f(x) peut être grand, voire " très grand ".

- Si une fonction est nulle sur un voisinage de 0, elle vérifie automatiquement le critère que l'on s'est donné(cas de la fonction nulle n en particulier).
- Les seules fonctions ayant une limite nulle en zéro sont *f* , *k et n.* On constate qu'alors f(0)=0.

c) Cette première définition est mise en échec avec la fonction f telle que $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x+1000}$.

En effet, bien que f(x) devienne " très petit ", on ne peut pas le rendre aussi petit que l'on veut, plus petit que 10^{-4} par exemple, et ceci pour x aussi petit soit-il.

Il ne suffit pas que f(x) devienne " très petit ", il faut qu'il puisse devenir aussi petit que l'on veut.

D'où la définition que nous allons retenir :

On dit que <u>la fonction f a pour limite 0 en 0</u> si :
" Pour tout nombre strictement positif a, aussi petit que l'on veut, on est sûr que | f(x) |≤ a dès que x devient assez petit. " ***et on note :*** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

d) La fonction carré vérifie-t-elle cette nouvelle définition ?

La fonction est définie en zéro et sur un intervalle contenant zéro, elle est paire, on connaît son sens de variation, on peut donc essayer de répondre à la question " f(x) peut-il être aussi " proche " de zéro que l'on veut dès que x est suffisamment " proche " de zéro ?

Dans quel intervalle doit-on choisir x pour que $|f(x)| \le 10^{-6}$?

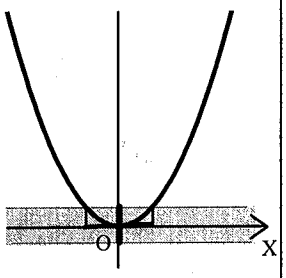
il suffit que $|x| \le 10^{-3}$

Plus généralement, comment choisir x pour que $|f(x)| \le 10^{-n}$?

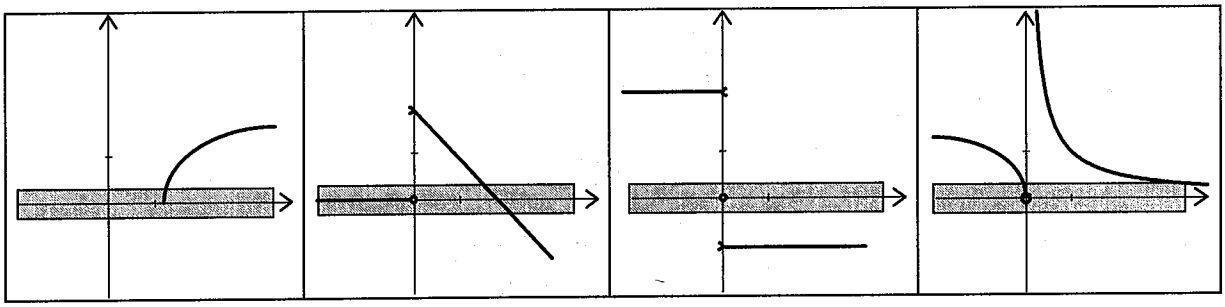
il suffit que $|x| \le 10^{-n/2}$

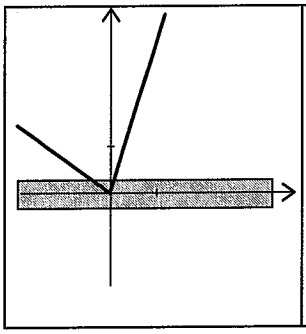
e) <u>Le critère graphique correspondant</u> :

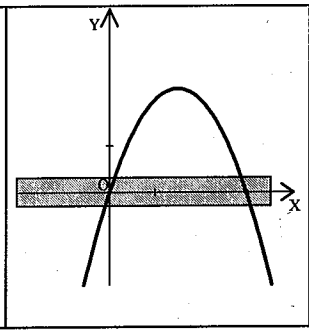
Pour n'importe quelle bande à bords parallèles à l'axe des abscisses, aussi étroite que l'on veut, symétrique par rapport à l'axe des abscisses, on peut trouver un intervalle non vide, autour de 0 tel que : si x est dans cet intervalle, alors la courbe représentative de f est dans la bande.

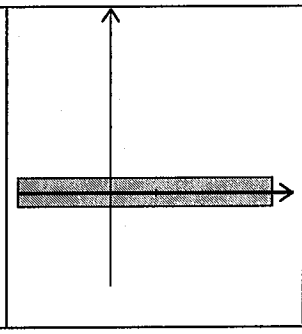


f) On cherche parmi les courbes représentatives du début, celles pour lesquelles ce critère semble fonctionner.









Les seules fonctions qui **semblent vérifier** ce critère sont celles du bas c'est à dire les fonctions f, k et n

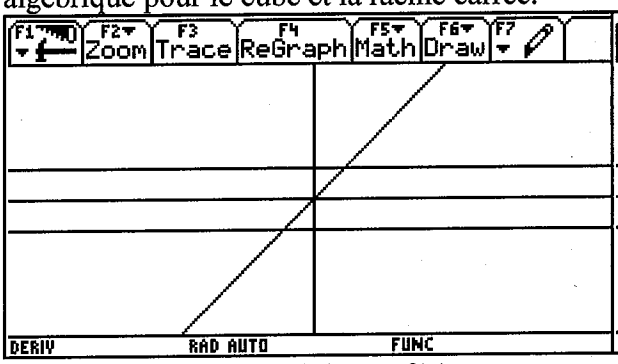
Le critère graphique permet d'éliminer les fonctions du haut mais il n'est pas assez précis pour garantir que les autres conviennent. L'étude algébrique est indispensable pour avoir une certitude.

II Fonctions de référence en zéro

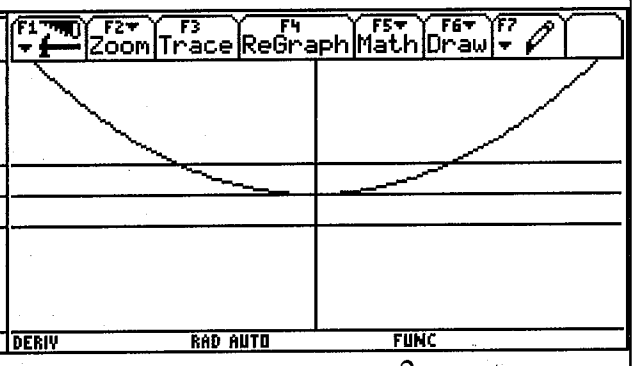
Le travail sur la fonction carré a déjà été fait.

La fonction nulle est définie par f(x) = 0 pour tout x réel, donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

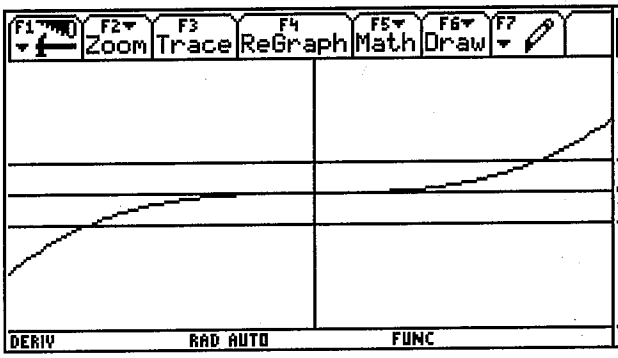
Pour les autres fonctions de référence, on fait l'étude graphique, numérique ainsi que l'étude algébrique pour le cube et la racine carrée.



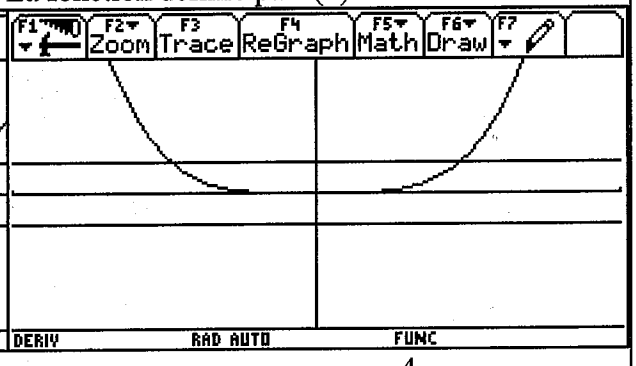
La fonction identité définie par f(x) = x



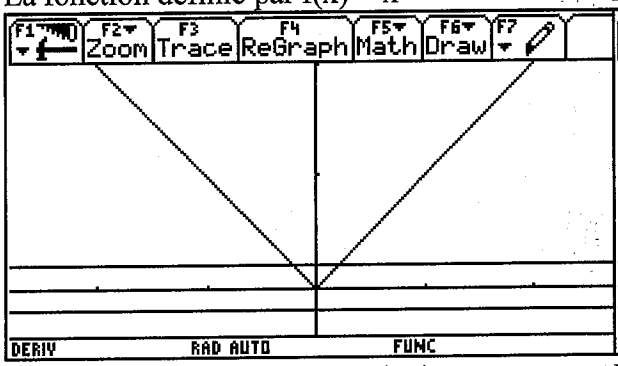
La fonction définie par $f(x) = x^2$



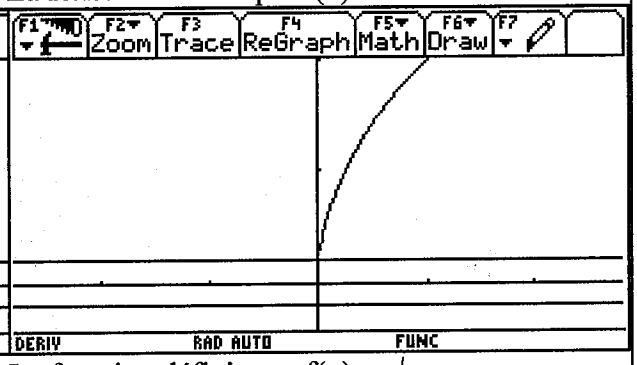
La fonction définie par $f(x) = x^3$



La fonction définie par $f(x) = x^4$



La fonction définie par f(x) = | x |



La fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$

Plus généralement on admet :

Les fonctions puissances définie sur IR par : $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \to 0} x^n = 0 \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

La fonction racine carrée définie sur $[0;+\infty[$.

limite à droite

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \sqrt{x} = 0$$

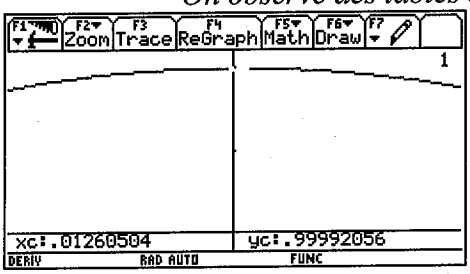
La fonction valeur absolue définie sur IR

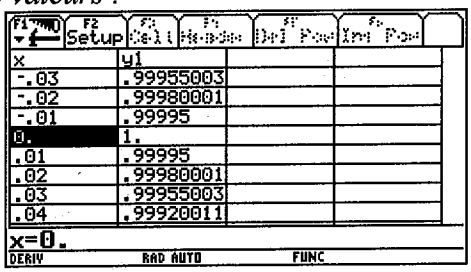
$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

III Fonctions ayant pour limite l en zéro.

a) La fonction cosinus

Avec la TI : On observe la courbe, on fait des zooms,
On observe des tables de valeurs :





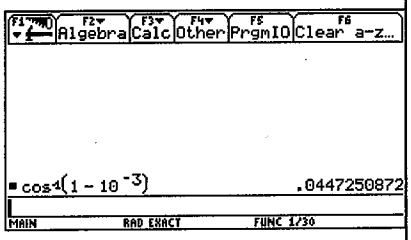
x	y1
-.03	.99955003
-.02	.99980001
-.01	.99995
0.	1.
.01	.99995
.02	.99980001
.03	.99955003
.04	.99920011

Il semble cette fois que lorsque x (en radians) tend vers 0, alors cos(x) tende vers 1. C'est à dire que cos(x) - 1 tende vers 0.

On connaît le sens de variation de la fonction cosinus et sa parité.

On peut donc cherche, par exemple, s'il est possible de choisir x pour que $|\cos(x)-1| \leq 10^{-3}$.

On trouve, en utilisant les propriétés de la fonction et la calculatrice, qu'il suffit que $|x| \leq 0{,}0447$



On généralise et on démontre donc que : $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$

b) La fonction f telle que $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Après étude graphique et numérique, on calcule f(x)-1 et on démontre que l'on peut toujours trouver des x, proches de 0 tels que |f(x)-1| soit plus petit que tout nombre réel strictement positif, aussi petit soit-il.

On écrit alors que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1$

c) Définition de f a pour limite l en 0.

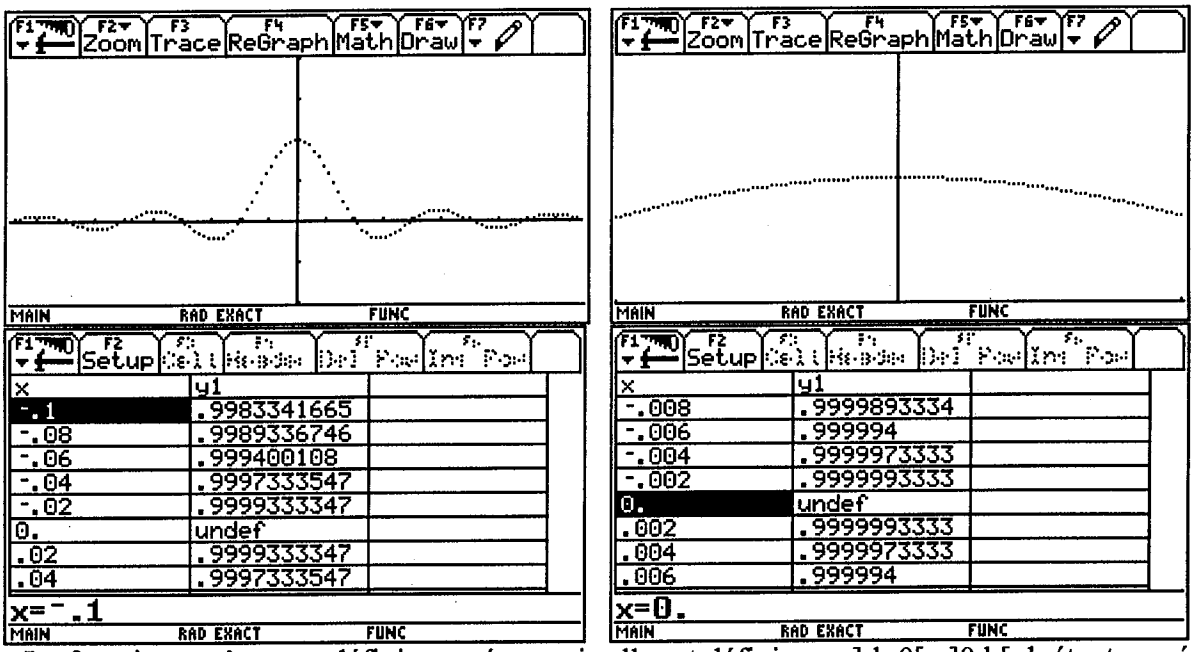
On dit que la fonction f a pour limite l en 0 si :
" Pour tout nombre strictement positif a, aussi petit que l'on veut, on est sûr que $|f(x) - l| \leq a$ dès que $|x|$ devient assez petit. " ***et on note :*** $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

d) La fonction g telle que $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, x exprimé en radians.

Elle n'est pas définie en 0

d) La fonction g telle que $g(x)=\frac{\sin(x)}{x}$, x exprimé en radians. Elle n'est pas définie en 0

En utilisant des zooms successifs et des tables de valeurs :



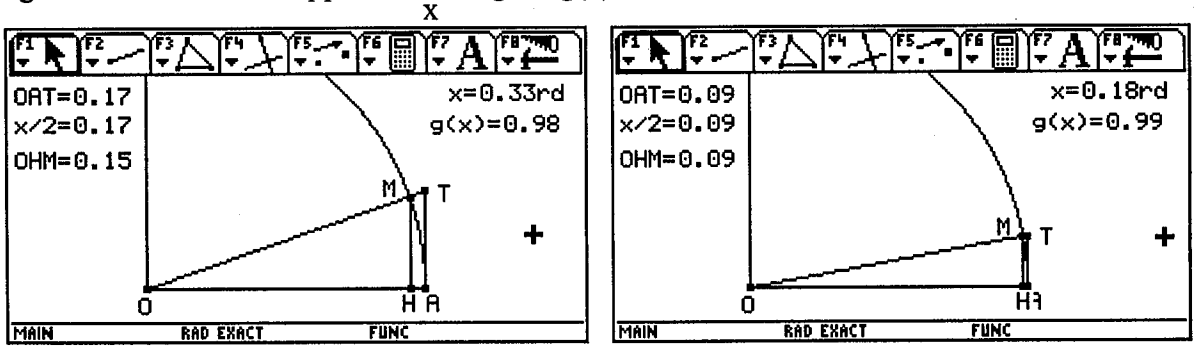
- La fonction g n'est pas définie en zéro, mais elle est définie sur]-b;0[∪]0;b[,b étant un réel strictement positif quelconque.
- il semble que g(x) est aussi proche que l'on veut de 1 sitôt que x est assez proche de zéro en étant différent de zéro.

Avec la TI : illustration de l'interprétation en terme d'aires en utilisant le module géométrie.

On a construit sur le cercle trigonométrique, le point M correspondant à l'angle x.

L'aire du secteur circulaire OAM est comprise entre les aires des triangles OHM et OAT.

En déplaçant le point M, les aires des triangles et du secteur circulaire évoluent, on fait également afficher le rapport $\frac{\sin(x)}{x}$ égal à g(x).

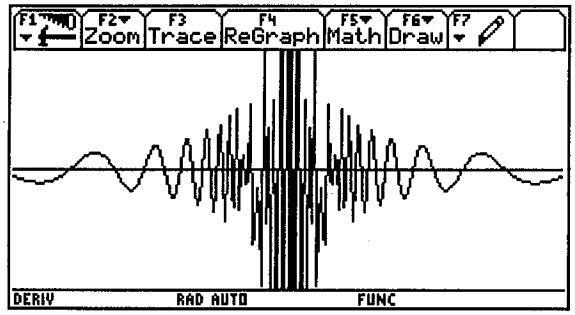


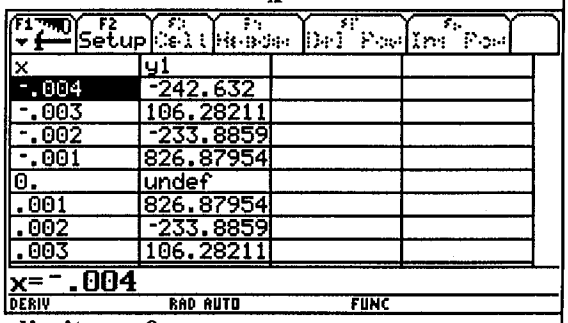
En utilisant le théorème de Thalès, on calcule les aires des triangles et du secteur circulaire et on démontre l'encadrement :

$$\cos(x) \le \frac{\sin(x)}{x} \le 1 \qquad \text{pour } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

On connaît la limite de cos(x) quand x tend vers 0, donc $\frac{\sin(x)}{x}$ qui est " coincé " entre 1 et une quantité qui est aussi proche que l'on veut de 1 est donc lui même aussi proche que l'on veut de 1 et on peut donc conclure que $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1}$

IV <u>Etude graphique et numérique de la fonction définie par</u> $f(x)=\frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}$.





<u>Cette fonction n'a pas de limite en 0.</u>

V <u>Limite infinie en zéro</u>.

a) **la fonction f telle que** $f(x)=\frac{1}{x^2}$

Quand x devient " petit ", x^2 devient " encore plus petit " et son inverse devient " très grand ".

Peut-on, par exemple, obtenir $f(x) > 10^{12}$?

Le sens de variation de la fonction carré et de la fonction inverse permettent de répondre :

Il suffit que $|x| < 10^{-6}$ pour que $f(x) > 10^{12}$

On peut sans difficulté généraliser :

$\frac{1}{x^2}$ peut devenir plus grand que n'importe quel nombre positif A, choisi aussi grand que l'on veut, dès que x est assez proche de 0. On traduit cela $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty}$

b) **la fonction f telle que** $f(x)=\frac{1}{x}$

Cette fois, f(x) devient toujours " très grand " <u>en valeur absolue, mais avec le signe de x.</u>

Il est donc nécessaire de distinguer le cas x positif du cas x négatif.

$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}=+\infty}$ et $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{x}=-\infty}$

c) **On généralise aux inverses des fonctions de référence :**

$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=+\infty}$ ainsi que pour les <u>exposants pairs,</u> $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty}$

$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x^3}=+\infty}$ et $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{x^3}=-\infty}$ ainsi que pour les <u>exposants impairs</u>

$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty}$

Annexe 2 : Limites de racines d'une équation du second d°

On considère l'équation $a x^2 - 2x + 1 = 0$ ***dans laquelle a est un nombre réel.***

On se propose d'étudier le comportement des racines de cette équation quand a devient « très petit ».

On se limitera dans cette étude au cas où a est positif

1. **Approche graphique expérimentale.**

Soit la famille de fonctions définies par $f(x) = a x^2 - 2x + 1$.

Dans le module Y=,

Définissez dans Y1 la fonction correspondant à a = 1. Comment lit-on graphiquement les racines de l'équation proposée ?

Définissez dans Y2, Y3, Y4,...Y8 les fonctions correspondant à a = 0,5, 0,1, 0,05, 0,01, 0,005, 0,001, 0,0001. Comment lit-on graphiquement les racines de l'équation proposée ?

Vous préciserez les fenêtrages que vous avez choisis et vous compléterez par lecture graphique le tableau suivant :

a	f(x)=	plus petite racine de f(x)=0	plus grande racine de f(x)=0
1	Y1(x)=		
0,5	Y2(x)=		
0,1	Y3(x)=		
0,05	Y4(x)=		
0,01	Y5(x)=		
0,005	Y6(x)=		
0,001	Y7(x)=		
0,0001	Y8(x)=		

Que devient chaque racine quand a tend vers 0 ?

2. **Approche numérique.**

On se propose de calculer les racines pour les diverses valeurs de a.

Dans le module [♦][HOME] :

Résoudre l'équation $a x^2 - 2x + 1 = 0$ en utilisant la commande : **zéros(,x)**

Vous obtenez une liste de deux éléments, les deux racines de l'équation f(x)=0.

Stockez cette liste dans la variable l

Quelle est la plus petite des racines ? (a est toujours positif)

Définissez la fonction p de la variable a qui contient la plus petite racine.

Define p(a)=l[1]

Définissez la fonction g de la variable a qui contient la plus grande racine.

Define g(a)=l[2

Pour visualiser les valeurs des racines pour chaque valeur de a, on va utiliser le **module tableur** de la TI. On l'obtient par : APPS 6

- Dans la colonne c1 on met les valeurs de a.
- Dans la colonne c2 on met la plus petite racine par la commande : c2=p(c1)
- Dans la colonne c3 on met la plus petite racine par la commande : c3=g(c1)

a	plus petite racine de f(x)=0	plus grande racine de f(x)=0
1		
0,5		
0,1		
0,05		
0,01		
0,005		
0,001		
0,0001		

Que se passe-t-il lorsque l'on donne à a les valeurs 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}, 10^{-12}, 10^{-14} ?

Comment interpréter ce dernier résultat ?

Démontrer que la grande racine g(a) a pour limite $+\infty$ quand a tend vers 0 ?

En utilisant le produit des racines d'une équation du second degré, exprimer p(a) en fonction de g(a).

En déduire la limite de p(a) quand a tend vers 0

INGENIERIE 3
Les dérivées

Nous avons essayé de définir tout d'abord un certain nombre de principes globaux, élaborés en nous appuyant sur les résultats des observations menées en 1995-96 ainsi que sur la littérature didactique importante dans ce domaine. Ces principes sont les suivants :

1. Prendre en compte dans l'ingénierie le développement des dimensions « outil » et « objet » du concept de dérivée, les différents registres sémiotiques dans lesquels il s'exprime et se travaille.
   Nous voudrions sur ce point souligner que le concept de dérivée est, à travers la notion de fonction dérivée, avant tout un concept outil au niveau de la première S, au service de l'étude des fonctions, de la résolution de problèmes divers en particulier des problèmes d'étude de variation et d'optimisation. L'objet fonction dérivée et son traitement algébrique, par leur opérationalité en tant qu'outil, tendent ainsi à occulter l'objet dérivée dans son caractère local et à assurer une domination forte du registre symbolique algébrique sur les registres numériques et graphiques. Tout en prenant acte de cette prééminence de la dimension outil, pour éviter un enseignement par trop réducteur, il nous semble nécessaire, dans le projet d'ingénierie, de trouver l'occasion de faire vivre à plusieurs moments ce caractère local, sans sous-estimer le rôle que peuvent jouer dans la conceptualisation les registres autres qu'algébriques.

2. Prendre en compte les divers points de vue s'attachant à la notion de dérivée : point de vue géométrique, point de vue cinématique, point de vue numérique lié à l'approximation, point de vue algébrique, notamment.
   Conformément à l'esprit des programmes, il nous semble important de faire rencontrer aux élèves ces différents points de vue dans l'ingénierie, même s'il ne s'agit là que d'une première approche.

3. Prendre en compte la nécessaire reconstruction du concept de tangente.
   Quand débute l'enseignement de l'analyse, la tangente n'est pas un objet inconnu des élèves. Il a d'abord été rencontré avec la tangente au cercle et s'est doté alors de propriétés liées à cette situation particulière : la tangente est perpendiculaire au rayon, elle coupe le cercle en un point et ne le traverse pas. La tangente a donc des relations globales avec le cercle et la notion de « communauté de direction » en est absente. C.Castela (Castela, 1995) a bien montré les effets pernicieux de l'enseignement usuel qui soit, ignore le passé des élèves, soit laisse croire que la tangente de l'analyse s'inscrit dans la pure continuité de la tangente au cercle, mais aussi la possibilité, à un coût raisonnable, de prendre en charge cette reconstruction.

4. Prendre en compte les compétences algébriques limitées des élèves.
   Le travail en analyse s'appuie sur les compétences algébriques des élèves. Elles sont, nous le savons, encore très limitées quand débute l'enseignement des dérivées, en dépit des reprises de début d'année. Les observations rapportées au chapitre précédent montrent clairement que le fait de pouvoir déléguer des calculs à la machine ne permet de contourner ces difficultés. Il nous semble important de les prendre en compte en limitant la complexité algébrique des tâches lors des séances d'introduction des dérivées.

5. En ce qui concerne l'instrumentation de la machine, il nous semble important d'utiliser les potentialités offertes tant en calcul formel, par l'application HOME qu'au niveau

graphique.

Dans le module graphique, le menu F5 permet d'obtenir de façon approchée des maximums et minimums, des dérivées, des équations de tangentes. Il est ainsi possible de rendre les élèves sensibles au fait que, même si la machine est en mode exact, elle ne fonctionne en calcul exact que dans l'application HOME. Lorsqu'ils utilisent les fonctionnalités de calcul formel, il nous semble important de les sensibiliser au fait que reste à leur charge le contrôle du champ de validité des résultats obtenus, dans le cadre de fonctions faisant intervenir des quotients, racines carrées et valeurs absolues.

Il en découle un certain nombre de choix globaux, les principaux étant les suivants :

En ce qui concerne l'introduction des dérivées :

- En premier lieu, nous écartons une entrée " boite noire " souvent associée dans la littérature à l'utilisation le logiciels de calcul symbolique car il nous semble important et possible de jouer un jeu qui ne soit pas uniquement formel dans l'introduction de la dérivée, qui tend déjà trop facilement à se réduire, pour les élèves, à cette dimension. En revanche, nous ferons intervenir ce type de rapport à la machine, dans la situation de mise en place des règles de dérivation, c'est à dire de l'algèbre des dérivées (chapitre III). Dans cette situation, les productions de la machine, seront prises comme des données que l'élève aura à interpréter et modéliser pour conjecturer puis tester les règles conduisant à la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables, ainsi que leur champ de validité, avant d'en chercher des raisons.
- Nous écartons également, en dépit de son intérêt évident, une entrée cinématique par les vitesses. Le concept de vitesse instantanée en effet nous semble un concept qui n'est ni suffisamment préconstruit chez les élèves, ni suffisamment préparé par le travail en physique qui ne porte à ce niveau là que sur des vitesses moyennes sans faire de distinction claire entre " vitesse " et " vitesse moyenne ", pour pouvoir servir de base solide à l'introduction des dérivées. L'analyse des observations de la première année a bien mis en évidence les difficultés induites par cette stratégie, confirmant sur ce plan les résultats de diverses recherches didactiques (cf. par exemple (Schneider, 1989)). En revanche, dans un second temps, lorsque les concepts de dérivée et de tangente sont suffisamment installés, les élèves peuvent passer de la notion de vitesse moyenne qu'ils connaissent, à celle de vitesse instantanée et ainsi de mettre en place le point de vue cinématique sur la dérivée. Ceci sera aussi l'occasion de revenir sur le sens local de la dérivée qui tend à disparaître derrière l'opérationalité de l'outil : fonction dérivée.
- Nous choisissons une entrée géométrique, en essayant d'intégrer assez rapidement deux points de vue complémentaires sur la dérivée :

  a) le nombre dérivé comme limite des coefficients directeurs des sécantes pivotant autour d'un point,

  b) le nombre dérivé comme coefficient directeur d'une droite avec laquelle la représentation graphique de la fonction tend à se confondre par zooms successifs, ce qui revient à voir le nombre dérivé comme coefficient de linéarité dans l'approximation affine de la fonction.

Dans une telle approche, qu'il s'agisse du point de vue a) ou b), il nous semble important de problématiser la définition et l'unicité de la tangente et de ne pas sombrer dans le travers de nombreux textes : " par zooms successifs, on a l'air de se stabiliser sur une droite de coefficient directeur n et, en gros, comme n est entier, c'est forcément n. ". Ceci ne peut se

faire qu'en montrant que, parmi les droites passant par un point donné, c'est la seule fournissant une approximation au premier ordre.

La présence dans la TI92 du logiciel de géométrie Cabri-géomètre nous a incité à partir du point de vue a) bien que le point de vue b) puisse paraître a priori le plus facile à mettre en scène avec des calculatrices graphiques (Kuntz, 1997). En effet, ce logiciel va nous permettre de gérer très commodément l'interaction numérique / géométrique dans la phase d'exploration et de conjecture, en permettant d'avoir en permanence à l'affichage le coefficient directeur des sécantes considérées. Grâce à ce dispositif, nous pensons limiter les effets de l'obstacle géométrique en jeu dans ce type d'approche du nombre dérivé (Schneider, 1991). D'autre part, le coefficient directeur des sécantes conduit naturellement à l'expression du nombre dérivé comme limite du quotient des accroissements qui, on le sait, est plus facilement opérationalisable par les élèves du secondaire que l'expression en ligne de l'approximation à l'ordre 1. Le point de vue b) nous semble, quant à lui, conduire plus naturellement a priori soit à cette expression en ligne de l'approximation et au problème du contrôle du reste, soit à la notion de dérivée symétrique, dans la mesure où lorsque par zooms successifs on a rendu « droit » le graphe de la fonction au voisinage d'un point, ce point lui-même n'est plus visible, ni même souvent atteignable par des commandes comme *Trace*, vue la discrétisation des tracés ; la droite trouvée est alors plus naturellement et précisément caractérisée en prenant les coordonnées de points éloignés du tracé. Nous faisons donc l'hypothèse que le choix du point de vue a) facilitera la gestion du contrôle théorique de l'ordre d'approximation que nous souhaitons mettre en place.

- Enfin, dès cette introduction, nous commencerons à retravailler les conceptions de la notion de tangente pour montrer que l'on ne peut pas importer en bloc en analyse les conceptions issues de la tangente au cercle.
- L'expérience de l'année dernière nous à montré que la séance d'introduction, quels que soient les choix effectués, est difficile et que le fait de pouvoir déléguer certains calculs à la calculatrice ne change pas fondamentalement sa complexité. Il nous semble donc important :

  - de veiller très soigneusement à garder une complexité raisonnable aux calculs à effectuer,

  - d'être très attentifs au nombre de variables et paramètres figurant dans les expressions et au jeu : valeurs particulières, valeurs littérales,

  - de permettre aux calculs dans leur organisation de prendre sens dans un travail à la main avant d'être délégués à la machine, pour des situations un peu plus complexes, partiellement ou complètement.
- De plus, dans cette séance, le degré d'autonomie laissé à l'élève et l'équilibre travail élève / travail professeur n'est pas facile à gérer. Il faut donner le maximum d'autonomie à l'élève, ne pas le limiter à des tâches d'exécution. Il faut que son activité soit soigneusement problématisée, il faut s'assurer régulièrement que le fil global n'est pas perdu. pour cela, l'intervention de l'enseignant est nécessaire sous de multiples facettes (dévolutions successives, aides, maintien de la cohérence globale, bilans et institutionnalisations locales) mais il ne faut pas que ce soit le seul acteur.

Au delà de cette introduction, nous essaierons de respecter les principes à la base de cette partie de l'ingénierie, en prenant en charge la rencontre avec les différents types de problèmes où, à ce niveau d'enseignement, la dérivée est susceptible d'apparaître comme outil, les

différents points de vue que l'on peut développer à son propos, en revenant à plusieurs reprises sur le sens local de la notion de nombre dérivé et en associant étroitement dans ces reprises le travail algébrique et graphique, conformément au schéma figurant sur la page suivante.

Le projet est ainsi construit autour de sept phases :
1. introduction de la notion de nombre dérivé
2. fonction dérivée et dérivées des fonctions de référence
3. dérivation formelle à la calculatrice et algébrisation du calcul des dérivées
4. dérivées et sens de variation
5. la dérivée au service de l'étude des fonctions et de la résolution de problèmes d'optimisation
6. approche cinématique de la notion de dérivée : la notion de vitesse instantanée
7. réinvestissement dans une situation de recherche : un problème de raccords.

Dans ce chapitre, nous nous centrons sur les phases 1 et 2. Pour chacune de ces phases, une situation est présentée. Les phase 3 à 7 sont développées dans le chapitre suivant. Des ingénieries sont présentées sur les phases 3, 6 et 7. Concernant la phase 5, une situation (la cuve) a été présentée au chapitre précédent, avec une observation, des propositions de reconstruction, et des éléments d'observation de la séance reconstruite. Le lecteur trouvera d'autre part en annexe, comme pour les limites, le texte distribué aux élèves à l'issue des premières séances.

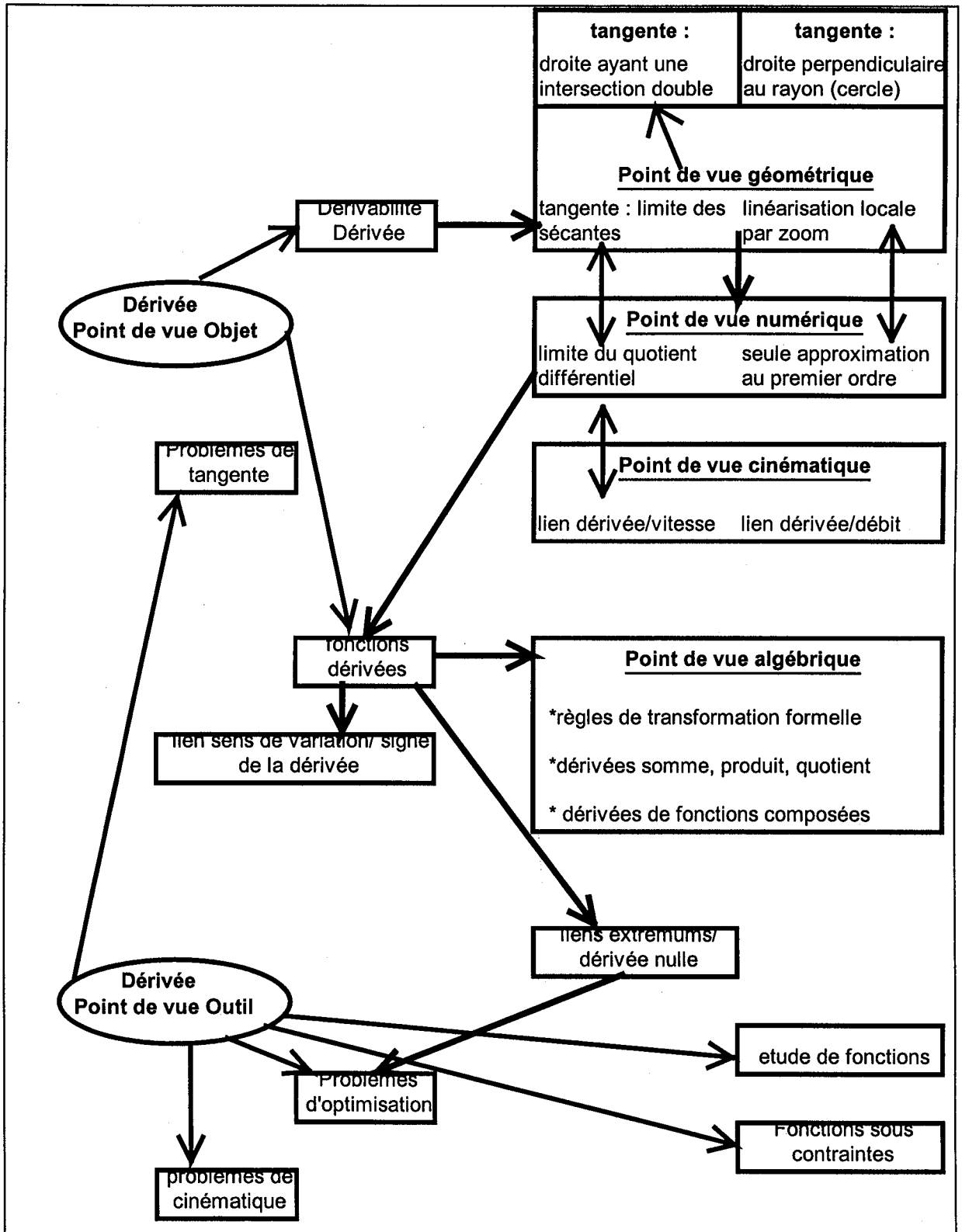


Schéma : L'organisation des rapports entre les dimensions outil et objet de la notion de dérivée et les différents points de vue dans le projet d'ingénierie

SITUATION 1 : introduction de la notion de dérivée

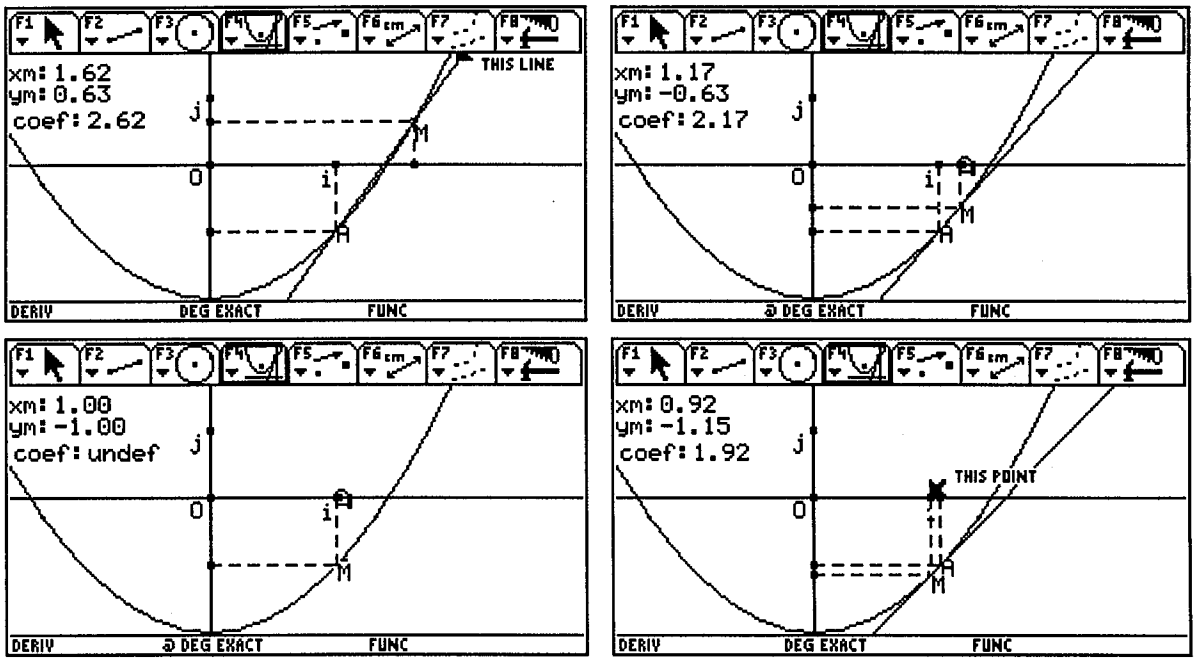
Comme nous l'avons précisé plus haut, l'introduction de la notion de nombre dérivé s'effectue à partir d'une approche géométrique, en utilisant l'application de géométrie et un programme qui permet d'explorer le comportement des coefficients directeurs des sécantes (AM) à une courbe donnée lorsque M se rapproche de A sur la courbe. Le problème posé est celui de l'interprétation et de la modélisation de phénomènes numérico-graphiques produits sur la calculatrice.

La séance d'introduction est elle-même conçue en trois phases, au cours desquelles le même problème est abordé avec des fonctions et/ou des points différents, en augmentant progressivement l'autonomie de l'élève. Elle est prévue pour une durée de deux heures et a été préparée par un travail sur les équations de droites. Après avoir présenté le scénario, nous donnons des éléments sur le déroulement de sa réalisation à Chartres et dressons un bilan de cette première expérimentation.

A. Scénario

Phase 1 :

On s'intéresse dans cette phase à la fonction $x \mapsto f(x) = x^2 - 2$ au voisinage du point A d'abscisse 1. La gestion est collective. En utilisant le fichier Cabri construit , l'enseignant déplace le point M sur la parabole et donc la sécante (AM). Les coordonnées de M et le coefficient directeur de la sécante s'affichent dans le coin haut - gauche de l'écran.



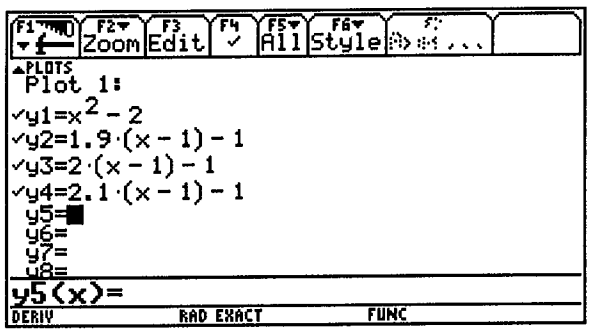
La question posée aux élèves est la suivante :

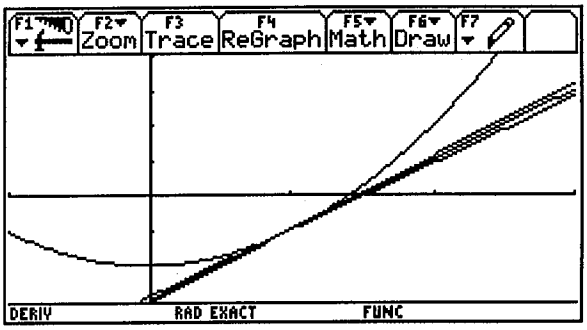
« Que se passe-t-il quand M se rapproche de A ? »

On notera que lorsque M et A sont confondus, le logiciel renvoie la valeur *" undef "* pour le coefficient directeur. On peut s'attendre à ce que les élèves, dans cette situation, identifient le mouvement géométrique de la sécante et conjecturent au vu de l'évolution des coefficients directeurs que la sécante tend vers la droite passant par A de coefficient directeur 2, vu le caractère attractif de cette valeur entière. On peut s'attendre éventuellement aussi à voir

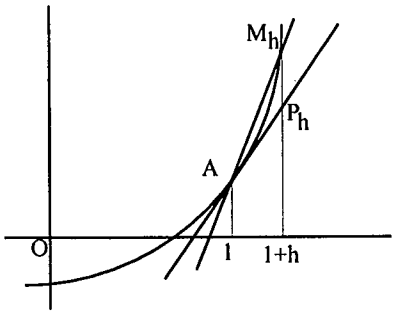
apparaître dès cette phase le mot « tangente » et, si c'est le cas, on demandera à quelles caractéristiques la tangente est identifiée.

L'enseignant va alors utiliser l'application graphique pour problématiser ce " 2 " trop facilement obtenu. Dans l'application Y = , ont été rentrées préalablement la fonction ainsi que les droites passant par A de coefficients directeurs respectifs : 1,9 - 2 - 2,1. Pour faciliter l'interprétation, les équations de ces sécantes ne sont pas réduites mais laissées sous la forme $y_i = y_A + m\,(x - x_A)$. Au tracé, toutes les trois collent à la parabole. Cette constatation permettra à l'enseignant de poser la question de la légitimité du choix de la valeur 2 parmi les valeurs voisines.





Nous faisons l'hypothèse que, dans cette situation, les élèves, habitués à la manipulation graphique de la machine, vont proposer de faire des zooms, en pensant qu'ils permettront de faire apparaître la droite de coefficient directeur 2 comme celle collant le mieux à la courbe. Le phénomène graphique résistant bien à des zooms effectués autour du point A, le problème devrait rester entier, les zooms successifs permettant cependant une première articulation graphique des points de vue a) et b) cités plus haut. Nous faisons l'hypothèse que l'échec de l'exploration va aboutir à la problématisation souhaitée du choix de la valeur 2 et faire ressentir la nécessité de dépasser des critères purement perceptifs pour analyser et différencier les proximités droite / parabole. En revanche, il nous semble illusoire de penser que les élèves de ce niveau peuvent découvrir, en l'espace d'une séance, par eux-mêmes, une technique permettant de dépasser ces critères perceptifs. C'est pourquoi, dans le scénario, une fois la question bien posée, nous laissons cette partie à la charge de l'enseignant : c'est lui qui proposera d'étudier l'écart $\overline{P_hM_h}$ pour M_h point de la courbe et P_h point de la tangente supposés de même abscisse : 1+h, puis de comparer avec les valeurs obtenues en prenant P_h cette fois sur l'une des deux autres droites.



Il nous semble raisonnable ici de mettre en place collectivement le premier calcul à effectuer, vu la complexité formelle des expressions à manipuler : l'enseignant introduit donc l'accroissement h, les notations M_h et P_h et fait évaluer $\overline{P_hM_h} = f(1 + h) - [\,f(1) + 2h]$

Le calcul est piloté par les élèves, après précision collective du sens de f(1+h).

Ce calcul n'est pas compliqué en lui-même et comporte une seule variable h. On arrive ainsi à : $h^2 + 2h - 1 + 1 - 2h = h^2$

On peut ensuite partager la classe en deux groupes, chacun ayant en charge d'adapter le calcul précédent à l'une des deux autres droites, ce qui permet une appropriation individuelle de la démarche collective. On arrive ainsi aux expressions :

Coefficient directeur	$\overline{P_hM_h}$
1,9	$h^2 - \frac{h}{10}$
2	h^2
2,1	$h^2 + \frac{h}{10}$

qui tendent toutes trois vers 0 lorsque h tend vers 0, mais qui sont différentiables, compte-tenu du travail sur la négligeabilité mené dans l'initiation aux limites, par la vitesse à laquelle elles tendent vers 0. Nous faisons l'hypothèse que cette différenciation est ici tout à fait accessible et va conduire à la conclusion suivante :

« la différence tend plus vite vers 0 pour la droite de coefficient directeur 2, ou reformulé autrement :

$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{P_hM_h}}{h} = 0$ pour m = 2 mais pas pour 1,9 et 2,1,

$\overline{P_hM_h}$ est négligeable devant h pour m = 2 »

La valeur 2 est à ce moment singularisée mais il reste à montrer qu'elle est la seule à posséder cette propriété là. Le calcul fait nécessairement cette fois intervenir un paramètre mais il s'agit de la reproduction d'un calcul déjà effectué à trois reprises avec des valeurs particulières. Il peut se faire collectivement, piloté par les élèves et toujours à la main.

$\overline{P_hM_h} = f(1 + h) - [f(1) + m\,h]$

$\overline{P_hM_h} = h^2 + h(2 - m)$

$\frac{\overline{P_hM_h}}{h} = h + 2 - m$ donc $\overline{P_hM_h}$ est négligeable devant h pour m = 2 et seulement pour m = 2.

La valeur 2 est maintenant complètement caractérisée. L'enseignant peut alors récapituler l'ensemble de la démarche et institutionnaliser le résultat local obtenu, introduisant à cette occasion le terme de tangente, s'il n'est pas apparu spontanément.

Cette première phase se termine par le lien effectué avec la tangente " ancienne ", en cherchant l'intersection de la droite avec la parabole. Là encore, l'exemple numérique est choisi pour que le calcul ne présente pas de difficulté puisque l'on aboutit à une identité remarquable :

$x^2 - 2 = 2(x - 1) - 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$

La tangente apparaît donc comme la droite passant par A qui a une intersection double en ce point avec la courbe. Nous faisons l'hypothèse que, pour les élèves de la classe expérimentale

qui ont justement eu à travailler dans un devoir maison donné au premier trimestre sur les intersections de paraboles avec des droites, le problème de l'articulation avec ce qu'ils avaient à l'époque dénommé tangente à la parabole par analogie avec la tangente au cercle ne sera pas vécu comme un problème artificiel.

Phase 2 :

Dans cette phase, il s'agit de reprendre intégralement la même démarche avec cette fois la fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{x^3 - 6x}{4}$ au point d'abscisse 2.

Pour cette adaptation à une nouvelle fonction, on va demander aux élèves de piloter collectivement la démarche, les différentes étapes du travail étant au fur et à mesure notées au tableau. L'exemple choisi a aussi pour fonction de faire rencontrer un cas où la tangente à une courbe recoupe cette courbe en un point autre que le point de tangence.

La question posée est la suivante : on cherche à savoir si ce qu'on a trouvé avec la parabole est encore ici valable et si les mêmes méthodes marchent.

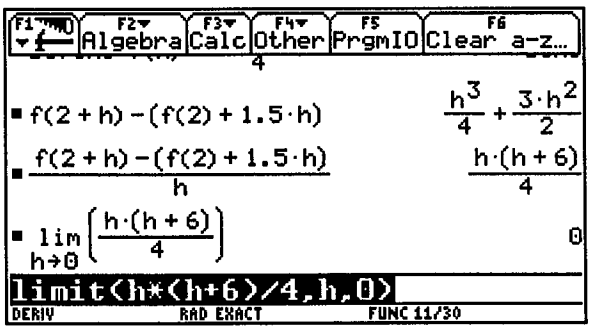
- Le coefficient directeur de la tangente n'est cette fois plus entier (il vaut 1,5) et la tangente recoupe la courbe.
- Les calculs sont faits maintenant à la machine, par l'enseignant, piloté par les élèves. Soulignons que quand M = A la machine renvoie cette fois comme coefficient directeur 1.0, ce qui peut être déroutant.

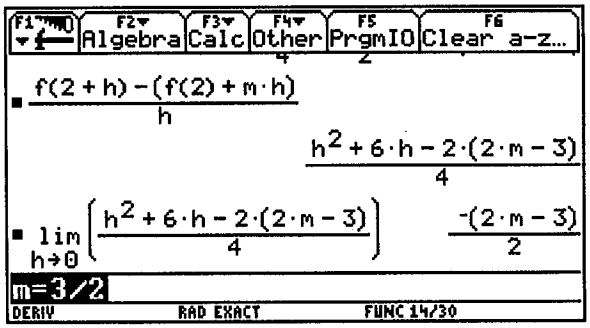
  Il nous semble important d'écrire le début des calculs sous forme littérale au tableau :

  $$\overline{P_hM_h} = f(2 + h) - [f(2) + 1.5\,h]$$

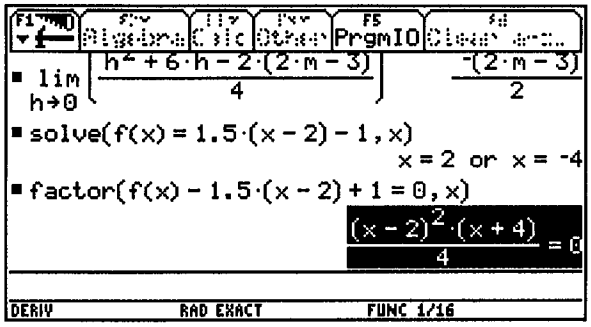
  avant de les entrer en machine et de noter également au tableau les résultats obtenus.

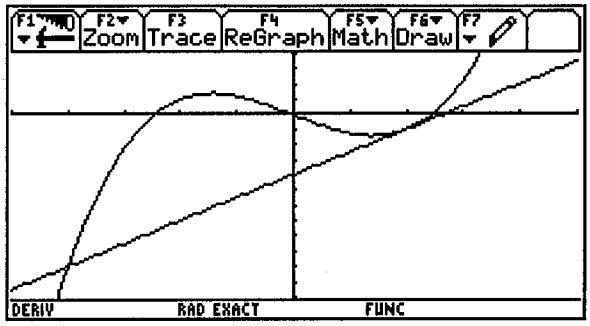
  Dans ce cas, $\dfrac{\overline{P_hM_h}}{h} = \dfrac{h^2}{4} + \dfrac{3h}{2}$ et on retrouve bien la négligeabilité ; dans le cas d'une coefficient directeur m, s'y rajoute le terme : $m - \dfrac{3}{2}$, ce qui prouve bien l'unicité.





- Le lien avec le point de vue algébrique se fait également à la machine :- résolution machine de l'équation :





Si la recherche des points d'intersection par la commande *Solve* ne permet pas de distinguer les racines, l'utilisation de la commande *Factor*, elle, permet bien de différencier les deux racines trouvées.

Il est bien sûr prévu de pointer dans la synthèse sur ce nouveau cas le fait que, contrairement à ce que l'on avait constaté pour la parabole, les tangentes à cette cubique peuvent la recouper.

Phase 3 :

De façon autonome, par binômes, les élèves ont dans cette phase à traiter eux-mêmes pour la même fonction le cas x = 0. Nous faisons l'hypothèse que l'ensemble de la démarche doit leur être alors accessible. Ce nouveau cas les confrontera de plus à une situation d'inflexion, permettant de mettre en débat la conviction sans doute forte pour eux que la tangente ne saurait en aucun cas recouper la courbe au point de contact.

Phase 4 :

La phase 4 qui conclut cette séance est celle où s'effectue la définition de la dérivabilité de f au point d'abscisse a , en mettant bien en évidence l'équivalence, pour un m quelconque, des deux formulations :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-(f(a)+m\,h)}{h}=0 \text{ et } \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=m$$

qui permet, dans la pratique, en recherchant directement la limite du quotient, de simplifier le travail de conjecture et de preuve qui a été effectué sur les trois premiers exemples traités.

B. Déroulement

Ce scénario d'introduction a été expérimenté à Chartres, le 31 janvier, sur deux heures : une séance collective d'une heure, suivie de deux heures de travail en demi-groupes.

Comme prévu, confrontés à l'interprétation du phénomène visuel montré à la calculatrice, les élèves conjecturent que lorsque le point M se rapproche de A, le coefficient directeur dont la valeur est affichée se rapproche de 2 et en concluent sans le moindre doute que la limite est 2. Aucun ne parle cependant de tangente. Il semble bien ici que l'affichage dynamique de la valeur du coefficient directeur en haut de l'écran attire suffisamment l'attention des élèves pour constituer une situation où les cadres numériques et géométriques jouent de façon équilibrée et interactive, dans le processus de limite.

L'enseignante fait formuler l'équation de cette droite et la laisse volontairement sous la forme : y = 2(x-1)+f(1) pour favoriser l'interprétation des équations introduites dans l'éditeur de fonctions Y=. Tout cette phase, gérée collectivement comme prévu, ne pose pas de difficulté. Les élèves semblent surpris ensuite par la proximité des trois droites tracées et surtout le fait que les zooms effectués ne permettent pas de singulariser clairement la droite de

coefficient directeur 2. Et, comme nous l'avions anticipé, ils n'ont pas a priori d'idée sur la manière de comparer la proximité respective des trois droites tracées et de la courbe. C'est l'enseignante qui propose donc d'étudier la valeur de $\overline{P_hM_h}$ et introduit les notations, comme prévu. L'expression de la valeur algébrique de $\overline{P_hM_h}$ dans le cas de la droite de coefficient directeur 2 est produite collectivement, sous la dictée d'un élève, après une très courte phase de travail individuel. Le calcul et les différentes substitutions sont soigneusement explicités et détaillés. L'enseignante demande ce que devient cette expression lorsque h tend vers 0. Les réponses produites sont diverses : « elle devient nulle », « elle est nulle », « elle tend vers 0 ». L'enseignante les reprend et fait reformuler et écrire dans le langage usuel des limites, en soulignant que la fonction de h considérée ici est une fonction de référence. La classe se partage ensuite en deux groupes pour traiter, à la main toujours, les deux autres cas. Ce calcul soigneusement préparé : l'enseignante a fait préciser où allait se situer le changement dans l'expression formelle, est rapidement exécuté par la grande majorité des élèves. Ils semblent déçus de constater que toutes les expressions ont la même limite 0, ce qui était pourtant prévisible, pensant sans doute que la suggestion de l'enseignante devait mener directement au résultat. Les résultats sont écrits au tableau dans un tableau à double entrée, l'enseignante faisant soigneusement justifier les calculs de limites, ce qui visiblement ne pose pas de problème à l'élève interrogé :

« Si h tend vers 0, h^2 a pour limite 0 et h aussi, donc h/10 aussi donc la limite de h^2+h/10 est 0 »

Les trois limites nulles étant établies, l'enseignante demande ce que l'on pourrait faire, quelle question on pourrait se poser. Elle obtient cette fois immédiatement une réponse : « On pourrait chercher laquelle va le plus vite ». L'enseignante reformule aussitôt cette suggestion en termes de négligeabilité, faisant appel à la mémoire de la classe. Peut-être aurait-on pu laisser ici davantage l'initiative aux élèves, un bon nombre se souvenant visiblement de la notion et plusieurs se proposant pour rappeler sa définition. Une colonne est rajoutée au tableau initial pour noter les limites des quotients $\overline{P_hM_h}/h$ et les limites sont trouvées et justifiées sans aucune difficulté. L'enseignante demande aux élèves de conclure, fait noter cette conclusion sur le cahier à la suite du tableau, avant de relancer le problème, comme prévu, en posant la question : « La droite de coefficient directeur 2 est-elle la seule à posséder cette propriété ? »

Un élève propose aussitôt de refaire le calcul pour x, précisant ensuite sur demande qu'il s'agit du coefficient directeur. L'enseignante suggère d'utiliser la lettre m pour éviter les confusions (les élèves visiblement préféreraient la lettre a) et les laisse faire le calcul. Visiblement, pour la plupart des élèves, la structure de l'expression est maintenant bien comprise et les adaptations sont faites rapidement. Un élève demande cependant si f(1+h) est bien égal à h^2+2h-1 et l'enseignante redétaille collectivement la substitution. On arrive ainsi pour le quotient à l'expression h+2-m et les élèves concluent rapidement que 2 est bien la seule valeur possible. L'enseignante fait récapituler le raisonnement et noter le résultat obtenu, avant de conclure : « Donc cette droite joue un rôle bien particulier par rapport à la parabole au point d'abscisse 1. »

Un élève demande : « C'est ça la dérivée ? ». L'enseignante lui demande de préciser et l'on entend, de ci de là fuser le mot « tangente ». Elle en profite aussitôt pour leur demander à quelle occasion ils ont déjà entendu parler de tangente. Les élèves parlent de la tangente au cercle qui est perpendiculaire au rayon, de la tangente en trigonométrie. Faisant appel à la mémoire de la classe, elle leur demande s'ils ne se souviennent pas d'un travail effectué cette

année. Des élèves se souviennent alors d'un devoir à la maison sur des positions relatives de fonctions « où les courbes se touchaient en un point ». L'enseignante fait le lien avec la situation présente en revenant à la visualisation géométrique et fait rappeler la stratégie suivie dans le problème : écriture du système associé à la recherche de l'intersection, recherche des solutions par substitution et obtention d'une racine double dans le cas de la tangente correspondant à deux points d'intersection confondus. Les élèves prennent ensuite en charge le calcul dans le cas de la parabole P et de D2. Cela va très vite.

L'enseignante récapitule alors l'ensemble du travail effectué, annonce que ce coefficient directeur de la tangente va jouer un rôle très particulier et que, dans la séance qui suit; en demi-groupes, ils vont refaire la même chose avec d'autres fonctions.

Pour la séance qui suit, en demi-groupes, nous suivrons plus précisément deux élèves : Arnauld et Marianne, dont les calculatrices étaient reliées à des ordinateurs portables et l'écran à une tablette rétroprojetable, suivant le dispositif classique dans l'expérimentation.

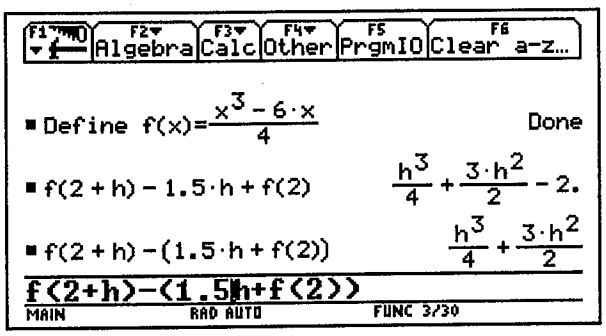
L'enseignante lance la séance en rappelant le point où ils sont arrivés puis en annonçant qu'on va faire un travail analogue avec la fonction f définie par : $x \mapsto f(x) = \frac{x^3 - 6x}{4}$ au voisinage du point A d'abscisse 2. Elle fait évaluer f(2) et écrit au tableau les coordonnées de A sous la forme A (2 f(2)) suivies de f(2) = -1.

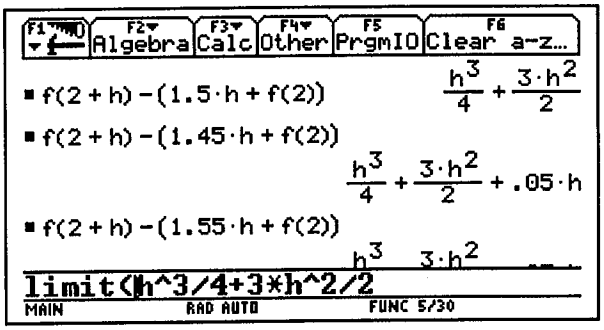
Elle passe ensuite, comme prévu, dans l'application géométrie et déplace M sur la courbe en le rapprochant de A. Le coefficient directeur se rapproche de la valeur 1,5 mais cette fois quand les deux points semblent confondus, la valeur bizarrement devient 1. Ceci perturbe certains élèves qui pensent que c'est la droite de coefficient directeur 1 qui sera donc la plus proche de la courbe au voisinage de A. L'enseignante fait afficher une droite de coefficient directeur 1 en bougeant le point M et la conjecture est invalidée. Elle passe ensuite à l'éditeur d'équations Y= dans lequel elle a préalablement rentré outre la fonction f, les équations des droites de coefficient directeur 1.5, 1.45 et 1.55. Cette fois les élèves ne sont pas étonnés du résultat : « c'est comme la première fois », et plusieurs suggèrent de faire les limites comme pour la fonction précédente. L'enseignante fait produire collectivement les coordonnées de M_h (2+h,f(2+h)) et P_h(2+h, 1.5h+f(2)), puis leur demande de prendre chacun leur machine et de définir la fonction f dans le module HOME.

Elle conseille aux élèves de libérer les variables avant de commencer le travail. Arnaud va dans VAR-LINK pour vérifier. Marianne aide son voisin Nicolas qui a libéré les variables par F1-6 mais après avoir défini f et qui ne comprend pas ce qui lui arrive.

L'enseignante se fait ensuite dicter les calculs à faire à la machine par les élèves, chacun les faisant parallèlement sur sa proche machine.

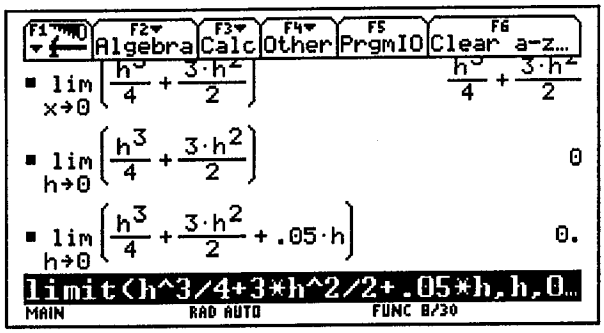
Arnauld et Marianne ne rencontrent pas de difficultés. Nous reproduisons ci-après les premiers écrans d'Arnaud. Ceux de Marianne sont quasiment identiques, mais sans l'erreur de parenthésage présente dans la première entrée d'Arnaud et immédiatement rectifiée.

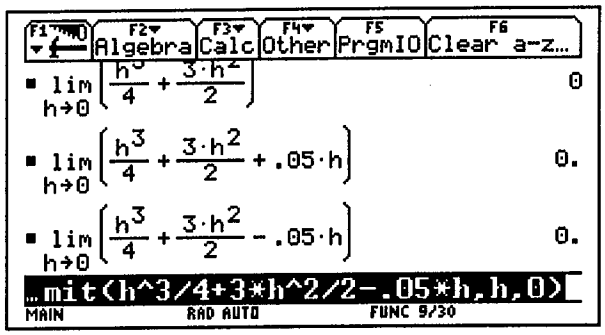




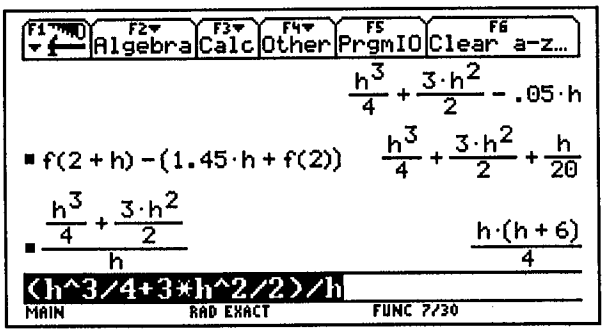
L'enseignante note dans un tableau comme précédemment les différentes expressions trouvées et demande les limites lorsque h tend vers 0. Cela ne pose pas de difficulté et les formulations des élèves sont claires quand il s'agit de justifier. L'enseignante leur propose d'utiliser ensuite la commande *limit* pour obtenir ces mêmes résultats, pour vérifier qu'ils connaissent bien la syntaxe.

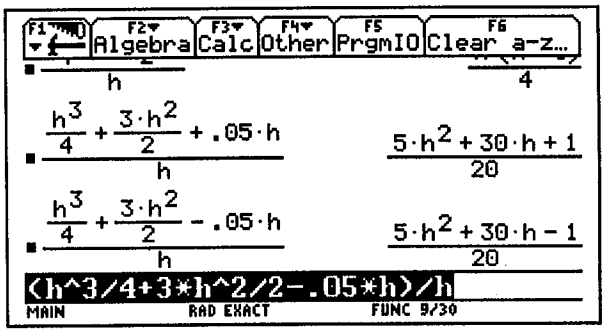
Arnaud le fait :

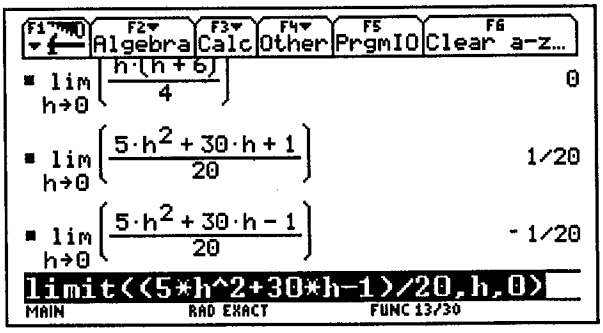




et change ensuite le MODE AUTO en EXACT. L'enseignante demande ensuite que faire. Nicolas explique qu'il faut regarder si c'est négligeable par rapport à h. Les élèves le font individuellement. Arnaud et Marianne, comme beaucoup d'élèves, font tous les calculs à la machine, comme en témoignent les écrans suivants :



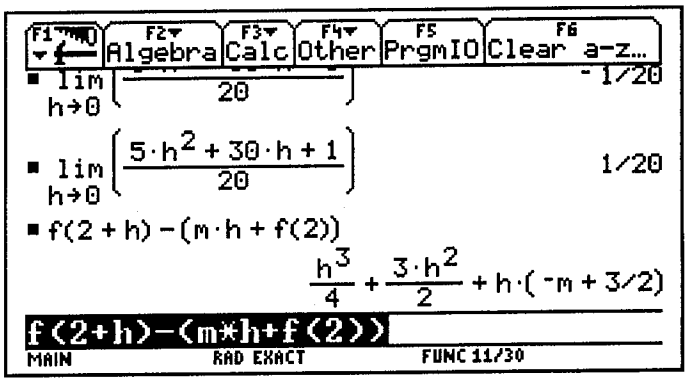




L'enseignante se fait ensuite dicter les résultats obtenus, en soulignant qu'ils pouvaient être obtenus facilement à la main comme les précédents et en faisant remarquer que la machine

réduit automatiquement les expressions au même dénominateur et, dans certains cas, les factorise.

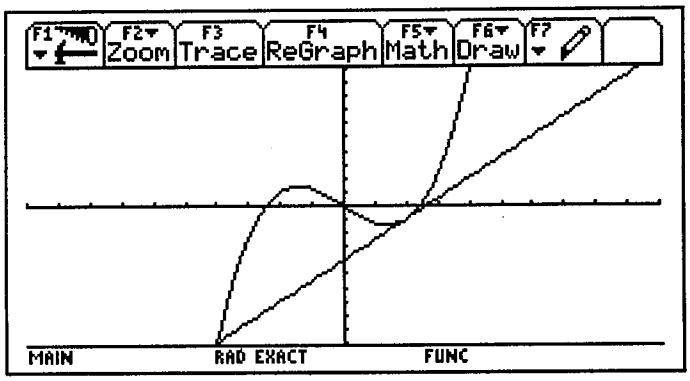
Les élèves concluent ensuite sans difficulté et certains suggèrent ensuite de remplacer m par 1.5 pour voir si c'est bien la seule droite, comme dans le cas précédent. L'enseignante le fait en allant rechercher l'expression de $\overline{P_hM_h}$ dans les premiers écrans et en substituant m à la valeur 1.55. Marianne le fait sur sa propre machine en retapant l'expression .



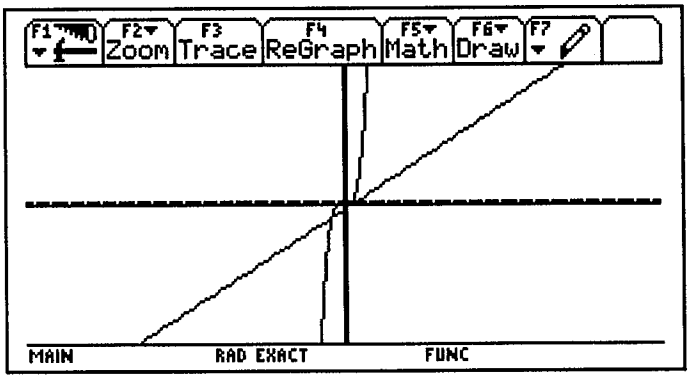
La suite du raisonnement est faite collectivement, sans recourir cette fois à la machine et sans difficulté. Les élèves concluent et notent.

L'enseignante revient ensuite dans Y=, désélectionne les deux droites auxiliaires et leur demande d'étudier plus globalement les positions de la droite et de la courbe.

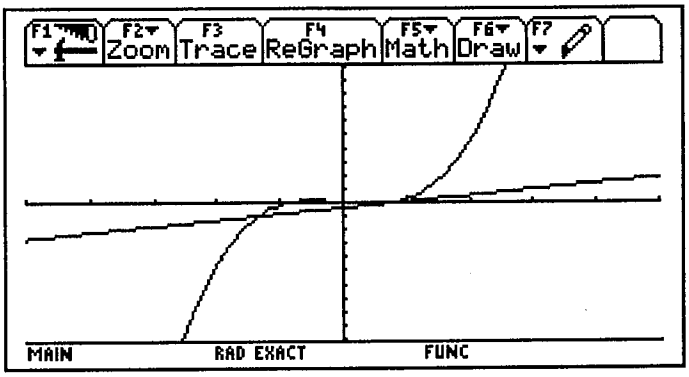
Arnaud fait tracer les deux courbes en *ZoomDec*, puis, il change de fenêtre, choisissant [-10,10]x[-20,20] :



Marianne, elle, choisit d'abord cette fenêtre puis passe à [-100,100]x[-100,100] :

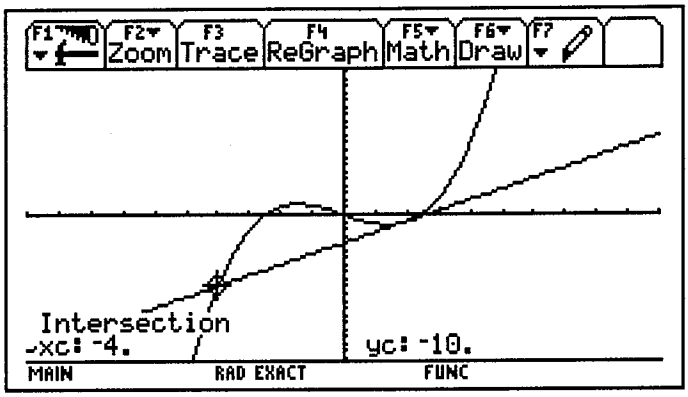


puis réduit sa fenêtre :



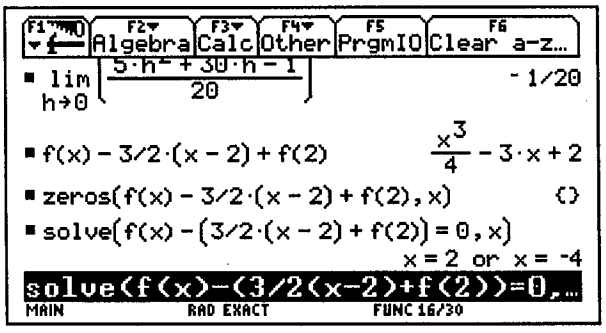
Très vite, l'enseignante de son côté, passe dans la fenêtre standard puis agrandit jusqu'à avoir tous les points d'intersection de la courbe et de la tangente visibles et demande aux élèves d'interpréter les tracés. Les élèves disent d'abord massivement que la droite est tangente à la courbe, ensuite les formulations divergent : « elle n'est plus tangente », « autour de A, elle est tangente », « elle coupe deux fois ».

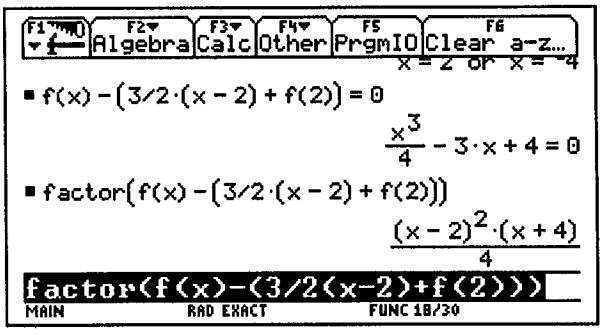
Arnaud avec la commande *Intersection* cherche à déterminer les coordonnées du second point d'intersection.



Marianne suit la phase collective. Des élèves disent que la courbe recoupe en -4 et l'enseignante demande comment le vérifier formellement. Les élèves proposent d'utiliser les commandes *Trace, Zoom, Intersection, Zeros*. L'enseignante insiste sur la vérification formelle demandée, se fait dicter le système qu'elle écrit au tableau, puis demande comment résoudre dans HOME avec la machine. Un élève propose de faire la différence des deux expressions de y et de résoudre en x. L'enseignante entre cette différence puis se fait dicter la suite des manipulations à effectuer, arrivant ainsi aux deux racines 2 et -4.

Arnaud, de son côté a utilisé d'abord la commande *Zeros*, puis ensuite la commande *Solve*.





Marianne et Nicolas réagissent au fait qu'il n'y ait que deux racines alors que le polynôme est de degré 3 et disent qu'il doit y avoir une racine double et que ce doit être 2. L'enseignante

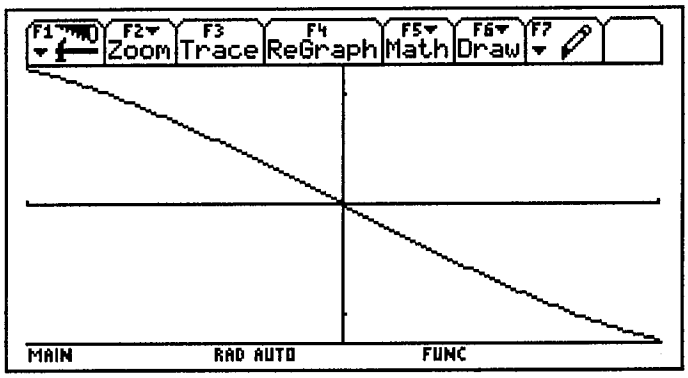
demande comment vérifier et Nicolas propose de factoriser. L'enseignante le fait, Arnaud et Marianne aussi sur leur propre calculatrice et l'expression obtenue satisfait tout le monde.

L'enseignante commente cette situation, en soulignant la différence avec la parabole et en insistant sur le fait que la propriété de tangence est une propriété locale : une droite est tangente en un point.

Elle leur demande ensuite d'étudier seuls, comme prévu, le cas x=0 pour cette même fonction, mais comme il reste moins de 10mn, elle va reprendre la main très vite.

Arnaud calcule f(0) puis va dans GRAPH.

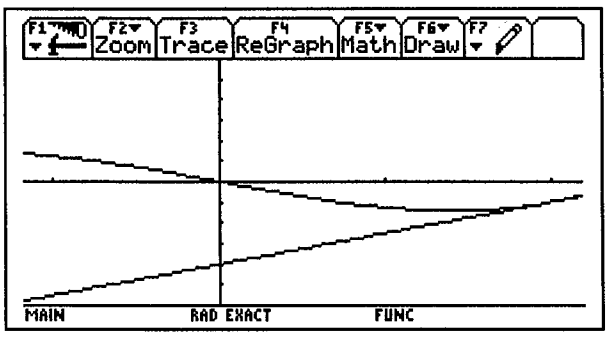
L'enseignante demande quel intervalle choisir. Un élève propose [-1,1] et elle fait un *ZoomFit*, obtenant l'écran suivant :

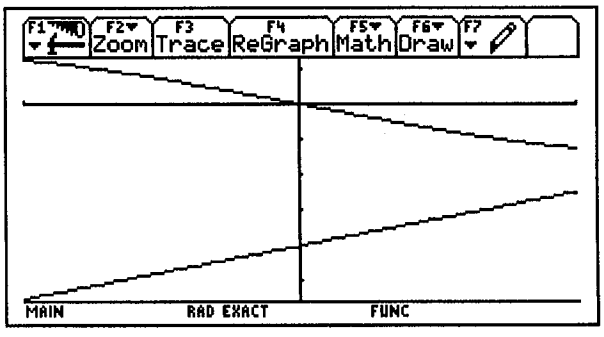


Un élève fait remarquer que la fonction est comme impaire. L'enseignante lui demande de préciser et fait démontrer par un raisonnement sur les exposants que la fonction est réellement impaire.

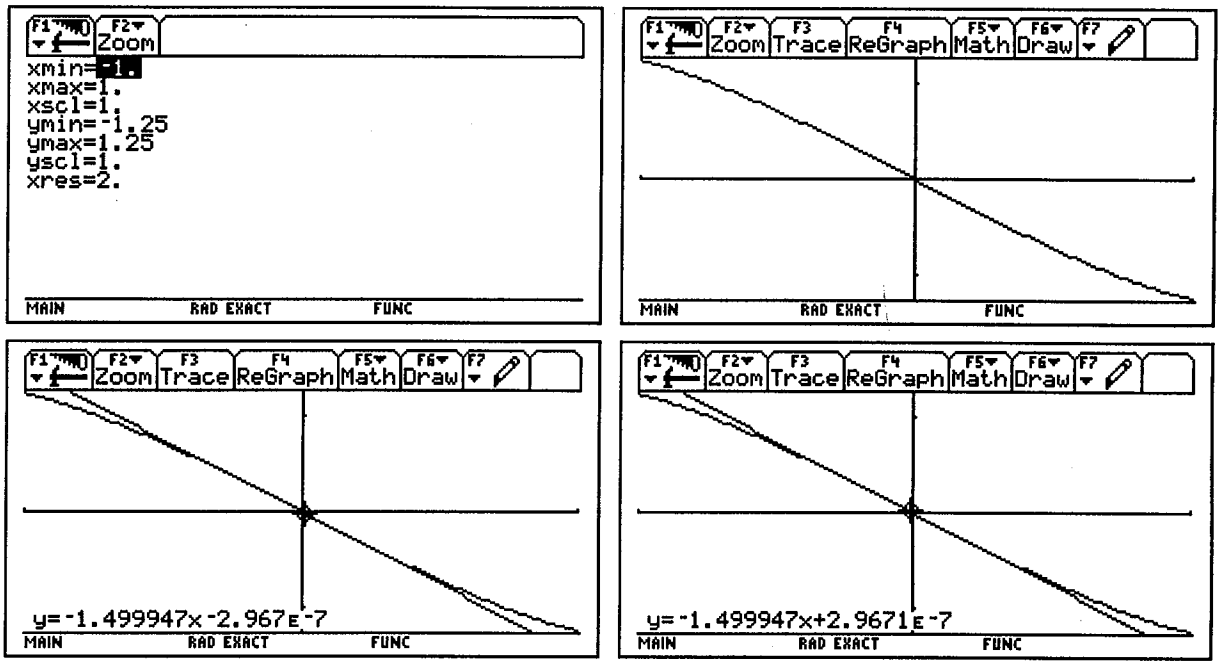
Elle leur demande ensuite comment ils vont faire pour savoir s'il y a une droite pour laquelle , lorsque h tend vers 0. Un élève propose tout de suite la droite de coefficient directeur -1.5. Il l'a trouvée en utilisant la commande *Derivative* du menu F5. L'enseignante leur montre alors qu'il existe aussi une commande *Tangente*.

Arnaud, pendant ce temps, a fonctionné avec d'abord un *ZoomBox* puis un *ZoomFit*, obtenant les écrans suivants :



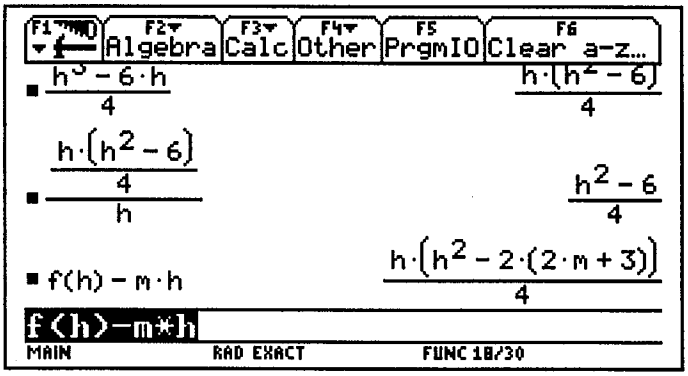


Il change ensuite de fenêtre [-1,1]x[-1.25,1.25] et, entendant l'enseignante, décide d'utiliser la commande *Tangente* :



Marianne de son côté était aussi dans une phase de tracé, changeant plusieurs fois d'intervalles avant de faire un *ZoomFit* sur [-1,1].

L'enseignante fait remarquer que la commande *Tangente* donne une valeur différente de -1.5 et en profite pour faire repréciser aux élèves que l'application graphique ne fonctionne pas en calcul exact. Elle demande ensuite aux élèves comment savoir alors si -1.5 convient bien ou non. Les élèves suggèrent de calculer les limites avec -1.5. L'enseignante accélère le processus en proposant de faire directement avec m cette fois-ci. C'est Marianne qui dicte les coordonnées de P_h, M_h et l'expression de $\overline{P_hM_h}$: f(h)-mh. Les élèves terminent ensuite à la machine (la sonnerie vient de retentir). L'enseignante se fait donner les résultats par Marianne (cf. l'écran de Marianne ci-après) et conclut rapidement en disant qu'à la séance suivante, on définira le nombre dérivé en s'appuyant sur ce qui a été fait.



Dans le deuxième demi-groupe, l'enseignante rencontre lors de l'exploration un petit problème technique : elle n'arrive plus à séparer les points M et A, ayant lâché la souris alors que les deux points étaient très près l'un de l'autre. Ne parvenant pas à le régler rapidement, elle passe à l'éditeur d'équations. La séance se déroule ensuite approximativement comme pour le premier groupe pour le premier cas traité, mais avance un peu plus vite. Amandine, l'une des élèves observées, bien que d'un niveau très moyen, participe très activement. C'est elle qui reformule par exemple la stratégie utilisée à la séance précédente, pour particulariser la droite de coefficient directeur 2 parmi les droites passant par A. Elle aura cependant un problème en calculant à la machine la limite en 0 pour l'expression dépendant de m car elle

oubliera le signe de multiplication entre m et h. L'enseignante en profite pour reprendre ceci collectivement et expliquer pourquoi, alors que les expressions ont l'air identiques à l'écran, l'une a pour limite -mh et l'autre 0.

Dans le second cas, après affichage de la courbe, un élève déclare qu'il ne peut pas y avoir de tangente (et il montre de la main l'inflexion). Les autres ne sont pas d'accord. L'enseignante propose alors de recourir à la commande *Tangente* du menu F5. Les élèves constatent que la machine donne l'équation d'une tangente (y=-1.5x+0.), la trace et que cette tangente coupe la courbe en 0.

Plusieurs trouvent cela bizarre : « elle a l'air tangente, mais elle traverse ». Un certain doute s'installe. L'enseignante demande de compter les points d'intersection. La plupart répondent qu'il n'y en a qu'un mais un élève suggère qu'il pourrait compter pour 3. L'enseignante demande comment vérifier et le même élève propose de faire comme précédemment avec un point P et un point M. Ceci réoriente le travail sur la stratégie classique et ils arrivent en fin de séance à la conclusion que $\overline{P_hM_h}$ est négligeable devant h si et seulement si m = -3/2.

L'enseignante conclut que cette droite va être la tangente à la courbe à l'origine, même si elle la coupe et que le nombre m sera le nombre dérivé de la fonction en 0. Elle introduit aussi à cette occasion la commande *Derivative* du menu F5 qui avait été utilisée spontanément par un élève de l'autre groupe et de ce fait présentée ensuite à tous. Elle leur demande de chercher pour la séance suivante le nombre de points d'intersection entre la tangente à l'origine et la courbe.

C. Bilan

L'expérimentation de cette séance d'introduction des dérivées nous semble positive. Si l'on compare en particulier aux expérimentations effectuées la première année, on voit bien que les choix effectués permettent une introduction beaucoup plus satisfaisante. La problématique choisie d'interprétation d'un phénomène produit sur l'écran de la calculatrice, mais avec la volonté de ne pas céder à la facilité, semble accessible à ces élèves qui sont pourtant d'un niveau très moyen. L'idée de s'intéresser aux vitesses de convergence vers 0 est spontanément formulée et la notion de négligeabilité relative réinvestie de façon pertinente dans le fonctionnement collectif de la séance. L'attention portée aux variables permettant de gérer la complexité formelle des calculs, le jeu construit entre le collectif et l'individuel sur ce plan, semblent avoir permis de situer le calcul symbolique là encore dans une zone accessible à la très grande majorité des élèves. Le fait de reproduire, à diverses reprises, au cours de la séance, des calculs similaires mais nécessitant chaque fois des adaptations, prenant en compte le sens des expressions et l'objectif des calculs a sans aucun doute joué un rôle décisif. L'interaction du travail à la main et du travail à la machine semble elle aussi avoir rempli le rôle qui lui était assigné. Il est clair que la première séance essentiellement collective ne permet pas de savoir avec précision l'engagement de chacun dans la séance. Ce qui y est plutôt testé, c'est la viabilité d'un jeu collectif, avec des prises d'information ponctuelles via les élèves sollicités à tel ou tel moment de la séance. Les deux séances menées ensuite en demi-groupe où nous avons suivi de plus près, quatre élèves de niveaux différents tend cependant à confirmer l'impression de viabilité de cette introduction donnée par la séance collective. On y voit cependant aussi que le scénario prévu est trop long pour la durée prévue, surtout si l'on ne veut pas trop réduire l'autonomie des élèves : dans les deux groupes, la phase 4 ne sera pas abordée et la phase trois un peu trop rapidement gérée. De plus, le scénario de la troisième phase où les élèves doivent réinvestir individuellement les stratégies

mises au point dans le cas de la tangente en 0 est loin d'être optimal. Les élèves travaillant individuellement ne disposent pas en effet du moyen de conjecture qui était fourni par le programme réalisé dans l'application géométrie. Deux stratégies nous semblaient a priori disponibles pour surmonter ce handicap : par des zooms ou le choix d'une fenêtre convenable, arriver à un graphe quasiment linéaire et l'exploiter pour faire une conjecture, mener directement un calcul avec le paramètre m. Nous pensions que la première était raisonnablement accessible même si elle ne situait pas dans une continuité directe avec ce qui précédait et que la seconde apparaîtrait peut-être mais de façon très ponctuelle. Comme le montre l'expérimentation, ces prévisions ne se réaliseront dans aucun des deux groupes, dans le premier, parce que des élèves vont exploiter des commandes spécifiques non encore introduites du menu F5, dans le second parce que va s'engager un débat sur l'existence ou non de la tangente dans ce cas d'inflexion. Il est clair que, au vu de l'expérimentation, nous ne pouvons savoir ce qui aurait pu se produire si les élèves avaient disposé réellement de temps pour résoudre ce problème, mais, compte-tenu des observations, il nous semble plus raisonnable, pour rester dans le fil de la séance, de laisser l'exploration se dérouler pour ce troisième cas, comme pour les deux premiers, de laisser s'il se présente émerger le débat sur l'existence ou non de la tangente, sans le trancher prématurément, et de renvoyer en travail autonome comme prévu, la preuve du fait que la droite de coefficient directeur -1.5 vérifie bien la propriété de proximité énoncée et est la seule dans ce cas, ce qui légitimera la décision prise ensuite de lui donner le nom de tangente, même s'il s'agit d'un objet non conforme à l'intuition géométrique que l'on a d'une tangente.

Si le temps de la séance ne permet pas raisonnablement d'accorder un temps suffisant à cette phase 3, il nous semble préférable de poser le problème et de le donner à chercher hors classe, pour la séance suivante, les productions de groupes étant admises.

SITUATION 2 : dérivées et fonctions de référence

A. Scénario

Après la séance d'introduction, le scénario prévoit de gérer sur deux séances, les fonctions suivantes :

$x \mapsto 2x+3 \quad x \mapsto \frac{1}{x} \quad x \mapsto \sqrt{x} \quad x \mapsto |x| \quad x \mapsto |x^2-4x+3| \quad x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$

en faisant calculer directement les limites en divers points avec l'aide de la machine, dans un scénario qui alterne le travail algébrique et graphique, en fonction des spécificités des fonctions considérées. Ces séances doivent aussi permettre de repérer quelques cas de non-dérivabilité qui seront rassemblés dans le « récit » distribué ensuite aux élèves. C'est à l'issue de ces séances qu'il est prévu d'introduire la commande de dérivation formelle de la machine.

- Pour la première fonction, on prévoit de demander aux élèves d'anticiper le résultat en posant la question de savoir quelle est la tangente à une droite en l'un de ses points (question qui, on le sait, n'est pas triviale pour les élèves qui ont du mal à se départir de l'idée que tangente et courbe se touchent en un point mais sont bien distinctes au voisinage de ce point) avant de vérifier que la démarche algébrique mise en place la fois précédente conduit bien au même résultat. On généralisera ensuite au cas d'une droite quelconque.
- Pour la seconde fonction, on prévoit de demander un calcul à la main qui sera suivi d'une vérification à la machine.

- Pour la troisième fonction, on prévoit de débuter cette fois par un calcul à la machine. On cherchera ensuite collectivement comment retrouver le résultat $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ fourni par la machine et la méthode de produit par la quantité conjuguée sera identifiée.

  Cet exemple devrait également servir à poser le problème du domaine de validité de la formule obtenue et à relier la non dérivabilité en 0 de cette fonction à l'existence d'une tangente verticale.

- Pour la quatrième fonction, il est prévu de demander aux élèves de formuler une conjecture à partir du tracé de la courbe représentative de la fonction. On utilisera ensuite le calcul machine pour tester les conjectures. Précisons que la TI92, dans ce cas, renvoie sign(a) pour $\lim_{h\to 0}\frac{|a+h|-|a|}{h}$; c'est une fonction que les élèves ne connaissent pas encore et il leur faudra interpréter cette production.

- Pour $x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ enfin, il est prévu de faire une exploration à la calculatrice par zooms successifs. Il n'est pas question de mener une étude précise de cette situation mais simplement de l'utiliser pour enrichir l'herbier des images associées aux cas de non dérivabilité et montrer qu'il existe des cas plus compliqués que ceux qu'ils seront amenés à rencontrer pendant cette première année de contact avec les dérivées.

L'ensemble se terminera par une synthèse sur les différents cas rencontrés de non-dérivabilité, on introduira aussi à cette occasion la commande de dérivation formelle de la calculatrice et on la fera fonctionner sur les exemples déjà traités.

B. Déroulement

Cette partie du scénario sera gérée en deux séances de deux heures, 35mn de la première heure étant consacrée à la phase 4 de l'introduction non abordée pendant la séance précédente.

Séance 1 :

L'enseignante fait rappeler ce qui a été fait à la séance précédente et le fait adapter au cas général d'une fonction f étudiée au voisinage de a. Une figure est tracée au tableau (cf. résumé de cours en annexe). Ni le rappel, ni l'adaptation ne posent de problème, l'enseignante ayant cependant à reprendre des formulations un peu floues. On arrive ainsi à la formulation : on cherche s'il existe m tel que $\overline{P_h M_h}$ soit négligeable devant h et à l'expression associée :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-(f(a)+m\,h)}{h}=0$$

L'enseignante propose alors de transformer cette expression. Un élève propose de simplifier par h. En fait, il est prêt à simplifier par h y compris dans f(a+h). L'enseignante lui fait réexpliquer le sens de la notation f(a+h), puis reprend cette idée de simplification pour arriver à :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-m=0$$

Elle demande ensuite si l'on peut encore écrire autrement cette limite, en les invitant à se remémorer ce qu'ils avaient fait quand ils avaient défini qu'une fonction avait pour limite l à partir des limites 0. Amandine trouve très vite et propose :

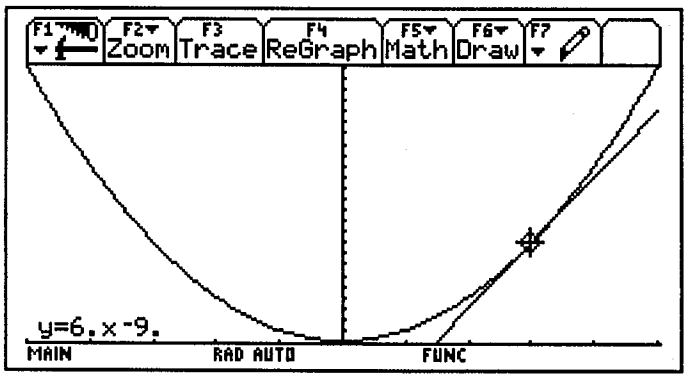
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=m$$

L'enseignante numérote les trois formes, fait rappeler ce qui était en jeu dans le travail du vendredi précédent et demande quelle est dans ce cas l'expression la plus commode. Les élèves n'hésitent pas, c'est la 3 car on n'a pas besoin de connaître m.

L'enseignante dicte ensuite la définition du nombre dérivé en a puis fait écrire l'équation de la tangente et relier nombre dérivé et coefficient directeur de la tangente.

Au bout de 25mn, elle passe à l'approximation affine et là va rencontrer des difficultés sérieuses. Visiblement les élèves n'arrivent pas à donner sens à la fonction φ introduite (cf. résumé de cours), pas plus qu'ils n'arrivent à suivre l'enseignante quand elle essaie de faire dire que hφ(h) est négligeable par rapport à h pour justifier le choix de f(a)+mh comme approximation affine. Le contraste est saisissant si on compare à tout ce qui précède, montrant clairement qu'il y a là pour les élèves, même si toute l'argumentation précédente était basée sur un questionnement de proximité, deux mondes différents qu'ils ne peuvent relier par une simple transformation d'écritures.

Au bout de 35mn, l'enseignante passe à des fonctions particulières, reprenant d'abord la fonction f définie par $f(x)=x^2$ et posant la question de sa dérivabilité en a. Les élèves se mettent au travail rapidement et visiblement gèrent bien le calcul qui est à faire à la main, arrivant pour le quotient à l'expression 2a+h. Le passage à la limite crée un flottement chez certains élèves du fait de la présence des deux lettres a et h, facilement géré en proposant deux valeurs particulières pour a. On arrive ainsi à la conclusion que la fonction est dérivable pour tout a, de nombre dérivé 2a et l'enseignante fait vérifier que c'est bien compatible avec le résultat obtenu en 1, à la séance précédente. Elle demande l'équation de la tangente au point d'abscisse 3, fait tracer la courbe et la tangente sur la TI92 rétroprojetable :



Elle essaie ensuite de revenir à la question de l'approximation affine, en demandant une approximation affine de $(3+h)^2$ en précisant qu'il s'agit donc d'une approximation affine de f(3+h). Les élèves regardent leurs notes, l'enseignante circule puis aide collectivement les élèves à produire l'approximation et à l'interpréter :

M : Alors f(a+h) a pour approximation affine f(a) plus ?

E: mh

M: mh, que vaut m ici ? .....

E' : 2a

M. écrit au tableau :

f(a+h) a pour approximation affine f(a)+2ah
$(a+h)^2$ // // // a^2+2ah

M: ça vous fait penser à quelque chose?

E: Le début de l'identité remarquable.

M: Oui et qu'est-ce qui manque?

E: h^2

M: Il manque h^2, oui et.....

E' : C'est le carré de h

E'' : C'est négligeable

M: Et le h^2 est négligeable devant h, ce qui manque c'est le $\overline{P_h M_h}$, et c'est le h^2, d'accord ? Eh bien on va continuer tout à l'heure avec d'autres fonctions.

C'est la pause.

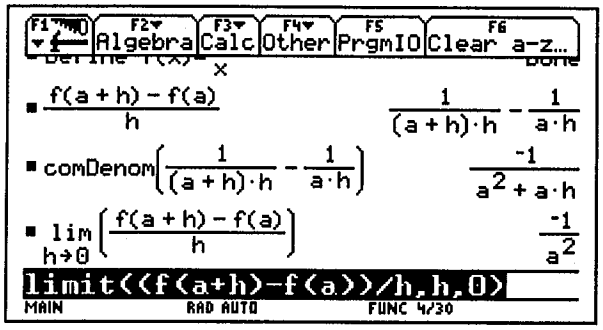
Après la pause, l'enseignante propose la fonction f définie par f(x)=-3x+5 et, comme prévu, demande si elle admet un nombre dérivé en tout point, après l'avoir faite tracer sur la machine rétroprojetable. Les réponses fusent :

« Elle est dérivable en tout point », « La tangente, elle est confondue avec la droite », « La dérivée vaut toujours pareil »

L'enseignante demande des précisions. Un élève répond que m vaut toujours -3. L'enseignante demande si l'on pourrait vérifier par le calcul. Loic dit le calcul à effectuer et l'enseignante leur demande de le faire individuellement. Cela ne pose pas de problème. L'enseignante vient de conclure quand l'un des élèves Pierre demande : « mais la limite de la fonction du départ, c'est pas 5 ? ». L'enseignante fait préciser à Pierre en quel point il prend la limite, puis explique que ce n'est pas la limite de la fonction en 0 qu'ils calculent mais la limite du quotient quand h tend vers 0. Pierre réfléchit puis explique qu'il était gêné parce qu'il confondait la limite de f(x) quand x tend vers 0 et la limite de f(a+h) quand h tend vers 0 parce qu'on avait posé x=a+h. L'enseignante explique pour tous que chercher la limite de f(a+h) quand h tend vers 0 c'est la même chose que chercher la limite de f(x) quand x tend vers a et non pas la limite de f(x) quand x tend vers 0.

Elle leur demande ensuite de prendre leurs machines pour étudier si la fonction f définie par f(x)=1/x pour x différent de 0 est dérivable en a pour tout a différent de 0.

Marianne et Vincent sont les élèves dont les machines sont reliées aux ordinateurs pour cette séance. Ils définissent la fonction dans HOME puis font les calculs. Marianne oublie, pour la limite, d'indiquer la variable et reçoit un message d'erreur qu'elle interprète immédiatement et obtient très vite la limite. Vincent de son côté utilise la commande *ComDenom* avant de prendre la limite :



Voyant que les élèves ne rencontrent pas de difficultés, l'enseignante se fait dicter les calculs à faire à la machine. Elle demande ensuite aux élèves s'ils sauraient les faire à la main. La réponse est massivement « Oui ». Elle fait conclure et noter le résultat. Un élève Emmanuel l'interrompt car il n'arrive pas à obtenir le résultat. En fait, il a libéré la variable f après avoir défini la fonction. L'enseignante repère immédiatement l'erreur et la lui indique. Elle fait ensuite préciser le signe de la dérivée puis se fait dicter le détail des calculs qu'elle écrit au tableau.

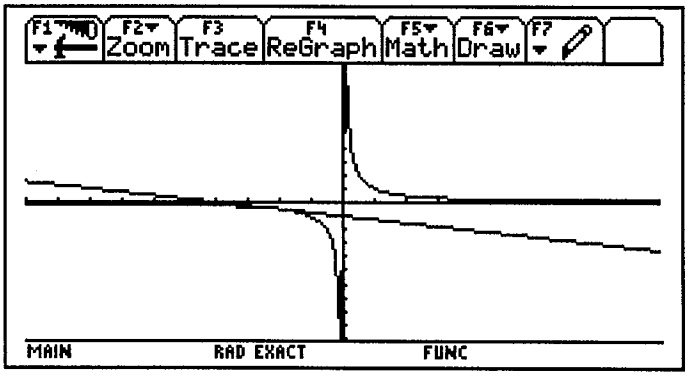
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{a-(a+h)}{a(a+h)h} = \frac{-h}{a(a+h)h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$$

Elle demande ensuite l'équation de la tangente au point d'abscisse -2 et fait rappeler la forme générale : m(x-a)+f(a) avant de laisser les élèves faire individuellement le calcul. Vincent fait une erreur de calcul, écrivant :

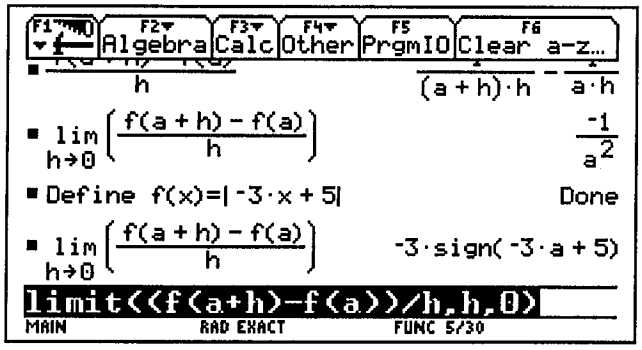
$$y=m(x-a)+f(a)=\frac{-1}{4}(x+2)+\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}x$$

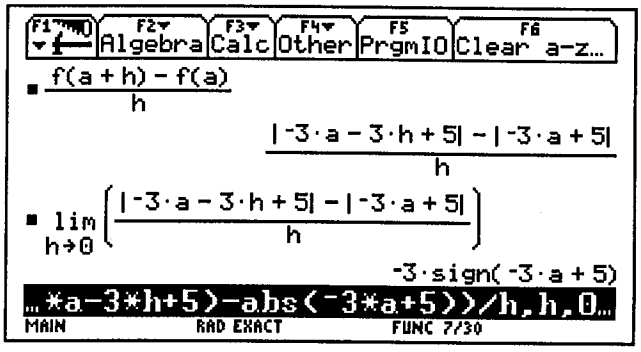
L'enseignante assez vite fait, de son côté, les calculs à la machine puis entre dans l'éditeur d'équation y=1/x et y=-x/4-1 pour vérifier graphiquement la tangence. Les élèves reproduisent que leur écran (cf. l'écran de Marianne reproduit ci-après) :



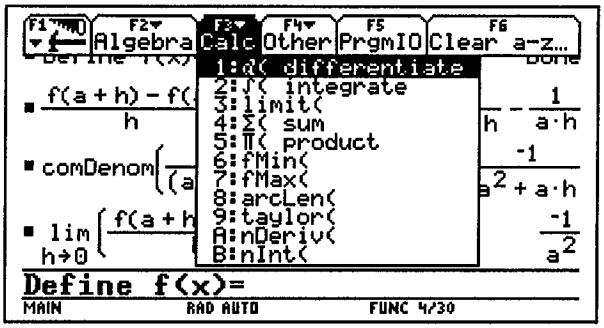
L'enseignante introduit ensuite une nouvelle fonction définie par f(x) = $|-3x+5|$

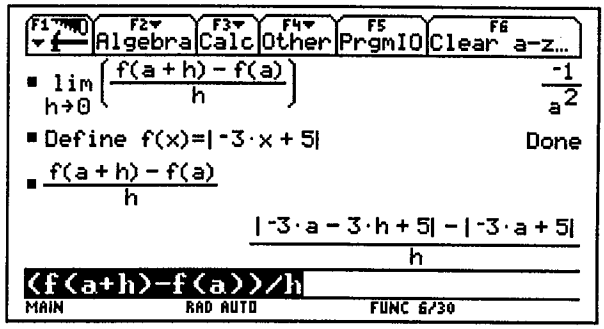
Marianne la définit puis demande directement la limite du quotient différentiel en une seule opération. Très étonnée par le résultat, en reprend le calcul en détaillant les étapes, aboutissant au même résultat :



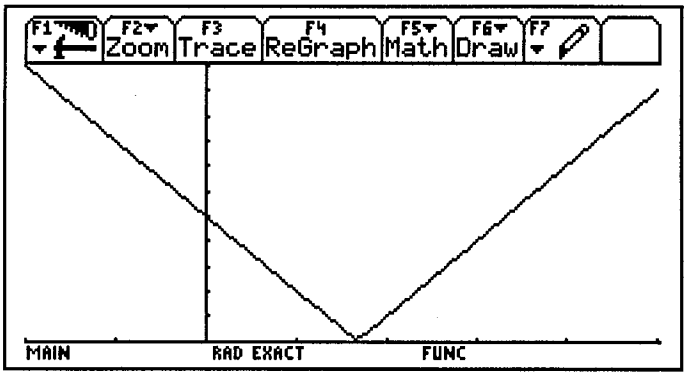


Vincent, de son côté cherche la fonction valeur absolue, puis ne la trouvant pas tape directement *abs*. Il calcule ensuite le taux d'accroissement.





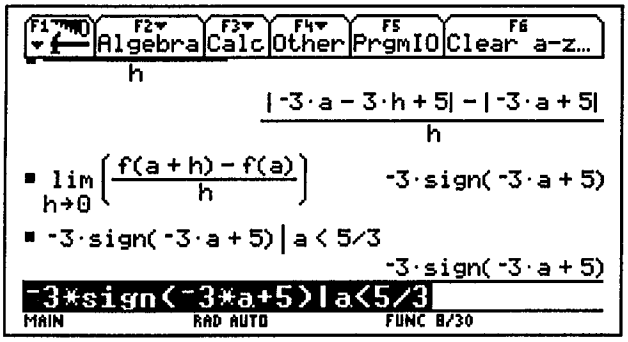
Environ la moitié des élèves a démarré comme Vincent et Marianne, tandis que l'autre a démarré en faisant tracer la fonction. Ceux qui ont obtenu l'expression formelle ne savent visiblement pas quoi en faire. L'enseignante intervient alors et après avoir fait remarquer qu'il y a deux stratégies, montre ce que l'on obtient avec chacune d'elles et souligné le problème posé par la fonction *sign*, elle oriente les élèves vers l'exploitation du graphique.

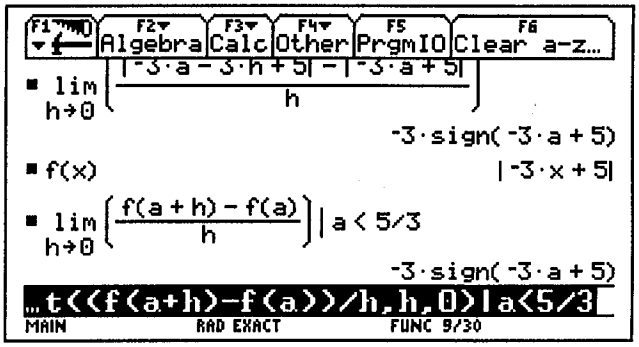


Elle veut faire produire aux élèves collectivement l'équation des deux demi-droites et ceci ne va pas aller sans mal. Les élèves disent que les coefficients directeurs sont 3 et -3 mais visiblement n'arrivent pas à exploiter rapidement l'expression donnée pour trouver ces équations. Pour le point d'intersection avec l'axe Ox, on entend successivement : 5, puis 3/5 et enfin 5/3. Pour l'équation, un propose y=-5/3x que l'enseignante fait tracer puis un autre y=-3x+5/3. L'enseignante fait de nouveau tracer. Finalement, au troisième essai, on arrive à -3x+5. Pour la branche de droite, les avis sont partagés entre y=3x-5 et y=3x+5 et les élèves proposent d'essayer pour choisir. L'enseignante déclare qu'ils exagèrent et les oblige à revenir à la définition de la valeur absolue. Cela ne va pas de soi. Enfin, les deux expressions sont disponibles et l'enseignante passe à la question de la dérivabilité. D'emblée un élève (Emmanuel) dit qu'elle n'est pas dérivable là où f(x)=0 mais il ne sait pas dire pourquoi, les autres non plus. L'enseignante laisse momentanément le problème ouvert et passe aux autres

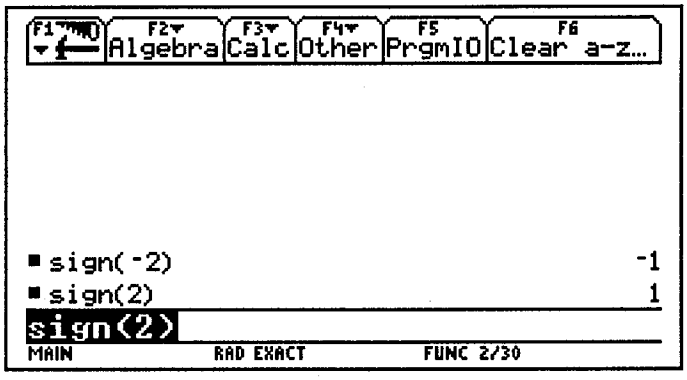
points. Là, pas de problème, les élèves sont convaincus que c'est dérivable et que la dérivée vaut -3 sur la demi-droite de gauche et 3 sur la demi-droite de droite. Ils expliquent sans difficulté pourquoi : « C'est un point d'une droite, la tangente est confondue avec la droite ».

L'enseignante revient ensuite au module formel pour gérer le cas laissé en suspens. Elle fait afficher -3sign(-3a+5) en spécifiant a<5/3, mais ceci ne change rien. Vincent le reproduit sur sa machine, tandis que Marianne fait la spécification au niveau de la limite, obtenant le même résultat.





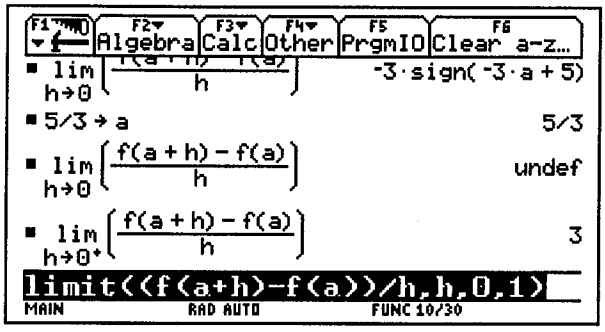
L'enseignante constate que l'on n'est pas plus avancé et leur demande s'ils ont une idée de ce que peut signifier l'expression sign(-3a+5). Un élève dit que cela varie avec le signe, Vincent que ça vaut 1 ou -1, puis précise à la demande de l'enseignante : « 1 quand le signe est positif et -1 quand le signe est négatif ». C'est testé à la machine avec 2 et -2 :

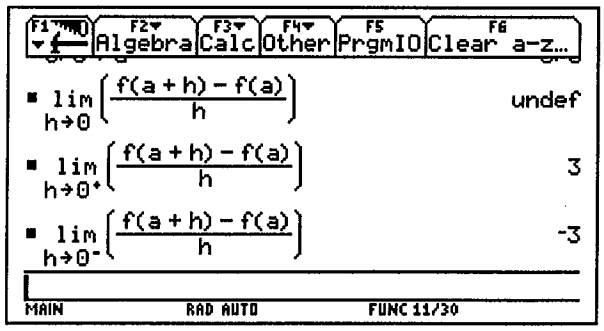


L'enseignante interprète alors la limite donnée par la machine, montrant que l'on retrouve bien les deux valeurs 3 et -3 qu'ils ont conjecturées.

Elle demande ensuite si, à leur avis, il y a une tangente, des tangentes au point d'abscisse 5/3. Des élèves proposent l'axe des abscisses mais tous ne sont pas d'accord car l'axe des abscisses ne colle pas à la courbe. L'enseignante tranche en reprenant cette idée et en rappelant la séance précédente.

Un autre élève dit qu'il y en a deux. L'enseignante reprend cette idée, fait un dessin et introduit la notion de demi-tangente, tout en insistant sur le fait que ces deux demi-tangentes ne sont pas confondues. Un élève demande s'il y a une limite alors. L'enseignante affecte la valeur 5/3 à « a » puis cherche la limite à la machine, obtenant la réponse : *undef*, mais montre que si l'on demande la limite à droite ou à gauche, on obtient un résultat. Tous les élèves reproduisent ceci sur leur machine.





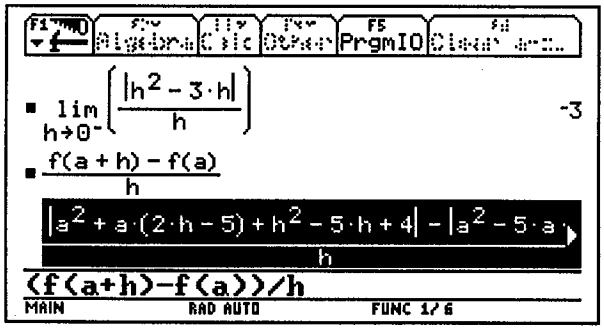
Elle conclut ensuite : « on dira qu'on a une fonction qui est dérivable à gauche, que le nombre dérivé à gauche va être : -3 (valeur donnée par les élèves), qu'elle est dérivable à droite; le nombre dérivé à droite ça va être : 3 (idem). Mais comme ces deux nombres ne sont pas égaux, on dit que la fonction n'est pas dérivable en 5/3. Et ça se traduit comment ? Eh bien ça se traduit par une demi-tangente de coefficient directeur -3 et une demi-tangente de coefficient directeur +3 ».

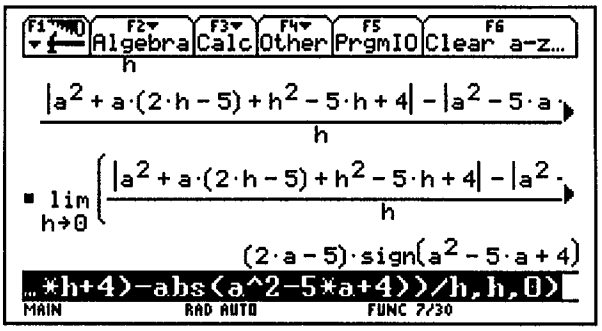
La séance se termine là, les élèves ayant à étudier pour la séance suivante la dérivabilité de la fonction f telle que $f(x)=|x^2-5x+4|$.

Séance 2 :

La séance débute par l'étude collective de la dérivabilité de la fonction introduite à la fin de la séance précédente. Nous suivrons ici plus particulièrement le travail d'Arnaud relié à l'ordinateur.

Visiblement les élèves n'ont pas réussi à résoudre complètement l'exercice. Ils ont le plus souvent fait tracer la courbe, calculé avec la machine le quotient différentiel dans le cas général, cherché sa limite mais été rebutés par la complexité du résultat :





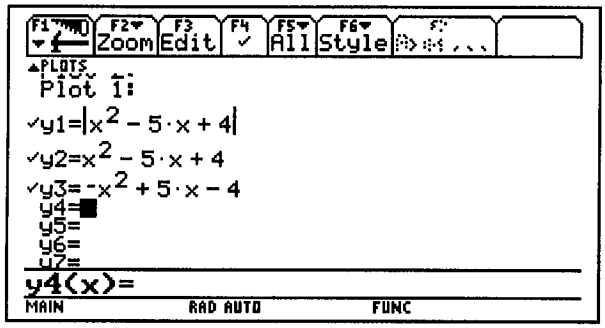
35mn vont être consacrées à cette fonction particulière. L'enseignante suit au départ les propositions des élèves. Elle fait donc tracer la courbe représentative de f, d'abord dans la fenêtre standard puis dans la fenêtre [-10,10]x[-1,10]. Un élève Pierre propose de décomposer la courbe en deux équations, d'autres disent qu'il y a trois morceaux. Pierre, sollicité par l'enseignante, explique le paradoxe apparent en disant que deux morceaux ont la même équation, et que les équations changent à cause de la valeur absolue. Ceci étant précisé, collectivement, les deux équations sont trouvées et leurs intervalles de validité exprimés en fonction des racines de l'équation : 1 et 4, sans difficulté.

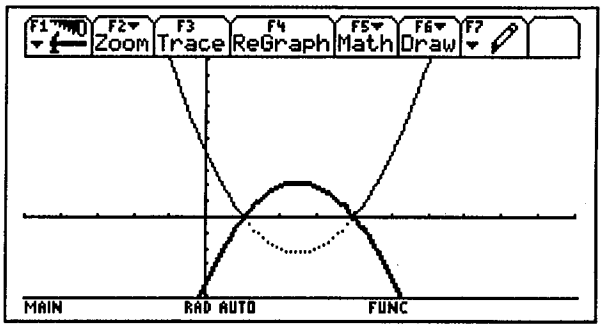
L'enseignante propose alors de visualiser graphiquement le changement de signe sur l'intervalle [1,4]. Pour cela elle entre x^2-5x+4 dans Y= et la fait tracer. Les élèves constatent que les deux courbes coïncident en dehors de l'intervalle et sont symétriques sur [1,4].

Elle pose ensuite la question de l'existence de tangentes. Visiblement, pour les élèves, l'existence de tangentes en dehors des deux points d'abscisse 1 et 4 va de soi. L'enseignante

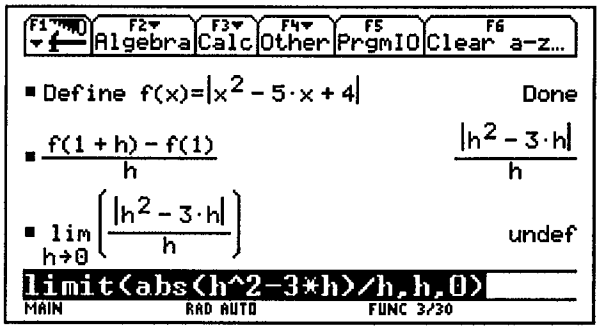
le justifie en s'appuyant sur les relations de coïncidence et de symétrie avec la parabole tracée qui, on le sait, a une tangente en tout point. Plusieurs élèves disent qu'en revanche la fonction n'est pas dérivable en 1 et 4. L'enseignante commence à réduire l'étude au cas x=1, en faisant remarquer que la courbe admet un axe de symétrie.

Arnaud a pendant ce temps, rentré les différentes fonctions sur la calculatrice :

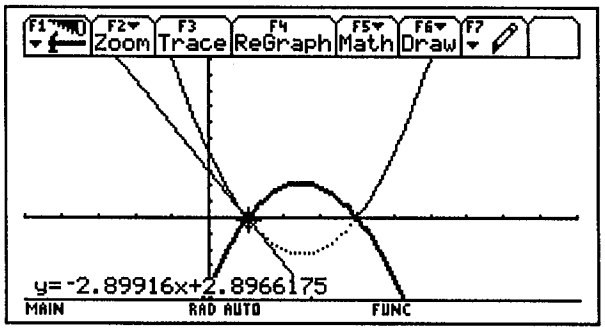


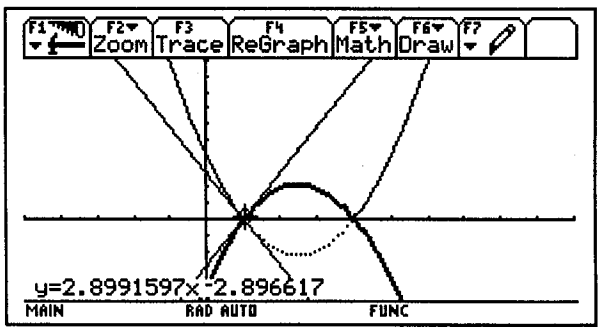


L'enseignante leur demande comment ils ont fait ensuite. Plusieurs élèves disent qu'ils ont calculé la limite à la calculatrice et que ça faisait un truc immense. Elle leur propose de chercher juste en 1. Elle suit leurs instructions et Arnaud reproduit pas à pas ce qu'elle fait à la rétroprojetable, arrivant comme elle à la réponse : *undef.*



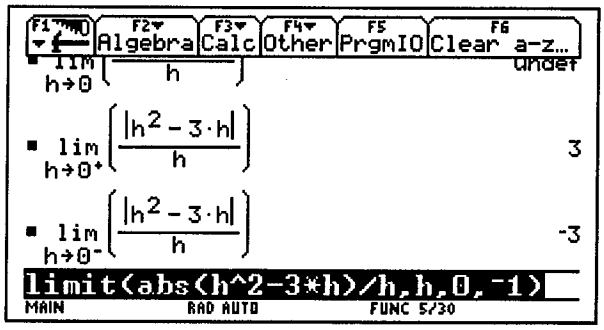
Les élèves ne sont visiblement pas étonnés par le résultat et Arnaud dit tout bas : « c'était prévisible ». L'enseignante leur propose alors de revenir au graphique et de regarder ce qui se passe pour les tangentes au point d'abscisse 1. Arnaud va dans GRAPH et, utilisant deux fois la commande *F5-Tangent* pour les deux paraboles obtient le résultat suivant :





L'enseignante fait, elle retracer les deux paraboles symétriques par rapport à Ox, puis demande aux élèves si elles ont des tangentes au point d'abscisse 1, puis ce qui se passe si l'on s'intéresse à la courbe représentative de la fonction f, c'est à dire si l'on cache la partie correspondant aux y négatifs. Un élève répond qu'il ne reste que des demi-droites. L'enseignante, pour le vérifier, fait tracer la tangente à la première parabole au point d'abscisse 1, obtenant l'équation y=3x-3, puis pour l'autre parabole, obtenant y=3x-3, puis fait le lien entre demi-tangentes et rapprochement du point d'abscisse 1 sous les conditions :

x<1 et x>1. Elle repasse ensuite au module formel et leur demande ce qu'elle doit faire pour ne plus obtenir *undef*. Quelqu'un suggère de prendre les limites à gauche et à droite. Elle fait prévoir les réponses avant d'entrer les commandes et obtient sans difficulté les réponses attendues. Arnaud avait en fait anticipé cette dernière partie et déjà obtenu :



L'enseignante fait ensuite expliquer pourquoi il est logique que les deux nombres trouvés soient opposés, puis demande aux élèves de détailler les calculs à la main, en séparant les deux cas possibles. Il n'y a pas un grand enthousiasme. Arnaud consulte son cahier puis écrit :

Cinq minutes plus tard, l'enseignante se fait dicter les calculs pour la limite à gauche et conclure. Elle demande ensuite s'il faut refaire les calculs pour la limite à droite. Un élève répond tout de suite que non, car f change juste de signe et qu'on va obtenir donc comme limite 3.

L'enseignante récapitule alors l'ensemble et fait noter :

« La fonction f est dérivable à gauche en 1, et son nombre dérivé à gauche est -3

De même la fonction f est dérivable à droite en 1, et le nombre dérivé à droite est 3.

La courbe de f admet donc au point d'abscisse 1 deux demi-tangentes, l'une de coefficient directeur -3, l'autre de coefficient directeur +3. La fonction f n'est pas dérivable au point d'abscisse 1 car le nombre dérivé à droite et le nombre dérivé à gauche sont .... ». Un élève continue : « opposés ». L'enseignante insiste sur le fait que c'est parce qu'ils sont différents et non parce qu'ils sont opposés que la fonction n'est pas dérivable.

Après avoir rappelé que pour le point d'abscisse 4, la fonction n'est pas non plus dérivable, en raison de la symétrie, elle passe ensuite à la preuve formelle dans le cas général. Les élèves, une fois de plus, dictent les manipulations à faire sur la TI92 rétroprojetable et très vite, la classe arrive à l'expression (2a-5)sign(a^2-5a+4) qu'un certain nombre d'élèves avait déjà obtenue. Cette expression n'est toujours pas parlante et l'enseignante va devoir les aider à en faire l'analyse en faisant rappeler les valeurs prises par la fonction sign, pour trouver les valeurs 2a-5 et -2a+5 du nombre dérivé suivant la valeur de a par rapport à 1 et 4.

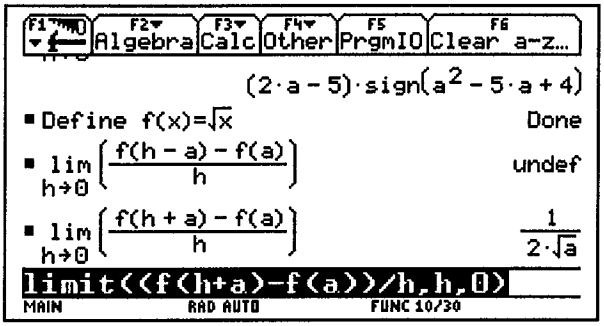
Finalement, tout est récapitulé au tableau :

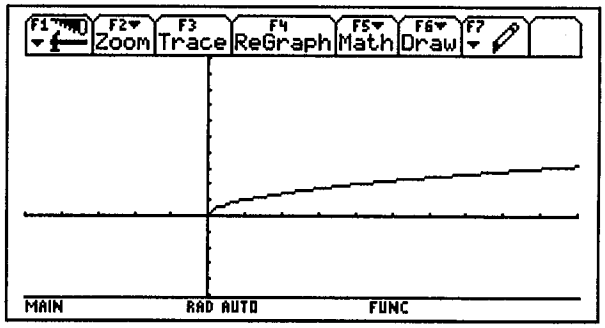
	nombre dérivé en a
Si a<1	2a-5
1<a<4	-(2a-5)
a>4	2a-5
en a=1	nbre dérivé à gauche : -3
	nbre dérivé à droite : +3

en a=4	nbre dérivé à gauche : -3

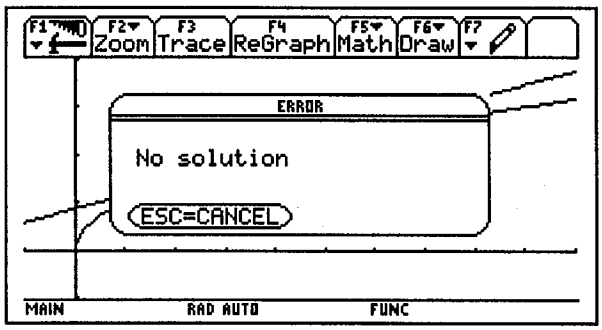
L'enseignante fait en même temps contrôler graphiquement les valeurs données par symétrie pour x=4 et termine cette étude par un petit commentaire général sur les fonctions où interviennent les valeurs absolues.

On passe ensuite à la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$, comme prévu. Les élèves peuvent utiliser la machine, précise-t-elle, et ensuite on essaiera de retrouver le même résultat à la main. Arnaud définit la fonction dans HOME, demande un calcul de limite mais obtient *undef* car il a fait une erreur de signe dans l'entrée. Il fait alors tracer la fonction, regarde attentivement le graphe, repasse en HOME, repère son erreur et obtient la valeur du nombre dérivé en a :

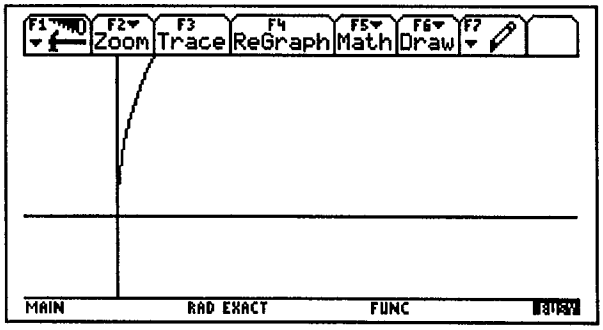




Visiblement, les élèves ne rencontrent pas ici de problème et assez vite, l'enseignante fait un bilan collectif. Elle fait tracer la courbe représentative dans la fenêtre [-1,10]x[-1,4], les élèves disent que c'est dérivable en a si a est positif ; l'enseignante fait alors tracer la tangente au point d'abscisse 3 en insistant sur le fait que l'expression donnée est une expression approchée, avant de poser la question de savoir si elle peut faire tracer comme cela des tangentes partout. Un élève dit qu'il y a un problème en 0. L'enseignante demande alors la tangente en 0 obtenant l'écran suivant :



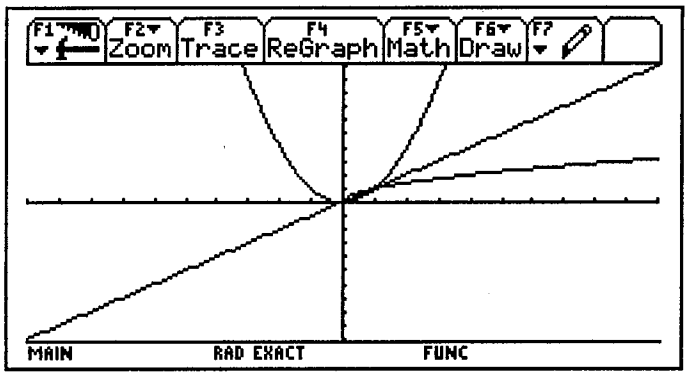
L'enseignante propose de zoomer autour de l'origine pour voir un peu mieux ce qui s'y passe. Elle prend en fait la fenêtre [-.1,.5]x[-.1,.2] et obtient ceci :



A sa place, Arnaud, lui, utilise les commandes *Zoombox* et *ZoomIn* pour ajuster son tracé.

Plusieurs élèves disent qu'on dirait quand même qu'il y a une tangente l'axe des ordonnées. L'enseignante demande si cet axe des ordonnées a un coefficient directeur, puis en faisant rappeler l'expression du coefficient directeur comme quotient b/a, obtient sans difficulté le fait que lorsque a tend vers 0, ce coefficient directeur tend vers plus ou moins l'infini suivant le signe de a.

Elle fait ensuite le rapprochement avec la parabole d'équation $y=x^2$, en demandant la nature de la courbe tracée. Plus répondent que c'est une portion, une moitié de parabole. Elle introduit alors la parabole mentionnée ci-dessus, fait préciser sa tangente à l'origine, puis demande comment géométriquement, on passe de la courbe représentative de la fonction racine carrée à cette parabole, en précisant que l'on a changé x en y et y en x. Un élève propose d'abord une rotation, proposition qu'elle écarte en disant qu'une rotation qui transforme x en y, transforme y en -x, et très vite la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice sort. L'enseignante la visualise à la machine, en passant en *ZoomSqr,* pour avoir un repère orthonormé, en traçant la parabole et la première bissectrice :



Elle exploite ensuite cette symétrie pour justifier la conjecture faite d'existence d'une tangente verticale à la parabole symétrique à l'origine, donc d'une demi-tangente verticale à la courbe représentative de la fonction racine carrée qui, elle, n'est définie que pour x positif.

Elle passe ensuite au module de calcul formel, leur demandant ce qu'ils ont trouvé comme expression du nombre dérivé en a, et en leur faisant préciser le domaine de validité de cette expression, non indiqué par la machine. Ceci ne pose pas de problème.

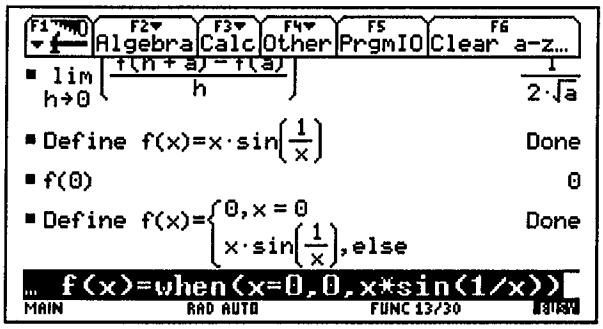
Le calcul à la main est fait ensuite collectivement. Elle fait mettre en évidence l'indétermination puis présente la technique de multiplication par la quantité conjuguée, qu'ils ont déjà utilisée à d'autres occasions, comme une technique qui permet de lever l'indétermination dans ce type d'expression. Ensuite, l'ensemble des résultats obtenus est récapitulé et noté. Et l'enseignante fait bien remarquer que dans ce cas, il n'y a pas dérivabilité mais il y a cependant une demi-tangente verticale.

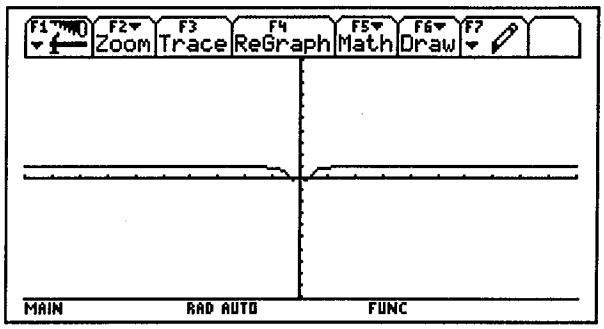
C'est la pause.

Après la pause, est introduite la dernière fonction qu'il était prévu d'étudier dans ce scénario, la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

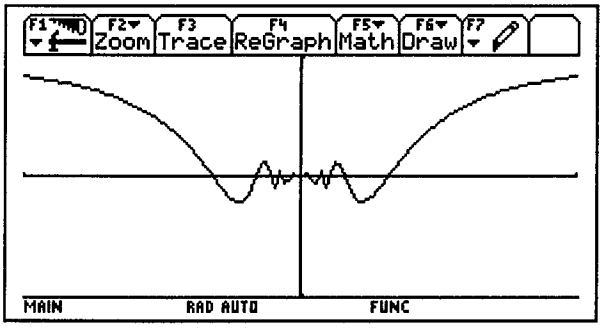
L'enseignante explicite la syntaxe de définition par cas qu'ils rencontrent pour la première fois. Arnaud qui avait tout de suite entré la fonction sans distinguer les deux cas et vérifié que

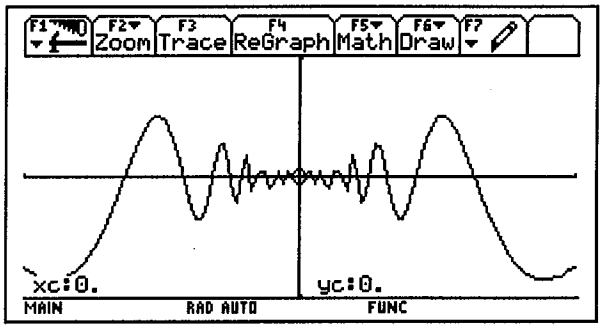
la valeur en 0 donnée était bien 0, n'intervient pas et rectifie sa définition puis fait tracer dans la fenêtre standard :

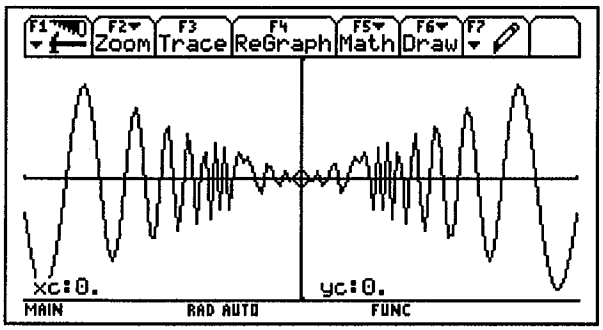


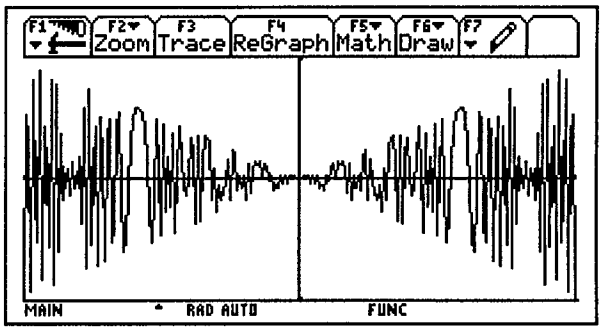


Il se place ensuite dans la fenêtre [-1,1]x[-1,1], avant de faire des *ZoomIn* autour de 0 avec xres=1 au lieu de 2, comme le conseille l'enseignante.









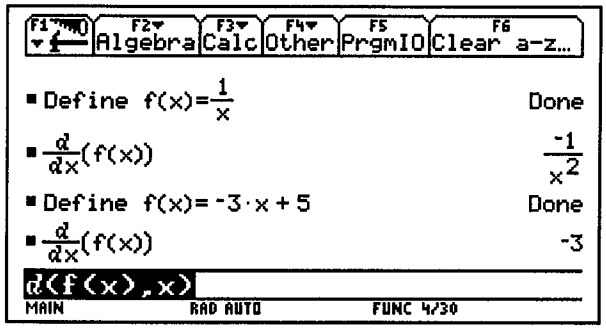
Les élèves en fait sont frappés par les oscillations mais tout autant par la symétrie de la courbe. L'enseignante fait prouver la parité, puis elle fait remarquer qu'au fil des zooms successifs dans ce cas, on ne voit pas la courbe autour de 0 devenir de plus en plus droite comme dans les cas où il existait une tangente. Elle fait examiner ce qui se passe pour le sinus et l'expression globale lorsque x tend vers 0, puis conclut qu'effectivement cette fonction n'est pas dérivable en 0.

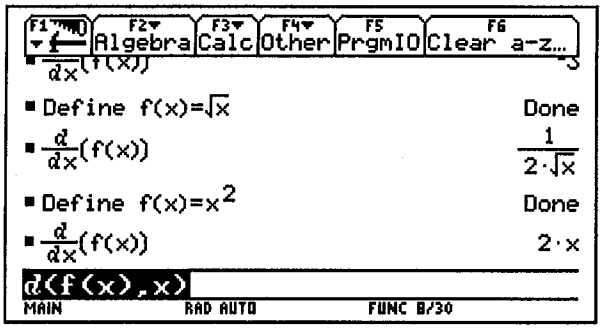
Elle repasse en HOME, leur montre que la TI92 donne bien 0 comme limite en 0 et conclut cette phase par : « Donc j'ai une fonction qui est définie en 0, qui a une limite en 0 qui est égale à f(0), mais qui n'est pas dérivable en 0. Donc toutes les fonctions ne sont pas dérivables partout. Il y a des fonctions qui ne sont pas dérivables en certains points, et puis vous verrez après quand vous serez en fac qu'il y a des fonctions qui ne sont dérivables nulle part. Mais nous celles qu'on va étudier cette année ce sera exceptionnel qu'elles soient pas dérivables. Les fonctions pas dérivables qu'on va rencontrer, ce sera des fonctions qui seront pas dérivables en des points particuliers, c'est-à-dire dans l'exemple de celles qu'on vues $|-3x+5|$ au point d'abscisse 5/3; $\sqrt{x}$ au point d'abscisse 0; $|x^2-5x+4|$ aux points d'abscisses 1 et 4,

d'accord ? Donc on a vu des fonctions qui étaient dérivables partout, des fonctions qui étaient dérivables presque partout sauf en certains points. »

Les dernières 20mn de la séance vont être consacrées à l'introduction de la notion de fonction dérivée et à l'introduction de la commande de dérivation formelle de la calculatrice. Après introduction de la notion de fonction dérivée, les résultats déjà obtenus sont tous reformulés dans le nouveau langage (cf. résumé de cours). Ceci prend une dizaine de minutes. Puis l'enseignante revient à la calculatrice, introduit la commande de dérivation formelle et fait remarquer aux élèves la notation adoptée par la machine, différente de celle qu'elle a introduite. Elle précise qu'il s'agit d'une notation différentielle, souvent utilisée en mécanique et en physique et profite de l'occasion pour leur dire qu'en physique, on utilise aussi des notations avec des points, lorsque la variable est le temps et que l'on travaille avec des vitesses et des accélérations. Quelques uns disent avoir déjà vu ces notations.

Ensuite, elle leur demande de faire fonctionner la commande formelle sur les exemples déjà étudiés et de vérifier qu'ils retrouvent bien les résultats déjà établis. Arnaud, à son habitude, a déjà commencé à le faire et a obtenu les deux écrans suivants :





L'enseignante, après avoir circulé dans la classe, précise que s'ils n'ont pas défini la fonction ils peuvent demander la dérivée par exemple, en tapant : $d(\sqrt{x},x)$ pour la fonction racine, mais qu'ils doivent bien faire attention que, ce que leur renvoie la machine, dans tous les cas, c'est le nombre dérivé en x, c'est l'image de x par la fonction dérivée. S'ils veulent travailler avec la fonction dérivée, ils doivent la définir comme fonction.

Elle demande ensuite : « à la main, si vous dérivez la fonction qui à x associe ax+b, qu'est-ce que vous allez obtenir ? ». Les élèves hésitent. Quelques « a » timides sortent mais le doute semble planer. L'enseignante repose la question et leur demande de laisser de côté la calculatrice pour l'instant. Un élève propose la fonction x→ x, visiblement il n'y a pas accord, puis un autre dit : y=a et l'enseignante reformule de façon fonctionnelle, puis leur demande de vérifier à la calculatrice (Arnaud avait déjà fait le calcul dès qu'elle avait posé la question initiale). Elle demande ensuite, toujours sans machine, de prévoir quelle est la dérivée d'une fonction constante. Là encore il y a des flottements et l'enseignante fait détailler le raisonnement en passant par la tangente cette fois. Chacun vérifie sur sa machine et ensuite l'enseignante fait faire le calcul à la main. la séance se termine là.

C. Bilan

La première séance est composée de deux phases : la première correspondant à la définition du nombre dérivé, la seconde à l'exploitation de cette définition pour étudier la dérivabilité et déterminer le nombre dérivé quand il existe de fonctions choisies pour confronter les élèves à un certain nombre de situations typiques.

Le déroulement de la première phase montre un fonctionnement correspondant à celui prévu dans l'analyse a priori, sauf en ce qui concerne le passage à l'approximation affine, pourtant implicitement en jeu dans tout ce qui précède. L'introduction de la fonction φ semble inscrire ce passage dans un jeu formel qui perd tout sens pour les élèves. La dimension purement formelle du passage, constatée ici, aurait pu être sans doute atténuée par le recours à la visualisation graphique de la dérivabilité en un point, en termes de linéarisation locale par zooms successifs c'est à dire suivant le point de vue b) mentionné dans l'introduction de cette partie. Ce point de vue b) ne donne pas d'information directe sur l'ordre de la différence entre f(a+h) et f(a)+f '(a)h comme nous l'avons déjà souligné mais nous semble plus proche d'une visualisation de l'expression en ligne que le point de vue a). Les difficultés rencontrées nous incitent cependant à faire l'hypothèse que le recours à cette visualisation ne suffirait pas à lui seul à résoudre de façon satisfaisante le problème qui se pose et qu'il est nécessaire de construire une problématisation spécifique de cette dimension d'approximation, à un autre moment du processus d'ingénierie, en reportant à ce moment là l'articulation des deux formulations de la dérivabilité en un point présentées ici comme des définitions équivalentes. Cette problématisation pourrait s'effectuer, nous semble-t-il, dans un contexte d'approximation de variation de grandeurs géométriques, aires et volumes, associées à un solide, en fonction d'incertitudes sur les dimensions, exploiter d'abord le tableur de la TI92 pour l'exploration numérique des variations, un tracé des nuages de points associés en passant dans le module statistique et l'utilisation de régressions linéaires pour rendre compte des quasi-alignements constatés, puis une mise en rapport de cette linéarisation statistique et de l'approximation fournie par la tangente, en exploitant cette fois les applications graphiques et de calcul formel. Une telle situation sera expérimentée en 1997-98.

Le déroulement de la deuxième phase de cette première séance est globalement conforme aux prévisions. Le jeu construit entre prévisions et vérifications, travail papier/crayon et travail machine, dans le cadre graphique ou formel, semble fonctionner correctement pour la grande majorité des élèves. On notera cependant la perturbation créée par le choix de la fonction f définie par $f(x)=|-3x+5|$ au lieu de la fonction de référence valeur absolue. On retrouve ici les difficultés bien connues des élèves avec la gestion des valeurs absolues. Les élèves rencontrent aussi à cette occasion la première situation de non dérivabilité avec existence de demi-dérivées à droite et à gauche. Leurs réactions, dans cette situation, semblent montrer, au moins chez certains, le repérage rapide d'une configuration graphique qui pose problème mais de façon très floue. L'association fonction dérivable en un point / fonction dont le graphe est localement presque affine, ne semble pas opérationnelle pour statuer dans ce cas. On peut penser que la difficulté est ici renforcée par le fait que le graphe est affine par morceaux. La mise en place de la notion de dérivée a exploité cette caractéristique mais surtout dans une perspective de questionnement de représentations graphiques. On n'a à aucun moment institutionnalisé cette image graphique de la dérivabilité en tant que telle. Même si l'on réserve à une phase ultérieure l'introduction de l'approximation affine, il nous semble nécessaire a posteriori d'être plus attentif dès la première phase à la mise en place de cette visualisation de la dérivabilité et de l'exploiter ensuite systématiquement à l'occasion de la gestion des exemples dans la deuxième phase, pour installer un contrôle graphique par zoom de la dérivabilité en un point.[6]

---

[6] Nous savons bien que ce contrôle n'est pas parfaitement fiable (cf. les exemples fournis par A.Deledicq et M.Diener dans (Deledicq & Diener, 1989) mais, dans ce premier contact avec les dérivées, il nous semble tout à

Soulignons que les entretiens réguliers menés avec six élèves en 1996-97 montreront que très peu d'élèves construiront spontanément ce type de contrôle graphique de la dérivée. Compte-tenu des fonctions rencontrées et travaillées, c'est plutôt la liaison continuité-dérivabilité, avec l'exception des demi-tangentes verticales associées à la fonction racine carrée qui s'installera.

A la fin de la séance, l'enseignante décide de donner à étudier hors classe, pour la séance suivante, une autre fonction avec des valeurs absolues, du second degré cette fois. Comme le montre la reprise dans la seconde séance, l'étude menée pour |-3x+5| dans la première séance n'a pas suffisamment armé les élèves pour faire face à l'augmentation de complexité, même avec l'aide de la calculatrice. Ceci était a priori prévisible, si l'on envisage le détail des calculs et de l'argumentation à développer pour résoudre de façon satisfaisante le problème posé. En revanche, le repérage des points de non-dérivabilité ne semble plus ici poser problème, la situation étant de ce point de vue visiblement rapprochée de la situation précédente. En fait, l'enseignante ne se contente pas dans cette situation d'effectuer le travail mathématique nécessaire à la résolution. La situation est travaillée également dans le cadre géométrique, en faisant appel aux deux paraboles naturellement associées à la fonction f et à des arguments de symétrie, la propriété de tangence étant implicitement considérée comme une propriété conservée par symétrie. Cette volonté d'associer le cadre géométrique au travail d'analyse se retrouve d'ailleurs lors de l'étude de la fonction racine carrée puisque c'est via le cadre géométrique que s'effectue la première preuve de la conjecture sur la tangente. Ces interactions avec le cadre géométrique sont ici à la charge de l'enseignante, sans faire l'objet d'une dévolution particulière en direction des élèves. En revanche, on notera que ces derniers participent sans difficultés au jeu collectif qui s'établit ainsi. Le jeu entre travail papier crayon et travail machine nous semble, lui, moins convaincant que dans la première séance, notamment pour l'exemple de la fonction valeur absolue. Il apparaît après les 30mn de travail sur cet exemple, comme une excroissance un peu gratuite et on le sent d'ailleurs à l'atmosphère de la classe. Pour la fonction racine carrée, le cas est différent, le travail a été plus court et la technique utilisée, invisible dans la production de la machine, a d'autre part valeur de méthode.

La dernière fonction introduite est gérée assez rapidement comme prévu dans le scénario : il ne s'agit pas ici d'en faire une étude « sérieuse », il s'agit simplement d'introduire l'idée que les exemples rencontrés ou qui seront rencontrés au cours de cette première année de travail avec les dérivées ne sont pas les seuls exemples possibles de non-dérivabilité, que des situations beaucoup plus complexes peuvent se produire.

L'introduction de la fonction dérivée, comme l'on pouvait raisonnablement s'y attendre se fait sans poser de problème particulier. On notera cependant le flottement qui se produit lorsque les élèves ont à effectuer des prévisions sur les fonctions affines. Pour de telles fonctions, on peut penser que l'image de la tangente superposée avec le tracé de la représentation graphique en tout point peut induire l'idée que la fonction et sa dérivée coïncident aussi et contribuer au flottement constaté.

En résumé, on voit là une partie du scénario qui semble opérationnelle, même si elle est encore susceptible d'améliorations. Le temps qui lui est consacré ici peut-être aisément réduit, si l'on rencontre des contraintes plus strictes. Il suffit pour cela, par exemple, de se limiter comme le prévoyait le scénario initial à la fonction de référence valeur absolue au lieu de

---

fait inutile de soulever ce type de problèmes et plus important d'ancrer une image graphique robuste et opérationnelle de la dérivabilité en un point.

s'engager dans l'étude de fonctions plus complexes. Il est clair que si l'on se limite à cette dernière, l'identification des équations des demi-droites qui constituent le tracé, ne posera pas les mêmes difficultés. En revanche, le problème d'interprétation de la fonction *sign* demeure. Le recours au cadre géométrique n'avait pas été prévu dans le scénario mais la perspective ainsi introduite nous semble tout à fait intéressante et viable a posteriori.

Le lecteur trouvera en annexe le résumé de cours distribué aux élèves à l'issue de la première expérimentation de ce scénario.

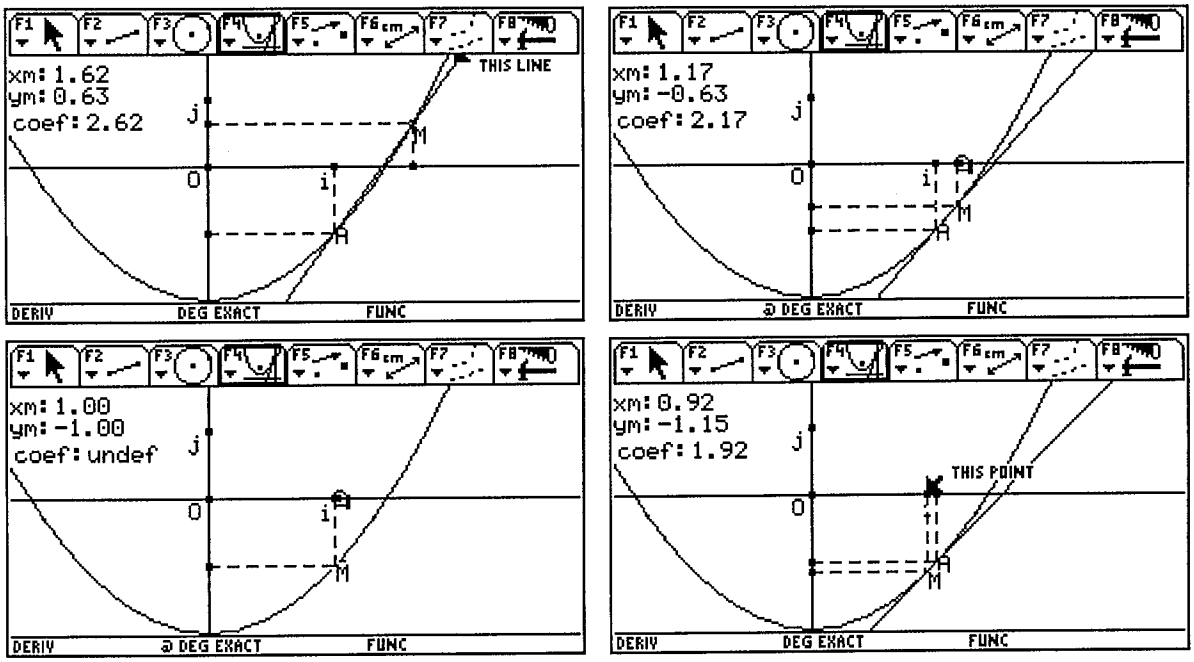
Annexe 3 : Résumé de cours sur les dérivées

DERIVEES

I Etude locale de deux fonctions.

a) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 - 2$.

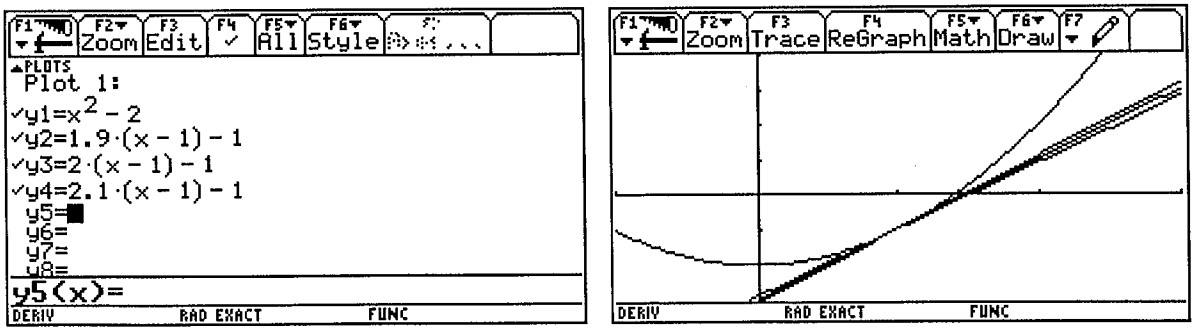
On se propose de faire une étude locale de f au voisinage du point A d'abscisse 1 et en particulier d'essayer d'approcher la courbe représentative de f par une droite. Pour cela, on considère une sécante (AM) à la courbe et on regarde ce qui se passe quand M " tend " vers A.



Quand M est en A la sécante n'existe plus (" *undef* " pour son coefficient directeur), mais cette droite a-t-elle une position limite quand M tend vers A, et quel est alors le coefficient directeur de cette droite " limite " ?

L'étude graphique à partir du module géométrie de la TI, nous amène à penser que la droite qui nous intéresse à un coefficient directeur voisin de 2. On va donc utiliser le module graphique de la machine, en traçant :

- la courbe représentative de la fonction,
- trois droites passant par A, celles de coefficients directeurs 1,9 ; 2 et 2,1.



Des zooms successifs centrés en A ne nous permettent pas de choisir la droite " la plus proche de la courbe ". Il apparaît donc nécessaire de définir un critère pour pouvoir choisir la droite.

Pour cela, M_h étant le point de la courbe d'abscisse 1+h, P_h point de la sécante d'abscisse 1+h ($h \neq 0$), on va calculer $\overline{P_hM_h}$ et étudier pour chacune des droites la limite de $\overline{P_hM_h}$ quand h tend vers 0.

Coefficient directeur	$\overline{P_hM_h}$
1,9	$h^2 - \frac{h}{10}$
2	h^2
2,1	$h^2 + \frac{h}{10}$

Dans les trois cas la limite en 0 de $\overline{P_hM_h}$ est 0.

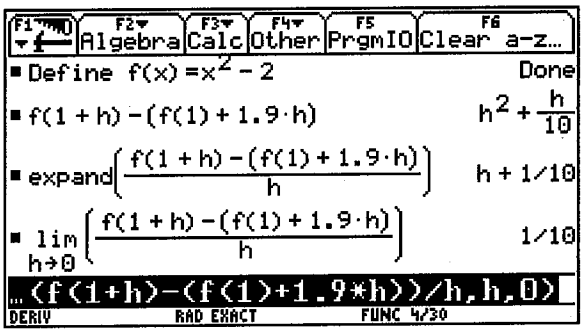
On va donc chercher s'il y en a une qui " tend plus vite vers 0 " que les autres.

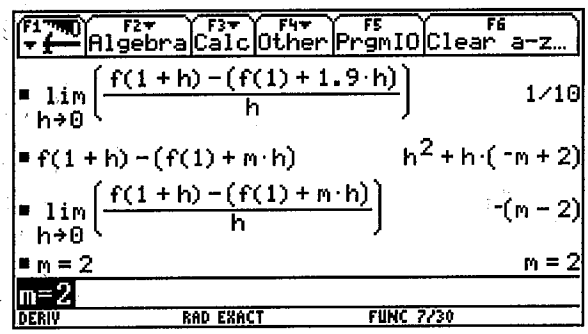
Pour cela, on cherche la limite du rapport $\frac{\overline{P_hM_h}}{h}$ en 0

Parmi les trois droites étudiées, seule celle de coefficient directeur 2 fournit une limite nulle.

Est-ce la seule ? Peut-on trouver une autre droite de coefficient directeur m pour laquelle $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\overline{P_hM_h}}{h} = 0$?

On fait les calculs à la main, puis avec la machine :





et on trouve que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{P_hM_h}}{h} = 0 \text{ si et seulement si } m = 2$$

On va donc retenir que, au voisinage de x = 1 :

Les droites passant par A et de coefficients directeurs 1,9 ; 2 ; 2,1 et peut-être d'autres sont " proches " de la courbe représentative de f,

La **seule droite passant par A** pour laquelle $\frac{\overline{P_hM_h}}{h}$ est **négligeable devant h**, c'est à dire $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\overline{P_hM_h}}{h}=0$ est celle de coefficient directeur 2.

Cette droite particulière, est appelée **tangente** en A à la courbe représentative de f.

Ce nom de tangente fait penser à la tangente à un cercle. On connaît ses propriétés. Il semble normal de chercher dans le cas que l'on vient de rencontrer quels sont les points d'intersection de cette " tangente " avec la courbe représentative de f.

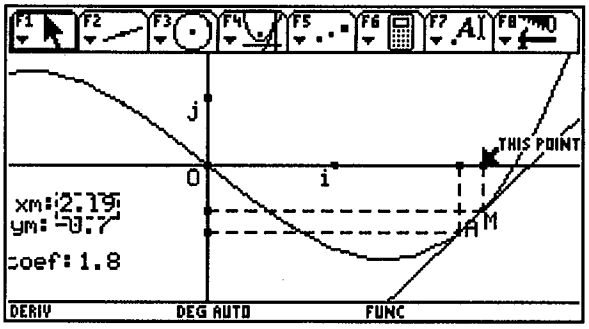
Pour cela, de façon classique, on résout le système formé par l'équation de la courbe et celle de la droite.

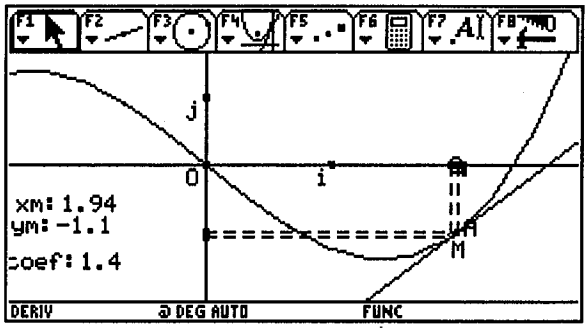
On trouve que la tangente " coupe " la courbe en deux points confondus.

$$x^2-2=2(x-1)-1$$
$$x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)^2=0$$

b) Etude de la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{x^3-6x}{4}$ au voisinage de 2

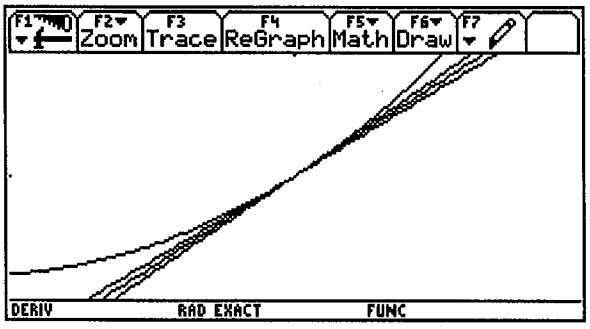
On procède comme pour la première fonction.

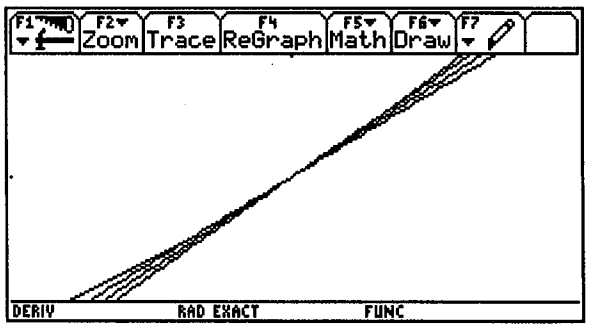




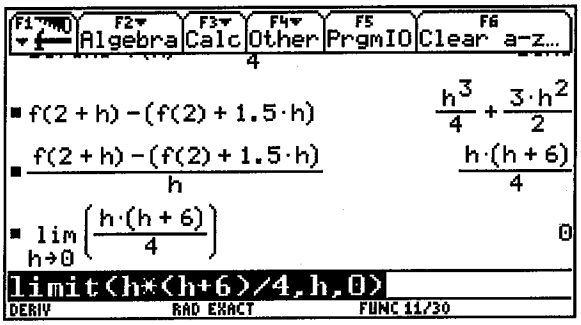
Il semble cette fois que ce soient les droites dont le coefficient directeur est proche de 1,5 qui soient susceptible de convenir.

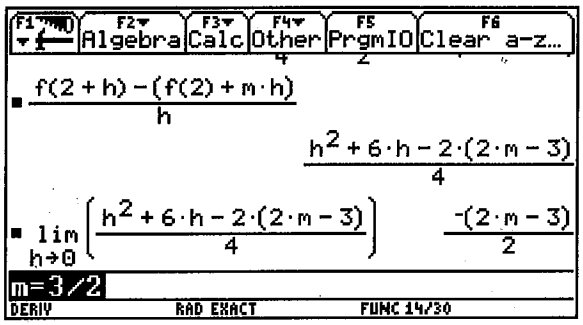
L'étude avec le module graphique et numérique ne permet pas davantage de trancher,





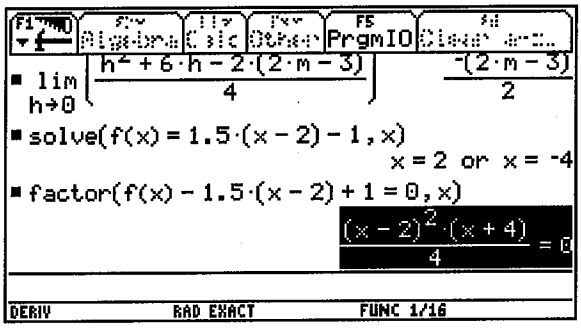
On fait de nouveau les calculs de $\frac{\overline{P_hM_h}}{h}$, cette fois avec la machine,

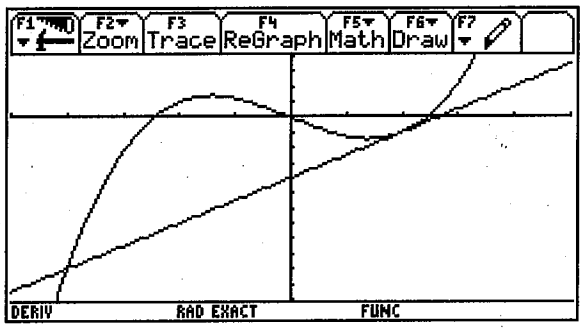




La **seule droite** pour laquelle $\frac{\overline{P_hM_h}}{h}$ est **négligeable devant h**, c'est à dire $\lim_{h\to 0}\frac{\overline{P_hM_h}}{h}=0$ est celle de coefficient directeur $\frac{3}{2}$. C'est par définition la tangente en A à la courbe.

Quelles sont les intersections de cette tangente avec la courbe ?





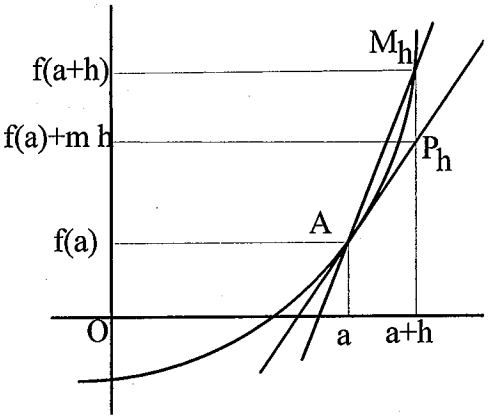
Comme précédemment la tangente " coupe " la courbe en deux points confondus en A mais elle recoupe la courbe en un autre point d'abscisse -4

c) Etude de cette même fonction au voisinage de 0.

Cette fois, la courbe " traverse " sa tangente au point d'abscisse 0.

II Définition de la dérivabilité en un point a.

Soit f une fonction, définie en a et sur un intervalle ouvert contenant a



On trace la droite (D_m) de coefficient directeur m passant par le point A d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction f,

On trace la droite (AM_h) pour M_h point de la courbe d'abscisse a+h,

Soit P_h le point de (D_m)d'abscisse a+h,

Si $\overline{P_hM_h}$ est négligeable devant h, on dit alors :

- que la droite de coefficient directeur m est tangente à la courbe (C) en A

- que la fonction f est dérivable en a et que son nombre dérivé en a est m.

dire que $\overline{P_hM_h}$ est négligeable devant h signifie que $\lim_{h\to 0}\frac{\overline{P_hM_h}}{h}=0$

$\overline{P_hM_h}=f(a+h)-(f(a)+m\,h)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-(f(a)+m\,h)}{h}=0$$

Les 3 expressions suivantes sont équivalentes

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-m=0$$

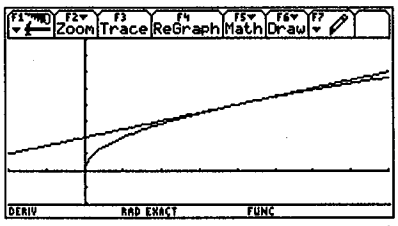
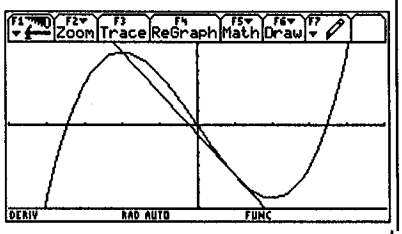
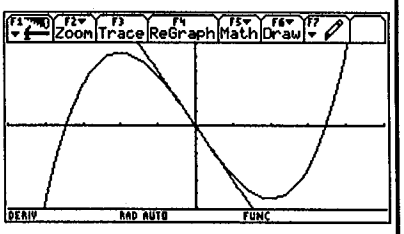
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=m$$

Définition 1

Soit f une fonction, définie en a et sur un intervalle ouvert contenant a

Si le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie **m** lorsque h tend vers 0, alors on dit que la fonction f est dérivable en a ; **m** est appelé nombre dérivé de f en a.

- S'il existe, le nombre dérivé m est le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe
- Le coefficient directeur de la tangente en A est la limite quand h tend vers 0 du coefficient directeur de la sécante (AM_h) : en effet $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la sécante (AM_h)
- La tangente en A d'abscisse a à la courbe représentative de la fonction est la droite d'équation $y=m(x-a)+f(a)$
- La tangence est un phénomène local. La tangente en A et la courbe ont en commun au minimum le point A compté 2 fois, - Il peut y avoir d'autres points communs, la courbe peut traverser sa tangente en A, et dans ce cas A est compté un nombre impair de fois, minimum 3.

Fonction racine carrée	$f(x)=\frac{x^3}{3}-4x$	$f(x)=\frac{x^3}{3}-4x$
		
La tangente au point d'abscisse 1 ne recoupe pas la courbe.	La tangente au point d'abscisse -1 recoupe la courbe au point d'abscisse -2.	La tangente au point d'abscisse 0 traverse la courbe en ce point.

Approximation affine.

Si on pose $\frac{\overline{P_h M_h}}{h} = \varphi(h)$, on obtient $f(a+h) = f(a) + m\,h + h\,\varphi(h)$

- f(a)+ m h est une approximation affine de f(a+h) au voisinage de a. C'est celle pour laquelle la différence avec la valeur de la fonction est négligeable devant h.

Définition 2

Soit f une fonction, définie en a et sur un intervalle ouvert contenant a

S'il existe un nombre réel m et une fonction φ tels que :

$f(a+h) = f(a) + m\,h + h\,\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, alors f est dérivable en a et son nombre dérivé est m.

III Quelques exemples de recherche de nombre dérivé en a.

La fonction .	Son nombre dérivé en a.
$f(x) = x^2$	2a
$f(x) = -3x + 5$	-3 La tangente est confondue avec la droite.
$f(x) = \frac{1}{x}$	pour $a \neq 0$ $\quad -\frac{1}{a^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	pour $a > 0$ $\quad \frac{1}{2\sqrt{a}}$
$f(x) = \lvert -3x + 5 \rvert$	Pour $a < \frac{5}{3}$ $\quad$ - 3 Pour $a > \frac{5}{3}$ $\quad$ + 3 Pas dérivable en $\frac{5}{3}$

IV Dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite

- Soit f une fonction, définie en a et sur un intervalle [a ; b], avec b différent de a

Si le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie **m** lorsque h tend vers 0 en étant positif, alors on dit que la fonction f est dérivable à droite en a ; **m** est appelé nombre dérivé à droite de f en a.

- Soit f une fonction, définie en a et sur un intervalle [b ; a], avec b différent de a

Si le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie **m** lorsque h tend vers 0 en étant négatif, alors on dit que la fonction f est dérivable à gauche en a ; **m** est appelé nombre dérivé à gauche de f en a.

V Cas de non dérivabilité en a .

<table>
<tr><td>

- f pas définie en a

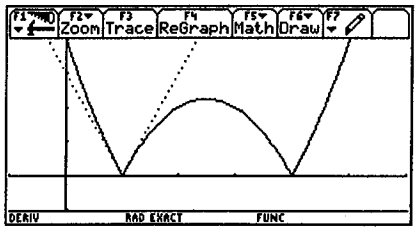
</td><td></td></tr>
<tr><td>

- f dérivable à gauche en a et à droite en a mais nombres dérivés à gauche et à droite différents.

$f(x) = |x^2 - 5x + 4|$

pour a = 1

Deux demi-tangentes.

</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>

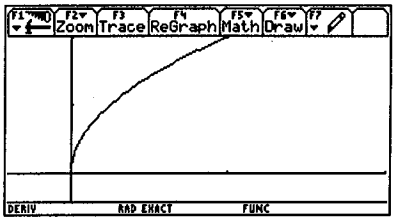
- le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite infinie quand h tend vers 0 (resp. une limite infinie à droite ou à gauche)

Une tangente parallèle à l'axe des ordonnées (resp. une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

$f(x) = \sqrt{x}$

pour a=0

Une demi- tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

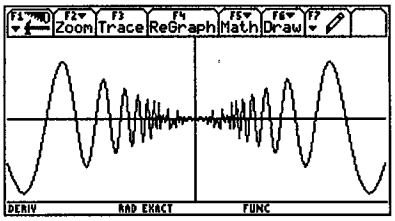
</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>

- le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers 0

$f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

pour a = 0

Pas de tangente en A.

</td><td> 
</td></tr>
</table>

Chapitre 3
Ingénierie : propriétés et applications des limites et dérivées

A la suite de l'introduction des limites et des dérivées présentée au chapitre précédent, l'algèbre des limites et des dérivées va se mettre en place, en faisant cette fois fonctionner la commande de dérivation formelle en boîte noire. Nous présentons deux séances de l'ingénierie correspondante dans le premier paragraphe de ce chapitre (ingénierie 4). Elles visent à faire travailler les élèves sur les principes et règles du calcul symbolique des limites et des dérivées, et préparent l'utilisation de ces notions pour les études de fonctions.

La phase suivante de l'ingénierie aborde la question du lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction. Elle ne fait pas l'objet d'une présentation de situations dans ce rapport. Nous donnons ici quelques indications sur son déroulement. Il est prévu de partir des fonctions affines et du lien connu pour ces fonctions entre sens de variation et signe du coefficient directeur, puis de passer aux fonctions du second degré mises sous forme canonique, pour lesquelles le sens de variation a également été déjà déterminé avec des moyens purement algébriques. Les conjectures issues de ces deux cas particuliers sont ensuite mises à l'épreuve sur des fonctions plus complexes pour lesquelles sont données des reproductions de tracés machine de la fonction et de la dérivée. Le théorème liant sens de variation et signe de la dérivée est ensuite admis comme le prévoient les programmes. Pour lui donner sens, on revient à la visualisation de la dérivabilité en un point introduite initialement, qui permet de voir dans le cas général une généralisation du cas affine. Ce travail se poursuit par une tâche d'association entre graphes de fonctions et graphes de dérivées, les choix étant effectués pour prendre en compte les différentes valeurs possibles des variables en jeu dans l'association et présenter des associations erronées mais tentantes. Il se termine enfin par une tâche de production de tracé de fonction dérivée pour une fonction donnée par sa représentation graphique.

Puis, l'interprétation cinématique de la notion de dérivée est abordée. Deux situations sur ce thème sont présentées dans le second paragraphe de ce chapitre (ingénierie 5). L'interprétation cinématique se fait bien après l'introduction de la notion de dérivée, et postérieurement au calcul symbolique des fonctions dérivées. C'est l'occasion de remettre en scène le caractère local de la dérivée en un point, dont on pense qu'il s'est effacé derrière le caractère global de la fonction dérivée. La notion de vitesse permet aussi de faire le lien entre le coefficient directeur de la tangente et le nombre dérivé, et donc de préparer l'étude du sens de variations.

La dimension « outil » de la notion de dérivée se développe ensuite avec l'étude de situations fonctionnelles diverses : un problème d'optimisation, le problème de la cuve (exposé dans le chapitre I) et un problème de recherche de fonctions sous contraintes, le problème du raccord de tuyaux, que nous exposons dans le troisième paragraphe (ingénierie 6) de ce chapitre.

INGENIERIE 4.
Propriétés algébriques des limites et dérivées

Nous commençons par présenter les notions. Puis nous examinons comment l'introduction d'un instrument de calcul symbolique s'insère dans l'apprentissage. Pour chacune des séances, nous exposons les choix qui ont présidé à la mise en place, une observation et un bilan. Les observations ont été ici réalisées dans la classe de Caen (Classe B).

A. Les notions

Limites

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les concepts d'analyse combinent de nombreux aspects dans une même symbolique. Parmi ces aspects, on retrouve dans les différents concepts deux aspects généraux : le même symbole représente à la fois le résultat d'un processus et un objet sur lequel des calculs sont possibles.

Ainsi (Monaghan, 1994), $\lim_{x\to a} f(x)$ peut être conçu comme « un processus dynamique d'approche d'une valeur donnée », et aussi comme une expression algébrique dépendant de a. Le processus d'approche donne un sens à la notion, mais il faut le dépasser pour traiter les entités de l'analyse comme des quantités algébriques. Cette nécessité est visible par exemple dans la situations 5 de l'ingénierie sur les limites du chapitre précédent.

Dans l'ingénierie du chapitre précédant, différentes situations numériques, graphiques et algébriques ont été présentées, permettant d'introduire la notion de limite. Il s'agit maintenant de traiter les limites comme des entités algébriques. Dans les programmes actuels de la classe de Première scientifique, l'introduction de la notion de limite est l'objet de la rubrique « le langage des limites ». L'algébrisation des limites est traitée dans la rubrique « Enoncés usuels sur les limites » et comprend des énoncés sur les opérations algébriques et sur la comparaison des fonctions. Il est précisé que ces énoncés sont admis (sans démonstration) et que « toute règle relative à des cas d'indétermination est hors programme ».

Dans la pratique, les élèves auront à calculer les limites de fonctions dans les études de variations. Pour cela, ils disposent du répertoire de fonctions de références dont les limites sont connues à partir de l'étude menée dans la rubrique « le langage des limites ». Les propriétés de conservation des opérations algébriques sont appliquées de façon naturelle quand elles ne conduisent pas à un cas d'indétermination.

Par exemple, il est clair que, puisque $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}\right)=\infty$ et $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\infty$, alors :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\infty$$

Par contre, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)$ suppose un raisonnement passant par une factorisation :

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}\left(1-x^2\right)\right)=\infty$, car $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}\right)=\infty$ et $\lim_{x\to 0}\left(1-x^2\right)=1$ ou la mise en œuvre de la « croissance comparée » : $\frac{1}{x^4}$ « tend plus vite » vers l'infini que $\frac{1}{x^2}$.

Dérivation

Les différents points de vue liés à la dérivation ont été présentés au chapitre précédent. Il s'agit ici de développer le point de vue algébrique par lequel la dérivation prend l'aspect d'une opération sur un ensemble des fonctions. Les dérivées des fonctions de référence sont connues à partir du calcul de nombres dérivés sous forme algébrique. On a ainsi un « tableau des dérivées » qui sert de référence. Les dérivées des autres fonctions, polynômes, fractions rationnelles, trigonométriques sont obtenues à l'aide de règles symboliques de transformation. Ces règles concernent en premier lieu les sommes, produits et quotients de fonctions, et, en second lieu, la composition des fonctions

Le programme actuel limite les applications de ces règles à « des exemples ne présentant aucune complication technique » et précise que la composition des fonctions est abordée seulement dans le cas de la dérivée de $x \to f(ax+b)$.

Les séances d'introduction du nombre dérivé et de calcul des dérivées des fonctions de référence ont été exposées au chapitre précédent. Dans ce chapitre, nous allons exposer une séance consacrée au calcul symbolique des dérivées.

B. L'intervention d'un instrument de calcul symbolique

Pertinence des techniques

Le calcul des limites et des dérivées est un domaine d'application du calcul symbolique. Utilisant des règles, les logiciels et calculatrices peuvent donner les limites et dérivées des fonctions usuellement étudiées dans les classes du secondaire. La question de la pertinence des pratiques « papier/crayon » dans ce domaine peut donc se poser. Comme dans d'autres cas où cette question se pose, elle n'est pas véritablement tranchée : au baccalauréat, la TI92 est actuellement autorisée, mais on exigera de l'élève qu'il restitue les étapes d'un calcul de dérivée « comme s'il l'avait fait à la main ». Nous pensons pour notre part que les techniques (au sens de Chevallard, 1991) mises en œuvre par les élèves pour le calcul « papier/crayon » des limites et dérivées sont des connaissances utiles pour accéder aux théories (Lagrange, 1997). En ce sens, il est aussi important qu'ils apprennent à « se faire aider » de la TI92 pour les parties les plus calculatoires, pour vérifier tout en gardant la maîtrise de leur calcul.

Par ailleurs, nous avons montré au chapitre précédent l'importance de ne pas considérer d'emblée les notions de limite et de dérivée à partir des résultats donnés par un système de calcul symbolique comme le module HOME de la TI92, si l'on veut donner un sens autre que formel aux concepts. Après les phases d'introduction, il devient certes légitime d'utiliser cet artefact pour obtenir des valeurs de limites et de dérivées, dans la mesure où les élèves peuvent donner un sens à ces valeurs. Mais, ici aussi, des précautions doivent être prises. En effet, si l'on ne fait pas interagir les différents aspects du concept, il risque de prendre sa signification seulement dans le contexte le plus accessible, c'est-à-dire celui où l'élève utilise le calculateur symbolique pour obtenir les réponses. Monaghan (1994) montre par exemple que des élèves utilisateurs de DERIVE voient le concept de limite seulement comme résultat

donné par ce logiciel, et éliminent l'aspect infinitésimal du concept. De la même manière, dans l'expérimentation qui fait l'objet de ce rapport, nous avons rencontré dans les entretiens (partie III) des élèves ne sachant plus donner des limites comme $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$ sans utiliser leur TI92.

L'objectif des séances présentées dans l'ingénierie est donc que les élèves utilisent la TI92 comme calculateur symbolique, tout en ayant une réflexion sur les règles formelles qui permettent de développer des techniques de calcul sans TI92, et en restant suffisamment proche de la signification mathématique des concepts, pour que la réflexion ne soit pas seulement de nature formelle.

Types de tâches

Les tâches qui paraissent appropriées à cet objectif consistent soit à généraliser à partir d'exemples de calculs exécutés par la TI92, soit à comparer une anticipation de l'élève au résultat donné par la TI92. Dans les deux types de tâches, les exemples peuvent être des fonctions explicites (par exemple $x \to x^2 - 3$) ou des fonctions abstraites (par exemple $x \to f(ax)$), ou une combinaison des deux (par exemple $x \to \frac{f(x)}{x^2-3}$). Ils peuvent être fournis par le professeur ou construits par les élèves.

Le premier type de tâche (observation, généralisation) peut conduire à l'explicitation de règles dégagées sur des exemples et/ou à leur mise en œuvre sur d'autres exemples. La réflexion sur les concepts en jeu intervient pour fonder la généralisation. Dans le second type de tâche (anticipation, comparaison) on suppose que des « règles en acte » sont construites spontanément par les élèves et que la comparaison aux résultats de la TI92 permettra de les adapter. La réflexion intervient notamment lorsque des divergences sont constatées entre l'anticipation et le résultat de la TI92.

Pozzi (1994) a étudié le travail d'élèves confrontés au premier type de tâche. Il s'agissait de découvrir les règles de dérivation des produits et des quotients. Il montre les difficultés rencontrées par les élèves quand ils essaient de raisonner sur un plan seulement « syntaxique ».

Par exemple, calculant à l'aide de DERIVE la dérivée du produit $x \to \cos(x)\left(7x^3 + 2x\right)$, les élèves obtiennent l'expression $(21x^2 + 2)\cos(x) - x\left(7x^2 + 2\right)\sin x$ et restent bloqués parce qu'ils ont repéré dans cette expression une partie centrale $\cos(x) - x\left(7x^2 + 2\right)$ qu'ils trouvent très proche de la fonction initiale. Leur manque de connaissances algébriques, en particulier leur inattention vis à vis du parenthésage, est un handicap pour franchir cet obstacle. L'auteur montre que les élèves peuvent accéder à un niveau « sémantique », dans la recherche d'une règle de dérivation des quotients. La forme donnée par DERIVE aux dérivations, où les traits de fraction isolent les sous-expressions, l'incitation du professeur à utiliser des exemples incluants des fonctions abstraites, leur permettent une meilleure réflexion sur la forme des dérivations obtenues.

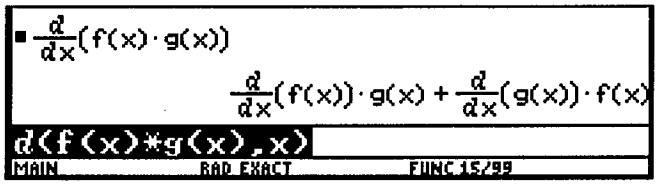
L'étude de Pozzi montre que tous les exemples et tous les résultats de DERIVE ne sont pas équivalents quant à la réflexion qu'ils produisent chez les élèves. Il montre aussi que dans le

cas de la dérivation, la réflexion est de nature algébrique. Le situations qui ont donné son sens à la notion de dérivée sont difficilement présentes.

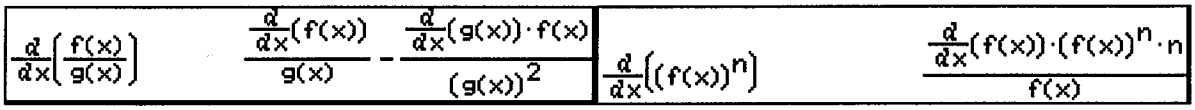
Contraintes de l'environnement technologique

Certaines contraintes conditionnent les exemples que les élèves peuvent expérimenter. Par exemple, la TI92 ne simplifie pas les limites de fonctions abstraites. Le travail sur les limites devra donc se faire sur des fonctions explicites

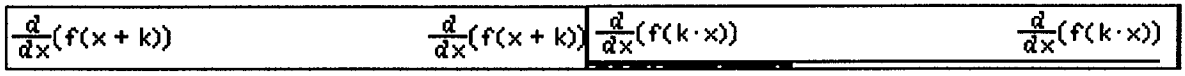
La TI92 dérive les sommes, produits et quotients de fonctions abstraites :



On s'aperçoit cependant sur le cas du quotient et de l'exponentiation que les formes obtenues peuvent être différentes des formes habituelles.



La TI92 ne dérive pas les fonctions composées abstraites du programme $x \to f(x+k)$ et $x \to f(k \cdot x)$



Plus que d'absence de capacité de calcul, il s'agit semble-t-il, de contraintes d'expression de la notation $\frac{\partial}{\partial x}$ adoptée pour la dérivation. En effet, si la composée d'une fonction f et de la fonction $x \to k \cdot x$ s'exprime comme la fonction $x \to f(k \cdot x)$, il n'y a pas de moyen d'exprimer la composée de la fonction dérivée de f et de la fonction $x \to k \cdot x$.

Sur le plan du travail des élèves, ce phénomène est dangereux : il est apparu dans une séance de la première année d'expérimentation que les élèves ne parvenaient pas à interpréter les résultats de la TI92 comme le retour de la fonction de départ. Ils interprétaient ce résultat par transcription de la notation $\frac{\partial}{\partial x}$ dans la notation « prime ». Cette transcription fonctionnait dans presque tous les cas qui leur étaient présentés, y compris le cas "composé" $f(k+x)$. Elle était fausse seulement dans le cas $f(kx)$. Nous avions noté qu'il y avait tous les éléments d'une "misconception", qui pouvait avoir des conséquences jusque dans l'application pratique de la règle de dérivation de $f(kx)$. Des incompréhensions profondes demeuraient de plus sur la nature de la différence de notation de la dérivée sur la TI92 et en papier/crayon.

C. SITUATION 1 : Le passage à la limite dans les opérations algébriques

L'objectif dans le cas des limites est que les élèves reconnaissent d'une part les propriétés "naturelles" de conservation des opérations et d'autre part les cas d'indétermination où ces propriétés ne peuvent s'appliquer.

Le type de tâches est le premier cité ci-dessus : observation d'exemples, puis généralisation. Le but est que l'élève conçoive les cas d'indétermination comme limitation des généralisations, et qu'il puisse faire référence à des exemples pour que les cas simples d'indétermination et leur traitement soient disponibles. La justification mathématique n'est pas oubliée : l'élève est invité à trouver les raisons tenant aux propriétés des fonctions qui peuvent justifier la propriété de façon générale, ou le traitement du cas d'indétermination.

La capacité de la TI92 à donner les limites de fonctions explicites est mise à contribution pour l'obtention des exemples. Souhaitant que les élèves étudient de nombreux exemples, nous faisons le choix d'utiliser l'éditeur de données (DATA EDITOR) de la calculatrice pour automatiser les calculs et préparer la présentation des résultats.

Dans une expérimentation menée la première année la possibilité avait été donnée aux élèves de faire varier le point auquel les limites sont calculées. Cela permettait de multiplier les exemples, mais, malgré l'utilisation de l'éditeur de données, cela donnait une trop grande complexité. D'une part, le pilotage de la TI92 devenait difficile, d'autre part, les connaissances sur les fonctions de référence devenaient vraiment instables quand on variait le point où est prise la limite. C'est pourquoi nous choisissons d'étudier seulement des limites en zéro, et nous évitons de proposer des exemples où les limites par valeur supérieure et par valeur inférieure ont distinctes.

Les choix pour la séance de travaux dirigés

Sur un plan technique, nous compensons une difficulté relative à la machine apparue dans la première expérimentation : l'éditeur se bloquait lorsque l'élève tentait de rajouter des fonctions dans l'éditeur. Pour éviter cela, nous faisons remplir dans une phase préliminaire les deux colonnes de données de zéros en nombre suffisant. Ainsi, il n'y aura plus ajout de fonctions nouvelles, mais remplacement, ce qui ne bloque pas l'éditeur. La méthode est donnée dans le « Point technique préparation de la machine » en première page du polycopié élève (annexe 1).

Nous faisons aussi le choix de conduire les élèves progressivement vers la production et l'exploitation de leurs propres exemples. En effet, l'expérimentation DERIVE nous a montré que le passage à un fonctionnement mathématique dans les phases de recherche suppose que l'élève soit à même de mener une expérimentation autonome. C'est pourquoi nous prévoyons trois phases où la dévolution à l'élève de la production d'exemples et de l'utilisation de l'éditeur de données, ainsi que le passage à la réflexion mathématique se font progressivement.

- Première phase (dirigée) : limites de sommes.

Dans cette phase, le professeur dirige les élèves pour l'entrée de fonctions dans l'éditeur de données (Cf annexe 1 ci-dessous). Les fonctions sont données par le professeur. Les élèves ont à remplir un tableau de propriétés préparant une synthèse collective.

Puis ils ont à construire un nouveau tableau d'exemples illustrant chacun des cas. Ce travail est préparé dans les deux premiers tableaux de la page 2 du polycopié (annexe 2).

• Seconde phase (recherche autonome) : limites de produits.

Cette fois, les élèves ont à trouver eux-mêmes les différents cas et les exemples associés.

La synthèse portera sur l'exhaustivité des cas. Ce travail est préparé dans les troisième et quatrième tableaux de la page 2 du polycopié.

• Troisième phase (raisonnement puis vérifications) : limites de quotients

Les élèves auront à anticiper les cas et les propriétés à partir des cas et propriétés vus pour le produit, en transformant le quotient en produit. Ils devront ensuite produire des exemples pour ces différents cas, et, si besoin, les valider à l'aide de la TI92. Ce travail est préparé dans les deux derniers tableaux de la page 2 du polycopié.

Déroulement

La séance de travail dirigé a été la cinquième séance sur les limites. Elle suit une séance où le calcul des limites avec la TI92 a été introduit pour le calcul d'une limite non accessible aux élèves.

Première phase (dirigée) : limites de sommes.

8h15 Préparation du tableau dans l'éditeur de données

En début de séance le professeur commence par un rappel du sens de variation d'une somme de fonctions, puis il pose le problème de la limite d'une somme de fonctions, puis du produit et du quotient.

Il présente le travail, rappelle que la machine "sait faire les limites" et indique qu'on va utiliser de « DATA EDITOR » qu'il présente comme un "mini-tableur". Il présente la manipulation qui permet de l'éviter. le problème technique qui se pose dans ce module (polycopié élève page 1).

Il indique comment passer dans le module "éditeur de données", (DATA EDITOR), donnant un nom au tableau ainsi créé. Il guide les élèves pour remplir les colonnes de zéros à l'aide de la liste définie précédemment.

8h30

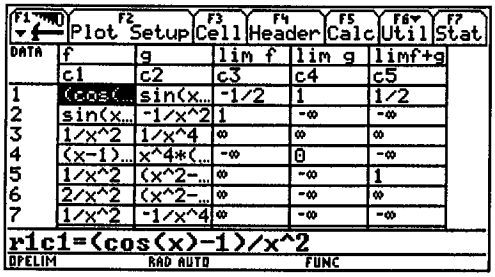
Il indique comment remplir la ligne de titre, le "décor".

Il vérifie auprès des élèves que le format des colonnes permet de voir les cinq colonnes (f, *g*, lim f, lim *g*, lim f+*g*). Il indique qu'on doit obtenir le même tableau que dans le polycopié, et rappelle la commande "diamant f" pour le format des colonnes.

A 8h 40, la préparation du tableau est terminée. Il y a quelques difficultés techniques d'entrée des formules. Certains élèves ont des erreurs "*Dimension mismatch*", comme si on n'avait pas fait le remplissage par des zéros. Bizarrement, certaines colonnes sont de longueur 20, et d'autres de longueur 19. Le professeur corrige sur les calculatrices en rajoutant des zéros. Les élèves s'attachent à obtenir le même écran que celui, rétroprojeté, du professeur.

Le professeur écrit les fonctions au tableau (Voir annexe 1 ci-dessous).

Les élèves vont vite et à 8h 50, les fonctions sont entrées.



8h52. Réflexion sur le tableau obtenu

Les élèves recopient le tableau de leur calculatrice vers la page 1 de leur polycopié. Le professeur demande d'abandonner ctte recopie, de passer à la feuille suivante du polycopié et annonce qu'on "va réfléchir".

Il demande de remplir le tableau du haut de la page 2. "Est-ce que à la lumière de ces exemples (obtenus sur la calculatrice), on est capable d'obtenir un certain nombre de règles ?". Il amorce le remplissage du tableau en collectif. Il obtient des élèves la règle L + L' et l'exemple correspondant. Case à case, il demande les exemples du tableau. Mais pour + ∞ + L, il n'y a pas d'exemples, et une élève en fabrique un à partir de - ∞ + L .

Sur la dernière case (+ ∞ - ∞), le débat s'engage spontanément. "Après c'est + ∞", dit une élève. "Ben, non, pas forcément, répondent deux garçons, il y a - ∞ ou + ∞" "Ou même 1", dit un autre.

Le professeur demande "Dernier cas, qui propose une réponse ?". Il répond lui même : "Les trois dernières cases sont contradictoires" et fait repréciser les trois réponse trouvées. Il fait remarquer que la machine n'a pas donné "*undef*", mais qu'on ne peut avoir de règle, et fait porter un point d'interrogation dans le tableau. Il précise "qu'il faudra bien apprendre comment conclure", mais que c'est "une autre étape".

9h05 Production d'exemples sur la somme

Le professeur demande de remplir le second tableau (de la page 2 du polycopié) en "tableau d'exemples". Il précise "pas nécessairement en reprenant les fonctions (entrées dans la calculatrice)".

Il donne 5 minutes.

L'exploitation des traces recueillies (annexe 3) montre que, sur 23 élèves, 4 n'écrivent pas d'exemples, 6 élèves recopient les exemples entrés dans la phase précédente et que 13 élèves créent de nouvelles fonctions, parfois en modifiant les fonctions données ("à la place du 1, tu mets un 2..., à la place de x^2, tu mets x^4 ..." dit un élève à son voisin), ou en reprenant des fonctions des séances précédentes. Ils vont à des vitesses très différentes.

Le professeur demande de s'occuper surtout de la dernière colonne (+ ∞ - ∞).

A 9h10, il passe à la synthèse. Il demande des exemples pour + ∞ - ∞, donnant respectivement ∞, 0, + ∞

On obtient le tableau suivant :

f	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^2}+1$	$\frac{1}{x^2}$
g	$\frac{-1}{x^4}$	$-\frac{1}{x^2}-1$	$\frac{x^2-1}{x^2}$
	$-\infty$	0	1

Les exemples sont données par des filles qui ont fait la tâche très sérieusement (Gloria, le plus souvent).

Le professeur conclue "qu'on peut trouver n'importe quoi". Il demande si on peut trouver 10. Une des filles répond qu'elle peut trouver pour -2 et donne un exemple. Le professeur conclue qu'il n'y a pas de règle, et passe à l'étape suivante.

Seconde phase : limites de produits.

9h18. Le professeur présente le travail des troisième et quatrième tableaux du polycopié. Il indique qu'on peut ou non se servir de la machine. Il indique de remplacer la somme par le produit dans le "DATA EDITOR" ("décor" et formules).

9h 22. Les élèves travaillent dans un grand silence. Suite à une question d'une élève, le professeur précise qu'il faut s'assurer qu'on a tous les cas, mais que "c'est plus difficile que tout à l'heure".

Production des élèves

On trouvera ci-dessous en annexe 3 une synthèse des exemples produits par les élèves au cours de cette phase de recherche. Au vu de cette synthèse, on constate que quinze élèves sur vingt trois se sont effectivement investis dans la tâche. La majorité d'entre eux se sert surtout des exemples déjà entrés dans l'éditeur de données pour la somme. Ainsi, il traitent le cas des limites finies, puis un cas de limites infinies ($-\infty$ x ∞).

Dans les cas où une limite est finie et l'autre infinie, ils sont seulement cinq à distinguer selon le signe de la limite finie. Ces 5 élèves sont amenés à produire des exemples non déjà introduits pour la somme. Une seule élève traite tous les cas.

Dans les cas où une limite est infinie et l'autre nulle, seulement deux élèves proposent plusieurs exemples donnant des résultats différents et mettent ainsi en évidence l'indétermination. Sept autres élèves produisent des exemples isolés, en général inspirés des exemples introduits pour la somme.

9h 30. Synthèse

Tous les élèves ne sont pas arrivés au bout du tableau. La synthèse est plus animée que d'habitude, les élèves répondent aux questions posées par le professeur.

Pour le cas ∞ x ∞, l'exemple donné est $f(x)=\frac{1}{x^2}$ et $g(x)=\frac{1}{x^4}$. Le professeur demande la valeur de ce produit. La réponse est longue à venir. Le professeur essaie en fait de montrer qu'on peut raisonner sans la machine et peu d'élèves comprennent cette démarche.

A partir de ce cas, le professeur fait raisonner sur $+\infty$ x $-\infty$.

Pour le cas - ∞ x 0, les élèves donnent l'exemple $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$ et $g(x)=\frac{(x-4)}{\frac{1}{x^4}}$. Ils sont nombreux à conclure à la règle - ∞ x 0= 0.

Un élève propose - ∞ x 0= -4 et l'appuie par l'exemple $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $g(x)=\frac{(x-4)}{\frac{1}{x^4}}$. Le professeur fait calculer le produit, puis la limite de ce produit par raisonnement.

On conclue à - ∞ x 0= ?

Il y a ensuite une discussion sur le produit L x + ∞. Beaucoup d'élèves ont conclu à + ∞ sans distinguer selon le signe de L. Le professeur annonce que ca dépend de L. Il fait référence à ce qui précède pour L=0, puis fait distinguer L>0 et L<0. Des élèves proposent d'en déduire les règles pour L x - ∞.

Le professeur demande ensuite si tous les cas ont été envisagés. Il reprend les cas précédents en systématisant.

Troisième phase : limites de quotients

A 9h40 Le professeur annonce le travail sur le quotient. Il demande de réfléchir "sans la machine", à partir des règles trouvées pour le produit. Les élèves protestent, puis se mettent au travail. En fait cette phase de recherche tourne vite court, le professeur voulant passer à la synthèse pour des contraintes de temps.

A 9h44 il demande les réponses pour L (>0)/ +∞. Certains élèves annoncent + ∞, d'autres -∞, et un autre "proche de zéro". On a la même diversité de réponse pour L (>0)/ -∞, et les mêmes quotients avec L<0. + ∞/ + ∞ donnerait 1 ou "proche de 1" ou même 0, et de même + ∞/ - ∞ donnerait -1. Les élèves annoncent une indétermination pour 0/ + ∞.

A 9h52, devant cette confusion, le professeur fait reprendre des exemples, et, avec une partie de la classe, obtient les règles, et les cas d'indétermination. Certains élèves ne suivent plus, mais les autres proposent des exemples de façon active.

Le professeur tente de faire le lien avec le produit (f/g= f x $1/g$), mais il n'y a pas beaucoup d'écho. Il faudrait pour cela que les élèves aient conscience de la limite de $1/g$, en fonction de la limite de g. Le professeur essaie de leur faire voir ces propriétés "Si vous avez trouvé quelque chose de grand, son inverse va être... petit", mais sans beaucoup de succès.

Phase de conclusion

10 h Le professeur termine en annonçant que les tableaux obtenus sont "à savoir par cœur", c'est-à-dire "à savoir retrouver". Il souligne qu'on peut toujours conclure "sauf dans quatre mauvais cas" qu'il désigne comme "indéterminés". Il énonce les trois cas rencontrés et note que le cas 0/0 n'a pas été envisagé dans l'étude du quotient.

Bilan et améliorations possibles

Les choix faits pour cette séance de travail dirigé ont permis aux élèves d'entrer effectivement dans le travail de production d'exemples et de réflexion sur ces exemples.

Nous avons fait le choix dans cette séance d'un seul point, fini, et nous avons pris la valeur la plus simple, zéro. En comparant avec la séance organisée l'année précédente, le choix d'un seul point a été déterminant pour la dévolution aux élèves de la production d'exemples.

Les difficultés techniques liées au fonctionnement de l'éditeur de données se sont posées de façon fugitive, mais ont été bien résolues dans cette séance.

La phase dirigée pour l'addition a bien permis aux élèves de s'approprier l'éditeur de données, la notion d'exemple et de règles algébriques. Dans la phase sur la multiplication, on a pu constater que 8 élèves ne travaillent pas ou ne laissent pas de trace. Ce comportement a été observé dans d'autres circonstances et ne semble pas lié aux caractéristiques de l'activité. Les autres adhèrent bien à la tâche de production autonome d'exemples. Cependant peu d'élèves développent leur activité vers la production d'exemples nouveaux. Ceux qui le font sont guidés par la volonté d'explorer tous les cas. Ce sont les plus actifs dans la synthèse qui met en évidence les règles et le cas d'indétermination.

Le travail sur le quotient n'a pas produit les effets escomptés. En fait les élèves ne peuvent pas trouver les règles sur le quotient à partir des règles sur le produit dans les conditions de cette séance. En effet, il y a une rupture par rapport à la tâche antérieure (produire des exemples et réfléchir sur ces exemples) impossible à négocier dans le peu de temps restant. Par ailleurs, nous avions supposées disponibles les propriétés de la limite de l'inverse d'un fonction, ainsi que la conception du quotient comme produit du numérateur par l'inverse du dénominateur.

On aurait pu prévoir de traiter le quotient comme le produit en demandant aux élèves de produire des exemples. Cela aurait comme intérêt de consolider la méthode vue avec le produit.

Si l'on souhaite, comme c'était notre intention, faire travailler sur le quotient à partir des résultats sur le produit, il faudrait davantage de temps, et sans doute aussi que les élèves aient mieux assimilé ces résultats, ainsi que l'équivalence quotient, produit par l'inverse.

D. SITUATION 2 : Règles de calcul des dérivées.

Les choix pour la séance de travaux dirigés

Dans une séance expérimentée en 1995-96, nous avions demandé aux élèves d'établir des règles à partir de la dérivation, par la TI92 d'expressions abstraites (par exemple $f(x)+g(x)$), en "transcrivant" l'expression simplifiée lue sur la TI92 de la notation $\frac{\partial}{\partial x}$ à la notation "prime". Il s'agissait donc d'un travail d'observation et de transcription. Dans l'analyse, nous observions que le travail mathématique n'atteignaient pas son objectif :

- les élèves n'exerçaient pas leur esprit critique sur les règles obtenues par transcription (par exemple, la règle de dérivation du produit ne provoquait pas l'étonnement attendu par le professeur, bien qu'elle soit surprenante par comparaison avec la règle sur les limites).
- ils n'apercevaient pas le phénomène d'identité entre l'entrée et le résultat donné par la TI92, phénomène qui se produit pour des formes composées générales telles que $x \to f(x+k)$ et $x \to f(kx)$.

- ils transcrivaient l'expression rendue par la TI92 de la notation $\frac{\partial}{\partial x}$ à la notation "prime" y compris dans le cas des formes composées générales que la TI92 ne simplifie pas. Cette transcription donnait la règle pour les formes générales somme, produit, quotient et pour la forme $f(x+k)$ que la TI92 ne simplifie pas. Elle acquérait ainsi une légitimité, alors qu'elle est illégitime dans ce dernier cas. Dans le cas de $f(kx)$, la transcription donnait $f'(kx)$ ce qui correspond à l'oubli classique du coefficient k dans la dérivation de cette forme. Pour compenser cela, le professeur avait traité deux cas de composition sur des fonctions explicites dans la synthèse. Mais nous avions observé que pour les élèves, les raisons pour lesquelles la transcription ne fonctionne pas restaient très floues. Il y avait donc tous les éléments d'une "mis-conception".

Si l'on compare avec la séance sur les propriétés algébriques des limites décrite ci-dessus, le travail sur les règles de dérivation induit une réflexion de nature plus algébrique que différentielle. Les élèves ont en effet peu de moyens de relier ces règles à la définition de la dérivation. C'est pourquoi, une simple observation de la dérivation par la TI92 ne produit pas véritablement de réflexion. Nous avons donc choisi ici une tâche de type anticipation-comparaison, où les élèves ont à émettre des conjectures sur un certain nombre de dérivées, puis à comparer avec la dérivation par la TI92. Comme nous l'avons dit en introduction, on suppose que des « règles en acte » sont construites spontanément par les élèves et que en cas de divergence, avec les résultats de la TI92 une réflexion interviendra sur ces règles.

Plus précisément, nous avons prévu :

1. de demander aux élèves une prévision (une anticipation) du résultat que pourrait donner la calculatrice, de façon à ce que les règles de dérivation qui ne vérifient pas la conservation des opérations algébriques (dérivation du produit, de l'inverse et du quotient, dérivation de $x \to f(kx)$) provoquent effectivement l'étonnement des élèves. Nous estimons que la confrontation anticipation/ résultat TI92 et l'étonnement que cette confrontation peut provoquer, permettra de faire apparaître nettement les cas de non-conservation.
2. de travailler d'abord sur des exemples de fonction, d'une part pour préparer le travail sur les formes générales dont la TI92 donne la dérivation, et d'autre part pour la production effective de règles pour les formes générales dont la TI92 ne donne pas la dérivation. On demande seulement ensuite une anticipation des dérivations des fonctions abstraites que la TI92 transforme. Il s'agit donc d'une démarche plus inductive que celle adoptée l'année précédente. Elle se rapproche de la démarche adoptée pour les propriétés algébriques des limites, mais, ici, on ne demande pas aux élèves de produire des exemples. En effet cette production d'exemples visait à faire intégrer par les élèves la notion de forme indéterminée et est moins pertinente pour induire des règles.

Le travail des élèves est prévu de la façon suivante :

1. Le travail se fait en deux phases, séparées par une synthèse. Dans la première, (polycopié élève ci-dessous annexe 4 pages 1 et 2) il s'agit d'établir les règles de calcul sur les dérivées en s'aidant de la calculatrice. Dans la seconde phase (polycopié élève page 3) des exercices d'application de ces règles sont proposés aux élèves.
2. Dans la première phase, la TI92 sert à produire des dérivées, que ce soit sur des exemples explicites ou sur des fonctions abstraites. Contrairement aux limites, les élèves ont peu de moyen d'anticiper ou de contrôler ces productions. On s'attend cependant à ce que les

élèves veuillent appliquer la conservation des opérations algébriques qui fonctionne pour les limites en dehors des cas d'indétermination. Cette conservation fonctionne pour la dérivation de la somme et du produit par une constante, mais sera mise en défaut, par exemple pour le produit et le quotient.

3. Dans la seconde phase, la TI92 est utilisée comme outil de vérification, avec les problèmes classiques posés par cette utilisation, particulièrement, le fait que l'élève peut très bien avoir trouvé un résultat correct mais sous une forme différente de la TI92.

Concrètement, la première phase débute par un rappel des dérivations de fonctions de référence obtenues par passage à la limite au cours de la séance précédente (polycopié élève annexe 4, première demi-page). Le sinus fait partie de ces fonctions car les fonctions polynômes ne permettent pas d'induire les règles sur des formes générales. Au contraire, de la dérivation de $x \rightarrow \sin(3x)$ en $x \rightarrow 3\cos(3x)$, les élèves peuvent facilement induire la dérivation de $x \rightarrow f(kx)$, par exemple.

Les élèves vérifient ensuite ces dérivations avec la TI92, ce qui est l'occasion de prendre connaissance de la fonctionnalité de dérivation et de la notation adoptée pour l'affichage.

Ensuite (seconde demi-page), les élèves ont à remplir un tableau de dérivées "en faisant travailleur (leur) imagination". C'est la phase d'anticipation. Elle porte d'abord sur des exemples de formes explicites, puis sur les formes générales ne faisant pas intervenir de paramètre (somme, produit, quotient) pour lesquelles la transcription de la notation $\frac{\partial}{\partial x}$ à la notation "prime" est légitime.

Ensuite (seconde page), on demande aux élèves de remplir le même tableau avec les résultats donnés par la TI92, pour permettre la comparaison, puis d'établir des règles générales. Une synthèse collective valide ces règles.

En seconde phase (troisième page), un ensemble de fonctions est donné. L'élève doit calculer la fonction dérivée, vérifier avec la TI92. Il doit ensuite préciser l'intervalle dans lequel la dérivation est valide, de façon qu'il garde conscience de la nature fonctionnelle des expressions. On lui demande aussi d'indiquer les règles utilisées.

Déroulement

Première phase

Rappel des dérivations obtenues par calcul de limites

8h15 Le professeur présente le travail. Il rappelle que la semaine dernière des dérivées ont été calculées "à la main". Il indique qu'on va essayer d'aller plus vite : "La machine va nous donner des résultats de façon automatique, mais nous on va essayer d'abord de jouer le jeu inverse, de voir si on est capable de prévoir les résultats, de regarder un peu après si ça concorde avec ce que donne la machine, puis comparer et de comprendre.."

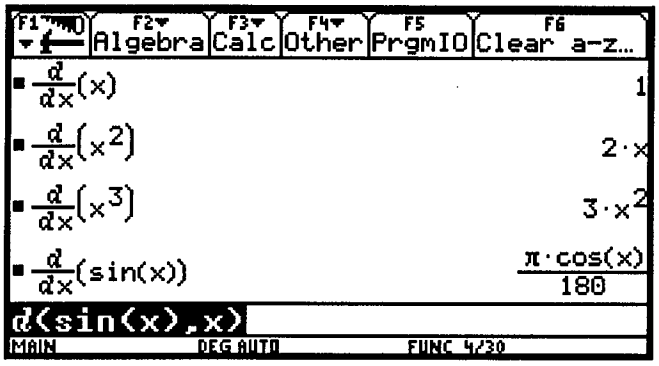
Le tableau de la page 1 du polycopié est rempli en collectif. Le professeur demande de travailler de mémoire, mais certains ont déjà pris leur TI92.

Le professeur indique ensuite d'utiliser la TI92 pour retrouver ces résultats. Il explique la notation TI92 en faisant le rapport avec le coefficient d'accroissement. Lorsqu'il s'agit de la dérivée du sinus, certains élèves n'ont pas le même résultat que le professeur. Le problème

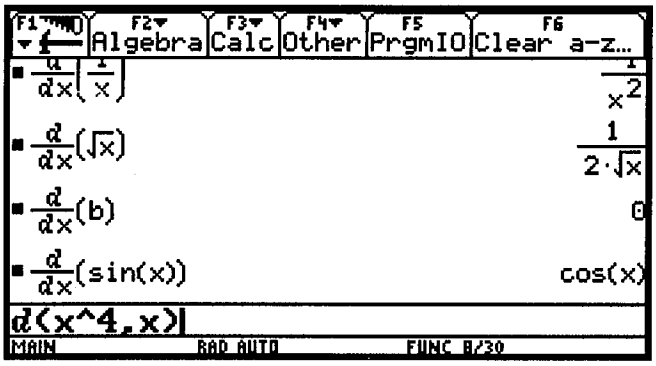
vient de ce que certaines calculatrices sont en mode degré et/ou approché (Cf ci-dessous). Le professeur profite de l'occasion pour rappeler que la dérivée de *sinus* est *cosinus* seulement si x est exprimé en radians.

8h23. Recherche des dérivées des fonctions demandées dans la polycopié.

Ecrans enregistrés sur la calculatrice de Francis. La calculatrice est en mode degré



Nouveau calcul avec mode radian, puis l'élève commence à chercher la dérivée de x^4 demandée en anticipation.



Travail de prévision

8h25 Le professeur demande de poser la calculatrice pour la deuxième activité. "La calculatrice sait calculer des dérivées, peut-être en calculant des limites. On va essayer de voir s'il y a des règles. Vous allez réfléchir et essayer de prévoir les résultats qu'on pense obtenir sur ces diverses fonctions. Il faudra aussi que vous donniez des justifications : j'ai l'impression que c'est le bon résultat parce que...". Il donne quelques minutes pour ce travail, et répète de ne pas utiliser la machine.

Tableau des prévisions données par les élèves

Fonctions	Commentaire
$x \rightarrow x^4$	Dérivée correcte pour la plupart des élèves, trouvée à partir des exemples précédents (x^2 et x^3). Ségolène a dérivé x^2 sous forme $(x^2)^2$ avec le principe $(fg)' = f'g'$
$x \rightarrow x \sin(x)$	Deux élèves donnent la dérivée correcte (Cf remarque ci-dessus). Les autres dérivent les deux fonctions et font le produit ou dérivent seulement le sinus.
$x \rightarrow 2x+1$	Quinze élèves donnent la dérivée correcte. Un élève précise que la pente de $2x+1$ est 2, un autre que la dérivée de 1 est 0. Les six autres élèves ajoutent 1 à la dérivée de $2x$.
$x \rightarrow \sin(2x)$	Quatre élèves appliquent la dérivation de $f(kx)$ (Cf remarque ci-dessus). 2 autres dérivent en $kf'(x)$, et la majorité (11) en $f'(kx)$.
$x \rightarrow 3 \sin(x)$	Vingt élèves dérivent seulement le sinus. Valérie a vraisemblablement appliqué la "règle" $(fg)' = f'g'$
$x \rightarrow 4 \sin(3x)$	Cinq élèves appliquent la dérivation de $f(kx)$ (les mêmes que pour $\sin(2x)+1$). Les autres élèves dérivent en $kf'(x)$ ou en $f'(kx)$ comme ci-dessus. Valérie dérive à nouveau en zéro.
$x \rightarrow \sin(x+1)$	La réponse correcte est anticipée par 10 élèves. Quatre autres dérivent le 1 de la parenthèse en zéro.
$x \rightarrow \cos(x)$	Trois élèves connaissent la dérivée du cosinus. La majorité pense que sinus et cosinus "s'échangent" par dérivation.
$x \rightarrow \cos(2x)$	Quatre élèves anticipent correctement à la fois la dérivée du cosinus et la dérivation de $f'(kx)$ (Cf remarque ci-dessus). Deux élèves anticipent seulement la dérivation de $f'(kx)$. Sept élèves font les deux erreurs.
$x \rightarrow f(x)+g(x)$	La règle est correctement anticipée par les douze élèves qui répondent.
$x \rightarrow f(x)g(x)$	Seul un élève donne la règle de dérivation du produit. 10 autres supposent la conservation du produit.
$x \rightarrow \frac{1}{f(x)}$	Dix élèves s'inspirent de la dérivée de $1/x$. Trois autres dérivent le dénominateur. Un dérive le numérateur.
$x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$	Peu d'élèves abordent cette dernière question. Les réponses supposent la conservation du quotient (Arthur, Marthe) ou s'inspirent de la dérivée de $1/x$ (Luc, Corinne, Samuel).

Synthèse

9h34. Le professeur note au tableau les résultats donnés par les élèves (Cf tableau ci-dessus) sans se prononcer. Pour les formules générales (somme, produit, inverse, quotient), il va plus vite, prenant seulement les suggestions les plus évidentes.

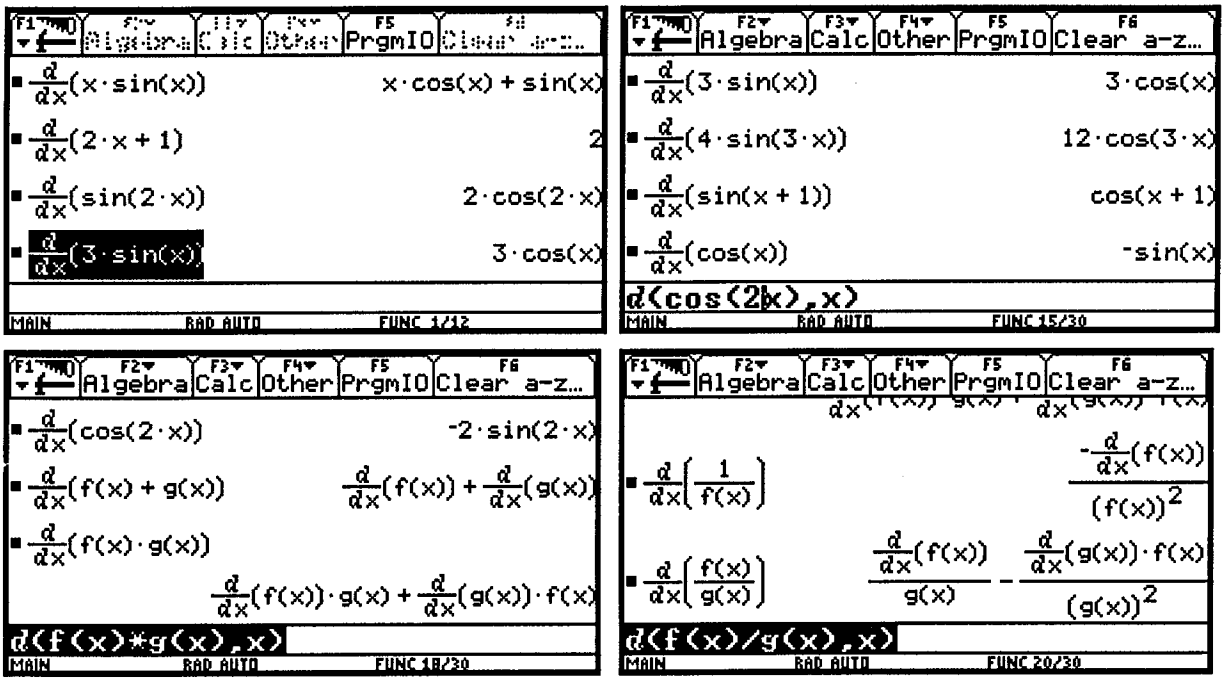
Il demande ensuite de refaire avec la machine, de façon à remplir le tableau de la page suivante. Il note qu'il est arrivé que la machine donne des résultats faux, et qu'il faudra donc

argumenter pour valider le résultat correct. Il y a quelques problèmes d'entrée (multiplication implicite pour sin x).

Lorsqu'il s'agit des formules générales, un problème est rencontré par un élève qui a affecté les fonctions f et g. Certains élèves omettent le ' de la dérivée lorsqu'ils retranscrivent le résultat obtenu avec la TI92.

8h 44 Vérification à l'aide de la TI92

Ecrans enregistrés sur la calculatrice de Francis.



Comparaison des prévisions aux résultats donnés par la TI92.

Elle s'effectue en collectif à partir de 8h50.

$4x^3$

"Pourquoi pensez-vous que c'est le bon résultat,"

Une élève: "pour x^3, ca fait :3 x^2, donc pour x^4 4 x^3"

"Si je vous demandais pour x^8 ?"

Réponse générale "8 x^7"

Le professeur note qu'on trouve bien une formule générale, et qu'on y reviendra.

$x \sin x$

Il demande de comparer la "bonne réponse" ($x \cos x + \sin x$) aux anticipations de la phase précédente.

Réponse "$x \cos x$".

Une élève justifie en disant que " la dérivée de sinus x, c'est cos x ".

Réponse "cos x"

Un élève justifie : « la dérivée de x c'est 1, la dérivée de sinus x, c'est cos x, donc le produit c'est 1 ».

$2x+1$

Réponse « **2** ». Le professeur commente en remarquant que 2 est le coefficient directeur de la droite représentant la fonction, et rappelle une activité précédente.

Réponse « **3** ». Un élève indique que « la dérivée de x c'est 1, multiplié par 2, et après j'ajoute 1, donc 3 », mais d'autre disent « la dérivée de 1 c'est zéro » (Le dialogue est vivant).

$\sin(2x)$

Le professeur note qu'on ne s'attendait pas à la réponse de la TI92, qu'on s'attendait plutôt à cos ($2x$). Il essaie ensuite de faire expliquer la réponse 2 cos x sin x sans succès. Il essaie aussi de faire faire le lien avec sin ($2x$).

$3 \sin x.$

Il passe vite en disant "Ca ressemble aux arguments qu'on a développés au-dessus"

Il insiste moins sur les questions suivantes (4sin ($3x$), sin (x+1), cos x). Pour sin (x+1), il interpelle l'élève qui a donné cos x et tente de lui faire dire qu'il a dérivé 1 en zéro.

$\cos(2x)$

Il fait le lien entre les anticipations erronées et les erreurs déjà constatées aux questions précédentes.

$f(x)g(x)$

Il note que le produit des dérivées était très tentant. Les élèves dictent le résultat en transcrivant la notation $\frac{\partial}{\partial x}$ en notation « prime ». Il demande de faire le lien avec les résultats précédents. "Est-ce que c'est bien en concordance ?". Une élève propose de regarder x sin x. Le professeur commente "La dérivée de x ca fait 1, multiplié par $f(x)$....". Il fait remarquer que ça concorde, même si la somme n'est pas écrite dans le même ordre.

$\frac{1}{f(x)}$

Les élèves transcrivent de même la notation $\frac{\partial}{\partial x}$ en notation « prime ». Le professeur remarque "la formule qu'on avait proposée tout à l'heure est tout à fait à côté, même si elle est bien tentante". Un élève fait le rapport avec $\frac{1}{x}$.

$\frac{f(x)}{g(x)}$

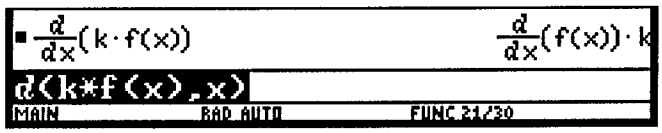
Même processus.

Le professeur note ensuite que "la machine n'est pas courageuse", et que "la formule (obtenue) n'est pas facile à retenir". Une élève propose de réduire au même dénominateur, ce qui est fait en collectif. Le professeur tente sans succès de faire interpréter les anticipations obtenues (il y

a peut-être un peu de lassitude sur ce travail de comparaison). Il fait le lien avec les deux formules précédentes, et indique "qu'on fera les démonstrations la prochaine fois".

A partir de 9h04, il fait noter la synthèse sur le second tableau de la page 3.

Arrivé à la dérivée de $x \to k f(x)$, il demande sans succès la réponse à partir des exemples, puis demande de le faire à la machine (Cf écrans de Francis ci-dessous). Il note le résultat en inversant les facteurs, et déclare que "c'est la démarche que vous aviez naturellement tout à l'heure".



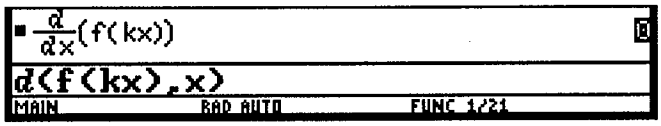
Pour $f(k\,x)$, même demande, en rappelant "ce qu'on a fait avec les sinus". Un élève "$f'(k\,x)$". Le professeur corrige "fois k". Il fait le lien avec "la dérivée de sin $2x$". Il semble que des élève ont essayé à la machine, car il leur demande confirmation. Ils répondent "non". Il y a comme l'année précédente, la difficulté d'interprétation de $\frac{\partial}{\partial x}(f(kx))$ qui est compris comme $f'(kx)$, alors que la machine retourne l'entrée sans la modifier.

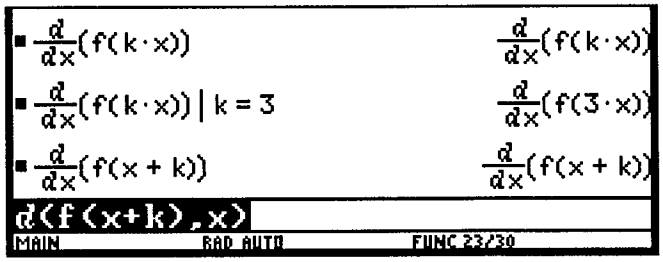
Le professeur demande de substituer 3 à k (forme $|k=3$). Il n'y a pas davantage de calcul par la machine. Le professeur fait noter la différence avec sin $(3x)$. "Tout à l'heure pour sin $3x$, la machine a bien fait le calcul, et donc, semble-t-il la machine ne sait pas, k pourrait dépendre de x..."

Il indique que les formules seront démontrées par la suite.

$f(x+k)$, il rappelle sin$(x+1)$, obtient $f'(x+k)$ et demande une interprétation graphique "Comment obtient-on la représentation graphique de $f(x+k)$, ..., par une translation de vecteur..." Réponse unanime "k". "Non", "$k\,\vec{i}$ ", "Non moins $k\,\vec{i}$ ".

"Conclusion ? La translation transforme la tangente...". Cette tentative d'interprétation graphique par le professeur ne rencontre pas beaucoup d'écho. Ca ressemble assez à la situation de l'année précédente, mais cette année, il passe plus vite en indiquant "On y reviendra".





Seconde phase

Cette phase de mise en œuvre du calcul symbolique des dérivées est lancée à partir de 9h29 par le professeur. Il indique de "faire d'abord à la main", puis de vérifier à la calculatrice. Il

insiste sur la troisième colonne du tableau à remplir, où le domaine de validité de la dérivation est demandé. En fait, il s'agit du domaine de définition de la fonction pour laquelle la dérivation est demandée. Le professeur souhaite que les élèves ne voient pas la dérivation seulement sous son aspect symbolique. Il insistera à nouveau plusieurs fois au cours de la recherche des élèves, mais sans grand succès. En fait les élèves ont bien compris l'aspect essentiellement symbolique de la tâche et pour eux, et voient la détermination de l'ensemble de définition comme une tâche différente de la dérivation.

Quelques observations sur cette phase :

$\boxed{x \mapsto (3x+2)(2x+3)}$

Quelques élèves dérivent d'abord en 6 (produit des dérivées), puis effacent après essai sur la machine.

$\boxed{x \mapsto 3x^4 + 5x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 5}$

Une élève dérive correctement, puis dérive à nouveau le résultat. Elle pense en effet que le premier résultat obtenu est trop compliqué. Elle se tranquillise avec le résultat de la calculatrice. Quelques élèves conservent le terme constant (5) dans la dérivation.

$\boxed{x \mapsto \sin(x)\cos(x)}$

Les élèves ont des difficultés à coordonner le résultat qu'ils obtiennent à la main $\cos^2 x$ - $\sin^2 x$ et celui de la TI92 (2 $\cos^2 x$ -1).

Francis (écrans ci-dessous) fait tranquillement ses calculs à la main, puis note le résultat obtenu à la machine sans se troubler de la différence: il a fait deux colonnes l'une pour son calcul, l'autre pour la dérivée donnée par la TI92

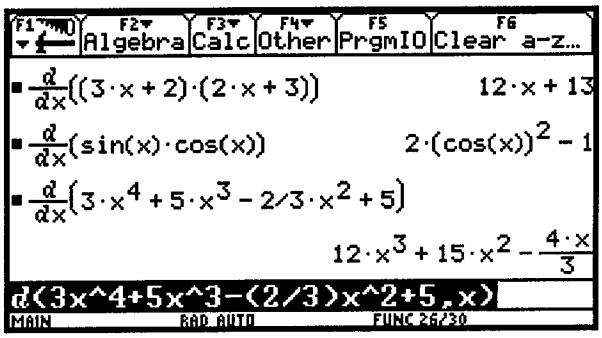
Autres erreurs significatives relevées dans les protocoles.

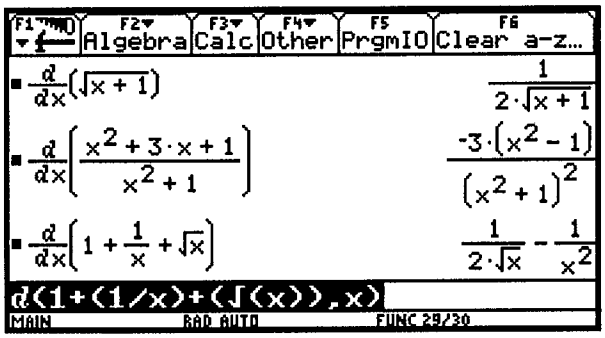
$x \mapsto (3x+2)(2x+3)$	6 (Karine)
$x \mapsto 3x^4 + 5x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 5$	$12x^3+15x^2-2/3x+5$ (Damien)
$x \mapsto 1+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$	$1/x$ dérivé en $1/x^2$ (Marthe,)
$x \mapsto \sqrt{x+1}$	dérivé en 1/(2rac(x)) (1 dérivé en zéro Ségolène)
$x \mapsto \frac{x^2+3x+1}{x^2+1}$	(2x+3)/(2x+0) (Vincent) (2x+3)/(2x+1) puis à nouveau dérivé (Ségolène) (2x+3)/(2x) simplifié en (x+3)/x (Damien)
$x \mapsto (x+1)^2(x+3)$	développe (x+1)^2 en (x^2+2x+1) puis (2x+2+1). Dérive finalement en (2x+3)+2(x+3) (Valérie)
$x \mapsto \sqrt{2}(x^3 - x + 7)$	0 car $\sqrt{2}$=0 (Fréderic). $\sqrt{2}$ dérivé en 1/(2$\sqrt{2}$)) (François).

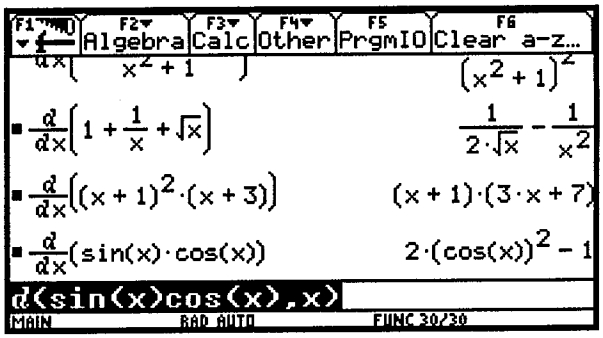
Les confusions portent sur la dérivation des constantes (Damien, Ségolène, François) et sur la règle de dérivation du produit (Karine, Valérie) et du quotient (Vincent, Ségolène, Damien).

Il y a aussi de nombreuses erreurs algébriques dans les développements (Cf Charles ci-dessus).

Ecrans enregistrés sur la calculatrice de Francis.







Bilan et améliorations possibles

Les résultats des élèves montrent que la dérivation des polynômes est généralement intégrée, à l'exception de la dérivation de la constante en zéro qui peut être omise par certains élèves.

La non conservation du produit par dérivation est certainement mieux mise en évidence dans cette séance que dans celle de l'année précédente. Cependant, elle reste non intégrée par certains élèves. Il en est de même de la dérivation de l'inverse et du quotient.

La dérivation du 1 en zéro par Ségolène dans $\sqrt{x+1}$ montre les confusions qui peuvent persister dans la dérivation des fonctions composées. Il est regrettable qu'il n'y ait pas eu un exemple du type x→ sin(kx) pour évaluer l'intégration de la règle de dérivation de $x \to f(kx)$

Le déroulement confirme que le travail est essentiellement d'ordre algébrique, et a peu de lien avec les situations qui ont donné son sens à la dérivation. C'est particulièrement vrai pour la dérivation des sommes, produits et quotients. Mettre en valeur la forme spécifique et nouvelle que prennent les règles de dérivation du produit, de l'inverse et du quotient paraît un objectif pertinent, et l'anticipation demandée aux élèves, préalablement à l'observation des résultats de la TI92 déclenche une réflexion qui conduit à un débat animé entre élèves et avec le professeur.

La dérivation des fonctions composées du type $x \to f(x+a)$ et $x \to f(kx)$ conduit à davantage de difficultés. Certes, l'introduction de fonctions comme x→ sin(3x) et x→ sin(x+1) permet d'induire des règles formelles, mais cela ne semble pas suffisant. Les élèves ne comprennent pas la réponse donnée par la machine pour la dérivation de fonctions génériques. Cela reste donc flou pour eux, avec le risque de confusion qui en résulte. Le professeur tente de faire appel à la transformation associant la courbe représentative de $x \to f(x)$ respectivement à la courbe représentative de $x \to f(x+a)$ et à la conservation de

la direction des tangentes dans cette transformation. Cette interprétation graphique de la propriété de dérivation montre que, dans ce cas, il est possible de revenir aux situations ayant donné son sens à la notion de dérivée. Il est donc dommage qu'elle n'ait pas été préparée par un travail spécifique des élèves, par exemple, le tracé, sur le même graphique, des courbes représentatives de $x \to \sin x$ et $x \to \sin(x+1)$. On aurait pu d'ailleurs, avec plus de temps, essayer la même approche avec une fonction du type $x \to f(kx)$.

Avec le recul, il parait préférable de faire deux séances distinctes : l'une, après la phase d'introduction porterait sur l'algèbre des dérivées (somme, produits, quotients) et l'autre, plus tard dans l'année, sur les fonctions composées du programme. Les élèves seraient ainsi plus à même, dans cette seconde séance, d'interpréter les résultats de la TI92, disposeraient de davantage d'exemples de fonctions, et de plus de temps pour l'interprétation graphique. Cette séparation en deux séances a été expérimentée avec succès dans la classe A.

Annexe 1, limites : fonctions à entrer et résultats TI92

"*f*"	"*g*"	"lim *f*"	"lim *g*"	"limf+*g*"
$\frac{\cos x - 1}{x^2}$	$\frac{\sin x}{x}$	-1/2	1	½
$\frac{\sin x}{x}$	-1/*x*^2	1	-∞	-∞
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^4}$	∞	∞	∞
$\frac{x-1}{x^2}$	$\frac{(x-4)}{\frac{1}{x^4}}$	-∞	0	-∞
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{x^2-1}{x^2}$	∞	-∞	1
$\frac{2}{x^2}$	$\frac{x^2-1}{x^2}$	∞	-∞	∞
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x^4}$	∞	-∞	-∞

Annexe 2, limites : polycopié élève

Limites techniques algébriques

Nous allons, en utilisant la TI-92, rechercher des règles de calculs sur les limites.

Le problème est donc si l'on connaît $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to 0} g(x)$ est il possible de déterminer :

La limite de la somme de f et g c'est à dire $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))$.

La limite du produit de f et g c'est à dire $\lim_{x\to 0}(f(x)g(x))$.

La limite du quotient de f et g c'est à dire $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

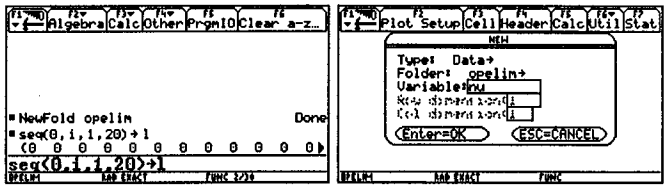
Point technique préparation de la machine :

Nous utiliserons le Data-matrix-editor afin d'éviter les blocages liées à la fonction de calcul automatique nous allons initialiser notre tableau avec deux colonnes de zéros..

Créer un répertoire Opelim

Créer une liste nommée L de de 20 zéros

Ouvrir le Data-matrix -Editor nom du nouveau fichier nu.

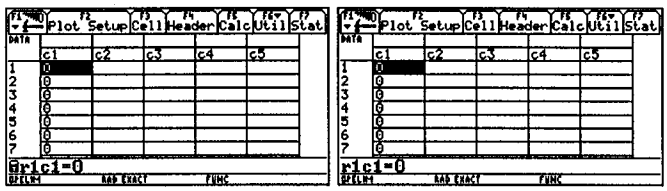


Se placer sur C1 tapez L [ENTER]

C1 est maintenant une colonne

de vingt zéro et chaque cellule est verrouillée

se replacer sur C1 puis [CLEAR] [ENTER]



Initialiser de même la colonne c2.

Recherche de la limite d'une somme

On placera :

Dans C1 la fonction f

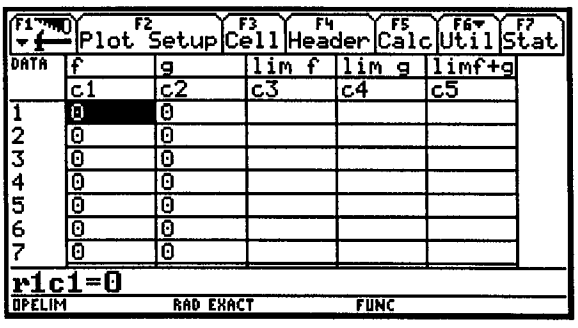
Dans C2 la fonction g

Dans C3 la limite de f en 0

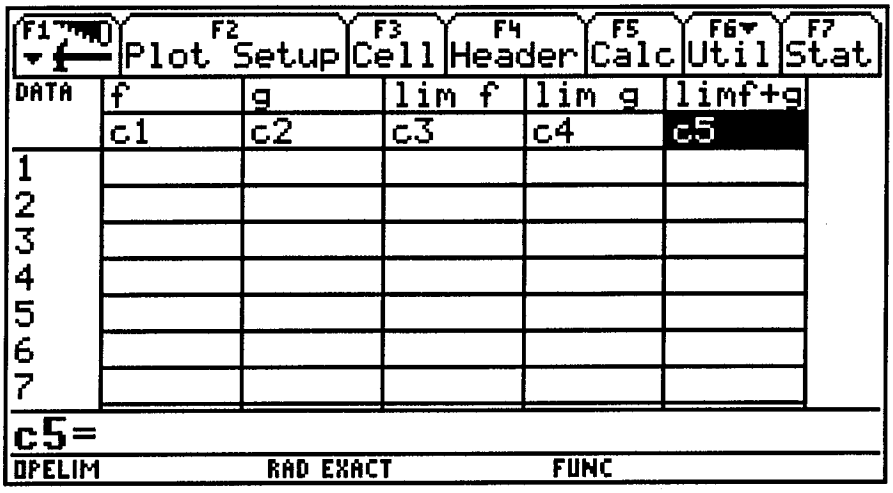
Dans C4 la limite de g en 0

Dans C5 la limite de la somme $f+g$ en 0

Pour plus de confort, on remplit la ligne de titre f, g, lim f, lim g, lim $f+g$



Nous allons traiter des exemples et noter les résultats dans le tableau ci dessous



Si f a pour limite	L	L'	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite						

Recherche de la limite d'un produit

De la même façon vous allez étudier le produit.

Trouvez tous les cas qui peuvent se présenter en vous aidant éventuellement d'exemples

Si f a pour limite						
Si g a pour limite						
alors $f\,g$ a pour limite						

Pour chaque cas, donnez un exemple et contrôlez avec la machine

Fonction f : x→								
Fonction g : x→								

Recherche de la limite d'un quotient

En raisonnant sur le cas du produit, trouvez tous les cas pour le quotient

Si f a pour limite	L	L>0	L>0	L<0	L<0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
Si g a pour limite	L'≠0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite									

Annexe 3 : exemples des élèves pour les limites de produits

Produits de deux fonctions ayant des limites finies

15 élèves sur 23 proposent des exemples. Pour 8 d'entre eux, ce sont simplement les fonctions introduites par le professeur à la phase précédente pour l'étude de la somme. 5 autres introduisent des polynômes simples pour g ou pour les deux fonctions.

f	g	élèves
$-\frac{\cos x - 1}{x^2}$	$\frac{\sin x}{x}$	Valérie Ségolène Francis Clément Arthur Corinne Marthe Vincent
$\frac{\cos x - 1}{x^2}$	$x^2 - 1$	Raoul
$-\frac{\cos x - 1}{x^2}$	$2x + 3$	Dorothèe
$\sin x + 1$	$-\cos x + 2$	Samuel
$-x^2 + 1$	x^2	Gloria
$x^2 + 1$	$x^2 - 1$	Myriam
$x^2 + 2$	$x^2 + 4$	Elise
$x - 1$	$\frac{2x^3 + 1}{x + 1000}$	David

Produits de deux fonctions ayant des limites infinies

15 élèves considèrent le cas $+\infty \times +\infty = +\infty$, la plupart utilise l'exemple de la somme.

15 élèves considèrent le cas $+\infty \times -\infty = -\infty$. A une exception près, ce sont les mêmes que dans le cas précédent. Ils utilisent le plus souvent l'un des 3 exemples de la somme.

10 élèves seulement considèrent le cas $-\infty \times -\infty = +\infty$. Ce cas n'était pas proposé pour la somme, et ces élèves proposent une variété d'exemples plus large que dans les cas précédents.

Cas	f	g	élèves
$+\infty \times +\infty = +\infty$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^4}$	Gloria Myriam Valérie Ségolène Francis Simon Clément Arthur Emilie Raoul Elise Marthe.Francis Vincent
	$\frac{1}{x^6}$	$\frac{2}{x^6}$	Charles
$+\infty \times -\infty = -\infty$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{x^2 - 1}{x^2}$	Valérie Ségolène Simon Arthur Emilie

	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x^4}$	Gloria Francis Clément Elise Corinne Marthe Vincent
	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x^2}$	Raoul Francis
	$\frac{1}{x^4}$	$-\frac{1}{x^2}$	Myriam
$-\infty \times -\infty = +\infty$	$\frac{x-1}{x^2}$	$-\frac{1}{x^4}$	Elise Vincent
	$-\frac{2}{x^2}$	$-\frac{1}{x^4}$	Valérie Francis
	$-\frac{1}{x^8}$	$-\frac{1}{x^6}$	Gloria
	$-\frac{1}{x^4}$	$-\frac{1}{x^2}$	Myriam
	$-\frac{1}{x^6}$	$-\frac{2}{x^6}$	Samuel
	$-\frac{1}{x^6}$	$-\frac{1}{x^4}$	Clément
	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{-3x}{x^2}$	Marthe

Produits d'une fonction ayant une limite finie par une fonction ayant une limite infinie

5 élèves seulement considèrent le signe de la limite finie. Seule Myriam (qui redouble) considère les 4 cas possibles. Les exemples sont très divers, et témoignent de la capacité d'invention de ces 5 élèves.

Cas	f	g	élèves
L (>0) x $+\infty$ = $+\infty$	x^2+1	$\frac{1}{x^4}$	Myriam
	$\frac{\sin x}{x}$	$\frac{1}{x^4}$	Samuel
	$\frac{\sin x}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	Emilie
	$\lvert x\rvert\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}$	$\frac{1}{x^6}$	Clément

L (>0) x - ∞ = - ∞	x^2+1	$-\frac{1}{x^4}$	Myriam
	$\frac{\sin x}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	Samuel
	$\frac{1-\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{x}}$	$-\frac{1}{x^6}$	Clément
L (<0) x +∞ = - ∞	x^2-1	$\frac{1}{x^2}$	Gloria
	x^2-1	$\frac{1}{x^4}$	Myriam
L (<0) x -∞ = + ∞	x^2-1	$-\frac{1}{x^4}$	Myriam

10 autres élèves donnent des exemples de produits d'une limite finie par une limite infinie sans considération de signe. L'exemple le plus souvent considéré fait partie des cas proposés par le professeur pour la somme. Dans 3 cas les élèves ne considèrent pas une limite finie générique.

Cas	f	g	élèves
L x +∞ = + ∞	$-\frac{\cos x-1}{x^2}$	$\frac{1}{x^2}$	Marthe
	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{\sin x}{x}$	Vincent
+∞ x 1 = +∞	$\frac{1}{x^2}-2$	$\frac{\sin x}{x}$	Arnaud
L x - ∞ = - ∞	$\frac{\sin x}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	Valérie Ségolène Francis Emilie Corinne Vincent
3 x -∞ = - ∞	$\frac{3}{\cos x^2}$	$-\frac{1}{x^4}$	Clément
1 x -∞ = - ∞	$\frac{\sin x}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	Francis

Produits d'une fonction ayant une limite infinie par une fonction ayant une limite nulle

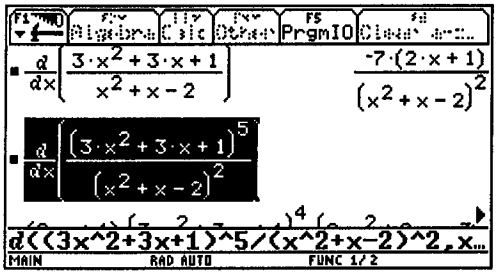
9 élèves proposent des exemples de produits d'une limite nulle par une limite infinie. Parmi eux, on retrouve les 5 élèves qui distinguaient le signe de L, dans le cas d'une limite finie. L'exemple le plus souvent produit est, encore ici, celui proposé pour l'addition. Seules deux élèves proposent plusieurs produits d'une limite nulle par une limite infinie donnant des résultats différents (Valérie, Gloria).

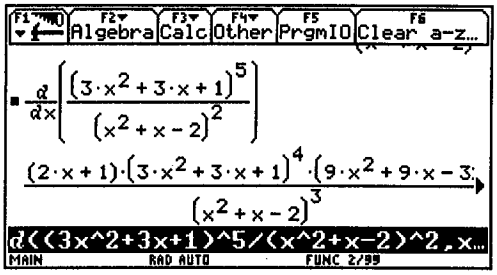
Cas	f	g	élèves
∞ x 0 = 0	$\frac{x+1}{x^2}$	$\frac{(x-4)}{\frac{1}{x^4}}$	Valérie Ségolène
	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{x^4}{(x-4)}$	Vincent
∞ x 0 =∞	$\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$	Gloria
-∞ x 0 = 0	$\frac{x-1}{x^2}$	$\frac{(x-4)}{\frac{1}{x^4}}$	Valérie Ségolène Francis Simon Bernard Corinne Vincent
	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{x-4}{1/x^4}$	Marthe
-∞ x 0 = -4	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{(x-4)}{\frac{1}{x^4}}$	ValérieGloria
-∞ x 0 = -∞	$2x^2$	$-\frac{1}{x^4}$	Gloria

Annexe 4, dérivées : polycopié élève

Calculs de fonctions dérivées

Votre TI-92 calcule très bien les fonctions dérivées :





vous utilisez :

soit le menu ⑤ puis 1 : differentiate

soit [*d*]

soit [CATALOG]

attention ne pas utiliser le d (droit du clavier)

N'oubliez pas la variable de dérivation.

Rappeler les résultats trouvés lundi et vérifiez avec la machine

Fonction définie par	Fonction dérivée
x	
x^2	
x^3	
sin(x)	
$\frac{1}{x}$	
$\sqrt{x}$	
b	

Comment faire pour aller presque aussi vite à la main ?

Comme pour les limites nous recherchons des règles:

Complétez le tableau suivant en faisant travailler votre imagination.

	Fonction définie par	Fonction dérivée
1.	x^4	
2.	xsin(x)	
3.	2x+1	
4.	sin(2x)	
5.	3sin(x)	

6.	4sin(3x)	
7.	sin(x+1)	
8.	cos(x)	
9.	cos(2x)	
10.	$f(x)+g(x)$	
11.	f(x)g(x)	
12.	$\frac{1}{f(x)}$	
13.	$\frac{f(x)}{g(x)}$	

A l'aide de votre TI92 confirmez-vous les règles ci dessus ?

	Fonction définie par	**Fonction dérivée**
1.	x^4	
2.	xsin(x)	
3.	2x+1	
4.	sin(2x)	
5.	3sin(x)	
6.	4sin(3x)	
7.	sin(x+1)	
8.	cos(x)	
9.	cos(2x)	
10.	$f(x)+g(x)$	
11.	f(x)g(x)	
12.	$\frac{1}{f(x)}$	
13.	$\frac{f(x)}{g(x)}$	

Synthèse des résultats :

	Fonction définie par	Fonction dérivée avec la TI92
1.	$f(x)+g(x)$	
2.	f(x)g(x)	
3.	$\frac{f(x)}{g(x)}$	
4.	$\frac{1}{f(x)}$	
5.	k f(x) où k est une constante	
6.	f(kx) où k est une constante	
7.	x^n ou n est entier	
8.	f(x+k)	
9.	cos(x)	

Nous démontrerons ces règles dans le prochain cours, elle découlent des règles de calculs sur les limites.

Utilisation des règles de dérivation

En utilisant les règle précédentes calculez les dérivées des fonctions suivantes et préciser pour quelles valeurs de x_0 le calcul est il possible. Vérifiez à la machine.

Fonction définie par	fonction dérivée	pour x_0 dans	règle utilisée
$x \mapsto x^7$			
$x \mapsto (3x+2)(2x+3)$			
$x \mapsto 3x^4+5x^3-\frac{2}{3}x^2+5$			
$x \mapsto \frac{x+1}{x-3}$			
$x \mapsto 1+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$			
$x \mapsto \sqrt{x+1}$			
$x \mapsto \frac{x^2+3x+1}{x^2+1}$			
$x \mapsto (x+1)^2(x+3)$			
$x \mapsto \sin(x)\cos(x)$			
$x \mapsto \sqrt{2}(x^3-x+7)$			

Annexe 5, dérivées : prévisions des élèves pour les dérivées[1]

	Fonction	Prévisions
1.	x^4	**4 x³** Victor Francis Hubert Antonin Arthur Jean-François Jean Luc Bernard Charles Corinne Simon Gloria Myriam Jacques Francis Valère Marthe Dorothèe Valérie **4 x** Ségolène
2.	xsin(x)	**x cos x +sin x** Victor Francis **cos x** Hubert Antonin Jean-François Bernard Myriam Jacques Ségolène Dorothèe Valérie **x cos x** Arthur Luc Charles Corinne Simon Gloria Francis Valère Marthe **x/cos(x)** Hervé
3.	2x+1	**2** Victor Fréderic Hubert Antonin Arthur Jean-François Luc Bernard Gloria Myriam Jacques Valère Marthe Dorothèe Valérie **3** Jean Charles Corinne Simon Ségolène Francis
4.	sin(2x)	**2cos(2x)** Victor Hubert Gloria Dorothèe **2cos x** Myriam Marthe **cos(2x)** Fréderic Arthur Jean-François Charles Corinne Simon Jacques Ségolène Francis Valère Valérie **sin x cos x** David
5.	3sin(x)	**3 cos(x)** Victor Hubert Antonin Arthur Jean-François Luc Bernard Charles Corinne Simon Gloria Myriam Jacques Ségolène Francis Valère Marthe Dorothèe **4/cos(3x)** Jean **cos(x)** Frédéric **0** Valérie
6.	4sin(3x)	**12 cos(3x)** Victor Hubert Luc Gloria Dorothèe **4 cos(3x)** Arthur Jean-François Charles Corinne Jacques Ségolène Valère **cos(3x)** Francis Samuel **12 cos x** Marthe **0** Valérie
7.	sin(x+1)	**cos(x+1)** Victor Fréderic Hubert Jean-François Luc Simon Charles Corinne Gloria Jacques Ségolène Valère **cos(x)+1** Arthur **cos x** Myriam Marthe Dorothèe Valérie sin(-x) Antonin
8.	cos(x)	**- sin x** Hubert Marthe Dorothèe **sin(x)** Victor Antonin Arthur Jean-François Luc Bernard Charles Gloria Corinne Simon Myriam Francis Valère Valérie cos x Hervé
9.	cos(2x)	**-2sin(2x)** Victor Hubert Marthe Dorothèe **2sin(2x)** Gloria Myriam **sin(2x)** Antonin Arthur Jean-François Corinne Simon Valère Valérie **cos 2x** Hervé
10.	$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$ Victor Francis Hubert Arthur Jean-François Luc Simon Gloria Myriam Valère Marthe Dorothèe
11.	f(x)g(x)	$f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$ Frédéric $f'(x)\,g'(x)$ Victor Hubert Arthur Jean-François Luc Simon Gloria Valère Marthe Dorothèe
12.	$\frac{1}{f(x)}$	$-1/f(x)^2$ Victor Hubert Jean-François Simon Luc Charles Corinne Ségolène Francis Dorothèe **0** Frédéric $1/f'(x)$ Arthur Valère Marthe
13.	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$(f'(x)\,g(x)-f'(x)\,g(x))/g(x)^2$ Frédéric, $f'(x)\,/g'(x)$ Arthur Marthe $f(x)/g(x)^2$ Luc Karine

[1] certains élèves (particulièrement Vincent, Henri, Frédéric), n'ont pas respecté la consigne de ne pas corriger leur tableau a posteriori. Par conséquent, les dérivations exactes qu'ils donnent ne sont pas à prendre en compte.

INGENIERIE 5.
Interprétation cinématique de la notion de dérivée

Comme nous l'avons déjà précisé dans l'introduction de cette ingénierie, l'interprétation cinématique de la notion de dérivée va se faire assez tard. Elle consiste à construire le concept de vitesse instantanée à partir du concept de vitesse moyenne supposé maîtrisé.

Une séance spécifique a été expérimentée dans ce but. Elle est suivie, pour les élèves, par un problème donné à chercher à la maison. En effet, nous pensions préparer une autre séance problématisant les rapports entre vitesse et dérivée dans un autre contexte : celui de débits, en reprenant une situation expérimentée par M. Schneider dans sa thèse (Schneider, 1989) et reprise dans l'ouvrage : « Vers l'infini pas à pas » réalisé par le groupe A.H.A. (Approche Heuristique de l'Analyse) de Louvain la Neuve (A.H.A., 1997). Mais, faute de temps, nous déciderons de ne pas faire cette séance, et de réinvestir simplement la notion de vitesse instantanée dans la résolution d'un problème à chercher à la maison. Ce problème est tiré du même ouvrage et comporte un extrait d'un texte de Pascal, un auteur étudié par les élèves cette même année en Français.

Nous décrivons dans ce qui suit le scénario prévu pour la première séance, donnons des éléments sur son déroulement, puis dressons un bilan de cette première expérimentation. Pour la recherche du problème, qui n'a pas été observée, nous donnons des éléments plus succincts.

A. Scénario de la première séance

Cette séance est conçue en trois phases.

Phase 1 :

La première phase met en jeu uniquement la notion de vitesse moyenne. Elle doit permettre de s'assurer que, conformément aux hypothèses faites, ce concept ne pose pas problème aux élèves, elle doit aussi assurer la dévolution du problème qui sera repris, dans un cas plus complexe, dans la deuxième phase. Les élèves reçoivent un tracé graphique représentant la distance parcourue en fonction du temps par un automobiliste circulant sur autoroute (cf. annexe 1). Ils doivent :

- décrire le mouvement de l'automobiliste
- déterminer sa vitesse et tracer la courbe représentative de celle-ci sur le papier fourni (le choix des unités étant à leur charge)
- déterminer si l'automobiliste a dépassé la vitesse autorisée et, si oui, à quelles périodes.

Les élèves travaillent par binômes de façon habituelle. Cette première phase est prévue pour durer une quinzaine de minutes et doit se terminer par une mise au point collective rapide, les graphiques étant reproduits sur transparents. Cette mise au point doit permettre de réinstitutionnaliser le lien vitesse constante / représentation affine et valeur de la vitesse / coefficient directeur de la sécante joignant les extrémités de la représentation affine.

Phase 2 :

Dans la deuxième phase, les mêmes questions sont reprises avec un autre tracé, cette fois non affine par morceaux. Le tracé (cf. annexe 2) a été construit de manière à passer par les points correspondant aux extrémités des segments du premier tracé proposé. Nous faisons

l'hypothèse que ceci disqualifie une résolution en termes de vitesse moyenne sur ces différents intervalles car une telle résolution ne rendrait pas compte des différences évidentes existant entre les deux tracés. De plus, si dans le premier cas, il n'y avait pas dépassement de la vitesse autorisée, ce n'est plus le cas, elle est dépassée sur chaque tronçon excepté [BC]. De plus, sa croissance continue sur le dernier tronçon peut conduire les élèves à vouloir déterminer la vitesse maximum atteinte sur le parcours et à raffiner le découpage, s'ils procèdent par vitesse moyenne sur intervalles.

Nous faisons l'hypothèse que la description qualitative du mouvement ne devrait pas poser de problème. En ce qui concerne la tâche de tracé, diverses méthodes sont a priori envisageables. La plus plausible est que, par analogie avec le travail précédent, les élèves découpent l'intervalle [0,8], en sous-intervalles et calculent la vitesse moyenne sur chaque intervalle. Pour une subdivision d'une demi-unité, l'approximation par un mouvement uniforme est graphiquement tout à fait raisonnable. Le passage au tracé peut s'effectuer ensuite de plusieurs façons : soit les élèves associent à chaque intervalle, un segment horizontal, soit ils placent une succession de points, ayant pour abscisse par exemple les centres des intervalles considérés et pour ordonnée la vitesse moyenne sur l'intervalle et les joignent ensuite par une ligne brisée ou un tracé plus régulier.

Même si ce n'est pas a priori le plus prévisible, on ne peut exclure que certains élèves fassent directement le lien entre vitesse et coefficient directeur de la tangente et donc essaient d'évaluer ce coefficient directeur, par exemple aux points d'abscisse entière puis à joindre les points, soit par une ligne brisée, soit par une courbe régulière.

La nécessité de comparer à la vitesse maximum autorisée peut cependant amener les élèves à repérer et tracer la pente correspondante puis à essayer de voir sur quelles portions de courbe, la pente est supérieure à cette valeur. Ceci conduirait à rechercher les points limites qui sont justement ceux où la tangente à la courbe a cette pente là et pourrait orienter vers une stratégie de tracé faisant appel aux tangentes au lieu des sécantes.

Précisons que, pour des raisons de temps, les tâches d'associations graphes de fonctions / graphes de fonctions dérivées et de production directe à partir d'une représentation graphique du graphe de la fonction dérivée, n'ont pu être menées, comme prévu, dans cette première expérimentation. Si cela avait été le cas, nous faisons l'hypothèse que l'association vitesse / dérivée / tangente aurait pu apparaître plus facilement à travers la reconnaissance d'une analogie même floue entre les deux tâches. Soulignons cependant que, les élèves ne disposant pas d'expressions algébriques pour les différents tronçons de courbe, l'association vitesse / dérivée, même si elle était effectuée, ne rendrait pas le tracé plus rapide.

Pour cette phase, le scénario prévoit une vingtaine de minutes de travail en binômes, suivi d'un bilan collectif où les difficultés rencontrées, les diverses méthodes utilisées devraient être débattus et les résultats obtenus comparés. C'est dans le cadre de ce bilan collectif qu'il est prévu de faire le lien entre les procédures de calcul de la vitesse moyenne sur des intervalles de plus en plus petits, pour améliorer l'évaluation de la vitesse et le calcul des pentes de sécantes qui a conduit à la notion de dérivée et d'institutionnaliser la notion de vitesse instantanée comme limite.

Phase 3 :

Dans cette phase, un troisième tracé est fourni (cf. annexe 3). Il correspond au mouvement d'un point M sur une axe. Le tracé représente les variations de l'abscisse de M en fonction du temps. Les élèves doivent :

- Décrire le mouvement du point M,
- Déterminer sa vitesse et tracer la courbe représentative de celle-ci.

Il s'agit donc d'une tâche de réinvestissement dans laquelle ils seront cette fois confrontés à un phénomène nouveau : l'existence de vitesses négatives.

B. Déroulement

Nous suivrons plus particulièrement dans cette séance Marianne et deux de ses voisins Stéphane et Fabien.

L'enseignante montre au rétroprojecteur la première représentation graphique, fait rappeler la vitesse maximum autorisée sur autoroute. Elle lit le texte de la fiche distribuée puis demande ce que veut dire à leur avis décrire le mouvement. les réponses fusent : « Dire s'il s'arrête », « s'il roule régulièrement », « si sa vitesse est constante », « si elle est nulle », « s'il ralentit », « s'il accélère »... Un élève (Fabien) fait remarquer que la situation proposée n'est pas possible puisque l'automobiliste part avec une vitesse non nulle. L'enseignante précise que l'on ne commence pas forcément à mesurer quand la voiture démarre.

Marianne calcule et note les vitesses moyennes, en faisant une erreur pour la seconde qu'elle ne détecte pas tout de suite malgré la contradiction avec l'évolution des pentes : 110 - 125 - pause - 120. Elle produit ensuite un tracé et corrige en comparant au graphe initial.

Stéphane note les vitesses sur les différents intervalles : V_1, V_2, V_3, V_4 et écrit des inégalités : $V_1>V_2$, $V_4>V_1$, $V_2>V_4$, puis $V_3=0$ puis il ordonne les vitesses : $V_4>V_1>V_2>V_3$ avant de les calculer soigneusement en revenant à la formule $v=d/t$ et en notant les unités : $km.h^{-1}$. Ensuite il marque les points correspondant aux extrémités des intervalles et les joint par une ligne brisée. L'enseignante qui passe lui demande d'expliquer ce qu'il a fait et il réalise tout de suite son erreur en disant : « Je me suis trompé, il faut des plats, la vitesse est constante là. »

Fabien lui a écrit :

> « de O à A : accélération constante,
>
> de A à B, accélération constante mais moins importante que la précédente,
>
> de B à C, arrêt,
>
> de C à D, accélération constante ».

puis, après avoir demandé à Marianne quelles sont les unités, fait les calculs de vitesse de tête et fournit un tracé correct.

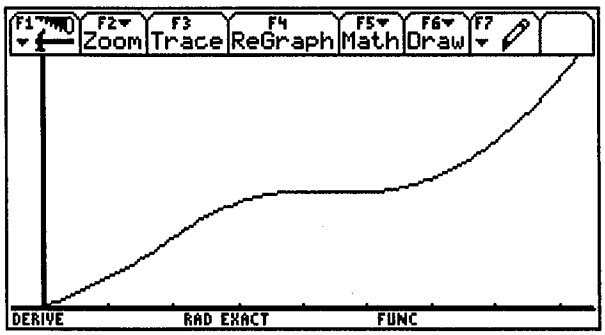
Les deux fiches de tracés ayant été distribuées ensemble, Marianne et Fabien se lancent dans la seconde fiche avant le premier bilan qui a lieu au bout de 15mn environ. Tous les élèves ont maintenant terminé. Durant le bilan, l'enseignante fait faire le lien entre vitesse constante et représentation affine comme prévu; Elle fait de plus exprimer algébriquement la distance en fonction du temps sur le premier intervalle $d(t)=110t$, expliciter que dans ce cas la distance est proportionnelle au temps et que le coefficient de proportionnalité est la vitesse. Elle demande ensuite comment ont été calculées les vitesses sur les autres intervalles. Elle commente l'irréalisme du tracé proposé qui se traduit par des sauts dans la vitesse. Ce bilan se termine au bout de dix minutes par le constat que l'automobiliste n'a jamais été en infraction.

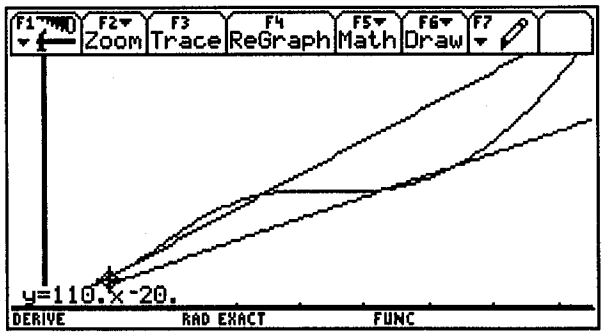
Elle introduit ensuite la deuxième activité. Très vite Stéphane intervient pour dire qu'il a la même vitesse moyenne, Amandine qu'il parcourt la même distance. L'enseignante fait préciser et vérifier en demandant l'expression de la vitesse moyenne entre deux points. C'est Stéphane qui dicte. D'autres disent que c'est quand même pas pareil et l'enseignante conclut qu'il faut alors qu'ils trouvent un moyen plus fin pour montrer les différences.

Diverses méthodes apparaissent. Marianne, d'emblée trace les tangentes à l'oeil en divers points de la courbe, évalue leur pente assez grossièrement et reporte pour avoir l'allure des vitesses. Mais ce n'est pas la stratégie générale. Vincent fait les vitesses moyennes de 1/10 en 1/10 et dit qu'il aurait bien fait les tangentes mais que comme il n'a pas l'équation de la courbe, il préfère faire comme ça. Beaucoup commencent par faire d'heure en heure et raffinent en fonction des besoins. Stéphane lui dit à ses voisins qu'il a trouvé un moyen pour savoir si elle fait plus ou moins de 130 : il a tracé en rouge la pente qui correspond à 130 et il déplace parallèlement le long de la courbe ; si la courbe est plus pentue dit-il, c'est qu'on dépasse 130. Assez vite, dans le groupe observé, les élève sont attirés par la question de la vitesse maximum, se demandant si elle roule à plus de 200, de 250 et émaillant ceci de tout un tas de commentaires. La compétition s'installe : c'est à qui trouvera la plus grande vitesse en choisissant bien ses moyens d'évaluation. Les graphes produits (cf. celui de Marianne et Fabien, annexe 4) sont souvent lissés, en respectant plus ou moins la courbure. Fabien, on le voit, a construit les points en prenant les milieux des intervalles car ça lui paraît plus juste mais du coup est parti de 0. D'autres tracent des segments horizontaux. Toute la classe travaille avec intérêt pendant une demi-heure environ puis l'enseignante fait faire le point. Tous n'ont cependant pas terminé le tracé.

Au cours du bilan, la première question abordée est celle du point de départ, avec un débat entre les tenants du départ 0, parce qu'à t=0, d=0 et ceux du départ à 60. Les seconds finissent par l'emporter. Ensuite est présentée la stratégie majoritaire consistant à partager en intervalles et à calculer la vitesse moyenne sur chacun d'eux. Seul Vincent est descendu à 1/10h, la plupart se sont contentés d'intervalles d'une demi-heure. Les différents moyens de tracés correspondants identifiés dans l'analyse a priori sont présentés par les élèves et l'enseignante ne tranche pas entre ces différents choix.

Ensuite Marianne présente sa méthode : « j'ai pris des points et j'ai tracé les tangentes et je me suis dit, c'est ça la vitesse ». L'enseignante annonce alors qu'elle a rentré la courbe dans la calculatrice, la fait afficher, puis fait afficher les équations des tangentes pour 0, 0.5, 1, 1.5, 2. Les équations sont notées au tableau.



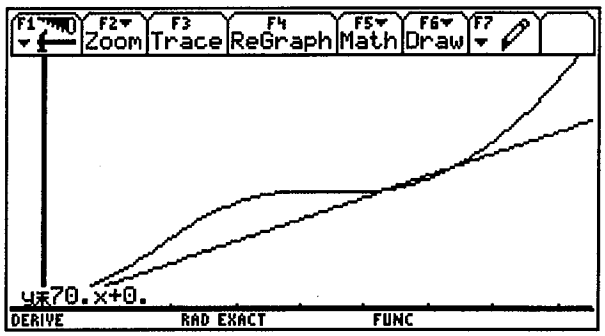


x=0.5 y = 90x-5

x=1 y = 110x-20

x=1.5 y = 130x-45

x=2 y = 150x-80

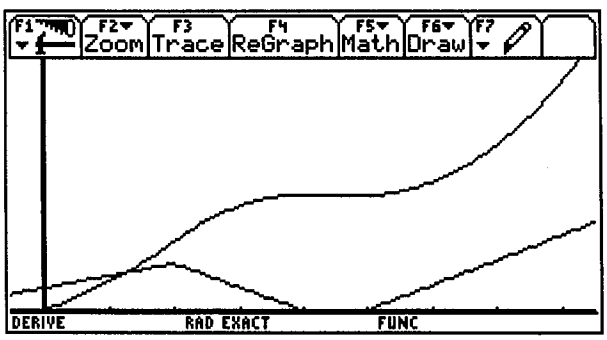


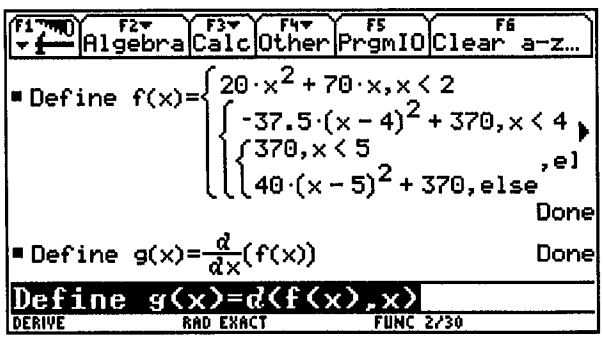
Quelqu'un demande aussi pour 0. Fabien attend de voir. La machine donne 70x+0 et Marianne jubile.

L'enseignante demande ensuite à Marianne comment elle passait de la tangente à la vitesse. Marianne explique qu'elle prenait le coefficient directeur de la tangente. L'enseignante demande à chacun de reporter en couleur les points correspondants aux valeurs données par la machine sur son propre tracé. Plusieurs très vite font remarquer que les points sont alignés. L'enseignante le fait justifier par les écarts : quand x augmente de 0.5, les ordonnées augmentent de 20 et dit qu'elle a en fait tracé un bout de parabole et que c'est pour cela qu'il y a proportionnalité.

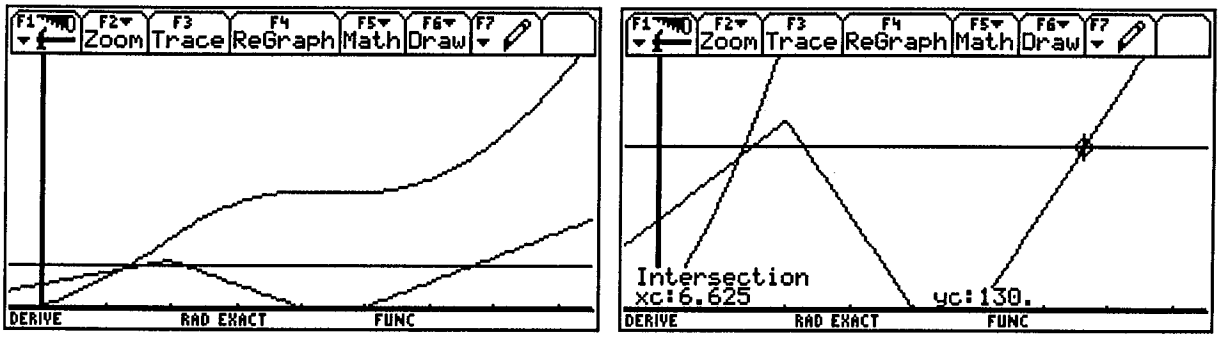
Elle fait ensuite faire le lien entre coefficient directeur et dérivée, ce qui ne pose pas de problème puis s'engage dans l'explication du lien vitesse / dérivée via l'articulation vitesse moyenne / vitesse instantanée, en prenant appui sur ce qu'ils ont fait pratiquement. Ce sera un peu plus laborieux : les élèves arrivent en effet, avec un peu d'aide, à traduire les calculs de vitesse moyenne qu'ils ont faits sur de petits intervalles par le quotient : $\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{t_0+h-t_0}$ et à formuler que quand h tend vers 0, ceci tend vers la vitesse qu'ils cherchent mais ils ne reconnaissent pas là l'analogue d'un calcul qui a servi à définir la dérivée, car visiblement, plus de trois mois après, ils ont oublié cet épisode de leur rencontre avec les dérivées. L'enseignante rappelle la définition de $f'(a)$ comme limite et cela revient. Elle conclut ensuite en définissant la vitesse instantanée et en soulignant donc que pour avoir la vitesse instantanée quand on connaît l'expression de la distance en fonction du temps, il suffit de calculer la dérivée.

Elle fait tracer la dérivée par la machine et interpréter le tracé. Les morceaux de droite sont reliés à la dérivation de fonctions du second degré, ce qui est vérifié ensuite en remontant à la définition explicite de la fonction HOME. Les élèves rient de voir qu'elle a été chercher quelque chose d'aussi compliqué.

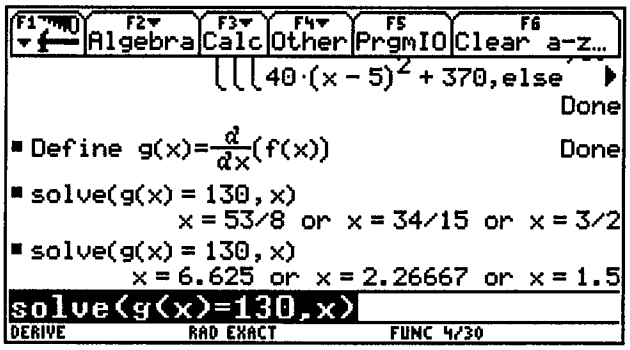




Reste la question de l'infraction à laquelle les élèves reviennent spontanément. Les élèves proposent de tracer la droite horizontale d'équation y=130 et de chercher les intersections avec la courbe de la dérivée. Ceci ne pose pas de problème.



Dans l'application HOME, on peut obtenir les solutions exactes, sans difficulté puisque la TI92 résout directement l'équation



L'enseignante insiste en conclusion sur le fait que, même sans connaître exactement l'expression de la fonction qu'elle avait utilisée, en interprétant géométriquement la vitesse, ils avaient le moyen de résoudre de façon approchée le problème posé. Cette synthèse a duré environ 30mn.

Elle introduit ensuite l'activité suivante en rétroprojetant le graphe (cf. annexe 3) et en expliquant qu'il s'agit par exemple d'une masse suspendue à un ressort vertical ou d'une bille que l'on lâche. Les élèves se mettent au travail. Marianne commence tout de suite à tracer des tangentes. Fabien a visiblement des difficultés à interpréter le graphe. Il n'est pas le seul dans ce cas. L'enseignante intervient, trace un axe au tableau avec une origine et demande de placer sur cet axe la position du mobile aux temps t=0, 1...., 12 pour aider l'interprétation. Ceci débloque la situation. Les premiers points à coordonnées entières (t=0,1,2) et ceux qui aux changements du sens de déplacement sur l'axe sont nommés et le mouvement est décrit en se référant à eux. La séance est presque achevée et l'enseignante décide de terminer collectivement, en demandant ce que l'on peut dire sur les vitesses, par exemple entre t=0 et t=1. Diverses réponses fusent : « l'abscisse diminue », « il recule ». L'enseignante insiste en questionnant sur la tangente, sur la vitesse. Un élève dit que le coefficient directeur de la tangente est négatif, Marianne explicite le lien avec la décroissance de la fonction, un autre dit que la vitesse est négative car il recule. La séance se termine en soulignant ce qui différencie cette situation des situations précédentes : un mobile qui va dans les deux sens donc l'existence d'intervalles où la vitesse est négative, c'est à dire la dérivée ou le coefficient directeur de la tangente, négatifs et la fonction associée à l'abscisse du mobile, décroissante.

Lorsque la séance s'achève, l'enseignante précise que la courbe tracée est constituée de trois arcs de paraboles raccordés aux points d'abscisses 2 et 7, de manière à ce que la fonction

associée soit dérivable partout, les sommets des paraboles étant situés exactement aux points d'abscisses 0, 4 et 9. Elle leur demande de finir chez eux la représentation graphique approximative de la fonction vitesse, puis de chercher l'équation des trois arcs de parabole, de calculer les dérivées et de vérifier que cela correspond bien à peu près aux vitesses trouvées graphiquement.

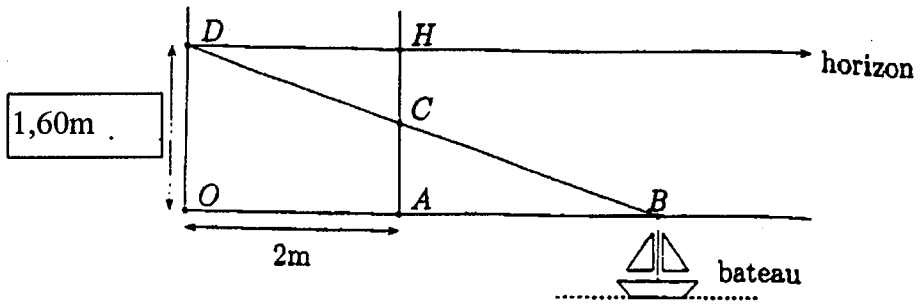
C. Bilan

Cette séance, si l'on excepte le fait que la phase 2 a pris plus de temps que prévu, nous semble avoir fonctionné globalement conformément aux prévisions effectuées. La notion de vitesse moyenne est réinvestie sans difficulté par les élèves dans la première phase de travail individuel, le travail en binômes et les échanges entre binômes voisins permettent le contrôle et la rectification des quelques tracés erronés produits, le bilan collectif qui suit s'effectue sans problème. Dès le début de la phase 2, les réflexions de quelques élèves montrent qu'ils sont sensibles aux choix effectués au niveau des variables pour disqualifier des procédures d'évaluation grossière et ceci aide sans aucun doute à la dévolution de la tâche. Le travail en binômes fait intervenir les différentes procédures identifiées a priori, y compris l'utilisation des tangentes qui nous semblait moins assurée (elle n'est cependant le fait que d'un petit nombre d'élèves). Au niveau des tracés également, les différents types a priori prévus se retrouvent dans les productions des élèves, sans qu'un type particulier ne s'impose. La tâche est visiblement accessible aux élèves et le contexte dans lequel elle est située contribue visiblement à la rendre attractive. Dans le bilan collectif, le choix fait de construire la fonction à partir de polynômes du second degré aide visiblement à formuler et surtout contrôler expérimentalement le lien vitesse / coefficient directeur de la tangente / dérivée. En revanche, la mise en évidence des raisons de ce lien en revenant à la définition du nombre dérivé est loin d'aller de soi. Comme nous en avions fait l'hypothèse en concevant l'ingénierie, la définition du nombre dérivée s'est effacée devant les techniques algébriques qui ont opérationalisé le calcul des dérivées et si le lien coefficient directeur de la tangente / nombre dérivé est réinvesti semble-t-il sans difficulté, au moins collectivement, c'est à une tangente perçue comme droite qui colle à la courbe que les élèves visiblement se réfèrent. Ceci est d'autant moins étonnant que la situation graphique qui a servi à introduire la dérivée comme limite ne se retrouve pas du tout ici ; ce qui est en jeu c'est plutôt la possibilité d'approcher de façon raisonnable la courbe par une ligne polygonale. C'est donc l'enseignante qui doit prendre en charge cette réactivation et l'exploiter pour définir la vitesse instantanée comme limite. La dernière phase est trop rapidement menée pour permettre une véritable analyse mais nous voudrions souligner que le travail demandé en fin de séance sera en général fait et correctement fait.

D. Réinvestissement dans une situation problème : le bateau de Pascal

Ce problème, repris tel que de l'ouvrage « Vers l'infini pas à pas » est donné à chercher à la maison à la suite de cette séance. En voici le texte :

Un observateur dont l'oeil est au point D (Figure) regarde à travers une fenêtre AH un bateau qui s'éloigne de lui sur la mer à la vitesse de 40km/h. La situation lui rappelle une citation de Pascal:



« Si on regarde au travers d'un verre un vaisseau qui s'éloigne toujours directement, il est clair que le lieu du diaphane où l 'on remarque un point tel qu'on voudra du navire haussera toujours par un flux continuel, à mesure que le vaisseau fuit. Donc, si la course du vaisseau est toujours allongée et jusqu'à l'infini, ce point haussera continuellement; et cependant, il n'arrivera jamais à celui où tombera le rayon horizontal mené de l'oeil au verre, de sorte qu'il en approchera toujours sans y arriver jamais, divisant sans cesse l'espace qui restera sous ce point horizontal, sans y arriver jamais. D'où l'on voit la conséquence nécessaire qui se tire de l 'infinité de l 'étendue du cours du vaisseau, à la division infinie et infiniment petite de ce petit espace restant au-dessous de ce point horizontal et infiniment petite de ce petit espace restant au-dessous de ce point horizontal. »

L'observateur voit sur la vitre l'horizon en H et le bateau en C. Ce point C est celui dont parle Pascal: il s'approche continuellement de H sans jamais y arriver.

1) Calculez la hauteur h(x) du point C, x désignant la distance du bateau à l'observateur.
2) A quelle vitesse se déplace ce point C, image du bateau sur la vitre ?

Ce problème nécessite d'abord une reformulation : la distance que les auteurs considèrent n'est en effet pas la distance du bateau à l'observateur mais la distance OB, la vitesse de 40km/h indiquée est celle de déplacement du point B par rapport au point 0.

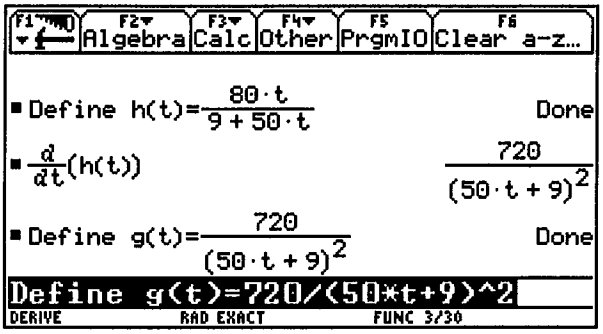
Comme on le voit, le problème est donné ici sans indication. Si le calcul de h(x) est un calcul qui ne doit a priori pas poser de problème à ce niveau, avec les précisions ci-dessus, la seconde étape de la mathématisation consistant à exprimer AC en fonction du temps pour pouvoir étudier la vitesse du point C n'a rien d'évident. Les élèves ne sont pas guidés dans cette phase et c'est même à eux de choisir une position initiale pour le bateau, pour pouvoir exprimer x en fonction de t. S'ils choisissent comme position initiale le point A (ce qui n'a cependant rien de réaliste), et comme origine du repère le point 0, ils arriveront à l'expression $x(t)=210^{-3} + 40t$, s'ils utilisent les unités d'expression de la vitesse mais, avec ces mêmes choix de repère et d'origine des temps, ils peuvent obtenir d'autres expressions suivant les unités choisies, par exemple l'expression $x(t)=2+\frac{100t}{9}$, fournie par les auteurs de l'ouvrage, si le temps est exprimé en secondes et la distance en mètres. Il leur faudra ensuite substituer cette expression de x, dans l'expression de h(x) pour obtenir l'expression de la distance AC en fonction du temps. Dans le cas où repère, origine des temps et unités sont choisis comme ci-dessus, ils vont ainsi arriver à l'expression :

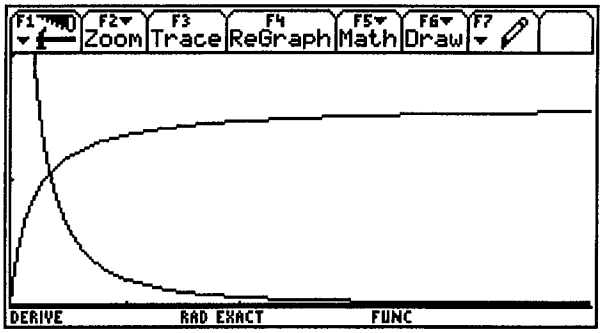
$$h_1(t) = \frac{80t}{9+50t}$$

qui leur permettra de calculer la vitesse du point C, exprimée en mètres par seconde.

A partir de ce moment là, le problème devient plus routinier. L'interprétation cinématique et géométrique de l'étude fonctionnelle permet de retrouver les phénomènes que laisse supposer l'étude qualitative de la situation que l'on a pu mener dans un premier temps pour essayer de comprendre la situation et le texte de Pascal : le point C se rapproche du point H sans jamais l'atteindre, la vitesse du point C est une fonction décroissante de t et tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Les écrans de la TI92 ci-après correspondent à la définition de la fonction h_1 et de sa dérivée et à leur tracé dans la fenêtre [0,5]x[0,2].

On notera que le tracé graphique de la fonction comme de sa dérivée peuvent amener à conjecturer à tort une demi-tangente verticale en t=0. Le retour à l'expression de la dérivée de la fonction montre qu'il n'en est rien : la dérivée est simplement grande puisque voisine de 9.





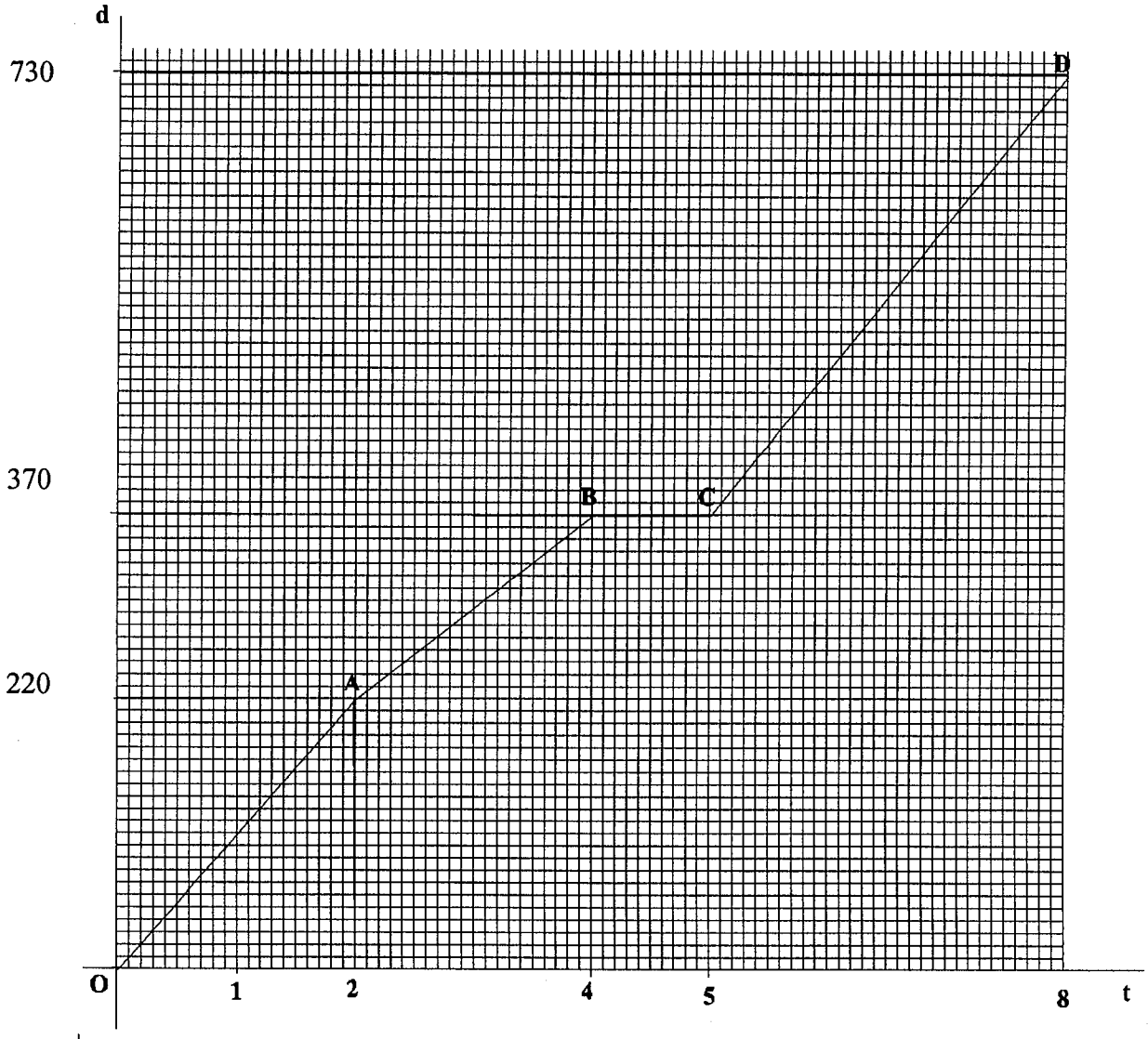
En fait, on pourrait à ce point enrichir la modélisation en faisant intervenir la courbure de la terre .... mais ce prolongement n'a pas été envisagé.

Les élèves ont eu ce problème à chercher à la maison (il figurait sur la même fiche que les situations d'introduction de la première séance). Ils vont rencontrer des difficultés sérieuses dans la modélisation fonctionnelle, certains ayant même du mal à trouver l'expression de h(x). A la séance suivante, un temps sera donc consacré à l'analyse qualitative de la situation via le positionnement de points B_i régulièrement espacés sur (OA) et la construction des points C_i correspondants, puis à la mise en place de la modélisation fonctionnelle et ils termineront ensuite l'étude, comme prévu, hors classe.

Encore une fois, si besoin était, cette situation nous montre la complexité des prises de décision en jeu dans le processus de modélisation fonctionnelle et la difficulté qu'il y a à construire des stratégies pédagogiques qui, sans sous-estimer ces difficultés, puisse permettre à l'élève de construire progressivement une certaine autonomie dans ce domaine.

Annexe 1 : Phase 1

Diagramme de la distance parcourue en fonction du temps



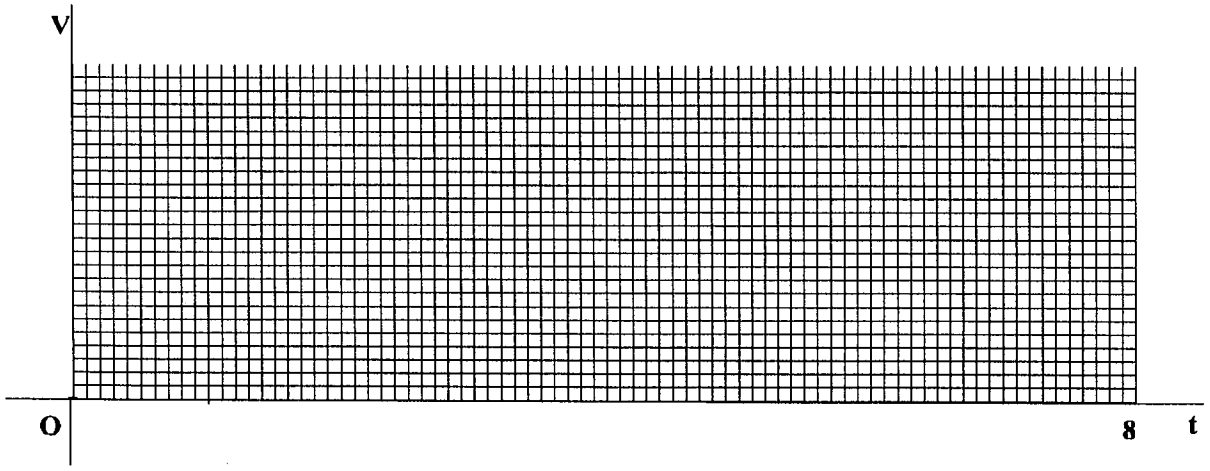
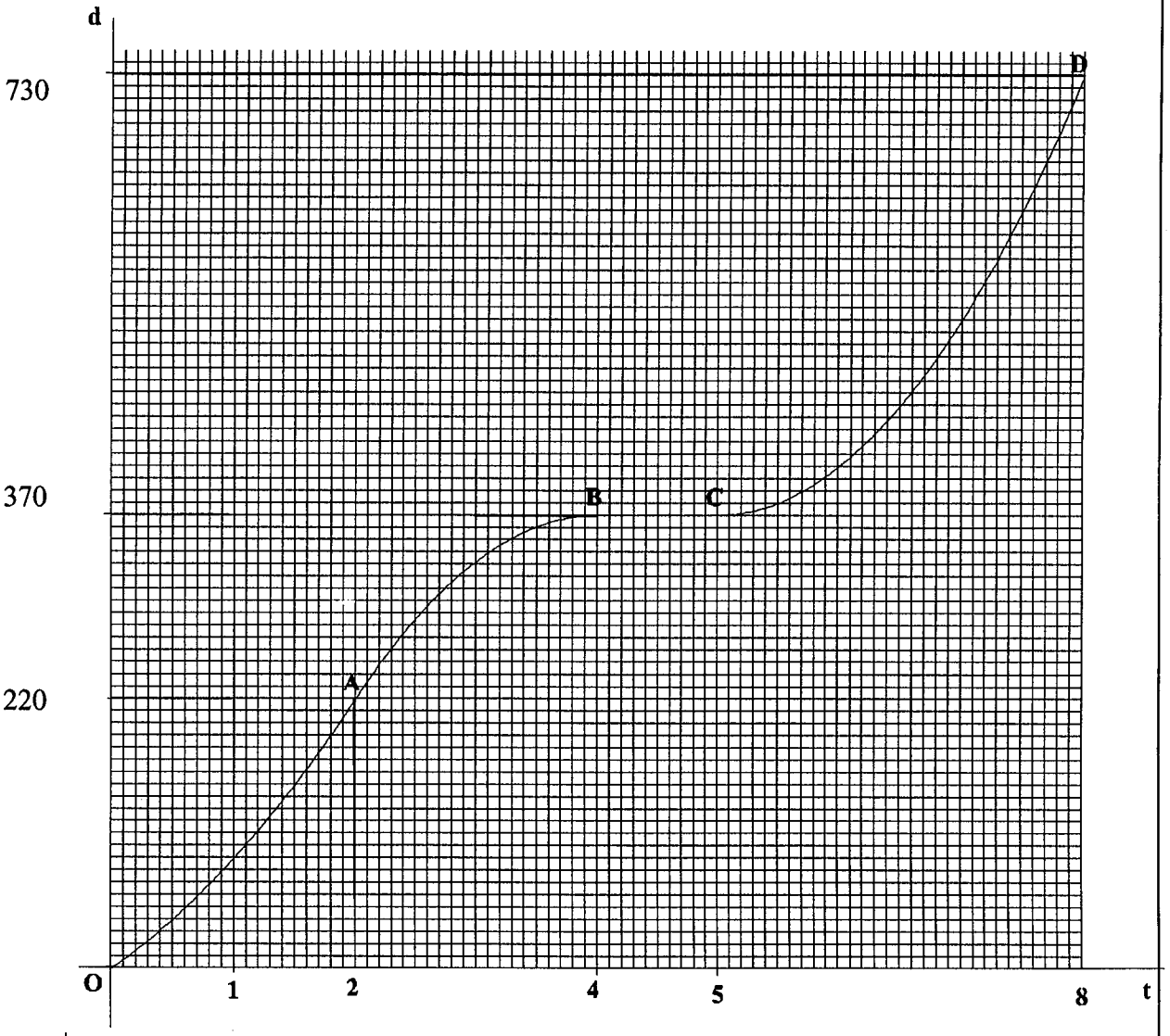


Diagramme des vitesses

Annexe 2 : Phase 2

Diagramme de la distance parcourue en fonction du temps.



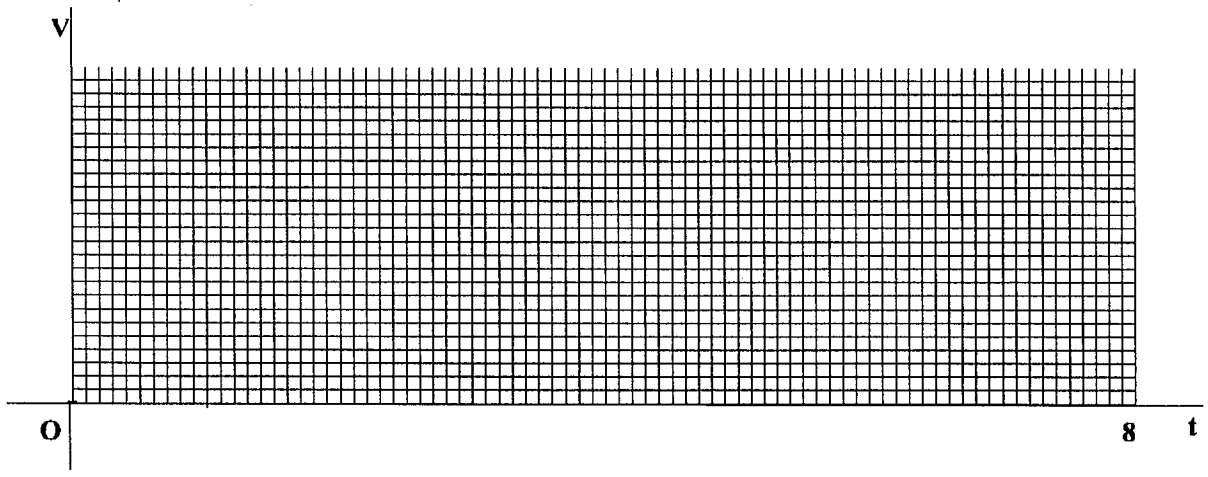
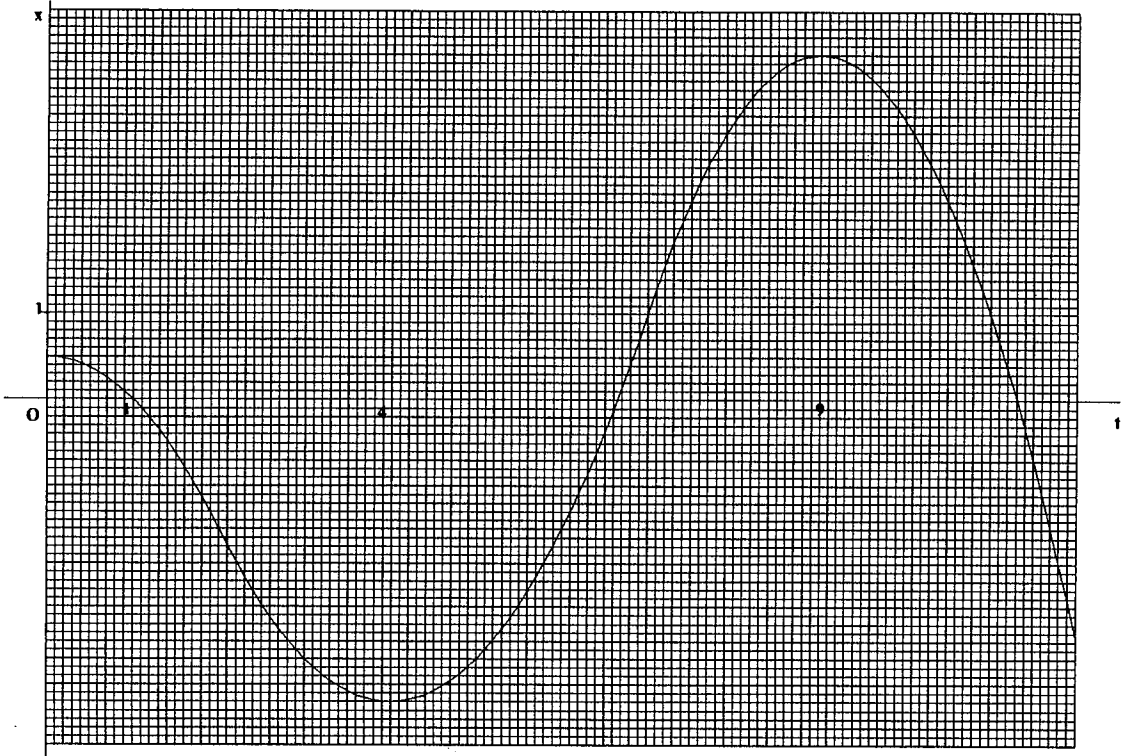


Diagramme des vitesses

Annexe 3 : Phase 3

Diagramme de la distance parcourue en fonction du temps



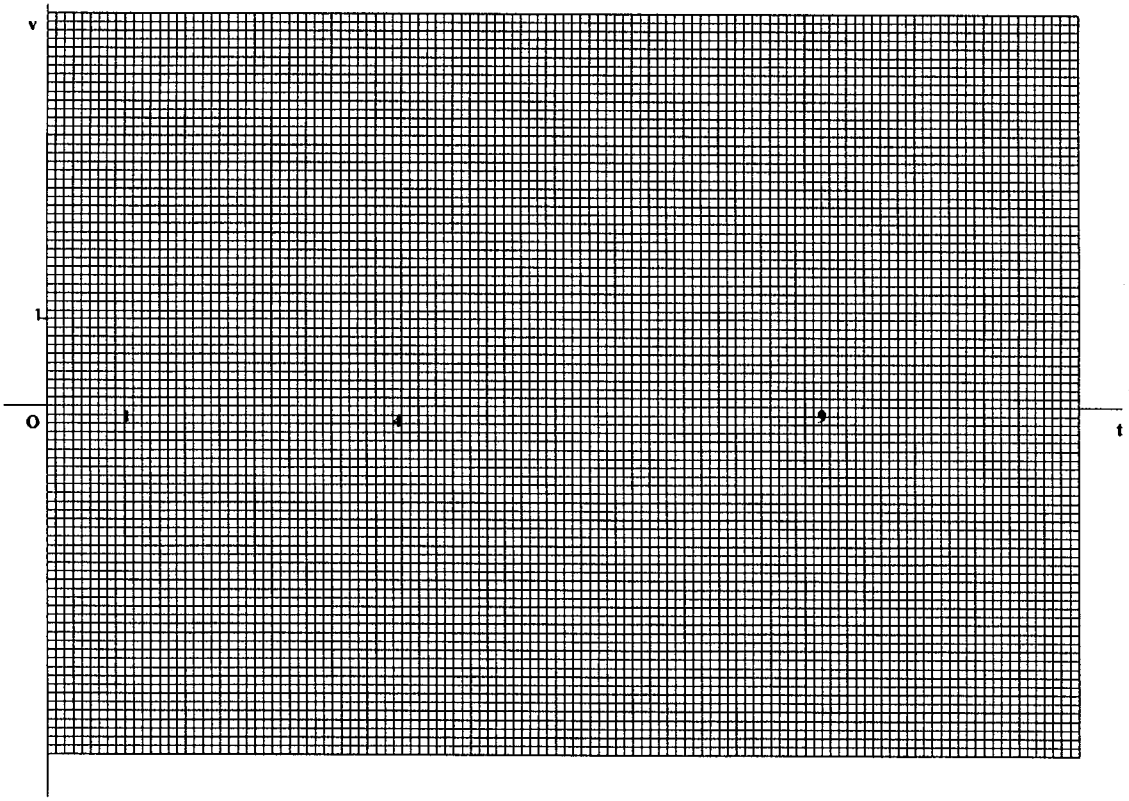
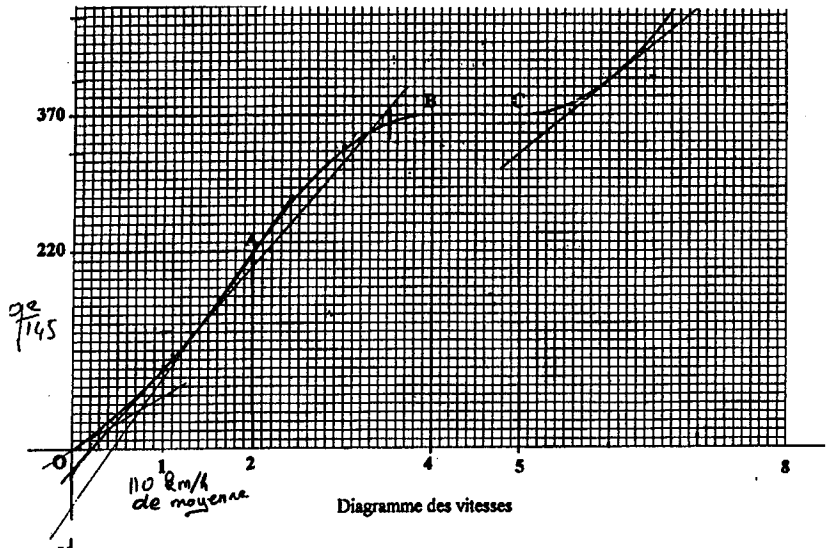
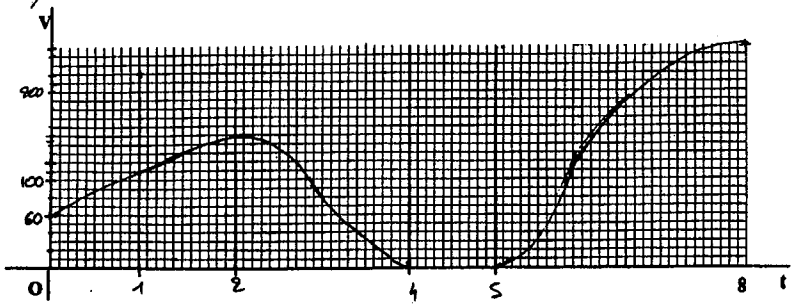


Diagramme des vitesses

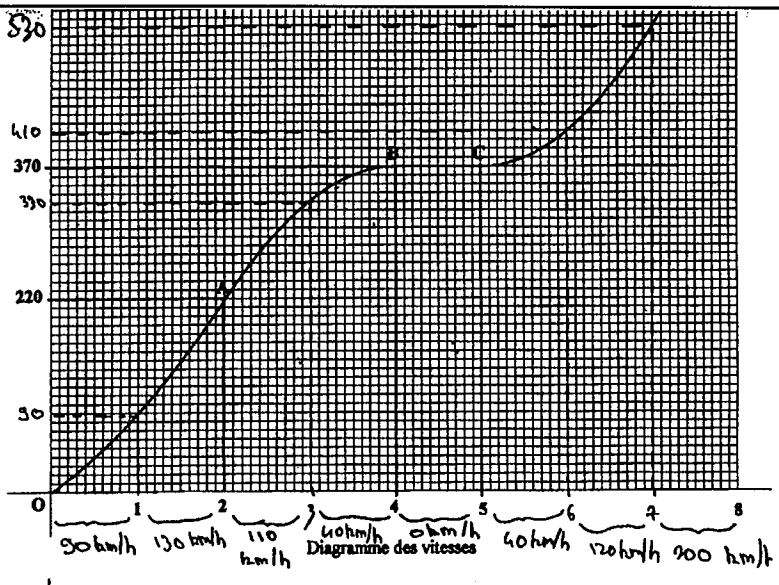
Annexe 4 : Graphes produits par Marianne et Fabien (ph. 2)

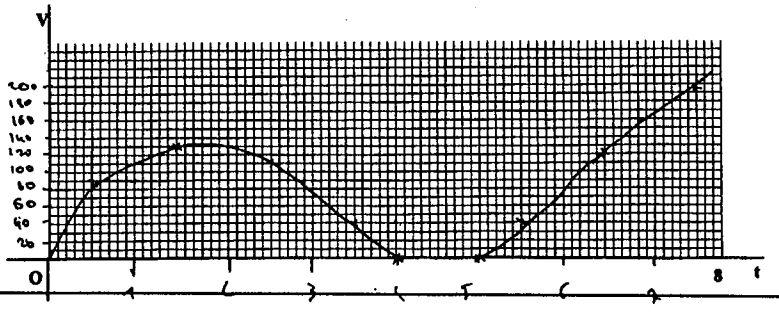
Marianne





Fabien





INGENIERIE 6.
Recherche de fonctions sous contraintes : le raccord de tuyaux

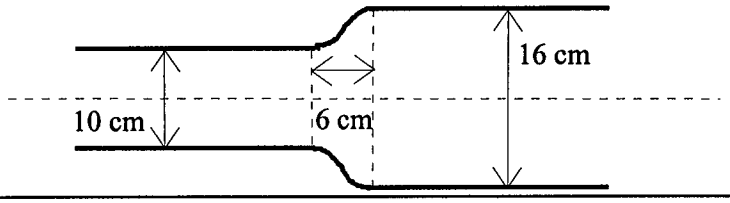
Le problème dont le texte est donné ci-après a été proposé aux élèves de la classe A en fin d'année, le 6 juin, lors d'une séance de 2 heures. Il s'agit d'un problème de recherche de fonctions sous contraintes qui s'inscrit dans la dimension « outil » de la notion de dérivée.

PROBLEME DE RACCORD

On veut raccorder deux tuyaux représentés en coupe dans la figure ci dessous.

Le raccord est engendré par la rotation d'une courbe autour de l'axe des tuyaux. Cette courbe doit être tangente aux deux tuyaux aux points de jonction et ne doit nulle part changer brusquement de pente.

Le but de l'exercice est de trouver de tels raccords et de choisir, parmi ceux que l'on aura trouvé celui pour lequel la pente est minimum.



A. Objectifs et scénario

Il s'agit de faire travailler les élèves sur un problème se modélisant en termes de recherche de fonctions sous contraintes, les contraintes faisant intervenir à la fois les valeurs de la fonction et de sa dérivée. Le problème est proposé sans indication de modélisation, dans le contexte de la situation. Il admet des solutions diverses, même en se limitant aux fonctions connues des élèves de ce niveau, et un critère d'optimisation est donné : « minimum de la pente » qui devra sans doute être explicité puisque ce que l'on vise ici, c'est en fait la minimisation du maximum de la pente sur l'intervalle considéré. De plus, la modélisation fonctionnelle passe ici par le choix d'un repère. Si nous considérons la courbe dessinée dans la partie supérieure du schéma fourni, deux repères semblent bien adaptés au problème : le repère R1 dont l'axe des abscisses est parallèle à l'axe des tuyaux et l'origine au début du raccord, le repère R2 dont l'axe des abscisses est lui aussi parallèle à l'axe des tuyaux mais dont l'origine se trouve au milieu du segment déterminé par les deux points de raccord. Suivant le repère choisi, les contraintes fournies vont s'exprimer de façon différente et les élèves vont être confrontés, pour un même raccord, à des calculs différents et à des expressions fonctionnelles différentes. Il sera alors intéressant de vérifier graphiquement qu'il s'agit bien du même raccord, puis de chercher une justification analytique, en étudiant comment le changement de repère affecte l'expression fonctionnelle, de comparer également l'économie des calculs suivant le type de repère choisi.

Même si les élèves sont dans un premier temps tentés par une stratégie d'ajustement par essais successifs de fonctions, les tracés étant aisés à la calculatrice, il y a très peu de chances qu'une telle stratégie aboutisse, compte-tenu de la nature des contraintes données. Il est prévu de ne pas laisser les élèves s'enfermer dans cette voie et, pour cela, après une première phase de recherche en binômes :

- de faire exprimer par les élèves, collectivement, les types de raccord qu'ils envisagent (nous pensons voir apparaître des raccords avec des morceaux de paraboles, les élèves ayant déjà rencontré ce type de raccord dans la séance d'introduction de la notion de vitesse instantanée, et peut-être aussi des raccords de type sinusoïdal ou cubique),
- de décider avec eux de commencer à travailler sur un type donné de raccord et de les aider, si nécessaire, à modéliser fonctionnellement la situation, avant de les engager dans une deuxième phase de recherche en binômes qui sera conclue par un bilan où sera gérée collectivement la recherche du maximum de la pente pour le type de raccord considéré.

Dans une quatrième phase de la séance, il est prévu d'envisager un second type de raccord, en leur laissant cette fois une autonomie complète dans la résolution. Cette phase conduira elle aussi à un bilan où le choix entre les deux raccords sur la base du critère de pente sera traité collectivement, même s'il n'a pas été abordé par les binômes dans la phase de recherche.

A l'issue de cette quatrième phase, il est prévu d'introduire un troisième type de raccord si cela n'a pas été fait spontanément et de leur demander de résoudre le problème correspondant hors classe.

B. Déroulement

L'enseignante distribue le texte encadré ci-dessus et conseille aux élèves de travailler en binômes. Vincent est l'élève dont les écrans sont enregistrés.

Assez vite, elle va intervenir car un élève dit qu'il ne comprend pas très bien ce qu'on lui demande. L'enseignante commente le texte puis trace au tableau deux raccords : un raccord zigzaguant et un raccord droit en demandant si ces raccords respectent les conditions fixées. Les élèves répondent que non, plusieurs précisant qu'il n'y a pas tangence. Un élève propose d'arrondir un petit peu le raccord droit et Vincent propose, quant à lui, de prendre une courbe en x^3. Quand l'enseignante lui demande d'expliquer pourquoi, il répond qu'une partie de la courbe pourrait ressembler à ce dont ils ont besoin. Nicolas rajoute que ça pourrait marcher parce qu'il y aurait un maximum et un minimum. L'enseignante utilise le rétroprojecteur pour visualiser ceci avec une cubique déjà tracée sur papier quadrillé, en marquant les tangentes horizontales aux deux points de raccord, nommés A et B.

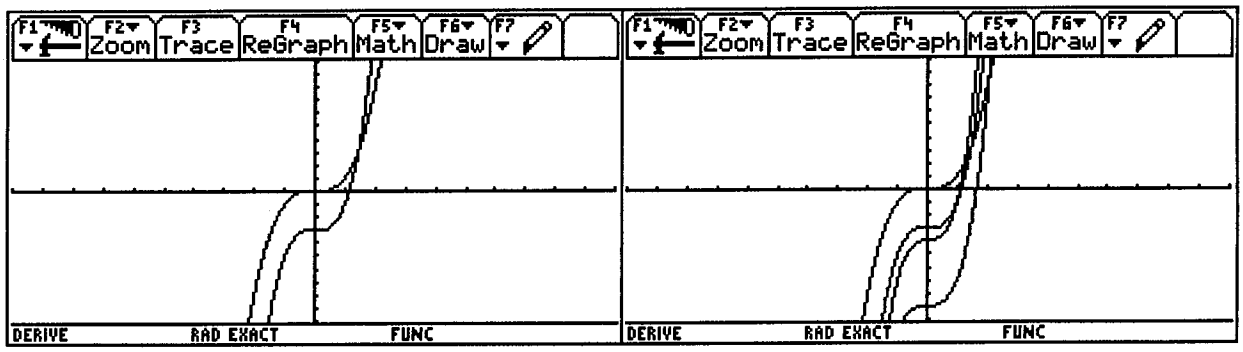
Elle demande ensuite aux élèves pourquoi ils sont passés directement d'un segment, c'est à dire de la courbe représentative d'une fonction affine à une fonction du troisième degré. C'est Marianne qui lui répond qu'avec une parabole, elle ne pourrait pas avoir deux tangentes horizontales. Un élève rajoute que ce serait peut-être possible avec deux paraboles. L'enseignante visualise cette seconde proposition en rétroprojetant deux paraboles, ayant leurs sommets respectifs en A et B et se raccordant entre ces deux points.

Elle demande ensuite s'ils ont d'autres suggestions à faire et un autre élève propose de prendre des fonctions sinus ou cosinus. L'enseignante, là encore, projette un morceau de sinusoïde qui assure le raccord, en les assurant que c'est bien un morceau de sinusoïde qu'elle a tracé.

Ces trois types de raccords ayant été envisagés, elle leur demande par quel type ils veulent commencer la recherche, lequel leur paraît le plus simple. C'est le raccord cubique qui l'emporte nettement et il est donc décidé de commencer par ce type de raccord. Une dizaine de minutes se sont en fait écoulées depuis le début de la séance et l'enseignante lance la phase de recherche individuelle, sans entrer plus avant dans la modélisation fonctionnelle.

Quelques élèves, dont Vincent, vont d'emblée écrire l'expression générale d'une fonction du troisième degré et commencer à écrire des conditions. Vincent, sans le préciser, a choisi un repère de type R1 mais travaille en millimètres puisque les premières conditions écrites sont : $f(0)=0$ et $f(60)=30$. Il conclut tout de suite que le terme constant est nul puis passe au calcul de $f(60)$ à la main.

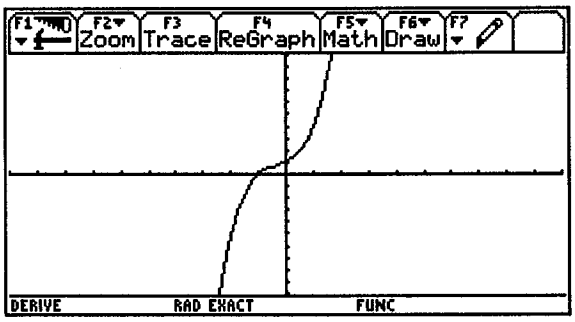
Mais beaucoup d'élèves font des essais à partir de x^3, avec leur calculatrice. Amandine par exemple entre successivement dans Y= les expressions : x^3, $2x^3-3$, $2x^3-9$, $3x^3-4$ et les fait tracer.



Elle déclare qu'il faut qu'elle arrive à faire quelque chose de « moins abrupt, de moins raide ».

Jérôme appelle l'enseignante, en lui disant qu'avec x^3, il n'arrive pas à avoir de maximum et de minimum. L'enseignante répercute la question au niveau collectif. Elle entre la fonction dans Y= et la fait tracer en *ZoomSdt* puis demande s'il y a, comme l'avaient dit Vincent et Nicolas un maximum et un minimum. Les élèves répondent que non, que la fonction est toujours croissante. l'un d'eux propose de diviser x^3 par un entier. L'enseignante fait remarquer que cela ne va pas changer le sens de variation.

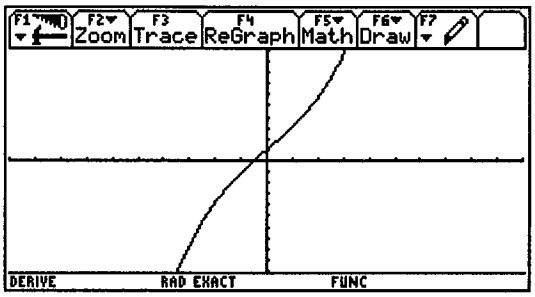
Vincent, perplexe, fait tracer x^3+x^2+x+1 :



L'enseignante insiste sur le fait que la dérivée peut s'annuler, comme c'est le cas pour x^3, sans qu'il y ait pour autant un maximum ou un minimum et elle pose la question de savoir si, finalement, on peut obtenir un maximum et un minimum avec une fonction du troisième degré.

Les avis sont maintenant partagés. Certains proposent d'abandonner les cubiques pour les paraboles. L'enseignante ne les suit pas et revient à la question initiale. Vincent suggère de prendre ax^3+bx^2+cx+d et de regarder la dérivée. L'enseignante lui demandant de préciser, il ajoute que, comme elle est du second degré, elle peut s'annuler deux fois. L'enseignante reprend aussitôt qu'effectivement comme elle est du second degré, soit il n'y a pas de racines et elle reste de signe constant, soit il y a une racine double, soit il y a deux racines et c'est donc vraisemblablement possible d'avoir un maximum et un minimum. Et elle relance le travail en binômes.

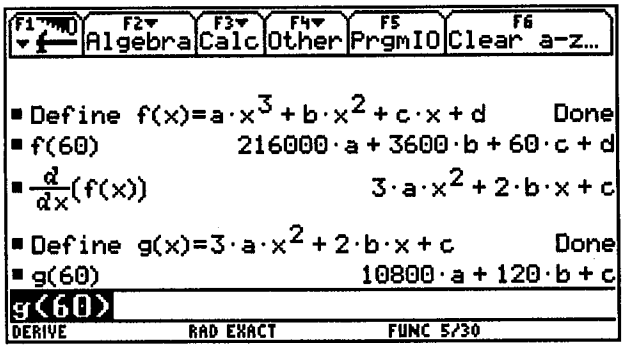
Beaucoup d'élèves se relancent dans des essais à la calculatrice, Amandine par exemple, essaie $0.1x^3+2x+1$:



Voyant cela, l'enseignante réintervient assez rapidement, en soulignant que s'ils cherchent de façon complètement empirique des fonctions du troisième degré, ils risquent d'y passer du temps... Elle ajoute que, s'ils veulent chercher des fonctions, il faut qu'ils choisissent un repère.

Elle circule dans la classe puis au bout d'un moment fait le point collectivement sur la question du choix du repère. Pierre explique le premier qu'il a pris un repère vertical, en mettant A en bas et B en haut, il fait le geste de tourner la feuille. L'enseignante dit qu'elle préfère qu'on laisse le tuyau horizontal comme il l'est initialement. Grégory ensuite propose de choisir le point A comme origine. Ce choix du repère R1 est le choix majoritaire mais quelques uns ont choisi le repère R2 et le disent. L'enseignante laisse les élèves libres de choisir un des deux repères et annonce qu'ensuite ils discuteront les avantages et les inconvénients des deux méthodes.

Elle guide ensuite l'expression des contraintes. Précisons que Vincent a de son côté avancé dans la recherche, écrivant que $f'(0)=c$. Il calcule maintenant $f'(60)$. Il vérifie ensuite ses calculs à la machine :



L'expression des contraintes ne pose pas de problème au niveau des valeurs prises par la fonction, mais la classe peine davantage sur les contraintes qui se traduisent par des valeurs de la dérivée. Ils formulent en effet sans problème la contrainte en termes d'équation de la tangente mais la reformulation en termes de valeur de la dérivée nécessite l'aide de l'enseignante. L'extrait suivant l'illustre bien :

> P. : « D'accord les coordonnées de A vérifient l'équation donc $f(0)=0$ et qu'est-ce que l'on doit avoir de plus en A ? »
>
> Plusieurs élèves : « une tangente horizontale »
>
> P. : « Oui, une tangente horizontale ; et on le traduit comment Nicolas ? »
>
> N. : « La tangente c'est y=0 »

P. : « Oui, la tangente a pour équation y=0, mais par rapport à f ? »

Silence

P. : « Qu'est-ce qui différencie une tangente horizontale d'une tangente comme ça ? » (elle trace une tangente oblique)

N. : « Le coefficient directeur »

P. : « Oui, le coefficient directeur. Et c'est quoi le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a ? »

Pierre : « C'est $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ »

D'autres élèves : « C'est m »

P. : « Oui, mais cet m, comment on l'obtient quand on connaît la fonction ? »

Silence puis Pierre : « C'est $f'(a)$ »

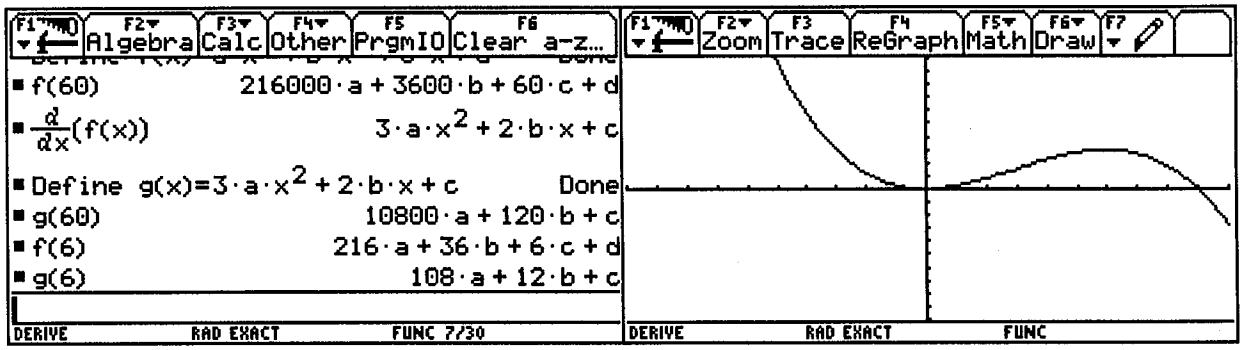
P. : « oui $f'(a)$, et alors ici quelle condition ça nous donne ? »

Plusieurs élèves : « $f'(0)=0$ »

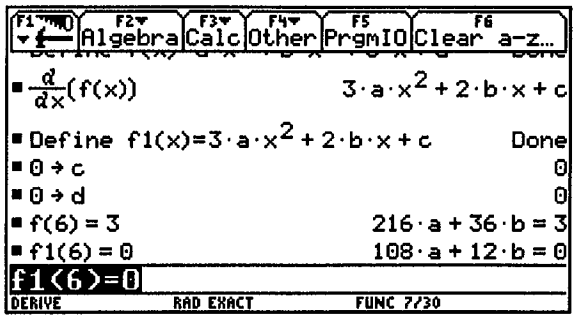
On notera que dans cet épisode, les élèves qui ont déjà formulé les conditions sous forme de dérivée n'interviennent pas. Peut-être, comme Vincent, avancent-ils dans leurs calculs, sans s'impliquer dans la discussion collective.

L'expression des contraintes en B se fait ensuite très vite et les élèves se remettent à la recherche. L'enseignante circule dans la classe. A un moment, elle reprend la parole suite à une demande d'élève pour faire préciser le nombre d'équations, le nombre d'inconnues. Les deux nombres étant égaux à 4, elle souligne qu'il y a de bonnes chances pour que le système ait une solution, qu'ils peuvent s'aider de la machine mais qu'ils peuvent aussi résoudre à la main. A une autre demande elle répond que oui, c'est la méthode de Gauss qui est à utiliser pour la résolution du système.

Au bout de 10mn, beaucoup d'élèves ont terminé. C'est en particulier le cas de Vincent qui a repris ses calculs en revenant au centimètre, résolu le système à la main, puis entré la fonction obtenue dans Y= et l'a faite tracer.



Mais un certain nombre d'élèves traînent dans la résolution du système. L'enseignante décide d'arrêter la recherche et récapitule collectivement, en utilisant la machine rétroprojetable. Elle définit la fonction f et exprime les contraintes. Plusieurs élèves proposent de remplacer tout de suite c et d par 0, ce qu'elle fait en affectant la valeur 0 à ces deux variables.

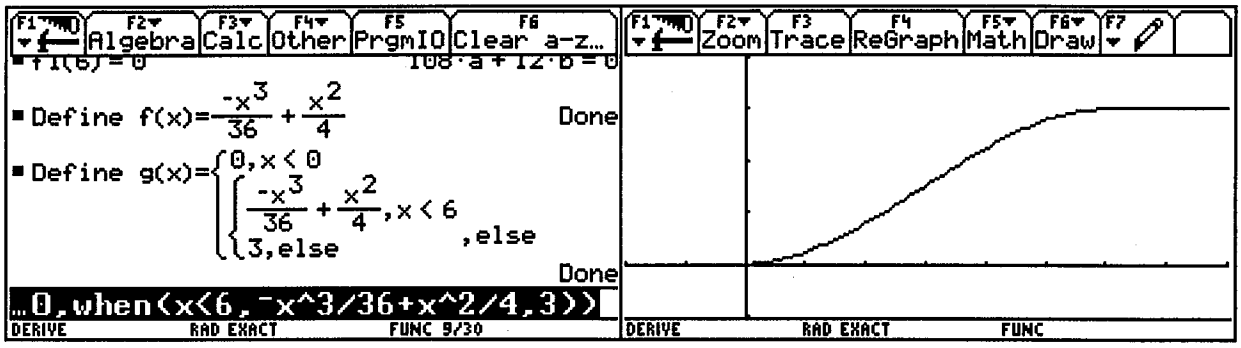


Elle recopie au tableau le système 2x2 résultant et le simplifie en :

72a+12b=1

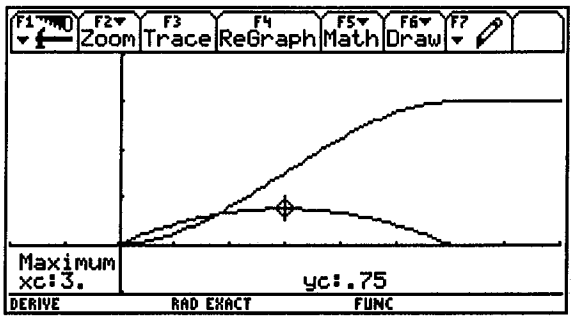
9a+b = 0

Puis elle fait oraliser les calculs et donner les résultats : a=-1/36 et b=1/4. Elle entre ensuite la fonction et la fait tracer en Zoom standard obtenant le même tracé que Vincent qui, entre temps, a modifié la fenêtre pour se limiter à [0,6]x[0,3]. Au vu du tracé, plusieurs élèves lui suggèrent d'ailleurs de se limiter à l'intervalle [0,6], mais l'enseignante dit qu'elle souhaiterait visualiser la fonction entière (elle trace au tableau). Un élève propose d'utiliser « *when* », ce qu'elle fait en détaillant soigneusement la syntaxe. Les élèves doivent faire de même sur leur propre machine. Elle choisit ensuite de tracer la fonction *g* sur [-2,8]x[-1,4].



L'enseignante en vient ensuite à la question du maximum de la pente. Pour les élèves, il n'y a aucun doute : le maximum est atteint au milieu de l'intervalle pour x=3. Elle demande comment le vérifier. Certains proposent de calculer l'équation de la tangente, mais cette fois le lien avec la fonction dérivée se fait plus facilement. Il est donc décidé de définir et tracer la fonction dérivée et de vérifier que son maximum est bien atteint pour x=3. La première heure s'achève sur ce point.

Après une pause qui est pour les élèves l'occasion de demander des informations sur le choix des options de terminale, la séance reprend. Suivant les propositions des élèves, elle définit la dérivée dans HOME et la fait tracer. Les élèves y voient la confirmation de leur conjecture et lorsque l'enseignante demande comment obtenir la valeur de ce maximum, ils suggèrent d'utiliser la commande maximum. L'enseignante le fait, en commentant les différentes étapes. Elle souligne également que la machine ne fonctionne pas ici en calcul exact, en dépit des apparences.



Un élève appelle à l'aide. En fait il a oublié de définir la fonction.

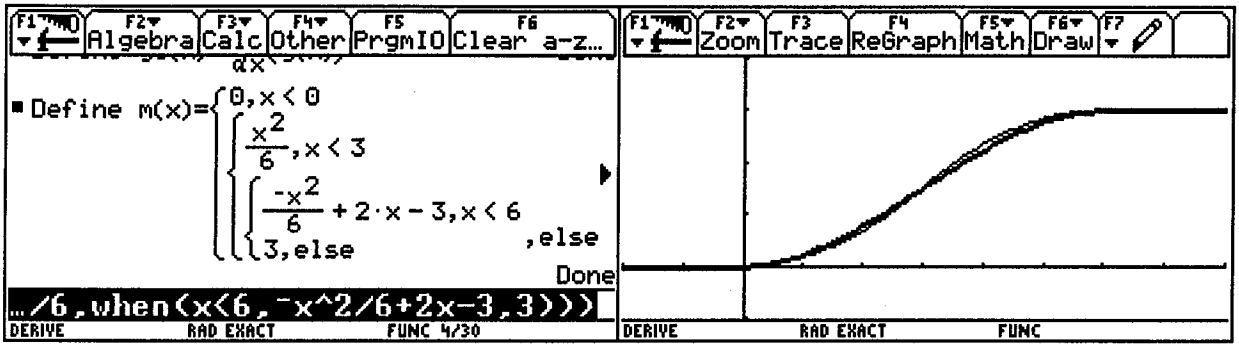
L'enseignante demande ensuite de prouver que le maximum est bien 3/4. Un élève propose de calculer la dérivée de g et de chercher où elle s'annule. L'enseignante demande la valeur de cette dérivée mais les élèves, visiblement effrayés par la complexité de l'expression formelle de g, ne peuvent répondre. Elle rappelle alors que l'on s'intéresse à la valeur de g sur l'intervalle [0,6] seulement et ceci débloque la situation. La dérivée est calculée mentalement : -x/6+1/2, un tableau de variation tracé et la démonstration achevée. Personne n'a pensé à raisonner directement en faisant appel aux propriétés de symétrie de la parabole. L'enseignante demande en revanche si le point correspondant au maximum de la pente a une autre propriété particulière vis à vis de la courbe de f et plusieurs répondent que c'est un centre de symétrie. Elle leur demande de le démontrer chez eux pour la séance suivante et passe au second type de raccord : par paraboles, en disant aux élèves que cette fois, ils doivent le faire sans aide. Cette première phase a duré une dizaine de minutes.

Vincent, pendant cette phase collective, a travaillé sur le raccord parabolique écrivant les conditions : $f(0)=0$, $f'(0)=0$ et $f(3)=3/2$. A partir de l'expression générale $f(x)=ax^2+bx+c$, il a ainsi obtenu l'équation du premier morceau de parabole et contrôle avec sa calculatrice.

L'enseignante circule dans la classe. Visiblement la mathématisation du problème du raccord des deux paraboles ne va pas de soi. Au bout de 5mn environ, elle intervient collectivement pour aider cette mathématisation. Elle trace au tableau un raccord possible, C n'étant pas spécialement au milieu de [AB], en précisant que les tangentes au point de raccord doivent être les mêmes, puis demande comment choisir le raccord. Tout de suite, des élèves proposent de fonctionner par symétrie autour du milieu de [AB]. L'enseignante acquiesce et lance tout le monde sur cette piste. Certains ont quand même du mal et elle sera obligée de faire préciser les trois contraintes que l'on va formuler pour trouver chaque parabole. Certains ont sans doute été gênés par l'expression de la contrainte de tangence au raccord qui, de fait, est momentanément abandonnée.

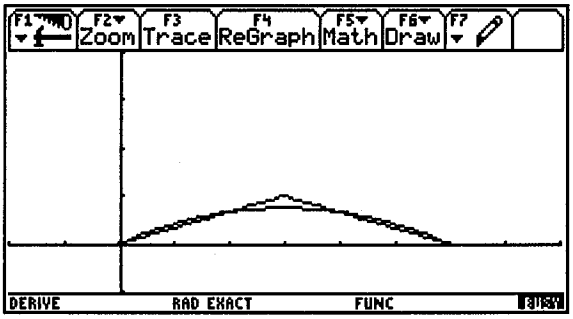
Suit une dizaine de minutes de travail en binômes. A ceux qui ont terminé, l'enseignante demande de vérifier que le raccord se fait bien sans rupture de pente en x=3. Vincent a fini assez vite, vérifie une fois de plus ses calculs à la machine, puis veut définir la fonction globale en utilisant *when* et fait l'erreur de l'appeler g tout en utilisant g dans sa définition. Sa machine se plante et, après avoir essayé diverses choses, il fait un *Reset*.

Suit une mise au point collective, les calculs étant dictés par les élèves et écrits par l'enseignante au tableau. On arrive ainsi aux deux expressions algébriques : $f(x)=x^2/6$ et $f(x)=-x^2/6+2x-3$. L'enseignante fait remarquer que les coefficients de x^2 sont opposés et fait rapidement le lien avec la symétrie par rapport au point C. Elle définit ensuite la fonction et la fait tracer, d'abord seule puis avec la cubique, la cubique étant tracée en plus épais.

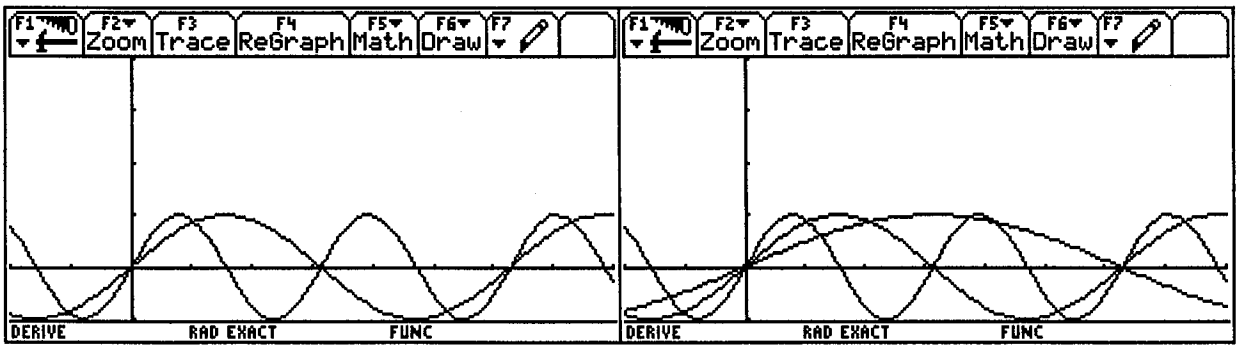


Les élèves sont étonnés par la proximité des deux courbes et ne savent pas très bien dire laquelle a « la plus grande pente ». Avant de travailler sur de problème, l'enseignante revient sur le raccord des deux paraboles, qui est momentanément en suspens en demandant si les deux paraboles se raccordent vraiment bien. Encore une fois, des élèves proposent de trouver les équations des deux tangentes en x=3 et encore une fois, l'enseignante les ramène à la comparaison des seuls coefficients directeurs et des nombres dérivés. Ceci étant explicité, les calculs sont faits oralement et les résultats notés au tableau. Finalement, on peut conclure puisque les deux nombres dérivés sont égaux à 1.

Pour comparer les pentes, ils proposent ensuite de tracer les deux dérivées. L'enseignante le fait, tout en faisant remarquer que l'on peut déjà conclure puisque le raccord des paraboles se fait avec une pente 1 supérieure au maximum de ¾ trouvé pour la cubique. Elle fait analyser ensuite les positions relatives des deux courbes.



Cette phase collective a duré une vingtaine de minutes. On passe ensuite aux sinusoïdes pour les 10 dernières minutes de la séance. Vincent, à son habitude a un peu anticipé. Il a commencé à tracer diverses sinusoïdes correspondant aux expressions : sin2x, sinx et sin (x/2). Il compare les pentes et semble satisfait.



Il passe ensuite à l'expression des conditions et écrit :

$f(x)=a \sin(b\,x)+c$

$0=a \sin(0)+c$

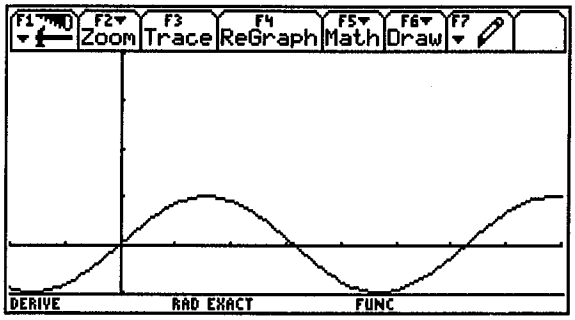
$3=a \sin(6\ b)+c$

$0=a\ b \cos(0)$

$0=a\ b \cos(6\ b)$

Il en déduit : c=0 puis reste en plan, ce qui se comprend aisément.

L'enseignante, dans cette dernière phase, va préparer collectivement le travail sur les sinusoïdes que les élèves auront à achever seuls pour la séance suivante. Elle le fera en partant directement des caractéristiques graphiques de la fonction sinus et non de la forme générale de l'expression à trouver, comme dans les cas précédents. Après avoir écarté la proposition d'un élève : essayer $\sin x + x$, déclarée trop compliquée, elle fait tracer la fonction sinus à la calculatrice :



puis demande aux élèves quelle partie de cette courbe leur paraît intéressante par rapport au problème posé. Ceci ne pose pas de problème. Elle reproduit cette partie au tableau, en faisant préciser les coordonnées des extrémités : $(-\pi/2,-1)$ et $(\pi/2,1)$ et en faisant préciser les caractéristiques que l'on doit avoir pour le raccord : un intervalle [0,6] pour les x, un intervalle [0,3] pour les y. Les élèves proposent d'abord de remonter la courbe d'une unité. Ensuite, elle attire leur attention sur l'amplitude qui est de 2 pour la fonction sinus et doit être ici de 3. Plusieurs proposent alors de multiplier le sinus par 3/2. Ensuite elle pose le problème de l'ajustement de l'écart sur les abscisses qu'il faudra gérer en multipliant x par quelque chose et leur dit aussi qu'il leur restera ensuite à centrer la courbe en C en rajoutant quelque chose aux x et quelque chose aux y. C'est la fin de la séance. Elle propose de faire des rédactions par groupes pour la séance suivante.

D. Bilan

Divers points ressortent du déroulement que nous venons de décrire. Nous voudrions en souligner principalement deux :

- le fait que les élèves font intervenir sans difficultés et très vite les diverses solutions qui nous avaient semblé envisageables à leur niveau.
- l'ensemble des savoirs et techniques nécessaires à la mathématisation et à la résolution du problème, au delà de la seule idée des différents types de raccords possibles.

Nous avions sans aucun doute sous-estimé la complexité des problèmes que les élèves avaient à gérer simultanément dans cette situation, complexité accrue par le fait que beaucoup d'entre d'eux n'étaient encore en rien des problèmes routiniers. On voit bien ainsi que la première stratégie que développent beaucoup d'élèves consiste à essayer au hasard des fonctions du troisième degré, ce qui conduit généralement, vu le type d'essais effectués, à des fonctions

monotones qui ne répondent pas aux attentes. Et l'on voit bien tout le travail mathématique nécessaire pour comprendre ce phénomène lorsque l'enseignante l'engage collectivement avec les élèves. Il est clair que, même nourri par une réflexion sur les dérivées, l'ajustement expérimental des cubiques est une voie pratiquement sans issue et dont la productivité mathématique est limitée. C'est pourquoi, conformément à l'analyse a priori, l'enseignante ne va pas laisser les élèves persister dans cette voie et les orienter vers une modélisation fonctionnelle. Ce type de modélisation, qui fait intervenir des objets dépendant de quatre paramètres, n'a rien de routinier à ce niveau. Il apparaît cependant spontanément chez certains élèves, comme Vincent, qui n'éprouvent pas par ailleurs de difficulté à formuler économiquement les contraintes. Pour la plupart des élèves cependant, on voit bien que l'introduction d'un repère, qu'ils choisissent astucieusement sans difficulté et d'une forme générale de fonction ne suffit pas à résoudre les problèmes de la mathématisation. Les contraintes sur la dérivée sont lues en termes d'équations de tangente et la reformulation en valeur de la dérivée n'est en rien automatique. On retrouve là les difficultés dans la construction de la flexibilité entre les différents points de vue et expressions autour de la dérivée que nous avons déjà mentionnées à diverses reprises. Le temps passé sur ce premier type de raccord fera d'ailleurs que l'enseignante renoncera à aborder la question a priori envisagée de la comparaison des résolutions suivant le repère choisi et se limitera collectivement à la modélisation dans le repère massivement choisi par les élèves. Elle renverra également en travail hors classe la question du centre de symétrie, plus facile à traiter, avec le choix du repère R2.

Le second type de raccord avec les deux paraboles peut se gérer de plusieurs façons. Ici, en continuité avec ce qui précède (cette continuité étant d'ailleurs implicite dans les consignes données), les élèves les premiers à démarrer vont partir d'expressions générales dépendant de trois paramètres cette fois et déterminer les paramètres en traduisant les contraintes. Le problème est ici moins simple qu'il n'y paraît à première vue, si l'on ne raisonne pas par symétrie par rapport au point C milieu de [AB] et ce, même si l'on décide très raisonnablement de raccorder les deux paraboles en C. En effet, la condition de tangence en C rajoute une condition supplémentaire qui fait intervenir les deux fonctions, mais sera de fait automatiquement satisfaite dès que les 6 autres le seront. On aurait aussi pu gérer le problème plus géométriquement en considérant la parabole de sommet A passant par C puis en considérant la parabole image de celle-ci par la symétrie par rapport au point C. Si l'on admet que la symétrie conserve la tangence, ce qui on l'a vu à plusieurs reprises dans l'ingénierie semble une évidence pour les élèves, le problème du raccord en C est alors résolu puisque la tangente à la première parabole est globalement invariante dans cette symétrie ; celui du raccord en B peut être géré ensuite de façon analogue. On notera que l'enseignante évoque très brièvement cette possibilité dans le bilan collectif.

Le troisième type de raccord pourrait lui aussi être géré via l'écriture d'une forme générale dépendant de quatre paramètres : $f(x) = a \sin(b x + c) + d$. Mais les équations que l'on obtient ainsi sont inextricables pour un élève de première. C'est d'ailleurs la voie dans laquelle s'engage spontanément Vincent, sans introduire cependant le paramètre c, ce qui le conduit à un blocage. En fait, pour ce troisième type de raccord, le raisonnement par transformations successives, en prenant en compte les caractéristiques de la sinusoïde cherchée et les rapports entre fonctions associées, est sans aucun doute le plus économique. C'est dans cette voie que l'enseignante engage les élèves à la fin de la séance, pour rendre raisonnable le travail demandé à la maison pour la séance suivante.

Le problème posé est donc d'une richesse très grande, par les types de fonctions qu'il permet de faire intervenir, les points de vue divers qu'il sollicite et amène à articuler, dans le cadre de l'analyse mais aussi dans les interactions de ce cadre avec celui de la géométrie. Pour la grande majorité des élèves considérés, rien dans les différentes étapes de la résolution n'est routinier, tout est problématique. Dans ces conditions, dans le temps réduit qui est imparti à cette recherche, on voit un fonctionnement où les médiations de l'enseignante sont très prégnantes. Sans aucun doute, un tel problème serait-il mieux adapté, à ce niveau là, à un autre dispositif didactique qu'une séance de deux heures, par exemple à un travail de recherche sur plusieurs semaines entrecoupé de points collectifs réguliers. Le système des échanges entre classes, via Internet, que la commission InterIREM Informatique met en place en 1997-98, sur des problèmes de recherche, pour une durée de trois semaines, lui serait sans doute mieux approprié.

PARTIE III.
LES SUIVIS D'ELEVES

Nous avons cerné les processus d'intégration de la calculatrice par les élèves et l'effet de cette intégration sur leurs représentations et sur leurs pratiques mathématiques, à la fois par des questionnaires et des entretiens.

Les questionnaires nous ont permis de dresser, dans chacune des classes, une description globale des processus d'intégration. Cette description est présentée et analysée dans le premier chapitre de cette partie. Les entretiens, réalisés sur un nombre limité d'élèves des deux classes, nous ont permis d'observer plus en profondeur les processus d'instrumentation et leurs effets. Cette observation est présentée et analysée dans le second chapitre de cette partie.

Ce suivi a été réalisé au cours de l'année 1995-96. Les résultats présentés devront être mis en rapport avec le caractère pré-expérimental des situations auxquelles les élèves ont participé : calculatrices arrivées tard dans l'année, situations de classe expérimentées pour la première fois... Il était cependant important de réaliser ce suivi au cours de la première année pour qu'il puisse orienter l'ingénierie didactique développée en 1996-97 et présentée dans la partie précédente.

Partie III. Chapitre 1
Le suivi par questionnaires aux élèves

Les élèves des deux classes ont passé trois questionnaires : le premier en octobre, avant qu'ils ne disposent des machines, le second juste avant les vacances de Pâques, le troisième au début du mois de juin.

Pour chacun des trois questionnaires, nous débutons par une présentation, suivie du texte du questionnaire, puis nous donnons les résultats de leur dépouillement pour les deux classes.

Nous dressons ensuite une synthèse des informations recueillies dans chaque questionnaire, à partir de la comparaison des réponses dans les deux classes. Des caractéristiques différentes de l'instrumentation de la TI92 apparaissent ainsi, et nous tentons d'isoler des déterminants susceptibles d'éclairer ces différences.

Le premier questionnaire

Présentation du questionnaire

Ce premier questionnaire avait pour objectif de cerner, avant le début de l'expérimentation, le rapport des élèves aux technologies informatiques (calculatrices et logiciels) ; il devait également nous aider à choisir les élèves qui feraient l'objet d'un suivi individualisé. Nous nous sommes inspirés, pour le constituer du questionnaire réalisé dans le cadre de la recherche DERIVE (Abboud & alt, 1995) (Lagrange, 1996) ainsi que d'un questionnaire réalisé par L.Trouche (Trouche, 1997).

Ce questionnaire de 92 questions, reproduit ci-après, est composé de quatre parties concernant respectivement les calculatrices et les logiciels de façon générale, puis les logiciels de construction géométrique et le logiciel DERIVE.

Dans la partie « calculatrice », on cherche à savoir notamment :

- de quelle calculatrice disposent actuellement les élèves et depuis combien de temps ils en disposent,
- quelle utilisation ils en font et quelle familiarité ils ont avec les fonctionnalités graphiques s'ils disposent d'une calculatrice graphique,
- comment ils se situent par rapport aux résultats fournis par la calculatrice,
- leurs appréciations sur le rôle des calculatrices dans le travail mathématique de façon générale et plus spécifiquement dans les situations d'évaluation.

La partie « logiciel » a pour objectif de cerner l'environnement informatique des élèves et leur position vis à vis des logiciels dans une perspective d'apprentissage mathématique.

Les deux dernières parties ont pour objectif de connaître les utilisations qu'ils ont pu avoir de logiciels comparables aux applications HOME et GEOMETRY de la calculatrice TI92 et leur opinion sur l'intérêt de tels logiciels pour l'apprentissage des mathématiques.

Le texte du questionnaire

QUESTIONNAIRE 1

1. Nom :
2. Prénom :
3. Classe :
4. Établissement :
5. Sexe : F ❒ G ❒

LES CALCULATRICES ET VOUS

6. Disposez-vous d'une calculatrice ? Oui ❒ Non ❒
7. Laquelle ? Marque : Nom :
8. Depuis combien de temps l'avez-vous ?

   Moins de deux mois ❒ Moins d'un an ❒ Plus d'un an ❒
9. Est-ce une calculatrice programmable ? Oui ❒ Non ❒
10. Est-ce une calculatrice graphique ? Oui ❒ Non ❒
11. En aviez-vous une autre avant? Oui ❒ Non ❒
12. Si oui, laquelle ? Marque : Nom :

L'année dernière, si vous aviez une calculatrice, l'utilisiez-vous :

13. En classe ? Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒
14. A la maison ? Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒

Utilisez-vous votre calculatrice actuelle :

15. Pour faire des calculs numériques ? Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒
16. Pour tracer des graphiques ? Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒
17. Pour programmer ? Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒
18. Utilisez-vous les mémoires ? Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒
19. Utilisez-vous des formules ou programmes que vous avez entrés dans votre calculatrice ?

    Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒
20. Pouvez-vous citer des exemples de formules et programmes que vous avez entrés dans votre calculatrice ?

.....

.....

Si vous avez une calculatrice graphique, utilisez-vous :

21. Le zoom Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒
22. La commande "Trace" Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒

23. La commande "Range" Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒

24. Pensez-vous bien connaître les possibilités de votre calculatrice ?

Oui ❒ Non ❒

25. Avez-vous appris à vous servir de votre calculatrice surtout :

Avec le professeur ❒ En manipulant ❒ Avec le mode d'emploi ❒ Avec des copains ❒

26. Avez-vous eu en classe, les années précédentes, des séances spécialement consacrées aux calculatrices ? Oui ❒ Non ❒

27. A votre avis, les professeurs de maths doivent-ils faire une initiation aux calculatrices ?

Oui ❒ Non ❒

28. Si vous avez répondu "Oui", précisez ce qu'à votre avis les professeurs doivent apprendre à leurs élèves ; Si vous avez répondu "Non", expliquez pourquoi :

.....

.....

29. Est-ce que votre calculatrice a parfois affiché des résultats surprenants pour vous ?

Oui ❒ Non ❒

30. Si oui, pouvez-vous en donner un ou plusieurs exemples ?

.....

.....

31.. Est-ce que votre calculatrice vous a parfois entraîné à commettre des erreurs ?

Oui ❒ Non ❒

32. Si oui, pouvez-vous donner un ou plusieurs exemples ?

.....

.....

33. Vérifiez-vous les résultats affichés par votre calculatrice ?

Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒.

34. Comment ? Donnez un ou plusieurs exemples :

.....

.....

Pour chacune des phrases ci-après cochez la case correspondant à votre opinion :

	tout à fait d'accord	plutôt d'accord	plutôt pas d'accord	pas du tout d'accord	sans opinion
35. La calculatrice me fait gagner du temps					
36. La calculatrice m'aide à résoudre les problèmes					

37. La calculatrice me permet de vérifier mes résultats					
38. La calculatrice m'aide à préparer les contrôles					
39. La calculatrice me fait perdre du temps					

40. Avez-vous utilisé avant cette année scolaire votre calculatrice durant un contrôle ?

Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒

41. Etes-vous pour ou contre l'utilisation de la calculatrice aux contrôles ?

Oui ❒ Non ❒ Ca dépend ❒

42. Pourquoi ?

.....

.....

43. Utilisez-vous la calculatrice dans d'autres matières ? Oui ❒ Non ❒

44. Si oui, lesquelles ?

LES LOGICIELS ET VOUS

Avez-vous déjà utilisé avant cette rentrée scolaire un logiciel :

	jamais	une ou deux fois	entre trois et dix fois	plus de dix fois	lequel ou lesquels ?
45. De traitement de textes					
46. De mathématiques					
47. De dessin					
48. Un tableur					
49. Un jeu informatique					
50. D'autres logiciels					

51. Y a-t-il un ordinateur chez vous? Oui ❒ Non ❒

52. L'utilisez-vous? Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒.

Chez vous, y-a-t-il des personnes utilisant :

53. Une calculatrice scientifique?

Parents ❒ Frères ou sœurs ❒ Autre ❒ (précisez)

54. Un ordinateur ?

Parents ❒ Frères ou sœurs ❒ Autre ❒ (précisez)

.....

55. Avez-vous suivi l'option informatique, participé à des ateliers ou à un club informatique?

Oui ❐ Non ❐

56. Pour apprendre des mathématiques, les ordinateurs sont-ils, à votre avis :

Utiles ❐ Dangereux ❐ Sans effet ❐

57. Précisez vos raisons :

.....

.....

POUR CEUX QUI ONT DEJA UTILISE UN LOGICIEL DE CONSTRUCTION GEOMETRIQUE

Quel(s) logiciel(s) avez-vous utilisé(s) ?

	Oui	Non
58. Le géomètre		
59. Géoplan		
60. Géospace		
61. Calques géométriques		
62. Atelier de géométrie		
63. Autres		

En tout, vous les avez utilisés:

64. Une ou deux fois ❐ Entre trois et dix fois ❐ Plus de dix fois ❐

65. En classe ❐ Au CDI ❐ En atelier ou club ❐ A la maison ❐

Autre ❐ (préciser)

66. Selon vous, que permettent de faire les logiciels que vous avez utilisés ?

.....

.....

67. Trouvez-vous difficile de les utiliser? Oui ❐ Non ❐

68. Précisez vos raisons :

.....

.....

S'ils ont été utilisés en classe, l'étaient-ils :

	Oui	Non
69. Surtout par le professeur		
70. Surtout par les élèves		

71. Pour quelles activités (par exemple, illustrer le cours, chercher des exercices, les corriger, résoudre des problèmes différents des problèmes usuels...) ? Donnez si possible des exemples précis :

.....

.....

A votre avis, de tels logiciels peuvent-ils aider à

	Oui	Non	Comment ?
72. Trouver les propriétés d'une figure			
73. Démontrer ces propriétés			
74. Résoudre des problèmes de constructions géométriques			

75. Pour apprendre la géométrie sont-ils, à votre avis :

Utiles ❒ Dangereux ❒ Sans effet ❒

76. Précisez vos raisons :

.....

.....

POUR CEUX QUI ONT DEJA UTILISE DERIVE

En tout, vous l'avez utilisé :

77. Une ou deux fois ❒ Entre trois et dix fois ❒ Plus de dix fois ❒

78. En classe ❒ Au CDI ❒ En atelier ou club ❒ A la maison ❒

Autre ❒ (préciser)

S'il a été utilisé en classe, l'était-il :

	Oui	Non
79. Surtout par le professeur		
80. Surtout par les élèves		

81. Pour quelles activités (par exemple, illustrer le cours, chercher des exercices, les corriger, résoudre des problèmes différents des problèmes usuels...) ? Donnez si possible des exemples précis :

.....

.....

82. Selon vous, que permet de faire ce logiciel de plus que votre calculatrice?

.....

.....

83. Trouvez-vous difficile de l'utiliser? Oui ❐ Non ❐

84. Précisez vos raisons :

.....

.....

85. Savez-vous utiliser des fenêtres graphiques ? Oui ❐ Non ❐

86. Savez-vous utiliser les touches [F3] et [F4] ? Oui ❐ Non ❐

A votre avis, DERIVE peut-il vous aider à:

	Oui	Non	Comment ?
87. Organiser vos calculs			
88. Vérifier vos résultats			
89. Résoudre des problèmes plus difficiles			
90. Comprendre des notions mathématiques (préciser lesquelles)			

91. Pour apprendre l'algèbre ou les fonctions, à votre avis, DERIVE est-il :

Utile ❐ Dangereux ❐ Sans effet ❐

92. Précisez vos raisons :

.....

Résultats du premier questionnaire

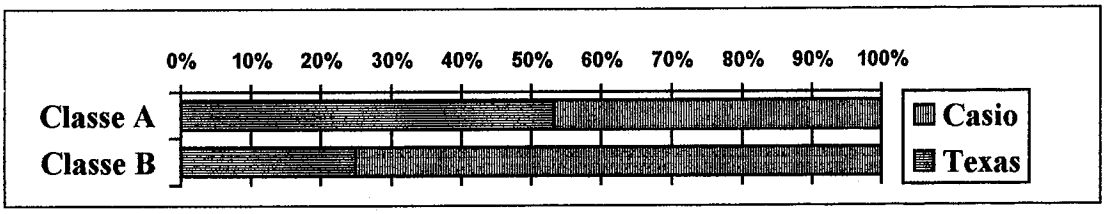
Les trente élèves (22 garçons et 8 filles) de la classe A, et les 24 élèves (12 garçons et 12 filles) de la classe B ont répondu à ce premier questionnaire.

Les calculatrices des élèves

Tous les élèves disposent d'une calculatrice, toutes sont des calculatrices graphiques. Dans la classe A, elles se répartissent relativement équitablement entre Casio et Texas, et dans la classe B, elles sont plus souvent des Casio que des Texas comme en témoigne le tableau suivant :

Marque	Classe A Types et nombres entre parenthèses	Classe B Types et nombres entre parenthèses
Texas	TI80 (1) - TI81 (4) - TI82 (9) - TI85 (1) - non précisé (1)	TI81 (3) - TI85 (3)
Casio	série 6000 (2) - série 7000 (5) série 9000 (7)	série 6000 (1) - série 7000 (9) série 8000 (6) série 9000 (1)

Tableau 1 : Calculatrices des élèves



Dans la classe A, sept élèves ont leur calculatrice depuis moins de deux mois, douze depuis moins d'un an et dix depuis plus d'un an. Tous avaient une calculatrice avant. C'était en grande majorité des calculatrices collèges :

- Texas Galaxie (1), TI30 ou 40 (6)
- Casio FX82 (8), FX92 (8)

Trois élèves avaient déjà une calculatrice graphique, l'un une calculatrice Sharp (modèle non précisé), les autres élèves ne répondent pas.

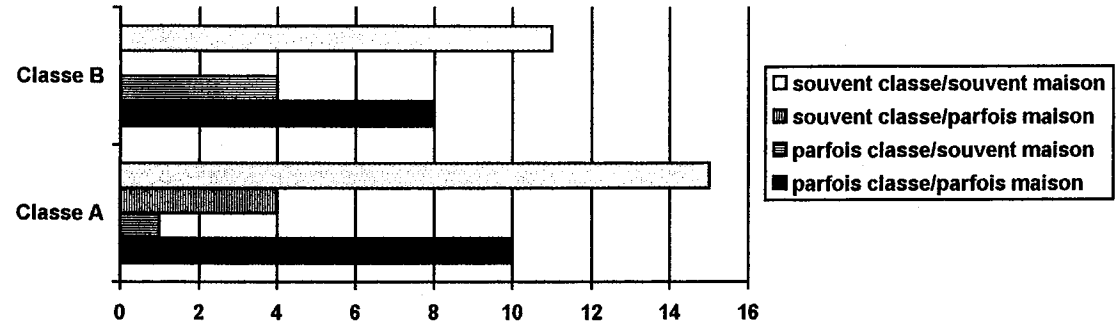
En fait tous les élèves sauf six avaient déjà une calculatrice graphique avant les vacances.

Dans la classe B, dix élèves ont leur calculatrice depuis moins de deux mois, six depuis moins d'un an et huit depuis plus d'un an. La majorité (19) avaient une calculatrice avant, en majorité "collèges" :

- Texas Galaxie (1), TI30 ou 40 (6)
- Casio FX82 (5), FX92 (1), autre (6)

Utilisation l'année précédente

Pour ce qui est de l'utilisation l'année précédente, tous les élèves utilisaient leur calculatrice à la fois en classe et à la maison, un peu plus en classe qu'à la maison dans la classe A, un peu plus à la maison qu'en classe dans la classe B



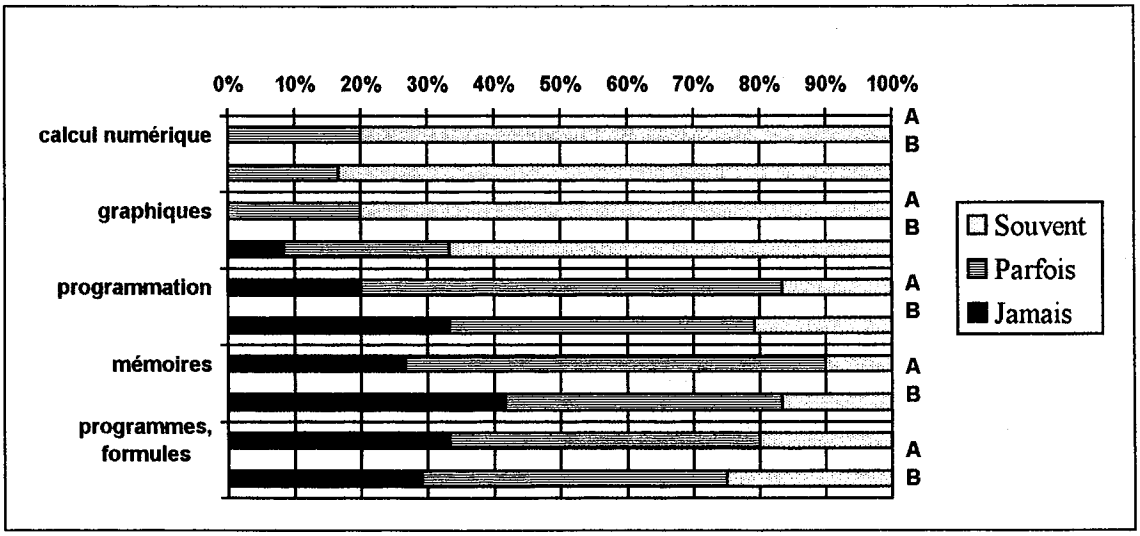
Graphique 1 : Utilisation l'année passée en classe / à la maison

Utilisation actuelle

En ce qui concerne l'utilisation actuelle, les réponses dans les deux classes opposent nettement l'utilisation pour effectuer des calculs numériques et tracer des graphiques, très fréquente, et l'utilisation pour programmer, l'utilisation des mémoires, qui restent elles très épisodiques :

	Classe A			Classe B		
Types d'utilisation	Jamais	Parfois	Souvent	Jamais	Parfois	Souvent
calcul numérique	0	6	24	0	4	20
graphiques	0	6	24	2	6	16
programmation	6	19	5	8	11	5
mémoires	8	19	3	10	10	4
programmes, formules	10	14	6	7	11	6

Tableau 2 : Types d'utilisation actuels



Vingt et un élèves de la classe A, et treize élèves de la classe B fournissent des exemples de formules et programmes entrés dans leur machine. Ils se répartissent de la façon suivante :

- Formules : 12 A, 6 B.
- Jeux : 9 A, 1 B.
- Tables de valeurs : 4 A, 2 B
- Equation du second degré : 3 A, 7 B
- Courbes : 2 A
- Polynômes : 1 A.

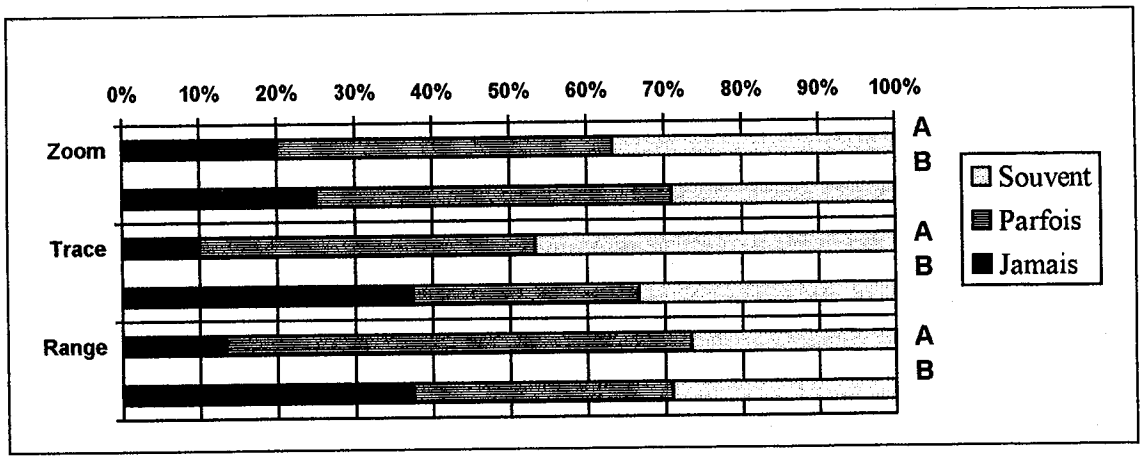
Précisons que treize de ces vingt et un élèves de la classe A, et huit des treize élèves de la classe B ne citent qu'un exemple.

Les commandes graphiques

Comme l'attestent les tableaux et graphiques suivants, environ un tiers des élèves seulement dans chacune des deux classes utilise fréquemment les fonctions graphiques : zoom, trace et range. On peut donc faire l'hypothèse qu'en ce début d'année, les élèves, dans leur majorité, se contentent des tracés fournis dans la fenêtre standard et n'ont pas développé une réelle instrumentation du module graphique de leur calculatrice.

	Classe A			Classe B		
Commandes	Jamais	Parfois	Souvent	Jamais	Parfois	Souvent
Zoom	6	13	11	6	11	7
Trace	3	13	14	9	7	8
Range	4	18	8	9	8	7

Tableau 3 : Utilisation des fonctions graphiques



En pondérant par 0, 1 et 2 respectivement les trois niveaux d'utilisation pour chaque commande, on obtient la répartition suivante des valeurs possibles de 0 à 6 parmi les élèves :

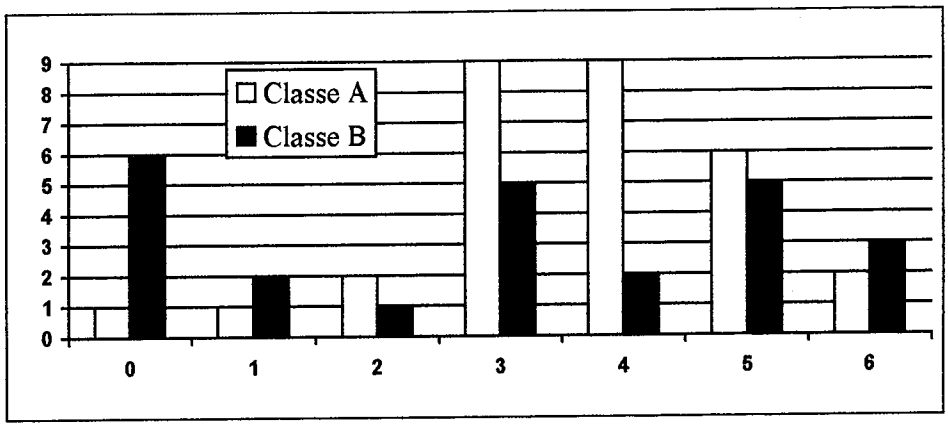


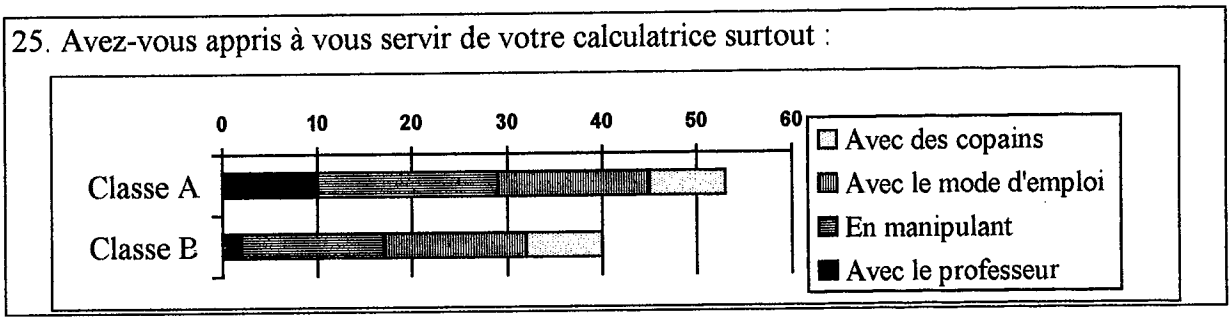
Tableau 4 : Effectifs par niveaux d'utilisation (Zoom+Trace+Range)

Cette instrumentation limitée est confirmée dans la classe A par la réponse à la question 24 : vingt sept élèves en effet estiment ne pas bien connaître les possibilités de leur calculatrice.

Dans la classe B, quatorze élèves estiment ne pas bien connaître les possibilités de leur calculatrice. On a donc une séparation nette entre la dizaine d'élèves qui connaît bien sa machine et utilise les fonctions graphiques, et les quatorze autres dont l'instrumentation semble très limitée.

Apprentissage de la machine

Les réponses peuvent ici être multiples et l'on a en effet les résultats suivants à la question 25 :



La moitié des élèves de la classe A a eu les années précédentes des séances spéciales consacrées aux calculatrices. Quatre élèves seulement de la classe B ont eu les années précédentes ces séances spéciales. Tous sauf un irréductible de la classe B, estiment que les professeurs de mathématiques doivent assurer une initiation aux calculatrices.

En ce qui concerne le contenu de l'apprentissage à gérer par les enseignants, les réponses sont en majorité de trois types :

- tout apprendre : « apprendre le fonctionnement de toutes les touches », « apprendre toutes les possibilités » (9 A, 6 B),
- se centrer sur ce qui est nécessaire à une utilisation efficace (10 A, 10 B),
- apprendre à programmer (12 A, 5B).

L'élève de la classe B qui refuse cet apprentissage justifie son refus par la diversité des calculatrices présentes dans la classe.

Attitude par rapport aux résultats fournis par la machine

Les réponses fournies aux questions de cette rubrique montrent une attitude de grande confiance vis à vis de la machine.

La moitié des élèves de la classe A seulement déclare que leur machine a parfois affiché des résultats surprenants et huit seulement en fournissent des exemples : des tracés graphiques (4 fois), des questions de décimales (1), parenthèses (1), des résultats liés à la confusion des modes radian/degré en trigonométrie (1), des messages d'erreur bizarres (1).

Dans la classe B, la confiance est encore plus générale, puisqu'un seul élève déclare que sa machine a parfois affiché des résultats surprenants et il ne fournit pas d'exemples.

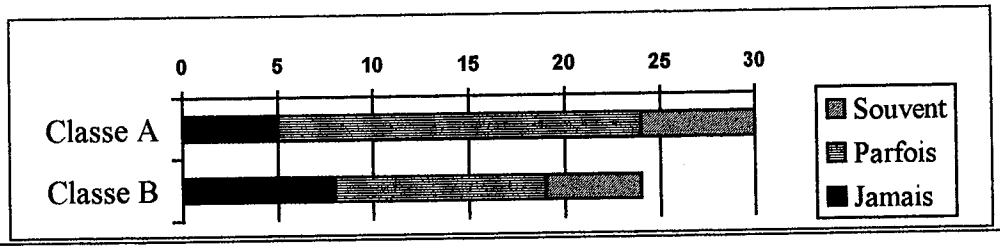
La majorité (18 A, 14 B) estiment que la machine ne les a jamais conduits à faire des erreurs ; de plus, les huit types d'erreurs donnés en exemples sont exclusivement des erreurs liées aux manipulations de l'élève, puisque ces erreurs se répartissent de la façon suivante :

- erreurs d'entrée de données (ordre et parenthésage) : 5 A, 2 B
- erreurs d'interprétation : 2 B
- erreur de mode : 1 A, 1 B
- erreur de choix de menu : 1 A
- erreur dans la détermination d'équations de droites : 1 A

Les élèves s'attribuent ainsi exclusivement les causes d'erreurs, et ne mettent pas en doute le fonctionnement mathématique de leur calculatrice.

En ce qui concerne la vérification des résultats affichés par la machine, les réponses, réalistes, sont les suivantes :

33. Vérifiez-vous les résultats affichés par votre calculatrice ?



Les méthodes de vérification décrites dans les vingt réponses fournies sont, en revanche, relativement variées :

- refaire la même chose (2 A, 5 B)
- refaire en papier/crayon (6 A, 6 B)
- vérifier les règles (1 A)
- refaire en changeant de méthode (7 A, 2 B), deux élèves précisant : refaire à l'envers
- vérifier en traçant un graphique (2 A)
- vérifier en substituant des valeurs numériques (2 A)
- vérifier la plausibilité du résultat (1 B)

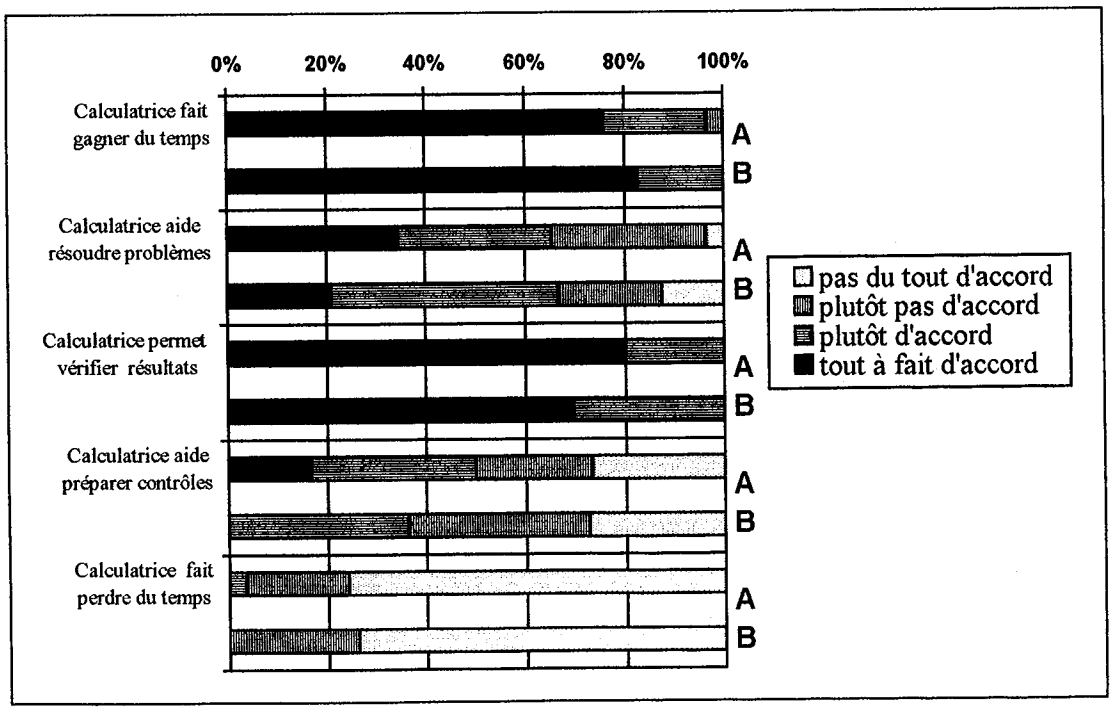
Les opinions sur l'usage des calculatrices

Nous reproduisons ci-après le tableau associé aux questions 35-39, en mentionnant les effectifs correspondant aux différentes réponses et les moyennes d'adhésion correspondantes sur une échelle allant de 0 (pas du tout d'accord) à 1 (tout à fait d'accord).

Les réponses dans les deux classes sont ici nettes et opposent l'adhésion très forte aux affirmations sur le gain de temps et l'aide à la vérification, à l'adhésion plus modérée à la calculatrice vue comme aide à la résolution de problèmes.

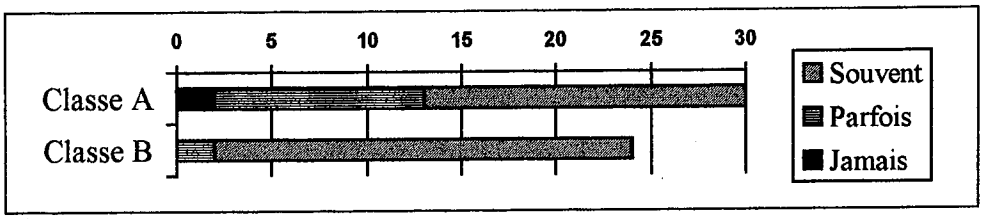
	tout à fait d'accord		plutôt d'accord		plutôt pas d'accord		pas du tout d'accord		taux d'adhésion	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
35. La calculatrice me fait gagner du temps	22	19	6	4	1	0	0	0	0,91	0,94
36. La calculatrice m'aide à résoudre les problèmes	10	5	9	11	9	5	1	3	0,66	0,58
37. La calculatrice me permet de vérifier mes résultats	24	16	6	7	0	0	0	0	0,93	0,9
38. La calculatrice m'aide à préparer les contrôles	5	0	10	8	7	8	8	6	0,47	0,36
39. La calculatrice me fait perdre du temps	0	0	1	0	6	6	22	17	0,09	0,09

Tableau 5 : Opinions sur la calculatrice

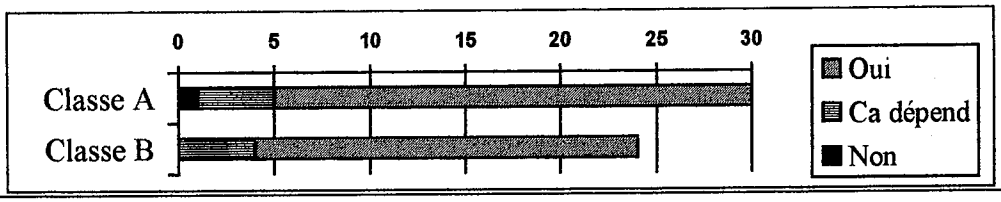


Dans les réponses aux questions suivantes il apparaît que la calculatrice est en majorité intégrée au travail en contrôle dans la classe B, mais pas dans la classe A. Dans les deux classes, les élèves sont en faveur de son autorisation comme en témoignent les réponses suivantes :

40. Avez-vous utilisé avant cette année scolaire votre calculatrice durant un contrôle ?



41. Etes-vous pour ou contre l'utilisation de la calculatrice aux contrôles ?



Les raisons avancées sont cohérentes avec ce qui précède puisqu'elles placent nettement en tête gain de temps et possibilités de vérification :

- gain de temps (21A, 14 B)
- vérification, sûreté, limitation des erreurs (10A, 5 B)
- aide aux calculs (4A, 4 B)
- aide aux tracés graphiques (3A, 2 B)
- aide mémoire (2A, 1 B)

Dans la classe A, ceux plus rares dont les avis sont mitigés précisent qu'il faut savoir travailler sans la machine, apprendre les formules et que l'autorisation de la machine en contrôle (sans doute pensée comme systématique) pourrait conduire à de moins bonnes capacités de calcul, à moins de mémorisation. Un seul élève de la classe B note : " Elle donne la réponse et nous ne cherchons pas nous-mêmes."

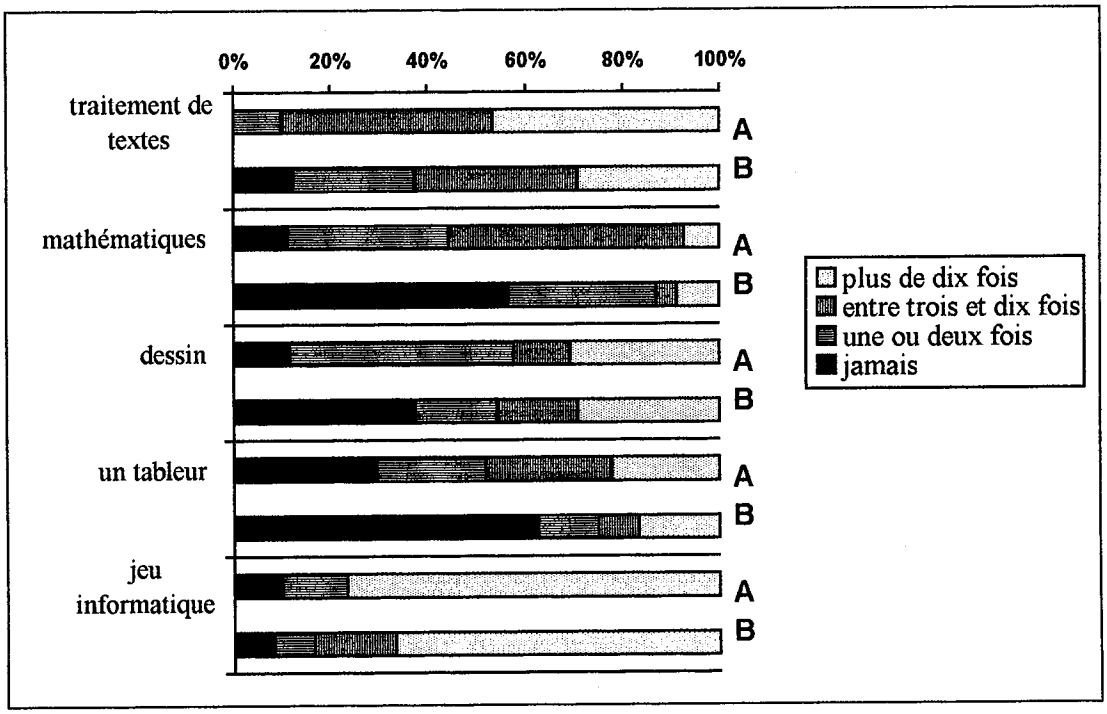
Tous enfin utilisent leur calculatrice dans d'autres matières. Dans les deux classes, les sciences physiques sont citées en priorité, viennent ensuite la Biologie et l'Histoire-Géographie.

Environnement informatique et logiciels

Vingt élèves de la classe A et vingt et un de la classe B disposent d'un ordinateur à la maison mais six de chaque classe seulement l'utilisent souvent (un même déclare ne jamais l'utiliser). Ce sont les logiciels de jeux et de traitement de textes qui sont les plus utilisés comme en témoigne le tableau 6.

	jamais		une ou deux fois		entre trois et dix fois		plus de dix fois	
Types de logiciels/Nombre d'utilisations	Cl A	Cl B	Cl A	Cl B	Cl A	Cl B	Cl A	Cl B
45. traitement de textes	0	3	3	6	13	8	14	7
46. mathématiques	3*	13	9*	7	13*	1	2	2
47. dessin	3	9	12	4	3	4	8	7
48. un tableur	8	15	6	3	7	2	6	4
49. un jeu informatique	3	2	4	2	0	4	23	16
50. autres logiciels	0	9	1	0	0	0	1	7

Tableau 6 : Utilisation de logiciels



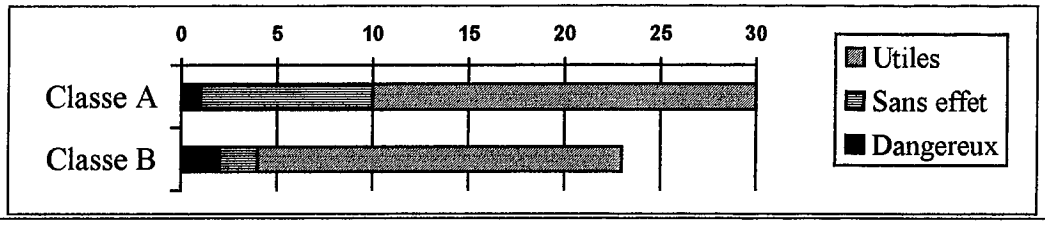
Les réponses de la classe A concernant les logiciels de mathématiques données ici ne sont pas cohérentes avec celles données dans les deux dernières parties du questionnaire : elles sont systématiquement inférieures et nous renvoyons le lecteur à ces parties qui montrent qu'en fait vingt élèves ont déjà utilisé plus de 3 fois un logiciel de construction géométrique et neuf élèves déjà utilisé le logiciel DERIVE.

En revanche, seuls six élèves de la classe A ont suivi l'option informatique, participé à des ateliers ou à un club informatique. Treize élèves de la classe B ont suivi l'option informatique, participé à des ateliers ou à un club informatique, ce qui est une proportion plus élevée.

Les ordinateurs, logiciels et l'apprentissage des mathématiques

Les élèves ont a priori une représentation positive des logiciels de mathématiques, qu'ils ont pourtant peu utilisé avant cette année.

56. Pour apprendre des mathématiques, les ordinateurs sont-ils, à votre avis :



Les raisons avancées sont les suivantes :

- *ordinateurs dangereux* :

  "Il n'y a plus de calculs à la main, plus de dessin graphique en géométrie" (A)

  "On ne respecte plus la logique humaine." (B)

  "On fait faire à l'ordinateur et on ne comprend pas forcément. On ne sait peut-être même pas le faire seul, le calcul." (B)

- *ordinateurs sans effet* : ce qui compte c'est le professeur, le professeur c'est mieux (4 A), il y a moins d'échanges (1 A), peut faire commettre des erreurs (1 A), le travail est "mâché" (1B), c'est mieux à la main (1 B).

  Ces élèves expriment leur hostilité ou leur scepticisme sur l'apport à la compréhension d'une pratique où on "fait faire à l'ordinateur", sans faire soi-même.

- *ordinateurs utiles* : beaucoup de réponses sont vagues et les deux raisons qui dominent sont les suivantes : aide aux représentations notamment en géométrie, aide à la compréhension. Dans la classe A elles ne sont citées que quatre fois chacune. En revanche, dans la classe B, treize élèves citent la "meilleure perception de l'espace", comme un apport significatif. Ces élèves ont manifestement été influencés par une utilisation récente d'un logiciel de géométrie dans l'espace.

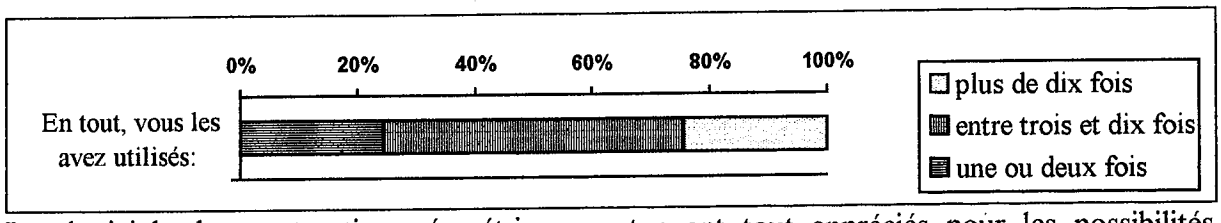
Les logiciels de construction géométrique

Cette partie a été remplie seulement par les élèves de la classe A. En fait, tous les élèves de cette classe sauf un ont déjà utilisé un logiciel de construction géométrique et le plus utilisé : « Dessiner l'espace » ne figurait pas dans la liste.

Logiciels	Nombre d'élèves
Le géomètre	9
Géoplan	3
Géospace	7
Calques géométriques	0
Atelier de géométrie	2
Dessiner l'espace	20
Autres	2 (non précisés)

Tableau 7 : Logiciels de géométrie déjà utilisés

L'utilisation reste néanmoins une utilisation épisodique, comme en témoignent les réponses à la question 64, même si l'on peut faire l'hypothèse d'une sous-estimation systématique dans les réponses.



Les logiciels de construction géométrique sont avant tout appréciés pour les possibilités offertes de visualisation de figures, notamment dans l'espace, et de changement de point de vue sur ces figures. Ceci est tout à fait cohérent avec l'utilisation majoritaire du logiciel « Dessiner l'espace ». En ce qui concerne la facilité d'utilisation, les avis sont partagés : 12 répondent oui et 15 répondent non, 2 donnant un avis mitigé. Dans les raisons avancées, c'est le manque de familiarité avec l'ordinateur, de façon générale, qui est incriminé et non les caractéristiques des logiciels eux-mêmes, même s'il est reconnu qu'il faut se familiariser avec ces derniers.

Les réponses aux questions 69, 70 et 71 apportent peu d'informations; L'utilisation n'est pas le seul fait de l'enseignant, elle couvre des registres variés : illustration du cours (cité 8 fois), recherche d'exercices (9), corrections (8). La rubrique «résoudre des problèmes différents » est citée 7 fois et deux élèves enfin mentionnent également : « pour faire des démonstrations ».

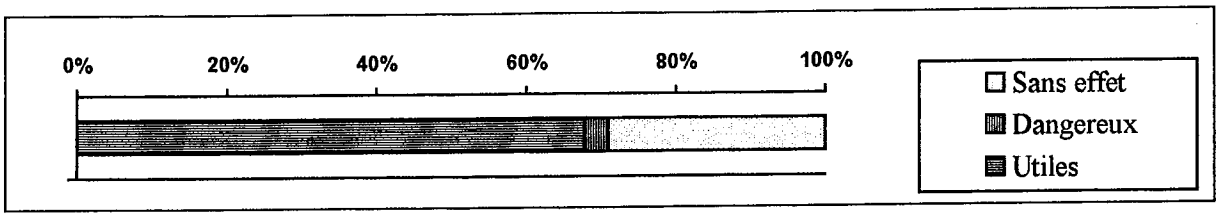
Concernant l'aide que ces logiciels peuvent apporter, c'est la première proposition qui recueille le plus fort taux d'adhésion, comme l'on pouvait s'y attendre : le logiciel comme aide pour trouver les propriétés d'une figure et les raisons avancées sont cohérentes avec ce qui précède. Pour l'aide à la démonstration, les avis sont plus partagés mais peu d'élèves justifient leur position et quand ils la justifient, c'est sans différencier nettement l'activité de démonstration de celle de recherche de propriétés. Leur position sur l'aide à la résolution de problèmes de construction est intermédiaire et là encore, on ne voit pas apparaître de raisons qui prendraient mieux en compte la spécificité de la tâche. Les réponses négatives sont de plus très peu justifiées. Nous n'avions pas demandé aux élèves de se situer par rapport à des problèmes de lieux géométriques puisque c'est en première que de tels problèmes deviennent des enjeux d'enseignement officiel.

A votre avis, de tels logiciels peuvent-ils aider à

	Oui	Non	Comment ?
72. Trouver les propriétés d'une figure	24	5	Oui : tracé exact, figures de bonne qualité, meilleure vision (8) caractère dynamique des figures, vues multiples, zooms, rotations (8) Non : pas besoin de réfléchir (1)
73. Démontrer ces propriétés	14	13	Oui : vision, exactitude des tracés, mouvement (4), calcul (1), propriétés fausses visibles (1) Non : ne donne pas le résultat (1), pas besoin de réfléchir (1)
74. Résoudre des problèmes de constructions géométriques	19	10	Oui : vision, tracés exacts, changement de points de vue, mouvement (10), test d'hypothèse (1) Non : pas besoin de réfléchir (1)

Tableau 8 : Potentialités des logiciels de géométrie

Pour apprendre la géométrie, ils estiment en grande majorité ces logiciels utiles :



Les raisons avancées pour appuyer cette opinion sont encore une fois les mêmes. L'élève estimant ces logiciels dangereux invoque des tracés imprécis et ceux qui jugent les logiciels sans effet rappellent que le professeur est ce qu'il y a de mieux, que la résolution de problèmes ne change pas vraiment et qu'il faut toujours savoir son cours.

Utilisation de DERIVE

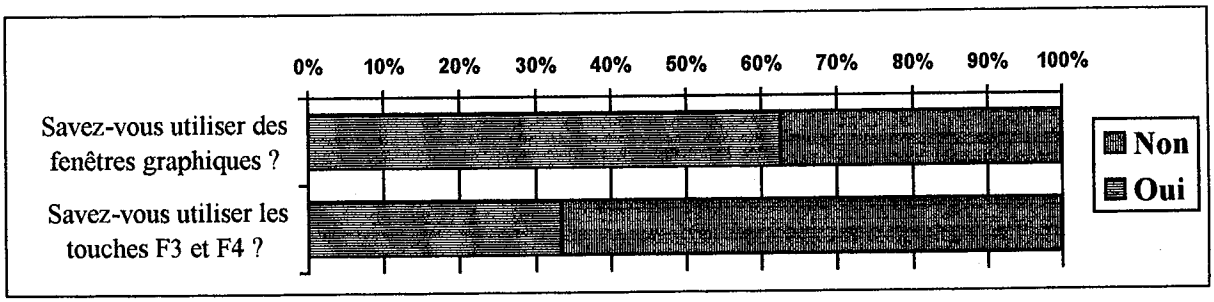
Cette partie a été remplie seulement par les élèves de la classe A.

Neuf élèves de cette classe seulement ont déjà utilisé le logiciel DERIVE, 7 entre trois et dix fois, un une ou deux fois, un plus de dix fois. Ils l'ont tous utilisé en classe. Les utilisations, comme pour les logiciels de construction géométrique, n'ont pas été le seul fait de l'enseignant et ont couvert des registres variés.

Les réponses à la question de comparaison avec les possibilités de leur propre calculatrice sont très éclatées et deux élèves seulement semblent clairement sensibles la dimension calcul formel.

La plupart ne jugent pas son utilisation difficile (2 oui - 6 non), trois soulignent sa simplicité et parmi les réponses « oui », un élève mentionne le nombre de fonctions, l'autre le manque de familiarité avec le logiciel.

Les réponses aux questions 85 et 86 montrent un niveau d'instrumentation relativement réduit, ce qui est cohérent avec le niveau d'utilisation :



Et, en ce qui concerne les potentialités de DERIVE, l'affirmation qui emporte une adhésion sans ambiguïté est, comme l'on pouvait s'y attendre, celle de l'aide à la vérification.

A votre avis, DERIVE peut-il vous aider à:

Types d'aide	Oui	Non
87. Organiser vos calculs	6	3
88. Vérifier vos résultats	8	1
89. Résoudre des problèmes plus difficiles	6	3
90. Comprendre des notions mathématiques (préciser lesquelles)	4	5

Tableau 9 : Potentialités de DERIVE

Les justifications sont assez peu nombreuses et là encore ne différencient pas nettement les types de tâches. Nous les reproduisons ci-après. L'accent est cependant cette fois mis sur les capacités de calcul formel dans le domaine algébrique (factorisation, développement, résolution d'équations).

87: « On peut voir plusieurs calculs » - 88 : « On fait résoudre »

88 : « En calculant »

87 : « Développe les calculs » - 88 : « Il nous donne le résultat »

88 : « En regardant les réponses » - 89 : « car il résout vite »

87 : « Il factorise et développe lui-même » - 88, 89, 90 : idem

En ce qui concerne l'utilité pour l'apprentissage, l'adhésion est massive (8 oui et 1 sans effet) mais il ne se dégage pas de tendance nette des raisons données.

« Il aide à résoudre facilement les problèmes d'algèbre. »

« Complète le cours »

« Il factorise et développe avec les étapes »

« Car la manipulation se fait personnellement et à sa vitesse. »

« Car il résout comme on apprend le cours »

« Facile à utiliser »

« Il résout que les calculs, il faut savoir son cours pour apprendre l'algèbre et les fonctions. » (réponse « sans effet »).

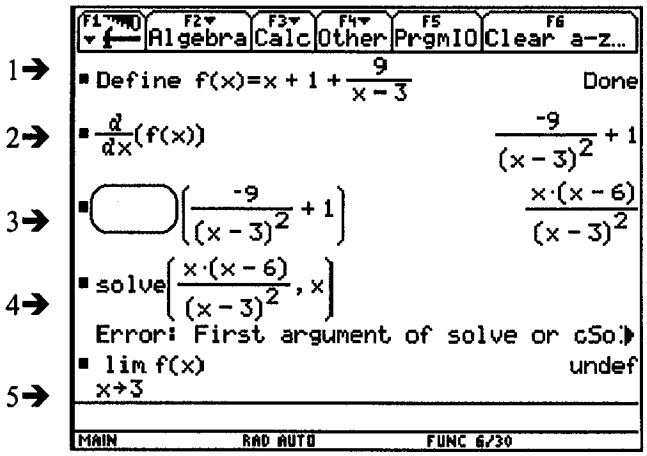
Le deuxième questionnaire

Présentation du questionnaire

Le questionnaire 2, passé après un trimestre d'utilisation de la calculatrice, a pour objectif de recueillir des informations sur les rapports que les élèves ont établi avec cette machine :

- Ont-ils réussi à se familiariser avec la machine sans trop de difficultés et ont-ils dans ce but eu recours au document que les enseignants avaient élaboré (cf. annexe 1) ?
- Se sont-ils lancés, au delà des utilisations institutionnelles, dans un apprentissage autonome de la machine, l'ont-ils personnalisée ?
- Comment leur apparaît la TI92 par rapport à leur propre calculatrice ?
- Quelle opinion ont-ils sur son intérêt pour le travail mathématique, pour l'apprentissage?

Le questionnaire inclut aussi des questions précises relatives à la machine posées à partir d'une reproduction d'écran (cf. ci-dessous). Les élèves doivent y répondre sans utiliser leur machine (les machines sont relevées au début de la passation du questionnaire). Les élèves doivent donc avoir mémorisé les commandes et successions de commandes à utiliser ainsi bien sûr que leur syntaxe.



Les questions posées mêlent volontairement deux types de tâches : des tâches de production directe (questions 37 et 38), des tâches d'interprétation de réponses fournies par la machine dans le but de déterminer les commandes qui ont permis de les obtenir (questions 39 et 40), de corriger des erreurs de syntaxe (question 41), ou d'obtenir un résultat (question 42). On croise cette dimension avec celle de la familiarité des commandes (les commandes impliquées dans les questions 37-41 devraient être familières aux élèves, celles relatives à la question 42 ont été plus récemment introduites.

La première ligne correspond à la définition d'une fonction ; les élèves doivent indiquer comment l'obtenir. La solution attendue consiste à utiliser, dans le menu *F4*, la commande *define* qui est en première position, en sélectionnant cette commande et en appuyant sur la touche [ENTER], puis à entrer *f(x)*= l'expression de la fonction et enfin à appuyer de nouveau sur [ENTER]. Il est aussi possible de taper *define* en toutes lettres sans passer par le menu *F4* mais cette solution nous paraît moins probable, les élèves manipulant régulièrement la commande *define*.

La seconde ligne affiche la dérivée de la fonction. On attend de l'élève qu'il reproduise la syntaxe de cette commande. Il peut dans le menu F3, utiliser la commande de dérivation qui est en position 1, en sélectionnant cette commande et en appuyant sur [ENTER]. il tape ensuite f(x), x), la première parenthèse étant ouverte automatiquement, et termine par [ENTER]. Il peut aussi utiliser le symbole d de dérivation (accessible par 2nd 8) et taper ensuite *(f(x),x)*.

La ligne 3 propose un blanc correspondant à une commande effacée et l'expression de la dérivée à gauche, la même expression factorisée à droite. On demande à l'élève de trouver la commande effacée. La réponse attendue est factor et il n'y a pas d'autre solution possible.

A la ligne 4, les élèves doivent interpréter et corriger une erreur commise dans l'utilisation de la commande *Solve*. Plusieurs réponses sont possibles, puisqu'il suffit d'écrire une équation ou une inéquation, la réponse attendue est celle qui correspond à l'utilisation usuelle de la commande *Solve* par les élèves, à savoir la complétion en équation de second membre 0 par ajout de : =0.

Enfin, à la ligne 5, un calcul de limite a été demandé et a conduit à la réponse : *undef*. On attend de l'élève qu'il attribue cette non définition au fait que dans la syntaxe de la limite utilisée (non visible ici), on a oublié de préciser que l'on voulait une limite à droite ou à gauche, compte-tenu du type de singularité et qu'il fasse donc une proposition adaptée à cette interprétation. Plusieurs solutions sont possibles, par exemple :

F3 3 [ENTER] *f(x) , x , 3 , 1)* [ENTER] *et F3 3* [ENTER] *f(x) , x , 3 , - 1)* [ENTER]

F3 3 [ENTER] *f(x) , x , 3 , 3)* [ENTER] *et F3 3* [ENTER] *f(x) , x , 3 , - 3)* [ENTER]

Le texte du deuxième questionnaire

QUESTIONNAIRE 2

1. Nom :
2. Prénom :
3. Classe :
4. Etablissement :
5. Sexe : F ❒ G ❒

6. Actuellement, estimes-tu te débrouiller avec la TI92
   Pas très bien ❒ Moyennement ❒ Bien ❒
7. Peux-tu citer trois fonctionnalités que tu as appris à utiliser seul(e) ?
   - .....
   - .....
   - .....
8. As-tu rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser la TI92:
   Oui ❒ Non ❒
9. Si oui, précise lesquelles : .....
.....
.....
10. Consultes-tu le mode d'emploi distribué en décembre ?
    Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒
11. Précise les parties qui t'ont été le plus utiles : .....
.....
.....
12. L'as-tu complété ? Oui ❒ Non ❒
13. Consultes-tu le manuel Texas Instrument ?
    Jamais ❒ Parfois ❒ Souvent ❒
14. Précise les parties qui t'ont été le plus utiles : .....
.....
.....

Par rapport à une calculatrice graphique,

15. qu'est ce qui te paraît nouveau ? .....
.....
.....
16. qu'est ce qui te paraît moins bien ? .....
.....
.....
17. qu'est ce qui te paraît mieux ? .....
.....
.....
18. Qu'est-ce qui te plaît le plus dans cette machine ? (applications, fonctionnalités....)
.....
.....
.....
19. As-tu été surpris par des résultats obtenus avec la TI92 Oui ❒ Non ❒
20. Si oui, donne des exemples : .....
.....
.....

La calculatrice TI92 t'est-elle utile :

21. en classe Beaucoup ❒ Un peu ❒ Pas du tout ❒

22. en contrôle Beaucoup ❒ Un peu ❒ Pas du tout ❒
23. à la maison Beaucoup ❒ Un peu ❒ Pas du tout ❒

Juges-tu que l'utilisation de la calculatrice **rétroprojetable**, en classe, (Coche la case qui correspond à ton opinion)

	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord	Sans opinion
24. Fait gagner du temps					
25. Permet de mieux suivre les synthèses					
26. Va trop vite					
27. C'est mieux quand le prof écrit tout au tableau					

28. La TI92 t'a-t-elle aidé à comprendre une notion mathématique Oui ❒ Non ❒
29. Si oui précise : .....
.....
.....

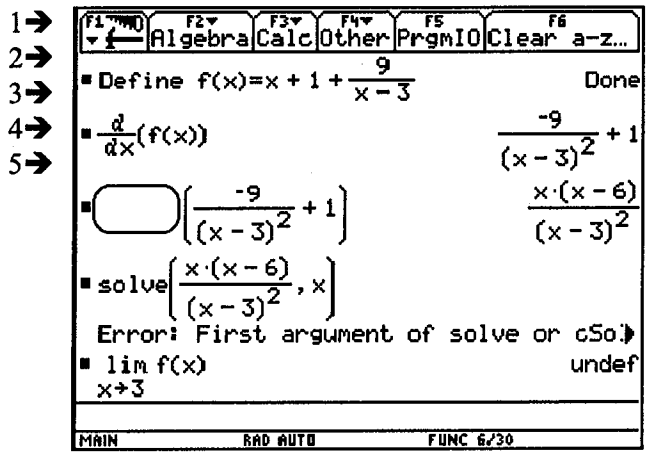
30. Faire des mathématiques avec la TI92 c'est :
plus intéressant ❒ pareil ❒ moins intéressant ❒
31. Précise : .....
.....
.....

32. Faire des mathématiques avec la TI92 c'est :
plus facile ❒ pareil ❒ moins facile ❒
33. Précise : .....
.....
.....

34. Conserves-tu dans la mémoire de la TI92 :
ce qui a été fait en classe ❒
des jeux ❒
d'autres programmes ❒
des formules de math ❒
des formules d'autres disciplines ❒
autres (précise) ❒
.....
.....

35. Utilises-tu la TI92 pour d'autres matières Oui ❒ Non ❒
36. Si oui lesquelles ? .....
.....
.....

Voici un écran de TI92. L'utilisateur a libéré toutes les variables avec la touche F6 avant de commencer.



36. Que dois-tu faire pour obtenir la ligne 1 : .....
.....
.....

37. Que dois-tu faire pour obtenir la ligne 2 : .....
.....
.....

38. Quelle commande a été effacée ligne 3 ? .....

39. Que dois-tu faire pour obtenir la ligne 3 complète : .....
.....
.....

40 Corrige l'erreur commise à la ligne 4 : .....
.....
.....

41. Quelle(s) commande(s) pour obtenir une réponse ou (des réponses) à la ligne 5 : .....
.....
.....

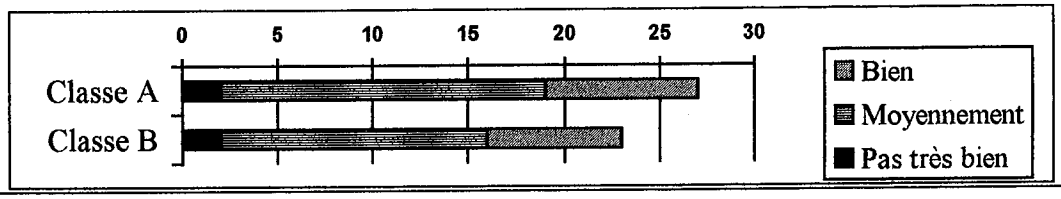
Résultats du deuxième questionnaire

Vingt sept élèves de la classe A ont répondu à ce questionnaire, vingt garçons et sept filles. La classe, à ce moment de l'année compte 29 élèves. Les vingt quatre élèves de la classe B ont répondu à ce questionnaire.

La familiarisation avec la calculatrice

Visiblement, dans les deux classes, les élèves ont cherché à apprendre à se servir de leur calculatrice et se sont familiarisés avec elle sans rencontrer de difficultés sérieuses, comme le montrent les réponses aux premières questions.

6. Actuellement, estimes-tu te débrouiller avec la TI92



Ils sont peu nombreux (1 A, 3 B) à ne pas avoir appris seuls à utiliser certaines fonctionnalités. Parmi les fonctionnalités que les autres élèves déclarent avoir appris seuls, viennent nettement en tête :

- l'application géométrie ou « dessins »(14 A, 8 B)
- la programmation (10 A, 8 B).

Ce dernier nombre est important si l'on considère le nombre de potentialités de la calculatrice hors programmation, le faible nombre d'élèves qui, dans les réponses au premier questionnaire, déclaraient utiliser souvent des programmes et le fait que le mode d'emploi simplifié distribué en début d'année ne faisait aucune référence à la programmation de la TI92.

Viennent ensuite le traitement de texte (6 A, 5 B), les représentations en trois dimensions (5 A, 2 B), les commandes graphiques (5 A, 5 B), le tableur (4 A, 3 B), l'application matrix/data editor (2 A), les dérivées et limites (1 A, 5 B)

Dans la classe A, l'utilisation de mémoires, de répertoires, l'échange de données entre machines sont cités chacun une fois. Ils ne sont pas cités dans la classe B où le professeur a fait une initiation spécifique.

Quatorze élèves de la classe A et douze élèves de la classe B déclarent avoir rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser la TI92. Cependant, dans la plupart des cas de la classe A, ce qui est cité correspond à des fonctionnalités dont les élèves ont fait l'apprentissage autonome, en particulier la programmation (citée 7 fois), ce qui n'est guère étonnant si l'on connaît le manuel.

Sont cités également dans la classe A les modes (2), l'application data/matrix editor (1), la géométrie (1), les fichiers (1), la résolution de systèmes (1). Ceci correspond au premier polycopié distribué par l'enseignante pour les vacances de Noël : les élèves avaient appris à résoudre les systèmes d'équations linéaires avant d'avoir la machine, le polycopié organisait la transposition pour la TI92 de la méthode de résolution apprise, par pivot de Gauss.

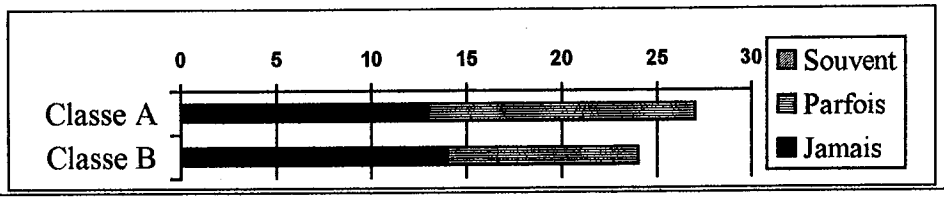
Dans la classe B, les explications du professeur sont mises en cause (2), ainsi que la complexité de la calculatrice (2).

Deux élèves de la classe A et trois de la classe B évoquent davantage des difficultés liées à la prise en main : nombre de touches, fonctionnement de la touche [ENTER] qu'il faut régulièrement utiliser deux fois de suite.

Une élève de la classe A lie ses difficultés à son manque d'intérêt pour la machine qui fait qu'elle ne mémorise pas.

Cette familiarisation relativement aisée, qui confirme les observations que nous avions pu faire en séance, est également attestée, nous semble-t-il, par la faible utilisation du mode d'emploi simplifié qui avait été distribué avec la machine :

10. Consultes-tu le mode d'emploi distribué en décembre ?

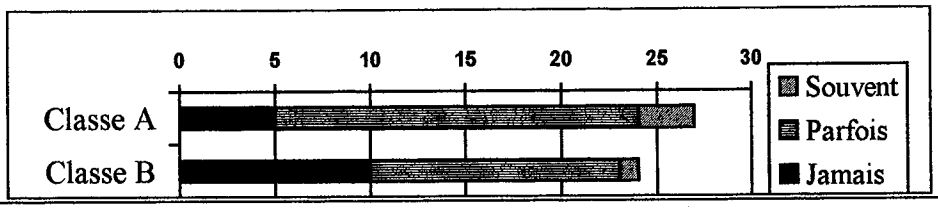


De plus quand on demande aux élèves de préciser ce qui leur a été le plus utile, 8 élèves de la classe A citent les systèmes, c'est à dire le polycopié précédemment cité et non le mode d'emploi.

Six réponses seulement dans chacune des classes déclarent avoir complété ce mode d'emploi.

Le manuel est, lui, un peu plus utilisé particulièrement dans la classe A:

13. Consultes-tu le manuel Texas Instrument ?



Les utilisations citées renvoient essentiellement aux apprentissages autonomes : programmation (10 A, 7 B), géométrie (5 A, 2 B), graphes (4 A, 1 B), matrix (2 A), dérivées, limites (2 A, 1 B), tableur (1 A), 3D (1 A). Les fonctions sont aussi citées (3 A, 1 B), sans que l'on sache à quoi ce terme renvoie exactement, les messages d'erreur (2 A, 1 B).

La comparaison avec les calculatrices graphiques

La nouveauté qui frappe les élèves c'est, en priorité, les possibilités de calcul formel citées 15 fois (A) et 12 fois (B), ainsi que la possibilité de faire de la géométrie, citée 7 fois (A) et 11 fois (B) , des élèves insistant en particulier sur l'animation possible des figures. Viennent ensuite les commandes graphiques citées 5 fois (A) et 6 fois (B) à égalité avec l'interface, le clavier (5 fois (A) et 1 fois (B)), les représentations 3D (1 A, 2 B), le tableur (1 A, 2 B), les possibilités en mémoire (1 A), la "disposition des applications" (1 B).

On note aussi quelques réponses vagues du style : le nombre de fonctions possibles. Une élève de la classe A mentionne déjà sa crainte de ne plus savoir se servir de son ancienne machine.

Les élèves sont donc réellement sensibles à ce qui est nouveau. Cela tranche avec les réponses obtenues aux questionnaires concernant le logiciel DERIVE (Artigue & alt. 1995).

Interrogés sur ce qui leur paraît moins bien, un certain nombre d'élèves répond « rien » (8 A) ou ne répond pas (6 A, 4 B). Cela correspond à la moitié des élèves de la classe A, et un sixième de la classe B.

En dehors de ces réponse, les élèves citent en majorité la taille, le poids, l'encombrement de la machine (9 A, 10 B) , la lenteur du tracé de certaines courbes et de l'exécution de programmes (4 B) et, plus marginalement, le fait qu'elle soit en anglais (2 A), sa complexité (2 A, 2 B), la visibilité de l'écran (1 A), la difficulté de la programmation (1 A).

Un élève de la classe A regrette enfin l'absence de détails de calculs, des détails que ne lui donnait pas non plus son ancienne calculatrice mais un phénomène auquel il était peu être moins sensible car elle faisait moins de choses.

Les réponses aux questions suivantes sont cohérentes avec ce qui précède.

Ce qui paraît mieux, c'est par ordre décroissant de citation : le calcul exact et le calcul formel (7 A, 5 B), les multiples possibilités (6 A, 5 B), la taille de l'écran (5 A, 4 B), les possibilités graphiques (4 A, 4 B), la géométrie (3 A, 3 B), la mémoire (3 A, 3 B), la programmation (2 A, 2 B), la rapidité (2 A), l'accessibilité des fonctions, les menus (2 A, 4 B), le tableur (1 A, 2 B), le clavier (1 A, 1 B).

Ce qui plaît le plus, c'est : le nombre de possibilités (9 A, 4 B), le calcul formel (8 A, 8 B), la géométrie (5 A, 4 B), la programmation (4 A), la facilité d'utilisation (4 A), la rapidité (2 A), les possibilités graphiques (2 A, 2 B), le dessin en 3D (1 A, 2 B), la mémoire (1 A, 2 B), les jeux(2 A, 2 B). Un élève de la classe A déclare qu'il n'aime pas cette machine et un de la classe B déclare ne rien aimer.

La TI92 les a-t-elle surpris ?

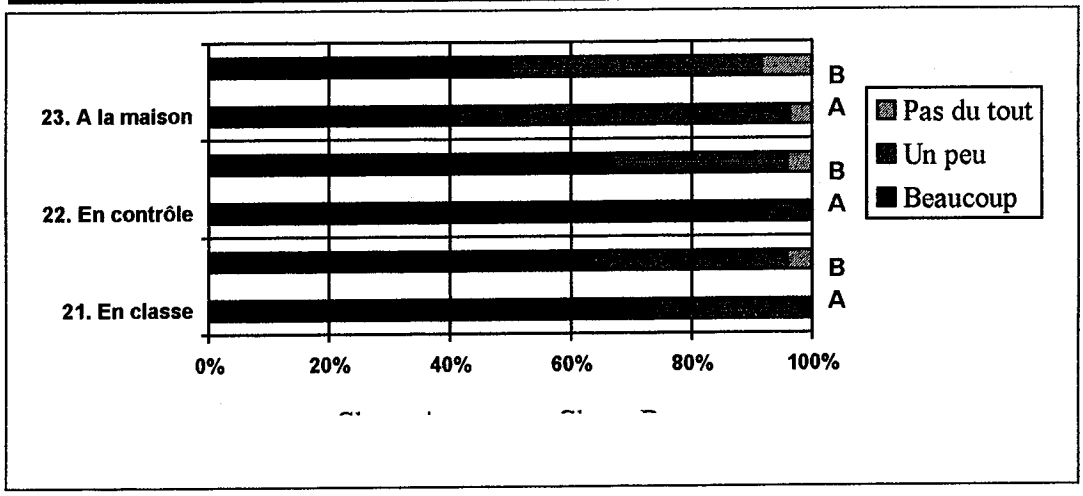
Dix de la classe A et sept de la classe B, donc environ un tiers, déclarent avoir été surpris par des résultats obtenus par la machine. Encore faut-il noter qu'il n'est pas facile dans les réponses de faire la part entre les surprises dues aux possibilités de la machine et les surprises dues à des résultats inattendus. Deux citent ainsi les possibilités de la machine, un les résultats donnés en fractions.

En dehors de ces réponses, trois (A) citent des dérivées non conformes au calcul en papier/crayon, un (A) des limites, un (A) des expressions factorisées, un (A) et trois (B) des graphiques, un (A) des exposants fractionnaires et un (A) enfin cite les fameux systèmes.

L'utilisation de la calculatrice

Comme on pouvait s'y attendre, la calculatrice est beaucoup utilisée en classe et dans les contrôles, il est intéressant de noter qu'elle l'est moins à la maison. Ceci est conforme aux informations recueillies dans les entretiens. La machine est devenue un outil banalisé de l'activité mathématique, on l'utilise pour le travail scolaire essentiellement.

	Beaucoup		Un peu		Pas du tout	
La calculatrice TI92 t'est-elle utile :	Cl A	Cl B	Cl A	Cl B	Cl A	Cl B
21. En classe	20	15	7	8	0	1
22. En contrôle	25	16	2	7	0	1
23. A la maison	11	12	15	10	1	2

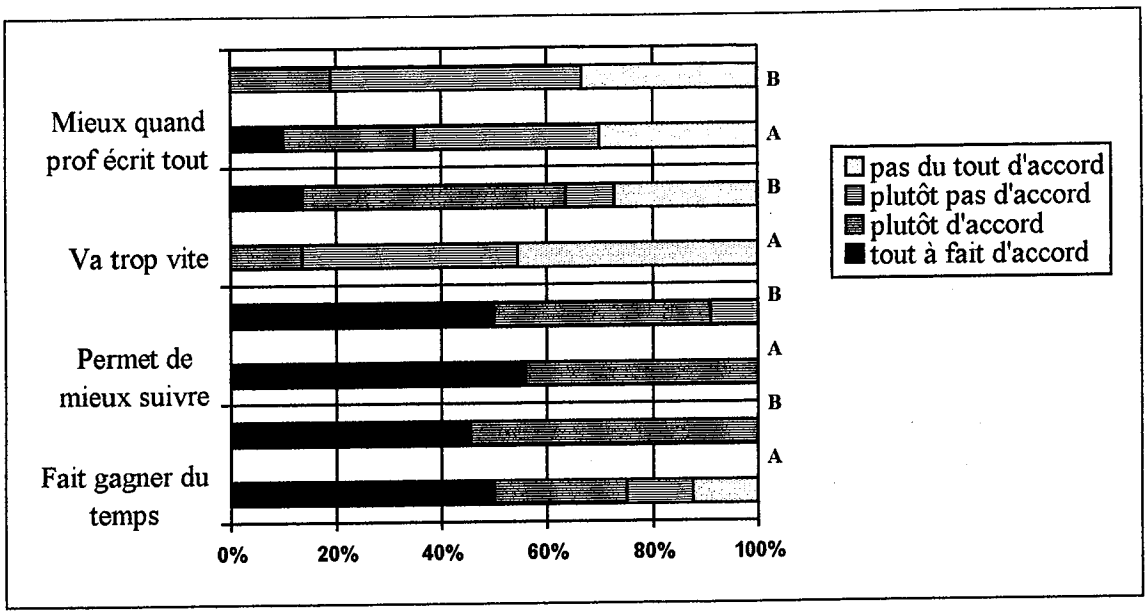


Quant à l'utilisation de la calculatrice rétroprojetable, elle est appréciée, avec toutefois certaines réserves dans la classe B comme en témoignent les réponses aux questions 24-27 :

Juges-tu que l'utilisation de la calculatrice **rétroprojetable**, en classe,

	Tout à fait d'accord		Plutôt d'accord		Plutôt pas d'accord		Pas du tout d'accord		Moyenne d'adhésion	
	Cl A	Cl B	Cl A	Cl B	Cl A	Cl B	Cl A	Cl B	Cl A	Cl B
Fait gagner du temps	12	10	6	12	3	0	3	0	0.71	0,82
Permet de mieux suivre les synthèses	14	11	11	9	0	2	0	0	0.85	0,8
Va trop vite	0	3	3	11	9	2	10	6	0.23	0,5
C'est mieux quand le prof écrit tout au tableau	2	0	5	4	7	10	6	7	0.38	0,29

Tableau 10 : Opinions sur l'utilisation de la rétroprojection

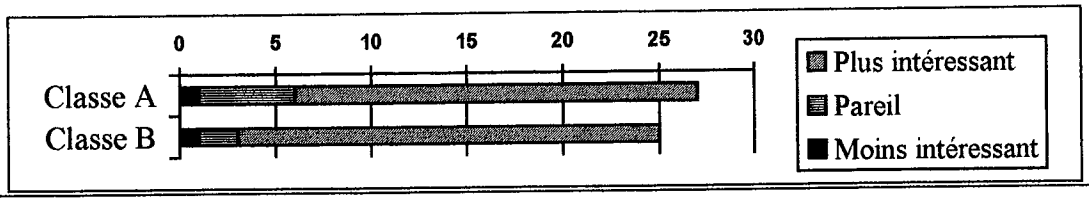


Mathématiques et TI92

Un petit tiers des élèves (8 A, 8 B) déclare que la TI92 les a aidés à comprendre une notion. Viennent par ordre décroissant : les limites (3 A, 5 B), les barycentres pour lesquels il y avait eu effectivement une utilisation de l'application géométrie mais très brève (3 A, 1 B), les dérivées (1 A, 3 B), la géométrie (1 A, 1 B), les factorisations (1 A).

En revanche, ils estiment en très forte majorité qu'il est plus intéressant de faire des mathématiques avec la TI92 :

30. Faire des mathématiques avec la TI92 c'est :



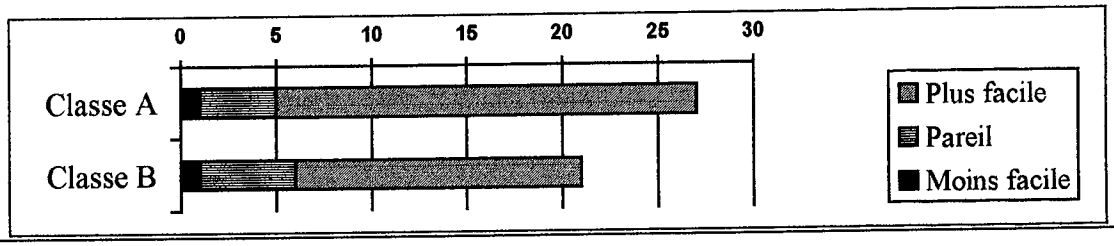
Les raisons avancées sont les suivantes :

- moins intéressant : « l'année prochaine, on n'aura pas la machine (A) » « faire des math avec une calculatrice ne ressemble à rien. On pourrait en faire avec notre tête (B)».
- pareil : « ça ne change rien aux mathématiques (A)», « c'est juste un instrument (A)», « ça prend du temps pour apprendre à s'en servir (A)», « parfois c'est intéressant, parfois non (A)», « Il faut avant tout se débrouiller "à la main" dans la perspective du bac (B) », « Je comprends mieux les exos faits à l'écrit car je n'ai pas le temps de chercher à comprendre les résultats de la TI92 (B) ».
- plus intéressant : rapidité (3 A, 3 B), « les maths sont moins rébarbatives », « moins ennuyeuses » ou « plus ludiques » (3 A), « ça change » (1 A, 3 B), « on travaille moins » (1 A), « vérification des résultats», « sécurisant » (5 B). Aide à la compréhension (4 B).

Un élève de la classe A souligne qu'au début, il trouvait les maths plus intéressantes avec la TI92, mais qu'avec le temps ça s'estompe.

Ils sont aussi en grande majorité d'avis que la TI92 rend les maths plus faciles mais ce qu'ils mettent en avant essentiellement pour justifier cette facilité accrue, c'est la possibilité de vérification, qui concerne maintenant tout le calcul algébrique et l'analyse. Deux élèves de la classe B rayent la mention « pareil » pour la remplacer par « différent ». Ces deux élèves, très favorables à l'expérimentation, signifient que l'intérêt de l'introduction de la calculatrice n'est pas à rechercher dans un gain de temps, mais dans la nouvelle activité qu'elle permet.

32. Faire des mathématiques avec la TI92 c'est :



Les raisons avancées sont les suivantes :

- moins facile : « ça prend du temps d'utiliser la machine (A) », « Il faut apprendre à s'en servir, après ça va (B)»
- pareil : On rencontre des difficultés (1 A, 2 B). C'est juste un instrument, ça donne les réponses, mais ça ne permet de comprendre (1 A, 2 B).
- plus facile : possibilité de vérification (12 A, 5 B), aide aux calculs (5 A, 3 B), rapidité (3A, 4 B), conjecture en géométrie (1 B).

La personnalisation de la calculatrice

Elle était prise en compte par la question 34, où l'on demandait aux élèves de préciser ce qu'ils conservaient dans la mémoire de la TI92. Les réponses sont les suivantes :

	Classe A	Classe B
ce qui a été fait en classe :	15	14
des jeux :	14	20
d'autres programmes :	12	18
des formules de maths :	17	10
des formules d'autres discipline	15	12
autres (précise)	3	

Les trois réponses « autres » sont des définitions en sciences, des dessins, des messages envoyés entre camarades.

Ces nombres peuvent paraître élevés. En fait il faut aussi les relativiser en prenant en compte le nombre de catégories citées par élève : ainsi 10 élèves de la classe A ne mentionnent qu'une ou deux catégories et 10 élèves mentionnent 4 ou 5 catégories. Dans la classe B, des jeux et des programmes ont circulé. Cette circulation a été favorisée par l'initiation technique à la connexion entre machines. Mais conserver des jeux et des programmes sur sa machine ne veut pas dire les utiliser, ni même savoir ce qu'ils font, comme on le voit dans les entretiens.

Enfin, tous les élèves sauf un de la classe A et 5 de la classe B utilisent leur calculatrice pour les autres disciplines. On note une progression de la biologie par rapport au premier

questionnaire puisque 13 élèves de la classe A et 7 élèves de la classe B déclarent maintenant utiliser leur calculatrice dans cette matière.

Les questions 37-42

Ces questions avaient pour objet de nous permettre d'approcher, au delà du discours, l'instrumentation de la calculatrice par les élèves. Qu'en ressort- il ? Les réponses détaillées élève par élève sont données en annexe et résumées en un tableau. Nous en ferons d'abord une synthèse question par question, avant de faire un bilan, élève par élève.

Question 37 : La définition de la fonction

Cette question peut-être considérée comme bien réussie dans la classe A, et non réussie dans la classe B.

Les résultats sont les suivants (en distinguant trois catégories de réponses les réponses complètement correctes, les réponses correctes sauf pour ce qui concerne éventuellement la touche [ENTER], les réponses incorrectes) :

	Réponses correctes	Réponses correctes (sauf [ENTER])	Réponses incorrectes
Classe A	7	19	1
Classe B	2	2	20

Tableau 11 : réponses à la question 37

Dans la classe A, il y a une seule réponses que nous considérons ici comme véritablement incorrecte du fait de son ambiguïté, c'est celle d'un élève qui écrit : « Il faut aller dans *F4* et taper *define* puis écrire $f(x)=x+1+(\frac{9}{x-3})$ ». En revanche, de nombreux élèves oublient de mentionner soit l'utilisation de la touche [ENTER] après sélection de *define* dans le menu *F4* (12 élèves), soit l'utilisation de [ENTER] en fin de définition (2 élèves), soit toutes les commandes [ENTER] (5 élèves). On peut raisonnablement faire l'hypothèse que cette utilisation de [ENTER], complètement routinière, s'est naturalisée et que c'est pour cette raison qu'ils ne la formulent pas.

Les réponses de la classe B sont généralement moins précises surtout quant à l'écriture de la fonction. Une réponse typique est : « *F4* [ENTER], tu tapes f(x).» Dans d'autres réponses, la fonction est donnée avec son écriture mathématique, ne faisant pas apparaître le parenthésage. Beaucoup d'élèves de cette classe se sont attachés à désigner l'entrée de menu où l'on obtient « *define* » et non à l'écriture de la fonction.

Si l'on regarde les types de définitions proposées, les deux grandes catégories attendues sont représentées de façon très dissymétrique :

- deux élèves de la classe A et un de la classe B proposent de taper « *define* »,
- deux élèves de la classe B proposent l'utilisation du « catalog »
- tous les autres ont recours au menu *F4*. Les expressions diffèrent cependant quant à l'utilisation de ce menu :
    - la plupart des élèves ont clairement mémorisé que l'instruction de définition est en première position dans ce menu, ils déclarent donc faire *F4*-1 (16 A, 1 B)

- ou encore directement *F4*-[ENTER] puisque c'est le premier niveau qui est automatiquement sélectionné à l'ouverture du menu (4 A),
- ou formulent l'instruction sous la forme *F4 - define* (2 A).

La question ne précisait pas suffisamment le niveau de détail attendu dans la formulation. On notera que, dans la classe A, 17 élèves fournissent une expression détaillée en ligne. Deux seulement ne sont pas conformes à l'expression attendue, l'une est correcte mais sur-parenthésée, l'autre a une erreur de parenthésage.

Enfin signalons que quatre élèves de la classe A et un de la classe B, proposent deux solutions soit définir, soit recopier la ligne, ceci correspondant à deux interprétations différentes de la question 37, a priori possibles même si la seconde n'était pas prévue a priori.

Question 38 : La dérivation de f

Cette question est relativement bien réussie. Les résultats sont les suivants, en distinguant trois catégories.

- catégorie 1 : les réponses complètement correctes,
- catégorie 2 : les réponses correctes au niveau de la commande de dérivation mais incorrectes au niveau de sa syntaxe, ou l'inverse
- catégorie 3 : les réponses incorrectes aux deux niveaux.

	complètement correctes	syntaxe incorrecte	syntaxe et commandes incorrectes	non réponse
Classe A	16	8	1	2
Classe B	5	17	1	1

Tableau 12 : Réponses à la question 38

Les erreurs des réponses de la catégorie 2, concernent en majorité la syntaxe de la commande de dérivation (7/1). Il s'agit dans les 17 cas de la classe B et dans 5 cas de la classe A, de l'oubli de la variable x et dans 2 cas de la classe A de l'oubli de la parenthèse fermante.

L'erreur concernant la commande est du type *F3*-3. Les deux élèves de la catégorie 3 cumulent les deux erreurs : *F3*-3 et oubli de x. On peut cependant faire l'hypothèse que de telles erreurs seront rectifiées par les élèves dans l'action, au vu des messages d'erreur correspondants pour les erreurs de syntaxe, à la simple vue du menu déroulant *F3* pour les erreurs de commande et auront donc un impact limité sur le fonctionnement mathématique de l'élève.

En ce qui concerne les formulations proposées par les élèves, on note encore une fois dans la classe A une mémorisation majoritaire de la position de la commande « differentiate » dans le menu *F3*, puisque 12 élèves commencent par *F3*-1 et 2 par *F3*-[ENTER], seuls 2 élèves formulant en *F3*-differentiate. De plus 7 élèves proposent le raccourci clavier 2nd 8, 1 élève seulement proposant les deux solutions.

Dans la classe B, le raccourci clavier 2nd 8 est utilisé presque exclusivement. Un seul élève utilise « *catalog* ».

Questions 39 et 40 : La commande de factorisation effacée

On est là dans une situation différente, où il s'agit non d'utiliser la machine dans le cadre de la réalisation d'une tâche familière mais de déduire de la comparaison des deux expressions algébriques figurant sur une même ligne, la commande qui a permis de passer de l'une à l'autre. Même si la factorisation nous semble évidente, il s'agit là d'une tâche a priori plus délicate parce que non routinière. Les résultats obtenus montrent qu'environ deux tiers des élèves reconnaissent la factorisation :

	Réussite	Echec	Non réponses
Classe A	16	6	5
Classe B	14	9	1

Tableau 13 : Réponses à la question 39

L'échec vient cette fois, à quelques exceptions près, d'erreurs liées à une incompréhension des relations entre les deux expressions. Les propositions sont les suivantes :

- « Expand » (2 A, 3 B). C'est souvent la première commande utilisée par les élèves qui vont à la pêche au résultat.
- « comDenom » (2 A, 3 B). Cette commande réduira effectivement au même dénominateur mais ne factorisera pas numérateur et dénominateur.
- « Propfrac » (2 B). Cette commande a pu être rencontrée pour la recherche d'asymptote. En fait, elle produit l'effet inverse à celui recherché.

On trouve aussi :

- « factor f(x) » (1 A). Cet élève n'est donc pas très loin de la solution.
- la touche d'effacement ← (1 A, 1 B), « faire CLEAR » (1 A). C'est une incompréhension de la tâche elle-même.

La question suivante qui cherchait à faire préciser cette première réponse a visiblement été mal comprise. Les réussites sont ici inversées.

	Réussite	Echec	Non réponses
Classe A	8	14	5
Classe B	7	12	5

Tableau 14 : Réponses à la question 40

Les erreurs attestent cette incompréhension de la question ou reprennent des fonctions erronées de la question précédente. Certains ont interprété la question comme la reproduction sur la ligne de commande de la ligne 3 affichée entière.

Question 41 : La syntaxe de la commande *Solve*

Il s'agit cette fois d'interpréter une erreur de syntaxe relative à une commande familière, la commande *Solve*. La majorité des élèves réussit mais la réussite n'est pas massive, comme en témoigne le tableau suivant :

	Réussite	Echec	Non réponses
Classe A	15	6	6
Classe B	14	8	2

Tableau 15 : Réponses à la question 41

Les erreurs commises consistent respectivement à inverser l'ordre de x et de l'expression (1 A), à enlever la variable x (2 A), à proposer de compléter par x=un nombre (2 A, 1 B) ou à indiquer qu'« il n'y a pas de valeur pour x » (1B). Nous comptabilisons également dans les réponses fausses la réponse : « mettre un résultat », qui est susceptible d'avoir diverses interprétations mais traduit en tout état de cause un rapport assez primitif à la notion d'équation si c'est à la complétion sous forme d'équation qu'il est fait référence. Deux autres ajoutent seulement le signe =.

Deux élèves de la classe B ajoutent = ?, après l'expression. Veulent-ils dire qu'on peut mettre ce qu'on veut après le signe d'égalité, ou pensent-ils que cette syntaxe est admissible ? Dans le doute, nous les avons comptabilisés dans les réponses fausses.

Parmi les réponses considérées comme correctes, la plupart, comme l'on pouvait s'y attendre, expriment qu'il manque un signe d'égalité et suggèrent de rajouter =0, la référence à la notion d'équation ou d'égalité n'est cependant que rarement explicitée (3 A, 1 B). Un élève de la classe A mentionne la possibilité de compléter aussi en introduisant une inégalité, un élève enfin propose de mettre : *solve* f(x)=expression, solution que nous avons acceptée puisqu'elle ne bloque pas la machine, même si elle était a priori non prévue.

Question 42 : la syntaxe de la notion de limite

Cette question renvoyait à la notion de limite beaucoup plus neuve pour les élèves. Il s'agissait de lever en quelque sorte une indétermination affichée par la machine, en considérant des limites à droite et à gauche. Il ne s'agissait pas encore à nos yeux d'une tâche routinière pour les élèves. Les résultats le confirment puisque ce sont les suivants, en distinguant quatre catégories :

- catégorie 1 : les réponses correctes,
- catégorie 2 : les réponses manifestant que le problème a été correctement identifié mais que la syntaxe de la solution proposée n'est pas correcte et les réponses ambiguës de ce point de vue,
- catégorie 3 : les réponses manifestant que le problème n'a pas été identifié,
- catégorie 4 : les non-réponses.

	réponses correctes	problème identifié syntaxe incorrecte	problème non identifié	non-réponses
Classe A	8	6	10	3
Classe B	2	14	4	4

Tableau 16 : Réponses à la question 42

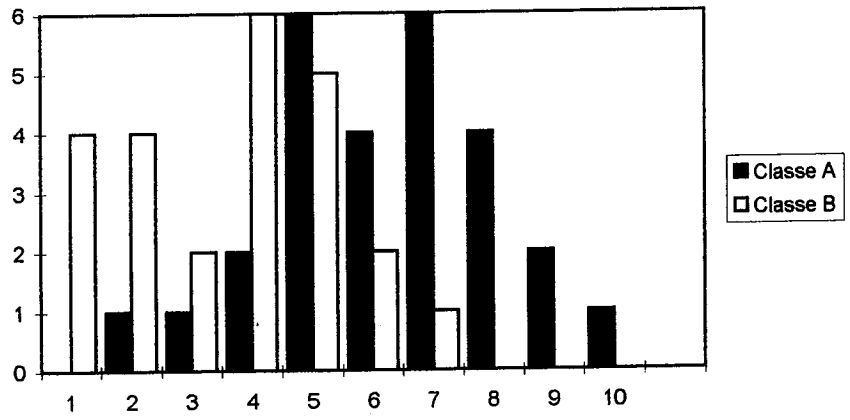
Les élèves qui ne voient pas le problème se bornent à reproduire la syntaxe standard de la commande *limit*, avec d'ailleurs parfois des erreurs de syntaxe, ou précisent une expression explicite à la place de f(x). Ceux qui ont identifié le problème mais ne proposent pas une

solution correcte commettent l'erreur attendue consistant de façon symétrique à rajouter : +1 et -1 ou +3 et -3 (3 A, 14 B), ou rajoutent simplement : > et < (2 A). La réponse classée dans les ambiguës consiste à dire qu'il faudrait préciser si c'est plus ou moins 3.

Venons-en maintenant à un bilan élève par élève. Nous avons pondéré les questions de la façon suivante, pour donner un score à chaque élève :

- Question 37 : 0 ou 2 points
- Question 38 : 0, 1 ou 2 points suivant les trois catégories introduites
- Question 39 et 40 : 0, 1 ou 2 points en attribuant 1 point par question
- Question 41 : 0, 1 ou 2 points (1 point pour la solution *solve* (f(x)=expression)
- Question 42 : 0, 1 ou 2 points suivant les trois catégories introduites.

On obtient le diagramme en bâtons suivant. Dans la classe A, la moyenne est de 6.3 et la médiane de 6.5. La plupart des élèves se regroupent sur les quatre scores : 5, 6, 7 et 8. Dans la classe B, la moyenne et la médiane valent 4.



Graphique 2 : Scores dans les questions relatives à l'instrumentation

Le troisième questionnaire

Présentation du questionnaire

Il s'agit cette fois d'un questionnaire de bilan, en fin d'année. On cherche à recueillir l'opinion de l'élève sur l'expérimentation à laquelle il a participé, la façon dont il perçoit le rôle joué par la TI92 dans son travail mathématique, ses apprentissages, ses résultats scolaires.

Dans la mesure où nous essayons de mettre en place pour les élèves des classes concernées des séances avec calculatrice en terminale, la dernière question leur demande s'ils seraient volontaires pour une telle opération.

Le texte du troisième questionnaire

QUESTIONNAIRE DE BILAN

1. Nom :
2. Prénom :

3. Depuis la fin du mois de décembre, tu as participé à une expérimentation avec la TI92. Quelle est globalement ton impression sur cette expérimentation ?

Très satisfait ❒ Plutôt satisfait ❒ Plutôt insatisfait ❒ Très insatisfait ❒

Si tu voulais expliquer à un élève d'une autre classe ce que tu as apprécié et ce que tu n'as pas apprécié dans cette expérimentation, que lui dirais-tu ?

4. J'ai apprécié :

.....

.....

.....

5. Je n'ai pas apprécié :

.....

.....

.....

6. As-tu l'impression que si tu n'avais pas eu cette calculatrice, tu aurais travaillé en mathématiques :

davantage ❒ à peu près autant ❒ moins ❒

7. As-tu l'impression que si tu n'avais pas eu cette calculatrice, en mathématiques, tu aurais appris :

davantage ❒ à peu près autant ❒ moins ❒

8. As-tu l'impression que si tu n'avais pas eu cette calculatrice, en mathématiques, tu aurais compris :

davantage ❒ à peu près autant ❒ moins ❒

9. As-tu l'impression que si tu n'avais pas eu cette calculatrice, en mathématiques, tu aurais eu des résultats :

meilleurs ❒ à peu près identiques ❒ moins bons ❒

10. Un élève d'une autre classe te dit : "Avec la TI92, même en étant nul en analyse, tu peux réussir tes contrôles". Que lui réponds-tu ?

.....

.....

11. Peux-tu citer un exemple de situation où tu as trouvé l'utilisation de la TI92 très intéressante :

.....

Explique pourquoi :

.....

.....

12. Peux-tu citer un exemple de situation où tu as trouvé l'utilisation de la TI92 utile :

.....

Explique pourquoi :

.....

.....

13. Peux-tu citer un exemple de situation où tu as trouvé l'utilisation de la TI92 inutile :

.....

Explique pourquoi :

.....

.....

14. Peux-tu citer un exemple de situation où tu as trouvé l'utilisation de la TI92 gênante :

.....

Explique pourquoi :

.....

.....

Pour chacune des affirmations suivantes, coche la case qui correspond le mieux à ton opinion :

La TI92 :

	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord	Sans opinion
15. Permet de faire en classe des activités plus intéressantes					
16. Oblige à se poser des questions					
17. Donne envie de chercher les exercices					
18. Fait perdre du temps					
19. Oblige à réfléchir davantage à ce que l'on fait					
20. Incite le professeur à poser des problèmes trop difficiles					
21. Peut aider à comprendre les mathématiques					
22. Incite à ne pas apprendre les choses indispensables					

23. Aide à résoudre les problèmes					
24. Oblige à apprendre des choses inutiles					

25. Est-ce-que l'utilisation de la TI92 a modifié ton point de vue sur les calculatrices ?
Oui ❒ Non ❒

Explique ta réponse :

.....

.....

26. Quand la TI92 fournit un résultat inattendu, que fais-tu ? (donne des exemples)

.....

.....

27. Si tu pouvais garder la calculatrice pendant les vacances, y-a-t-il des choses que tu aimerais apprendre à faire ou à mieux faire avec elle ? Oui ❒ Non ❒

Si tu as répondu "Oui", peux-tu donner des exemples :

.....

.....

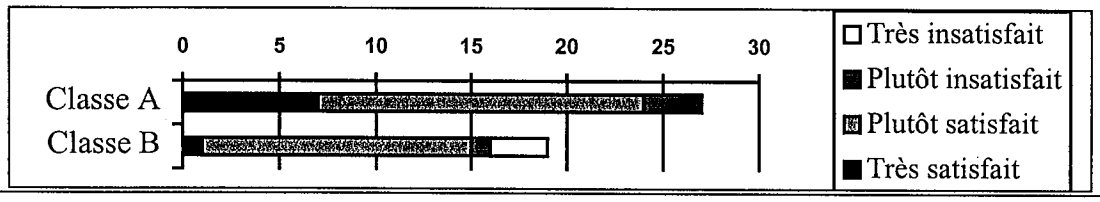
28. Aimerais-tu avoir une TI92 l'année prochaine ?
Oui ❒ Non ❒ Sans opinion ❒

29. Si le lycée pouvait mettre à ta disposition une TI92 pour les épreuves du bac à condition que tu t'engages à participer à une séance de TD hebdomadaire d'une heure avec TI92 (en plus de l'horaire normal), serais-tu volontaire ? Oui ❒ Non ❒

Résultats du troisième questionnaire

Il s'agit donc du questionnaire de bilan, auquel ont répondu 27 élèves de la classe A et 20 (12 F et 8 G) de la classe B. Ce qui ressort tout d'abord, c'est une impression de satisfaction générale, plus marquée toutefois dans la classe A :

3. Depuis la fin du mois de décembre, tu as participé à une expérimentation avec la TI92. Quelle est globalement ton impression sur cette expérimentation ?



Ce qui est particulièrement apprécié dans cette calculatrice, c'est par ordre décroissant de citation :

- le calcul formel et l'extension des possibilités de vérification qu'il induit : 12 A, 7 B
- l'éventail des possibilités offertes : 8 A, 7 B
- la facilité d'utilisation : 4 A, 4 B
- l'aide à la résolution, aux calculs : 3 A, 4 B
- la rapidité de travail et le gain de temps : 4 A, 2 B
- la programmation : 4 A, 1 B
- la géométrie : 3 A, 2 B
- avoir la calculatrice : 3 A
- les tracés graphiques : 1 A, 2 B

- l'aide à la compréhension : 1 A, 2 B
- la qualité de l'écran : 1 A, 1 B
- la mémoire : 1 A, 1 B
- les possibilités offertes sans programmation : 1 A
- les possibilités logiques : 1 A
- la découverte d'un outil informatique : 1 B

Comme on le voit, les réponses sont très diversifiées. Ce qui domine, comme dans le questionnaire 2, c'est la composante calcul formel, mais à travers le détail des réponses, on sent bien que ce à quoi les élèves sont particulièrement sensibles, c'est à l'extension des possibilités de vérification que cette composante permet. Cette dimension apparaît plus que celle d'aide aux calculs et à la résolution, citée seulement 7 fois. Vient ensuite, l'éventail des possibilités offertes. Puis on trouve, de façon plus marginale, un ensemble de caractéristiques diverses tenant notamment aux domaines mathématiques d'utilisation (géométrie, tracés graphiques) et aux caractéristiques techniques de la machine. On notera par rapport au questionnaire 2, la disparition du tableur faiblement utilisé et la résistance en revanche de la programmation dans la classe A, malgré l'absence d'utilisation officielle. A noter aussi trois élèves de cette même classe pour qui le principal intérêt est d'avoir pu bénéficier gratuitement de cette machine.

En sens inverse, ce qui n'a pas été apprécié, c'est toujours par ordre décroissant de citation :

- la taille, le poids : 5 A, 6 B
- les cours trop centrés sur la TI 92 : 7 B
- la perte de savoir faire relative à leur propre machine : 3 A,
- la complexité, les difficultés avec le mode d'emploi : 3 A, 2 B
- la perte de temps : 2 A, 1 B (en rapport avec le baccalauréat, où l'élève n'aura plus la TI92).
- la géométrie : 2 A
- les discordances de résultats avec les calculs papier/crayon : 1 A, B
- certaines interfaces : 1 A, B
- la faible connaissance de la machine : 1 A
- la « trop grande facilité » : 1 B
- l'anglais : 1 A
- le prix des changements de piles : 1 A
- les cours en plus : 1 A
- le manque d'heures spécifiques pour apprendre à se servir de la TI92 : 1 A
- le fait d'être interviewé : 1 A

Là encore, les réponses sont très diversifiées et moins concentrées sur l'encombrement de la machine que dans le questionnaire 2 ; quatre élèves de la classe A, et un de la classe B seulement ne donnent cette fois pas de raison pour ne pas apprécier la TI92. On notera, dans la classe A, les craintes qui se manifestent plus fortement en cette fin d'année, de ne plus savoir se servir de sa propre machine et l'apparition, même si elle est très marginale, de la mention de décalages avec les résultats papier/crayon ainsi que de facteurs qui ne concernent pas directement la machine mais l'organisation de l'expérimentation, eux aussi très marginaux. On notera aussi les avis contradictoires exprimés à propos de la géométrie et sans doute liés, au moins en partie, à la faible utilisation de cette application en classe.

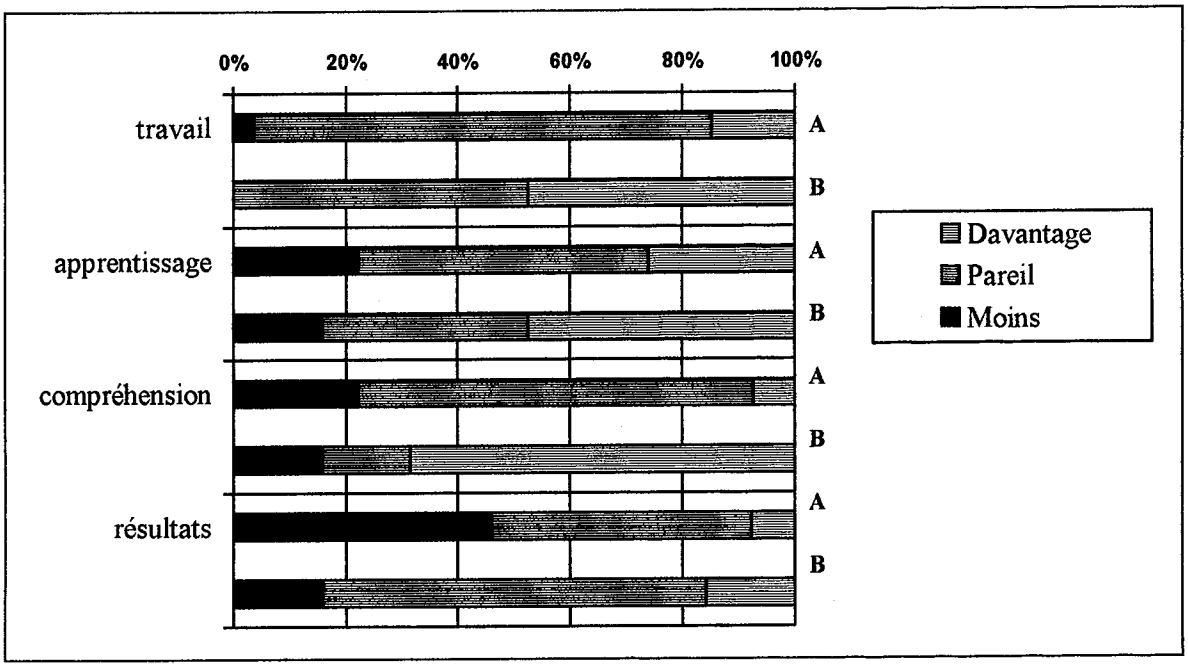
On notera dans la classe B, le nombre important de réserves portant plus sur l'expérimentation que sur la machine.

Travail, apprentissages, résultats

Les questions 6-9 concernent ce domaine et on obtient les résultats suivants, les questions concernant ce qui se serait passé à leur avis s'ils n'avaient pas disposé de la calculatrice :

Question	moins		identique		plus	
	Cl A	Cl B	Cl A	Cl B	Cl A	Cl B
travail	1	0	22	10	4	9
apprentissage	6	3	14	7	7	9
compréhension	6	3	19	3	2	13
résultats	12	3	12	13	2	3

Tableau 17 : Travail, apprentissage, compréhension, résultats



Sur le plan du travail fourni par les élèves, leur impression est que la participation à l'expérimentation n'a rien changé (classe A) ou l'a diminué (classe B). On peut conclure que la calculatrice ne les a pas incités à travailler davantage en mathématiques puisqu'un seul élève a cette opinion. Ceci atteste en un sens la banalisation de l'outil : dès lors que cette banalisation se réalise, l'instrument nouveau n'entraîne pas une « motivation » supérieure au travail mathématique.

Concernant l'apprentissage, les réponses sont équilibrées dans la classe A, la majorité étant pour le statut quo. Dans la classe B, les élèves pensant que l'expérimentation a eu un effet négatif sur leur apprentissage sont les plus nombreux (presque la moitié des réponses).

Avec la question relative à la compréhension, les deux classes montrent un comportement encore plus différent. Dans la classe A , un léger plus est accordé à la calculatrice, mais les élèves pensant que la calculatrice n'a rien changé à leur compréhension sont majoritaires. Pour la classe B, en revanche, l'impression qu'on aurait mieux compris sans la TI92 domine nettement.

Concernant les résultats, 12 élèves de la classe A estiment qu'ils auraient moins réussi sans la machine. C'est un plus en faveur de la TI92, mais notons que, même sur ce point, les avis sont partagés et qu'il y a autant d'élèves pour penser qu'ils auraient eu des résultats identiques. Dans la classe B, l'opinion selon laquelle la TI92 n'a pas changé les résultats domine (2/3 des réponses), les deux autres opinions s'équilibrant. Une grande majorité d'élève pense donc que la TI92 n'a rien changé à leurs notes en contrôle, alors même qu'ils en ont disposé pour tous les contrôles et notamment les contrôles communs à toutes les classes de première S de l'établissement.

La tendance générale est donc à penser que la TI92 n'entraîne pas de changement décisif sur chacune des quatre dimensions : travail, apprentissage, compréhension, résultats scolaires. Cependant il est intéressant de noter que les élèves différencient bien ces quatre dimensions quand on les interroge sur l'impact de la TI92.

La question 10 apporte des éléments complémentaires pour apprécier ces réponses. Seuls 3 élèves (2 A, 1 B) répondent : « oui » sans autre commentaire. la plupart répondent non ou ont des réponses mitigées : oui mais..., non mais..., la différence entre les deux n'étant pas très claire du fait de la proximité des raisons invoquées. Les raisons invoquées sont en effet les suivantes :

- non, car la machine ne donne pas le raisonnement, les justifications, ne fait pas les démonstrations : 6 A, 8 B
- non, car la machine permet de vérifier, mais ne fait pas le raisonnement : 2 A, 1 B
- non, car il faut connaître le cours : 2 A, 2 B
- non, car il faut comprendre, analyser : 3 B
- non, il faut savoir utiliser les résultats, expérimenter 1 B
- non, car il faut savoir programmer : 1 A
- non, car moi je n'ai pas réussi mes contrôles : 1 A
- oui, aide mais il faut connaître les bases : 1 A
- oui, donne les résultats mais il faut justifier : 4 A, 3 B
- oui, si l'on sait utiliser la machine : 4 A, 1 B
- oui, on peut progresser en analyse : 1 A, 1 B
- oui, car on peut tricher avec : 1 B

Enfin un élève de la classe A répond qu'il n'est pas concerné par la question puisqu'il n'est pas nul.

On voit donc bien que les élèves sont conscients de l'aide fournie par la machine mais savent aussi que la machine ne fait pas tout le travail mathématique à leur place. Le fait que les résultats de la classe ne se soient pas envolés par rapport à ceux des autres classes dans les différents contrôles communs les conforte sans aucun doute dans cette vision réaliste. On notera l'accent fort mis sur les raisonnements ainsi que sur la nécessité de savoir utiliser la machine.

Intérêt de la calculatrice dans les situations mathématiques

Les situations pour lesquelles la calculatrice a semblé très intéressante sont les suivantes :

- limites : 5 A, 4 B
- géométrie : 5 A
- dérivées : 3 A, 3 B
- graphes : 2 A, 4 B
- tables de valeurs : 1 A, 5 B

- vérification : 1 A, 3 B
- factorisation : 2 A, 2 B
- compréhension : 2 B
- suites : 1 A
- 3D : 1 A
- calculs difficiles : 1 A
- programmation : 1 A
- jeux : 1 A

Enfin trois élèves (2 A, 1 B) répondent n'avoir trouvé la TI92 très intéressante dans aucune situation.

On voit là encore dominer le calcul formel et en particulier celui relatif à la notion de limite que les élèves ont sans doute l'impression d'avoir plus de mal à gérer que celle de dérivée, en cette fin d'année.

On notera la présence de la géométrie dans la classe A, à jeu égal avec les limites en dépit de la faible utilisation relative. Dans ce domaine, ce qui a frappé les élèves, c'est visiblement la possibilité d'obtenir les lieux de points.

Deux élèves de la classe B insistent sur l'apport de la TI92 à leur compréhension (« J'ai eu le sentiment de comprendre par moi-même »). C'est la preuve que le scepticisme constaté au plan général dans la classe sur cet apport n'empêche pas des attitudes beaucoup plus positives.

Les réponses à la question 12, concernant l'utilité de la TI92 sont cohérentes avec ce qui précède puisque l'on retrouve les dérivées (6 A, 3 B), les limites (3 A, 1 B), les suites (3 A), les graphes (3 A, 2 B) et la géométrie (3 A), les factorisations (2 A), les études de fonctions (2 A, 2 B), les calculs difficiles (2 A, 2 B), les devoirs d'analyse (2 A), les tables de valeur (1 A, 1 B) et les programmes (1 A). Un élève de la classe A enfin répond n'avoir trouvé la TI92 très utile dans aucune situation. Les petits décalages observés, notamment relativement à la géométrie, aux limites et aux dérivées peuvent s'expliquer par la fréquence des tâches correspondantes qui influe sans aucun doute sur l'impression d'utilité.

Les raisons invoquées dans les réponses à ces deux questions sont diverses et on y retrouve les catégories déjà mises en évidence dans le questionnaire précédent, avec la domination nette de la dimension vérification (9 A, 6 B), devant le gain de temps (6 A, 3 B), l'aide aux calculs (5 A, 5 B), la visualisation (4 A, 3 B), les mouvement, les animations en géométrie (4 A), l'aide à la compréhension (3 A), le palliatif à l'oubli de formules (3 A), d'autres dimensions intervenant de façon plus marginale pour lesquelles nous renvoyons le lecteur intéressé aux tableaux en annexe correspondant à ce questionnaire.

La question 13 était relative à des situations où la TI92 apparaissait comme inutile. Les réponses sont ici concentrées et claires :

- rien et non réponses : 12 A, 6 B
- géométrie : 12 A, 5 B
- calculs simples : 2 A, 1 B
- courbes : 1 A, 1 B
- limites (« avoir le résultat ne nous sert qu'à vérifier ») : 2 B

Les raisons invoquées concernant la géométrie sont la complexité, le manque de familiarité avec l'application, le temps nécessaire pour tracer les figures, le peu d'aide apporté par rapport aux problèmes de géométrie posés. Il faut bien sûr pondérer ces réponses par la faible utilisation effective de cette application en classe et la faible instrumentation qui en résulte

chez les élèves. Dans la classe B, une utilisation pour les barycentres n'a pas convaincu plusieurs élèves.

La question 14 faisait référence à des situations où la TI92 apparaissait comme gênante.

- rien et non réponses : 12 A, 13 B
- résultats différents du calcul P/C (calculs de dérivées, trigonométrie...) et simplifications (difficiles à comprendre) : 5 A, 2 B
- sac, sport (encombrement) : 3+1 A
- géométrie (temps perdu, complexité) : 1 A, 2 B
- suites (compliqué, pas assez d'exercices à la main) : 1 A, 1 B
- valeurs approchées (rapport exact/approché) : 1 A, 1 B
- notations spécifiques (exposants rationnels) : 1 A, 1 B
- programmation (précision exigée) : 1 A

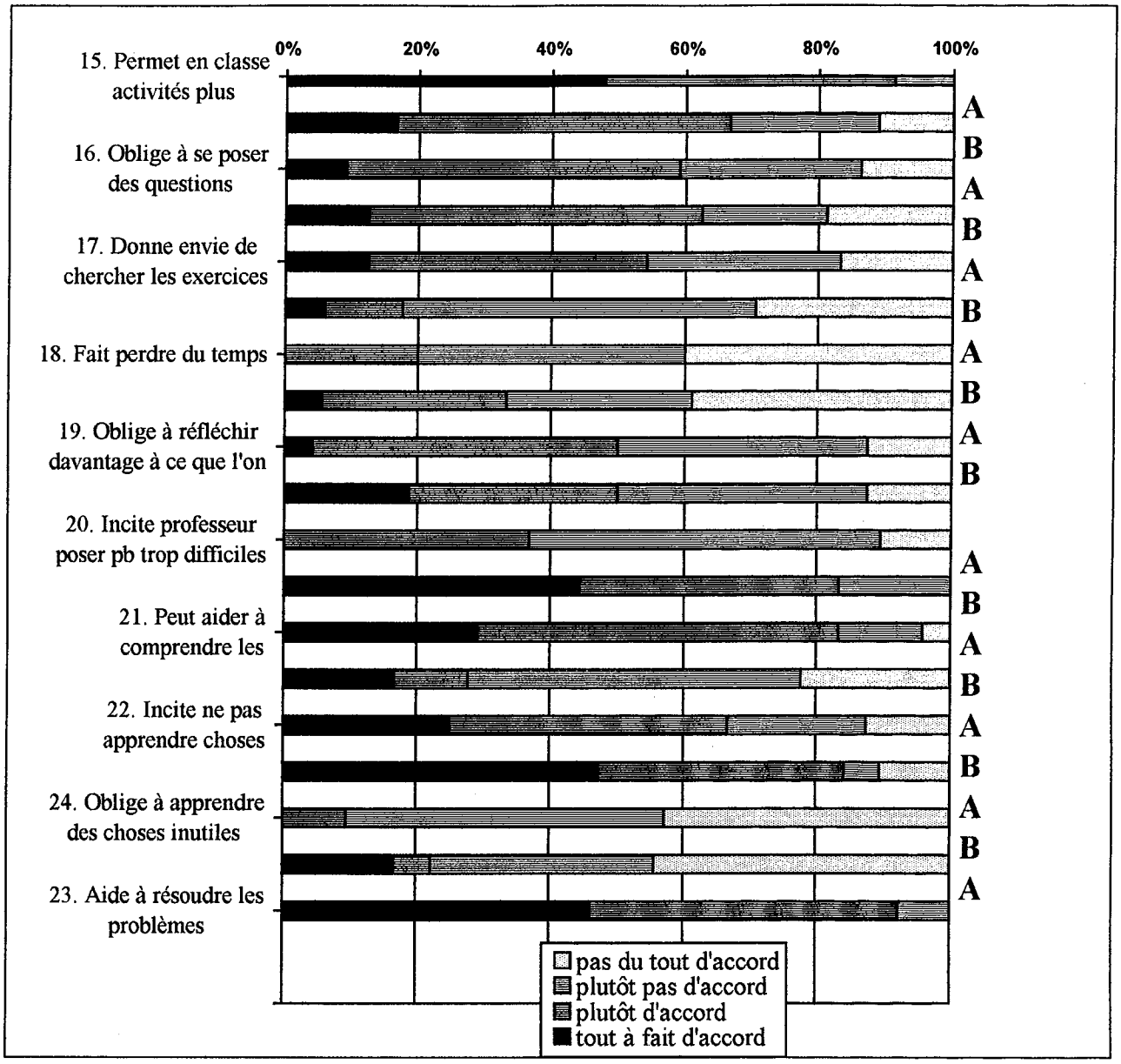
On trouve donc, comme dans la question précédente une majorité d'élèves pour répondre rien ou ne pas répondre. Ce ne sont d'ailleurs pas exactement les mêmes puisque 18 élèves de la classe A et 14 de la classe B ont répondu de la sorte à l'une des deux questions. Et il est intéressant de noter que la seconde catégorie de réponses qui apparaît concerne la gêne provoquée par la production par la TI92 de résultats différents de ceux obtenus en papier/crayon, arriver à contrôler ces décalages étant sans aucun doute une des composantes d'une instrumentation efficace. La géométrie reprend ici une place réduite et l'on retrouve les questions d'encombrement déjà apparues à de multiples reprises mais moins citées que dans le questionnaire 2 : sans doute les élèves s'y sont-ils progressivement habitués.

Les opinions sur la TI92

Elles sont exprimées dans les réponses aux questions 15-24 : (la question 23 n'a pas été posée dans la classe B)

	Tout à fait d'accord		Plutôt d'accord		Plutôt pas d'accord		Pas du tout d'accord		Taux d'adhésion	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
15. Permet de faire en classe des activités plus intéressantes	11	3	10	9	2	4	0	2	0.8	0,57
16. Oblige à se poser des questions	2	2	11	8	6	3	3	3	0.52	0,52
17. Donne envie de chercher les exercices	3	1	10	2	7	9	4	5	0.5	0,31
18. Fait perdre du temps	0	1	5	5	10	5	10	7	0.27	0,33
19. Oblige à réfléchir davantage à ce que l'on fait	1	3	11	5	9	6	3	2	0.47	0,52
20. Incite le professeur à poser des problèmes trop difficiles	0	8	7	7	10	3	2	0	0.38	0,76
21. Peut aider à comprendre les mathématiques	7	3	13	2	3	9	1	4	0.69	0,41
22. Incite à ne pas apprendre les choses indispensables	6	9	10	7	5	1	3	2	0.6	0,74
23. Aide à résoudre les problèmes	12		12		2		0		0.79	
24. Oblige à apprendre des choses inutiles	0	3	2	1	10	6	9	8	0.22	0,31

Tableau 18 : Opinions relatives à la TI92



Des tendances nettes se dégagent, cohérentes avec les réponses aux questions 6-10 du début du questionnaire, attestant chez les élèves des représentations de la calculatrice et de son influence sur leur rapport aux mathématiques positives et réalistes à la fois de façon cependant plus marquée dans la classe A que dans la classe B.

Deux affirmations rencontrent un fort taux d'adhésion dans la classe A : la TI92 permet de faire en classe des activités plus intéressantes, la TI92 aide à résoudre les problèmes.

Deux affirmations sont nettement rejetées dans les deux classes: la TI92 fait perdre du temps, la TI92 oblige à apprendre des choses inutiles.

L'affirmation que la TI92 peut aider à comprendre les mathématiques rencontre un taux d'adhésion relativement élevé, si l'on compare par exemple aux résultats de la recherche DERIVE précédemment menée (Lagrange, 1996). Dans la classe A, seuls quatre élèves manifestent une position contraire et il y a sans doute eu une évolution des positions des élèves dans ce domaine depuis le début de l'année. Dans la classe B, l'adhésion est en dessous de la moyenne.

Trois affirmations rencontrent des taux d'adhésion très voisins de 0,5, traduisant bien les opinions partagées des élèves : la TI92 oblige à se poser des questions, donne envie de chercher les exercices, oblige à réfléchir davantage à ce que l'on fait. La TI92 n'apparaît donc pas dotée de toutes les vertus et susceptible à elle seule de donner envie de chercher ou de transformer l'activité mathématique des élèves en une activité plus réflexive.

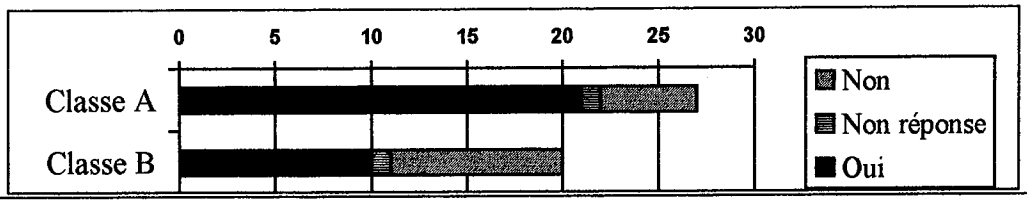
En revanche, les élèves sont plutôt enclins à penser que l'utilisation de la TI92 peut inciter à ne pas apprendre les choses indispensables, ce en quoi ils sont tout à fait raisonnables.

Dans la classe A, ils ont également tendance à rejeter l'affirmation comme quoi la TI92 incite le professeur à poser des problèmes trop difficiles : 7 seulement adhèrent à cette opinion et aucun n'est tout à fait d'accord avec elle.

Bien sûr cette appréciation est relative au vécu propre de chaque élève, et d'ailleurs, l'appréciation est différente dans la classe B. Nous analyserons dans le paragraphe suivant comment on peut analyser ces vécus différents dans les deux classes. En tout cas, les réponses des élèves montrent bien que la dérive que pourrait entraîner la TI92 vers de problèmes plus difficiles n'a rien d'obligatoire.

Les réponses à la question 25 montrent clairement que le passage des calculatrices graphiques à la TI92 a modifié la vision des calculatrices dans la classe A. Le changement est moins net dans la classe B :

25. Est-ce-que l'utilisation de la TI92 a modifié ton point de vue sur les calculatrices ?



Les arguments présentés à l'appui de la réponse « non » sont :

- c'est indispensable et compliqué (1 A), ça fonctionne pareil (1 A), ce n'est toujours qu'un outil (1 A, 3 B), j'aime toujours autant (2 B)

Ceux présentées à l'appui de la réponse « oui » sont encore une fois :

- les possibilités et performances, données sans plus de précision (9 A, 4 B) ou en précisant certains domaines (graphisme, animation) (2 A), le saut au delà du numérique et du graphique (1 A), les possibilités de vérification accrues (1 A).

Trois élèves de la classe A s'expriment sur un autre plan : ils utilisent plus la nouvelle calculatrice, ils l'aiment mieux, deux enfin mentionnent son prix et les problèmes d'inégalité qui en résultent, au delà de l'expérience menée.

Deux élèves de la classe B expriment un changement de point de vue dans le sens de la déception : « Les calculatrices sont inutiles, elles permettent seulement de vérifier les résultats. »

Deux autres élèves de cette classe expriment une prise de conscience de l'utilité réelle des calculatrices : « Les calculatrices peuvent vraiment "simplifier la vie". Elles peuvent avoir aussi un rôle expérimental (découverte d'une notion à travers la TI92). Cependant, il faut avoir un esprit critique sur les résultats affichés et son utilisation. »

Rapport aux résultats inattendus de la machine

26. Quand la TI92 fournit un résultat inattendu, que fais-tu ? (donne des exemples)

Dans les réponses, ce qui vient en premier, c'est la recherche d'une autre forme en utilisant les commandes adaptées, notamment les commandes de factorisation et développement plusieurs fois citées. Ceci se retrouve exprimé sous des formes diverses dans 7 réponses dans chaque classe. Ces réponses traduisent clairement le fait que la catégorie : « réponses inattendues » renvoie pour ces élèves avant tout à des décalages entre forme attendue et forme obtenue dans l'application Home et qu'ils ont développé des stratégies pour reconnaître les égalités non évidentes, non interprétées automatiquement comme signe d'erreur. Deux élèves de la classe A vont semble-t-il dans le même sens, en disant qu'ils vérifient l'égalité, l'un précisant « par exemple en traçant un graphique », donc en mobilisant un changement de cadre.

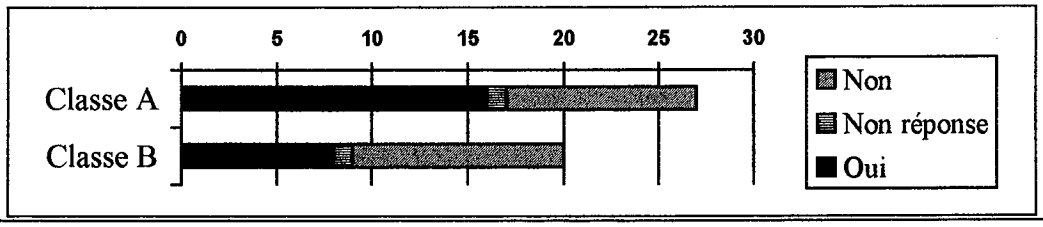
Quelques réponses se situent, elles, plus dans la vérification liée à la recherche d'erreurs : vérification des entrées et des calculs (3 A, 3 B), recherche de l'erreur (1 A, 1 B), ou la simple reproduction : (4 A, 4 B), refait en papier/crayon (3 A, 2 B).

Enfin d'autres réponses ne rentrent pas dans ces catégories : dans la classe A, un élève déclare essayer un autre calcul, deux essayer de comprendre, le dernier demande au professeur ou aux camarades. Dans la classe B, ils sont trois à demander au professeur.

On notera là encore l'évolution sensible depuis les réponses au premier questionnaire.

Projets d'avenir

27. Si tu pouvais garder la calculatrice pendant les vacances, y-a-t-il des choses que tu aimerais apprendre à faire ou à mieux faire avec elle ?



On peut être étonné par le faible nombre des élèves qui répondent : « oui ». Cela confirme, s'il en était besoin, que la TI92 s'est installée comme un instrument du travail mathématique et qu'à ce titre elle a perdu sa dimension ludique. Elle est associée à l'école. Ceux qui ont répondu « oui » mentionnent :

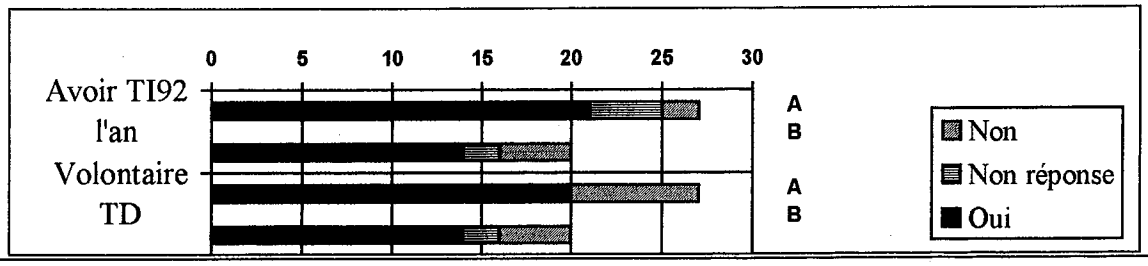
- la programmation : 9 A, 3 B
- la géométrie : 5 A
- le 3D : 1 A
- les commandes, savoir l'utiliser mieux, étudier le mode d'emploi : 2 A, 5 B

On voit donc figurer, surtout dans la classe A, les deux domaines peu ou pas exploités dans l'enseignement, constamment mentionnés dans les réponses aux questionnaires : la programmation et la géométrie.

Enfin aux dernières questions, on obtient les réponses suivantes :

28. Aimerais-tu avoir une TI92 l'année prochaine ?

29. Si le lycée pouvait mettre à ta disposition une TI92 pour les épreuves du bac à condition que tu t'engages à participer à une séance de TD hebdomadaire d'une heure avec TI92 (en plus de l'horaire normal), serais-tu volontaire ?



Ces réponses incitent bien sûr à mettre en place ces séances spécifiques en terminale S.

Synthèse et comparaison des deux classes

Nous faisons dans ce paragraphe une synthèse, questionnaire par questionnaire, avant de présenter une interprétation dans le paragraphe suivant.

Rappelons tout d'abord que la classe A est en majorité masculine (presque ¾ de garçons) alors que les garçons et les filles sont en nombre égal dans la classe B. Précisons également qu'il y a quatre redoublants dans la classe B, alors qu'il n'y en a aucun dans la classe A.

Avant la TI92

Un cinquième des élèves de la classe B n'avait pas de calculatrice avant cette année. Les élèves de la classe A et les autres élèves de la classe B, possédaient une calculatrice. Tous les élèves disposent cette année d'une calculatrice, graphique, excepté un élève de la classe B. Cet achat est récent (moins de deux mois) pour près de la moitié de la classe B, et moins du quart de la classe A. Nous avons donc un équipement plus récent dans la classe B que dans la classe A. De plus, dans cette classe, c'est plus souvent le premier équipement.

Les domaines d'utilisation préférentiels sont les mêmes dans les deux classes : calculs numériques et tracés graphiques. Il n'y a pas de différence sur l'utilisation, plutôt faible, des programmes et des mémoires.

Par contre, les élèves de la classe A l'utilisent plus volontiers en classe et ceux de la classe B, plus volontiers à la maison. On peut donc penser que la calculatrice est plus intégrée aux pratiques de classe dans la classe A, et plus utilisée en préparation d'exercices dans la classe B.

L'instrumentation du module graphique (tableau 3) n'est générale dans aucune des deux classes. Elle est plus faible dans la classe B ou un élève sur 3 n'utilise jamais les commandes graphiques : zoom, trace et range.

La situation est inverse quand les élèves sont interrogés sur leur connaissance de la machine : neuf élèves sur 10 de la classe A et deux élèves sur 3 de la classe B déclarent ne pas bien en connaître les possibilités. En fait, il y a dans la classe B une minorité d'élèves qui sont des utilisateurs experts de leur calculatrice. En revanche, la classe A est plus homogène, les commandes avancées, par exemple graphiques, sont en cours d'instrumentation et posent des difficultés à la quasi totalité des élèves.

Ils sont plus nombreux dans la classe A (1/3) que dans la classe B (1/12) à avoir appris à se servir de leur calculatrice surtout avec le professeur. Cette différence se confirme quand on considère que 5 élèves sur 6 de la classe B n'ont pas eu d'initiation par le professeur l'année précédente, contre un sur deux dans la classe A. Cela confirme que dans la classe A, la calculatrice a été davantage été prise en compte dans l'enseignement.

On trouve seulement un élève de la classe B à ne pas souhaiter cette initiation : il s'agit d'un refus de la calculatrice qui s'exprime systématiquement sur tout le questionnaire. Pour cette initiation on trouve dans les deux classes les mêmes registres : fonctionnalités de base seules, fonctionnalités approfondies seules, et toutes les fonctionnalités.

Les élèves de la classe B n'ont pratiquement jamais rencontré de résultats leur semblant aberrants, alors qu'ils sont la moitié dans la classe A. Ces résultats ont surtout été rencontrés par les élèves de la classe A dans une utilisation graphique que les élèves de la classe B ont

été moins nombreux à pratiquer. Les élèves dans la classe B sont plus nombreux (1/3) que dans la classe A (1/6) à déclarer ne jamais vérifier leurs résultats.

Les opinions sur l'usage des calculatrices différent seulement sur l'utilité pour la préparation des contrôles : le taux d'adhésion est voisin de ½ dans la classe A, et de 1/3 dans la classe B. Cela peut sembler contradictoire avec l'utilisation plus marquée à la maison dans la classe B. Il faut comprendre que les élèves de la classe B se servent surtout de la calculatrice à la maison, mais n'en attendent pas nécessairement un apport important à la préparation des contrôles.

Pourtant, la quasi-totalité des élèves de la classe B a utilisé souvent sa calculatrice en contrôle, alors que c'est moins fréquent dans la classe A. Il faut croire qu'il ne s'agit pas d'un usage mettant en jeu des fonctionnalités avancées ou en relation avec des concepts mathématiques, puisqu'une préparation n'est généralement pas considérée comme utile.

Les utilisations d'outils généraux (traitement de textes, tableurs) sont peu différentes, bien que les élèves de la classe B soient nettement plus nombreux (1/2) que ceux de la classe A (1/5) à avoir suivi l'option informatique, participé à des ateliers ou à un club informatique.

Les utilisations déclarées de logiciels de mathématiques sont quasi-inexistantes dans la classe B, alors qu'elles existent dans la classe A et qu'elles sont probablement sous-estimées.

Les élèves de la classe B ont une représentation a priori très généralement favorable de ces logiciels qu'ils n'ont pratiquement pas utilisés. En revanche, dans la classe A qui a eu une utilisation effective, l'avis est plus mitigé : 1/3 des élèves pensent que, pour apprendre des mathématiques, les ordinateurs sont sans effet ou dangereux, et ils comparent plus volontiers ce que peut apporter l'ordinateur à ce qu'apporte le professeur.

Avec la TI92

Après un trimestre d'utilisation, les élèves des deux classes, dans leur majorité, déclarent se débrouiller moyennement avec la TI92. Dans les deux classes, ils sont un sur deux à avouer avoir rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser la TI92. Les raisons sont différentes dans les deux classes. Dans la classe A, on a rencontré des difficultés en tentant d'explorer des fonctionnalités de façon autonome. Dans la classe B, on incrimine la complexité de la machine ou l'approche du professeur. Ceci se confirme avec l'utilisation du manuel TI, bien plus fréquente dans la classe A.

L'utilisation des documents d'initiation distribués par le professeur a été peu fréquente dans les deux classes, ce qui montre que, dans les situations standard d'utilisation, la documentation n'apparaît pas vraiment nécessaire. Dans les deux classes, l'occasion majoritaire d'utilisation de manuel TI est la programmation.

Nous retrouvons donc l'instrumentation moins exigeante de la calculatrice dans la classe B. Dans la classe A, on rencontre des difficultés, on a l'impression de ne pas dominer la machine parce qu'on veut « en savoir plus », éventuellement de façon autonome. Dans la classe B, on s'en remet davantage au professeur.

Dans les deux classes, les élèves paraissent sensibles à ce qui fait de la TI92 un outil réellement nouveau, et non une « super calculatrice graphique », ce qui diffère des résultats que nous avions eus avec le logiciel DERIVE. On peut penser que les utilisations développées par les professeurs ont bien mis en évidence cette spécificité. La durée d'utilisation joue un

rôle également, puisque, dans l'expérimentation DERIVE, les élèves n'avaient, dans leur majorité, pas dépassé les quelques heures d'utilisation.

Dans les deux classes aussi, l'encombrement constitue l'inconvénient le plus généralement ressenti à ce moment de l'expérimentation.

Environ un élève sur 3, dans chaque classe, déclare avoir été surpris par des résultats obtenus par la machine. Ils sont un peu moins nombreux dans la classe B, et, dans cette classe, leur étonnement vient presque exclusivement de phénomènes inattendus rencontrés dans le module graphique (en particulier le tracé des discontinuités). Nous avions vu que les élèves de cette classe n'avaient pratiquement pas de pratique du graphisme de leur calculatrice, avant l'introduction de la TI92.

Les élèves de la classe A choisissent plus souvent « beaucoup » pour l'utilité en classe et en contrôle, et les élèves de la classe B choisissent plus souvent « beaucoup » pour l'utilité à la maison. Nous avions rencontré cette inversion pour l'utilisation de la calculatrice personnelle au premier contrôle. Elle est ici moins marquée, sans doute à cause de la progression de l'utilisation de la calculatrice en classe, avec le passage à la TI92, dans la classe B.

L'utilisation de la calculatrice rétroprojetable recueille un avis favorable dans les deux classes, mais les élèves de la classe B estiment dans leur majorité que « ça va trop vite ». Cette réserve montre bien le souci des élèves de la classe B, de « bien suivre » les explications du professeur, que nous avons observé lors des séquences de travail en classe.

Les opinions sont assez semblables dans les deux classes en ce qui concerne l'apport de la TI92 à la compréhension des mathématiques(1/3 des élèves) et l'intérêt et la facilité des maths avec la TI92 (en majorité reconnus). La possibilité de vérification est soulignée dans les deux classes. Dans la classe B, les élèves sont assez nombreux à souligner qu'avec la TI92, ils seraient moins « stressés », plus « sécurisés » en contrôle. Dans les entretiens et observations, nous avons pu constater que le « stress » en contrôle existe pour beaucoup d'élèves de la classe B : l'anxiété de ne pas réussir semble un élément important du rapport aux mathématiques dans cette classe.

Dans les deux classes 2/3 des élèves conservent dans leur calculatrice ce qui a été fait en classe. Il faudrait étudier pourquoi certains élèves ont perdu ou effacent le contenu des cours. Pour le reste, les élèves de la classe B conservent davantage des jeux et d'autres programmes, et moins des formules de mathématiques et d'autres disciplines. L'initiation spécifique à l'échange de données entre machines dans la classe B a donc été réinvestie par les élèves de cette classe plutôt dans une instrumentation « extra-scolaire ».

Le bilan

A la fin de l'expérimentation, dans les deux classes, le taux de "Plutôt satisfait" avoisine 2/3. Cependant la satisfaction est moins générale dans la classe B, qui a un seul "Très satisfait" (contre 7 dans la classe A) et 3 "Très insatisfait" (contre 0 dans la classe A). Cette insatisfaction relative de la classe B marque donc une déception, après les appréciations favorables portées sur les logiciels au premier questionnaire, puis sur la TI92 au second questionnaire.

On trouve dans les deux classes un éventail comparable de raisons d'apprécier mais aussi de ne pas apprécier la TI92. Les raisons de ne pas apprécier sont plus diverses que dans le second questionnaire. Les élèves se sont un peu habitués à l'encombrement de la machine, qui était le principal reproche avancé au second questionnaire, et on voit apparaître des raisons liées au

travail mathématique, principalement quand les résultats sont différents en P/C et sur la TI92 ou quand les simplifications ne donnent pas la forme escomptée. Cela explique la déception des élèves de la classe B, qui attendaient beaucoup de la possibilité de vérification : ils voient maintenant que c'est moins facile qu'ils ne l'imaginaient.

Dans les deux classes, la TI92 est vue comme ayant apporté peu de changements dans la quantité de travail. En ce sens, c'est un instrument maintenant banal.

En revanche, l'opinion dans les deux classes diffère quand il s'agit de la compréhension. On observe un net déplacement de la classe B vers l'opinion selon laquelle ils auraient compris davantage sans la calculatrice. Le taux d'adhésion à l'opinion dans la classe A est nettement supérieur à ce que nous avions trouvé dans la recherche DERIVE (0,51). Dans la classe B, il est inférieur à ce taux. On peut penser que, dès le départ, les élèves de la classe B voyaient plutôt dans la TI92 un outil de vérification, et que donc, ils n'en attendaient pas un apport décisif à leur compréhension.

La classe A reconnaît en majorité qu'elle aurait eu des résultats plus faibles sans la TI92, alors que la classe B voit peu de différence. Cela confirme ce que nous avions constaté avec DERIVE : pour apprendre avec une technologie, il faut que celle-ci apporte davantage à la compréhension.

De façon cohérente, les appréciations portées sur l'expérimentation sont moins favorables dans la classe B. Les différences les plus importantes portent sur :

- L'intérêt des activités (jugé très moyen dans la classe B et assez fort dans la classe A).
- La difficulté des problèmes (accord assez général dans la classe B, désaccord dans la classe A).
- L'apport à la compréhension (plutôt défavorable dans la classe B, plutôt favorable dans la classe A).

Le changement de point de vue sur la calculatrice est moins général dans la classe B (1/2) que dans la classe A (3/4). On reste plus souvent sur l'idée que c'est un outil de vérification sans réelle influence sur le travail mathématique.

Interprétation

Les données rapportées dans ce chapitre dressent un tableau assez différent de l'instrumentation de la TI92 dans les deux classes. Quels facteurs globaux dans chacune des classes sont susceptibles d'expliquer ces différences ? Pour les déterminer, nous synthétisons d'abord les principales caractéristiques de l'instrumentation dans chacune des classes.

La classe A semble assez homogène quant à l'utilisation des moyens technologiques, avec un souci général d'explorer les possibilités, de vérifier ses résultats. L'utilisation plus significative des moyens technologiques dans la classe A, pour les mathématiques, est confirmée par l'utilisation de logiciels. Il faut souligner que la prise en compte des calculatrices dans l'enseignement, qui se manifeste par une initiation faite par un professeur les années antérieures, est moyenne dans la classe A, alors qu'elle est quasi inexistante dans la classe B, comme dans beaucoup de classes. Elle semble bien préparer les élèves de la classe A à l'instrumentation de leur calculatrice personnelle puis de la TI92.

Les problèmes rencontrés par les élèves de cette classe avec leur propre calculatrice témoignent d'un début d'instrumentation des fonctions graphiques qui se poursuivra avec la TI92. Cette instrumentation de la TI92 se manifeste par exemple par l'exploration autonome des fonctionnalités. Les habitudes et techniques de vérification des résultats de la calculatrice, constatées avec la calculatrice personnelle, puis avec la TI92, font aussi partie de cette instrumentation que les élèves de la classe A ont généralement commencée.

La situation est plus contrastée dans la classe B. On y rencontre beaucoup de « néo-utilisateurs » dont l'équipement en calculatrice est récent et dont c'est la première calculatrice. Ils utilisent moins le graphisme, fonctionnalité nouvelle pour beaucoup d'entre eux. Il y a aussi des « utilisateurs chevronnés », déclarant connaître bien leur calculatrice, parmi lesquels, on trouverait certainement les 4 redoublants.

La participation à l'option informatique, à des ateliers ou à un club est plus importante dans la classe B. Elle ne paraît cependant pas avoir une influence importante sur l'utilisation personnelle de l'ordinateur par l'élève, et sur l'utilisation des fonctionnalités de la calculatrice.

Les élèves de la classe B se posent moins de questions sur les résultats obtenus avec leur calculatrice personnelle. C'est à mettre en relation avec le peu d'utilisation graphique qu'ils ont eu, et, avec la TI92, c'est dans ce domaine qu'ils ont en premier lieu des surprises. Il sont d'ailleurs assez prudents avec cette machine nouvelle et en explorent généralement peu les possibilités.

Dans l'utilisation quotidienne de la TI92, deux préoccupations apparaissent plus marquées dans la classe B, le temps et le « stress » : on pense que l'utilisation de la calculatrice rétroprojetée risque de conduire à un cours qui « va trop vite » ; on souligne la sécurité que l'on attend de la TI92 en contrôle. Cela reflète sans doute un rapport aux mathématiques spécifique à cette classe, qui a, semble-t-il, joué un rôle dans l'instrumentation de la TI92.

L'instrumentation est moins aboutie dans cette classe. Cela apparaît dès le second questionnaire avec les réponses plus faibles aux questions précises sur les fonctionnalités de la machine, alors même que les élèves ont une impression favorable sur la TI92. Cela se confirme au troisième questionnaire : la satisfaction globale est moins marquée dans la classe B et la différence est en effet particulièrement sensible dans le domaine de la compréhension. Les élèves de la classe A perçoivent l'influence de la TI92 sur la compréhension et sur leurs

résultats, alors que ceux de la classe B voient plutôt un effet négatif. Corrélativement, les activités sont plus souvent jugées difficiles ou peu intéressantes par la classe B.

En fait, ce qui transparaît dans les opinions de la classe B au bilan global, c'est la déception : on attendait beaucoup de la sécurité de la calculatrice dans les calculs, en premier lieu en contrôle, et les apports se sont révélés limités dans ce domaine. Par ailleurs, face aux difficultés d'utilisation en classe, auxquelles une instrumentation préalable de la calculatrice personnelle n'avait pas préparé, l'apport de la TI92 à la compréhension a été moins reconnu.

A travers cette étude globale de deux classes, nous percevons deux facteurs qui ont joué un rôle dans l'instrumentation de la TI92 :

- le début d'instrumentation d'une calculatrice graphique personnelle, favorisé par une prise en compte par l'enseignement les années précédentes, et l'utilisation de logiciels,
- le rapport aux mathématiques, semble-t-il assez différent dans deux classes où le rapport filles/garçon est lui aussi très différent.

Bien sûr, ces facteurs agissent de façon globale dans la classe, et il y a bien d'autres déterminants qui font de l'instrumentation de la TI92 une aventure personnelle à chaque élève, dont nous verrons quelques exemples dans l'exploitation des entretiens au chapitre suivant.

Partie III. Chapitre 2
Le suivi par entretiens

Le suivi d'élèves a pour objectif un accès plus fin que les questionnaires, aux processus personnels d'intégration de la calculatrice, en prenant en compte notamment la diversité des rapports possibles des élèves tant aux mathématiques qu'aux technologies informatiques. Seize élèves (neuf dans la classe A et sept dans la classe B) ont fait l'objet d'un tel suivi en 1995/96[1]. Pour tous ces élèves, nous avons effectué un dépouillement spécifique des questionnaires et du contrôle spécifique de fin d'année et organisé par ailleurs trois entretiens au fil de l'année à partir de la fin du mois de janvier. Dans la classe A, nous avons pu également disposer des copies des élèves pour un certain nombre de contrôles communs.

Dans ce chapitre, nous présentons successivement :

- Les critères de choix utilisés pour sélectionner les élèves, les élèves sélectionnés dans les deux classes et leurs profils au moment du choix.
- Les entretiens : présentation générale, objectifs précis et scénarios de chacun des trois entretiens dans les deux classes, puis résultats analyse et synthèse par entretien. Le troisième entretien porte notamment sur un contrôle spécifique à l'utilisation de la TI92 que nous avons organisé dans les deux classes. Le rapport sur cet entretien contient la présentation et les résultats de ce contrôle. Le texte et le corrigé de ce contrôle spécifique sont en annexes 1 et 2.
- Les résultats par élève : un portrait de l'évolution de chacun des 16 élèves observés est dressé à partir des éléments d'observation qui sont rassemblés en annexes 3 et 4.
- La synthèse des observations réalisées dans chaque classe par ce suivi.
- Un interprétation portant sur les processus d'instrumentation de la TI92.

1 Précisons qu'un suivi analogue a été réalisé en 1996/97. Les analyses correspondantes, encore en cours, ne sont pas prises en compte dans le présent rapport.

Les élèves suivis

Critères de choix

Le choix a été effectué à la fin décembre. Pour prendre en compte la diversité des rapports possibles aux mathématiques, nous nous sommes basés sur l'avis des enseignants et les notes du premier trimestre qui étaient alors disponibles. Pour prendre en compte la diversité des rapports possibles aux outils informatiques, nous avons utilisé comme critères l'avis des enseignants qui avaient eu l'occasion pendant un trimestre de travailler avec eux dans l'environnement des calculatrices graphiques ainsi que les réponses au premier questionnaire. Enfin, nous avons aussi cherché à croiser les catégories issues de ces deux premières dimensions avec la variable sexe.

Nous avons ainsi retenu des élèves représentatifs des différents niveaux rencontrés dans ces classes (sans prendre en compte cependant la catégorie des élèves très faibles), travaillant a priori de façon différente et ayant vis à vis des machines, des rapports allant de la méfiance à une certaine forme de dépendance.

Les élèves retenus et leurs profils

Ce sont donc neuf élèves pour la classe A- sept garçons et deux filles - et sept élèves dans la classe B - trois filles et quatre garçons.

Dans ce qui suit, pour faciliter la lecture, chaque élève sera désigné par son prénom, mais nous avons, pour des raisons de déontologie, modifié les prénoms.

Nous effectuons une présentation classe par classe des élèves à partir de leurs réponses au premier questionnaire. Des données plus complètes sur chaque élève, en particulier leurs résultats en mathématiques sont présentées à l'annexe 3 pour la classe A et à l'annexe 4 pour la classe B.

Les élèves de la classe A

Les neufs élèves suivis dans cette classe sont Anne, Charles, Georges, Gérard, Francis, Françoise, Michel, Serge et Vincent. Ils sont tous équipés d'une calculatrice graphique, Georges, Serge, Vincent, et Anne en disposent depuis plus d'un an. Georges est celui qui en a l'utilisation la plus systématique. Seuls Michel, Charles et Anne ont été aidés par leur professeur pour l'apprentissage de la calculatrice. Françoise attend du professeur une aide spécifique pour les tracés graphiques et Georges pour la programmation. Les autres élèves expriment des attentes plus vagues : « toutes les touches ».

Gérard, Charles et Anne ont obtenu des résultats graphiques surprenants. Michel, lui a été surpris pour des raisons de parenthésage. Serge a été parfois induit en erreur. Françoise, Michel et Francis vérifient souvent les résultats, Georges, Anne, Serge et Charles seulement parfois, et Gérard et Vincent jamais.

Seuls Vincent et Gérard expriment des réserves sur l'utilité de la calculatrice pour l'apprentissage des Mathématiques. Vincent pense que la calculatrice ne l'aide pas à résoudre les problèmes et Gérard estime que la calculatrice ne l'aide pas à préparer ses contrôles. Tous sont d'accord pour son utilité en contrôle, mais seul Gérard souligne avec franchise son utilité comme « aide-mémoire ».

Francis, Georges et Gérard ont un ordinateur chez eux, qu'il utilisent souvent . Leur utilisation des logiciels couvre le traitement de texte, le dessin, les tableurs et les jeux informatiques. Ils pensent que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques.

Anne, Françoise, Charles et Michel ont aussi un ordinateur chez eux. Ils l'utilisent moins souvent, essentiellement pour des jeux informatiques, ou du traitement de texte.

Serge et Vincent n'ont pas d'ordinateur et leur utilisation de logiciels se limite aux jeux.

Vincent et Michel sont les seuls à émettre des réserves sur l'utilisation de l'ordinateur pour apprendre des mathématiques

En géométrie, Serge, Gérard et Charles ont utilisé « le géomètre » ou « l'atelier de géométrie », et « dessiner l'espace » entre 3 et 10 fois. Ils les ont trouvés faciles d'accès et utiles à l'apprentissage de la géométrie.

Anne a un peu utilisé « l'atelier de géométrie » et « dessiner l'espace ». Elle les a trouvés faciles d'accès et y voit une aide possible à la compréhension. Françoise a la même opinion du « géomètre » qu'elle a cependant peu utilisé.

Georges, Vincent, Francis et Michel n'ont utilisé que le logiciel « dessiner l'espace ». Georges et Francis le trouvent utile pour l'apprentissage de la géométrie dans l'espace. Michel, lui, pense que « le professeur c'est mieux ». Vincent a rencontré des difficultés à cause de son manque de familiarité avec l'ordinateur.

Gérard a utilisé DERIVE en classe entre trois et dix fois pour résoudre des équations et des inéquations. Il pense qu'il n'est pas difficile à utiliser et utile car il permet de vérifier les résultats et de résoudre rapidement les exercices les plus difficiles .

Serge l'a utilisé en classe une ou deux fois pour illustrer le cours et chercher des exercices . Il pense lui aussi qu'il est facile à utiliser, utile car il factorise et développe lui-même.

Les sept autres élèves n'ont pas utilisé DERIVE.

En conclusion de cette présentation, Gérard et Georges ont un rapport très positif aux technologies informatiques. Ils disposent hors classe d'un environnement informatique et se sentent visiblement à l'aise avec ces outils.

Francis et Françoise ont un rapport positif aux technologies informatiques, et une certaine familiarité avec ces dernières, mais ont une faible pratique des logiciels de mathématiques et leur utilisation de la calculatrice graphique reste limitée.

Charles, Serge et Anne ont une opinion positive des technologies informatiques, mais ne font de ces technologies qu'un usage très modéré. C'est en particulier le cas de Anne qui a une calculatrice graphique depuis plus d'un an mais ne l'utilise que pour des calculs numériques.

Vincent et Michel ont un rapport plus nuancé vis à vis des technologies informatiques (réticences vis à vis des utilisations en contrôle, calculatrices jugées néfastes aux apprentissages) et une faible familiarité avec les environnements informatiques.

Si l'on se réfère aux catégories introduites par Trouche (1997) pour situer l'utilisation qu'ont les élèves observés des moyens technologiques dans leur pratique mathématique, on trouve deux « expérimentateurs » (Serge et Vincent), deux « théoriciens » (Georges et Francis), un « bricoleur » (Gérard), une « rationnelle » (Anne), un « scolaire » (Charles). Pour deux élèves (Françoise, Michel), il est difficile de choisir pour lui une catégorie précise.

Les élèves de la classe B

Les sept élèves suivis dans cette classe sont Alice, Franck, Jean, Julien, Marie, Pierre et Sabine. Ils sont tous équipés de calculatrices graphiques comme d'ailleurs tous les élèves de la classe. Alice et Sabine ont des modèles moins « haut de gamme » que les autres. Il s'agit pour tous sauf Pierre qui redouble et Alice d'un équipement récent. Franck, Julien et Pierre sont ceux qui ont l'utilisation la plus complète et la plus systématique. Alice Jean et Sabine se limitent eux aux utilisations les plus courantes. Alice et Sabine, par exemple, n'utilisent pas les possibilités graphiques de leur machine.

Comme les autres élèves de la classe, ils souhaitent une initiation aux calculatrices, Sabine et Alice plutôt une initiation basique, les autres désirant plutôt approfondir la programmation et le graphisme.

Tous les élèves sauf Alice vérifient parfois les résultats affichés par leur calculatrice. Sabine recommence, Marie, Franck, Julien refont à la main, Jean et Pierre ont des stratégies plus sophistiquées : ils refont d'une autre manière à la calculatrice.

Concernant l'utilité des calculatrices, ils ont des réponses similaires au reste de la classe. Alice, Franck et Julien sont les moins convaincus de l'utilité pour la résolution de problèmes, Pierre, qui redouble, est en revanche, le plus convaincu.

Ils sont favorables à l'utilisation des calculatrices aux contrôles et Alice est la seule de la classe à justifier cette opinion avec franchise par la possibilité de mémorisation de « choses principales ».

Tous, à l'exception de Julien, ont un ordinateur chez eux et l'utilisent, sauf Alice . Mais cette utilisation est très variable concernant les traitements de texte, logiciels de dessin et tableurs : Franck, Jean et Pierre sont des utilisateurs assidus, les autres utilisent peu l'ordinateur en dehors des jeux. Julien, Jean et Pierre sont les seuls à avoir suivi l'option informatique ou participé à un club informatique.

Tous sauf Alice trouvent les ordinateurs utiles pour apprendre des mathématiques, en arguant souvent des possibilités de visualisation offertes en géométrie. Alice, quant à elle, trouve les « ordinateurs plus rapides mais les maths meilleures à la main ».

Au vu de l'ensemble, Pierre et Franck semblent ceux qui ont l'utilisation des moyens informatiques la plus complète, Julien, Jean et Marie se situent dans la moyenne de la classe, Sabine et Alice semblent un peu en dessous, Alice ayant par ailleurs une opinion réservée sur leur utilité pour les mathématiques.

Les entretiens

Présentation générale

Passation

Le premier entretien a eu lieu fin janvier, début février 1996 dans la classe A, un peu plus tard dans la classe B. Les élèves disposaient alors de la TI92 depuis un à deux mois. Le second entretien a eu lieu en avril et mai, après les vacances de Pâques, le dernier au mois de juin à la fin de l'année scolaire.

Chaque entretien était d'une demi-heure, sans doute une durée trop courte pour ce qui était prévu. Chacun comportait systématiquement les parties suivantes :

1. des questions visant à conduire l'élève à préciser l'utilisation qu'il avait faite de la TI92, en particulier pendant le contrôle précédant l'entretien (en général la même semaine ou la semaine précédente),
2. une étude de fonction à mener avec la calculatrice rapidement (environ 15 minutes) pour nous permettre de cerner l'évolution de l'instrumentation de la machine dans cette tâche classique du niveau de la première S.

Bien sûr le temps court de l'entretien interdisait d'inscrire cette tâche dans une activité de modélisation, il s'agissait de l'étude tout à fait standard d'une fonction donnée par une expression algébrique. Nous rompions cependant avec la routine de la tâche en demandant dans les deux premiers entretiens aux élèves de commencer par un tracé graphique puis de confronter les résultats de l'étude algébrique aux caractéristiques de ce tracé (les fonctions étant choisies pour qu'une instrumentation graphique réduite produise des incohérences à ce niveau), dans le troisième entretien, en demandant à l'élève de formuler des conjectures sur les propriétés de la fonction à partir du tracé graphique puis d'essayer de les prouver.

Dans la courte discussion qui suivait le travail de l'élève, nous lui refaisions suivre rapidement le fil de sa résolution, en demandant éventuellement des précisions sur des actions que nous avions du mal à interpréter, puis nous essayions de l'aider à aller plus loin pour essayer de cerner ce qui lui était accessible avec les médiations limitées prévues.

Les entretiens étaient enregistrés. De plus, l'élève, pour l'étude de fonction, utilisait une calculatrice rétroprojetable reliée à une tablette qui nous permettait de suivre son travail, sans trop l'importuner. A partir du second entretien, il nous a été également possible d'enregistrer régulièrement des écrans de la calculatrice, reliée aussi à un ordinateur portable.

Ces conditions nous ont permis de suivre un nombre relativement important d'élèves, compte tenu des contraintes qui pesaient sur la réalisation des entretiens. Mais la durée d'une demi-heure est sans aucun doute trop courte pour permettre un travail dans de bonnes conditions. Suivant les élèves, suivant leur rapidité, les difficultés qu'ils rencontrent dans la phase d'étude de fonctions, on obtient des entretiens relativement disparates.

Les conditions de passation ont été semblables dans les deux classes, mais dans certains cas, les questions ont été adaptées pour tenir compte des différences dans l'avancement du cours dans les deux classes. C'est pourquoi le lecteur trouvera d'abord la présentation des questions posées aux élèves de la classe A, au début de chaque série d'entretiens, et l'analyse a priori correspondante. Au moment de rapporter les résultats des entretiens dans la classe B, les

différences dans les questions seront signalées, ainsi que l'analyse a priori dans la mesure où elle diffère de celle de la classe A.

Dépouillement

Les enregistrements des trois entretiens ont été dépouillés. A partir de l'ensemble des données recueillies- enregistrements, notes de l'observateur, brouillons des élèves -, une fiche a été constituée pour chaque élève rapportant ses réponses dans les différentes parties de chaque entretien.

Pour la partie étude de fonction, nous avons défini une « stratégie standard » prenant en compte les connaissances mathématiques ainsi que l'instrumentation disponibles au moment de l'entretien, et ceci dans le cadre de l'expérience partagée par les élèves au sein de la classe. Elle nous servait de référence pour situer les comportements réels observés. Puis, pour chaque élève, les rubriques suivantes ont été renseignées :

- « *Résolution* » : il s'agissait d'une reconstitution du travail de l'élève pendant la phase de travail autonome, à partir des données recueillies, ainsi qu'une description de son interaction avec l'observateur pendant la phase de discussion.
- « *Applications et commandes* » : pour chaque application de la TI92, nous répertorions les fonctions et instructions ayant été utilisées au cours de la résolution, en distinguant éventuellement dans la tâche différentes sous-tâches. Ceci devait nous permettre d'apprécier plus synthétiquement l'utilisation faite de la machine ainsi que l'articulation entre travail P/C et travail avec la TI92, systématiquement mentionnée dans cette rubrique.
- « *Techniques, stratégies développées* » : il s'agissait ici des techniques et stratégies utilisées par les élèves dans la résolution de sous-tâches clefs pour l'entretien considéré. Les données étaient synthétisées dans cette rubrique, non par rapport à la machine comme dans la rubrique précédente, mais par rapport à la tâche mathématique et à ses sous-tâches.
- « *Erreurs, difficultés* » : il s'agissait ici de synthétiser des parcours nécessairement différents selon les erreurs et difficultés recensées dans la phase de résolution autonome et la phase de discussion, en prenant en compte tous les types d'erreurs et difficultés rencontrés.
- « *Sensibilité aux incohérences* » : il s'agissait dans cette rubrique de prendre en compte une dimension que nous considérions comme essentielle dans l'instrumentation de la TI92 : la sensibilité des élèves aux incohérences éventuelles entre étude graphique et étude algébrique (qu'il s'agisse de résultats fournis par la machine ou produits en P/C), soit de façon autonome, soit avec la médiation de l'enseignant.

Entretien 1

Scénario de l'entretien

L'entretien est organisé en trois parties.

Partie 1 : utilisation de la TI92

Nous demandons d'abord à l'élève s'il a utilisé la TI92 en dehors du lycée la semaine précédente et si oui, combien de temps et pour quoi faire. Puis nous lui faisons préciser la façon dont il a utilisé sa TI92 au contrôle précédent. Dans la classe A, il s'agit de la partie

analyse du contrôle commun de la semaine précédente, plus précisément du problème devenu classique de la boîte fabriquée à partir d'une feuille de papier rectangulaire par enlèvement de quatre carrés. Nous demandons en conclusion de cette partie si, à son avis, la machine l'a aidé ou non et en quoi.

Partie 2 : étude de fonction

Dans la classe A, la notion de dérivée introduite fin décembre est une notion récente et les limites n'ont pas encore été travaillées. Dans la classe B, les limites ont été travaillées, alors que les dérivées n'ont pas été introduites.

Nous avons choisi de demander aux élèves des deux classes de travailler des fonctions rationnelles dont l'écriture est donnée sous la forme de la somme d'un polynôme et d'une fonction de type $x \to \frac{k}{x}$. Dans les deux classes, la mise en cohérence du tracé et de l'étude analytique de la fonction constitue l'objectif central. Comme les élèves de la classe A disposent de la dérivation et peuvent par conséquent faire une étude de variations, la fonction polynôme est du second degré. Ils étudient la fonction $x \to x(x+7)+\frac{9}{x}$. Pour les élève de la classe B, la mise en évidence de la non-définition en zéro, et des limites associées est l'objectif mathématique. Par conséquent, le polynôme est du premier degré. Ils étudient la fonction $x \to x-1-\frac{4}{9x}$. Les objectifs de l'étude différent donc légèrement d'une classe à l'autre et seront précisés dans le rapport relatif à chaque classe.

Les médiations prévues pour la phase de discussion sont de plusieurs types :

- si les élèves n'ont pas obtenu de tracé satisfaisant, leur demander s'ils ne peuvent pas utiliser les résultats de l'étude théorique pour trouver une fenêtre mieux adaptée ; si cela ne donne pas de résultat, proposer une fenêtre adéquate pour pouvoir poursuivre,
- si des contradictions n'ont pas été relevées, essayer d'attirer l'attention des élèves sur elles et voir comment elles sont perçues et formulées,
- si des contradictions sont perçues mais non résolues, essayer d'aider les élèves à les résoudre.

Partie 3 : mise en œuvre de diverses commandes

Cette partie est organisée sous forme de treize questions commençant toutes par : " Sais-tu avec ta machine faire . . . ". Les questions concernent des commandes de la machine rencontrées auparavant et plus ou moins fréquemment utilisées. L'élève répond en principe sans toucher la machine. S'il a un doute, il peut la consulter mais on ne lui laisse pas de temps réel de recherche.

Résultats et analyse

Lors de ce premier entretien, nous avons rencontré, dans la classe A, quelques problèmes d'enregistrement qui se traduisent par des points d'interrogation dans certains tableaux, lorsque le croisement des données recueillies ne nous permet pas d'assurer une reconstitution fiable. Ceci explique aussi l'absence dans les premiers tableaux d'information sur les réponses apportées par Anne. Dans la classe B, Pierre n'a pas participé aux entretiens.

Partie 1 : l'utilisation de la TI92

Classe A

Comme on le voit dans le tableau 1 ci-dessous, l'utilisation par la classe A en dehors des cours n'est pas intensive. Si les élèves ont utilisé de façon privilégiée l'application géométrie, c'est essentiellement parce qu'ils travaillent à ce moment là sur les barycentres et que l'enseignant avait fourni une macro permettant de visualiser la position du barycentre de deux points en fonction des valeurs des coefficients barycentriques, un programme avec animation qui avait eu beaucoup de succès et qu'ils utilisent pour anticiper et/ou contrôler les résultats des exercices donnés à faire à la maison.

Utilisation de la TI92 en dehors des cours de maths, la semaine précédente		
	Combien de temps ?	**Pour quoi faire ?**
Anne	?	?
Charles	Moins d'une demi-heure	Application GEOMETRY
Francis	Entre une et deux heures	Pour des petits calculs dans [HOME]
Françoise	Une demi-heure	Application GEOMETRY
Georges	Environ deux heures	* Application GEOMETRY * Recopier un programme pour le discriminant, qu'il avait sur son ancienne calculatrice
Gérard	?	?
Michel	Ne l'a pas utilisée	
Serge	Environ deux heures	* Programmation d'un jeu * Application GEOMETRY
Vincent	?	Calculs pour la Physique

Tableau 1 : Utilisation la semaine précédente classe A

Nous donnons ci-dessous (tableau 2) un résumé du travail effectué lors du contrôle commun[2] précédent, puis (tableau 3) les avis exprimés par les élèves à la question posée sur l'utilité de la TI92 pour ce contrôle. On voit clairement que la TI92 n'est pas perçue à ce moment là comme un instrument miracle. On voit aussi des relations évidentes entre l'appréciation donnée et ce qui ressort des portraits tracés au début de cette partie. La réponse de Michel est ici particulièrement significative.

Si l'on regarde plus en détail les réponses fournies dans cette partie, on voit que la machine a essentiellement un statut de vérification de résultats obtenus à la main et que l'application [HOME] est moyennement sollicitée. Dans la partie A du problème, la TI92 sert à vérifier le calcul de la dérivée, parfois à contrôler le tableau de variation (par tracé de f). Mais la plupart des élèves n'utilisent pas la machine pour trouver ou contrôler les zéros de la dérivée et ne font tracer le graphe qu'arrivés à la question correspondante. Ils font éventuellement tracer la tangente trouvée pour contrôler graphiquement la tangence. Dans la partie B, quand ils la traitent, la machine sert dans le calcul de V(5) et la factorisation. De plus, on notera qu'en dépit des affirmations d'aides à la vérification, des incompatibilités évidentes ne sont pas toujours repérées et exploitées.

[2] C'est-à-dire au contrôle commun aux différentes classes de l'établissement, donc non spécifique à l'utilisation de la TI92.

Anne	Nous ne disposons pas de l'enregistrement. Sa copie (7.5/20) montre une erreur dans le calcul des racines de la dérivée (les racines trouvées pour f' sont 360 et 1080), un tableau de variation incohérent avec le signe sur [0,10]. Il y a une erreur de signe dans le calcul de l'équation de la tangente. Le graphe est correct pour f, non pour la tangente, et cohérent avec le tableau de variation qu'il a dû servir à obtenir. La partie B est abordée : expression de V(x), calcul de V(5), sans détails de calcul.
Charles	Il vérifie son calcul de dérivée et ne trouve pas le même résultat. Il écrit les deux résultats puis continue avec son résultat P/C qui est en fait le résultat correct, l'autre étant nettement moins sympathique : $f'(x) = -120x^4+225$. Il utilise son autre calculatrice où il a implanté un programme pour trouver les racines de la dérivée. Il fait ensuite tracer la fonction quand il arrive à la question 5. Dans sa copie (3.5/20), le tableau de variation est faux bien que le signe de la dérivée soit correct, le graphe fourni est conforme au tableau. Il n'a pas fait la partie 2.
Francis	Il calcule la dérivée à la main puis, pour contrôler son signe, la fait tracer. Plus tard, il fait aussi tracer la tangente et tombe sur une contradiction car il a oublié que c'était f' et non f qu'il avait fait tracer. Il mettra un peu de temps à comprendre son erreur, ce qui explique sa réponse. Son utilisation est standard dans la partie B où il arrive à la question 4. Sa copie (13.5/20) est soigneusement rédigée mais ne comporte pas de graphique.
Françoise	Elle a d'abord fait le calcul de la dérivée à la machine et également fait tracer f. Ensuite elle travaille en P/C jusqu'à la question 5 où elle réaffiche le tracé. Elle ne s'en sert pas dans la partie B. Dans sa copie (7/20), il y a une erreur dans le calcul de la racine négative, le signe de la dérivée est correct à cette erreur près mais le sens de variation faux. L'équation de la tangente est correcte et il n'y a que la tangente tracée. Dans la partie B, l'expression de V(x) est trouvée mais les autres calculs sont faux.
Georges	Il a défini d'emblée la fonction à étudier, puis vérifié son calcul de dérivée avec la machine et enfin vérifié son tableau de variation en faisant tracer la fonction. Il fait aussi tracer la droite qu'il a trouvée comme tangente à la courbe et repère à cette occasion une erreur de calcul. Dans la partie B, il utilise la machine de façon standard. Nous n'avons pas sa copie.
Gérard	Il a travaillé beaucoup avec la machine : calcul de la dérivée, recherche des zéros et du signe (il a dit-il un programme qui le fait), utilisation de Table pour trouver des points pour le tracé, tracé de f pour voir l'allure. Dans la partie B, il dit avoir utilisé la fonction « maximum » de la calculatrice pour répondre à la question 5. Dans sa copie (8/20), les racines trouvées pour f' sont 360 et 1080, et le tableau de variation donne 250 et 0 pour les valeurs correspondantes de f. L'équation de la tangente est correcte ainsi que le tracé qui se trouve donc en contradiction avec le tableau de variation. Les calculs de la partie B sont faux.
Michel	Il s'est servi de la machine pour vérifier des calculs faits à la main : vérification du calcul de la dérivée (fonction entrée par *STO* de façon non contractuelle), contrôle du tracé, contrôle de la factorisation par développement. Sa copie (12.5/20) montre une erreur de calcul qui conduit à un discriminant négatif. Le tableau de variation donne donc une fonction croissante. Le calcul de l'équation de la tangente ensuite est correct ainsi que le tracé graphique, incompatible donc avec ce qui précède. Dans la partie B, il refait tous les calculs, ce qui lui évite de traîner son erreur et traite correctement toutes les questions jusqu'à la 4 incluse. La rédaction est très soignée.
Serge	Il s'est servi de la machine pour vérifier le calcul de la dérivée, puis contrôler son tableau de variation en faisant tracer f. Dans la partie B, il dit ne pas avoir bien compris ce qu'on lui demandait et avoir fait factoriser par la machine. Dans sa copie (13.5/20), le calcul des racines est confus et peu détaillé et on a l'impression qu'il a également utilisé la machine pour trouver les racines de la dérivée. Le tracé est peu soigné mais correct. La partie B est traitée jusqu'à la question 4. Les calculs ne sont pas détaillés, visiblement la machine a été utilisée.
Vincent	Il a fait d'abord les calculs à la machine (calcul de la dérivée, détermination de ses zéros) puis les a refaits à la main pour rédiger. Il fait tracer la fonction et sa tangente, trouve le résultat bizarre, incrimine la fenêtre, va dans Table pour trouver des valeurs et trace à partir des points correspondants. Il s'est arrêté au début de la partie 2. Dans sa copie (8.5/20), la factorisation de f' est donnée sans justification, le reste de la partie A est correct, le tracé étant peu soigné. Dans la partie B l'égalité $V(x) = f(x)$ est affirmée sur la base de l'expression factorisée de V(x).

Tableau 2 : Travail lors du contrôle commun classe A

Charles	*Je ne pense pas que ça m'a énormément aidé. Ca ne m'a pas gêné non plus
Francis	*On peut pas dire qu'elle m'a fait perdre du temps *Ca m'a perturbé, le temps de comprendre ce qui se passait
Françoise	Ca m'a servi à aller plus vite, à vérifier aussi
Georges	*Elle m'a aidé
Gérard	*Ca m'a aidé, surtout pour la partie A
Michel	*Elle m'a conforté dans ce que j'avais fait. C'est tout . . sans plus
Serge	*Ca m'a aidé à vérifier que mes résultats étaient justes

Tableau 3 : Utilisation au contrôle commun : avis global classe A

Classe B

Le tableau 4 ci-dessous résume l'utilisation de la TI92 la semaine précédente en dehors des cours parmi les élèves de la classe B. Le sujet la semaine précédente était les limites.

Parmi les élèves ayant peu ou pas utilisé :

- Sabine utilise seulement pour les devoirs à la maison, circonstance qui ne s'est pas présentée la semaine précédente.
- Julien n'a pas effectué de travail mathématique cette semaine là (semaine de vacances).
- Alice de même, mais elle a utilisé la TI92 "pour voir comment on programmait" à partir d'un jeu qu'on lui avait fourni.

Parmi les élèves ayant davantage utilisé

- Marie, Franck et Jean ont utilisé pour des exercices donnés en préparation. La TI92 leur a servi à vérifier leurs solutions.

L'utilisation de la TI92 parait donc liée aux habitudes de travail scolaire des élèves. Certains travaillent surtout au moment des devoirs maison, les autres cherchent les exercices donnés en préparation. Seule Alice déclare chercher les solutions d'abord à la TI92. Pour les autres, elle sert à vérifier.

En contrôle, parmi les élèves n'ayant pas profité de la TI92

- Jean a eu peur de perdre du temps, Sabine a essayé, cela lui a fait perdre du temps et elle a abandonné, Alice est plus à l'aise avec sa calculatrice habituelle.
- Franck utilise la TI92 mais aussi son ancienne machine sur laquelle il a l'habitude de faire "les petits calculs".
- Alice utilise encore son ancienne calculatrice en contrôle alors qu'elle en avait moins l'usage que d'autres élèves avant l'arrivée de la TI92. Il s'agit d'un indice de réticence à "investir" un instrument : on utilise seulement les fonctions de base et on a du mal à en changer.

Pour Marie et Julien, l'usage de la TI92 paraît plus "naturalisé" puisqu'ils ne se souviennent pas des occasions précises d'utilisation.

	Utilisation TI92 à la maison	Utilisation TI92 en contrôle.
Alice	Pour les limites, j'ai regardé les réponses (-)	Non, je préfère la mienne (CASIO graphique)
Franck	Faire des exercices, vérifier les limites (+)	Factorisations, développements. Le reste avec sa CASIO
Jean	Des exos, pour vérifier des calculs (+)	Non, manque de temps
Julien	Plutôt vérifier un résultat(-)	Je ne me rappelle plus bien pourquoi
Marie	Vérification de limites(+)	Je ne sais plus pour quoi faire
Sabine	Pour faire des calculs(-)	Essai et échec

Notes : Pierre n'a pas participé à cet entretien.
(-) : élèves déclarant avoir utilisé moins d'une heure.
(+) : élèves déclarant avoir utilisé plus d'une heure.

Tableau 4 : Utilisation en dehors des cours classe B

Partie 2 : étude de fonction

Classe A

Cette deuxième partie est consacrée à l'étude de la fonction $x \to x(x+7)+\frac{9}{x}$. On demande aux élèves d'entrer la fonction dans leur calculatrice, de la faire tracer, puis d'étudier les variations de cette fonction et de chercher si les résultats de cette étude sont cohérents avec le tracé obtenu. Si ce n'est pas le cas, il leur est demandé de pointer les incohérences et d'essayer de les résoudre. Il leur est précisé qu'ils n'ont pas à justifier en P/C les résultats fournies par la calculatrice, mais qu'ils peuvent utiliser pour leur résolution le papier et le stylo fournis. Ensuite nous faisons avec eux le point sur leur travail et essayons de tester l'effet de médiations en particulier en cas d'incohérences non repérées ou d'absence d'idées pour les interpréter et les dépasser.

La fonction est donnée sous la forme $x \to x(x+7)+\frac{9}{x}$ pour repérer si les élèves pensent à la nécessité de réintroduire un signe de multiplication entre les deux facteurs et, si ce n'est pas le cas, pour étudier leurs réactions face au message d'erreur reçu.

D'autre part, la fonction est choisie pour remplir un certain nombre de conditions :

- La fonction comporte une singularité en 0.
- La fenêtre de tracé initiale, correspondant à l'option *zoomdec*, soit à la fenêtre :

  [-11.9,11.9]x[-5.1,5.1] ne fournit pas un tracé satisfaisant puisque les extremums locaux obtenus pour x = -3, -1.5 et 2 ont des valeurs respectives de : -15, -14.25 et 17.
- L'étude du signe de la dérivée conduit à l'étude du signe d'un polynôme du troisième degré, alors que dans les exercices usuels à ce niveau, les élèves sont habitués à se retrouver avec des fonctions polynômes du premier et du second degré, pour lesquelles ils branchent des algorithmes connus,

- La TI92 fournit sans difficulté les zéros de ce polynôme et sa factorisation en facteurs du premier degré ; en revanche, bien sûr, elle ne résout pas l'inégalité $f'(x) > 0$.

L'obtention d'un tracé satisfaisant, l'étude du sens de variation de la fonction, le contrôle de la cohérence entre tracé et tableau de variation obligent donc une instrumentation suffisante de la calculatrice et une adaptation des méthodes et techniques utilisées dans les exercices usuels à ce niveau.

Nous présentons, en premier lieu, la « stratégie standard », ensuite les informations synthétiques correspondant aux différentes rubriques. Pour ce qui est des applications et fonctionnalités, nous avons distingué dans deux tableaux ce qui relève de la première phase de tracé et ce qui relève ensuite de l'étude du sens de variation et de la mise en relation tracés/sens de variation. Pour ce qui est des stratégies et techniques utilisées par les élèves, nous nous focaliserons sur celles utilisées pour étudier les variations de f, en particulier étudier le signe de f', passer à un tableau de variation, déterminer des valeurs particulières de f et de f'. Enfin, nous intéressant aux incohérences éventuelles, nous serons particulièrement sensibles à la non prise en compte correcte de la singularité en 0 et aux effets qu'elle peut produire.

Sous-tâches et stratégie standard

Nous distinguons dans l'étude de la fonction quatre sous-tâches.

1. Définir la fonction f

- Application :[HOME] : menu *F4*-1 (*Define*), taper $f(x) = x*(x+7) + 9/x$ puis [ENTER]

Bien sûr il ne s'agit pas de la seule façon d'entrer une fonction pour la tracer. On peut aussi aller directement dans l'application [Y=] ou utiliser la commande *STO* dans l'application [HOME]. En fait la définition est appelée ici par la question posée. De plus, cela a été une pratique institutionnalisée dans la classe, justement pour marquer la rupture, au moins partiellement, avec les pratiques liées aux calculatrices graphiques et marquer d'emblée l'importance de l'application de calcul formel.

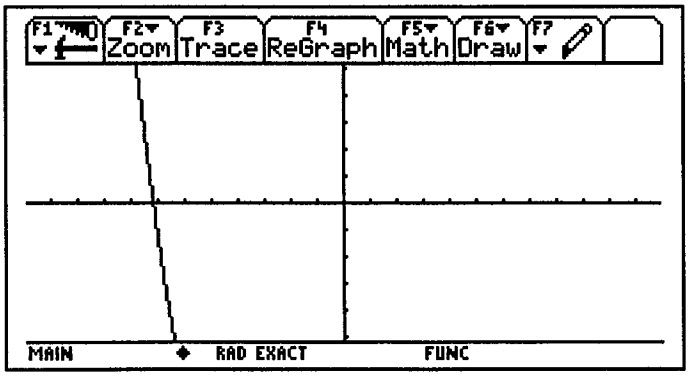
2. Tracer la courbe représentative de f

- Application [Y=] : ligne de commande y1(x) =, taper $f(x)$ et [ENTER]

L'élève peut aussi retaper l'expression de $f(x)$ mais c'est moins économique.

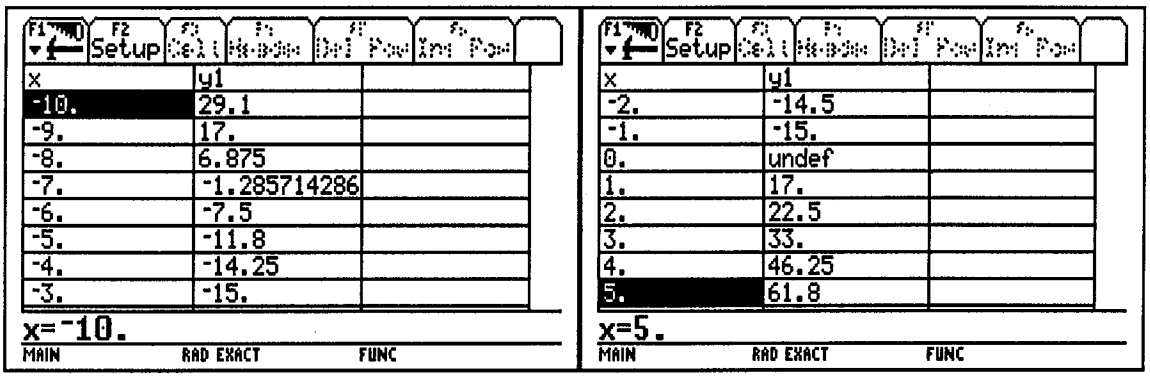
- Application [GRAPH]

Le tracé dans la fenêtre initiale, ici la fenêtre *ZoomDec* donne le tracé ci-après.

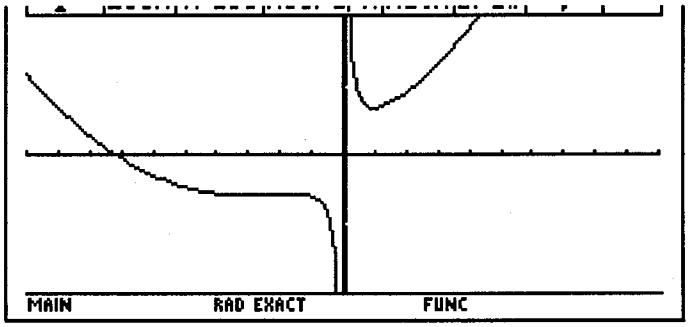


Le tracé est à l'évidence non satisfaisant, la fonction étant définie pour tout x non nul. On peut penser ici que l'élève sera tenté d'agrandir la fenêtre en passant directement à l'application [WINDOW] et en modifiant la fenêtre par essais et erreurs. Nous retenons comme stratégie standard une stratégie plus élaborée et tout à fait accessible aux élèves a priori.

- Application [TblSet] : fixer l'initialisation par exemple à -10, abscisse voisine du minimum dans la fenêtre initiale et laisser le pas à 1 (valeur initiale)
- Application [TABLE] : parcourir le tableau de valeurs jusqu'à 10, par exemple, pour couvrir l'intervalle du Range initial sur x, repérer les valeurs extrémales de $f(x)$ dans la table.



- Application [WINDOW]: ajustement de la fenêtre en fonction des valeurs trouvées, par exemple à [-10,10] x [-30,30]
- Application [GRAPH] pour obtenir le tracé suivant .



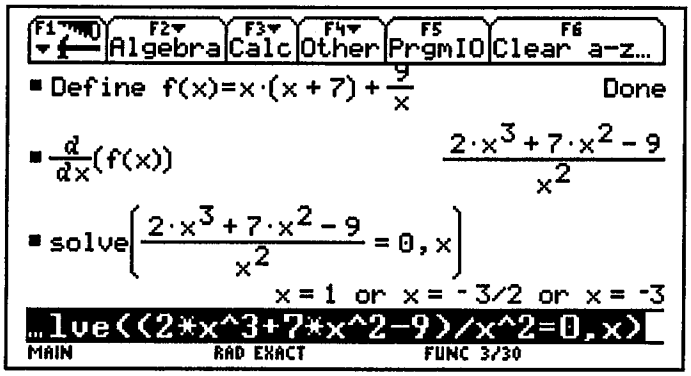
Une variante de la stratégie standard consiste à aller d'abord dans l'application [TABLE] et à ne repasser à l'application [TblSet] qu'en constatant que la valeur initiale de x est 0.

Une stratégie plus économique consisterait à faire un *ZoomFit* sur l'intervalle [-10,10] mais au moment où l'entretien a eu lieu, cette commande n'avait pas encore été introduite officiellement justement pour ne pas court-circuiter trop tôt le type de travail et d'articulation entre applications ci-dessus.

3. Calculer la dérivée et étudier son signe

- Application [HOME] : Menu *F3*-1 (*differentiate*) [ENTER], taper $f(x)$,x) puis [ENTER] - *Define* $df(x)$ - *Zeros*($df(x)$,x) ou *Factor*($df(x)$,x) ou *Factor* ($df(x)$)ou *Solve*($df(x)$,x)

Dans la stratégie standard, on utilise donc la différenciation formelle permise par la TI92, en utilisant le menu *F3* (plus souvent utilisée en classe que le raccourci *2nd*8). Pour la recherche des racines, trois commandes sont utilisables et du même niveau, nous ne les séparons pas dans la stratégie standard. On peut aussi faire factoriser ou chercher les zéros de l'expression sans définir la dérivée comme fonction (cf. ci-dessous).



- Travail P/C

Une fois les racines calculées, le plus simple consiste à étudier le signe de la dérivée en P/C, en faisant un tableau de signes et en incluant la valeur 0 pour laquelle la fonction dérivée n'est pas définie. C'est cette stratégie que nous retenons pour la stratégie standard.

4. Etude des variations

On s'appuie ensuite sur ce tableau de signes pour construire le tableau de variation de la fonction *f*.

x	$-\infty$	-3	-3/2	0	1	$+\infty$
x+3	-	+	+	+	+	
x+3/2	-	-	+	+	+	
x-1	-	-	-	-	+	
$f'(x)$	-	+	-	-	+	
$f(x)$	↘	↗	↘	↘	↗	

Il reste alors à déterminer les valeurs particulières correspondant aux extremums locaux, ce qui se fait très facilement via l'application [HOME]

- Application [HOME] : $f(-3)$; $-f(-3/2)$; $-f(1)$

On peut contrôler si on le souhaite en revenant au graphe de *f*.

Applications et commandes employées par les élèves

Pour les différentes sous-tâches, l'élève a recours à certaines applications et commandes. Elles sont répertoriées dans les tableaux 5 et 6 avec la légende suivante :

Légende :

(n) Utilisation n fois . L'absence de cette indication, signifie que l'utilisation s'est limitée à une fois. Dans la colonne GRAPH/[WINDOW], (n) désigne le nombre de fois où la fenêtre a été modifiée .

* L'élève définit une nouvelle fonction dans [Y=] (il s'agit alors automatiquement de la fonction dérivée)

¤ L'élève consulte l'application .

Cal Calcul numérique avec les opérations de base .

SD Sélection ou Désélection dans [Y=]

FI Fenêtre Initiale (dans cet entretien, ZoomDec)

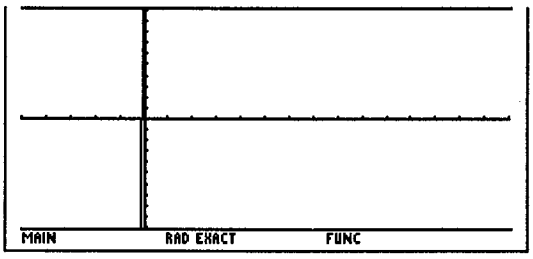
W Changement « manuel » de la fenêtre

g fonction 'numérateur' de la dérivée f'

L'indication « Types de tracés obtenus » désigne les types de tracés obtenus dans l'ordre chronologique, après chaque changement opéré dans l'application [WINDOW] . Entre les deux crochets, sont notés les portions de la courbe obtenues, conformément au découpage suivant :

[A]	Portion correspondant à x négatif sur le tracé standard.
[B]	Portion correspondant à x négatif complétant le tracé standard.
[C]	Portion correspondant à x positif

Toujours dans la même colonne, l'indication [O] désigne le tracé suivant obtenu pour la fenêtre [-5,15]x[-10,10], non prévu dans l'étude a priori :



Définir la fonction et tracer sa courbe représentative.

	HOME	[Y=]	[GRAPH] - **WINDOW types de tracés obtenus**	[TblSet]	[TABLE]
Anne	*Define*	*	FI [A] W [O] W [A]		
Charles		*	FI [A] W [A] ¤		
Francis		*	FI [A] W [AB]		
Françoise	*Define*	*	FI [A] W [A] W [ABC]		
Georges	*Define*	*	FI [A] W [AC] *ZoomOut* puis *ZoomBox* [ABC]		
Gérard	*Define*	*	FI [A] W [A]		
Michel	*Expand* *Define*	*			
Serge	*Define* *Graph*		FI [A] W [AB]		
Vincent	*Define*	*	FI [A]		
Standard	*Define*	*	FI [A] W [ABC]	Change de pas	¤

Tableau 5 : Fonctionnalités utilisées pour le tracé

Calculer la dérivée et étudier son signe.

Pour ce tableau 6, nous avons rajouté une colonne (P/C) dans laquelle toute application qui apparaît signifie qu'elle précède un passage en Papier/Crayon .

Exemple : si dans cette colonne on lit : [HOME] (2), cela s'entend : pour répondre à la question, l'élève est passé 2 fois de l'application [HOME] en P/C.

	[HOME]	[Y=]	[GRAPH]-[WINDOW] **types de tracés obtenus**	[TblSet]	[TABLE]	**P/C**
Anne	*d(* *Define g*	*	Courbes de f et de g ¤			[HOME] [GRAPH] (2)
Charles	*d(*	*	Courbes de f et f' W [AB] W [ABC] W [ABC]		¤ (2)	[TABLE] (2) [HOME]
Francis	*d(* *Factor* *Define*	*	Courbes de f et f' *F5-Max* *F5-Min* *Trace* *ZoomBox*	Change de pas	¤	
Françoise	*d(* Cal. *Solve*					[HOME](2)
Georges	*d(* *Define* *Zeros* $f'(-4)$ $f'(-2)$ $f'(0)$ $f(0)$ $f(0.5)$ $f(2)$ $f(-1)$	*	Courbe de f' *ZoomOut* *Trace* *ZoomBox*			[HOME](4)
Gérard	*d(* *Expand*		W [AC] W [ABC] W [ABC]		¤	[HOME] (2)
Michel	*d(* *STO* *Solve* (2)	* SD(2)	Courbes de f et f' Courbe de f FI [A] Courbes de f et f'		¤ (2)	[HOME](2)
Serge	*d(* *Define* *Graph* *Solve* (2)		Courbes de f et f' *Trace*	¤ Change de pas (2)	¤ (3)	
Vincent	*d(* *Define* *Zeros*	*	Courbes de f et f' ¤		¤ (2)	[HOME](2) [TABLE]

Tableau 6 : Fonctionnalités utilisées pour l'étude du sens de variation

Stratégies des élèves

Anne

- Calcul de f'
- Tracé de f et g.
- Lecture graphique à l'œil nu sur la courbe de g, pour trouver les racines et le signe de f'.

Charles

- Calcul de f'
- Parcours de [TABLE]
- Recopie d'un tableau de valeurs de f(x) en P/C, pour des x choisis en parcourant [TABLE], dans lequel il rajoute des flèches
- Tracé de la courbe de f' pour le contrôle du tableau
- Changement de fenêtre dans [WINDOW]

Francis :

- Calcul de f'
- Factorisation de f' (non utilisée ultérieurement)
- Tracé de la courbe représentative de f'
- Recherche des extremums sur la courbe de f (dans [GRAPH] à l'aide de *F5-Maximum* et *F5-Minimum*)
- Parcours de [TABLE] pour vérifier que $f'(-3) = 0$
- Contrôle dans [GRAPH] à l'aide de *ZoomBox* et *Trace* sur la courbe de f' .

Françoise

- Calcul de f' dans [HOME] (erreur d'inattention)
- Lecture graphique à l'oeil nu pour déterminer les variations de f
- Repérage de l'erreur
- Re-calcul de f' dans [HOME]
- Recherche des racines de f' en P/C, pour cause d'erreur : elle a considéré que la fonction g était un trinôme du second degré .

Remarque : pendant la résolution, Françoise fait deux erreurs : une erreur de recopie (elle a commencé à étudier les variations de x*(x+7) au lieu de celles de f(x)), cette erreur lui est indiquée au bout d'un moment par l'observateur et une erreur de reconnaissance de type d'équation (second degré au lieu du troisième degré - voir ci-dessus), ce qui a été coûteux en temps.

Georges

- Calcul de f'
- Recherche des racines de f' à l'aide de *Zeros*
- Détermination du signe de f' en prenant un nombre dans chacun des intervalles délimités par les racines de f' et en calculant la valeur de la dérivée en ce point.
- Tracé de la courbe de f' pour le contrôle du signe, avec utilisation de *Trace, ZoomOut* et *ZoomBox*
- Repérage de la singularité et contrôle dans [GRAPH] puis dans [HOME] (calcul de f(0))

Gérard

- Calcul de f'
- Transformation de l'expression de f' dans [HOME] avec *Expand*
- Détermination du signe de f' (alternance de signe, par analogie avec un trinôme du 2nd degré)
- Parcours de [TABLE]
- Lecture graphique
- Changements de fenêtre dans [WINDOW]

Michel

- Calcul de f'
- Tracé de la courbe de f'
- Recherche des racines de f' à l'aide de *Solve*
- Recherche du signe de f' :

  en cherchant une valeur pour laquelle f' est positive par :
  Solve($f'(x) = 2$, x), ce qui donne : x = 1,11562
  en déduisant que sur $[1, +\infty[$, $f'(x)$ est positive .
  en complétant alors le tableau de variation en alternant les signes, dans les intervalles déterminés par les zéros de f'.
- Parcours de [TABLE] pour le contrôle du signe de f'.

Serge

- Calcul de f'
- Parcours de [TABLE] avec deux changements du pas dans [TblSet] .
- Lecture graphique sur la courbe de f avec Trace
- Tracé de la courbe de f'
- Détermination des racines de f' dans [HOME] à l'aide de Solve

Vincent

- Calcul de f'
- Développement de l'expression de f en P/C
- Re-calcul de f' en P/C
- Recherche des racines de f' à l'aide de Zeros
- Parcours de [TABLE] pour l'étude du signe
- Tracé de la courbe de f' pour le contrôle du signe
- Repérage de la singularité lors du parcours de [TABLE].

Synthèse

Pour définir la fonction, tous les élèves ont utilisé *Define* à part Francis et Charles qui la définissent directement dans [Y=], ceci peut-être dans le but d'aller plus vite dans la résolution. Par ailleurs, Michel utilise *Expand* pour développer l'expression de la fonction. Charles est le seul à avoir oublié le signe * pour le produit de x par (x+7) mais il interprète tout à fait bien le message d'erreur reçu. Tous les élèves ou presque, semblent donc avoir intégré l'utilisation de *Define* pour définir une fonction et adoptent donc ici la technique standard.

Pour faire tracer la courbe tous les élèves redéfinissent la fonction dans [Y=], avant de la faire tracer dans [GRAPH], sauf Serge qui utilise la commande *Graph* dans [HOME]. Cette possibilité

avait en effet été présentée en classe mais peu utilisée. Par ailleurs, et à l'exception de Vincent et Michel, ils semblent considérer que la courbe tracée en *ZoomDec* est incomplète. Ce qui explique leur recours à l'application [WINDOW]. Cependant, deux élèves seulement ont réussi à obtenir la totalité de la courbe : Françoise, qui y est parvenue après deux heureux changements de fenêtre (en effet, elle ne doit sa réussite qu'à une démarche à tâtons), et Georges dont l'utilisation successive et efficace de *ZoomOut* et de *ZoomBox* témoigne d'un niveau d'instrumentation de la TI92 en avance par rapport à celui de ses camarades. Il est à remarquer que personne n'a utilisé les applications [TblSet] et [TABLE], il y a donc là une divergence certaine par rapport à la stratégie que nous avons définie comme standard.

D'une part donc, le fait de définir une fonction avant de la faire tracer est, dans ce travail autonome comme en classe, la stratégie usuelle. D'autre part, et sans doute pour des raisons de contrat didactique implicite, presque tous les élèves ont réagi à la représentation graphique de la fonction f en *ZoomDec*. Ils ont eu recours au changement de fenêtre dans [WINDOW] avec des réussites très partielles (excepté Georges). Leurs stratégies de " pêche " ne sont visiblement pas dans ce domaine réellement efficaces et la stratégie alternative décrite dans la stratégie standard n'est visiblement pas disponible.

Pour étudier le sens de variation de la fonction f, les élèves n'utilisent pas majoritairement la stratégie standard. Pourtant tous sauf Anne, Gérard et Charles vont utiliser l'application [HOME] pour faire calculer les zéros de la dérivée ou même la faire factoriser. Mais seuls Georges et Michel vont exploiter cette information, en se basant sur le théorème en acte : la dérivée change de signe à chacun de ses zéros et, entre deux zéros, elle est de signe constant. Si l'on excepte le cas particulier de Françoise, les autres élèves vont soit directement, soit après détermination des zéros de f', utiliser des méthodes basées sur l'utilisation de l'application [GRAPH] ou de l'application [TABLE] ou des deux. On notera l'utilisation par Francis des commandes *Maximum* et *Minimum* de l'application [GRAPH], non encore introduites en classe, le tracé par Anne de la représentation graphique de la fonction correspondant au numérateur de la dérivée, pour lire graphiquement son signe, l'utilisation par Vincent à la fois du graphe de f' et du tableau de valeurs de f'. On notera également que Georges et Michel vont eux aussi recourir à l'application [GRAPH] (tracé de f') pour contrôler le travail effectué dans l'application [HOME] et que Michel effectuera de plus un contrôle par l'application [TABLE]. De plus, les observations de résolution laissent penser que l'utilisation des deux applications [GRAPH] et [TABLE] relève plus souvent davantage du tâtonnement que d'une stratégie stable.

Tout ceci témoigne de la fragilité des connaissances mathématiques que la majorité d'entre eux pouvait avoir à cette époque de l'année et qui sont sous-jacentes à une bonne instrumentation de la TI92 .

Prise en compte de la singularité en x = 0 :

Georges prend conscience de la singularité en cherchant la valeur de la dérivée en 0. La TI92 renvoie -∞. Il regarde alors l'expression de la fonction, passe à l'application [GRAPH], se déplace le long du graphe de f par *Trace*, puis repasse dans [HOME], demande la valeur de $f(0)$. La TI92 renvoie *undef*. Georges repasse alors en P/C et écrit sur sa feuille « $f(x)$ pas définie en 0, définie sur R* », puis rajoute au tableau de variation déjà tracé, la valeur 0 et la double barre. Françoise, lorsqu'elle note la valeur de la dérivée trouvée à la machine sur sa feuille, rajoute $x \neq 0$. Ensuite elle perdra beaucoup de temps dans l'étude du signe et lorsqu'elle ébauchera un tableau de variation, elle n'y inclura pas la valeur 0. Vincent, Charles, Michel, Serge et Gérard découvrent la singularité presque accidentellement en parcourant [TABLE].

Anne et Francis, quant à eux, ne la remarqueront pas de façon autonome. Mais même si la majorité des élèves a repéré la singularité, il n'y a que Georges et Vincent qui ont intégré cette information à leur tableau de variation. Il est clair qu'à ce moment là de l'année, les élèves ne sont pas sensibles à l'existence d'une singularité à la seule vision de l'expression de la fonction. De plus, même si la singularité est repérée, elle n'est pas pour autant intégrée au tableau de variation, en dépit des contradictions que cela peut engendrer : la fonction est décroissante sur [-3/2,1] et la valeur en 1 est supérieure à la valeur en -3/2, par exemple.

Le temps de discussion ensuite est visiblement trop court pour permettre de lever les contradictions, lorsque l'observateur aide les élèves à en prendre conscience.

Classe B

Tâche et sous-tâches

Comme dans la classe A, cette deuxième partie est consacrée à l'étude d'une fonction. Pour les raisons indiquées ci-dessus, il ne s'agit pas de la même fonction, ni exactement de la même tâche. On demande ici aux élèves d'étudier $x \to x-1-\frac{4}{9x}$.

Les sous-tâches sont les suivantes :

1. Entrer la fonction dans leur calculatrice.
2. La faire tracer.
3. Chercher les points où la courbe traverse l'axe des x.
4. Etudier ses limites.

Comme dans la classe A, on leur demandera si les résultats des calculs sont cohérents avec le tracé obtenu. S'ils le souhaitent, ils peuvent faire les calculs en papier crayon pour vérifier.

La fonction est donnée sous la forme $x \to x-1-\frac{4}{9x}$ pour repérer si les élèves pensent à la nécessité de parenthéser le $9x$ au dénominateur. On sera particulièrement attentif à leur capacité à contrôler leur définition en vérifiant le tracé obtenu. En effet, une erreur de parenthésage conduit à définir la fonction affine $x \to x-1-\frac{4}{9}x$. Cette erreur n'est pas toujours détectée à l'entrée dans l'application [HOME]. Dans l'application [GRAPH], elle conduit à l'affichage d'une droite, quelque soit le zoom, ce qui devrait permettre de remettre en cause l'entrée.

D'autre part, cette forme conduit à étudier la limite de sommes de fonctions pour différents cas de figures simples à contrôler par le raisonnement. On cherchera donc à voir comment s'exerce ce contrôle sur des limites obtenues à l'aide de la TI92.

Les objectifs de chacune des sous-tâches indiquées ci-dessus sont donc les suivants :

1. Maîtrise de la syntaxe d'entrée des expressions en particulier, passage du registre des expressions fractionnaires P/C au registre des expressions parenthésées de la ligne d'entrée de la TI92.

2. Capacité à coordonner les propriétés graphiques et algébriques de la fonction. On veut voir particulièrement si les élèves sont capables de remettre en cause une erreur de parenthésage à la vue du graphe d'une application affine.
3. Résolution d'un problème se ramenant à la résolution d'une équation du second degré, et pouvant s'envisager dans le registre algébrique P/C, TI92 et graphique.
4. Mise en oeuvre des connaissances nouvelles sur les limites. En particulier, on veut vérifier d'abord si les élèves sont capables de justifier par un raisonnement les valeurs des limites obtenues avec la TI92 et s'ils coordonnent les valeurs des limites qu'ils trouvent ainsi et leur interprétation des branches infinies du graphe.

Travail des élèves

Nous l'analysons en fonction des quatre objectifs définis ci-dessus.

Syntaxe d'entrée de la fonction.

Alice	x-1-4/9x [STO▸] f(x)
Franck	x-1-4/9x dans la base de fonction
Jean	x-1-4/9*x [STO▸] y(x)
Julien	x-1-4/(9*x) [STO▸] f(x)
Marie	x-1-4/9*x [STO▸] f(x)
Sabine	x-1-4/9 x [STO▸] f

Comme on le voit dans le tableau, Franck est le seul à utiliser la base de fonctions. L'énoncé oriente les élèves vers le module [HOME], mais cette utilisation ne leur est pas familière. La base de fonction est sans doute associée à l'idée de tracé, plutôt que de définition. L'erreur de parenthésage attendue se rencontre chez tous les élèves sauf Julien.

Coordination algébrique/graphique.

A l'exception de Julien, les élèves obtiennent le tracé d'une droite, conséquence de l'erreur de parenthésage. L'observateur leur demande si ce tracé est "normal". Voici leurs réponses.

Alice	a = 1 et b = -1-4/9x
Franck	Normal, le a (de ax +b)ce serait -9/4+1 et b serait -1
Jean	Non, avec 4 divisé par 9x, on aurait pu douter. Il faut mettre des parenthèses
Marie	Normal, quand il y a un zéro au dénominateur, ça fait zéro
Sabine	Normal, parce qu'il n'y a pas de carré dans f

Seul Jean met en doute la droite obtenue et corrige le parenthésage. Pour les autres élèves, il faut une incitation forte de l'observateur. La traduction graphique de la discontinuité en zéro semble peu disponible.

Problème du second degré dans différents registres.

La séquence proposée dans l'énoncé était l'étude graphique puis algébrique TI92, puis papier/crayon, mais l'observateur indiquait qu'on pouvait choisir l'ordre des recherches.

Trois élèves sur 6 (Jean, Franck, Julien), suivent cette démarche. Dans le travail de ces élèves, on relève des confusions entre le calcul de $f(0)$ et la recherche de la valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$. La tâche est cependant bien menée dans les registres graphiques et symboliques TI92. Les élèves font le lien entre les valeurs approchées lues sur le graphique et les valeurs exactes de la résolution symbolique. En P/C, ils transforment l'équation $f(x) = 0$ en une équation du second degré.

Marie cherche d'abord en P/C. Elle trouve deux solutions fausses suite à une erreur algébrique. Elle lit ensuite sur le graphique. Puis, sollicitée par l'observateur, elle résout l'équation à la machine. Constatant des solutions proches des valeurs observées, elle ne revient pas sur la résolution P/C.

Sabine fait seulement les deux premières étapes, ne semblant pas intéressée par la résolution PC

Alice lit seulement les valeurs sur le graphique et se révèle incapable de faire la traduction algébrique.

Ainsi, seule Alice reste sur une résolution graphique. Les autres élèves sont capables de poser la résolution algébrique sur la TI92. Certains d'entre eux (Jean, Franck, Julien) sont capables de transformer l'équation obtenue en équation classique du second degré.

Mise en oeuvre des connaissances sur les limites.

Limites en +-infini

Marie, Jean et Alice utilisent seulement la machine. Pour Jean et Marie c'est dû au manque de temps, ce travail se situant en fin d'entretien. Alice semble ne pas pouvoir obtenir la limite par raisonnement.

Franck utilise d'abord la machine puis justifie par addition de limites sur sollicitation. Julien travaille en P/C puis vérifie à la machine.

Sabine ne cherche pas ces limites.

Limites en zéro

Tous les élèves commencent par entrer l'expression donnant la limite en zéro dans la machine et obtiennent *undef.*

Marie, Jean, Julien et Franck modifient l'expression pour avoir la limite à droite puis à gauche.

Sabine ne comprend pas la réponse *undef* . Pour elle, la limite est -1. En effet, 4/(9x) étant "indéfini" devrait compter pour 0 dans la somme.

Alice passe en P/C et écrit lim 4/(9x) = 0 puis s'arrête.

Interprétation graphique de la limite en zéro

Sabine et Marie pensent que la limite est nulle, car les branches se rapprochent de zéro.

Julien pense que les limites sont moins l'infini en zéro moins et plus l'infini en zéro plus, car il suit les branches de la courbe à partir de zéro et observe ainsi les limites en +- infini.

Les autres élèves n'ont pas été sollicités sur ce point par manque de temps.

Seuls Franck et Julien utilisent les propriétés algébriques des limites pour calculer et vérifier les limites en +-infini. Aucun élève ne tente un raisonnement pour les limites en zéro. Le registre symbolique de la TI92 est donc, pour les élèves, la plus sûre référence en ce qui

concerne les limites, particulièrement pour la discontinuité en zéro. Le résultat *undef* et l'écriture des limites à droite et a gauche facilitent l'accès à ce type de discontinuité. Par contre, ces limites ne sont pas du tout disponibles sous leur aspect graphique.

Partie 3 : mise en oeuvre de diverses commandes

Voici ci-dessous les questions posées dans cette partie et les réponses attendues. Nous n'avons pas pris en compte deux questions prévues initialement sur le déplacement dans l'écran et la recopie sur la ligne de commande, les manipulations des élèves pendant la phase de travail autonome nous ayant montré qu'elles correspondaient à des savoir-faire techniques partagés par tous.

Question	Réponse
Comment effacer l'écran [HOME] ?	*F1*-8 (*Clear Home*)
Comment effacer la mémoire ?	par [MEM]- *F1 Reset* ou [VAR-LINK]-*F1-Delete* pour effacer des fichiers précis.
Comment donner la valeur 5 à la variable x ?	5 *STO* x
Comment libérer ensuite la variable x ?	*F4-DelVar*
Comment libérer toutes les variables ?	*F6*
Comment obtenir un résultat sous forme approchée ?	en appuyant sur [♦][ENTER]si on est en mode exact ou automatique, [ENTER] sinon.
Comment changer d'application ?	par [APPS] ou par [♦] pour les applications accessibles par cette touche : [HOME], [Y=], [GRAPH], [TABLE], [TblSet]
Comment partager l'écran en 2 ?	par [MODE]-*F2*-SplitScreen et appuyer deux fois sur la touche [ENTER]
Comment passer d'une sous-fenêtre à une autre ?	par 2nd [APPS]
Comment créer un nouveau répertoire ?	par *F4*-B (*NewFold*)
Comment fixer le répertoire de travail ?	par [MODE]-*Current Folder*
Comment sauver son travail dans un fichier ?	par *F1*-2 (*Save*)
Comment ouvrir un fichier existant ?	par [APPS]-9 (*Open*)

Classe A

Le tableau 7 ci-après donne les résultats de cette partie. Les cases marquées d'une croix signifient que la réponse standard a été donnée. Quand cette réponse standard est tout de même inscrite, c'est que l'élève a eu besoin de consulter la machine.

Comme on le voit, la plupart des questions obtiennent des taux de réussite très importants, la plupart des élèves n'ayant d'ailleurs pas à consulter la machine pour les fournir. C'est le cas pour les questions : 1, 3, 5, 6, 8, 10 et 11 et 12 et, un petit peu moins de 7. Les questions moins réussies concernent toutes des fonctions encore peu utilisées comme créer un nouveau répertoire, ouvrir un fichier existant, voire mentionnées mais non utilisées comme effacer la mémoire, passer d'une sous-fenêtre à une autre.

	Anne	Charles	Francis	Françoise	Georges	Gérard	Michel	Serge	Vincent
Effacer l'écran [HOME]	*F1*-8	x	x	x	x	x	x	x	x
Effacer la mémoire	*F6*	[VAR-LINK]	*F6*	Ne sait pas	Ne sait pas	x	Ne sait pas	x	*F6*
Donner la valeur 5 à la var. x	x	x	x	Ne sait pas	x	x	x	x	x
Libérer ensuite la var. x	*F1*-7	Ne sait pas	Ne sait pas	Ne sait pas	0 *STO* x ou x *STO* x ou DelVar x	DelVar x	*F6*	x	*F6*
Libérer toutes les variables	x	x	x	Ne sait pas	x	x	x	x	x
Résultat sous forme approchée	x	x	x	x	* [ENTER] ou dans [MODE]	x	*F2*-5	x	x
Changer d'application	* [HOME]	x	x	x	x	x	[MODE] - Current Folder puis * [HOME]	[APPS] - [HOME] OU * [HOME]	Ne sait pas
Partager l'écran en deux	x	x	[MODE]-*F2* SplitScreen	x	[MODE]-*F2* SplitScreen	x	Ne sait pas	x	x
Passer d'une sous-fenêtre à une autre	Ne sait pas	?	x	Ne sait pas	Ne sait pas	x	x	Ne sait pas	x
Créer un nouveau répertoire	[APPS]	?	Ne sait pas	[APPS]-9 New	[VAR-LINK] *F1*-5 ou *F4*-B	*F4*-B ou [APPS]-9New	Ne sait pas	x	x
Fixer le répertoire de travail	Ne sait pas	?	x	x	x	x	x	x	x
Sauver dans un fichier	x	x	x	x	x	Ne sait pas	x	x	x
Ouvrir un fichier existant	[APPS] - 9New	x	[VAR-LINK] se place sur fichier puis [ENTER]	[APPS]-9Open	x	[APPS]-9Open	[MODE] Current Folder	x	Ne sait pas

Tableau 7 : Réponses à la partie 3 de l'entretien 1, classe A

Classe B

Certaines questions n'ont pas été posées, car elles correspondaient à des savoirs déjà vérifiés dans l'entretien.

	Sabine	Marie	Jean	Franck	Julien	Alice
Effacer l'écran [HOME]	x	x	x	x	x	x
Effacer la mémoire						
Donner une valeur à une variable	hésite	Ne sait pas	x = ...	x	x	x
Libérer une variable	?	?	?	?	x	?
Libérer toutes les variables	x	x	x	x	x	?
Changer d'application	x	x	x	x	x	x
Partager l'écran en deux	x	x	x	x	x	?
10. Créer un nouveau répertoire	x	x	x	x	x	?

Synthèse du premier entretien

Que se dégage-t-il de ce premier entretien ?

- Tout d'abord, tous les élèves ont pris en main la machine, y compris ceux qui pouvaient paraître réticents. Mais les différences dans l'instrumentation sont déjà sensibles et ne reflètent pas complètement les seules différences de rapport aux machines ou les seules différences de niveau mathématique. Elles intègrent sans aucun doute les deux dimensions à la fois. Par exemple, dans la classe B, Sabine, Marie et Alice ont des utilisations limitées et rencontrent le plus de difficultés, alors que leur réussite mathématique est très différente.
- Une utilisation à la maison peu intensive, étroitement liée au travail scolaire et aux habitudes de travail des élèves..
- Une utilisation en contrôle à des fins de vérification principalement, sans que cette fonction de vérification soit toujours efficacement gérée et une opinion positive mais réaliste sur l'aide effectivement apportée dans ce contexte par la mise à disposition de la TI92. Certains élèves préfèrent encore la calculatrice numérique précédemment "instrumentée".
- Une instrumentation pour l'étude des fonctions qui est encore très limitée sauf exception. Les élèves savent utiliser l'application [HOME] pour définir une fonction, calculer sa dérivée, trouver ses zéros ou la factoriser. Mais il s'agit là de ce que nous serions tentés de qualifier d'instrumentation de niveau 1 : on connaît des commandes et on sait les exploiter mathématiquement dans la mesure où elles donnent directement la réponse demandée. En particulier, il semble bien que la plupart des élèves de la classe A n'aient pas réellement perçu l'intérêt de la recherche des zéros de la dérivée ou même de la factorisation de son expression algébrique. Dans une situation où cette recherche ne s'inscrit pas dans la réalisation d'un algorithme connu, ils ne savent pas exploiter les informations fournies par la machine. Les techniques et instrumentations des calculatrices graphiques qui se sont mises en place avant l'introduction des dérivées pour l'étude des fonctions : exploitation des tracés graphiques et de l'option *Trace*, exploitation des tables de valeur, sont des techniques qui restent encore très dominantes. On notera d'ailleurs leur extension au niveau de la fonction dérivée f' qui sous-tend la plupart des stratégies développées par les élèves. Dans les deux classes, la perturbation causée par l'introduction d'une singularité n'est pas plus facilement surmontée par les élèves. Visiblement, ils notent la non-définition de la fonction mais ne perçoivent pas ses répercussions possibles sur son graphe, ses limites ou

ses variations. Ils ne disposent pas de techniques pour cela. On voit bien, à travers cette perturbation volontairement introduite, jusqu'à quel point l'instrumentation efficace de la TI92 est dépendante des connaissances mathématiques élaborées par les élèves.

- En ce qui concerne la gestion des représentations graphiques, il apparaît que la plupart des élèves de la classe A ne disposent pas de moyens efficaces pour obtenir un tracé satisfaisant si la fenêtre standard ne le fournit pas. Ils procèdent par essais et erreurs de petite amplitude, ce qui ne change pas fondamentalement la situation dans le cas présent. Cette gestion des graphiques reste dans le cadre des deux applications [GRAPH] et [WINDOW] et ne met pas en jeu les applications [HOME] et [TABLE], dont la seconde en particulier peut fournir des moyens efficaces de piloter les changements de fenêtre de représentation.. les élèves de la classe B ne rencontrent pas ces problèmes, la représentation obtenue dans la fenêtre standard étant d'emblée significative, mais ont les plus grandes difficultés à interpréter graphiquement les branches infinies en zéro.
- Quand on fait le point, en partie 3, sur les fonctionnalités de la TI92, les manipulations les plus courantes dans la fenêtre [HOME] apparaissent bien intégrées par tous les élèves, ainsi que la touche de changement d'application. Quelques élèves ignorent les fonctions de gestion de l'écran et de la mémoire. Ils sont plus nombreux à ignorer les fonctions de gestion des variables.

Bien sûr, tout ce qui précède doit être relativisé aux conditions de l'entretien et au faible temps dont ont disposé les élèves pour effectuer la tâche demandée. Nous pouvons cependant en conclure que les tâches proposées dans chacune des classes sont loin d'être devenues routinières, même en excluant la question de la singularité, et que la possession d'une TI92 dont on connaît les commandes susceptibles d'intervenir ici ne diminue pas substantiellement leur difficulté.

Entretien 2

Scénario de l'entretien

L'entretien était organisé en deux parties.

Partie 1 : Instrumentation de la TI92

Dans la classe A, cette partie comportait trois questions, l'une sur l'appropriation de la machine dans son aspect "stockage de données", les deux autres sur l'utilisation de la TI92 en contrôle commun et pendant les vacances.

Pour des contraintes de temps, la première question a été posée seulement à certains élèves de la classe B, et les deux autres n'ont pas été posées dans cette classe.

Première question : on demandait à l'élève : « Peux-tu montrer ce que tu as mis en mémoire dans la TI92 et comment tu l'as organisé ? ». S'il y avait des activités faites en classe, on demandait lesquelles, s'il y avait des jeux, on demandait s'ils avaient été copiés ou programmés, s'il y avait des programmes, on demandait des exemples, s'il y avait des formules de maths ou d'autres disciplines, on demandait lesquelles. Il était prévu le cas échéant de récupérer les fichiers correspondants.

Deuxième question : on demandait à l'élève de préciser, comme dans le premier entretien, comment il avait utilisé la machine pendant le contrôle commun n°5 qui portait sur la fonction

f définie par $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+2}{x^3+1}$ et on faisait conclure par une appréciation générale sur l'aide éventuelle apportée par la machine.

Troisième question : on demandait à l'élève s'il avait utilisé sa calculatrice pendant les vacances de Pâques et si oui, combien de temps approximativement et pour quoi faire.

Partie 2 : étude de fonction

Les élèves de la classe B disposaient des dérivées au moment de l'entretien, et donc une étude de variations est demandée dans les deux classes en suivant un schéma analogue à celui du premier entretien dans la classe A. Comme la classe A avait vu les limites, l'étude inclut la recherche des limites de la fonction et d'une asymptote.

La fonction étudiée dans la classe A est $x \to \dfrac{x^2-2x-14}{x+1}$.

La fonction étudiée dans la classe B est $x \to x-1+\dfrac{1}{100x}$.

Résultats et analyse

Partie I : Instrumentation de la TI92

Classe A

Première question

Anne	Elle a rentré en mémoire beaucoup de fichiers sans créer de répertoires. Ils concernent les maths (calcul du discriminant, exercices, énoncés de théorèmes, activités faites en classe). Elle ne programme pas elle-même. Elle a également copié un jeu.
Charles	Il n'a rien sauvegardé en dehors des sauvegardes faites en classe. En 3D, il a reproduit un graphique du manuel pour s'amuser et l'a gardé. Dans le questionnaire 2, il avait coché les rubriques : travaux de classe et formules de maths.
Francis	Il n'a rentré que ce qui avait été fait en classe et ne compte pas s'en servir. Il déclare préférer utiliser sa propre calculatrice qui est celle qu'il aura l'an prochain.
Françoise	Elle a entré deux fichier : dans le premier, elle a écrit l'énoncé d'un théorème, dans le second une figure pour montrer à une copine comment la machine fonctionnait.
Georges	Il a sauvegardé certains TP et des macros ainsi que des dessins réalisés tout seul. Il dispose de trois répertoires main, bary (pour barycentre) et documents (pour les dessins géométriques). Main est rempli en vrac de formules par exemple somme et différences de cubes, formules de trigonométrie, de fichiers correspondant à des activités faites en classe, de travaux personnels sur axes et coordonnées. Il a entré pour la physique les masses molaires de différents corps et le tableau de Mendeleiev ainsi que divers renseignements. Il a transcrit un programme de calcul du discriminant d'une équation du second degré qu'il avait sur sa Casio. Il n'a pas mis de jeux en mémoire.
Gérard	Il a créé un répertoire « jeu » où il a programmé un jeu. Dans le répertoire Main, il a un programme pour le calcul du discriminant, un fichier avec les codes des touches, des formules de maths et de physique. Il ne garde pas ce qui est fait en classe.
Michel	Il n'y a pas de répertoire créés, il ne garde pas systématiquement ce qui est fait en cours. Il n'avait pas rempli la rubrique correspondante du questionnaire 2.
Serge	Il avait rentré des jeux et des programmes de maths (calcul du discriminant), des macros de barycentre, des formules de maths et de physique puis il a tout effacé car il ne les utilisait pas. Il n'est pas sûr de remettre des choses en mémoire.
Vincent	Il a rentré en mémoire des fichiers correspondant aux différentes rubriques proposées dans le questionnaire 2 mais ne programme pas. Sa machine contient des jeux qu'il a copiés.

Ces réponses attestent de l'existence de décalages certains entre les élèves mais aussi d'un niveau d'instrumentation moyen limité. En particulier, les élèves, à deux exceptions près, n'ont créé aucun répertoire pour structurer la mémoire de leur machine. Les programmes mathématiques rentrés, quand il y en a, se résument au programme de calcul du discriminant d'une équation du second degré. L'entrée de programmes de jeux n'est pas non plus majoritaire. Peut-être faut-il voir là la marque du fait qu'il ne s'agit pas de leur calculatrice

propre et il sera intéressant de comparer avec d'instrumentation que développeront en classe de terminale ceux qui disposeront l'année suivante d'une TI92 à eux..

Deuxième question

Dans le problème d'analyse du contrôle, la TI92 pouvait essentiellement aider à produire ou contrôler la factorisation de $g(x)$ (question A2), à calculer et vérifier les limites en -1 et $+\infty$, la dérivée, à prévoir ou contrôler l'allure de Cf et sa position par rapport au droites D et Δ, enfin à trouver les coordonnées de points de Cf. Elle compliquait plus qu'elle n'aidait la résolution de l'équation $f(x) = 2$. Une fois reconnue l'équation de la tangente horizontale, la factorisation de $f(x) - 2$ pouvait aider à étudier la position de la tangente par rapport à la courbe mais le tableau de variation déjà construit fournissait toutes les informations nécessaires à la résolution.

Nous ne disposons pas des copies de ce contrôle et ne connaissons que la note globale concernant les deux parties : analyse et géométrie. La moyenne de la classe est ici de 12.2. Nous ne pouvons donc pas confronter les déclarations des élèves à leurs productions écrites comme nous l'avions fait pour le premier entretien.

Anne (note 12.5) :	Elle a d'abord défini la fonction et l'a faite tracer. Elle a effectué la factorisation et le calcul de la dérivée d'abord à la machine, en revanche elle a effectué les deux calculs de limite à la main et a ensuite vérifié avec la TI92. Elle a utilisé l'application [TABLE] à la fois pour le tracé de f et pour celui de Δ dit-elle.
Charles (10.5) :	Il a fait peu d'analyse car il a commencé par la géométrie. En analyse, il a commencé par la partie B car il sentait qu'il savait faire. Il a utilisé la calculatrice pour trouver la limite en -1, ensuite il a fait le b) à la main et s'est arrêté là.
Francis (17.5) :	Il n'a pas du tout utilisé sa calculatrice.
Françoise (12.5) :	Elle dit s'être beaucoup servie de la machine. Elle a d'abord fait tracer la courbe, ensuite elle a utilisé la machine pour factoriser g, pour vérifier les calculs de limites, de dérivée et elle a aussi utilisé [TABLE] pour tracer Cf.
Georges (17.5) :	Il a effectué la factorisation et les calculs de limites d'abord à la machine et ensuite à la main « pour bien détailler, bien rédiger ». Il a utilisé aussi la TI92 pour vérifier le calcul de la dérivée et l'application [TABLE] pour aider le tracé.
Gérard (14.5) :	Il a d'abord défini la fonction sans la faire tracer et a utilisé la machine pour vérifier la factorisation de g. Il l'a aussi utilisée pour vérifier les calculs de limites et de dérivée. Il a résolu l'équation à la machine et enfin a utilisé [TABLE] pour tracer Cf.
Michel (16.5) :	Il n'a utilisé la machine que pour vérifier (limites, signe de f', tracé de Cf).
Serge (14.5) :	Il a d'abord fait tracer la courbe puis a utilisé la calculatrice pour vérifier la factorisation, la limite en 1, les asymptotes et le calcul de la dérivée.
Vincent (13.5) :	Il a d'abord défini la fonction sans la faire tracer. Il a fait la factorisation et le calcul de la limite en -1 d'abord à la machine, le calcul de la limite en ∞ d'abord à la main. Pour contrôler le signe de f', il s'est servi de [TABLE], il s'est aussi servi de [TABLE] et du tracé pour le tracé de Cf.

La TI92 a donc, ici encore, une fonction de vérification essentiellement. Visiblement les élèves ne cherchent pas à l'utiliser systématiquement dans toutes les questions et par exemple un seul d'entre eux va résoudre l'équation $f(x) = 2$ avec la machine. Suivant les questions en revanche, l'ordre : calcul machine - calcul papier/crayon est variable et ceci indépendamment

du niveau mathématique des élèves. L'application [TABLE] est presque toujours utilisée pour soutenir le tracé. Elle résiste chez Vincent comme outil de contrôle du signe de la dérivée. Un élève enfin, Francis, n'utilise pas du tout la machine et Michel dans l'entretien marque bien qu'il ne l'a utilisée que pour vérifier, ce qui est tout à fait conforme à ses réponses aux questionnaires.

Troisième question

L'utilisation pendant les vacances est faible : Michel, Charles, Françoise et Vincent n'ont pas du tout utilisé la machine, Serge a juste pris la machine pour faire le ménage et tout effacer. Seuls Georges, Francis et Gérard déclarent l'avoir utilisée un peu :

- Georges, pour un exercice de trigonométrie qu'il n'arrivait pas à faire à la main : montrer que l'équation $\cos x - x = 0$ a une solution dans R. La machine lui a donné une solution 0.789, dit-il, mais il ne sait pas comment la retrouver à la main,
- Francis, pour faire les exercices,
- Gérard, pour faire les exercices et programmer un jeu.

Ces données confirment donc celles issues du premier entretien : la machine est avant tout liée à la réalisation du travail scolaire en mathématiques, encore moins utilisée pendant les périodes de vacances que dans le temps scolaire usuel.

Classe B

Voici le contenu des machines des trois élèves interrogés sur ce point, ainsi que son organisation et les difficultés rencontrées.

	Programmes	**Texte**	**Organisation**	**Incident**
Alice	Jeux (ne s'en est jamais servi)	Chimie	« Je suis paumée »	
Julien	Equations des tangentes (donné) Macro barycentre (fait) Jeux (perdus)	Physique	Pgm et macro dans MAIN.Folder PHYSIQUE et TANG (tangente ?)	Perte des données. Pas de sauvegarde.
Pierre	Équation de tangente, compter les points au tarot, Jeu de poker		Répertoire tarot, répertoire tangente, répertoire pratique	

On constate un grande différence entre Pierre et Julien d'une part, et Alice d'autre part. Les premiers stockent des programmes qu'ils utilisent et ont même développé pour certains. Alice garde seulement ses "antisèches" de chimie. Elle a aussi chargé des jeux des calculatrices d'autres élèves, mais n'a pas réussi à les utiliser. Pierre est le plus organisé, avec des sous-répertoires thématiques.

Partie 2 : Etude de fonction

Classe A

Dans cette partie, on demande aux élèves d'étudier la fonction définie par l'expression algébrique : $f(x) = \frac{x^2-2x-14}{x+3}$ suivant un schéma analogue à celui du premier entretien, mais prenant en compte cette fois l'étude des limites de la fonction, les élèves ayant à déterminer eux-mêmes en quels points ils estiment nécessaire de chercher les limites éventuelles de la fonction. La fonction est choisie pour présenter les caractéristiques suivantes :

- Le tracé correspondant à la fenêtre standard ne permet d'obtenir qu'une partie de la courbe représentative de la fonction, celle correspondant à x>3 et le trait de liaison peut alors être pris pour le début de la courbe,
- La fonction admet un maximum et un minimum local (en -2 et -4, de valeurs respectives -6 et -10). Ces valeurs sont calculées par la machine qui factorise aussi la dérivée en $\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$.
- La courbe représentative de la fonction admet une asymptote verticale d'équation x = -3, et une asymptote oblique au voisinage de l'infini. La machine calcule les limites à gauche et à droite en -3, à condition de spécifier correctement ces limites, et les limites en $-\infty$ et $+\infty$. Les élèves n'ont pas encore rencontré d'asymptotes obliques, l'existence d'une telle asymptote peut cependant être inférée du tracé graphique dans une fenêtre convenable et justifiée en mettant la fonction sous la forme $\frac{1}{x+3}$ + x-5, ce que permet notamment l'utilisation de la commande *Expand* dans l'application [HOME].
- Selon les fenêtres utilisées, le tracé de la fonction a des allures différentes : pour la fenêtre standard, comme nous l'avons dit, il est très incomplet, si l'on effectue un *ZoomFit* à partir de la fenêtre standard soit sur [-10,10], la courbe obtenue a une allure cohérente avec l'étude théorique ; si l'on effectue le même *ZoomFit* à partir de l'intervalle [-5,5], la courbe semble présenter une asymptote horizontale : l'axe des abscisses.

Quelques médiations sont prévues pour la discussion :

- si l'élève n'a pas obtenu un tracé satisfaisant et en est convaincu, lui demander si l'étude théorique ne lui suggère pas une fenêtre plus adaptée,
- si l'élève considère l'asymptote comme une partie de la courbe, faire comparer aux résultats de l'étude algébrique du sens de variation et aux calculs de limites éventuels, et de manière générale, aider à repérer les incohérences éventuelles entre tracé et étude algébrique,
- aider l'élève à explorer la situation au voisinage de l'infini en lui faisant analyser le tracé et en lui proposant éventuellement la forme de *f* obtenue par utilisation de *Expand*.

Comme pour l'entretien 1, nous allons proposer successivement une stratégie standard destinée à servir de référence pour l'analyse, puis des informations détaillées sur les applications et commandes utilisées par les élèves, ainsi que sur les méthodes et techniques utilisées pour les trois sous-tâches suivantes :

1. tracé du graphe de la fonction

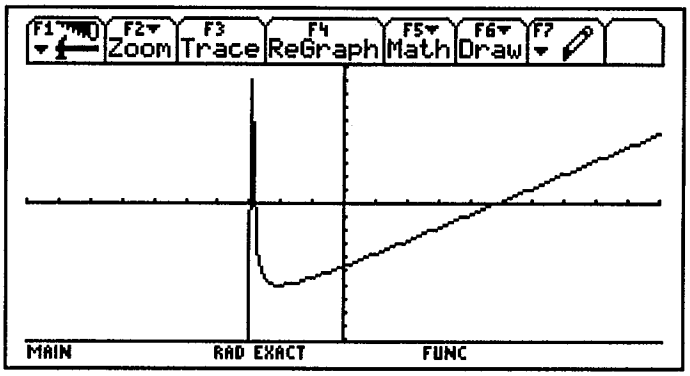
2. étude du sens de variation de f
3. choix des points de calcul de limites et détermination des limites aux points choisis.

Nous ferons ensuite une analyse synthétique de ces données.

Sous-tâches et stratégie standard

Tracer la courbe représentative de f

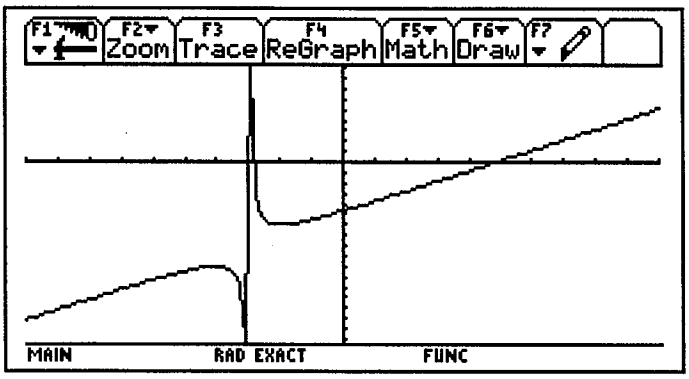
- Définition dans l'application [HOME] de la fonction, entrée dans [Y=], via $y1(x) = f(x)$, passage à l'application [GRAPH] pour le tracé dans la fenêtre standard. Le tracé obtenu n'est pas satisfaisant.



Compte tenu du fait que les élèves ont déjà utilisé la commande *ZoomFit* plusieurs fois en classe et pris conscience de son intérêt, nous intégrons cette utilisation dans la stratégie standard, au lieu d'utiliser l'application [TABLE] comme dans le premier entretien pour trouver une fenêtre satisfaisante.

- Application [GRAPH] ou [WINDOW] : *F2-A ZoomFit* puis [GRAPH] éventuellement.

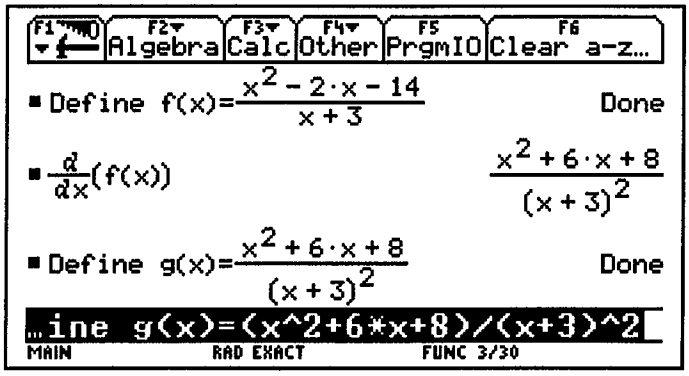
On obtient alors le graphe suivant :



Question 2 : Etudier le sens de variation de f

La stratégie standard est pour cette question analogue à celle de l'entretien 1:

- Calcul de la dérivée dans l'application [HOME], définition de la dérivée par *F4-Define*, recherche des zéros de la dérivée par l'une des commandes : *Zeros(d f(x),x), Factor(d f(x),x) ou Solve(d f(x) = 0,x)* ou recherche directe des zéros.



Le numérateur étant un polynôme du second degré, la recherche des zéros de la dérivée est tout à fait accessible aux élèves en papier/crayon, mais vu les fortes contraintes de temps de l'entretien, nous privilégions dans la stratégie standard l'utilisation de la machine. Notre choix pourrait être différent s'il s'agissait de décrire la stratégie standard dans une situation de contrôle où la rédaction de l'élève ne devrait pas conserver de traces de l'utilisation de la TI92.

- L'étude du signe de la dérivée se fait ensuite en P/C et compte tenu des techniques développées à propos des trinômes du second degré, nous optons pour le raisonnement suivant : le signe de f' qui est définie pour $x \neq -3$, est celui de son numérateur, le dénominateur étant toujours positif (carré). Ce numérateur est un trinôme du second degré admettant deux racines -4 et -2, il est donc du signe du coefficient de son terme en x^2, c'est à dire positif, à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

On peut penser que certains élèves court-circuiteront ce raisonnement et utiliseront le théorème en acte déjà rencontré dans l'entretien 1 : le signe de la dérivée est constant entre deux zéros et change à chaque zéro. Ceci conduit à la stratégie suivante : calculer $f'(x)$ pour un x simple, par exemple ici x = 0 qui n'est ni zéro de la dérivée, ni singularité, à la main s'il s'agit de 0, via l'application [HOME] si la valeur de x est moins judicieusement choisie, et en déduire le signe de f' sur R-{-3}

On en déduit ensuite, dans les deux cas, le tableau de variation :

x	-∞		-4		-3		-2		+∞
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
		↗		↘	‖	↘		↗	

Pour trouver les valeurs des extremums, on utilise l'application [HOME] .

- Application [HOME] : $f(-4) - f(-2)$

Etudier les limites de f

La seule singularité étant en x = -3, on a donc à déterminer les limites éventuelles en -3, en -∞ et +∞. Dans la stratégie standard, nous prévoyons l'utilisation de la commande *limit* de l'application [HOME], avec pour le cas de x = -3, le passage éventuel par la commande simple de limite qui renverra le résultat *undef*.

- Application [HOME] :

limit (f(x),x,-3) *undef*

limit (f(x),x,-3,1) -∞

limit (f(x),x,-3,-1) +∞

limit (f(x),x,-∞) -∞

limit (f(x),x,+∞) +∞

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation x = -3. A l'infini, on peut penser que, sans sollicitation particulière, les élèves n'iront pas plus loin.

Applications et commandes employées par les élèves

Par souci de clarté, toutes les informations de cette rubrique relatives à chaque élève ont été réunies en tableaux. Nous avons construit deux tableaux en regroupant les sous-taches. La légende est la même que pour le premier entretien.

Faire tracer la courbe représentative de f

	[HOME]	[Y=]	[GRAPH] [WINDOW]	[TblSet]	[TABLE]	P/C
Anne	*Define*	*	*ZoomStd* puis *ZoomFit* sur [-5,5]			
Charles		*	FI (*ZoomStd*)			
Francis		*	FI (*ZoomDec*) puis *ZoomFit*			
Françoise	*Define*	*	*ZoomStd*			
Georges	*Define*	*	FI (*ZoomStd*) puis *ZoomFit*			
Gérard	*Define*	*	FI (*ZoomStd*) puis *ZoomFit*			
Michel	*Define*	*	FI (*ZoomStd*)		¤	
Serge	*Define*	*	FI (*ZoomStd*) ¤	Change de pas	¤ (3)	[TABLE]
Vincent	*Define*	*	FI (*ZoomDec*) puis *ZoomStd*			

Tableau 8 : Commandes utilisées pour la définition et le tracé

Pour la bonne compréhension du tableau, précisons d'une part que Michel s'arrête sur la fenêtre standard, malgré l'utilisation de [TABLE], d'autre part que l'étude de Serge est complexe. En effet, il obtient d'abord le tracé standard puis passe à l'application [TABLE], fait défiler à partir de x = -6 (valeur résultant du dernier entretien, non modifiée par l'observateur), repasse au tracé standard, puis de nouveau à [TABLE], écrit « f(x) n'est pas définie pour x = -3 », passe dans [TblSet] pour modifier la valeur initiale : -3 et le pas : 0.1, explore dans [TABLE] le voisinage de -3 puis s'arrête et passe à [HOME] pour le calcul de la dérivée.

On note une évolution évidente depuis le premier entretien, liée à l'intégration de la commande *ZoomFit* : quatre élèves suivent en effet cette fois la stratégie standard décrite plus haut, tandis que cinq s'arrêtent sur la fenêtre standard. On ne note pas non plus d'essais à tâtons de modification de la fenêtre. Deux élèves ont recours à l'application [TABLE] mais visiblement n'en tirent pas parti au niveau graphique, un élève améliore son tracé en passant de la représentation en fenêtre *ZoomDec* à la représentation en fenêtre *ZoomStd* et s'arrête là, les deux autres passent tout de suite au calcul de la dérivée.

Etudier le sens de variation et les limites de f

Remarque: Au cours de la résolution de cette question, Francis a utilisé la commande *Clear a-z* avant de traiter la question, ce qui explique la présence des deux cases le concernant dans le tableau 9 suivant.

	[HOME]	[Y=]	[GRAPH] [WINDOW]	[TblSet]	[TABLE]	P/C
Anne	*d(* *Define g* *Zeros* *limit* (3) Cal. *f*(-4) *f*(-2)		¤ (4) W		¤	[GRAPH] (2) [HOME] (2)
Charles	*Define* *d(* *Cal.*(2)		¤ (3)			[HOME] (3) [GRAPH] (2)
Francis	*d(* *Define* *f'*(-4),*f'*(-2) *f'*(-3)	* SD ¤ (2)	Courbes de *f* et de *f'* Courbe de *f'*			[HOME] [GRAPH]
Francis **(Après** ***Clear* a-z)**	*Define* (2) *d(* *limit* (7)	* (2) SD	Courbes de *f* et de *f'* Courbe de *f* *Trace*			¤ [HOME]
Françoise	*d(* Cal. (2) *limit* (5)			¤	¤	[HOME] (5)
Georges	*Define d(* *Zeros* *f'*(0) *f'*(10) *f*(-4), *f*(-2) *f*(-10),*f'*(-10) *limit* (4) *f'*(-3),*f*(-3) ¤		¤ (3) *Trace*			[HOME] (5) [GRAPH]
Gérard	*d(* Cal. (3) *f*(-4) *f*(-2) *limit* (5)		¤ (2)		¤	[HOME] (5) [GRAPH] (2)
Michel	*d(* Cal. *Define g* *Solve* g(-3) *limit* (3)		¤ (3)		¤ (2)	[HOME] (5) [TABLE]
Serge	*d(* *Define* *Zeros* *f'*(-3) *limit* (5)	* (2)	Courbes de *f* et *f'* ¤ (3) *ZoomFit* Droites y = -10 et y = -6 W			[HOME] (7) [GRAPH]
Vincent	*d(* ¤ *f*(-3) *f*(-4) *f*(2) ♦≈ *limit* (3)					[HOME] (3)

Tableau 9 : Utilisation des commandes dans l'étude du sens de variation

Stratégies des élèves

Anne

- Calcul standard dans [HOME] de la dérivée, définition du numérateur comme fonction $g(x)$, recherche de ses zéros, recherche des limites en -∞, +∞ et 0.
- Passage à [GRAPH] et tracé de la fonction f
- Passage en P/C et début de rédaction ; expression de la dérivée. signe du dénominateur, calcul du discriminant puis s'arrête car elle ne sait plus comment calculer les racines. Au bout d'un moment, aide de l'observateur et elle retrouve les racines données par la machine, ce qu'elle constate. Début du tableau de variation avec mention du signe de f' ; -3 n'apparaît pas.
- Passage à [GRAPH], regarde le tracé puis met les flèches sur le tableau de variation.
- Calcul en [HOME] de $f(-4)$ et $f(-2)$, ajout des valeurs au tableau de variation.
- Passage en [GRAPH], puis en [WINDOW], et diminue la valeur de *ymin* : *ymin* = -30 (*ymax* = 55).
- Elle remarque alors que le tracé ne correspond pas au tableau de variation
- Passage à [TABLE] : En la parcourant, elle repère la singularité en -3.

Dans la discussion, Anne précise qu'elle a calculé les racines à la main car, de toute façon, en contrôle il faut faire le détail et qu'à la fin, pour choisir le nouveau *ymin* elle a regardé les valeurs données par le *ZoomFit* sur [-5,5] puis a mis un peu plus parce qu'on ne voyait pas très bien en-dessous.

Charles

- Calcul standard de la dérivée. Note la dérivée et marque : signe de x^2+6x+8 et signe de $(x+3)^2$.
- Passe en [GRAPH] et regarde le graphe (fenêtre standard).
- Lit les limites sur le graphe en considérant la liaison comme le début de la courbe et écrit les limites trouvées : $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-3} f(x) = \infty$.
- Calcul du discriminant et des expressions des racines à la main, fin du calcul numérique à la machine.
- Trace un tableau de signe pour trouver le signe de f' mais traite $(x+3)^2$ comme x+3.
- Regarde ensuite le tracé et son tableau de signe.

Dans la discussion, il dit que le premier tracé lui convenait, qu'il est passé aux limites car il ne voyait pas trop comment faire avec la dérivée. Il confirme qu'il a lu graphiquement les limites, « en + ∞., la courbe est croissante, donc ça tend vers + ∞. ». Pour la limite en -3, il montre le raccord du haut. L'observateur lui demande si le tracé est conforme au sens de variation trouvé. Il répond oui mais avec un peu d'aide change d'avis. L'observateur l'aide alors à rectifier l'erreur liée à $(x+3)^2$ pour obtenir un tableau correct puis l'interroge sur le trait vertical du tracé. Charles finit par dire qu'à son avis la courbe doit être en deux parties puisque la fonction n'est pas définie en -3. Il tâtonnera mais ne parviendra pas seul à obtenir la partie de la courbe correspondant à $x < -3$. Quand on lui montre un graphe satisfaisant, il reconnaît l'asymptote et rectifie les limites en -3, sans être sûr de lui.

Francis

- Calcul standard de la dérivée qui est entrée dans [Y=] pour être tracée

- Zéros et signe de f' déterminés à partir du tracé de f', début du tableau de variation.
- Contrôle en faisant calculer dans [HOME] $f'(-4), f'(-2), f'(-3)$
- Aller et retour entre [GRAPH] et P/C puis arrêt sur [GRAPH]
- Calcul dans [HOME] de la dérivée de f'
- Repassage dans [Y=] et dans [GRAPH]
- Passage en [HOME] et nettoyage des variables par *F6*, puis redéfinition de f, calcul et définition de la dérivée, tracé des deux courbes.
- Passage en [Y=], désélection de y2 et repassage en [GRAPH] pour tracer. Résultat visiblement jugé satisfaisant.
- Passage en [HOME], calcul des limites en - ∞., -4, -3, -3g, -3d, -2, + ∞, valeurs placées au fur et à mesure sur le tableau de variation.
- Passage à [GRAPH], utilisation de *Trace* pour suivre les valeurs et explorer les voisinages des extremums.

Au cours de la discussion, il confirme qu'il a tracé son premier tableau de variation en se servant du graphe de f', qu'ensuite il a été gêné car « la dérivée était négative entre -4 et -2 donc la courbe décroissante alors que sur le graphique ça montait » (liaison) et qu'il a fini par tout effacer en pensant qu'il y avait peut-être quelque chose dans la mémoire de la TI92 qui perturbait. Puis, à un moment, il dit avoir compris que la liaison, « ça ne faisait pas partie de la courbe, c'était la calculatrice qui le faisait pour relier les deux bouts de courbe... En général, ça se passe quand la courbe n'est pas définie en un point. ». Questionné, il montre qu'il sait comment obtenir un tracé discontinu. Il dit avoir cherché la limite en -4 « parce que ça devait être un maximum », puis avoir exploré avec *Trace* pour contrôler que tout allait bien.

Françoise

- Calcul de la dérivée standard.
- Ecrit que f' a toujours le signe du numérateur puis calcule à la main les racines du numérateur et trace un tableau de variation sans la valeur -3.
- En [HOME], fait calculer les limites en -4, -2 et - ∞. et note les résultats obtenus.
- En P/C cherche la limite du numérateur de f en -3, trouve 1 et contrôle dans [HOME] en tapant l'expression : (-3)^2-2*3-14
- En P/C continue sa recherche de la limite en -3 par valeurs supérieures (raisonnement correct) et contrôle dans [HOME].
- Début du calcul de la limite en + ∞. (mise en facteur de x^2 au numérateur et au dénominateur) et arrêt.
- Interprétation en termes d'asymptote de la limite supérieure en -3 : « la droite d'équation x = -3 est asymptote à la courbe représentative au voisinage de +∞. »

Dans la discussion, elle explique qu'elle a cherché la limite en -3 parce que -3 annule le dénominateur de f, qu'elle n'a pas cherché les limites à la machine en +∞ car il faut rédiger et qu'une asymptote, c'est pour elle « une droite parallèle à la courbe ». Lorsque l'observateur lui demande si son tracé est cohérent avec le tableau de variation, qui ne contient pas la valeur -3, elle dit que « non, elle ne croit pas », puis elle va dans [TblSet] , fixe la valeur initiale à -8 et fait défiler les valeurs entre -8 et -4 dans [TABLE]. L'entretien va s'arrêter là pour des raisons de temps.

Georges

- Trouve de façon standard la dérivée et ses zéros.

- Trace ensuite un tableau de variation conforme au signe de f' (signe du trinôme) mais sans la valeur x = -3.
- En faisant calculer la valeur des maxi et mini, repère une contradiction : M<m
- Vérifie son tableau en faisant calculer $f(-10)$, $f'(-10)$, puis $f'(-3)$ pour lequel la TI92 renvoie -∞.
- Repasse en [GRAPH], regarde le graphe et le tableau de variation.
- Repasse en [HOME] et fait calculer les limites à l'infini, note les résultats, puis la limite en -3, puis la limite à gauche en -3.
- Note la limite à gauche et rajoute la limite à droite en -3.
- Refait calculer $f'(-3)$ et $f(-3)$.
- Regarde son tableau de variation, repasse en [GRAPH], regarde et se déplace avec *trace* aux environs de -3, suit le graphe avec le tableau de variation puis, satisfait, éteint la machine.

Dans la discussion qui suit, il explique : « ça me paraissait incohérent mais en fait, avec la courbe on se rend compte qu'en fait la courbe est interrompue en -3 et comme la fonction est pas définie en -3, elle tend vers +∞ et -∞ à la fois, ça dépend si x est inférieur ou supérieur à -3 ; donc en fait c'est l'inverse, le minimum est -10 et le maximum -6 ». L'observateur lui fait alors remarquer que la valeur -3 ne figure pas sur son tableau de variation, il rectifie son tableau sans difficulté. Il sait aussi expliquer le pourquoi du trait vertical tracé par la TI92 et propose de le supprimer en modifiant le mode de tracé.

Gérard

- Calcul de la dérivée standard.
- Calcul du discriminant dans [HOME] : 6^2-4*8 puis calcul des racines de la même façon.
- Début d'un tableau de variation sans la valeur -3 : signe de la dérivée.
- Passage dans [GRAPH] puis ajout des flèches au tableau de variation.
- Calcul dans [HOME] de $f(-4)$ et $f(-2)$, adjonction au tableau de variation
- Repasse en [GRAPH] et regarde le tracé.
- Calcul dans [HOME] des limites de f en +∞ et -∞.
- Passage en [TABLE] et défilement entre -5 et -3, arrêt sur -3.
- Limites à l'infini notées en P/C
- Calcul en [HOME] des limites en 3 puis limite supérieure et inférieure, recopie des résultats.
- Passage à [GRAPH], regarde le tracé.
- Ajout de -3 dans le tableau de variation et rectification.
- Arrêt. Il est satisfait.

Dans la discussion, Gérard explique qu'il vérifie toujours avec [GRAPH] le sens de variation avant de mettre les flèches dans le tableau de variation et que s'il constate que ça ne va pas, il refait l'étude de la fonction.

Michel

- Calcul standard de la dérivée dans [HOME] puis tracé d'un cadre pour le tableau de variation et calcul à la main du discriminant (erreur : $\Delta = 0$)
- Passage à [HOME] pour calcul de 4x8 puis retour au P/C pour fin de la résolution de l'équation.
- Passage à [GRAPH], regarde le tracé.
- Passage à [HOME], définition du numérateur de la dérivée : $g(x)$, résolution de l'équation $g(x) = 0$.
- Ajout de -4 et -2 dans le tableau, avec une erreur dans l'ordre des valeurs (-2 avant -4).

- Dans [HOME], fait calculer $g(-3)$ et obtient -1.
- Complète le tableau de variation en marquant le signe de la dérivée puis le sens de variation de f, corrige l'erreur d'ordre.
- Passage à [GRAPH], regarde le graphe et le tableau de variation.
- Passage à [TABLE], début à -4 avec pas de 1, ne fait pas défiler. Il repère la singularité en -3.
- Repasse en P/C et étudie la limite en -3 en considérant d'abord x>-3 (raisonnement correct).
- En [HOME], fait calculer la limite à droite en -3 ; erreur de syntaxe : +1 au lieu de 1, message d'erreur et correction
- Calcul de la limite à gauche en P/C puis vérification dans [HOME].
- Calcul de la limite en $+\infty$ dans [HOME] et recopie.
- Passage à [GRAPH], regarde le tracé.
- Passage à [TABLE], redescend les valeurs à partir de -4.

Dans la discussion, Michel explique qu'il a utilisé [TABLE] pour savoir où chercher les limites. Il a vu *undef* pour -3 et il s'est dit qu'il fallait chercher la limite en -3. Il confirme que pour l'étude du signe de la dérivée, il a fait p(-3) pour savoir si c'était négatif entre les racines mais qu'il aurait pu le savoir sans cela. Il est passé dans [GRAPH] pour vérifier, ça allait bien entre -2 et $+\infty$, mais pas dans la zone autour de -3. Il reconnaît : « j'ai du mal à imaginer quand je vois une définition de fonction, alors j'accepte ce qu'elle me donne ». Il explique comment il a cherché les limites et qu'en $+\infty$, il a fait directement à la machine car il voyait bien que la limite était $+\infty$. L'observateur lui fait remarquer que -3 ne figure pas dans son tableau de variation. Il rajoute -3 mais trouve que le tableau reste contradictoire avec le tracé (croissance aux environs de -3), pense que le tracé n'est pas assez précis dans cette zone. Même aidé, il n'arrive pas à interpréter la liaison et c'est l'observateur qui doit lui expliquer que la liaison ne fait pas partie de la courbe et qu'il ne voit pas la partie correspondant à x<-3 parce que son *ymin* est trop grand.

Serge

- Calcul standard de f' et de ses zéros, note que f' change de signe en -4 et -2.
- Fait tracer le graphe de f'
- Trace un tableau de variation en se servant des tracés de f et de f', rajoute la valeur -3 et la double barre.
- Fait calculer $f'(-3)$ puis les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et note les résultats obtenus. Fait calculer la limite à gauche en -3, note le résultat puis écrit directement la valeur de la limite à droite.
- Repasse dans [GRAPH], regarde les graphes, son tableau de variation, les limites.
- Repasse dans [HOME] et fait calculer les limites de f en -4 et -2.
- Entre dans [Y=] les expressions y3(x) = -10 et y4(x) = -6
- Passe dans [GRAPH]; la droite d'équation y = -10 n'apparaît pas.
- Fait un *ZoomFit* qui ne donne rien d'intéressant.
- Dans [WINDOW], change *ymin* en -11 et refait tracer.
- S'arrête visiblement satisfait.

Au cours de la discussion, il explique que les résultats qu'il a obtenus collaient bien avec le tracé, même pour la limite en $-\infty$, car il se doutait que ça devait être comme ça. Il a calculé les limites en -4 et -2 « pour trouver les lignes droites asymptotes ». L'observateur lui demande si les deux droites tracées sont bien asymptotes à la courbe, il répond d'abord oui puis, devant justifier, il s'aperçoit de son erreur et dit que non ce sont des tangentes. Il dit que *ZoomFit* est

lent et qu'en plus ça n'a rien donné, sauf un trait tout en haut et qu'il a préféré ensuite changer la fenêtre lui-même pour qu'on voie tout. Il n'arrive pas à interpréter le tracé vertical de liaison.

Vincent

- Calcul standard de la dérivée dans [HOME].
- Reprise du calcul de la dérivée à la main. Intervention de l'observateur pour lui rappeler qu'il n'est pas obligé de tout faire à la main. Continue à la main et arrive à l'expression de la dérivée.
- Passe en [HOME] et regarde.
- Ecrit que $(x+3)^2$ est toujours positif pour $x \neq -3$.
- Repasse en [HOME] et fait calculer $f(-3)$. la machine renvoie *undef*.
- Repasse en P/C, écrit que la dérivée a le même signe que son numérateur, hésite puis calcule le discriminant et s'arrête. Au bout d'un moment, l'observateur l'aide à trouver les racines au moment où il allait aller chercher le programme mis sur sa calculatrice.
- Trace le tableau de variation, d'abord sans -3 mais le rajoute rapidement.
- Dans [HOME], calcule $f(-4)$, $f(2)$ (au lieu de $f(-2)$) en exact et approché puis les limites en $-\infty$, -3 par valeur inférieure et supérieure.

Dans la discussion, il précise qu'il a voulu faire le calcul de dérivée à la main pour se prouver qu'il savait le faire. L'observateur lui demande s'il y a cohérence entre le tableau de variation et la courbe. Il répond : « oui, à partir de -3 », mais qu'avant il ne voit pas le début. En réponse à la question de l'observateur qui lui demande s'il peut obtenir ce morceau, il pense à *ZoomFit* et le fait. Il veut ensuite effacer la liaison qui ne fait pas partie de la courbe dit-il: « là y a un trait, je ne sais plus comment faire pour l'effacer ».

Le tableau 10 synthétise quelques caractéristiques des comportements observés sans rentrer dans les détails.

	Sens de variation	Choix des limites	Calcul des limites
Anne	*Racines : [HOME] (Zeros) *Recalcul des racines en P/C *Signe P/C (Trinôme) *Sens de variation ([GRAPH])	*-∝, +∝ et 0 (d'emblée)	*[HOME]
Charles	* Racines et signe : P/C (Trinôme +err.(x+3)) * Contrôle dans [GRAPH]	*+∝, -∝ et -3 : [GRAPH]	*[GRAPH]
Francis	* Racines : [GRAPH] (f′) * Contrôle dans [HOME] (f′ (-4)=0 & f′ (-2)=0) * Signe : [GRAPH]	* -3 : f′ (-3) et [GRAPH] * - ∝ et +∞ : tableau *-4 et -2 : tableau	* [HOME]
Françoise	* Racines et signe : P/C (trinôme)	*-3 : expression de f(x) *-∞ : tableau *-4 et -2 : tableau	* pour -4,-2, -∝ en [HOME] * pour -3, +∞ Calcul P/C puis Contrôle dans [HOME] *+∝ : début P/C
Georges	*Racines : [HOME] *Signe : Trinôme *Contradiction des valeurs maxi et mini, levée par repérage -3 *Contrôle dans [GRAPH] (Trace)	* -3 : f′ (-3) et [GRAPH] * -∞ et +∝ : tableau	*[HOME] *Contrôle dans [HOME] (f′ (-3) et f(-3))
Gérard	* Racines : P/C avec calc. [HOME] * signe : Trinôme * Contrôle dans [GRAPH]	* -3 : [TABLE] * -∝ et + ∞ : [GRAPH]	* [HOME]
Michel	*Racines : P/C (trinôme) *Contrôle dans [HOME] (Solve) * Signe : alternance * Contrôle dans [GRAPH]	*-3 : [TABLE] * +∝ : tableau	*-3 : Calcul P/C contrôle dans [HOME] * pour +∞ : [HOME]
Serge	* Racines : [HOME] (Zeros) * Signe : alternance et [GRAPH] de f′	*-3, -∝ et +∝ * -4 et -2 ([GRAPH] et tableau)	* [HOME]
Vincent	* Calcul de f'dans [HOME] * Recalcul de f′ en P/C * Racines et signe : P/C (trinôme)	*-3 : expression -∝ : tableau	* [HOME]

Tableau 10 : Résumé des comportements observés

Classe B

Comme dans la classe A, on demande l'étude complète (ensemble de définition, variations, limite, asymptote) d'une fonction. La fonction étudiée est $x \to x-1+\frac{1}{100x}$. Cette fonction est choisie pour les caractéristiques suivantes :

- L'expression de la fonction fait rencontrer la nécessité de parenthéser le dénominateur quand celui-ci est un produit. Il s'agit d'une difficulté rencontrée par presque tous les élèves au premier entretien. Il est intéressant d'étudier chez ces élèves l'évolution de la coordination de l'écriture mathématique et des écritures parenthésées de la TI92.
- La fonction est donnée sous la forme de la somme d'une fonction affine et d'un terme asymptotique. Cette forme fait apparaître directement l'existence d'une asymptote oblique et son équation.
- Le terme asymptotique est "petit" de façon que les variations de la fonction n'apparaissent pas avec les paramètres standards de la représentation graphique par la machine et obligent à utiliser les différentes fonctions de zoom. Ainsi, le Zoom standard donne un tracé indiscernable de celui de la droite d'équation $y = x-1$. Les extremums sont atteints en -0,1 et +0,1, avec des valeurs de –1,2 et-0,89. Par conséquent, il convient de zoomer jusqu'à une fenêtre d'environ [-0,20 ;0,20]x[-2 ;2] pour bien apprécier les variations.

On cherche à voir :

1. comment ils utilisent les définitions de fonction et si la difficulté de parenthésage rencontrée par tous les élèves à l'entretien précédent persiste,
2. comment ils mettent en oeuvre leurs connaissances nouvelles (mars) sur les variations d'une fonction,
3. si la notion plus ancienne (janvier) d'asymptote oblique est suffisamment familière pour que l'équation puisse être trouvée à partir de la forme donnée dans l'énoncé.

Objectif 1 : Parenthésage et gestion des identificateurs de fonction

Marie et Alice rencontrent à nouveau la difficulté de parenthésage du dénominateur.

Sabine, Marie, Pierre. et Jean utilisent *define* pour définir *f*,. Sabine ne réutilise pas l'identificateur *f* dans la suite. Marie, Pierre. et Jean l'utilisent pour calculer la dérivée et les limites.

Franck et Julien utilisent *sto*. Il utilisent *f* pour le calcul de l'expression dérivée qu'ils définissent comme fonction *g* .Franck utilise l'identificateur *g* pour le calcul des nombreuses valeurs dont il a besoin pour l'étude du signe. Julien résout à la machine $g(x) = 0$, puis $f(x) = 0$.

Alice utilise la base de fonction; sur sa calculatrice, y2(x) (seconde fonction de la base) est définie comme dérivée de y1(x) (première fonction de la base) ; dans sa pratique habituelle, elle entre la fonction à étudier comme y1(x) et peut se servir de y2(x) comme expression de la dérivée. Travaillant pour cet entretien avec la calculatrice de l'observateur, elle ne retrouve pas la syntaxe de l'expression dérivée et est donc perdue. Elle revient dans le [HOME] et entre l'expression dérivée sans utiliser l'identificateur y1(x).

Objectif 2 : Connaissances nouvelles sur les variations d'une fonction

Voici une présentation des procédures utilisées par chaque élève. Nous donnons la suite des gestes effectués par l'élève, puis nous détaillons la façon dont ces gestes sont effectués. A la suite de cette analyse par élève, une synthèse compare les différentes procédures.

Alice

Lecture du graphe de la fonction → Lecture de la table de la fonction → Calcul de la dérivée → Calcul des zéros de la dérivée

L'élève commence par regarder le graphe, puis la table de la fonction. Ces deux expériences ne sont pas informatives. Elle est perdue pour le calcul de la dérivée à cause du fait signalé plus haut que, d'habitude, la dérivation est automatiquement définie sur sa calculatrice. L'aide de l'observateur est nécessaire pour la formule de dérivation. L'observateur essaie de faire calculer les zéros de la dérivée, mais Alice ne comprend pas.

Franck

Calcul de la dérivée → Calcul des zéros de la dérivée → Calcul de signes sur valeurs numériques

Franck calcule la dérivée et ses zéros sur la TI92. Ensuite il calcule 4 valeurs de la dérivée pour déterminer le signe. Le tableau de variations est exact. Il n'y a pas d'utilisation du graphique.

Jean

Calcul de la dérivée → Calcul des zéros de la dérivée → Etude standard de signes → Lecture variations sur graphe → Etude standard de signes

Jean calcule la dérivée et ses zéros sur la TI92. Il considère l'expression non factorisée de la dérivée pour étudier le signe. Il trouve les signes inverses. Il trace alors la courbe sur la TI92, s'aperçoit de son erreur. Il factorise alors à l'aide de la TI92 et corrige le tableau. Il trace à nouveau, avec un zoom pour vérifier.

Julien

Calcul de la dérivée → Calcul des zéros de la dérivée → Etude standard de signes → Lecture variations sur graphe

La recherche des variations est faite de façon algébrique, à l'aide de la TI92. L'élève confronte ensuite au graphique. L'étude algébrique permet à l'élève de remettre en cause le graphique.

Pierre

Calcul de la dérivée → Calcul des zéros de la dérivée → Calcul de signes sur valeurs numériques

Il calcule la dérivée sur papier, mais en s'aidant de la TI92 pour la dérivation de $\frac{1}{100x}$.

Il s'aide de la TI92 aussi pour le calcul des zéros et de la valeur de la dérivée en 0.2. Il place mal cette valeur dans le tableau de variations et obtient des variations inversées.

Il s'aperçoit de l'erreur en considérant les limites et corrige. Ensuite il confronte au graphique.

Marie

Calcul de la dérivée → Calcul des zéros de la dérivée → Lecture variations sur graphe → Etude standard de signes

Marie calcule la dérivée, et ses zéros, sur la TI92 puis commence un tableau de variations. Elle considère, à la lecture du graphique en Zoom Standard, que la fonction est croissante sur tous les intervalles qu'elle a défini. Spontanément, elle revient en [HOME] et demande la factorisation de la dérivée. L'observateur lui indique de faire un tableau de signe dont elle se sert correctement pour corriger son tableau. Elle a bien vu la discontinuité en zéro.

Sabine

Calcul de la dérivée → Calcul des zéros de la dérivée → Lecture variations sur graphe → Calcul des zéros de la dérivée → Calcul des zéros de la dérivée → Etude standard de signes

Après calcul de la dérivée et de ses zéros sur la TI92, Sabine commence un tableau de variations. Elle considère, à la lecture du graphique en Zoom Standard, que la fonction est croissante sur tous les intervalles qu'elle a définis. L'observateur lui propose de revenir dans le module [HOME] pour étudier les variations. Elle cherche les zéros de la fonction, puis de la dérivée (à nouveau). Elle transforme ensuite l'expression dérivée par réduction au même dénominateur, mais elle se trompe dans les signes. L'observateur essaie de faire corriger, mais Sabine est gênée par la discontinuité en zéro.

Synthèse

Pierre, Julien, Jean et Franck font l'étude de variations préalablement à la lecture du graphique. Les trois premiers établissent le signe de la dérivée en raisonnant sur l'expression, alors que Franck considère des valeurs de la dérivée sur les intervalles déterminés par les zéros. Seul Pierre, qui redouble, fait certains calculs en papier/crayon.

Pierre, Julien, Jean considèrent le graphique à titre de vérification. Cela permet à Pierre et Jean de corriger une inversion de signe. Pour Julien, c'est une surprise, car la discontinuité n'apparaît pas. Mais il fait davantage confiance à son calcul.

Marie et Sabine recherchent la dérivée et ses zéros à l'aide de la TI92. Elles établissent ensuite les variations en considérant le graphique de la TI92. Mais elles sont gênées par la discontinuité en zéro. Marie se tire mieux de ce piège.

Alice tente une étude graphique et numérique. Elle ne parvient pas à l'étude algébrique sur la TI92.

Objectif 2.3 Connaissances anciennes sur l'asymptote oblique

Trois élèves (Franck, Jean, et Pierre) annoncent d'emblée l'asymptote d'équation $y = x$-1 quand on leur demande si la courbe a une asymptote oblique. Il est probable qu'ils tirent ce résultat de la forme sous laquelle la fonction est donnée, mais simultanément, ils considèrent la courbe sur l'écran de la TI92. Il y a bien coordination graphique algébrique, opérée de façon automatique.

Jean, se concentre sur la lecture graphique, sans penser à considérer la définition algébrique de la fonction. Sur l'écran de la TI92 en Zoom Standard, la représentation graphique de la

fonction est très peu différente de la droite asymptote. Spontanément, il donne l'équation $y = x+1$ à cette droite, alors qu'il est visible que cette droite coupe l'axe des y en $y = -1$ et l'axe des x en $x = 1$. Il faut l'aide de l'observateur et de plusieurs tracés de droite pour qu'il trouve la bonne équation et qu'il fasse le rapport avec la définition algébrique.

Marie voit sur le graphique une asymptote "qui est en travers, là", mais elle est bien en peine de trouver son équation. L'observateur propose de prendre deux points sur la courbe, assez éloignés et de chercher l'équation d'une droite passant par ces points, mais Marie déclare "je ne sais pas trouver la droite". Quand l'observateur propose de considérer la définition algébrique, Marie est gênée par ses connaissances insuffisantes des limites. Elle considère par exemple que $\frac{1}{100x}$ tend vers l'infini.

Sabine et Alice n'abordent pas cette partie, ayant passé beaucoup de temps sur l'étude de variations.

Synthèse

La première partie de l'entretien montre que l'instrumentation de la machine est plus faible que nous ne l'attendions. En particulier, le nombre d'élèves ayant créé des répertoires pour structurer la mise en mémoire ne dépasse pas le quart de l'effectif. Comme nous le soulignions plus haut, peut-être faut-il voir là du fait qu'ils ne considèrent pas cette machine comme la leur propre mais ce fait n'intervient sans doute que partiellement : Serge, par exemple, explique qu'il a nettoyé sa machine parce qu'il y avait beaucoup de choses (sans doute en vrac) qu'il n'utilisait pas.

L'utilisation en contrôle est une utilisation orientée vers la vérification, que nous pourrions qualifier de standard. L'utilisation pendant la période des vacances est quasi nulle.

Pour la seconde partie on note, dans la classe A, une évolution certaine depuis le premier entretien. Elle est visible dès la phase de tracé de la machine puisque cette fois, quatre élèves utilisent la stratégie standard. A noter de plus Serge, qui s'arrête sur la fenêtre standard mais plus tard va faire un *ZoomFit* qui passera inaperçu de l'interviewer et pour lequel, comme il a à la fois sélectionné la fonction et sa dérivée, il obtient effectivement un tracé ininterprétable.

Concernant le calcul de la dérivée et la détermination de ses zéros, il est intéressant de constater comment le glissement du troisième degré au second degré conduit une majorité d'élèves, et même Gérard, à se situer dans un contrat didactique de type "contrôle usuel" : ne déléguer à la machine que les calculs numériques intermédiaires dans la résolution de l'équation du second degré ou revenir au calcul P/C, après avoir trouvé les zéros à la machine. A noter le cas de Vincent qui, en accord avec son profil, va même jusqu'à dériver à la main pour se prouver qu'il en est capable.

La détermination du signe de la dérivée, une fois trouvés ses zéros, est majoritairement effectuée suivant la stratégie standard mais ce n'est pas systématique : Michel et Serge utilisent le principe d'alternance des signes, Michel reconnaissant ensuite qu'il aurait pu faire autrement, Francis utilise le graphe de f'.

En ce qui concerne la singularité en x = -3, on voit bien la fragilité des connaissances en cours de construction. Contrairement à la situation de contrôle qu'ils viennent de vivre, ici, c'est à eux de déterminer les points où ils jugent nécessaire de chercher les limites éventuelles de la fonction. Cela est loin d'aller de soi. Seuls Françoise et Vincent semblent repérer le problème au vu de l'expression. Anne calcule d'office des limites, mais ce sont celles en $-\infty$, $+\infty$ et 0.

Charles prend la liaison du graphe pour son début et l'estime donc satisfaisant puis, percevant qu'il se passe quelque chose en -3, il lit une limite $+\infty$, à cause du raccord tout en haut de l'écran. Michel et Gérard repèrent la singularité dans [TABLE] et Michel a l'air de considérer cette stratégie comme efficace. Pour Francis et Georges enfin, cela résulte plus ou moins directement de la prise de conscience de la contradiction maxi/mini.

La syntaxe de la commande limite, son adaptation aux limites droites et gauches semble bien maîtrisée, certains élèves se contentant d'ailleurs d'un seul calcul (vu que, dans le cas de retour "*undef*" à la demande de limite, ils n'ont du rencontrer que des situations de limites infinies à droite et à gauche). Seul Charles n'y recourt pas. Mais l'obtention des valeurs correctes de limites à droite et à gauche en -3 ne suffit pas à garantir une interprétation correcte du graphe : Michel et Serge par exemple n'y parviennent pas seuls. Enfin, plusieurs élèves, ayant le choix, calculent aussi les limites en -4 et -2, les zéros de la dérivée.

Dans la classe B, on note aussi une évolution depuis le premier entretien. A l'exception de Alice, la fonction est maintenant correctement parenthésée. A l'exception de Sabine et Alice, les élèves réutilisent les identificateurs des fonctions définies. Cette évolution est donc différenciée. En particulier Alice manque de capacité d'adaptation et est vite perdue.

Dans la classe B, l'étude de variations est nouvelle. Trois élèves (Pierre, Julien, Jean) la font de façon standard, par factorisation de la dérivée, un quatrième (Franck) utilisant le principe d'alternance des signes. La TI92 est très largement utilisée pour les calculs, mais il est possible que les conditions de l'entretien aient poussé à cet usage. Marie et Sabine s'appuient davantage sur le graphique pour l'étude de variations. Mais la discontinuité n'apparaît pas dans la fenêtre standard, et seule Marie se tire de ce piège. Alice ne dépasse pas l'étude graphique et numérique.

L'idée d'étude algébrique de la dérivée est donc bien installée, sauf chez Alice. Le graphique est utilisé pour vérifier les variations par les élèves qui maîtrisent la résolution algébrique avec la TI92. Il est sollicité pour établir les variations par les élèves (Marie, Sabine) qui rencontrent des difficultés algébriques.

On retrouve les difficultés de la lecture graphique avec la recherche de l'asymptote oblique. Les élèves qui tentent le repérage par lecture graphique rencontrent beaucoup de difficultés (Jean, Marie). Au contraire, les élèves (Franck, Jean et Pierre.) capables de coordonner cette lecture graphique avec l'expression algébrique de la fonction trouvent d'emblée l'équation demandée.

Dans les deux classes, on note que la sensibilité aux contradictions n'est pas encore celle que l'on souhaiterait. Cela limite l'efficacité de la calculatrice comme moyen de contrôle, au delà des situations où elle fournit directement le résultat. Même dans les cas où les élèves réussissent, leurs comportements sont beaucoup moins linéaires que ceux qu'on peut anticiper dans une stratégie standard et sont assez diversifiés sur l'ensemble des élèves.

Entretien 3

Ce troisième entretien a eu lieu après le contrôle spécifique, la dernière semaine de cours des élèves. Tous les élèves sauf Michel de la classe A l'ont passé. Michel n'est pas non plus venu au contrôle spécifique.

Scénario de l'entretien

L'entretien était organisé en trois parties.

Partie 1 : Utilisation en contrôle spécifique

Nous avons organisé, la dernière semaine de cours, un contrôle spécifique TI92, commun aux deux classes expérimentales A et B. Le texte et le corrigés sont reproduit en annexe à ce chapitre. Le contrôle spécifique visait à instaurer un contrat différent des contrôles habituels, plus conforme à l'idée d'intégration de la calculatrice dans les pratiques mathématiques des élèves. L'objectif était d'étudier la façon dont ce contrat fonctionne chez les élèves observés.

Lorsque les élèves disposaient de leurs machines pour les contrôles communs, les rédactions fournies ne devaient pas porter la trace de l'utilisation de la calculatrice. Pour ce contrôle spécifique, en revanche, les élèves n'avaient pas à justifier les productions de la machine pour les questions considérées à ce moment de l'année comme routinières du point de vue des techniques et compétences utilisées. Cependant, les élèves ne pouvaient se contenter de donner les résultats fournis par la TI92 pour les tâches nouvelles.

La tâche principale était une étude de fonction classique. Dans cette tâche, le contrôle spécifique se distinguait cependant des contrôles ordinaires :

- Une plus grande autonomie était laissée à l'élève dans son travail mathématique classique.
- Le contrôle comportait une question spécifique à l'instrumentation : on demandait d'expliquer des différences constatées entre le résultat donné par la machine et celui obtenu en papier/crayon.
- Il comportait également une question directement liée au fonctionnement graphique de la TI92. Cette question, nouvelle pour eux, visait à tester leurs possibilités d'adaptation à un environnement instrumenté.

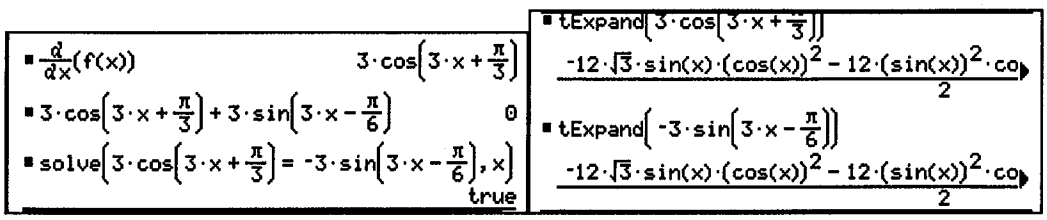
Le temps accordé aux élèves était de 50 minutes environ.

Comme pour les entretiens, nous précisons les résolutions a priori attendues, en fonction de la place du contrôle dans l'année et du contrat explicité à son propos.

Exercice 1 :

Le calcul à la main de la dérivée de la fonction conduit à l'expression : $-3\sin(3x-\frac{\pi}{6})$. tandis que la TI92 fournit l'expression : $3\cos(3x+\frac{\pi}{3})$. Ces deux expressions sont égales et la machine permet de le vérifier de différentes façons, par calcul de la différence, par résolution de l'équation associée, par application de *tExpand* aux deux expressions. Il suffit même, mais nous ne l'avions pas prévu a priori, n'imaginant pas ce fonctionnement de la machine, de rentrer l'expression trouvée à la main pour obtenir l'expression machine par simplification automatique. En revanche, il n'existe pas de fonction permettant de passer de l'expression

machine à l'expression à la main et, par exemple, l'utilisation de *tCollect*, seconde possibilité de transformation trigonométrique renvoie l'expression initiale.



Mais si la machine permet de vérifier l'égalité, elle ne l'explique pas. L'explication relève de la propriété : $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$, que la machine ne donne pas à voir. C'est plutôt ce type de justification qui est attendu ici, vu que le texte demande d'expliquer l'égalité. Mais, on est bien sûr intéressé par les stratégies de vérification à la machine qui seront utilisées par les élèves.

Exercice 2 :

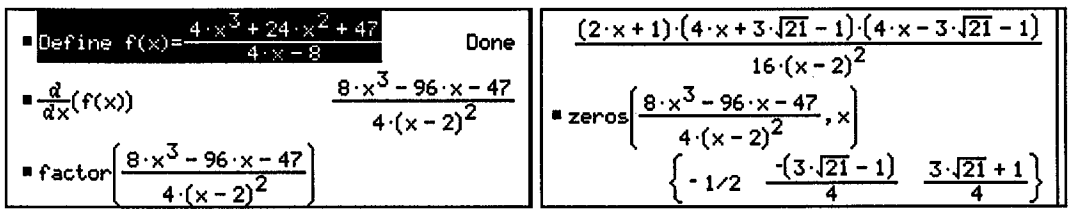
Pour la définition de la fonction, nous avons respecté, dans cette situation de contrôle, les indications du programme qui précisent que la fonction doit être donnée avec son domaine de définition.

Question 1 :

La résolution attendue est la suivante.

Définition de la fonction dans la TI92 et calcul machine de la dérivée. Calcul machine des zéros du numérateur, sous une des formes classiques.

On arrive ainsi à l'un des résultats suivants, suivant que l'on utilise ou non Factor :



Compte tenu du contrat, on attend ensuite une étude du signe à l'aide de la factorisation de la dérivée et d'un tableau de signe. Cette étude conduit au tableau de variation suivant, α (valeur approchée : -3.19), -1/2 et β valeur approchée 3.69) étant les zéros de la dérivée.

x	-∞	α	-1/2	2	β	+∞
$f'(x)$	-	+	-	-	+	
$f(x)$	↘	↗	↘	↘	↗	

Question 2 :

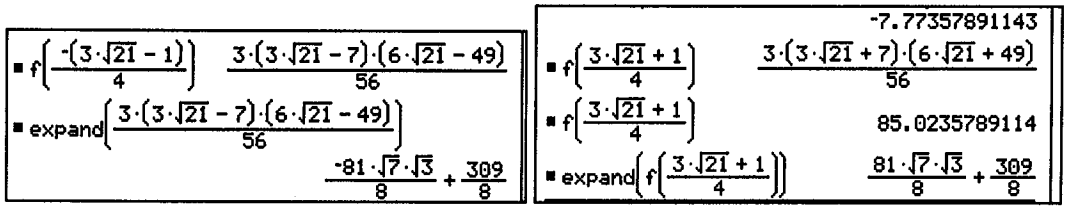
Pour l'étude des limites, on s'attend à voir les élèves, dans leur majorité, chercher d'abord les limites à la machine, avec pour certains un passage par la commande de limite simple en 2, avant de distinguer les limites à droite et à gauche. La machine fournit les résultats attendus.

Certains élèves en resteront sans doute là, d'autres se lanceront dans la production des justifications demandées, basées :

- à l'infini, sur la factorisation du numérateur et du dénominateur par leurs termes de plus haut degré,
- en x = 2, sur le calcul de la valeur du numérateur en x = 2 et l'étude de la limite et du signe du dénominateur lorsque x tend vers 2 respectivement par valeurs supérieures et inférieures.

Question 3 :

Pour compléter le tableau de variation il suffit de calculer dans l'application [HOME], les valeurs du maximum et du minimum local. On obtient, des expressions complexes factorisées que l'on peut faire réduire par *Expand* et transformer à la main en : $\frac{-81-}{8}+\frac{309}{8}$ et $\frac{81\sqrt{21}}{8}+\frac{309}{8}$ dont des valeurs approchées sont respectivement : -7.78 et 85.



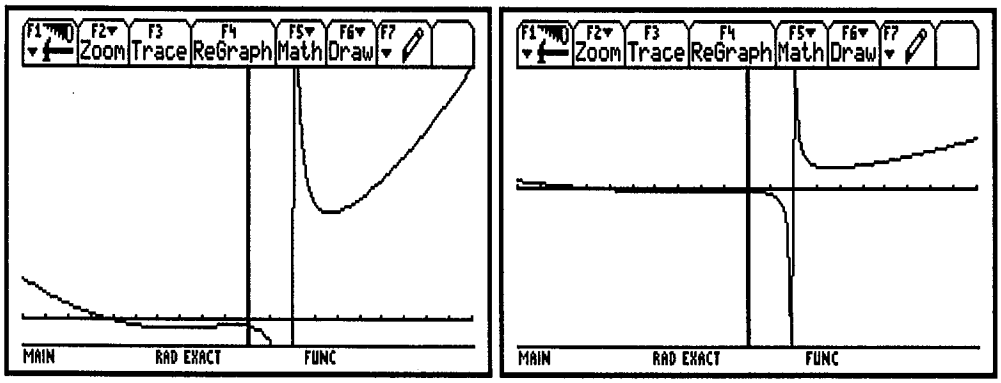
Question 4 :

L'application de *Expand* permet de mettre $f(x)$ sous la forme d'un polynôme du second degré et d'une expression de limite nulle à l'infini : expand(f(x)) $\frac{175}{4\cdot(x-2)}+x^2+8\cdot x+16$

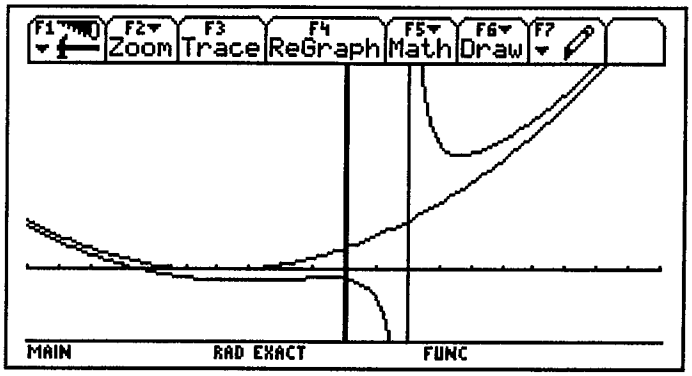
On en déduit que le polynôme P cherché est le polynôme d'équation : $x^2+8x+16$.

Question 5

Compte tenu des valeurs figurant dans le tableau de variation, on peut vouloir garder l'intervalle standard sur x et prendre par exemple [-20, 200] sur y, ou faire un *ZoomFit* sur la fenêtre standard. On obtient les tracés suivants :



Celui réalisé avec *ZoomFit* écrase un peu trop la courbe. On pouvait préférer un ajustement du type :[-10,10]x[-50,150] :



On demandait donc à l'élève pendant l'entretien comment il avait utilisé la TI92 pendant ce contrôle spécifique.

Partie 2 : Etude de fonction

Pour cet entretien, la fonction était la même dans les deux classes. Il s'agissait de la fonction $x \to \sqrt{1+\cos 2x}$. Les questions ont été posées de la façon suivante : on demandait aux élèves, en premier lieu, de définir la fonction et la faire tracer mais, ensuite, ils devaient proposer, à partir de ce tracé et des opérations permises dans la fenêtre graphique, un certain nombre de conjectures concernant les propriétés de la fonction : propriétés de parité et périodicité, sens de variation, localisation et valeur des extremums, dérivabilité...

L'observateur faisait ensuite le point sur les conjectures et l'élève devait essayer de les démontrer ou de les infirmer, en dépassant les seuls critères graphiques. Si le temps le permettait, on essayait de l'aider à faire le lien avec la fonction $\sqrt{2}\ |\cos x|$ et d'exploiter ce lien pour l'étude des singularités ; on ne pensait pas en effet que les élèves feraient spontanément ce lien.

Il s'agissait, par ce choix de la fonction et des questions, de casser le schéma d'étude classique en obligeant à un travail sur le tracé fourni par la machine et d'inscrire l'étude algébrique dans une démarche de validation de conjectures.

La fonction était choisie pour présenter les caractéristiques suivantes :

- C'est une fonction trigonométrique périodique de période π et paire. Elle est construite à partir des fonctions usuelles mais sort du registre des fonctions trigonométriques étudiées jusqu'alors.
- Elle est non dérivable pour $x = \frac{k\pi}{2}$ et admet en ces points des demi-dérivées à droite et à gauche. Cela permettait de tester l'image de la dérivabilité que se faisaient les élèves, à la fin de cette année scolaire, où la notion de dérivée avait joué un rôle important mais via l'outil « fonction dérivée » plus que via l'objet « nombre dérivé ».
- Enfin, elle admet une forme plus simple, aisément accessible à la calculatrice, qui permettait d'analyser en particulier son comportement au voisinage des points singuliers, en se ramenant à la fonction d'expression : $\sqrt{2}\cos x$.

Partie 3 : Utilisation en de la TI92 contrôle commun

(cette partie a été passée uniquement dans la classe A).

On demandait à l'élève, en suivant le schéma habituel, comment il avait utilisé la TI92 pendant le contrôle commun de la semaine précédente (contrôle n°6). Ce contrôle, pour la partie analyse, comportait deux exercices. Le premier concernait l'étude de la suite définie par : $u_1 = 9/2$ et $u_{n+1} = -3u_n+2$ pour tout $n>0$. On demandait successivement de calculer les quatre premiers termes, de déterminer si la suite était ou non arithmétique ou géométrique, puis on se ramenait classiquement à une suite géométrique en posant $v_n = u_n-1/2$ et on en déduisait l'expression de u_n en fonction de n ainsi que la valeur de $u_0+u_1+...+u_n$. L'exercice se terminait par une application numérique (n = 10).

Le second exercice concernait l'étude de la fonction trigonométrique $f(x) = \cos 2x+2\sin x+3$.

La moyenne de la classe à ce contrôle, en incluant donc le troisième exercice de géométrie, est de 10.3.

Résultats et Analyses

Partie 1 : Utilisation en contrôle spécifique

Nous proposons ci-dessous, pour la classe A un rapport des productions au contrôle des élèves observés et les éclaircissements qu'ils ont donné lors de l'entretien. Puis une synthèse replace ces observations dans les comportements observés sur la totalité de la classe au cours du contrôle et à la lecture des copies. Pour la classe B, nous avons seulement dépouillé les copies des 7 élèves observés, et nous donnons une synthèse de leurs productions, ainsi que des éclaircissements qu'ils ont donné lors de l'entretien.

Le lecteur pourra ainsi, avec la synthèse dans la classe A avoir une bonne vision des aptitudes développées par les élèves d'une classe de première S à l'issue d'une année d'expérimentation. Il pourra, avec le rapport sur la classe B, apprécier comment ces aptitudes peuvent varier d'une classe à l'autre.

Classe A

Productions des élèves

Anne

Exercice 1 : "Les deux résultats sont les mêmes."

Calcul dérivée et étude des variations : calcul de la dérivée par *F3*-1, recherche des zéros par *F2*-4. Signe correct non justifié. Sens de variation non justifié. Singularité repérée.

Limites : Limites calculées à la machine. Justifications approximatives : en 2, mise en facteur de x^3 au numérateur et x au dénominateur, calcul des limites de quelques termes (24/x, 47/ x^3, x^3 et x) et conclusion ; en $+\infty$, affirmation des limites infinies des numérateur et dénominateur après factorisation mais sans simplification et conclusion.

Tableau de variation : Correct, valeurs des ordonnées des extremums et des limites non indiquées.

Fenêtre : Adaptée : [-2020]x[-400,400]

Tracé : Recopie écran avec appui de points, tracé soigné.

Dans l'entretien, elle dit qu'elle a utilisé la TI92 pour le calcul de f' et des limites et utilisé [TABLE] pour étudier le signe de f', ce qui explique que le signe de f' ne soit pas justifié.

Charles

Exercice 1 : Calcul détaillé de la dérivée, expression machine, cercle trigonométrique avec $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, pas de conclusion.

Calcul dérivée et étude des variations : Entrée fonction par *F4*-1, calcul de dérivée (*F3*-[ENTER] *f*(x),x). Recherche des zéros à la calculatrice (commandes non précisées). Etude du signe de la dérivée par [TABLE]. Non repérage de la singularité en 2.

Limites : Pas de calcul de limites.

Tableau de variation : Incorrect vu l'absence de 2. Abscisses des extremums locaux sous forme exactes et ordonnées non précisées, limites non indiquées. Rajoute néanmoins en remarque : "D'après le tableau de valeurs et en mettant [WINDOW] avec *ymax* 500, on note que la courbe varie encore pour des valeurs de y élevées. Et donc f est croissante jusqu'à $x = 2$ (asymptote) puis décroissante jusqu'à $x = \frac{3\sqrt{21}+1}{4}$ puis f est croissante jusqu'à $+\infty$."

Fenêtre : Non donnée mais visiblement adaptée.

Tracé : Recopie écran peu soignée mais correcte, abscisses points particuliers et asymptote marqués, valeur approximative du minimum positif indiquée : ~90. Tracé non cohérent avec tableau de variation et avec remarque.

Dans l'entretien, il précise qu'il pensait résoudre l'exercice 1 avec *Factor* mais que ça n'a pas marché. Pour l'exercice 2, il dit avoir utilisé la machine pour le calcul de f' et utilisé [TABLE] pour le tableau de valeurs.

Francis

Exercice 1 : Elles sont égales « car si on ajoute $\frac{\pi}{2}$ à un sinus négatif , on obtient un cosinus positif ». $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ donc $-3\sin(3x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}) = 3\cos(3x+\frac{\pi}{3})$."

Calcul dérivée et étude des variations : Calcul machine de la dérivée par *F3*-1 ; factorisation et résolution de l'équation du second degré à la machine. Signe du trinôme justifié et signe de la dérivée justifié par tableau de signes. Sens de variation soigneusement justifié.

Limites : Limites correctes (pas de mention d'utilisation de la calculatrice). Justifications :

en 2 : d'abord mise en facteur de x^3 et calcul de sa limite en 2 - barré puis «f(x) n'est pas définie en 2 donc elle n'a pas de limite "exacte" (c'est à dire donc un chiffre quand x tend vers 2) mais une limite infinie. f est décroissante sur [-1/2,2[donc la limite est $-\infty$.". Raisonnement analogue pour la limite à droite.

Limites en $-\infty$ et $+\infty$ données sans justification.

Tableau de variation : Correct. Valeurs approximatives des ordonnées des extremums indiquées sans marque d'approximation.

Fenêtre : Adaptée à partir de fenêtre standard : [-10,10]x[-300,250]

Tracé : Non fourni.

Dans l'entretien, il précise qu'il a utilisé la machine pour le calcul de f', la factorisation et la recherche des racines de l'équation du second degré, puis pour le tracé de f, puis de f' séparément, pour contrôler le tableau de variation. Il a trouvé une fenêtre par *ZoomFit* puis a divisé les *ymin* et *ymax* par 2 environ.

Françoise

Exercice 1 : Donne les deux valeurs sans commentaires.

Calcul dérivée et étude des variations : Calcul machine par *F3*-1, après expression détaillée du quotient (u(x) = ..., v(x) = ...) ; factorisation machine et résolution à la main de l'équation du second degré. Signe du trinôme justifié. Repérage singularité et justification détaillée du signe de la dérivée par tableau de signe. Sens de variation justifié.

Limites : Calculs machine pour les limites en 2, sans justification. Pour les limites en $+\infty$, mise en facteur de x^3 et simplification, puis utilisation des fonctions de référence. Conclusion correcte.

Tableau de variation : Correct mais limites non indiquées, valeur approximative du premier minimum indiquée.

Fenêtre : correspond à l'utilisation de *ZoomFit* sur la fenêtre standard :

[-1010]x[-615.6,471.07]

Tracé : Recopie écran peu soignée ; asymptote marquée.

Dans l'entretien, pour l'exercice 1 dit qu'elle a entré le résultat trouvé à la main en machine et que ça lui a donné l'autre, donc qu'elle était satisfaite. Pour l'exercice 2, elle a eu une utilisation standard avec contrôle par tracé du tableau de variation. Pour les limites, elle dit avoir fait à la machine pour 2 car elle ne se « souvenait plus comment on faisait avec 2 supérieur et 2 inférieur », mais que pour l'infini, elle a fait à la main et vérifié à la calculatrice. Elle a essayé la question 4, mais n'a pas compris. Elle est passée à la suite et a pris comme fenêtre celle qu'elle avait déjà utilisée, obtenue par *ZoomFit*. Pour l'asymptote, elle savait que c'était x = 2.

Georges

Exercice 1 : Développement : "$-\sin(3x-\frac{\pi}{6}) = \cos(3x)\sin(\frac{\pi}{6}) - \sin(3x)\cos(\frac{\pi}{6})$

$= \frac{1}{2}\cos(3x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x)$

$= \cos(3x)\cos(\frac{\pi}{3})-\sin(3x)\sin(\frac{\pi}{3})$"

Calcul dérivée et étude des variations : Calcul dérivée et zéros de la dérivée à la machine (syntaxe non indiquée). Factorisation précisée et signe de la dérivée justifié par tableau de signes (signe du trinôme non justifié). Valeurs approchées des extremums calculées. Singularité repérée. Sens de variation non justifié.

Limites : calculées à la machine, pas de justification donnée.

Tableau de variation : correct.

Fenêtre : Adaptée : [-16,7]x[-18,100]

Tracé : Recopie d'écran, peu soignée, asymptote marquée, parabole asymptote obtenue à l'écran mais non recopiée.

Polynôme : Utilise la commande *Expand* pour obtenir : $f(x)=\frac{175}{4(x-2)}+x^2+8x+16$. Puis justifie le choix de $x^2+8x+16$: "Le terme $\frac{175}{4(x-2)}$ a pour limite 0 lorsque $x \to -\infty$. Si l'on ne considère que le polynôme $x^2+8x+16$, "l'erreur" entre ce polynôme P et f ne sera que de $\frac{175}{4(x-2)}$. Or au voisinage de $-\infty$, cette erreur est pratiquement nulle. Donc $P(x) = x^2+8x+16$. P est asymptote à f au voisinage de $-\infty$. Il en est de même au voisinage de $+\infty$."

Dans l'entretien, pour l'exercice 1, il dit qu'il a essayé de développer en utilisant les formules de trigonométrie de la machine mais avoue avoir tourné en rond et avoir fini par passer à la suite. Pour l'exercice 2, il fait état au départ d'une utilisation standard, il précise qu'il n'a même pas justifié les limites car il n'avait pas bien lu (!). Il a fait la question 5 avant la 4, car il n'avait pas d'idée, en choisissant d'abord une très grande fenêtre [-100,100]x[-1000,1000] pour bien voir, puis en utilisant *ZoomBox* pour encadrer la partie la plus intéressante. Il est revenu ensuite à la question 4 et il explique qu'il a pensé à *Expand* à cause des limites et que ça lui a donné ce qu'il voulait.

Gérard

Exo1 : "Les expressions sont les mêmes, même s'ils sont sous des formes différentes car la calculatrice résout différemment de nous."

Calcul dérivée et étude des variations : Pas de calcul de dérivée. Entre la fonction dans [Y=], puis utilise Table pour repérer le sens de variation et les singularités. Pas de repérage des extremums locaux négatifs. Donne un minimum vers 3.68.

Limites : Calcul à la machine. Décomposition en somme de trois termes et écriture des limites de chaque terme en $+\infty$ et $-\infty$, sans explication ni conclusion.

Tableau de variation : Fonction décroissante sur $]-\infty,2[$, valeurs des extremums approchées (3.68, 85), sans mention d'approximation.

Fenêtre : Adaptée : [-20,15]x[-300,400]

Tracé : Points correspondants aux valeurs de 5 en 5 ainsi que $x = 2.5$, non joints (9 points). Non incompatible avec le tableau de variation mais le tracé continu obtenu l'était sûrement.

Dans l'entretien, il déclare qu'il n'est pas resté longtemps sur la recherche de l'exercice 1 car le second lui semblait long. Pour lui, la machine ne calcule pas comme nous et c'est tout. Pour l'exercice 2, il dit tout de suite qu'il s'est trompé car il a fait le tableau de variation d'abord. Il l'a fait en rentrant la fonction dans [Y=], en la faisant tracer et en faisant un *ZoomFit*, puis en utilisant [TABLE]. Les limites ont été faites à la machine et il les a un peu justifiées, dit-il. Il a sauté ensuite à 5 et 6 qui lui semblaient plus faciles, il a fait un *ZoomFit* sur [-20,15] mais il a réduit un peu car « ça allait un peu trop en dessous ». Il n'a pas eu le temps de revenir à la question 4.

Serge

Exercice 1 : "$-\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$ d'où les différentes écritures."

Calcul dérivée et étude des variations : Dérivée donnée sans indication. Signe correct au vu du tableau de variation mais non justifié. Sens de variation non justifié.

Limites : Limites calculées à la machine (syntaxe non précisée), pas de justifications.

Tableau de variation : Correct, limites non marquées et valeurs approchées des extremums non précisées.

Fenêtre : Adaptée : [-25,25]x[-366,843]

Tracé : Recopie écran peu soignée, mention de l'asymptote et tracé du graphe de $f(x) = x^2$

Polynôme : "$f(x) \approx x^2$" et justification par les limites à l'infini.

Dans l'entretien, il dit avoir testé l'égalité après avoir montré que $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{3})$. Dans l'exercice 2, il a utilisé la machine pour calculer f', $f'(0)$ et des limites. Il déclare avoir trouvé la fenêtre un peu au hasard en faisant des *ZoomFit* sur plusieurs intervalles pour x jusqu'à ce que ça soit bien.

Vincent

Exo1 : "Quand on met sur la machine Solve ($3\cos(3x+\frac{\pi}{3}) = -3\sin(3x-\frac{\pi}{6})$, elle vous répond *true*."

Calcul dérivée et étude des variations : Calcul de la dérivée par 2nd8; factorisation machine puis résolution à la main de l'équation du second degré. Repérage singularité et justification détaillée du signe de la dérivée par tableau de signes. Calcul machine des ordonnées des extremums (valeur exacte et approchée).

Limites : Calcul machine. Pas de justification. Asymptote précisée.

Tableau de variation : Correct avec valeurs exactes pour les extremums.

Fenêtre : Adaptée : [-20,20]x[-10,100]

Tracé : Recopie écran peu soignée, asymptote marquée.

Dans l'exercice 1, il déclare avoir testé l'égalité avec *Solve*. Dans l'exercice 2, il a utilisé la machine pour le calcul de f' et des limites. Il a obtenu le signe de f', dit-il, par *Factor* et il a utilisé un programme pour le calcul du discriminant.

Synthèse dans la classe A

Lors de ce contrôle spécifique, la majorité des élèves passe beaucoup de temps sur le premier exercice et, au bout de vingt minutes, nous avons été obligés de leur demander de passer à l'exercice 2. Tous ont pu calculer la dérivée à la main et à la machine mais la plupart ont voulu ensuite transformer le résultat machine pour obtenir le résultat P/C, au lieu de chercher à faire l'inverse, comme Françoise ou de traiter le problème de façon plus symétrique, comme Vincent. Or, comme nous l'avons montré dans l'analyse a priori du contrôle, ces trois choix

stratégiques, mathématiquement équivalents, ne sont pas équivalents, du fait du fonctionnement interne de la machine.

Sur l'ensemble de la classe :

- Douze élèves n'aboutissent pas, n'écrivant que les deux résultats ou, comme Gérard, affirment l'égalité ou écrivent une banalité ou développent simplement l'expression machine
- Deux élèves testent l'égalité ou feront calculer la différence
- Trois élèves donnent de façon détaillée la justification attendue
- Trois élèves relieront le passage d'un sinus à un cosinus au fait que la dérivée de cosinus est sinus
- Six élèves donnent, plus ou moins précisément, la raison : $\cos(x+\pi/2) = -\sin x$ ou une raison équivalente, parfois instanciée en $\pi/3$ ou $\pi/6$.

On voit donc qu'il ne s'agit pas pour la majorité d'entre eux d'une tâche triviale et qu'il y a une réelle différence entre la capacité de calculer $\cos(x+\pi/2)$ et celle de mobiliser la propriété correspondante pour expliquer le passage d'une expression en cosinus à une expression en sinus lorsque le symbole $\pi/2$ n'est pas explicitement visible. Néanmoins, nous pensons qu'une instrumentation efficace de la TI92 dans le domaine trigonométrique suppose cette capacité.

Pour ce qui est de l'exercice 2, les élèves se retrouvent, au moins au départ, dans une situation familière. A deux exceptions près, celle de Gérard qui utilise [TABLE] et d'un élève qui s'arrête après avoir calculé la dérivée, tous les élèves utilisent des stratégies standard pour obtenir la dérivée et ses zéros. D'ailleurs l'observation de cette phase du contrôle a montré qu'ils allaient très vite pour cette phase. On notera que certains obtiennent les trois racines, par exemple en ayant recours à la factorisation radicale, et que d'autres après avoir utilisé la factorisation normale résolvent l'équation du second degré de façon classique. En fait, la forme légèrement différente des expressions des racines suivant qu'on les calcule à la main ou à la machine, nous permet de voir comment les élèves ont procédé même si le détail des calculs de la copie laisse un doute. Un des élèves travaillant en P/C a fait une erreur de calcul qu'il ne repère visiblement pas.

Pour ce qui est de l'étude du signe, dix-huit élèves donnent la justification correcte attendue, conformément au contrat passé pour ce contrôle.

Pour ce qui est des limites, la situation montre que la tâche est moins routinière. Seize élèves utilisent visiblement la TI92, un seul d'entre eux ne parvenant pas à obtenir les limites à droite et à gauche en 2. Un seul donne complètement les justifications attendues. Les essais de justification fournis pour 2 montrent que plusieurs élèves ont tendance à calquer la technique de mise en facteur du terme de plus haut degré mise en place pour l'étude des limites à l'infini. Visiblement, et cela n'a rien d'étonnant en fin de Première, la situation n'est pas claire. Nous renvoyons par exemple à la copie de Francis.

Les élèves pensent que les limites sont un des domaines principaux où la machine les a aidés. Mais, en fait, ils maîtrisent mal ce domaine. Bien sûr, le simple fait de pouvoir trouver les limites à la machine n'aide pas à lui seul à comprendre les limites, ni à produire les justifications attendues.

L'étude des tableaux de variation fournis par 24 élèves sur les 26, montre en général des tableaux corrects du point de vue de la variation mais souvent peu précis (le temps a sans

doute joué ici). De plus, pour quatre élèves, on retrouve le phénomène déjà observé dans l'entretien 2 :la non définition en 2 pose problème.

Pour ce qui est de la détermination d'une fenêtre adaptée, visiblement les élèves ont mis en place au fil de l'année des stratégies efficaces qui dépassent d'ailleurs la seule utilisation de *ZoomFit*. Cette question, à laquelle répondent 21 élèves, est réussie 20 fois.

Les tracés P/C sont eux en général peu soignés mais corrects et la distinction courbe / asymptote est bien marquée. Gérard ne joint pas les neuf points marqués, peut-être a-t-il perçu la contradiction entre son tableau de variation et le tracé que lui fournissait la machine. Cinq élèves fournissent un tracé incorrect et dans deux d'entre eux on voit nettement que la liaison au dessus de la non définition en 2 est considérée comme faisant partie de la courbe.

La question relative à la parabole asymptote n'est traitée que par trois élèves : Georges propose un raisonnement parfait, Serge prend en compte seulement l'ordre et propose x^2. Le dernier élève, dont la production est peu satisfaisante par ailleurs propose x-2. Sans doute la question temps a-t-elle joué, les élèves choisissant en priorité de faire les questions qu'ils savaient faire ensuite, dans une stratégie très raisonnable pour un contrôle.

Classe B

Les notes

	Sabine	Marie	Jean	Franck	Julien	Alice	Pierre
Note contrôle spécifique	5	14	12	13	6	6	13

Sabine et Julien ont une note très notablement inférieure à leur note habituelle. Sabine met cette différence sur le compte des conditions matérielles du contrôle (il faisait très chaud, c'était la fin de l'année...) En fait, elle n'est pas du tout à l'aise avec les tâches demandées, telles que la recherche de résultats avec la TI92, suivie d'une justification par le calcul. Julien a rencontré beaucoup de difficultés en comparant les résultats TI92 et ses calculs en P/C. Il semble qu'il y ait passé beaucoup de temps sans trouver les erreurs en P/C. Pourtant il déclare " Je préfère faire à la main. Je suis plus sûr de moi à la main". La donnée du résultat TI92 le perturbe dans sa vérification au lieu de l'aider. Des difficultés avec l'écran graphique (gestion du Zoom) ont pu aussi jouer un rôle.

Exercice 1 (dérivée d'une fonction trigonométrique et comparaison TI92-P/C)

Alice a développé la fonction en P/C. Il semble qu'elle n'ait pas compris la question.

Pierre, Sabine et Marie ont calculé la dérivée à la machine, mais n'ont pu le faire en P/C, ne connaissant pas la dérivée du cosinus. Aucun n'a pensé à "demander" cette dérivée à la TI92.

Jean, Julien, et Franck ont fait diverses erreurs en dérivant en P/C (élimination du terme constant pour Jean, variable passée au dénominateur pour Franck, oubli du facteur constant pour Julien) qu'ils n'ont pas détectées. Jean dit qu'on pourrait vérifier avec la fonction *tExpand*. Franck déclare qu'il faudrait développer à la main les deux expressions, mais qu'il n'a pas eu le temps.

Les sept élèves sont donc mal à l'aise avec la dérivation des fonctions trigonométriques en P/C. De plus, les techniques de vérification, qu'elles soient P/C ou TI92 sont peu disponibles.

Limites

Sabine donne seulement les valeurs obtenues avec la TI92 sans justification. Les autres élèves font un calcul en P/C vérifient à l'aide de la TI92. L'énoncé demandait de rédiger les calculs de limites, ce qui est sans doute la cause de ce comportement majoritaire.

Il y a donc une évolution dans les compétences en calcul de limites des élèves (sauf chez Sabine qui a sans doute manqué de temps) : les élèves peuvent justifier les valeurs trouvées avec la TI92. Le texte du contrôle insistait sur la rédaction des "raisonnements" et sur la justification soigneuse des "calculs de limite". Il est vrai que les élèves disposent maintenant d'algorithmes (quotient des monômes de plus haut degré, etc.) plus économes en réflexion que l'application des propriétés algébriques des limites.

Calcul de dérivée et étude de variations

Pierre

Calcul de la dérivée à la machine → Calcul de valeurs approchées des zéros de la dérivée à la machine → Variations non justifiées

Julien

Calcul de la dérivée à la machine → Calcul des zéros de la dérivée à la machine → Variations non justifiées

Jean

Calcul de la dérivée à la machine → Calcul des zéros de la dérivée à la machine → Variations justifiées par le calcul de valeurs de la dérivée

Franck

Calcul de la dérivée à la machine → Calcul des zéros de la dérivée à la machine → Variations justifiées par le calcul de valeurs de la dérivée

Marie

Calcul de la dérivée à la machine → Calcul des zéros de la dérivée à la machine → Variations justifiées par un tableau de signes

Sabine

Calcul de la dérivée à la machine → Première factorisation en P/C → Calcul des zéros de la dérivée à la machine → Variations justifiées par un tableau de signes (avec erreur)

Alice

Calcul de la dérivée en P/C → Première factorisation en P/C → Calcul des zéros de la dérivée à la machine → Variations justifiées par un tableau de signes

Le travail de Pierre et Julien est éloigné du contrat habituel. Ils n'ont pas compris que l'injonction de l'énoncé "rédiger les raisonnements comme d'habitude" s'applique à l'étude de variations.

Les autres justifient "comme d'habitude", tout en ayant fait les calculs avec la TI92. On retrouve les deux types de justification : le traditionnel tableau de signes (Alice, Sabine, Marie) après factorisation de la dérivée et l'utilisation de valeurs de la dérivée calculées à l'aide de la TI92 (Jean, Franck).

Polynôme asymptote

Seul Pierre a effectué une résolution en P/C en posant et en résolvant un système. Sabine Marie, Jean et Franck utilisent la fonction *Propfrac* de la TI92. Julien calcule le quotient des termes de plus haut degré. Il obtient un monôme dont la courbe représentative lui semble bien asymptote (il est assez maladroit dans les Zooms qui lui permettraient de constater son erreur). Alice n'aborde pas cette question par manque de temps.

Julien confirme ici ses difficultés d'articulation graphique/algèbre. Il ne peut invalider graphiquement la règle (fausse) qu'il se donne pour la recherche du polynôme asymptote.

Fenêtre

Sabine ne répond pas à cette question. Julien et Alice donnent des paramètres non adaptés. Les autres donnent une réponse correcte.

Appréciation sur l'aide apportée en contrôle par la calculatrice

Voici les réponses des élèves interrogés sur l'aide que la calculatrice apporte en contrôle.

Alice

"Ça a plutôt aidé (à ne pas perdre de temps), surtout pour calculer (la dérivée)"

Franck

"J'aimais bien avoir la sécurité, quoi. Savoir qu'on a été bon, ça met en confiance pour la suite (...) Une fois que la dérivée est bonne, on a le tableau de signe, on a tout ça...donc, ça mettait en confiance.."

Jean

(non enregistré)

Julien

"Je préfère faire à la main. Je suis plus sûr de moi à la main"

Pierre

"Pour la dérivée, ça aurait pas été aussi vite, mais j'aurais réussi quand même, pour vérifier les limites, c'est pratique"

Marie

"Ca m'a aidé quand même, ... Ça permet de vérifier"

Sabine

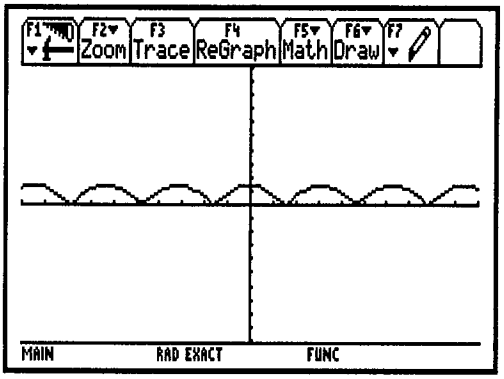
"J'aime mieux faire à la main. Enfin, je m'en sers (de la TI92) "

Partie 2 : Etude de fonction

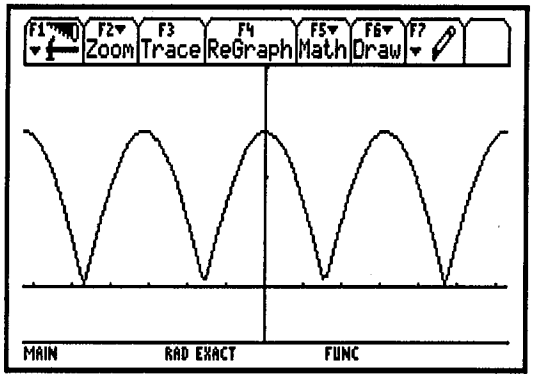
Nous allons préciser la stratégie standard pour cette tâche commune aux deux classes, puis dans chacune des classes, reconstituer pour chaque élève, brièvement l'historique de l'entretien, avant de faire une synthèse.

Stratégie standard:

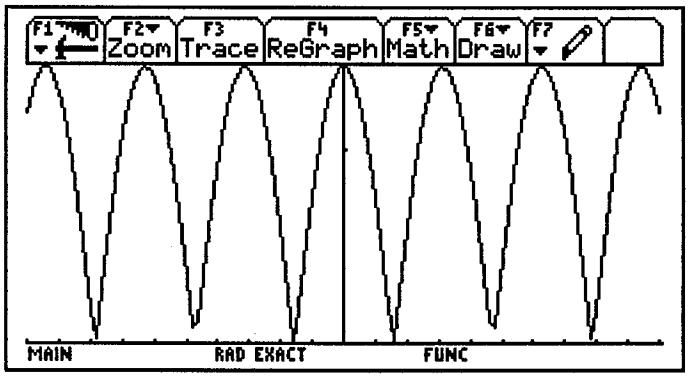
- Entrée standard de la fonction et tracé dans la fenêtre standard. Ceci peut conduire à restreindre la fenêtre en prenant en compte les valeurs effectivement prises par f et la périodicité, par exemple réduire l'intervalle sur x à $[-2\pi, 2\pi]$ et celui sur y à [-1,2] ou [0,2] ou à faire un *ZoomFit* .



Zoom Standard $[-2\pi, 2\pi]$ x [-1,2]



$[-2\pi, 2\pi]$ x [-1,2]

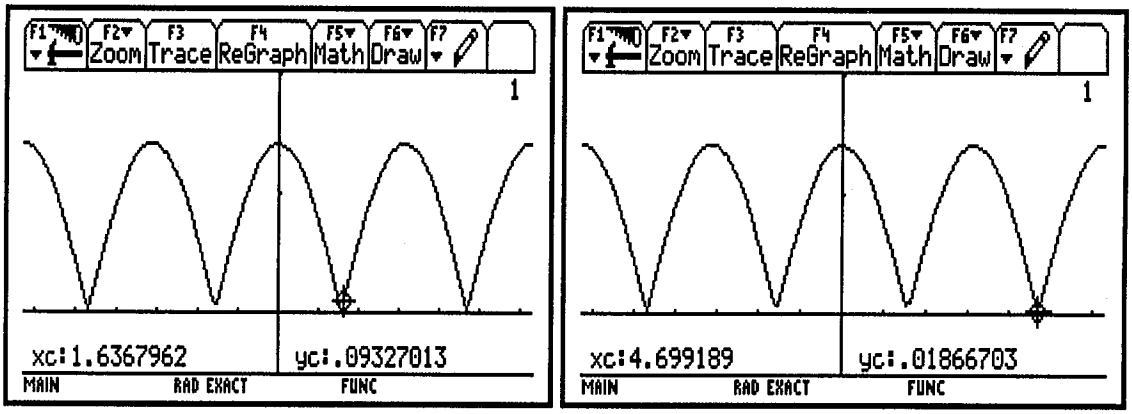


ZoomFit

- Conjectures :
  Le tracé montre une fonction positive, qui semble continue, paire et périodique, si l'on ne s'attache pas de trop près aux détails graphiques. La période semble voisine de 3 au vu des graduations et, vu la nature trigonométrique de la fonction, ceci conduit à conjecturer une période de π. Le minimum semble de 0 et le maximum proche de 1.5. Un calcul mental, à partir de l'expression de la fonction, donne les valeurs exactes 0 et $\sqrt{2}$ pour $f(0)$ et $f(\pi/2)$. Sur la période $[0, \pi]$, la fonction semble décroissante jusqu'en $\pi/2$ puis croissante et elle

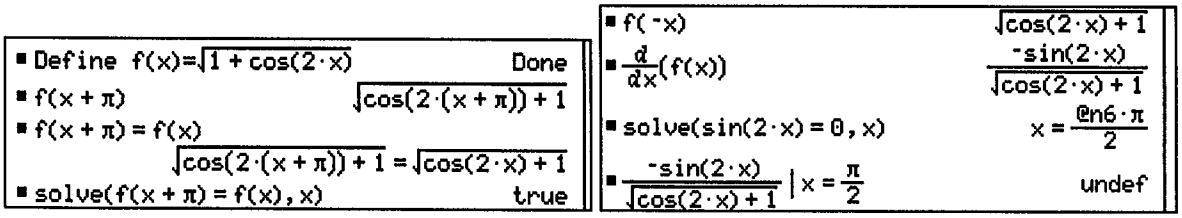
semble présenter un point anguleux en $\pi/2$, donc être non dérivable en ce point mais admettre des demi-tangentes à droite et à gauche de pentes opposées vue la symétrie.

Ces conjectures ont été élaborées à la seule vue du tracé. On peut penser que les élèves ne vont pas nécessairement fonctionner de la sorte mais s'appuyer pour formuler leurs conjectures sur différentes actions possibles dans la fenêtre graphique. En fait, ces actions peuvent troubler l'élaboration des conjectures. En effet, l'utilisation de la commande *Trace* par exemple pour explorer les valeurs extrémales ne va pas donner la valeur 0 systématiquement pour les minimums. Du fait de la discrétisation, elle peut conduire aussi à des valeurs différentes d'un minimum à l'autre et donc à douter donc de la périodicité de la fonction ou de sa parité.



Les commandes du menu *F5* permettent de même d'obtenir maximum et minimum sur un intervalle donné. Si les valeurs données sont les mêmes, les élèves peuvent oublier qu'il s'agit de valeurs approchées et les considérer a priori comme les maxima et minima exacts. L'utilisation de zooms pour aller explorer le voisinage des points anguleux peut d'autre part conduire à des tracés discontinus, toujours pour les mêmes raisons. La formulation des conjectures correctes suppose donc un détachement de certaines caractéristiques visuelles et numériques et un travail de mathématisation certain. Il est pour nous important de savoir jusqu'à quel point les élèves, en cette fin d'année, en sont capables.

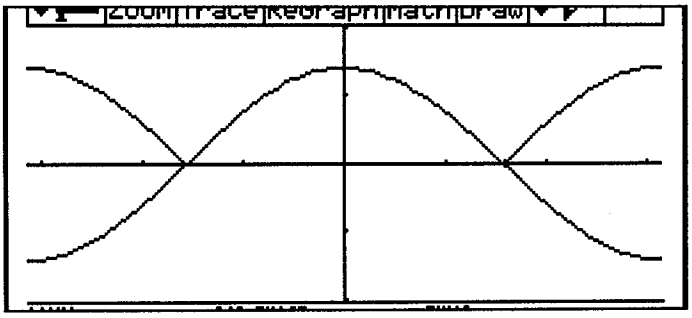
- Preuves :
  Pour le signe de la fonction, sa périodicité et sa parité, les preuves à la main nous semblent les plus économiques. Si l'élève veut utiliser la machine pour prouver la périodicité, il peut perdre du temps : la machine, en effet, ne simplifie pas $f(x+\pi)$, elle ne répond pas *true* au test d'égalité $f(x) = f(x+\pi)$, il faut demander explicitement de résoudre l'équation. En revanche, elle simplifie $f(-x)$ et permet donc de gérer la parité. Pour ce qui concerne l'étude du sens de variation, la machine donne l'expression de la dérivée. Elle résout aussi l'équation $\sin(2x) = 0$ mais non les inéquations associées (figure). L'étude du signe de la dérivée impose donc aux élèves une articulation travail machine et travail P/C. La machine confirme, enfin, si besoin, la non dérivabilité en $(2k+1)\pi/2$ en renvoyant la valeur *undef*.



On peut s'attendre bien sûr, de la part, des élèves, à l'utilisation d'autres stratégies déjà mises en oeuvre dans les entretiens précédents : utilisation de l'application [TABLE], utilisation du

tracé de la dérivée (même si elle peut paraître ici hors contrat), enfin utilisation du principe d'alternance des signes de la dérivée, la machine permettant alors d'obtenir facilement les valeurs de la dérivée en des points autres que ses zéros.

- Liaison avec la fonction cosinus :
  La commande trigonométrique *tExpand* transforme l'expression en $\sqrt{2}\ |\cos x|$. Le tracé du graphe de la fonction $\sqrt{2}\cos x$ conjointement avec celui de f permet de mettre en évidence les rapports des deux courbes et d'en déduire les valeurs des demi-dérivées aux points anguleux. Comme nous l'avons dit plus haut, nous n'attendons pas des élèves qu'ils se lancent spontanément dans ces transformations en P/C ou avec la machine, bien qu'ils soient censés connaître les formules donnant les lignes trigonométriques des arcs doubles.



Classe A

Comportements observés

Anne

Conjectures :

Fonction périodique : questionnée sur la période, elle propose 2π mais dit ne pas trop savoir. Fonction paire « car elle se reproduit par rapport à l'axe des ordonnées ». Questionnée sur le sens de variation, elle décrit les alternances de croissance et décroissance sans préciser les intervalles sur x correspondants, malgré la sollicitation en ce sens de l'observateur. Pour les maxima, elle dit : environ 1.5 et sollicitée de préciser, elle propose de regarder dans [TABLE], prend la valeur pour x = 3 et conclut que c'est à peu près : 1.4. L'observateur demande si le maximum est vraiment obtenu pour x = 3, elle reprend le graphique, trouve que c'est à peu près ça, fait calculer dans [HOME] $f(3)$ et ne voit pas d'autre moyen. Interrogée sur la dérivabilité, elle ne semble pas bien comprendre la question, évoque croissance et décroissance puis dit ne pas savoir le voir sur le graphique.

Preuves :

Période : elle écrit ce qu'elle doit démontrer mais n'arrive pas à transformer l'expression et conclure sans aide.

Parité : elle fait calculer $f(-x)$ dans [HOME] et conclut.

Sens de variation, dérivabilité : elle fait calculer la dérivée dans [HOME], remarque que le dénominateur est positif et donc qu'il suffit d'étudier le signe du numérateur, mais ne sait pas trop comment faire avec sin(2x). L'observateur essaie sans succès de l'aider en la ramenant au graphe de f (elle repasse aux valeurs entières sans faire de lien avec des multiples de π) puis passe à la suite.

Comparaison avec la fonction cosinus : questionnée, elle pense seule à la fonction cosinus. Sur le tracé, elle remarque que le maximum n'est pas le même, va calculer $f(0)$ dans [HOME], puis propose de mettre le cosinus au carré pour n'avoir que des valeurs positives. L'observateur lui propose plutôt de chercher à transformer l'expression initiale et, comme elle ne sait pas, lui montre comment transformer avec *tExpand* la quantité sous le radical. Puis il l'aide à passer à l'expression en valeur absolue.

Charles

Conjectures :

Fonction périodique de période π « parce que c'est à peu près trois unités ». « Courbe toujours au-dessus de l'axe des x », reformulé en fonction positive, sur sollicitation de l'observateur. Croissante et décroissante, par exemple décroissante sur $[0, \pi/2]$ et croissante sur $[\pi/2, \pi]$. Fonction « qui n'a pas une grande amplitude », reformulé en « qui a une limite », « qui a une valeur maximale », maximum $f(0)$ et minimum 0. Questionné sur les symétries, il dit qu'il y a plusieurs axes de symétrie, par exemple l'axe des ordonnées ou $x = 3\pi/2$. L'observateur lui demande ce que l'on peut en conclure sur la fonction, il répond qu'elle est paire. Pour lui la fonction est définie en tout point « puisque la calculatrice ne trace pas d'asymptote » et elle est aussi dérivable en tout point, parce qu'il n'y a pas de problèmes comme « s'il y avait des valeurs en $+\infty$. »

Preuves :

Périodicité : il propose de montrer que $f(-\pi) = f(\pi)$. L'observateur lui rappelle la définition de la périodicité. Il écrit alors $f(x+\pi) = \sqrt{1+\cos 2x} + \pi$. l'observateur l'aide à corriger puis lui suggère d'utiliser la TI92. La machine renvoie $\sqrt{\cos(2(x+\pi))+1}$. Il repasse en P/C écrit une expression de $f(x+\pi)$ en oubliant les parenthèses autour de $2x+2\pi$, et quand elles sont rajoutées n'arrive pas à conclure.

Sens de variation, dérivabilité : il calcule la dérivée et sur demande de l'observateur déclare que la fonction est dérivable quand le dénominateur n'est pas nul. L'observateur l'aide à déterminer les valeurs correspondantes.

Comparaison avec la fonction cosinus : Charles pense tout de suite au cosinus, tout en soulignant « qu'il ne rebondit pas pareil ».L'observateur fait tracer la fonction cosinus et comparer les deux graphes, puis suggère de transformer l'expression de f pour mieux voir les rapports. Charles ne voit pas comment faire. L'observateur transforme avec *tExpand* et demande d'utiliser l'expression pour comparer. Charles remarque le $\sqrt{2}$, en demande une valeur approchée et fait le lien avec $f(0)$.

Francis

Conjectures

Fonction positive, peut-être nulle en certains endroits. Regarde avec *Trace* puis en utilisant la commande *F5-Minimum*. Après quelques essais, conclut « qu'elle ne descend pas en 0 ». Fonction périodique de période 3π (il pense que le premier minimum en $\pi/2$ n'a pas la même valeur que celui en $3\pi/2$). Change de fenêtre : $[0,20]x[-1,2]$ au lieu de $[-10,10][-1,2]$. Il compare les minimums en $\pi/2$ et $7\pi/2$ et conclut que ça doit faire 3π car c'est entre 9 et 10. Utilise la commande *Maximum* pour voir s'il y a les mêmes maximums. Trouve les mêmes valeurs et conclut que c'est majoré par cette valeur : 1.4142136. Questionné sur la parité, il

reprend la fenêtre antérieure et conclut qu'elle doit être paire « puisque de chaque côté, le deuxième minimum est à la même distance de l'origine ». Questionné sur le sens de variation, il reprend la fenêtre positive et veut regarder pour une période entre 0 et 3π. Il utilise la commande *F5-Maximum* pour comparer les valeurs des maximums extrêmes, ceci le conduit à xc = 9.4111... Il fait calculer dans [HOME] une valeur approchée de 3π pour contrôler. Il donne ensuite le sens de variation sur l'intervalle en cherchant les minimums et maximums successifs avec les commandes correspondantes. Il repère que les variations « apparemment marchent par intervalles de π. ». Questionné sur la dérivabilité, il dit qu'il pense que oui parce que la racine est toujours définie. Sur le graphe, il dit qu'on ne voit pas très bien près des minimums. Il propose de faire un zoom, utilise *ZoomBox* (2fois) puis conclut que oui.

Preuves

Périodicité : Démontre à la main que 3π est période puis, quand l'observateur lui demande si c'est la plus petite, propose 2π et fait le calcul pour π. Justifie ensuite le fait qu'on ne puisse aller plus loin.

Parité : démonstration standard à la main avec référence au cercle trigonométrique.

Sens de variation, dérivabilité : calcule f' dans [HOME] et dit que le résultat est « barbare ». Sur question de l'observateur, dit que la fonction est dérivable partout sauf peut-être aux points anguleux (terme introduit dans la fin de la phase de conjecture par l'observateur), mais qu'il ne sait pas ce qui se passe en ces points : « je sais pas... la dérivée est nulle ? ». Fait ensuite le lien avec la non définition pour $\sqrt{\cos(2x)+1}=0$, mais ne va pas plus loin.

Comparaison avec la fonction cosinus : Questionné, évoque la fonction cosinus. L'observateur lui demande de la faire tracer. Il repère la correspondance des maximums. L'observateur lui propose alors de transformer l'expression. Il pense à aller dans Trigo et l'observateur suggère de choisir *tExpand*. Francis l'applique à $1+\cos(2x)$ et obtient $2(\cos x)^2$. Il commence à raisonner comme si c'était f et l'observateur l'aide à passer à la valeur absolue.

Françoise

Conjectures

Fonction périodique, n'a pas d'idée a priori de la période mais montre deux minimums successifs. Questionnée sur une valeur numérique possible, elle dit qu'elle essayerait avec 2π. Fonction positive, avec un axe de symétrie (axe Oy), ce qui lui semble normal puisqu'elle est périodique. Questionnée sur les maxi et mini, elle dit que les maxi sont toujours les mêmes mais pas les mini (toujours les phénomènes de discrétisation). La fonction lui semble dérivable parce que « elle est pas coupée, il y a pas un point où elle est pas définie, quoi... ». L'observateur résume les conjectures.

Preuves

Périodicité : montre à la main que 2π est période. L'observateur demande s'il en existe une plus petite. Françoise essaie π et conclut.

Parité : elle ne se souvient plus.

Sens de variation, dérivabilité : elle est effrayée à l'idée de calculer la dérivée. Encouragée à le faire à la machine, elle obtient la dérivée et s'arrête. L'expression lui paraît trop compliquée. Encouragée, elle formule que le dénominateur doit être toujours positif car le cosinus reste entre -1 et 0 et donc que f' a le signe du numérateur. Elle l'écrit, trace le cercle

trigonométrique puis s'arrête. L'observateur doit l'aider fortement pour la résolution de $\sin(2x) = 0$ puis la ramener à l'intervalle $[-\pi,\pi]$ qu'elle choisit pour étudier la fonction. Elle passe de $2x = \pi+k\pi$ à $x = \pi/2+k\pi$ et commence un tableau de variation en incluant les valeurs $\pi/2$ et $-\pi/2$ puis est de nouveau bloquée sur la détermination du signe de f'. L'observateur le fait avec elle, après lui avoir indiqué son erreur dans le passage de 2x à x. Elle complète le tableau de variation, à partir du signe du numérateur de la dérivée et fait calculer en [HOME] les valeurs de f aux points marqués : $-\pi$, $-\pi/2$, 0, $\pi/2$, π. L'observateur lui demande alors de vérifier les valeurs de la dérivée en ces points, puisqu'elle a tout fait avec le numérateur. Elle obtient un *undef* pour $-\pi/2$, est étonnée puis parvient à interpréter en revenant à l'expression de la dérivée. L'observateur lui demande ensuite si ce qu'elle a fait lui permet de répondre à la question qu'elle s'était posée sur les minimums pendant la phase de conjecture : identiques ou non. Françoise repasse en [GRAPH], utilise *Trace* pour repérer les coordonnées, ne trouve pas 0 pour les minimums et n'arrive pas seule à faire le lien avec son tableau de variation. L'observateur doit beaucoup l'aider. Ensuite il essaie de l'engager sur la voie de la tangente mais elle n'a pas d'idée.

Comparaison avec la fonction cosinus : l'observateur lui propose de tracer la fonction $x \to \sqrt{2}\cos x$ et de comparer les graphes, elle parle de coïncidence et de symétrie mais est visiblement fatiguée.

Georges

Vérifie qu'il est bien en mode Fonction, entre la fonction dans [Y=] et la fait tracer dans la fenêtre standard.

Conjectures

Fonction positive, périodique de période à peu près π (repère l'écart sur x entre deux minimums successifs, en fonction des graduations et trouve environ 1.5), maximum environ 1.5 et minimum 0 ou proche de 0. Remet en doute la période (mini, maxi pas exactement au même niveau) : apparemment plutôt 2π mais tracé pas assez précis pour être sûr. Propose de faire un zoom pour mieux voir et utilise *ZoomFit*. En déduit que la période est plus grande et utilise l'option *Trace* pour suivre le tracé. En explorant les sommets et minima, conclut à une période de 3π et propose de le tester dans [HOME]. Puis se dit que 2π devrait marcher puisque cos est de période 2π. L'observateur résume les conjectures faites et interroge sur la parité et la dérivabilité. Au vu du graphe, dit qu'elle ne semble pas paire mais qu'au vu de l'expression algébrique, elle devrait l'être, Revient alors sur sa première impression graphique : « ça a l'air d'être vrai, elle admet comme axe de symétrie l'axe des ordonnées ». f lui semble dérivable partout « puisqu'elle a pas l'air de changer de signe trop rapidement, proche de 0 ou proche de l'infini ». L'observateur montre les points anguleux. Georges se positionne avec *Trace* à proximité du premier minimum positif, dit que le zéro a l'air d'être aux alentours de $\pi/2$, mentalement remplace dans l'expression algébrique, arrive à $\sqrt{0}$ et conclut à l'impossibilité, puis rit et dit que ça fait bien 0. L'observateur interroge sur le sens de variation. Georges le lit sur $[0, \pi]$ puis dit qu'ensuite il suffit de faire des translations de vecteur π. L'observateur résume l'ensemble des conjectures et Georges est d'accord.

Preuves

Périodicité : fait calculer dans [HOME] $f(x+2\pi)$. La machine ne simplifiant pas, fait le calcul à la main et se rend compte que π peut aussi marcher. Conclut sur la période.

Parité : propose de faire vérifier $f(-x) = f(x)$. L'observateur lui dit de passer à la suite.

Sens de variation, dérivabilité : fait dériver la fonction dans [HOME], définit la dérivée et demande ses zéros. Obtient {@n3 π/2}. Interprète en $f'(x) = 0$ pour $x = \pi/2+k.2\pi$. Commence le tableau de variation sur [0, π], fait calculer $f'(0)$, $f'(\pi)$ et $f'(\pi/3)$, en déduit le signe de f' et termine le tableau de variation, en marquant 0 pour la valeur de $f'(\pi/2)$.

L'observateur lui demande ce qu'il a trouvé pour la dérivée en π/2. Georges fait calculer dans [HOME] et obtient *undef*. Il rajoute une double barre verticale pour π/2, puis fait calculer $f(0)$ et limite la double barre à f'. Interprète la non-définition de f' en repérant la nullité du dénominateur qui est $f(x)$.

L'observateur essaie de l'aider à analyser le point anguleux, en lui demandant quelle serait la tangente en ce point. Pour Georges, il y a deux tangentes mais ce n'est pas gênant. Il trace le graphe de la fonction cos et montre deux tangentes en deux points symétriques par rapport à l'axe (Oy), en disant qu'elle est dérivable et qu'on a bien la même chose avec deux tangentes. L'observateur lui explique la différence.

Comparaison avec la fonction cosinus : questionné, Georges évoque la fonction cosinus et ensuite fait un lien avec $\sqrt{2}$ cosx. Il fait tracer et constate la coïncidence pour les parties positives, ce qui lui semble normal puisque la fonction racine ne peut pas être négative. Fin de l'entretien.

Gérard

Conjectures

Fonction périodique, pour la période propose 2π car il y a un cosinus. L'axe des y est axe de symétrie, mais il ne sait pas faire sans aide le lien avec la parité. La fonction a d'autres axes de symétrie. L'observateur interroge sur le sens de variation. Utilise les commandes *F5-Maximum* et *Minimum* pour trouver les maxi et mini et conclut que les valeurs sont 1.41 et 0. Lit le sens de variation sur le graphe sans préciser les intervalles correspondants sur x. L'observateur interroge sur la dérivabilité. Gérard répond : « oui, parce qu'elle est toujours pareille ». L'observateur résume les conjectures.

Preuves :

Périodicité : entre en [HOME] l'égalité $f(x) = \sqrt{1+\cos(2x+4\pi)}$ et obtient $\sqrt{1+\cos(2x)} = \sqrt{1+\cos(2x)}$. Conclut que 2π est période, puis essaie avec π, en rappelant l'égalité sur la ligne de commande et en la modifiant. Il obtient le même résultat et conclut que la période est π.

Parité : ne se souvient plus comment faire.

Sens de variation, dérivabilité : va regarder dans [TABLE] mais sans modifier [TblSet]. Commence un tableau de variation sur [0, π], fait calculer la dérivée dans [HOME], puis $f'(0)$, $f'(\pi)$ et $f'(\pi/2:)$, en utilisant la syntaxe « tel que : |). Rajoute π/2 dans le tableau de variation et une double barre. Fait calculer $f'(\pi/4)$ et rajoute cette valeur dans le tableau de variation. Repasse en [GRAPH], change la fenêtre en faisant *ZoomFit* sur [0, π]. Repasse en [HOME], cherche une valeur entre π/2 et π pour calculer la valeur de la dérivée en ce point mais a du mal. L'observateur lui propose 3π/4 . Il continue et en déduit le signe de la dérivée sur [0, π]. Complète le tableau de variation (maxi : 1.41 qu'il va rechercher dans [TABLE]). L'observateur demande la valeur exacte. Gérard la fait calculer dans [HOME]. Fait calculer $f(\frac{\pi}{2})$, trouve 0 et est

étonné car il se souvient avoir eu *undef.* Se rappelle que c'était pour la dérivée. L'observateur le confronte à sa conjecture sur la dérivabilité et le fait revenir au tracé. Gérard explique que oui, ce n'est pas dérivable « parce qu'il y a un petit intervalle entre les deux » (problème de discrétisation au voisinage du minimum). L'observateur lui demande s'il y a une tangente. Gérard utilise le menu *F5* de la TI92 et obtient le message : « no solution »., il en conclut qu'il n'y a pas de tangente en ce point.

Comparaison avec la fonction cosinus : questionné, Gérard l'évoque spontanément. L'observateur l'aide à trouver le coefficient multiplicatif et lui demande de tracer la fonction $\sqrt{2}$ cos. Il doit l'aider à formuler les rapports entre les deux fonctions, puis lui explique que la non-dérivabilité n'est pas liée au saut apparent comme il le pensait et comment utiliser la fonction auxiliaire pour trouver les coefficients directeurs des demi-tangentes.

Serge

Conjectures

Fonction périodique. En utilisant *Trace*, repère $-\pi/2$ et $\pi/2$ et conjecture que la période doit être π. Questionné sur la parité, dit qu'il ne se souvient pas. L'observateur lui rappelle les définitions et interprétations graphiques et il conclut que la fonction doit être paire. Questionné sur le sens de variation, il le décrit sur $[0,2\pi]$. Pour trouver les valeurs des extrema, il va dans [TABLE] et lit la valeur en 0, puis va dans [TblSet], modifie le pas en le choisissant égal à $\pi/2$ et lit les valeurs correspondantes dans [TABLE] (les valeurs minimales données sont 0). Questionné sur la dérivabilité, il répond d'abord « oui » et passe dans [HOME]. Il fait calculer la dérivée, l'entre dans Y =, la fait tracer puis affiche les valeurs dans [TABLE] et conclut à la non-dérivabilité en $\pi/2$. Il avoue ne pas savoir le voir sur le tracé.

Preuves

Périodicité : il fait calculer dans [HOME] $f(x+\pi)$ et obtient $\sqrt{1+\cos(2(x+\pi))}$. Il dit que ça fait $f(x)$ parce que « chaque fois qu'on a π on revient à la valeur ». L'observateur lui demande de justifier plus précisément ; il détaille le calcul puis conclut.

Parité : écrit sur sa feuille $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = \sqrt{1+\cos-2x}$ puis ne voit pas comment continuer. L'observateur lui rappelle qu'il peut utiliser la TI92. Il fait calculer $f(-x)$ et obtient : $\sqrt{(\cos 2x)+1}$. Il constate l'égalité mais se demande comment on arrive à ce résultat. L'observateur l'aide à voir que cela revient à montrer que $\cos(-2x) = \cos 2x$ et, à ce moment là, il continue seul.

Sens de variation, dérivabilité : il hésite et l'observateur lui suggère de travailler sur $[0, \pi]$. Il fait alors calculer dans [HOME] $f(0)$, $f(\pi/2)$ et $f(\pi)$, puis commence à tracer un tableau de variation complet sur cet intervalle. Il met d'abord 0 pour $f'(\pi/2)$ mais corrige très vite et *Trace* la double barre d'indétermination. L'observateur lui demande s'il peut justifier le signe de la dérivée. Serge ne répond pas. Il lui demande ensuite pourquoi il a mis la double barre en $\pi/2$. Serge répond qu'il l'avait vu tout à l'heure. Il repasse dans [TABLE] pour vérifier puis dans [HOME] et, sollicité, arrive à justifier la non-définition à partir de l'expression algébrique de la dérivée. L'observateur lui demande s'il pouvait le voir sur les tracés, il répond qu'il ne voit pas trop.

Comparaison avec la fonction cosinus : l'observateur lui fait alors désélectionner f' et lui demande si le tracé de f ne lui rappelle pas une fonction connue. Il n'a pas d'idée. L'observateur lui suggère alors de transformer l'expression de f dans [HOME]. Serge hésite entre

tExpand et *tCollect*, choisit la seconde et obtient la même expression. Encouragé à utiliser l'autre, il arrive à $\sqrt{2}\ |\cos x|$ et dit qu'il ne comprend pas. L'observateur l'aide à piloter la machine pour obtenir le détail des calculs. L'entretien se termine par la comparaison avec le tracé de cos x, en s'appuyant sur cette nouvelle forme.

Vincent

Conjectures

Fonction positive de période π (car les arches se reproduisent tous les π), fonction positive. Pour déterminer le maximum, utilise la commande *Maximum* du menu *F5* mais a besoin de l'observateur pour définir l'intervalle de recherche (ne comprend pas le sens de *lowerBound*) et choisit [0,1.5], confondant intervalle sur x et sur y. Il utilise également *ZoomBox* pour contrôler. L'observateur lui demande s'il peut calculer la valeur exacte, ce qu'il fait en faisant calculer dans [HOME] $f(0)$. Pour les minimums, il utilise également la commande *Minimum* du menu *F5*, cette fois sur l'intervalle $[0, \pi]$ et trouve une valeur approchée non nulle. Questionné sur le sens de variation, il le décrit sur $[-\pi/2, \pi/2]$. L'observateur sort du cadre prévu en lui faisant calculer la valeur exacte du minimum $f(\pi/2)$ et en lui expliquant pourquoi ce n'est pas la valeur qu'il a trouvée par *F5*. Questionné sur la dérivabilité, il dit ne pas savoir la reconnaître sur le tracé.

Preuves : pour des raisons d'horaire scolaire, la partie preuve de cet entretien n'a pu disposer du temps normalement imparti.

Périodicité : justification correcte à la main de la période π.

Parité : non mentionnée

Sens de variation, dérivabilité : néant

Comparaison avec la fonction cosinus : Vincent ne voit pas de rapport a priori avec le tracé d'une fonction connue.

Tableaux de synthèse

Dans les tableaux ci-après, nous synthétisons les informations sur cette partie.

	Périodicité	Parité	Sens de variation, Mini, Maxi	Dérivabilité
Anne	2π?	oui car se reproduit / Oy	~1.5 (gr) ~1.4 (tble)	ne voit pas
Charles	π	plusieurs axes de symétrie et parité	0 et f(0) variation sur $[0, \pi]$	oui
Francis	3π (doute = maxi, mini)	oui car mini équidistants de O	valeurs approchées par F5, variation sur $[0, 3\pi]$	oui et vérifie par ZoomBox
Françoise	2π?	symétrie /Oy donc paire, pério⇒paire	maxi identiques, mini différents (gr)	oui
Georges	π (doutes = mini, maxi) - 2π - 3π - 2π?	non (gr)-oui (exp) - oui (gr)	~1.5 (tr), ~0 (tr) puis 0 variation sur $[0, \pi]$	oui
Gérard	2π	symétrie /Oy	1.41 et 0 par F5 variation sans valeurs de x exactes	oui
Serge	π	oui aidé	valeurs approchées par [TABLE] variation sur $[0,2\pi]$	oui puis non après calcul [HOME]
Vincent	π		valeurs approchées par F5 - variation sur $[-\pi/2, \pi/2]$	ne voit pas

Les conjectures

	Périodicité	Parité	Sens de variation	Non-dérivabilité
Anne	P/C n'y arrive pas seule	calcul de f(-x) dans [HOME]	ne sait pas étudier signe de sin(2x)	non abordé
Charles	$f(-\pi) = f(\pi)$ puis aide lourde	non abordé	non abordé	algébrique sur intervention
Francis	3π en P/C puis 2π et π sur intervention	démonstration P/C	non abordé	algébrique sur intervention
Françoise	2π en P/C, π sur intervention	ne sait pas	signe f' P/C très aidée pb liaison Tableau de variation et graphe	algébrique sur intervention
Georges	[HOME] puis P/C réduit à π	[HOME] $f(-x) = f(x)$	[HOME] : zéros f' et valeurs, alternance	algébrique sur intervention
Gérard	[HOME]: test égalité réduction à π	ne sait pas faire	[HOME] : valeurs partic. de f' et alternance	algébrique gr : non car saut
Serge	[HOME] puis P/C sur intervention	$f(-x) = f(x)$ puis aide	au vu du graphe	algébrique
Vincent	P/C correct	non abordé	non abordé	non abordé

Les preuves

	[HOME]	[Y=]	[WINDOW]	[GRAPH]	[TblSet]	[TABLE]
Anne	**Define f(x)* **~f(3)* pour maxi	*y1=f(x)*	*[-2,2]x[-2,2]* pour voir			pour maxi
Charles		*entrée f*				
Francis	**Define f(x)* *~ pour variations	*y1=f(x)*	**[0,20]x[-1,2]* pour période. puis pour variations **[-10,10]x[-1,2]* pour parité	**Trace* et *F5-Minim* pour *f* 0 **F5-Maxim* pour maxi puis pour variations **F5-Minimum* pour variations **ZoomBox* pour Df'		pour extrema
François e	*Define f(x)*	*y1=f(x)*		*ZoomFit*		
Georges	*Define f(x)*	*y1=f(x)*		**ZoomFit* puis *Trace* pour période. **Trace* pour Df'		
Gérard	*Define f(x)*	*y1=f(x)*		* *ZoomFit* **F5-Maxim* pour maxi **F5-Minim* pour mini		
Serge	*Define f(x) f'(x),x)*	*y1=f(x)*		* *Trace* pour période	pour val. particul. et Df'	*pas π/2 pour valeurs part. ≠0
Vincent	**Define f(x) *f(0)* et *f(π)* pour maxi **f(π/2)* pour mini	*y1=f(x)*		**F5-Maximum* puis *ZoomBox* pour maxi **F5-Minimum* pour mini		

Commandes utilisées pendant la phase de conjecture.

	[HOME]	[WINDOW]	[GRAPH]	[TABLE]
Anne	**d(f(x),x)* **f(-1)* et *f(-2)* pour *f'* **f(-x)* pour parité **~f'(3)* pour variations			
Charles	**f(x+π)=* **d(f(x),x)* pour Df'			
Francis	*d(f(x),x)*			
François e	**d(f(x),x)* **f(-π),f(-π/2),f(0),f(π/2),f(π)* *Define df(x), f'(0), f'(-π/2* pour variations		*Trace* pour mini	
Georges	**f(x+2π)* **d(f(x),x) Zéros df* *f'(0),f'(π),f'(π/3),f(0)* pour variations			
Gérard	**f(x)=√1+cos(2x+4π)* **d(f(x),x)* *f'(0),f'(π),f'(π/2),f'(3π/4),f(0),f(π/2)* pour variations	**Xmin=0 Xmax=π* *ZoomFit* pour variations **Tangente* pour Df'	*ZoomBox*	(2) pour variations et contrôle de *f*(0)
Serge	** f(x+π)=* **f(-x) =* **f(0),f(π/2)* et *f(π)* pour variations **df(x)* pour Df'		Cf et Cf' pour extrema	pour Df'
Vincent	** √(0)* pour *f'*			

Commandes utilisées pendant la phase de justification

Classe B

Nous rapportons le travail des élèves en distinguant les quatre propriétés de la fonction mises en évidence dans l'étude a priori : périodicité (π), parité, étude de variations (maximum en k π, minimum en π/2 + k π), comportement de la courbe aux points minimums (ce sont des points anguleux). Pour chacune de ces propriétés nous distinguons la phase de conjecture où l'élève fait un repérage de la propriété sur le graphe et la phase de preuve où il tente de justifier la propriété par une étude algébrique.

Périodicité

Conjecture

Alice fait un vague geste de répétition en annonçant que la fonction "n'a pas de limite". L'observateur ayant précisé que la propriété est la périodicité et demandé la valeur de la période, elle annonce 3, puis précise 3.1, puis guidée par l'observateur "π"

Franck annonce de même que la fonction est périodique, fait plusieurs zooms pour trouver 3 puis 3,1 3,2 et annonce spontanément π. Pierre procède de même.

Jean annonce que la fonction est périodique. Il déclare que la période "c'est entre deux vagues", annonce 1.5, puis se reprend : 3. Il zoome avant puis utilise la fonction distance du menu Draw et annonce 3,1 3,2. L'observateur demande de faire référence à des valeurs remarquables, Jean annonce "1/2, racine de 3 sur 2...", puis, l'observateur ayant rappelé le contexte trigonométrique : π, 2π, $\pi/2$... Il faut encore une sollicitation de l'observateur pour qu'il annonce π.

Julien a besoin d'être très guidé par l'observateur pour apercevoir la propriété de périodicité sur le graphe et pour conjecturer la valeur de la période.

Marie annonce spontanément que la fonction est périodique, mais ne peux pas préciser la valeur de la période.

Pierre fait un *ZoomIn*, puis utilise la fonction *Trace*, et annonce que la période est de 3,1 à peu près, puis que « ça doit être π ».

Sabine repère la périodicité et annonce une période de 3,5 ou 4 à peu près. L'observateur tente de faire préciser par référence à la période du cosinus, mais Sabine ne la connaît pas.

Preuve

Alice ne parvient pas, même très guidée, à exprimer algébriquement la périodicité.

Franck exprime d'abord la propriété en $f(x)+\pi = f(x)$. L'observateur ayant corrigé en $f(x+\pi)$, il tente plusieurs fonctions de la TI92 pour simplifier cette expression. *tExpand* donne la forme simplifiée de la fonction, sur laquelle on ne reconnaît pas l'expression de $f(x)$. Il faut l'aide de l'observateur pour que Franck simplifie de même l'expression de $f(x)$ et reconnaisse l'égalité.

Jean exprime spontanément la propriété algébriquement avec une période T et une erreur de parenthésage. L'observateur tente de faire appel aux propriétés du cosinus, mais Jean préfère utiliser la TI92 et obtient comme Franck l'expression simplifiée. Curieusement, il raisonne alors sur cette expression simplifiée à l'aide des propriétés du cosinus et reconnaît sa périodicité π.

Julien ne parvient pas à exprimer algébriquement la périodicité.

Marie n'aborde pas cette justification.

Pierre démontre la périodicité en P/C, puis, sur invitation de l'observateur, il entre $f(x+\pi)$, et $f(x)$-$f(x+\pi)$ dans la TI92, mais ne parvient pas à faire simplifier cette différence.

Sabine demande comment on démontre la périodicité. L'observateur indique l'expression algébrique de la propriété. Sabine introduit cette expressions dans la TI92, applique la fonction *solve* et obtient "*true*", ce qui la satisfait.

Parité

Conjecture

Alice énonce la symétrie après que l'observateur ait fait remarquer que la courbe "part un peu pareil des deux côtés"

Marie ne voit pas la propriété, même sollicitée par l'observateur.

Jean pense à une symétrie centrale : après que l'observateur ait demandé s'il existe une symétrie, il donne les coordonnées d'un point "Euh oui en (0, 1,4), à peu près", puis se reprend "Enfin l'axe des ordonnées, donc pas de symétrie centrale".

Sabine énonce la symétrie après que l'observateur ait fait remarquer la similitude du comportement de la fonction de part et d'autre de l'axe des *y*.

Julien : "... On dirait qu'il y a une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées".

Franck : " C'est une fonction symétrique par rapport à l'axe des ordonnées".

Pierre déclare que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Preuve

Julien annonce qu'il va démontrer la symetrie/axe des ordonnées, puis déclare "Je ne sais plus si c'est pair ou impair qu'il faut démontrer". L'observateur ayant précisé "pair" et ayant indiqué "On peut se servir du module [HOME]" pour inciter à l'usage de la calculatrice, Julien annonce "Faut montrer que $f(-x) = f(x)$" puis que "cos(-2x), ça vaut cos(2x)" et demande "c'est bon ce que je fais ?"

Franck écrit $f(x) = -f(-x)$, puis barre le premier signe -. Ensuite, il développe $f(-x)$ et déclare « Donc c'est égal à $f(x)$ parce que -cos 2x et cos 2x c'est la même chose. »

Pierre démontre en P/C.

Les autres élèves n'abordent pas cette justification.

Etude de variations

Conjecture

Alice sollicitée par l'observateur, annonce "le minimum c'est zéro". L'observateur ayant demandé les valeurs de *x* elle répond "Pour toutes.." Sollicitée pour la valeur du maximum, elle déplace le réticule et répond "Le maximum c'est 1,37", puis écrit 1,4. Pour les valeurs de *x*, elle fait comprendre qu'il s'agit de "la moitié de la période", mais ne peut préciser davantage.

Franck annonce d'emblée "max $y \cong 1,4$ "min $y = 0$",. L'observateur ayant demandé les valeurs de *x* il répond " *x* ben, c'est sur R..", puis "apparemment, il y en a plusieurs".

Jean annonce "le maximum c'est 1,4 à peu près, et le minimum 0" mais a plus de mal à énoncer les abscisses de ces points " C'est la période, π ". L'observateur ayant demandé les valeurs sur une seule période il annonce "en $x = -1,5$ et 0 en 1,5, et $y = 1,4$ en $x = 0$"

Julien, sollicité par l'observateur, déplace le réticule et annonce "y maximum ça vaut environ vers 1,4, et minimum 0". L'observateur ayant demandé les valeurs de *x* il répond "maximum pour $x = 0, \pi, 2\pi, k\pi$" puis "minimum pour $\pi/2$ on dirait, $k\pi/2$"

Marie est gênée par les maximums multiples. Elle peut seulement énoncer " Ben les maximums c'est chaque..."

Pierre trouve les valeurs exactes des extrémas par recherche sur la courbe en mode trace. "Max en $y = \sqrt{2}$, mini en 0", mais ne donne pas les valeurs de *x*.

Sabine annonce un maximum en $y \cong 1,4$ et $x = 1,5+n\pi$ et un minimum en $y = 0$ et $x = -1,5+n\pi$.

Preuve

Franck tente une étude en calculant à la machine la dérivée, mais il ne détermine pas d'intervalle d'étude et rencontre des difficultés pour déterminer les zéros de la dérivée.

Jean détermine spontanément l'intervalle d'étude "0 π, ou 2π, non π/2 puisque c'est périodique". Il cherche la dérivée avec la calculatrice et annonce "à cause du signe de - sinus, c'est décroissant...". On ne sait pas s'il a conscience de ce que le sinus n'est pas nécessairement positif. Par la suite, il rencontre beaucoup de difficultés pour déterminer les zéros de la dérivée.

Julien doit être guidé pour restreindre l'intervalle de variations et pour interpréter les zéros de la dérivée donnés par la TI92. Finalement, il graphe la dérivée pour l'étude de signes.

Marie fait une étude de variations. Bien que très guidée par l'observateur, elle rencontre de multiples difficultés : détermination de l'intervalle d'étude, signe de la dérivée... Elle ne sait pas calculer les dérivées sans le formulaire. Ayant utilisé la TI92 pour le calcul des zéros de la dérivée, elle obtient $x = \frac{@n23\pi}{2}$ qu'elle traduit difficilement en $\frac{k\pi}{2}$.

Les autres élèves n'abordent pas cette justification.

Comportement de la courbe aux points minimums

Alice déclare "On voit pas trop".

Franck note que "la dérivée, elle est pas définie sur R", mais ne parvient pas davantage à caractériser le comportement de la courbe.

Jean déclare qu'il n'y a pas de tangente "parce que il y en a deux", mais ensuite il a bien du mal à faire la différence avec un minimum classique du type parabole.

Marie "ne voit pas" ce qu'il y a comme tangente.

Ce point n'est pas abordé avec les autres élèves faute de temps.

Synthèse de l'étude de la fonction,

Dans les conjectures, la périodicité est identifiée dans la classe A, mais elle n'est toujours exprimée par rapport à π, de plus, on peut penser que les réponses 2π données suite aux demandes de précision de l'observateur sont sans doute simplement liées à la présence du cosinus et non le reflet d'un réel raisonnement. Il est aussi intéressant de noter que ce sont Francis et Georges qui subissent le plus l'effet des perturbations prévues, donc deux élèves de très bon niveau en mathématiques, contrastés d'autre part dans leur rapport à la machine. La propriété de parité semble être passée à l'arrière plan des préoccupations dans l'étude des fonctions, tout en restant liée à l'idée de symétrie par rapport à l'axe Oy et nous avons été étonnés par l'importance des oublis à ce niveau.

En revanche, dans la classe B la parité est mieux vue sur le graphe que la périodicité, grâce sans doute à l'expérience des fonctions polynômes ou rationnelles. Pour Julien et Alice la périodicité n'est pas visible sur le graphique. Pour Marie, Sabine et Jean, elle ne vient pas facilement et le repérage de la valeur de la période est laborieux. Il faut souvent une incitation de l'observateur pour que la valeur symbolique soit induite des valeurs approchées repérées sur le graphique. Franck et Pierre sont les plus à l'aise.

Dans les deux classes, la variation est correctement lue, ce qui semble naturel, mais on ne note pas le souci en général d'aller au delà des valeurs approchées fournies dans la fenêtre graphique. Le recours aux commandes *Maximum* et *Minimum* du menu *F5* est fréquent et l'on peut se demander si, pour certains élèves, il n'y a pas l'idée que ces commandes spécifiques fournissent des valeurs exactes à la différence des valeurs trouvées par exploration dans [TABLE]. Les élèves sont très mal à l'aise pour exprimer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est maximum (resp. minimum). Dans la classe B, seul Julien maîtrise suffisamment le langage des fonctions trigonométriques pour exprimer correctement les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est maximum. Il tente d'utiliser le même langage pour les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est minimum, mais sa réponse est erronée (k $\pi/2$ au lieu de $\pi/2$+k π).

Enfin, soulignons l'absence de reconnaissance graphique de la non dérivabilité au point anguleux. Certains élèves affirment qu'il y a dérivabilité parce qu'en gros c'est une bonne fonction partout définie, qui ne saute pas. D'autres voient bien qu'il se passe quelque chose de différent, mais ne font pas le rapport avec d'autres fonctions ayant le même comportement (p. ex. abs(x)).

Pour la preuve de la périodicité, le choix majoritaire dans la classe A est le travail P/C comme dans la stratégie standard énoncée ci-dessus. Ceci, comme les conduites au contrôle, nous incite à penser que les élèves ont pris conscience des limites de la machine dans ce domaine et de la difficulté de la piloter efficacement et ne cherchent vraiment pas à bien l'instrumenter dans ce domaine. Il n'est d'ailleurs pas surprenant que ce soit Gérard qui arrive à se débrouiller pour faire produire le résultat à la machine. Les difficultés rencontrées avec la caractérisation algébrique de la parité chez plusieurs élèves confirment d'autre part ce qui était apparu dans la phase de conjectures.

Dans la classe B, les élèves tentent d'utiliser la TI92, avec peu de succès. L'expression algébrique de la périodicité est disponible pour peu d'élèves (Jean, Pierre). De plus, la TI92 n'apporte pas une aide décisive pour la justification. Le raisonnement à partir de la périodicité de cosinus et sinus fonctionne mieux. Peu d'élèves abordent la justification de la parité.

En ce qui concerne la justification du sens de variation, on ne peut que noter la forte déstabilisation liée à la complexité de l'expression à gérer. Sur ce plan, les différences avec l'entretien 2 et avec le contrôle spécifique sont manifestes. La stratégie standard qui semblait en place : définition de la dérivée, recherche des zéros par *Solve*, *Factor* ou *Zeros*, n'est utilisée dans la classe A que par Georges tandis que Serge et Gérard en reviennent à [TABLE] pour l'étude des variations. Ceux qui finalement vont le plus loin de façon autonome, dépassant la seule lecture graphique, sont ceux qui utilisent le principe d'alternance. Le travail sur la dérivée, même s'il n'aboutit pas, conduit souvent à la reconnaissance de la non-dérivabilité algébrique aux minimums, mais on notera la difficulté que les élèves rencontrent à articuler ici le point de vue algébrique et le point de vue graphique et la faible sensibilité aux incohérences. Dans la classe B, seul Jean détermine spontanément l'intervalle d'étude. L'étude de variations nécessite pour tous les élèves de cette classe abordant cette question, un guidage important de la part de l'observateur. La TI92 est utilisée pour le calcul de la dérivée et pour ses zéros. La recherche des zéros sur R donne un résultat paradoxal, puis que la TI92 annonce que la dérivée s'annule en $\frac{k\pi}{2}$, alors qu'elle n'est pas définie pour les $\pi/2$+k π.

Enfin, la mise en relation avec la fonction $\sqrt{2}$ cos, même aidée, dépasse visiblement les compétences de presque tous les élèves et les tentatives de liaison font apparaître les difficultés que rencontrent toujours les élèves avec la notion de valeur absolue.

Partie 3 : Utilisation en contrôle commun (classe A seule)

Ce contrôle, pour la partie analyse, comportait deux exercices. Le premier concernait l'étude de la suite définie par : $u_1 = 9/2$ et $u_{n+1} = -3u_n+2$ pour tout $n>0$. On demandait successivement de calculer les quatre premiers termes, de déterminer si la suite était ou non arithmétique ou géométrique, puis on se ramenait classiquement à une suite géométrique en posant $v_n = u_n-1/2$ et on en déduisait l'expression de u_n en fonction de n ainsi que la valeur de $u_0+u_1+...+u_n$. L'exercice se terminait par une application numérique ($n = 10$). Le second exercice concernait l'étude de la fonction trigonométrique $f(x) = \cos 2x+2\sin x+3$.

La moyenne de la classe à ce contrôle, en incluant donc le troisième exercice portant sur la géométrie est de 10.3.

Anne (note 10.6)	Dans l'exercice 1, elle a défini u_n dans [HOME] et calculé les quatre premières valeurs de la suite (exercice raté, elle trouve la suite arithmétique en remplaçant u_n par u_0 dans le calcul de $u_{n+1}-u_n$, conclut de $v_{n+1}=-3u_n+3/2$ que v_n est géométrique de raison -3. Dans l'exercice 2, elle a défini et fait tracer f, vérifié le calcul de f' et utilisé l'application [TABLE] pour aider le tracé P/C.
Charles (7.5)	Exercice 1 : il a entré u_n dans [Y=] et fait tracer la suite. Il n'a pas fait l'exercice 2.
Francis (17.5)	Il a utilisé la calculatrice uniquement dans l'exercice 2 pour faire tracer f. Il dit : « il y a des moments où je perds un peu de temps en utilisant la calculatrice. je ne sais pas comment je me débrouille... Je préfère ne pas trop l'utiliser. »
Françoise (9.5)	Dans l'exercice 1, elle ne s'en sert que pour de petits calculs. Dans l'exercice 2, elle dit s'en être beaucoup servie : vérification du calcul de la dérivée, prise de valeurs dans [TABLE] pour le tracé et contrôle du tracé.
Georges (17.5)	Dans l'exercice 1, il rentre la suite dans [Y=] et fait calculer les premiers termes pour contrôler son calcul P/C, mais rencontre des problèmes de décalage d'indices. Dans la dernière question, il est aussi troublé par le fait que la machine lui donne un résultat aussi grand alors que « les termes passant alternativement du plus au moins, donc, quand on fait une somme de termes, ça doit être proche de 0, parce que les termes vont s'annuler... ça peut pas être si grand ». Une erreur de calcul dans le passage de la somme des v_n (expression correcte) à celle des u_n l'a conduit à la valeur 1 181 005, mais la réponse correcte : -59043 aurait pu le choquer tout autant. Il n'arrivera pas à corriger son erreur. Pour l'exercice 2, il s'en sert pour le calcul de la dérivée et sa factorisation, ensuite pour contrôler le tableau de variation en faisant tracer f et repère une erreur (il avait considéré à tort la fonction comme une fonction paire) qu'il corrige. Au total, il estime quand même que la machine l'a aidé.
Gérard (10.5)	Dans l'exercice 1, il a entré la suite puis utilisé un programme personnel sur les suites récurrentes pour calculer les premières valeurs, ensuite il essaie de trouver les raisons en utilisant les formules générales des suites arithmétiques et géométriques qu'il a aussi entré en machine, n'y arrive pas et abandonne. Dans l'exercice 2, il l'utilise pour vérifier le calcul de dérivée et tracer la courbe. Il estime globalement que la machine l'a aidé, qu'elle aurait pu l'aider plus dans le premier exercice s'il avait avancé davantage.
Serge (13.5)	Il n'y a pas d'utilisation dans l'exercice 1 traité jusqu'au calcul de v_n en fonction de n.. Dans l'exercice 2, il l'a beaucoup utilisée : définition de f, calcul de $f(x+2\pi)$ et de f', essai sans succès de résolution de $\cos(x)\leq\cos(0)$, utilisation de [GRAPH] pour aider le tracé en P/C.
Vincent (9.5)	Dans l'exercice 1: définition de la suite dans [Y=] et lecture dans [TABLE] des premières valeurs (ne va pas au-delà du calcul de v_1). Dans l'exercice 2 : définition de f, calcul et tracé de f', utilisation du tracé de f' pour remplir le tableau de variation de f, tracé de f et utilisation de [TABLE] pour aider le tracé P/C.

Donc, en résumé, on observe chez beaucoup d'élèves un schéma commun d'utilisation de la TI92 pour l'étude de variations de l'exercice 2 : contrôle de la dérivée, du tableau de variation, prise de valeurs dans [TABLE] pour aider le tracé. Même s'ils ne sont pas à l'aise avec la résolution des inéquations trigonométriques, les élèves semblent conscients du peu d'aide que peut leur apporter la machine à ce niveau. La factorisation de la dérivée, qui était donnée dans le texte, est faite directement à la main. On notera cependant les utilisations singulières dans

un sens ou dans l'autre : l'utilisation limitée de Francis, bien dans la ligne de ses rapports à la machine, l'utilisation de Serge qui essaie de gérer avec la machine la périodicité et une inéquation trigonométrique d'ailleurs erronée, bien conforme avec son rapport à la machine là encore et celle de Vincent qui exploite directement le tracé de f' pour l'élaboration du tableau de variation. Pour l'étude des suites de l'exercice 1, les disparités observées montrent la nouveauté du sujet et le fait que l'instrumentation est encore embryonnaire. Là encore, on notera l'utilisation de Gérard qui atteste sa personnalisation de la machine par l'entrée de formules générales qui ici sont loin en fait de lui favoriser la résolution.

Synthèse entretiens 3

Le comportement en contrôle spécifique (partie 1) montre que l'utilisation de la TI92 pour contrôler le résultat de la dérivation d'une fonction trigonométrique n'est pas encore mûre pour beaucoup d'élèves. En revanche, ils ont une utilisation standard et raisonnable dans l'étude de la fonction. Le contrôle commun (partie 3) révèle des disparités dans l'instrumentation de la TI92 pour l'étude des suites. C'est sans aucun doute lié à la nouveauté du sujet. De plus, cette instrumentation ne se situe pas complètement en continuité de celle des fonctions, comme l'ont montré certaines difficultés rencontrées pendant les observations sur ce domaine. L'utilisation en contrôle spécifique et en contrôle commun montre qu'il y a eu dans les deux classes une progression réelle de l'instrumentation des élèves dans l'étude des fonctions fractions rationnelles habituellement considérées.

Dans la partie 2 de l'entretien, on ne peut que constater la déstabilisation produite par le choix d'une fonction trigonométrique et par le dispositif adopté.

Sur l'ensemble de cette étude de fonction, les élèves manifestent peu de connaissance des fonctions trigonométriques. Les propriétés sont difficilement conjecturées sur le graphique et laborieusement exprimées algébriquement. Ainsi, il n'y a pas transfert de l'étude de variations à partir de l'expérience des fonctions polynômes ou fractions rationnelles. Le calcul symbolique avec la TI92 aide peu. L'élève peut obtenir une justification formelle de la propriété qui "n'explique rien", ou même un résultat faux, comme celui des zéros de la dérivée.

Cette situation montre que les stratégies, les techniques élaborées, les modes de raisonnement mis en place restent fragiles et que la prise en charge par la TI92 des calculs dans des situations plus complexes ne suffit pas à ramener ces dernières dans la zone de maîtrise des élèves. La progression de l'instrumentation supposerait une progression parallèle des connaissances mathématiques.

Synthèse des observations sur chaque élève

Les neuf élèves de la classe A et les sept élèves de la classe B ont été présentés au début de ce chapitre, à partir des données fournies par le professeur et de leurs réponses au premier questionnaire Pour chacun de ces élèves, nous avons regroupé en annexe 3 les données obtenues à partir des réponses aux questionnaires et au cours des entretiens. La synthèse qui suit permet d'apprécier le parcours de chacun des 16 élèves dans son apprentissage des mathématiques avec la TI92.

Anne

Lors du premier entretien, l'utilisation de la TI92 pour l'étude de la fonction a été de type « calculatrice graphique ». Elle a ensuite évolué lentement à travers l'investissement croissant de [HOME] (utilisation de Zeros ou calcul des ordonnées des extrema lors de l'entretien 2, puis démonstration de la parité lors du troisième entretien), mais même en fin d'année l'instrumentation de l'application [HOME] reste encore limitée ainsi que la maîtrise de l'articulation entre le travail-machine et le travail en Papier/Crayon. Anne a été la seule à ne pas considérer les multiples de π (excepté pour la période) lors du troisième entretien.

Charles

Malgré un rapport positif à la machine, Charles n'est pas arrivé à avoir une bonne instrumentation. Cela semble être dû au fait que des connaissances mathématiques n'étaient pas disponibles (« *signe de* $(x+3)^2$ = *signe de* $(x+3)$ » lors du 2ème entretien). Cependant l'utilisation de la machine a très légèrement évolué durant l'année, avec la disparition d'erreurs de syntaxe, l'investissement -bien qu'insuffisant- de [HOME] (Etude de la périodicité lors du 3ème entretien) et la mobilisation de [GRAPH] comme outil de contrôle (entretien 2). Mais l'instrumentation de la TI92 n'a pas dépassé le niveau 1 (utilisation de niveau 1 de [HOME], lecture graphique primitive, utilisation brute de [TABLE]). Notons enfin l'absence d'utilisation des zooms.

Francis

Lors des deux premiers entretiens, Francis a adopté une stratégie de type « calculatrice graphique » basée exclusivement sur les tracés, pour étudier les variations de la fonction, avec cependant un investissement de l'application [HOME] au second entretien pour le contrôle des extrema. Lors du troisième entretien, il a basculé vers un travail exclusivement Papier/Crayon pour démontrer la périodicité et la parité. Tout au long de ces entretiens, Francis n'a donc pas réussi à trouver un équilibre entre le travail-machine et le travail en P/C, sachant qu'il a eu une instrumentation privilégiant l'application graphique dont il utilise une variété de commandes.

Françoise

Nous remarquons que tout au long des entretiens, Françoise a développé une stratégie pour l'étude de variations où la phase de recherche se résume au tracé de la courbe, et où la phase de preuve se déroule essentiellement en Papier/Crayon et s'articule prudemment avec le module [HOME] (calcul de dérivée et calculs numériques). Enfin l'application [TABLE] n'a été investie qu'au second entretien pour le contrôle du tableau de variation (avec un changement de [TblSet]).

Georges

L'instrumentation a été indéniablement riche. En effet :

-L'application [HOME] a été très souvent mobilisée, de manière précoce (dès le premier entretien) et relativement efficace, avec une articulation P/C bien dosée intervenant généralement comme relais au travail-machine quand une connaissance des commandes n'était pas disponible (simplification du résultat-machine concernant la périodicité au troisième entretien), ou quand la résolution était moins coûteuse en P/C (étude du signe du trinôme au second entretien).

-L'application [GRAPH] a été sollicitée essentiellement pour le contrôle, avec une lecture graphique assez élaborée, basée sur une utilisation efficace de *Trace* et des zooms (surtout *ZoomBox* et *ZoomFit*)

-L'application [TABLE] quant à elle, n'a jamais été utilisée (excepté pour le tracé de la courbe en P/C); ce qui aurait permis à Georges un gain de temps (notamment pour le calcul des valeurs de f et de f' en certains points) et une articulation plus aérée.

En ce qui concerne la stratégie pour l'étude de la fonction, elle était déjà stable au premier entretien : Calcul de f', recherche des racines et détermination du signe à l'aide de [HOME] avec un contrôle dans [GRAPH].

Remarque : Lors du premier entretien, la machine a répondu $f'(0) = -\infty$ et Georges a noté $-\infty$ sur son tableau de variation en-dessous de 0. Au second entretien, et bien que la machine ait affiché $f'(-3) = -\infty$, Georges a mis une double-barre || en-dessous de - 3 dans le tableau de variation.

Gérard

Bien qu'ayant un rapport très positif aux technologies informatiques, Gérard a eu une instrumentation limitée privilégiant le graphique. Ceci semble être dû à la non disponibilité de certaines connaissances mathématiques. En effet, au premier entretien il a considéré que la fonction dérivée donnée par la machine ($f'(x) = 2x - \frac{9}{x^2} + 7$) était un trinôme du second degré et en a déduit le signe sans même chercher les racines. Au contrôle spécifique, il n'a pas calculé la dérivée et s'est basé sur [TABLE] pour étudier les variations de f. Par ailleurs, l'application [HOME] n'a pas vraiment été intégrée à l'étude des variations d'une fonction (les commandes *Zeros* ou *Solve* n'ont jamais été investies).

Notons cependant qu'il y a eu une légère évolution au troisième entretien, avec l'utilisation de *F5-Maximum*, de *F5-Minimum* et de *ZoomFit* et l'investissement de [HOME] pour la détermination du signe de la dérivée.

Remarque : Gérard a été le seul à ne pas avoir calculé la dérivée pendant le contrôle spécifique, et également le seul à ne jamais avoir utilisé *Zeros* ou *Solve* lors des entretiens.

Michel

Michel est un bon élève mais il a un rapport négatif aux technologies informatiques, ceci explique son «boycottage' du contrôle spécifique et du troisième entretien. Cependant, au cours de chacun des deux entretiens auxquels il a participé, il a utilisé de manière efficace ses connaissances de la machine et a réussi à chaque fois à bien articuler le travail-machine et le travail en Papier/Crayon, preuve qu'avec de bonnes connaissances mathématiques on peut arriver à instrumenter correctement la TI92, et cela malgré un rapport négatif à la machine.

Remarque : « *Faire des mathématiques avec la TI92, c'est pareil. Cela ne change en rien mon avis sur les maths* » (réponse de Michel aux questions 30 et 31 du deuxième questionnaire).

Serge

Dès le premier entretien Serge semble avoir une démarche stable pour l'étude des variations, utilisant la machine en exclusivité. Il a cherché les racines de la dérivée dans [HOME], fait tracer

f et f' avant de déterminer le signe de la dérivée que ce soit par le parcours de [TABLE] (avec des adaptations du pas), ou par une lecture graphique (à l'oeil nu ou à l'aide de *Trace*), en se basant sur l'alternance des signes. Lors du troisième entretien, il a commencé à articuler, et de manière satisfaisante, son travail-machine avec le travail en P/C (étude de la parité et de la périodicité de la fonction dans [HOME] et en P/C).

Remarque : Avec Francis, Serge est le seul élève :

- à ne rien noter sur la feuille lors du premier entretien.
- à ne pas avoir traité le trinôme du second degré en P/C, lors du deuxième entretien.

Vincent

Pour l'étude d'une fonction, Vincent possède une stratégie standard Papier/Crayon qui semble résister à l'utilisation de TI92. En effet, les calculs de dérivée à la machine sont à chaque fois refaits à la main, et à la moindre occasion (présence d'une équation du second degré ou étude de la périodicité) Vincent semble opter pour un travail en Papier/Crayon. Ceci pourrait s'expliquer par le fait qu'il n'avait pas vraiment un rapport positif aux technologies informatiques.

Remarque :

* Lors du premier entretien, Vincent calcule tout d'abord la dérivée à la TI92. Ensuite, il développe $f(x)$ à la main avant de re-calculer la dérivée, toujours à la main.

* « *A cause de la calculatrice on ne calcule plus à la main, mais grâce à la calculatrice les calculs vont plus vite* » (Réponse de Vincent à la question 42 du premier Questionnaire)

Alice

Alice rencontre à la fois des difficultés à instrumenter la TI92 et avec les mathématiques elles-mêmes. De façon générale, elle a des difficultés avec les machines, même si elle "voudrait bien" en avoir une utilisation experte. Elle a tenté de l'utiliser assez systématiquement. Par exemple, elle fait les calculs d'abord avec la TI92, ou considère d'abord l'écran graphique avant l'étude algébrique des fonctions. Mais elle est vite bloquée par l'insuffisance de ses connaissances mathématiques, et la TI92 lui apporte peu d'aide. Ses tentatives d'instrumentation se soldent donc par un échec, et elle exprime sa déception à la fin de l'année.

Franck

Franck manifeste une bonne instrumentation de la TI92 et des capacités mathématiques. Cette instrumentation est préparée à la fois par une utilisation de l'ordinateur et de la calculatrice qu'il possédait antérieurement. Il en a une utilisation équilibrée, en cours, en contrôle, à la maison. Il reconnaît ses limites, en particulier en trigonométrie. Il insiste sur l'apport de la TI92 au cours, à la réflexion et aussi à la compréhension et à l'apprentissage.

Julien

Julien manifeste à la fois une bonne instrumentation de la TI92 et des capacités mathématiques. Son instrumentation est préparée à la fois par une utilisation de l'ordinateur et de la calculatrice qu'il possédait antérieurement. Il réussit très bien les contrôles habituels, mais a rencontré des difficultés en contrôle spécifique à l'usage de la TI92. En fait, à la

différence de Jean et Franck, son instrumentation de la TI92 paraît assez indépendante de ses capacités mathématiques. Il fait plus confiance à sa propre réflexion qu'aux résultats de la TI92. C'est particulièrement vrai en ce qui concerne le graphisme dont il se méfie et avec lequel il peut avoir des difficultés de gestion et d'interprétation.

Jean

Jean manifeste une bonne instrumentation de la TI92 et des capacités mathématiques. Cette instrumentation est préparée par une utilisation de l'ordinateur, plus que de la calculatrice qu'il possédait antérieurement. Il manifeste à plusieurs reprises une bonne coordination graphique/algèbre. Il insiste sur l'apport de la TI92 au cours et à la réflexion. En contrôle, il rencontre des difficultés à mettre en œuvre ses capacités en contrôle et à utiliser la TI92.

Marie

Chez Marie le travail mené avec la TI92 contraste avec sa plus grande aisance dans le travail mathématique habituel. Ses capacités mathématiques lui permettent parfois une interprétation plus aisée du graphique que d'autres élèves, mais dans l'ensemble, la TI92 lui apporte peu d'aide et son instrumentation est plutôt faible. Marie voit l'intérêt de la TI92 comme outil de calcul et non comme aide à l'apprentissage.

Pierre

Pierre est celui qui manifestement retire le plus de profit, à la fois objectivement et subjectivement, de l'introduction de la TI92. Il a l'instrumentation la plus complète de la machine, et ses capacités mathématiques progressent en même temps que cette instrumentation. L'instrumentation est préparée par une utilisation de l'ordinateur et de la calculatrice qu'il possédait antérieurement et s'appuie sur de bonnes bases subjectives. Bien sûr, ce bilan est à mettre en relation avec la situation de redoublant de Pierre, et il est intéressant de constater comment l'instrumentation de la TI92 peut accompagner une démarche d'affermissement des connaissances sur des notions déjà rencontrées l'année précédente.

Sabine

Chez Sabine, l'instrumentation de la TI92 paraît dominée par ses habitudes de travail mathématique, et ses limitations dans cette discipline. Elle varie peu au cours de l'année. Sérieuse, Sabine prépare de nombreux exercices pour s'entraîner avant les contrôles. Peu sûre d'elle, elle apprécie d'avoir le résultat avec la TI92. Par contre, elle a peu de capacités et d'initiative en dehors de cette pratique. Sa lenteur, et son manque de souplesse empêchent une utilisation efficace en recherche de problème et en contrôle. Elle apprécie peu le travail en classe mené à l'aide de la calculatrice.

Synthèse des observations réalisées par entretiens dans chaque classe

La synthèse porte sur l'instrumentation de la TI92 par les 16 élèves observées. Elle est présentée de façon différente dans les deux classes.

Dans la classe A, deux niveaux d'instrumentation des applications [GRAPH] et [TABLE] d'une part, et de l'application [HOME] d'autre part sont distingués. Pour une tâche précise comme l'étude de variations, les niveaux d'instrumentation se conjuguent pour permettre l'apparition des stratégies d'utilisation de la TI92. Nous avons ainsi identifié trois stratégies ordonnées du graphique au formel.

Dans la classe B, nous tentons des regroupements d'élèves, en fonction du caractère plus ou moins achevé de l'instrumentation. Mais comme il faut quatre groupes pour les sept élèves, cette tentative témoigne surtout de la variété des rapports entre instrumentation de la TI92 et développement des connaissances mathématiques.

Ces deux approches complémentaires permettent de tirer des conclusions communes.

Classe A

Le début de l'instrumentation se traduit par un rapport à la machine dominé par les rapports à la calculatrice graphique qui se sont mis en place dans le cadre d'une étude des variations sans dérivée, les applications [GRAPH] et [TABLE] y jouant, dans une moindre mesure, un rôle essentiel. C'est par le tracé que l'on repère visuellement et qualitativement les variations, et c'est par [TABLE] et éventuellement par la commande *Trace* de [GRAPH] qu'on les quantifie. Même ici, on peut distinguer plusieurs niveaux d'instrumentation :

Niveau 1 : qui se caractériserait par une lecture directe visuelle de [GRAPH] et une utilisation de [TABLE] sans ajustement.

Niveau 2 : qui se caractériserait par une lecture quantifiée à l'aide de *Trace,* ou ajustée par changement efficace de fenêtre (zooms, . . .), une utilisation de [TblSet] .

Dans le cadre de ces rapports que nous qualifierons de type « calculatrice graphique », l'utilisation de la TI92 et l'introduction des dérivées vont ouvrir de nouvelles possibilités conduisant à d'autres niveaux d'instrumentation, à savoir :

- la possibilité de tracer non seulement f mais aussi f' et de faire intervenir des lectures graphiques -soit directement visuelles, soit instrumentées- et numériques conjointement sur f et f'.

- une utilisation des commandes du menu *F5-Math* au-delà de la seule commande *Trace* pour quantifier l'étude des variations.

Ces possibilités, on le voit, sont saisies différemment par les élèves (surtout ceux ou celles qui ont un rapport très positif aux technologies informatiques sans être très matheux), mais ce qui nous semble être l'évolution essentielle dans l'instrumentation, est celle qui se traduit par l'investissement de l'application [HOME] et son articulation efficace avec les autres applications.

Là encore, différents niveaux peuvent être distingués :

Niveau 1 : [HOME] est utilisée pour définir la fonction, calculer sa dérivée, et éventuellement les zéros de la dérivée, mais l'aide que peut fournir la connaissance des zéros de la dérivée pour l'étude du sens de variation n'est pas clairement perçue (hormis les automatismes liés à la gestion du trinôme du second degré), et [HOME] n'est pas sollicitée pour le calcul de valeurs particulières.

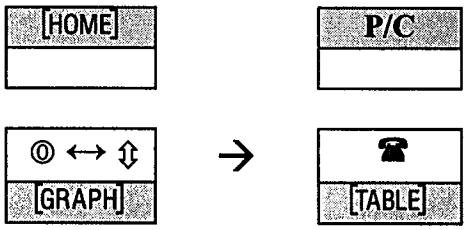
Niveau 2 : [HOME] est cette fois-ci efficacement utilisée, au moins des cas simples, pour l'étude du signe de f' (en articulation avec le travail P/C) mais aussi pour obtenir des valeurs particulières en mode exact, et éventuellement pour tester des points critiques relatifs à la fonction ou à sa dérivée (se substituant progressivement à [TABLE] dans ce rôle). Les applications [GRAPH] et [TABLE] sont alors investiesessentiellement d'une fonction de contrôle, et c'est notamment [HOME] et le P/C qui prennent en charge la justification.

Compte tenu des différents facteurs identifiés ci-dessus, dont le jeu se conjugue dans l'instrumentation de la machine, de façon différente visiblement suivant, comme nous l'avons dit, les profils mathématique et technologique des élèves, il nous semble possible d'identifier dans l'étude des variations trois grandes classes de stratégies en plus des stratégies P/C, reposant sur un certain nombre de techniques instrumentées :

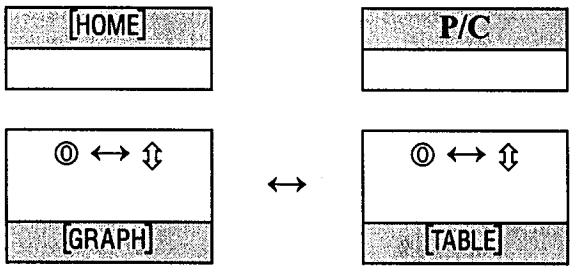
1-des stratégies de type calculatrice graphique pré-analyse

Légende

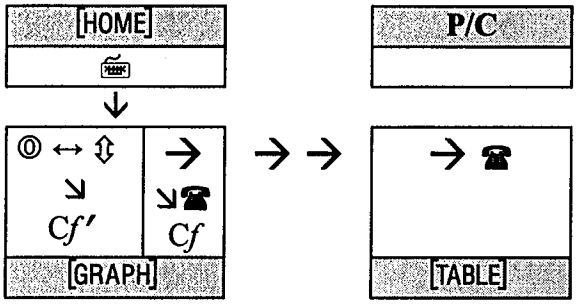
📻	Calcul de f'	⇳	Détermination du signe de f' (ou des variations de f)
⓪	Détermination des zéros de f' (ou des extrema de f)	☎	Contrôle



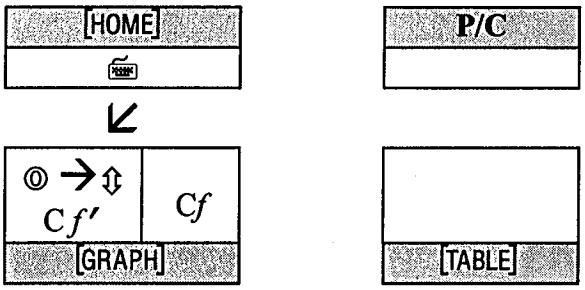
Exemple : Cas de Gérard lors du contrôle spécifique, où il a eu une instrumentation de [GRAPH] de niveau 2 (utilisation des commandes *F5-Maximum* et *ZoomFit*)



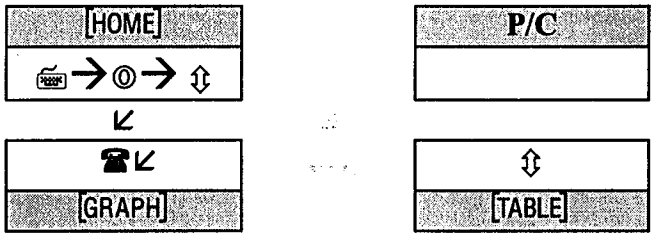
2-des stratégies à dominante calculatrice graphique mais intégrant la dérivée



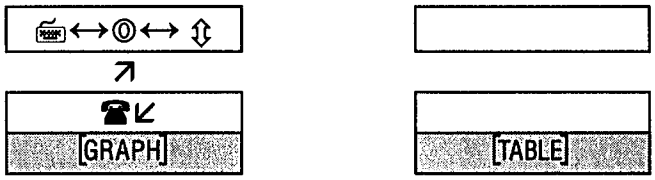
Exemple : Cas de Anne lors du premier entretien, où elle a une instrumentation de niveau 1.



3-des stratégies à dominante calcul formel



Exemple : Cas de Georges lors de l'entretien 1, où l'instrumentation a été de niveau 2 (utilisation des commandes *Zeros* et calculs de valeurs particulières dans [HOME], ainsi que des commandes *Trace, ZoomOut* et *ZoomBox*).



Ces stratégies peuvent donc être utilisées pour situer les élèves à un moment donné.

Soulignons qu'un travail analogue peut être effectué par rapport au concept de limite et mis en rapport avec la thèse de L. Trouche (1997), mais avec la différence essentielle que contrairement à l'étude du sens de variation, la machine donne directement les limites.

Classe B

Nous repérons parmi les 7 élèves de la classe B quatre groupes d'élèves, différenciés selon le degré d'instrumentation de la TI92

- Alice a l'instrumentation la plus faible, et en même temps les difficultés mathématiques les plus importantes. D'une part, elle manque de souplesse dans son utilisation de la machine (mémoire, modules...) d'autre part, ses limites mathématiques l'empêchent de dépasser le niveau de la lecture du résultat ou du graphisme.
- Sabine et Marie ont une instrumentation assez faible, liée aux limites de leur utilisation de la TI92. Ces limites coexistent, chez Sabine, avec des difficultés mathématiques qui existent moins chez Marie.
- Julien a une bonne instrumentation, mais elle semble peu influer sur le développement de ses capacités mathématiques. Réussissant bien sans machine, il considère comme secondaire la contribution de la TI92, et fait plus confiance à ses calculs ou à son raisonnement.
- Jean, Franck et Pierre ont une bonne ou très bonne instrumentation. Ils ont une utilisation équilibrée, en cours, en contrôle, à la maison. Ils savent aussi en reconnaître les limites. Subjectivement, ils discernent des apports plus larges de la TI92, dans le domaine des apprentissages et de la compréhension. Cependant, chez Jean, cette instrumentation ne suffit pas à compenser ses difficultés en temps limité et à lui assurer la réussite en terme de note aux contrôles. En revanche, il semble bien que Pierre ait, dans son expérience de redoublant, tiré un profit important de l'utilisation de la TI92.

Cette tentative de regroupement témoigne surtout de la variété des rapports entre instrumentation de la TI92 et apprentissages mathématiques. Alice a des difficultés en général avec les machines, et, de plus, son manque de connaissances mathématiques est un handicap à son instrumentation. Les connaissances plus affirmées de Marie ne suffisent pas, par ailleurs à lui assurer une instrumentation meilleure que celle de Sabine, qui rencontre des difficultés mathématiques. La bonne instrumentation de Julien n'a pas de rapport apparent avec son succès en mathématiques. Au contraire, la bonne ou très bonne instrumentation de Jean, Franck et Pierre s'élabore en cohérence avec le développement de leurs connaissances mathématiques.

Interprétation

L'analyse du travail des élèves dans les entretiens et le contrôle spécifique, et de son évolution au cours de l'année montre en premier lieu la lenteur avec laquelle se met en place, pour la plupart des élèves, ce que l'on pourrait considérer comme une instrumentation efficace et économique de la machine : organisation de la répartition du travail entre P/C et machine - choix des applications et des commandes - interprétation et exploitation des productions de la machine.

Dans presque tous les entretiens, le décalage entre les stratégies de résolution décrites a priori et les stratégies réellement observées est manifeste. Et même si le contrôle spécifique met en évidence une certaine stabilisation des techniques, les résultats de l'entretien 3 montrent la fragilité de cette stabilisation par rapport aux perturbations introduites.

Dans cette instrumentation de la machine, il nous semble possible de distinguer deux phases principales pour un type de tâche donnée et pour une instrumentation mathématique donnée, qui constituent en quelque sorte des cycles locaux.

La première est une phase d'éclatement. Cette phase est associée à trois phénomènes :

- *Oscillation* : l'élève oscille en permanence entre plusieurs stratégies et plusieurs techniques.
- *Zapping* : l'élève zappe entre les commandes et les applications, dans une stratégie de "pêche", sans que l'on puisse identifier un projet cohérent.
- *Sur-vérification* : pour un même résultat, l'élève multiplie les vérifications en utilisant la diversité des moyens fournis par la machine.

Nous faisons l'hypothèse que cette phase est particulièrement visible ici, vue la richesse des possibilités offertes par la machine, et le fait que, contrairement à ce qui se passe en papier/crayon, on ne note pas, dans l'enseignement, de routinisation de techniques instrumentées spécifiques. En fait, toute liberté de se construire son propre équilibre semble laissée à l'élève dans cette phase.

Sur le point plus précis des justifications, il semble que la machine, par l'éventail des possibilités de validation offertes, tende, si le contrat didactique le permet, à favoriser la recherche de preuves par cohérence de multiples vérifications pragmatiques plus que celle d'une preuve décisive. Ce fonctionnement se met en place dans la phase d'éclatement et tend à perdurer.

Cette phase d'éclatement, où l'élève semble en quelque sorte dépassé par les possibilités offertes et impuissant à définir une ligne de conduite stable, est suivie par une phase d'épuration qui, dans le cas de l'étude des variations, correspond à l'apparition de stratégies relativement stables (mise en évidence dans la classe A), et l'investissement marqué de l'application [HOME] qui prend une importance déterminante dans la résolution (en interaction avec le travail P/C), les autres applications jouant alors plus un rôle d'anticipation ou de contrôle. Cependant cette épuration peut être très lente à s'accomplir et certains élèves ne semblent pas être sortis de la première phase encore à la fin de l'année scolaire.

Le double mouvement éclatement/épuration se conjugue avec une évolution du niveau d'instrumentation des différentes applications. On constate ainsi dans les deux classes une grande variété des processus d'instrumentation de la TI92 et le rôle important que jouent les profils tant mathématiques que technologiques des élèves. En particulier, il apparaît clair

qu'un rapport positif à la machine ne suffit pas à garantir une instrumentation efficace. Inversement, des réticences vis-à-vis de la machine peuvent freiner l'expansion de la phase d'éclatement, et permettre assez tôt une instrumentation peut-être limitée mais relativement efficace.

Annexe 1 : Enoncé du devoir spécifique TI-92

I Vous devez dériver f telle que $f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{6})$.

1. Faites le calcul à la main et avec la TI92.
2. Si les résultats se présentent sous des formes différentes, expliquez l'équivalence des deux expressions.

II Etude de fonction.

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x^3 + 24x^2 + 47}{4x - 8}$

ATTENTION :

<u>On ne vous demande pas de rédiger le détail des calculs</u> pour les calculs de dérivée, de valeurs exactes de fonction, les factorisations, les résolutions d'équations, les calculs algébriques. Vous pouvez donner directement les résultats fournis par la machine, à condition d'indiquer les commandes utilisées.

Par contre, on vous demande <u>de rédiger les raisonnements comme d'habitude et de justifier soigneusement</u> les études de signe et les calculs de limites

1. Etudier le sens de variation de f.
2. Etudier les limites de f au voisinage de 2, de $-\infty$ et de $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer un polynôme P dont la courbe représentative soit asymptote à celle de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. Vous justifierez soigneusement votre réponse.
5. Donner les caractéristiques (*xmin*, *xmax*, *ymin*, *ymax*) d'une fenêtre qui permette de mettre en évidence le sens de variation de f et son comportement au voisinage de 2, de $-\infty$ et de $+\infty$.
6. Reproduisez l'allure du tracé obtenu dans cette fenêtre :
   - pour la fonction f,
   - pour les droite et courbe asymptotes trouvées dans les questions 2 et 4. (On tracera les asymptotes en rouge).

Annexe 2 : Correction du devoir spécifique TI-92

Exercice I : *La fonction est de la forme f(ax+b) f étant la fonction sinus a = 3 et b =* $\frac{\pi}{6}$ *donc*

$f'(x) = -3\sin(3x - \frac{\pi}{6})$. *Le calcul à la machine donne :* $f'(x) = 3\cos(3x + \frac{\pi}{3})$.

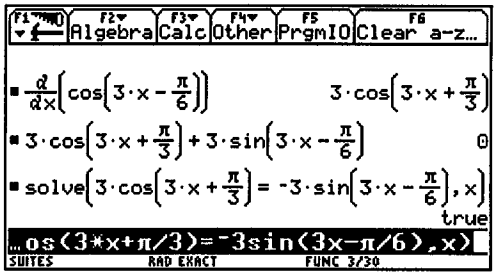
Montrons l'équivalence des deux résultats

A la main :

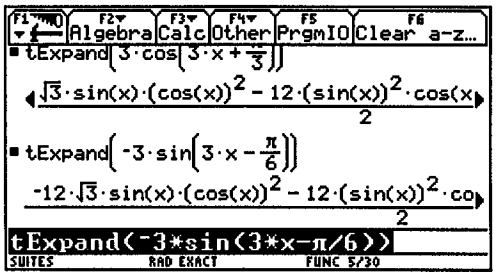
$$f'(x) = -3\sin(3x - \frac{\pi}{6}) = 3\sin(\frac{\pi}{6} - 3x) = 3\cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{6} - 3x)) = 3\cos(3x + \frac{\pi}{3})$$

A la machine :

soit calcul de la différence
soit la résolution de l'équation.



Il est possible aussi d'utiliser la fonction
tExpand
sur les deux expressions



Exercice II :

1) La fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de deux fonctions dérivables.

$$f'(x) = \frac{8x^3 - 96x^2 - 47}{4(x-2)^2}$$

On factorise la dérivée pour en étudier le signe

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(4x+3\sqrt{21}-1)(4x-3\sqrt{21}-1)}{16(x-2)^2}$$

On réalise un tableau de signe pour étudier le signe du numérateur, le dénominateur étant toujours positif.

(voir tableau de variation plus loin)

2) Etude des limites :

En plus ou moins l'infini un polynôme a même limite que son terme de plus haut degré donc

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3}{4x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$$

Etude en 2

$\lim_{x\to 2}(4x^3+24x^2+47) = 175$ donc $\lim_{x\to 2}|f(x)| = +\infty$ Il faut étudier à gauche et à droite de 2

$\lim_{x\to 2}(4x-8) = 0$

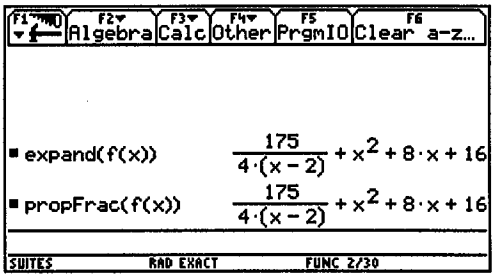
Si $x<2$ alors $4x-8<0$ donc $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ Si $x>2$ alors $4x-8>0$ donc $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

3) Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$\frac{-3\sqrt{21}+1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3\sqrt{21}-1}{4}$	2	$+\infty$
$x+\frac{1}{2}$	-	-	+	+	+	
$4x^2-2x-47$	+	-	-	-	+	
f'(x)	-	+	-	-	+	
f	$+\infty$ ↘ -7.8	↗	-5.25 ↘ $-\infty$	↘ $+\infty$	↗ 85	

4) Recherche d'un polynôme asymptote

On utilise la fonction expand, ou ProFrac



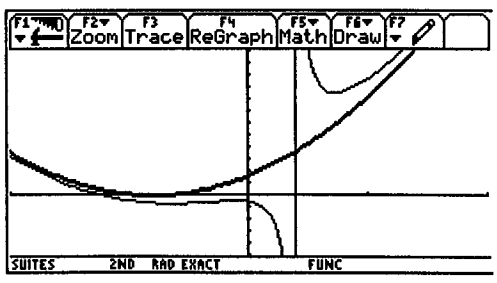
Comme pour une asymptote droite, on montre que le polynôme $p(x)= x^2+8x+16$ est asymptote à la courbe représentative de f en calculant la limite de $f(x)-p(x)$ lorsque x tend vers plus ou moins l'infini.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-p(x)) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{175}{4(x-2)}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{175}{4x}\right) = 0$$

5) et 6) Courbe représentative de f :

6)

On désire voir l'asymptote verticale x= 0.5
le polynôme asymptote $p(x)= x^2+8x+16$
et les extremums de f.
une fenêtre adaptée est par exemple
(-10,10,-50,120)



Annexe 3 : données recueillies sur chaque élève (classe A)

Anne

Anne est une assez bonne élève, sérieuse : moyenne[3] de 12.5, moyenne des contrôles : 11.

Questionnaire 1

Anne dispose d'une CASIO 7900 depuis plus d'un an. Auparavant, elle avait une calculatrice collège qu'elle utilisait souvent en classe et à la maison. Sa calculatrice lui sert essentiellement à faire des calculs numériques, elle déclare en effet ne l'utiliser que parfois pour tracer des graphiques, programmer ou employer les mémoires. Elle a entré un programme pour obtenir des tables de valeurs . Elle a appris à se servir de sa calculatrice surtout avec le mode d'emploi et le professeur, Elle a souvent recours au *Range*, parfois à la fonction *Trace* mais jamais au *Zoom* et estime ne pas bien connaître les possibilités de sa machine. Elle attend de l'enseignant qu'il lui apprenne à utiliser toutes les touches, ce qui correspond à une vision peu élaborée. Elle dit avoir obtenu des graphiques surprenants mais n'avoir jamais été induite en erreur par la calculatrice. Elle déclare vérifier parfois les résultats affichés par sa machine mais ne donne aucune précision. Elle est tout à fait d'accord avec les affirmations 35-38 (gain de temps, vérification, aide à la résolution, aide à la préparation des contrôles). Par ailleurs, elle est favorable à l'utilisation de la calculatrice aux contrôles parce qu'elle permet de gagner du temps. Elle emploie sa calculatrice non seulement en physique, chimie mais aussi en histoire.

Il y a un ordinateur chez elle, qu'elle utilise parfois. Son utilisation des logiciels n'est pas très étendue et concerne essentiellement les jeux informatiques, un peu le traitement de texte Elle pense enfin que les ordinateurs sont utiles pour apprendre les mathématiques, surtout la géométrie, mais sans donner de raison.

En géométrie, elle a un peu utilisé « l'atelier de géométrie » et « dessiner l'espace ». Elle les a trouvés faciles d'accès et y voit une aide possible à la compréhension de la géométrie dans l'espace. Elle les considère comme des aides pour les trois types de tâches proposées mais sans donner de justification. Elle les juge aussi utiles à l'apprentissage mais sans donner là non plus de raisons.

Elle n'a jamais utilisé DERIVE.

Questionnaire 2

Anne estime se débrouiller moyennement avec la TI92. Elle a appris seul à utiliser l'éditeur de texte et le module de géométrie. Ce qui lui a posé le plus de difficultés est la prise en main de la machine, sachant qu'elle a consulté parfois le mode d'emploi distribué en décembre (et l'a complété), ainsi que le manuel Texas Instrument (pour la géométrie, les fonctions et la programmation). Par rapport à une calculatrice graphique, ce qui lui semble nouveau «c'est de pouvoir calculer directement les limites et les dérivées, et de pouvoir factoriser». Elle apprécie le module de géométrie mais beaucoup moins la taille de la machine. Elle pense que la TI92

[3] Les notes données ici sont les notes du premier trimestre.

lui est très utile en classe et en contrôle, mais beaucoup moins à la maison. Quant à la calculatrice rétroprojetable, elle juge qu'elle permet de mieux suivre les synthèses en classe. Elle dit qu'avec la TI92, il est plus intéressant de faire des mathématiques («pour la construction en géométrie») et plus facile «car les calculs sont donnés directement, ce qui permet de vérifier sur la feuille». En ce qui concerne la mémoire, elle y conserve ce qui a été fait en classe, des jeux, des programmes, des formules de mathématiques et d'autres disciplines. Elle utilise enfin sa machine en physique et en chimie.

Questionnaire 3

Anne estime qu'elle est globalement très satisfaite de sa participation à l'expérimentation avec la TI92. S'adressant à un élève d'une autre classe, elle lui dirait qu'elle apprécie la TI92 pendant les contrôles («parce qu'on peut vérifier les résultats») ou pour faire des figures en géométrie. Par contre, ce qu'elle n'apprécie pas est sa taille. Elle pense que si elle n'avait pas eu cette calculatrice en mathématiques, elle aurait appris et compris moins, elle aurait eu des résultats moins bons mais elle aurait travaillé à peu près autant. Elle trouve que la TI92 lui a été utile pour la factorisation de polynômes («car elle ne savait plus comment faire») et pour les suites («en rentrant une suite, on a directement les valeurs»), mais inutile en géométrie et pendant les contrôles («car on n'a pas le temps de faire une figure»). Elle estime qu'elle permet de faire des activités plus intéressantes en classe et qu'elle peut aider à comprendre les mathématiques. Elle estime également qu'elle ne fait pas perdre de temps et qu'elle n'oblige pas à apprendre des choses inutiles. Par ailleurs, elle pense que la TI92 a modifié son point de vue sur les calculatrices («parce qu'avant elle ne faisait pas beaucoup de choses avec sa calculatrice»). Quand la machine fournit un résultat inattendu, elle essaie de factoriser, de développer ce résultat, ou de faire le calcul à la main. A la question : « Avec la TI92, même en étant nul en analyse, on peut réussir les contrôles », elle répondrait «pas complètement mais une bonne partie. Enfin, elle aimerait bien avoir une TI92 l'année suivante et si elle pouvait la garder pendant les vacances elle voudrait apprendre à mieux programmer. Elle dit être volontaire à participer à une séance de TD hebdomadaire d'une heure avec la machine (en plus de l'horaire normal), si le lycée peut en mettre une à sa disposition pour les épreuves de bac.

Entretien 1

Après deux changements dans [WINDOW], Anne n'arrive pas à faire mieux que le tracé initial. Elle a investi [HOME] pour définir f et g (g étant la fonction numérateur de f') ainsi que pour calculer la dérivée. Sa stratégie pour étudier le sens de variation a été de faire tracer la fonction g et de lire à l'oeil nu dans [GRAPH] son signe pour remplir le tableau de variation.

Entretien 2

Pour le tracé de f, Anne a effectué un *ZoomFit* à partir de la fenêtre initiale. Elle a investi ensuite [HOME] pour calculer la dérivée, les racines de g (*Zeros*) puis les limites en $-\infty$, $+\infty$ et 0. L'étude du sens de variation de f s'est déroulée en P/C (racines et signe du trinôme) avec un contrôle dans [GRAPH] via une lecture à l'oeil nu et un changement dans [WINDOW], qui lui a révélé une incohérence entre le tableau de variation et le tracé. Pour vérifier cette incohérence, Anne a parcouru [TABLE] où elle a découvert la singularité en -3.

Contrôle spécifique

Pour étudier la fonction, Anne dit avoir utilisé [HOME] pour le calcul de f', des zéros et des limites, et [TABLE] pour la détermination du signe de f'.

Entretien 3

Anne est l'une des deux élèves à avoir effectué des changements dans [WINDOW] pendant la phase des conjectures. Questionnée sur les maxima, elle a recouru aux applications [HOME] et [TABLE] (sans changement de pas) pour chercher $f(3)$. Pendant la phase de preuve, elle utilise l'application [HOME] pour démontrer la parité. Pendant l'entretien, le passage aux multiples de π ne s'est fait à aucun moment, à part pour la périodicité où elle a déclaré que la période devait être de 2π, et où elle a noté en P/C l'égalité à démontrer sans aller plus loin.

Charles

Charles est un élève sérieux, un peu lent, de niveau faible. Ses notes du premier trimestre en témoignent : une moyenne de 8.5, une moyenne de contrôles de 7.

Questionnaire 1

Charles dispose d'une CASIO 7900 depuis moins d'un an. Il disposait auparavant d'une calculatrice collège CFX 82. L'année dernière, il utilisait parfois sa calculatrice en classe et à la maison. Il utilise sa calculatrice essentiellement pour des calculs numériques, parfois pour tracer des graphiques ou pour programmer. Il y a entré un programme de tableau de valeurs. Il a appris à se servir de la machine avec le professeur et le mode d'emploi et estime ne pas bien connaître ses possibilités. Il a recours parfois au *Zoom* et à *Trace* mais jamais à *Range* . Il attend du professeur qu'il lui apprenne à se servir de toutes les touches et à programmer. Il dit avoir rencontré des graphiques surprenants mais n'avoir jamais commis d'erreurs du fait de la calculatrice. Il vérifie parfois les résultats affichés par sa calculatrice en refaisant les calculs à la main et est favorable à son utilisation aux contrôles car « elle permet des calculs rapides et c'est un outil rassurant ». Il est tout à fait d'accord avec les affirmations 35-38 (gain de temps, vérification, aide à la résolution, aide à la préparation des contrôles) du questionnaire.

Son utilisation des logiciels concerne surtout les jeux informatiques et dans une moindre mesure les traitements de texte (entre 3 et 10 fois). Il dispose d'un ordinateur chez lui mais ne l'utilise pas souvent. Il pense enfin que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques « grâce à des logiciels ».

En géométrie, il a déjà utilisé les logiciels : « l'atelier de géométrie » et « dessiner l'espace », en tout entre 3 et 10 fois. Il ne les a pas trouvés d'accès difficile et les considère comme une aide possible aux trois tâches décrites (trouver les propriétés d'une figure, démontrer, résoudre des problèmes de construction) mais sans donner de justifications précises. Il les considère comme utiles pour apprendre la géométrie « car ils disent si les propriétés sont vraies ou fausses ».

Il n'a jamais utilisé DERIVE.

Questionnaire 2

Charles estime se débrouiller moyennement avec la TI92. Il a appris seul à faire des graphiques en 3D. Ce sont «la prise en main de machine (mode, fichier, répertoire) et quelques subtilités (telle qu'appuyer deux fois sur [ENTER] pour sauvegarder) qui lui ont posé le

plus de difficultés, sachant qu'il n'a utilisé le manuel Texas Instrument qu'une ou deux fois («prise en main de la machine et surtout comment réaliser un graphique). Quant au mode d'emploi distribué en décembre, il l'a parfois consulté notamment pour la résolution de systèmes. Par rapport à une calculatrice graphique, ce sont «la taille de la machine, la grande capacité de la mémoire ainsi que les touches ♦ et *2nd* et les zoom' qui lui paraissent représenter la nouveauté. Il apprécie par ailleurs le module géométrie et les calculs de limites et de dérivées. Par contre, il trouve qu'elle «prend de la place dans le sac». Parmi les résultats qui l'ont surpris, il y a ceux sur les fractions. Il pense que la TI92 lui est très utile en classe et en contrôle, mais beaucoup moins à la maison. Quant à la calculatrice rétroprojetable, il juge qu'elle permet de mieux suivre les synthèses en classe, et que c'est bien mieux que quand le prof écrit tout au tableau. Il dit qu'il est plus intéressant de faire des mathématiques avec la TI92, car «moins rébarbatif». Il pense par ailleurs que la machine l'a aidé à comprendre la notion de dérivation. En ce qui concerne la mémoire, il y conserve ce qui a été fait en classe ainsi que des formules de mathématiques. Il utilise enfin sa machine en physique et en biologie.

Questionnaire 3

Charles estime qu'il est globalement plutôt satisfait de sa participation à l'expérimentation avec la TI92. S'adressant à un élève d'une autre classe, il lui dirait qu'il apprécie «la possibilité de factoriser et de calculer les limites». Par contre, ce qu'il n'apprécie pas c'est «l'encombrement». Il pense que s'il n'avait pas eu cette calculatrice en mathématiques, il aurait travaillé, appris et compris à peu près autant, et il aurait eu des résultats à peu près identiques. Il trouve que la TI92 lui a été utile pour le calcul de la dérivée et pour la géométrie dans l'espace («parce que l'animation des figures permet de mieux se rendre compte de ce qui se passe»), et qu'elle a été gênante «quand la dérivée trouvée n'est pas la même que celle à la main»). En utilisant la TI92, il a découvert à quel point les calculatrices peuvent être performantes. A la question : « Avec la TI92, même en étant nul en analyse, on peut réussir les contrôles », il répondrait que «c'est faux, car il est évident qu'il faut connaître un certain nombre de choses et bases du cours, et même si on peut enregistrer les formules, il faut savoir les appliquer et justifier». Par ailleurs, quand la machine fournit un résultat inattendu, il dit qu'en algèbre il factorise ou il développe.

Entretien 1

En voulant entrer la fonction dans [Y=], Charles commet une double erreur de syntaxe qu'il n'arrive à corriger qu'avec l'aide de l'observateur. Pour le tracé du graphe, il n'arrive pas à obtenir plus que le tracé initial, et au bout d'un seul changement de fenêtre il paraît satisfait du résultat. Son utilisation de [HOME] se réduit au calcul de la dérivée, quant à l'étude du sens de variation, elle est basée sur une utilisation brute des valeurs obtenues dans [TABLE]. Il fait ensuite tracer la courbe de f' (en gardant celle de f) qu'il n'exploite que pour contrôler son tableau de variation. Il effectue enfin des changements dans [WINDOW] pour améliorer son tracé (formé des deux courbes de f et de f') sans relever de contradiction avec son tableau de variation.

Au cours de cet entretien, la résolution a été essentiellement sur machine. L'instrumentation s'est réduite à

* une utilisation brève et de niveau 1 de l'application [HOME]

* la lecture de [TABLE] pour l'étude des variations

* l'utilisation de [GRAPH] uniquement pour améliorer le tracé de *f*

Entretien 2

Lors de cet entretien, Charles a fait tracer le graphe de *f* sans effectuer de changement de fenêtre. Il a ensuite calculé la dérivée dans [HOME], avant d'en étudier le signe en Papier/Crayon. Il a tout d'abord cherché les racines du numérateur (trinôme du 2nd degré) à l'aide du discriminant avant de déterminer son signe. Le seul recours à [HOME] a été pour faire des calculs numériques. Le signe de la dérivée a été finalement incorrect vu qu'il a considéré que le signe de $(x+3)^2$ était le même que celui de $(x+3)$. Par ailleurs, il a eu recours à une lecture graphique primitive pour déterminer les limites et le point de singularité, ainsi que pour le contrôle des variations de *f*. Notons enfin l'absence d'utilisation de [TABLE].

En résumé, la stratégie de Charles a été plutôt une stratégie P/C basée sur l'étude du signe d'un trinôme, avec un contrôle à l'aide de [GRAPH] (lecture à l'oeil nu).

Contrôle spécifique

Charles a déterminé les zéros de la dérivée à la machine, et a étudié son signe par [TABLE].

Entretien 3

Pendant la phase de preuve, Charles ne se rappelait plus de la définition de la périodicité. Le seul module utilisé est [HOME], et ce pour étudier la périodicité (sollicité par l'observateur, il a fait calculer $f(x+\pi)$ dans [HOME] sans pouvoir exploiter le résultat malgré un essai en P/C) et pour calculer la dérivée.

Francis

Francis est un bon élève, sérieux, cherchant vraiment à comprendre en profondeur, encore un peu lent dans les travaux écrits au début de l'année : 13.25 de moyenne, 13.25 de moyenne de contrôles.

Questionnaire 1

Il dispose d'une TI82 depuis moins d'un an. L'année dernière, il avait une calculatrice collège et l'utilisait souvent en classe et à la maison. Il utilise sa calculatrice actuelle pour faire des calculs numériques et tracer des graphiques exclusivement . Il a appris à s'en servir uniquement en manipulant, et pense qu'il ne connaît pas bien ses possibilités. Il a souvent recours au *Zoom* et parfois aux commandes *Trace* et *Range*. Il est d'accord avec les opinions 35 (gain de temps) et 37 (vérification), sans avis sur la 36 (aide à la résolution) et pas du tout d'accord avec la 38 (aide à la préparation des contrôles). Sa machine, dit-il, n'a jamais affiché des résultats surprenants, ne l'a jamais induit en erreur mais il déclare vérifier souvent les résultats qu'elle affiche, soit graphiquement soit « en remplaçant une inconnue par une valeur numérique dans une équation ». Pour lui, la calculatrice fait gagner du temps tout en aidant à contrôler les résultats, il est favorable à son utilisation en contrôle.

Il y a un ordinateur chez lui, qu'il utilise souvent . Il a déjà utilisé plus de dix fois des logiciels de traitement de textes, de dessin et des jeux informatiques, il a aussi utilisé des tableurs. Il pense enfin que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques mais sans justifier sa réponse.

En géométrie, il a juste utilisé et très peu le logiciel « dessiner l'espace », qu'il voit comme un logiciel pour s'entraîner, facile d'accès. Il pense qu'il est utile pour l'apprentissage de la géométrie dans l'espace.

Il n'a jamais utilisé DERIVE.

Questionnaire 2

Francis estime se débrouiller moyennement avec la TI92. Il a appris seul à utiliser le module de géométrie et à tracer les graphiques en 3D (pour un jeu). Il n'a rencontré aucune difficulté à utiliser sa machine, sachant qu'il consulte parfois le manuel Texas Instrument et jamais le mode d'emploi distribué en décembre. Par rapport à une calculatrice graphique, ce sont le module de géométrie et les graphiques en 3D qui lui paraissent représenter la nouveauté. Quant à ce qui lui semble le mieux, ce sont les calculs de limites et de dérivées, les factorisations et les développements ainsi que la résolution d'équations, sans oublier l'accès aux fonctionnalités par les touches de fonction. Il pense que la TI92 lui est très utile en classe, mais peu en contrôle ou à la maison. Pour ce qui est de la calculatrice rétroprojetable, il juge qu'elle permet de mieux suivre les synthèses en classe. Il dit que faire des mathématiques est pareil avec la TI92 que sans, ni plus intéressant ni plus facile. En ce qui concerne la mémoire, il y conserve uniquement ce qui a été fait en classe.

Questionnaire 3

Françis estime qu'il est globalement très satisfait de sa participation à l'expérimentation avec la TI92. S'adressant à un élève d'une autre classe, il lui dirait qu'il apprécie l'utilisation de la TI92 en général. Il pense que s'il n'avait pas eu cette calculatrice en mathématiques, il aurait travaillé, appris et compris à peu près autant, et il aurait eu des résultats à peu près identiques.

Il trouve que la TI92 lui a été utile par l'utilisation du *ZoomFit* («parce que ça permet de visualiser le courbe entièrement ou ses variations essentielles») et par la rapidité des calculs, qu'elle a été intéressante par «l'utilisation de l'application de géométrie, avec les lieux de points et les animations («parce qu'on visualise mieux le problème et la figure»). Il dit avoir trouvé la machine gênante (mais pas plus qu'une calculatrice graphique habituelle) lorsqu'en «devoir, il affiché la dérivée au lieu de la fonction, et qu'il a perdu du temps car la courbe ne correspondait pas au tableau de variation». Par ailleurs, il pense que la TI92 est inutile pour les calculs simples (divisions, multiplications...) Il dit qu'elle ne l'oblige pas à se poser des questions, ni à réfléchir davantage à ce qu'il fait, pas plus qu'à apprendre des choses inutiles. Néanmoins, il juge que l'utilisation de la TI92 a modifié son point de vue sur les calculatrices, «parce que c'est une calculatrice très puissante et complexe, et qu'elle s'apparente davantage à un ordinateur». Il ne pense pas qu'elle soit très utile en contrôle, car «elle donne les résultats mais pas le raisonnement qu'il faut écrire sur la feuille de devoir». Il dit enfin que quand la TI92 fournit un résultat inattendu, «il essaie de voir si ce résultat est égal à celui auquel il s'attendait, avec les calculs de dérivées notamment en visualisant les deux courbes».

Entretien 1

Après un changement dans [WINDOW], Francis a obtenu un tracé de type [AB]. L'investissement de [HOME] a été pour définir et pour calculer la dérivée. Sa stratégie pour l'étude des variations de f se base essentiellement sur le tracé de f' et sur une lecture graphique assez variée (utilisation de *Trace*, *ZoomBox* et *F5-Maximum*). L'unique recours à l'application [TABLE] a été pour vérifier que $f'(-3) = 0$. Notons enfin deux erreurs de syntaxe survenues lors de la

résolution : l'oubli de * pour un produit et l'oubli de la variable au moment de chercher la dérivée.

Entretien 2

Avant *Clear a-z* : Pour tracer f, Francis a effectué un *ZoomFit*. Par ailleurs, l'étude des variations de f est fondée sur le tracé des courbes de f et de f' (par une lecture graphique primitive). Le repérage des racines de f' s'est fait dans [GRAPH] à l'oeil nu, avant le contrôle dans [HOME] (calcul de $f'(-4)$, $f'(-2)$ et $f'(-3)$). L'incohérence entre le tableau de variation et le tracé de f a conduit Francis à reprendre son étude depuis le début (la machine ayant répondu $-\infty$ au calcul de $f'(-3)$ et non *undef*, Francis n'en a pas déduit la singularité et a plutôt pensé que c'était la mémoire de la TI92 qui était en cause).

Après *Clear a-z* : Sa démarche a été exactement la même qu'auparavant, mais cette fois-ci il a repéré la singularité. Il a ensuite utilisé [HOME] pour le calcul des limites (en ∞, en -3 puis en -3 à gauche et à droite, en -4 et en -2), après avoir intégré -3 à son tableau de variation. Et grâce à une lecture graphique par *Trace*, il a contrôlé les variations de f.

Contrôle spécifique

Pour l'étude de la fonction, Francis dit avoir utilisé [HOME] pour le calcul de f', pour la factorisation (*Factor*) et pour la recherche des racines de l'équation du second degré. Pour contrôler le tableau de variation, il a fait tracer séparément f puis f'.

Entretien 3

Pendant la phase de conjecture, Francis a combiné efficacement [WINDOW], la commande *Trace* ainsi que les commandes *Maximum* et *Minimum* du menu [GRAPH]-*F5*, avec un recours au module [HOME] pour chercher une valeur approchée de π (afin d'avoir un ordre de grandeur lors de la lecture graphique).

Pendant la phase de preuve, il démontre en P/C la parité et la périodicité. Il calcule ensuite f' dans le module [HOME] sans pouvoir aller plus loin.

Françoise

Françoise est une élève d'un niveau très moyen : sa moyenne est de 10.5, donc au-dessous de celle de la classe, sa moyenne de contrôle de 9.5. Elle semble s'investir moyennement en mathématiques et a besoin d'être stimulée.

Questionnaire 1

L'année dernière, Françoise utilisait sa calculatrice (une CASIO collège), souvent en classe et à la maison. Depuis moins de deux mois, elle dispose d'une CASIO FX-9900GC qu'elle emploie essentiellement pour tracer des graphiques, parfois pour faire des calculs numériques, entrer des formules de trigonométrie ou programmer. Elle a appris à se servir de sa machine en manipulant et en consultant le mode d'emploi. Elle déclare ne pas bien en connaître les possibilités et attend du professeur qu'il l'aide pour les tracés graphiques. Elle a souvent recours à la commande *Trace,* parfois à *Range* et *Zoom*. Sa machine, dit-elle, n'a jamais affiché des résultats surprenants, ne l'a jamais induite en erreur, pourtant elle vérifie souvent les résultats affichés par la calculatrice, pour « les factorisations et formes canoniques ». Elle est d'accord avec les affirmations 35 à 38 (gain de temps, vérification, aide à la résolution,

aide à la préparation des contrôles), et tout à fait d'accord avec celle concernant la vérification. Par ailleurs, elle est favorable à l'utilisation de la machine aux contrôles pour vérifier des calculs et faire des graphiques.

Il y a un ordinateur chez elle qu'elle utilise parfois. Son utilisation des logiciels concerne le traitement de texte, le dessin, les tableur et jeux informatiques (plus de dix fois sauf le tableur) . Elle pense enfin que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques sans préciser en quoi.

Concernant la géométrie, elle a utilisé mais très peu « le géomètre » et a trouvé son accès relativement facile. Elle pense que c'est une aide pour les trois types de tâches proposées mais ne commente pas ses réponses. Elle juge un tel logiciel utile pour l'apprentissage de la géométrie car il permet de mieux comprendre.

Elle n'a jamais utilisé DERIVE.

Questionnaire 2

Françoise estime se débrouiller moyennement avec la TI92. Elle a appris seule à programmer, à utiliser le module de géométrie et à tracer les graphiques en 3D. Elle n'a rencontré aucune difficulté à utiliser sa machine, sachant qu'elle consulte parfois le manuel Texas Instrument et jamais le mode d'emploi distribué en décembre. Par rapport à une calculatrice graphique, ce sont «le clavier, le module de géométrie et l'animation des figures » qui lui paraissent représenter la nouveauté. Elle dit apprécier tout dans la TI92 à part sa taille, et pense qu'elle lui est très utile que ce soit en classe, en contrôle ou à la maison. Quant à la calculatrice rétroprojetable, elle juge qu'elle ne fait pas gagner du temps. Elle pense par ailleurs, qu'il est plus intéressant et plus facile de faire des mathématiques, car «on peut vérifier les résultats». En ce qui concerne la mémoire, elle y conserve des programmes. Elle utilise enfin sa machine en physique et en biologie, pour faire des calculs.

Questionnaire 3

Françoise estime qu'elle est globalement plutôt satisfaite de sa participation à l'expérimentation avec la TI92. S'adressant à un élève d'une autre classe, elle lui dirait qu'elle apprécie «pouvoir vérifier les calculs de dérivées, ou faire des figures dans le module de géométrie, mais que par contre elle n'apprécie pas le fait «de ne pas savoir se servir de sa propre calculatrice». Elle pense que si elle n'avait pas eu cette calculatrice en mathématiques, elle aurait travaillé, appris et compris à peu près autant, et elle aurait eu des résultats à peu près identiques. Elle trouve que la TI92 lui a été utile pour tracer des courbes à la main, grâce au module [TABLE]. Elle pense qu'elle ne l'oblige pas à apprendre des choses inutiles, et que son utilisation n'a pas modifié son point de vue sur les calculatrices. Elle dit qu'elle aurait aimé pouvoir la garder pendant les vacances afin de connaître et de mieux utiliser ses commandes. A la question : « Avec la TI92, même en étant nul en analyse, on peut réussir les contrôles », elle répondrait que ce n'est pas vrai, et que la preuve est qu'elle n'a pas réussi ses contrôles!. Enfin, elle aimerait bien avoir une TI92 l'année suivante. Elle dit être volontaire à participer à une séance de TD hebdomadaire d'une heure avec la machine (en plus de l'horaire normal), si le lycée peut en mettre une à sa disposition pour les épreuves de bac.

Entretien 1

Après deux changements dans [WINDOW] motivés par la volonté de voir ce qui se passe en haut et en bas du tracé initial, Françoise a obtenu le tracé complet.

Son étude des variations de f a été affectée par deux erreurs. La première semble être une erreur d'inattention (elle a dérivé x(x+7) au lieu de dériver $f(x)$), quant à la seconde elle semble être due à une identification brute du 3ème degré au second degré. Il s'en est suivi un travail en P/C (calcul du discriminant et recherche des racines).

Au cours de cet entretien, le travail a été essentiellement en Papier/Crayon. L'utilisation couplée de [WINDOW] et [GRAPH] (lecture à l'oeil nu) s'est manifestée lors de l'amélioration du tracé de f, ou encore pour le contrôle du tableau de variation. Notons que [HOME] n'a été utilisée que pour définir f, calculer la dérivée ou effectuer des calculs numériques; la commande *Solve* n'a été investie quant à elle, que sous l'impulsion de l'observateur. Enfin, l'application [TABLE] n'est apparue à aucun moment dans la résolution.

Entretien 2

Françoise a investi [HOME] pour définir la fonction, pour calculer la dérivée, pour effectuer un calcul numérique, pour déterminer les limites en -4, -2, -∞ et -à titre de contrôle la limite en -3 à droite (le calcul de cette dernière limite s'étant effectué tout d'abord à la main). L'unique utilisation de [GRAPH] a été pour le tracé de la fonction, avec un changement dans [WINDOW]. En ce qui concerne les variations de f, l'étude a été effectuée en Papier/Crayon (racines et signe du trinôme). Notons enfin que Françoise a utilisé l'application [TABLE] (avec changement de [TblSet]) pour contrôler le tableau de variation.

Contrôle spécifique

Françoise a effectué la factorisation de f' à la machine et a résolu en P/C l'équation du second degré ainsi que l'étude du signe de la dérivée (tableau de signes et signe du trinôme). Elle a calculé la limite en 2 dans [HOME], tandis qu'en +∞ la limite a été calculée en P/C et vérifiée à la machine.

Entretien 3

Pendant l'entretien, Françoise a déclaré que les maxima étaient toujours les mêmes mais pas les minima, se laissant donc piéger par les phénomènes de discrétisation. Plus tard, après avoir rempli un tableau de variation (fortement sollicitée par l'observateur), elle a utilisé *Trace* pour repérer les coordonnées des extremums mais n'est pas arrivée à conclure. Par ailleurs elle a montré la périodicité en P/C, et a utilisé *ZoomFit* pendant la phase de conjecture.

Georges

Georges est un très bon élève : moyenne 17, moyenne des contrôles : 17.

Questionnaire 1

Il dispose d'une CASIO FX 9900GC depuis plus d'un an et sa calculatrice précédente était déjà une calculatrice graphique. L'année dernière, il l'a utilisée souvent en classe et à la maison. Il l'utilise actuellement souvent pour faire des calculs numériques, tracer des graphes ou rentrer des formules ou programmes : « Jeu 3x3 - Calcul de déterminations principales en trigonométrie » . Il a appris à se servir de sa machine en manipulant et en consultant le mode d'emploi. Il a souvent recours aux fonctions *Zoom* et *Trace*, parfois à *Range* et estime bien connaître les possibilités de sa machine. Il attend de l'enseignant une aide en programmation et en calcul scientifique. Sa machine ne lui a jamais donné de résultats surprenants mais il

s'est parfois trompé de mode en trigonométrie. Il vérifie parfois le résultat affiché en traitant la question de plusieurs manières. Par ailleurs, il est tout à fait d'accord avec les affirmations 35-38 (gain de temps, vérification, aide à la résolution, aide à la préparation des contrôles) et favorable à l'utilisation de la calculatrice aux contrôles parce que cela permet de gagner du temps et d'être plus sûr de soi .

Il y a un ordinateur chez lui, qu'il utilise souvent. Son utilisation des logiciels couvre le traitement de texte, le dessin, les tableurs et les jeux informatiques . Il pense enfin que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques, car « ils aident à mieux comprendre quand ils sont simples d'utilisation ».

En géométrie, il n'a utilisé que le logiciel « dessiner l'espace ». Il estime qu'il permet de mieux voir en 3D mais lui reproche de manquer de liberté. Ce logiciel constitue à son avis une aide pour les trois types de tâches proposées, du fait des changements de point de vue possibles. Il pense qu'il est utile pour l'apprentissage de la géométrie, car il permet de mieux comprendre et de mieux représenter l'espace.

Il n'a jamais utilisé DERIVE.

Questionnaire 2

Georges estime bien se débrouiller avec la TI92. Il a appris seul à programmer et à utiliser le module de géométrie. Ce sont l'utilisation du module Data/Matrix Editor et le langage de programmation qui lui ont posé le plus de difficultés, sachant qu'il n'a jamais consulté le mode d'emploi distribué en décembre. Quant au manuel Texas Instrument, il s'en est servi parfois, surtout pour la programmation. Par rapport à une calculatrice graphique, ce sont «l'interface d'utilisation, les possibilités de calcul (dérivées, limites, . . .) et l'interactivité (copier/coller)' qui lui paraissent représenter la nouveauté. Il apprécie par ailleurs, les «grandes capacités' de la machine dans de nombreux domaines (math, physique . . .), la résolution et le travail sur les équations' ainsi que la présentation des calculs (pretty print) et la grande capacité de mémoire». Par contre, ce qui lui paraît moins bien ce sont «l'encombrement, la vitesse des graphiques et le langage de programmation complexe (mais complet!). Parmi les résultats qui l'ont surpris, il y a les «exposants 2/3». Il pense que la TI92 lui est très utile en classe et en contrôle, mais beaucoup moins à la maison. Quant à la calculatrice rétroprojetable, il juge qu'elle permet de mieux suivre les synthèses en classe. Il dit qu'il est plus facile (car plus rapide) et plus intéressant de faire des mathématiques avec la TI92, surtout la résolution d'équations, l'étude de fonctions et certaines factorisations où la machine l'a particulièrement aidé à comprendre. Par ailleurs et pour ce qui est de la mémoire, il y conserve ce qui a été fait en classe ainsi que des programmes, des formules de mathématiques. Il utilise enfin sa machine en physique, en chimie et en biologie.

Questionnaire 3

Georges estime qu'il est globalement très satisfait de sa participation à l'expérimentation avec la TI92. S'adressant à un élève d'une autre classe, il lui dirait qu'il apprécie «la grande variété d'applications de cette calculatrice (en maths ou dans d'autres disciplines), sa logique dans les calculs de base (pretty print, résolution d'équations) et son langage de programmation complet. Par contre, il n'apprécie pas « l'interface de certaines applications (Text Editor, Data/Matrix Editor, Geometry)». Il pense que s'il n'avait pas eu cette calculatrice en mathématiques, il aurait travaillé et compris à peu près autant, il aurait eu des résultats à peu près identiques, mais il aurait appris davantage. Il trouve que la TI92 lui a été utile en devoir

commun («parce qu'elle permet de gagner du temps dans les résolutions d'équations, en trigonométrie, pour faire les graphiques ou pour vérifier des calculs»). Il trouve également qu'elle était intéressante à utiliser pour résoudre les exercices de géométrie («parce que le module Geometry permet de faire la figure et de voir le lieu des points»), mais que certaines notations spécifiques sont gênantes telle que *Exposant 2/3*. Il dit que la TI92 permet de faire des activités plus intéressantes en classe et qu'elle aide à résoudre les problèmes. Par ailleurs, il pense qu'elle a modifié son point de vue sur les calculatrices («la calculatrice n'est plus une simple aide au calcul numérique ou tracé de graphiques, mais une aide et un outil de résolution pour tout exercice»). Quand la machine fournit un résultat inattendu, il essaie de factoriser ou de développer ce résultat et de le comparer avec celui trouvé en Papier/Crayon. A la question :« Avec la TI92, même en étant nul en analyse, on peut réussir les contrôles », il répondrait «qu'il faut justifier les résultats». Enfin, il aimerait bien avoir une TI92 l'année suivante et s'il pouvait la garder pendant les vacances il voudrait approfondir le langage de programmation. Il dit être volontaire à participer à une séance de TD hebdomadaire d'une heure avec la machine (en plus de l'horaire normal), si le lycée peut en mettre une à sa disposition pour les épreuves de bac.

Entretien 1

L'investissement de [HOME] a concerné la définition de la fonction, le calcul, la définition et les racines de la dérivée (*Zeros*) ainsi que le calcul de certaines valeurs de f' pour déterminer son signe, sans oublier le calcul de $f(0)$ pour vérifier la singularité en 0. Pour l'amélioration du tracé, Georges a effectué un changement dans [WINDOW] ainsi qu'un *ZoomOut* et un *ZoomBox*. Enfin, et pour contrôler son tableau de signes, il fait tracer la courbe de f' et effectue un *ZoomOut* avant de se déplacer à l'aide de *Trace*. Notons que Georges a mis -∞ en-dessous de 0 sur le tableau de signes (au lieu du conventionnel ||) conformément au résultat de la machine qui était $f'(0) = -\infty$.

Entretien 2

Georges définit la fonction, puis définit et calcule simultanément la dérivée avant de faire tracer la courbe de f et d'effectuer un *ZoomFit*. Ensuite il calcule les racines de f' dans [HOME] et détermine son signe en P/C (signe d'un trinôme), avant de contrôler dans [HOME] (calcul de $f'(0)$, $f'(10)$, $f'(-3)$ et $f(-3)$) puis dans [GRAPH] (à l'oeil nu). Pour ce qui est du calcul des limites (en ∞, en -3 puis en -3 à gauche), il s'est effectué dans [HOME] avec un contrôle dans [GRAPH] (utilisation de *Trace*). Notons que même si la machine a affiché -∞ pour $f'(-3)$, Georges a marqué cette fois || sur son tableau de signes.

Contrôle spécifique

Durant ce contrôle, Georges a utilisé [HOME] pour le calcul de f' et de ses racines ainsi que pour la factorisation. Ensuite, il étudie le signe en P/C (tableau de signes), en s'aidant de la machine (calcul des ordonnées des extremums). Notons également l'utilisation de la commande *Expand* pour la détermination du polynôme dont la courbe est asymptote à celle de f.

Entretien 3

Durant la phase de conjecture, Georges a fait un *ZoomFit* avant d'utiliser *Trace* pour conjecturer. Il a semblé tenir compte autant de la représentation graphique que de l'expression

de la fonction (« *Je vais suivre le tracé de la courbe, donc apparemment elle est de 3π la période . . . Je vais regarder si 2π est période, non on voit pas, mais comme $\cos(x+2\pi) = \cos x$, apparemment c'est 2π.* ») .

Durant la phase de preuve, il a utilisé exclusivement le module [HOME] avec au besoin, un relais P/C assez efficace (notamment pour la périodicité en simplifiant le résultat donné par la machine, et pour la non-définition de f' en repérant la nullité du dénominateur).

Gérard

Gérard est un élève de niveau moyen, aux résultats irréguliers, peu travailleur : une moyenne globale de 10.5, des notes de contrôles respectives de 7.5 et 16.

Questionnaire 1

Il dispose d'une CASIO FX-7500G depuis plus d'un an et disposait auparavant d'une calculatrice SHARP. L'année précédente, il l'utilisait parfois en classe et à la maison. Il utilise sa calculatrice actuelle pour faire des calculs numériques (souvent), tracer des graphiques (souvent), programmer (parfois). Il y a entré des formules pour résoudre des équations et des jeux. Il a appris à se servir de sa machine en manipulant et en consultant le mode d'emploi. Il est un de rares élèves à estimer qu'il connaît bien les possibilités de sa machine et pourtant ne déclare utiliser que parfois les fonctions graphiques *Zoom, Trace* et *Range*. Il n'a pas bénéficié d'une initiation spécifique et exprime ce qu'il attend de l'enseignant dans un registre un peu primitif « toutes les touches ». Il dit avoir rencontré des graphiques surprenants mais n'avoir jamais commis d'erreurs du fait de la calculatrice. Il ne vérifie jamais les résultats affichés par la calculatrice, et est favorable à son utilisation aux contrôles « parce qu'on peut mettre des aide-mémoire et que parfois ça simplifie la vie » . Il est plutôt d'accord avec les affirmations 35, 36 et 37 (gain de temps, aide à la résolution et à la vérification) mais estime que la calculatrice ne l'aide pas à préparer ses contrôles.

Il y a un ordinateur chez lui et il s'en sert souvent. Il a utilisé plus de dix fois des traitements des textes et des jeux, moins régulièrement des logiciels de dessins variés et un tableur. Il pense enfin que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques « grâce à des logiciels éducatifs » .

Il a déjà utilisé en géométrie, « le géomètre » et « dessiner l'espace », entre trois et dix fois. Il n'a pas trouvé difficile de les utiliser car il les trouve simples d'utilisation. Il insiste sur les potentialités de visualisation et de déplacement offertes par ces logiciels qui les rendent utiles pour l'apprentissage de la géométrie et en font des aides pour la recherche de propriétés et leur démonstration.

Il a utilisé DERIVE en classe entre trois et dix fois pour résoudre des équations et des inéquations . Il pense qu'il n'est pas difficile à utiliser et utile car il permet de vérifier les résultats et de résoudre rapidement les exercices les plus difficiles .

Questionnaire 2

Gérard estime bien se débrouiller avec la TI92. Il a appris seul à manipuler le module de géométrie, l'éditeur de programme et le Data/Matrix Editor. Il n'a rencontré aucune difficulté à utiliser sa machine, sachant qu'il n'a jamais consulté le mode d'emploi distribué en décembre. Quant au manuel Texas Instrument, il s'en est servi parfois, surtout pour la programmation et pour les modules géométrie et Data/Matrix. Par rapport à une calculatrice

graphique, c'est le module de géométrie qui lui paraît représenter la nouveauté. Il apprécie la capacité de mémoire, la rapidité des calculs et les fonctions, mais beaucoup moins le fait que tout soit indiqué en anglais. Il pense que la TI92 lui est très utile en contrôle et à la maison, mais moins en classe, et qu'avec elle faire des mathématiques est plus intéressant et plus facile parce que plus rapide. Il dit que la machine l'a aidé à comprendre la notion de limite. En ce qui concerne la mémoire, il y conserve des jeux, des programmes, des formules de mathématiques et d'autres disciplines. Il utilise enfin sa machine en physique et en chimie.

Questionnaire 3

Gérard estime qu'il est globalement plutôt satisfait de sa participation à l'expérimentation avec la TI92. S'adressant à un élève d'une autre classe, il lui dirait qu'il apprécie «d'avoir la calculatrice». Par contre, ce qu'il n'apprécie pas est le module de géométrie «parce qu'il prend trop de place». Il pense que s'il n'avait pas eu cette calculatrice en mathématiques, il aurait travaillé et compris à peu près autant, et il aurait eu des résultats à peu près identiques, mais il aurait appris davantage. Il trouve que la TI92 lui a été utile pour le calcul des limites («c'est rapide») et par la programmation («ça réduit le temps pour calculer»). Il trouve par ailleurs que le module de géométrie est inutile et gênant. Il estime qu'elle incite à ne pas apprendre les choses indispensables et qu'elle ne fait pas perdre de temps. Néanmoins, il pense qu'elle ne donne pas envie de chercher les exercices, pas plus qu'elle n'oblige à réfléchir davantage à ce que l'on fait. En utilisant la TI92, il s'est rendu compte à quel point les calculatrices peuvent être performantes («grande capacité de stockage»). A la question : « Avec la TI92, même en étant nul en analyse, on peut réussir les contrôles », il répondrait que c'est vrai. Il dit être volontaire à participer à une séance de TD hebdomadaire d'une heure avec la machine (en plus de l'horaire normal), si le lycée peut en mettre une à sa disposition pour les épreuves de bac.

Entretien 1

L'amélioration du tracé de f s'est faite en deux temps, se basant à chaque fois sur une utilisation couplée de [WINDOW] et [GRAPH] (lecture à l'oeil nu) : au début de l'entretien où Gérard n'a fait qu'un seul changement de fenêtre sans pouvoir obtenir mieux que le tracé initial, après avoir parcouru [TABLE] à l'occasion du contrôle du tableau de variation.

L'investissement de [HOME] s'est résumé à la définition de la fonction, au calcul de la dérivée (avec une erreur de syntaxe) et au développement de son expression (*Expand*). En ce qui concerne le signe de $f'(x)$, il a été déterminé en P/C. Cette détermination semble être due à une identification erronée de $f'(x)$ à un trinôme du 2nd degré, compte tenu de la présence de monômes du 1er et du 2ème degré dans l'expression développée de la dérivée. Notons enfin que Gérard n'a pas relevé l'incohérence de son tableau de variation avec le tracé final de f.

Entretien 2

L'investissement de [HOME] a concerné la définition de f, le calcul de la dérivée, des calculs numériques, le calcul de $f(-4)$ et de $f(-2)$ puis la détermination des limites (en ∞, en -3 puis en

-3 à gauche et à droite). Excepté un *ZoomFit* pour améliorer le tracé de f, son utilisation de l'application [GRAPH] (pour le contrôle du tableau de variation et de la limite en -3) se réduit à une lecture à l'oeil nu. Quant à l'application [TABLE], elle a été mobilisée uniquement pour déterminer la singularité. Enfin pour ce qui est des variations de f, l'étude s'est effectuée en Papier/Crayon (racines et signe d'un trinôme).

Contrôle spécifique

Pour l'étude des variations, Gérard a entré la fonction dans [Y=] avant de faire tracer la courbe en *ZoomFit*. Il n'a pas calculé la dérivée et s'est basé exclusivement sur l'application [TABLE] pour repérer le sens de variation et les singularités. Pour les limites, le calcul s'est fait à la machine.

Entretien 3

Pendant la phase de conjectures, les seules commandes que Gérard a utilisées ont été les commandes *F5-Maximum* et *F5-Minimum* de l'application [GRAPH].

Durant la phase de preuves, il a utilisé [HOME] pour montrer la périodicité. Pour étudier le sens de variation, il a commencé par parcourir [TABLE] mais sans changement de pas dans [TblSet], avant de calculer la dérivée en 0, π, et $\pi/2$. Ensuite il a fait un *ZoomFit* dans [GRAPH] puis est retourné dans [HOME] afin de déterminer le signe de la dérivée sur $[0;\pi]$ et ceci en calculant $f'(\pi/4)$ et $f'(3\pi/4)$, en vertu du théorème-en-acte « *entre deux racines, le signe de la dérivée est constant* ». Notons enfin que Gérard a utilisé la commande [GRAPH]-*F5-A-Tangent* pour répondre à la question de l'observateur sur l'existence d'une tangente.

Michel

Michel est un très bon élève de cette classe : moyenne 15.5, moyenne des contrôles : 13.5.

Questionnaire 1

Il dispose d'une TI82 depuis moins d'un an et ne mentionne pas le type de la calculatrice qu'il possédait avant. L'année dernière, il l'utilisait parfois en classe et à la maison. Il utilise sa calculatrice actuelle uniquement pour faire des calculs numériques et des tracés graphiques. Il a appris à s'en servir uniquement avec le professeur. Il a souvent recours au *Zoom,* parfois au *Range* mais jamais à *Trace* et estime ne pas bien connaître les possibilités de sa machine . Il attend du professeur une aide à la programmation, à la gestion des mémoires, à la connaissance des touches. Il a déjà obtenu des résultats surprenants pour des raisons de parenthésage mais estime ne jamais avoir été induit en erreur. Il vérifie souvent les résultats affichés par sa machine : « en les refaisant de différentes manières », et est favorable à son utilisation aux contrôles car « ça permet de résoudre certains calculs plus rapidement et le temps durant un devoir étant important, l'utilisation de la calculatrice parait nécessaire ».

Il est plutôt d'accord avec l'opinion 35 (gain de temps), tout à fait d'accord avec les deux suivantes (aide à la vérification et à la résolution), pas du tout d'accord avec la 38 (aide à la préparation des contrôles).

Il a un ordinateur chez lui et l'utilise parfois. Son utilisation de certains logiciels est fréquente surtout pour le traitement de textes, le dessin, le tableur et les jeux informatiques. Il pense enfin que l'utilisation des ordinateurs est sans effet dans l'apprentissage des mathématiques : « A mon avis, rien n'est mieux que le professeur pour enseigner les mathématiques ».

En géométrie, il n'a utilisé que le logiciel dessiner l'espace et très peu. Il estime n'y avoir rien appris. Il ne le considère comme une aide pour aucune des tâches proposées car dit-il, « il n'y a pas besoin de réfléchir » . Il le juge inutile pour l'apprentissage de la géométrie car, encore une fois, dit-il, le professeur c'est mieux.

Il n'a jamais utilisé DERIVE.

Questionnaire 2

Michel estime se débrouiller moyennement avec la TI92. Il a appris seul à utiliser l'éditeur de texte. C'est dans le module de géométrie qu'il a rencontré le plus de difficultés pour apprendre à se servir de sa machine, sachant qu'il n'a jamais consulté ni le mode d'emploi distribué en décembre, ni le manuel Texas Instrument. Par rapport à une calculatrice graphique, ce sont «la résolution d'équations et d'inéquations, les constructions géométriques et les différents calculs que la TI92 effectue seule (dérivée, limites, . . .)' qui lui paraissent représenter la nouveauté. Il trouve également qu'elle est facile à utiliser grâce aux «menus', tout en déclarant qu'il n'aime pas s'en servir. Les résultats qui l'ont surpris concernent le calcul des limites et la résolution d'équations et d'inéquations. Il pense que la TI92 lui est peu utile en classe et en contrôle, et pas du tout à la maison. Quant à la calculatrice rétroprojetable, il juge qu'elle ne va pas trop vite mais que c'est mieux quand le prof écrit tout au tableau. Il dit qu'il est plus facile de faire des maths avec la TI92, parce qu'elle permet la vérification des résultats, mais «qu'elle n'a changé en rien son avis sur les maths». L'utilisation de sa machine s'étend à la physique et la biologie mais se résume à des calculs.

Entretien 1

Michel commence sa résolution par la transformation de l'expression de $f(x)$ à l'aide de *Expand* dans [HOME]. Il définit ensuite la fonction avec *Define*, avant de calculer la dérivée et de définir f' à l'aide de *STO*. Et bien qu'il ait fait tracer la courbe de la dérivée, sa stratégie pour l'étude des variations de f semble essentiellement basée sur le théorème en acte « *Entre deux zéros, la dérivée a un signe constant* ». Il utilise alors *Solve* dans [HOME] pour chercher les racines de f' ainsi que pour déterminer l'intervalle sur lequel f' est positif (*Solve*(d(x) = 2,x)), avant de contrôler en parcourant [TABLE]. Notons enfin que son utilisation de [GRAPH] s'est réduite au tracé des courbes de f et de f' dans la fenêtre initiale.

Entretien 2

Michel a étudié le signe de f' en P/C (racines et signe d'un trinôme), avant de contrôler les racines dans [HOME] (*Solve*). Et en dehors de la définition de f, le calcul de f' et de $\lim_{+\infty} f$, il a utilisé [HOME] pour contrôler les limites à droite et à gauche en -3, les calculs étant effectués auparavant en P/C. L'utilisation de [GRAPH] a été essentiellement pour le contrôle (tableau de variation puis limites). Quant à l'application [TABLE], elle a été investie exclusivement pour la détermination de points remarquables.

Serge

Serge est un élève moyen, difficile à cerner : sa moyenne est de 10.5 et sa moyenne de contrôle de 10.

Questionnaire 1

Il dispose d'une CASIO CFX 6300 depuis plus d'un an et avait avant une TI collège. L'année dernière, il l'a utilisée parfois en classe et à la maison. Il l'utilise cette année dans tous les registres indiqués mais seulement parfois et ses activités de programmation concernent des jeux. Il a appris à s'en servir uniquement en manipulant, a parfois recours à la fonction *Range* mais jamais à *Trace* ou *Zoom*. Il estime cependant avoir une bonne connaissance de ses possibilités Il déclare avoir déjà obtenu des résultats surprenants, avoir parfois été induit en

erreur, mais ne donne pas d'exemples. Il vérifie parfois les résultats affichés par sa machine « avec des règles de math », et est favorable à son utilisation aux contrôles parce que « les calculs sont plus simples ». Il est tout à fait d'accord avec les affirmations 35-38 (gain de temps, vérification, aide à la résolution, aide à la préparation des contrôles).

Chez lui, il n'y a pas d'ordinateur et son utilisation de logiciels se limite essentiellement à la fréquentation de jeux informatiques. Il pense enfin que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques car « on peut tout faire avec ».

En géométrie, Serge a utilisé « le géomètre » et « dessiner l'espace » entre 3 et 10 fois. Il les a trouvés faciles d'accès. Il les considère comme des aides pour les trois types de tâches proposées, en donnant chaque fois les mêmes raisons : visualisation en 3D, action possible sur la figure. Il pense qu'ils peuvent être utiles à l'apprentissage de la géométrie car ils rendent les tracés plus simples.

Concernant DERIVE, Serge l'a utilisé en classe une ou deux fois pour illustrer le cours et chercher des exercices . Il pense qu'il est facile à utiliser, utile car il factorise et développe lui-même, et qu'il permet de construire des figures, chose que sa calculatrice ne peut pas faire .

Questionnaire 2

Serge estime bien se débrouiller avec la TI92. Il a appris seul à manipuler l'éditeur de programme, l'éditeur de texte et la mémoire. Il n'a rencontré aucune difficulté à utiliser sa machine, sachant qu'il n'a jamais consulté le mode d'emploi distribué en décembre. Quant au manuel Texas Instrument, il s'en est servi parfois «pour les messages d'erreur ou pour les fonctions de commande pour les programmes». Il dit que par rapport à une calculatrice graphique, il y a «plus de mémoire et plus de possibilités mathématiques (au niveau des calculs, des graphiques, de la géométrie...). Il apprécie particulièrement l'éditeur de programme mais beaucoup moins la taille de la machine. Il pense que la TI92 lui est très utile en classe et en contrôle, mais beaucoup moins à la maison. Quant à la calculatrice rétroprojetable, il juge qu'elle fait gagner du temps, sans pour autant aller trop vite. Il dit qu'avec la TI92, il est plus intéressant de faire des mathématiques («on peut résoudre des équations et on a plus de calculs»), et plus facile («tous les résultats mathématiques sont vérifiés»). En ce qui concerne la mémoire, il y conserve ce qui a été fait en classe ainsi que des jeux, des programmes, des formules de mathématique et d'autres disciplines. Il utilise enfin sa machine en physique, en chimie et en biologie.

Questionnaire 3

Serge estime qu'il est globalement plutôt satisfait de sa participation à l'expérimentation avec la TI92. S'adressant à un élève d'une autre classe, il lui dirait qu'il apprécie «le fait de bénéficier gratuitement d'un outil de travail très utile', mais que par contre il n'apprécie pas d'être interviewé. Il pense que s'il n'avait pas eu cette calculatrice en mathématiques, il aurait travaillé, appris et compris à peu près autant, et il aurait eu des résultats à peu près identiques.

Il trouve que la TI92 lui a été utile «quand le calcul est difficile à la main, parce qu'elle permet de vérifier le résultat et de mieux comprendre', mais que son utilisation n'a pas modifié son point de vue sur les calculatrices («car une calculatrice sera toujours un outil de calcul»). Par ailleurs, il dit qu'elle permet de faire des activités plus intéressantes en classe, de résoudre des problèmes et qu'elle peut aider à comprendre les mathématiques. Il estime également qu'elle ne fait pas perdre de temps, qu'elle n'incite pas le professeur à poser des

problèmes trop difficiles, et qu'elle n'oblige ni à réfléchir davantage à ce que l'on fait, ni à apprendre des choses inutiles.

A la question : « Avec la TI92, même en étant nul en analyse, on peut réussir les contrôles », il répondrait que c'est vrai. Il dit enfin qu'il aimerait bien avoir sa machine l'année prochaine.

Entretien 1

Lors de cet entretien, le travail de Serge a été exclusivement sur machine. Pour l'amélioration du tracé de f, il a effectué un seul changement dans [WINDOW] et n'a obtenu qu'un tracé de type [AB].

Son investissement de [HOME] va de la définition de f à l'utilisation de la commande *Graph* (unique parmi tous les élèves sélectionnés), en passant par le calcul de la dérivée et la recherche de ses racines (*Solve*). Sa stratégie pour l'étude des variations de f est basée sur le parcours de [TABLE] (avec des changements du pas), sur une lecture graphique à l'aide de *Trace* ainsi que sur l'utilisation précoce du tracé de la dérivée. Tout ceci témoigne d'une assez bonne connaissance de la machine.

Entretien 2

Serge a investi [HOME] pour définir les fonctions f et f', pour calculer la dérivée et ses racines (*Zeros*) et pour calculer les limites (en ∞, en -3 à gauche puis en -2 et -4). L'utilisation de [GRAPH] a concerné essentiellement le signe de la dérivée (lecture à l'oeil nu) et le contrôle des limites (avec un *ZoomFit* pour le contrôle final du tableau de variation). Serge a également mobilisé l'application [TABLE] (avec un changement de pas) pour la détermination de la singularité en -3, avec un contrôle dans [GRAPH]. En ce qui concerne l'étude des variations de f, sa stratégie a été basée sur l'alternance des signes et sur une lecture graphique primitive. Notons qu'à la fin de sa résolution, il a fait tracer les droites d'équations $y = -10$ et $y = -6$ les appelant dans un premier temps asymptotes avant qu'il ne rectifie en disant « *Ce sont les tangentes . . . elles sont parallèles à l'axe des abscisses* ».

Contrôle spécifique

Serge a calculé la dérivée ainsi que les limites à la machine, semble avoir cherché les racines dans [HOME] et le signe à l'aide du tracé.

Entretien 3

Pendant la phase de conjectures, Serge a utilisé *Trace* pour déterminer la période. Il a parcouru ensuite [TABLE] pour chercher les valeurs des extremums après avoir adapté [TblSet] . En ce qui concerne la dérivabilité, il a calculé f' dans [HOME], fait tracer sa courbe puis parcouru [TABLE] à la recherche des points de non-dérivabilité.

Pendant la phase de preuve, il est arrivé à montrer la périodicité et la parité en combinant [HOME] et le travail en Papier/Crayon. Pour l'étude des variations de f, il a calculé dans [HOME] $f(0)$, $f(\pi/2)$ et $f(\pi)$ avant de mettre le signe de f' en se basant sur le tracé. Il a contrôlé ensuite en parcourant [TABLE].

Vincent

Vincent est un élève moyen qui a des idées mais n'aime pas beaucoup rédiger et travaille assez irrégulièrement selon son enseignante. Ses notes pour le premier trimestre ne reflètent pas tout à fait ce portrait : sa moyenne de 13 est supérieure à celle de la classe, celle des contrôles de 11.5.

Questionnaire 1

Il dispose d'une CASIO 7800 depuis plus d'un an, avant il avait une TI Galaxie. L'année dernière, il a utilisé sa calculatrice parfois en classe et à la maison. Il utilise sa calculatrice actuelle pour faire des graphiques et moins souvent pour des calculs numériques ou pour la programmation (Jeux) . Il a appris à s'en servir uniquement en manipulant, il n'a que parfois recours à *Zoom, Range* ou *Trace,* et estime ne pas bien connaître les possibilités de sa machine. Il attend de l'enseignant qu'il lui montre la majorité des possibilités. Sa machine n'a jamais produit des résultats surprenants, ne l'a jamais induit en erreur, dit-il et il ne vérifie jamais les résultats qu'elle affiche. Il est partagé sur son utilisation aux contrôles : « A cause de la calculatrice on ne calcule plus à la main, mais grâce à elle les calculs vont plus vite » . Il est tout à fait d'accord avec les affirmations 35, 37 et 38 (gain de temps, vérification, aide à la résolution, aide à la préparation des contrôles), mais pense en revanche que la calculatrice ne l'aide pas à résoudre les problèmes.

Il ne dispose pas chez lui d'un ordinateur et a utilisé peu de logiciels. Il pense enfin que les ordinateurs sont dangereux pour apprendre des mathématiques car « il n'y a plus de calcul à la main, plus de dessin graphique en géométrie ».

En géométrie, il n'a utilisé que le logiciel « dessiner l'espace », entre 3 et 10 fois. Il a rencontré des difficultés à cause de son manque de familiarité avec l'ordinateur. Il estime que c'est une aide à la détermination des propriétés d'une figure à cause des zooms et des rotations possibles, à la démonstration car cela fait voir les propriétés fausses, mais non à la résolution des problèmes de construction. Il juge le logiciel sans effet sur l'apprentissage.

Enfin, il n'a jamais utilisé DERIVE.

Questionnaire 2

Vincent estime se débrouiller moyennement avec la TI92. Il a appris seul à programmer et à faire la «transmission de programmes». Il n'a rencontré aucune difficulté à utiliser sa machine, sachant qu'il n'a jamais consulté le mode d'emploi distribué en décembre. Quant au manuel Texas Instrument, il s'en est servi parfois, surtout pour la programmation. Par rapport à une calculatrice graphique, c'est le module de géométrie qui lui paraît représenter la nouveauté. Il trouve également que «les graphiques sont plus grands et les fonctions très accessibles partout'; mais ce qui lui plaît par dessus tout, ce sont les fonctions limite et dérivée. Par contre, il estime qu'il n'y a pas «le détail des calculs». Parmi les résultats qui l'ont surpris, il y a des calculs de dérivées et de limites. Il pense que la TI92 lui est très utile en classe et en contrôle, mais beaucoup moins à la maison. Quant à la calculatrice rétroprojetable, il juge qu'elle fait gagner du temps, sans pour autant aller trop vite. Il dit qu'avec la TI92, il est plus facile et plus intéressant de faire des mathématiques, «parce qu'elle offre plusieurs possibilités (la rapidité des calculs, entre autres) et parce qu'on peut écouter le prof en cours». Par contre, la TI92 ne l'a aidé à comprendre aucune notion mathématique. Par ailleurs et pour ce qui est de la mémoire, il y conserve ce qui a été fait en classe ainsi que des jeux, des programmes, des formules de math et de physique.

Questionnaire 3

Vincent estime qu'il est globalement très satisfait de sa participation à l'expérimentation avec la TI92. S'adressant à un élève d'une autre classe, il lui dirait qu'il apprécie «tout ce que la machine peut faire plus rapidement qu'une autre, sans le programme », mais que par contre il n'apprécie pas le fait que toutes les commandes soient en anglais. Il pense que s'il n'avait pas eu cette calculatrice en mathématiques, il aurait appris moins, travaillé et compris à peu près autant et qu'il aurait eu des résultats moins bons. Il trouve que la TI92 lui a été utile pour le calcul des limites («parce qu'il n'avait pas très bien compris le cours»), mais inutile en géométrie «parce qu'elle est très complexe à manoeuvrer») et gênante à cause de sa taille et de son poids.

Il dit qu'elle l'oblige à se poser des questions, l'incite à ne pas apprendre les choses indispensables et l'aide à résoudre les problèmes. Par ailleurs, il juge que l'utilisation de la TI92 a modifié son point de vue sur les calculatrices, «parce qu'il a découvert qu'elles pouvaient faire beaucoup de choses». A la question : « Avec la TI92, même en étant nul en analyse, on peut réussir les contrôles », il répondrait que c'est vrai mais qu'il faut justifier les calculs que l'on fait. Enfin, il aimerait bien avoir une TI92 l'année suivante. Il dit être volontaire à participer à une séance de TD hebdomadaire d'une heure avec la machine (en plus de l'horaire normal), si le lycée peut en mettre une à sa disposition pour les épreuves de bac.

Entretien 1

Pendant cet entretien, Vincent a investi [HOME] pour définir les fonctions f et f', ou pour calculer la dérivée et ses racines (*Zeros*). Le travail en P/C a été marqué par le développement de l'expression de $f(x)$ ainsi que par le re-calcul de f'. En ce qui concerne l'étude des variations de f, la stratégie de Vincent commence par un parcours de [TABLE] (grâce auquel il découvre la singularité) suivi par une lecture primitive dans [GRAPH]. Notons que Vincent a fait tracer dans un même repère les courbes de f et de f', ce qui l'a conduit à commettre une erreur en confondant les deux tracés pour $x>0$. Auparavant, il a confondu le signe de f' et celui de f en parcourant [TABLE].

Précisons enfin qu'il n'a pas utilisé [WINDOW].

Entretien 2

Lors de cet entretien, Vincent a investi [HOME] pour définir f, pour calculer la dérivée, les limites (en $-\infty$ et en -3 à gauche et à droite) et $f(-4)$ et $f(-2)$ (pour compléter le tableau de variation), ainsi que pour contrôler la singularité en -3 (calcul de $f(-3)$). L'étude de la fonction f se fait intégralement en Papier/Crayon. Il re-calcule même la dérivée à la main avant de calculer le discriminant et déterminer le signe, en remarquant la singularité en -3. Notons enfin l'utilisation limitée de [GRAPH] (lecture à l'oeil nu et utilisation de *ZoomStd* pour l'amélioration du tracé) et l'absence d'utilisation de [TABLE].

Contrôle spécifique

Pour étudier les variations de f, Vincent a calculé la dérivée par *2nd-8*. Il l'a factorisée à la machine et a résolu l'équation du second degré en P/C, avec utilisation d'un programme pour le calcul du discriminant. Pour l'étude du signe il a utilisé *Factor* et le tableau de signes. Le calcul des limites a été effectué dans [HOME].

Entretien 3

Vincent a utilisé les commandes *Maximum* et *Minimum* du menu *F5* dans [GRAPH] avec un contrôle à l'aide de *ZoomBox*. L'observateur lui a demandé ensuite une valeur exacte d'un extremum, ce à quoi il a répondu en calculant $f(0)$ dans [HOME]. Par ailleurs il démontre en P/C la périodicité de la fonction.

Annexe 4 : données recueillies sur chaque élève (classe B)

Alice

Alice a de grosses difficultés en Mathématiques. Ces difficultés s'accentuent en temps limité, ce qui explique sa note moyenne de 7 en contrôle. A la fin de l'année, elle devra redoubler sa classe de 1ère.

Au premier questionnaire, il apparaît qu'elle n'avait pas de calculatrice en collège, et qu'elle utilise assez peu sa calculatrice actuelle. Elle n'a pas de pratique systématique de vérification des résultats. En contrôle, l'intérêt principal est pour elle la mémorisation du cours, grâce à la mémoire alphanumérique de la machine. Elle n'utilise pas du tout l'ordinateur présent dans le milieu familial et trouve que l'ordinateur ne présente pas d'intérêt pour l'apprentissage des mathématiques.

Au second questionnaire, Alice fait partie des élèves qui déclarent se débrouiller moyennement avec la TI92. En fait, l'instrumentation paraît plus faible que ce que déclare Alice, puisque son score est très faible aux questions sur la connaissance de la TI92 du second questionnaire. Elle est cependant "tout à fait d'accord" avec la rétroprojection aux synthèses.

Au troisième questionnaire, Alice déclare apprécier la calculatrice en elle-même ("toutes ses fonctions") ainsi que son utilité mais regrette que les cours "ne soient basés que sur la machine". Elle pense qu'elle aurait travaillé moins sans la TI92.

Elle a trouvé intéressante la fonction [TABLE], car "lorsqu'on a une fonction, grâce à [TABLE], on peut trouver les valeurs de $f(x)$ et $f'(x)$". Elle a trouvé utile le calcul des limites: "Permet une vérification, voire même un calcul plus rapide".

Elle est nettement plus favorable que la moyenne de la classe à l'opinion selon laquelle, la TI92 "fait perdre du temps". Elle a changé d'avis sur les calculatrices et pense maintenant que les calculatrices sont inutiles, "elles permettent seulement de vérifier les résultats". Elle est la seule à ne pas souhaiter avoir une TI92 l'année suivante.

Au premier entretien, Alice déclare avoir utilisé la TI92 "pour voir comment on programmait" à partir d'un jeu qu'on lui avait fourni. Quand il y a des calculs à faire, elle cherche d'abord les solutions à la TI92, puis essaie de résoudre en P/C, à la différence des autres élèves qui se servent de la TI92 pour vérifier. En contrôle, elle n'a pas utilisé la TI92 car elle est plus à l'aise avec sa calculatrice habituelle.

Alice est la seule à ignorer les fonctions de gestion de l'écran et de la mémoire que les autres élèves observés ont bien intégré.

Dans la partie étude de fonction, elle montre peu d'aptitudes mathématiques en dehors de la lecture graphique et de la manipulation de la calculatrice. Pour l'intersection avec l'axe des x, elle lit les valeurs sur le graphique et se révèle incapable de faire la traduction algébrique. Elle calcule les limites avec la TI92, mais n'est pas capable de les obtenir par raisonnement.

Au second entretien, Alice manifeste une organisation assez pauvre de sa TI92. Elle a chargé des jeux, mais n'a pas réussi à les utiliser, et est perdue dans les répertoires. En fait, la mémoire de la TI92 lui sert surtout pour ses "antisèches" de chimie.

Dans la partie mathématique, Alice manque de capacité à s'adapter à la diversité des modes de définition des fonctions et est vite perdue. Son étude de variations est seulement graphique et numérique. Elle ne parvient pas à l'étude algébrique même avec la TI92.

En contrôle spécifique, Alice a développé la fonction trigonométrique en P/C. Il semble qu'elle n'ait pas compris la question. Elle justifie les variations par le traditionnel tableau de signes. Elle donne des paramètres non adaptés pour la fenêtre demandée.

Dans le troisième entretien Alice ne reconnaît pas la propriété de périodicité sur le graphique. Elle énonce la symétrie après que l'observateur ait fait remarquer que la courbe "part un peu pareil des deux côtés".

Franck

Franck est considéré par son professeur comme un bon élève et il obtient 13 en contrôle. Le professeur note qu'il "utilise intelligemment" la calculatrice.

Au premier questionnaire, il fait partie en effet de ceux qui ont l'instrumentation la plus complète de leur calculatrice. C'est aussi un utilisateur assidu de l'ordinateur.

Au second questionnaire, Franck déclare bien se débrouiller avec la TI92 ce que confirme son bon score aux questions sur la connaissance de la TI92 (4 réponses sur 5). Il insiste sur l'apport à la compréhension en cours. Cependant, il l'utilise plutôt à la maison, et n'aime pas l'utilisation de la rétroprojection pour les synthèses.

Au troisième questionnaire Franck déclare apprécier la simplicité d'utilisation et de compréhension, la mémoire importante, la rapidité d'exécution, les diversité des capacités offertes.

Il pense qu'il aurait travaillé moins et qu'il aurait eu de moins bons résultats sans la TI92.

Franck a trouvé intéressant le TD sur les propriétés des limites d'une fonction. "La TI92 a permis d'une façon expérimentale l'élaboration d'un tableau de valeurs. Ainsi on peut dégager nous-mêmes les règles de calcul et de comportement des fonctions". Il a trouvé utile la dérivée d'une fonction: "Moyen de vérification qui permet l'élaboration d'un tableau de variations". Il a trouvé la TI92 gênante pour la résolution d'une équation trigonométrique "le résultat donné par la TI92 n'est pas toujours le même que le mien. Ce résultat n'est pas toujours simplifié à ma convenance"

Il est nettement plus favorable que la moyenne de la classe aux opinions selon laquelle, la TI92 " Donne envie de chercher les exercices "," Peut aider à comprendre les mathématiques ", "Oblige à apprendre des choses inutiles ". Il est nettement moins favorable que la moyenne de la classe à l'opinion selon laquelle, la TI92 " incite le professeur à poser des problèmes trop difficiles".

Au premier entretien, Franck déclare aussi avoir utilisé la TI92 pour vérifier les solutions des exercices donnés en préparation. En contrôle, il a utilisé la TI92 mais aussi son ancienne machine sur laquelle il a l'habitude de faire "les petits calculs".

Dans la partie mathématique, Franck est seul avec Julien à utiliser les propriétés algébriques des limites pour calculer et vérifier les limites en +-infini alors que les autres ne seraient pas capables de trouver ces limites sans la TI92.

Au second entretien, Franck fait l'étude de variations en considérant des valeurs de la dérivée sur les intervalles déterminés par les zéros. Le tableau de variations est exact. Franck n'utilise pas le graphisme.

Franck fait partie des trois élèves qui trouvent d'emblée l'asymptote à partir de l'expression algébrique.

En contrôle spécifique, Franck s'est trompé en dérivant en P/C . Il déclare que, pour vérifier, il faudrait développer à la main les deux expressions, mais qu'il n'a pas eu le temps. Il justifie l'étude de variations par l'utilisation de valeurs de la dérivée calculées à l'aide de la TI92.

Dans le troisième entretien, Franck est un peu plus à l'aise que les autres pour le repérage de la périodicité sur le graphique, mais a des difficultés avec l'expression algébrique de la périodicité. Il repère une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, hésite un peu sur l'expression algébrique de la parité et démontre en P/C.

Julien

Julien a un moyenne élevée en contrôle (16). Mais le professeur souligne qu'il obtient cette moyenne " sur des tâches bien cadrées", et qu'il a du mal a "élargir".

Au premier questionnaire, il fait partie de ceux qui ont l'instrumentation la plus complète de leur calculatrice. Il ne dispose pas d'un ordinateur à la maison, mais a été élève de l'option informatique.

Au second questionnaire, Julien déclare bien se débrouiller avec la TI92 ce que confirme son bon score aux questions sur la connaissance de la TI92 (4 réponses sur 5). Il l'utilise très systématiquement. Il insiste sur l'apport à la compréhension aussi bien que sur le caractère sécurisant en résolution d'exercices.

La réponse de Julien au troisième questionnaire n'est pas parvenue.

Au premier entretien, Julien est le seul à entrer correctement la fonction sans erreur de parenthésage. Il est seul avec Franck à utiliser les propriétés algébriques des limites pour calculer et vérifier les limites en +-infini alors que les autres ne seraient pas capables de trouver ces limites sans la TI92.

Il rencontre une difficulté d'interprétation du graphisme, concernant les limites en zéro : il suit les branches de la courbe à partir de zéro et observe ainsi les limites en +- infini.

Au second entretien, Julien fait partie des élèves qui stockent des programmes qu'ils utilisent. Il a même développé certains programmes.

Il fait la recherche des variations de façon algébrique, à l'aide de la TI92, puis confronte ensuite au graphique. Le graphisme est contradictoire à l'étude de variations, mais, à juste titre, Julien fait confiance à son calcul. Il fait partie des trois élèves qui trouvent d'emblée l'asymptote à partir de l'expression algébrique.

En contrôle spécifique, Julien a une note très notablement inférieure à sa note habituelle. Il a rencontré beaucoup de difficultés en comparant les résultats TI92 et ses calculs en P/C.

Il ne justifie pas les variations, n'ayant pas compris que l'injonction de l'énoncé "rédiger les raisonnements comme d'habitude" s'applique à l'étude de variations. Pour le polynôme asymptote, il calcule le quotient des termes de plus haut degré et ne peut invalider graphiquement la règle (fausse) qu'il se donne ainsi. Il donne des paramètres non adaptés pour la fenêtre demandée.

Dans le troisième entretien, Julien ne repère pas la propriété de périodicité sur le graphique. Il repère une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, mais hésite sur la parité, puis démontre en P/C. Il est le seul à maîtriser suffisamment le langage des fonctions trigonométriques pour exprimer correctement les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est maximum.

Jean

Jean est considéré par son professeur comme un bon élève, travailleur. Il perd ses moyens en contrôle, ce qui explique sa note moyenne de 12.

Au premier questionnaire, il apparaît comme un utilisateur assidu de l'ordinateur dont il dispose dans l'environnement familial. Cela contraste avec son utilisation de sa calculatrice qui est seulement moyenne.

Au second questionnaire, Jean déclare bien se débrouiller avec la TI92. En fait il se débrouille très bien puisqu'il a le meilleur score aux questions sur la connaissance de la TI92 (5 réponses sur 5), et il porte un regard critique sur l'affichage graphique à la suite d'une expérience de non séparation de la courbe à l'endroit d'une discontinuité. Il insiste sur l'apport à la compréhension et l'utilise plus volontiers en classe qu'à la maison.

Au troisième questionnaire Jean déclare apprécier la facilité de calculs, l'écran très large, la mémoire, les nombreuses capacités d'algèbre, graphiques mais regrette le mode d'emploi mal expliqué. Il pense qu'il aurait moins appris sans la TI92.

Jean a trouvé intéressant les études de fonctions, "car on a les solutions des limites, de la dérivée, les tableaux de valeur pour tracer les courbes". Il est nettement plus favorable que la moyenne de la classe aux opinions selon laquelle, la TI92 " Permet de faire en classe des activités plus intéressantes "," Oblige à se poser des questions", " Oblige à réfléchir davantage à ce que l'on fait".

Au premier entretien, Jean déclare aussi avoir utilisé la TI92 pour vérifier les solutions des exercices donnés en préparation. En contrôle, il n'a pas utilisé la TI92 par peur de perdre du temps.

Dans la partie mathématique Jean est le seul à mettre en doute la représentation graphique, et à corriger l'écriture de la fonction. Il manifeste ainsi une bonne coordination graphique/algèbre.

Au second entretien, Jean fait l'étude classique de variations en raisonnant sur l'expression de la dérivée, puis considère le graphique à titre de vérification, ce qui lui permet de corriger une inversion de signe.

Pour la recherche de l'asymptote, Jean se concentre sur la lecture graphique, et ne parvient pas à donner l'équation correcte de la droite qu'il "voit" sur le graphique. Il ne fait pas le rapport avec la définition algébrique.

En contrôle spécifique, Jean s'est trompé en dérivant en P/C la fonction trigonométrique Il dit qu'on pourrait vérifier avec la fonction *tExpand*, mais n'a pu trouver son erreur. Il justifie l'étude de variations par l'utilisation de valeurs de la dérivée calculées à l'aide de la TI92.

Dans le troisième entretien, comme pour Sabine et Marie, la notion de période émerge difficilement du graphique, et le repérage de la valeur de la période est laborieux. Par contre, il exprime spontanément la propriété algébriquement. Il pense à une symétrie centrale, puis se reprend et reconnaît une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Il est le seul capable de limiter l'intervalle d'étude lors de l'étude des variations.

Marie

Marie est considérée par son professeur comme une bonne élève. Bien qu'elle ait tendance à s'affoler et à perdre confiance en elle, sa note moyenne est de 14.

Au premier questionnaire, l'instrumentation de sa calculatrice apparaît moyenne : elle l'utilise fréquemment, mais pas systématiquement. Elle utilise peu l'ordinateur disponible dans l'environnement familial.

Au second questionnaire, Marie déclare se débrouiller moyennement avec la TI92, ce que confirme son score assez faible aux questions sur la connaissance de la TI92 (2 réponses sur 5). Elle est la seule à avouer avoir eu des difficultés pour apprendre à utiliser la TI92. Elle l'utilise peu en classe, et n'est pas favorable à l'utilisation de la rétroprojection pour les synthèses.

Au troisième questionnaire, Marie déclare apprécier l'aide pour les vérifications mais regrette qu'il y ait eu "trop de calculatrice, mais pas assez de cours". Elle pense qu'elle aurait compris davantage sans la TI92. Pour elle, "c'est seulement un outil de calcul".

Elle a trouvé intéressant le tracé de graphique "plus détaillé", et utile la vérification des calculs. Elle est nettement plus favorable que la moyenne de la classe à l'opinion selon laquelle, la TI92 " fait perdre du temps ".

Au premier entretien, Marie déclare avoir utilisé la TI92 pour vérifier les solutions des exercices donnés en préparation.

Dans la partie mathématique elle a rencontré une difficulté avec l'interprétation graphique. Elle a vu que "les branches se rapprochent de zéro" et pensé par conséquent que la limite est nulle.

Au second entretien, Marie recherche comme Sabine la dérivée et ses zéros à l'aide de la TI92 et établit ensuite les variations en considérant le graphique de la TI92. Elle est cependant plus à l'aise que Sabine dans l'interprétation du graphique.

Marie tente repère l'asymptote sur le graphique, mais elle ne parvient pas à trouver son équation. Cherchant à partir de la définition algébrique, elle est gênée par ses connaissances insuffisantes des limites.

En contrôle spécifique, comme Sabine, Marie a calculé la dérivée de la fonction trigonométrique à la machine, mais n'a pu le faire en P/C.

Dans le troisième entretien, comme pour Sabine, la notion de période émerge difficilement. Elle ne voit pas la propriété de parité.

Pierre

Pierre est un redoublant. D'après le professeur, il profite bien de ce redoublement et obtient une note moyenne en contrôle assez élevée (15).

Au premier questionnaire, il apparaît qu'il utilise fréquemment sa calculatrice, de façon complète et systématique et qu'il est très convaincu de son utilité dans les problèmes. Il y a un ordinateur dans le milieu familial, qu'il utilise.

Au second questionnaire, Pierre déclare bien se débrouiller avec la TI92 ce que confirme son bon score aux questions sur la connaissance de la TI92 (4 réponses sur 5). Il fait partie des élèves qui utilisent systématiquement leur machine, en classe, en contrôle ou à la maison.

Au troisième questionnaire, Pierre marque une satisfaction plus élevée que la majorité des élèves de la classe, et que les autres élèves observés. Il apprécie toutes les fonctionnalités de la machine, en dehors de son poids.

Un exemple de fonctionnalité qu'il a jugé intéressante est la factorisation et la résolution d'équations de degré>2. "C'est bcp plus rapide que de chercher les racines évidentes et d'appliquer la méthode de gauss". Il a trouvé utile le calcul de dérivée "plus rapide". Il note cependant que la TI92 est inutile pour "l'explication des limites".

Il est nettement plus favorable que la moyenne de la classe aux opinions selon laquelle, la TI92 " Permet de faire en classe des activités plus intéressantes "," Peut aider à comprendre les mathématiques ", "Oblige à apprendre des choses inutiles ", et nettement moins favorable aux opinions selon laquelle, la TI92 "Incite le professeur à poser des problèmes trop difficiles" et "Fait perdre du temps".

Au second entretien, Pierre manifeste la meilleure organisation de la mémoire de sa TI92, avec des sous-répertoires thématiques. Il stocke des programmes qu'il utilise ou a développé. Il fait les calculs de variations en papier/crayon, puis considère le graphique à titre de vérification. Cela lui permet de corriger une inversion de signe. Il fait partie des trois élèves qui trouvent d'emblée l'asymptote par coordination graphique-algébrique.

En contrôle spécifique, comme Sabine et Marie, Pierre a calculé la dérivée de la fonction trigonométrique à la machine, mais n'a pu le faire en P/C. Comme Julien, Il ne justifie pas les variations, n'ayant pas compris que l'injonction de l'énoncé "rédiger les raisonnements comme d'habitude" s'applique à l'étude de variations. Il est le seul à rechercher le polynôme asymptote en P/C en posant et en résolvant un système.

Dans le troisième entretien, Pierre est un peu plus à l'aise que les autres élèves pour la recherche de la période et l'expression algébrique de la périodicité. Il reconnaît la symétrie de la courbe puis démontre la parité en P/C.

Sabine

Sabine est une élève sérieuse, mais lente. Cette lenteur est un handicap en contrôle, qui explique sa note moyenne de 11.

Au premier questionnaire, elle manifeste un rapport assez faible avec sa calculatrice personnelle. Il s'agit d'un modèle moins "haut de gamme" que les autres, et elle l'utilise moins. Elle avoue se débrouiller moyennement avec cette calculatrice, et n'utilise pas les possibilités graphiques.

Au second questionnaire, Sabine déclare se débrouiller moyennement avec la TI92 ce que confirme son score assez faible aux questions sur la connaissance de la TI92 (2 réponses sur 5). Elle l'utilise peu en contrôle. Elle est très favorable à l'utilisation de la rétroprojection aux synthèses, mais regrette que "ca aille trop vite".

Pour elle, la TI92 ne permet pas de comprendre une notion mais elle "sécurise". En fait, elle l'utilise surtout pour vérifier les solutions de ses exercices. Cette vérification lui donne plus de confiance en elle.

Au troisième questionnaire, Sabine déclare apprécier le côté sécurisant qu'elle a souligné dans le second questionnaire. Elle précise : dans les calculs de limite, dérivée, et dans les graphique. Elle est nettement plus favorable que la moyenne de la classe à l'opinion selon laquelle, la TI92 "donne envie de chercher les exercices".

Elle regrette les références trop fréquentes à la TI92. Elle aurait préféré "voir plus d'exos à la main, puis voir en quoi la calculatrice aide". Elle pense qu'elle aurait compris et appris davantage sans la TI92.

Elle n'a pas d'initiative face aux résultats inattendus, puisqu'elle déclare dans ce cas demander au professeur.

Au premier entretien, Sabine est parmi les élèves qui utilisent le moins la TI92. Elle s'en sert seulement pour les devoirs à la maison. Elle a essayé de l'utiliser en contrôle, mais cela lui a fait perdre du temps et elle a abandonné.

Dans la partie mathématique, Sabine manifeste une difficulté spécifique avec la discontinuité en zéro. A la différence de ses camarades, elle n'interprète pas la réponse *undef* obtenue pour la limite en zéro. Pour elle un terme n'ayant pas de limite devrait compter pour 0 dans la somme. Elle a également des difficultés avec l'interprétation graphique. Elle voit que "les branches se rapprochent de zéro" et pense par conséquent que la limite est nulle.

Au second entretien, Sabine fait partie des élèves qui ne réutilisent pas les identificateurs des fonctions définies, ce qui confirme une difficulté à utiliser les fonctionnalités de la machine.

Elle recherche la dérivée et ses zéros à l'aide de la TI92 et établit ensuite les variations en considérant le graphique de la TI92. Elle tente ainsi d'utiliser le graphisme pour pallier des difficultés algébriques. Mais elle est gênée par la discontinuité en zéro, qu'elle interprète mal graphiquement.

En contrôle spécifique, Sabine a une note très notablement inférieure à sa note habituelle. Elle n'est pas du tout à l'aise avec la recherche de résultats avec la TI92, suivie d'une justification par le calcul.

Elle a calculé la dérivée de la fonction trigonométrique à la machine, mais n'a pu le faire en P/C, ne connaissant pas la dérivée du cosinus. Elle donne seulement les valeurs des limites obtenues avec la TI92 sans justification.

Dans le troisième entretien, la notion de période émerge difficilement et le repérage de la valeur de la période est laborieux. Elle énonce la symétrie après que l'observateur ait fait remarquer que la courbe "part un peu pareil des deux côtés".

CONCLUSION

Nous allons essayer dans cette partie de résumer les principaux résultats qui se dégagent du travail effectué ainsi que les questions qu'il suscite. Nous reviendrons pour cela aux interrogations initiales, concernant :

- les processus sous-jacents à l'instrumentation des calculatrices par les élèves, les connaissances mathématiques qui les sous-tendent et l'articulation de ces connaissances avec celles visées par l'institution scolaire au niveau considéré, elles définies indépendamment des calculatrices,
- la prise en compte de cette instrumentation dans l'enseignement et plus globalement l'intégration de ces calculatrices dans le quotidien de la classe, en comparaison notamment avec ce que nous avait permis d'observer la recherche DERIVE.

Sur ce plan, divers résultats semblent se dégager :

- **Atteindre un premier niveau de familiarisation avec la TI92 semble relativement facile pour ces élèves**

L'aisance de la première familiarisation avec la TI92 nous est apparue dès les séances de prise en main de la machine dans les classes (cf. par exemple la première observation dans la classe A en 1995-96). Ces premières impressions ont été confirmées par les réponses au questionnaire 2, passé en Février, et les données issues du premier entretien.

Les enseignants, qui ne tablaient pas sur une telle accessibilité, avaient élaboré, vu la taille et la complexité du manuel accompagnant la TI92, un mode d'emploi résumé d'une dizaine de pages que les élèves pouvaient annoter et même compléter, en fonction des besoins, dans une plage réservée. Les réponses au questionnaire 2 montrent que les élèves n'ont guère eu recours à ce mode d'emploi, passés les premiers contacts avec la machine. Certains disent consulter le manuel, notamment dans la classe A, mais il s'agit alors de prendre en charge de façon autonome des fonctionnalités non prises en charge par l'enseignement : programmation par exemple.

Les premiers entretiens, en janvier, un mois après la réception des machines, montrent, dans les deux classes, en dépit des différences sensibles (sans doute liées à une prise en mains officielle de la machine plus poussée dans la classe B), une bonne connaissance des commandes introduites jusque là dans les applications accessibles par la touche diamant, soit : HOME, WINDOW, GRAPH, TABLE et Tblset. Il y a visiblement ici, sur le plan ergonomique, une continuité entre la TI92 et les calculatrices graphiques, qui différencie sensiblement cet objet du logiciel DERIVE.

Les données montrent cependant déjà l'hétérogénéité instrumentale des élèves, une hétérogénéité qui ne s'estompera pas. Elle concerne la gestion plus informatique de la machine, au delà de la création de répertoires et de la sauvegarde de fichiers, et ce qui concerne les applications peu abordées en classe, comme la programmation, l'édition de textes... Mais elle concerne aussi, et ceci nous intéresse ici plus directement, la capacité à interpréter les productions de la machine, à articuler ses différentes applications, à investir l'application HOME, comme le montrent les premiers entretiens et les réponses aux questions 36 à 41 du second questionnaire. Soulignons, à ce propos, le rôle visiblement joué par la familiarité préalablement acquise avec une calculatrice graphique, nettement sensible quand on compare les réponses au questionnaire 2 des deux classes.

- **La personnalisation de la machine, une composante de l'instrumentalisation, reste en revanche limitée tout au long de l'année**

Ceci est patent dans les réponses au deuxième questionnaire ainsi que dans les seconds entretiens, là encore en dépit de différences sensibles entre les deux classes. Bien sûr, la machine sert à la plupart à stocker des formules de maths, de physique... mais peu vont vraiment au delà et structurent leur machine de façon efficace. Les problèmes techniques rencontrés par certains (blocage de la machine entraînant la perte complète des fichiers sauvegardés) en ont sans doute découragé d'autres. Peut-être aussi le fait que cette machine, tout en étant à leur disposition pour l'année, n'était quand même pas la leur, a-t-il joué. Il serait sans aucun doute intéressant sur ce plan d'étudier les évolutions éventuelles chez les élèves qui disposent ensuite de leur propre machine en terminale.

- **La machine devient très vite un instrument banalisé du travail scolaire**

Ceci est manifeste dans les réponses au questionnaire 2 et les premiers entretiens. La majorité des élèves utilise peu la machine hors classe, en dehors des utilisations associées au travail scolaire obligatoire. Dès ce moment, l'instrument est banalisé et le surinvestissement qui avait pu exister les premières semaines disparaît. Ceci tend à renforcer notre conviction que ce ne sont pas les questions d'accroissement de motivation qui peuvent constituer un levier réellement efficace dans la durée pour supporter l'intégration de telles technologies dans l'enseignement des mathématiques.

- **En analyse, secteur que nous avons plus particulièrement étudié, la genèse instrumentale semble un processus complexe, impliquant l'intégration progressive de l'application HOME, la réorganisation de pratiques anciennes centrées sur l'utilisation de tables de valeurs et de tracés graphiques et leur coordination avec les pratiques relatives à l'application HOME. Elle ne se met en place que lentement, même avec les élèves ayant un bon niveau en mathématiques et un bon rapport aux machines, et il faut du temps pour arriver à ce que nous pourrions appeler des schèmes relativement stabilisés et susceptibles de s'adapter aisément à des situations un peu plus complexes que celles usuellement rencontrées à ce niveau.**

Si nous considérons par exemple l'étude du sens de variation des fonctions qui est une sous-tâche classique intervenant dans le travail lié aux fonctions, qu'il se situe dans la dimension outil ou objet de leur étude, les entretiens mettent bien en évidence la complexité du processus d'instrumentation, du fait en particulier de l'autonomie complète qui est ici donnée à l'élève dans l'étude de la variation. Il ne suffit visiblement pas à l'élève de connaître les commandes utiles et leur syntaxe pour pouvoir résoudre économiquement les tâches proposées ; les décalages généralement constatés entre les stratégies des élèves et les stratégies standard définies a priori en témoignent.

Les techniques instrumentées se développent, nous semble-t-il, la première année d'expérimentation, largement de façon artisanale. Elles sont initialement marquées chez beaucoup d'élèves par un attachement fort à des approches de la variation par tables de valeurs, par représentations graphiques, des approches qui prévalent avant l'enseignement officiel de l'analyse, depuis la classe de seconde. L'analyse du suivi des élèves met bien en évidence cet attachement, en montrant en particulier comment il est susceptible d'assimiler l'objet nouveau qu'est la dérivée. Elle nous montre aussi que l'évolution est repérable dans les stratégies des élèves, à travers le rôle joué par l'application HOME et la façon dont le travail dans cette application est articulé avec celui dans les applications GRAPH et TABLE.

Si l'on compare aux techniques papier / crayon standard, l'utilisation de la calculatrice multiplie les possibilités techniques d'approche d'un même problème. La recherche d'un extremum par exemple peut s'y faire de façon approchée dans les applications TABLE et GRAPH, mais elle peut prendre dans cette dernière application des formes plus ou moins sophistiquées : estimation visuelle simple, estimation visuelle appuyée par un ajustement de la fenêtre graphique lui même pouvant mobiliser des techniques d'ajustement diverses, lecture appuyée sur la commande *Trace*, exploitation des commandes spécifiques du menu Math de l'application (*max et min*), ceci au niveau de la fonction, sachant qu'à ces techniques vont s'en ajouter d'autres si l'on inclut la prise en compte de la fonction dérivée. Elle peut bien sûr aussi s'effectuer dans l'application HOME, cette fois avec des commandes permettant du calcul exact. Nous avons essayé de montrer, dans la conclusion de la partie réservée au suivi,

comment cette diversité pouvait être structurée, analysée, de façon à mettre en évidence l'existence de différents types de rapports à l'étude instrumentée de la variation.

La diversité potentielle se traduit, au moins dans un premier temps, par un éclatement au niveau des pratiques effectives et une grande sensibilité de ces pratiques au contexte. Le suivi montre aussi, nous semble-t-il, à ce niveau, une différence sensible entre techniques papier / crayon et techniques instrumentées : les secondes gardent une variabilité beaucoup plus grande, les choix y semblent beaucoup plus sensibles aux contextes particuliers d'utilisation, elles se routinisent moins. On peut voir là un indice des limites de la prise en charge institutionnelle de l'instrumentation : les enseignants permettent et soutiennent, dans les deux classes, le développement de techniques instrumentées mais, lors de cette première expérimentation, ils ne semblent pas s'autoriser les choix et le travail qui assureraient, à partir d'un certain moment, la routinisation de techniques instrumentées précises, comme ils le font pour les techniques institutionnelles papier/crayon. L'optimisation et la routinisation des techniques instrumentées est laissée au travail privé des élèves. Il est clair que nous rencontrons là des problèmes institutionnels liés aux questions de légitimité que nous avons évoquées dans la présentation du cadre théorique du travail.

Soulignons également que le grand nombre de techniques a priori disponibles favorise la tendance au « zapping » d'une technique à l'autre, fréquemment constatée, notamment lors des premiers entretiens. Elle favorise aussi; nous semble-t-il, des comportements nouveaux dans la recherche de la certitude : pour s'assurer de la validité d'une interprétation, d'un résultat, on cherche à le conforter par différents tests faisant intervenir une mais plus souvent plusieurs applications, plus qu'on ne cherche à fournir une preuve décisive. Il s'agit là de comportements particulièrement économiques dans l'environnement de la TI92. Même s'ils ne correspondent pas aux attentes institutionnelles standard, ils ne sont pas sans intérêt par la flexibilité qu'ils amènent l'élève à mettre en œuvre et développer entre différents cadres, registres et points de vue, une flexibilité que l'enseignement dans les environnements traditionnels a, comme le montre de nombreuses recherches didactiques, bien du mal à mettre en place.

Enfin les données issues de la recherche menée montrent bien, nous semble-t-il, le rôle joué dans l'instrumentation par la variable " rapport à la machine ", au delà du seul niveau mathématique des élèves. Les résultats obtenus vont globalement dans le même sens que ceux obtenus par L.Trouche, dans le cadre de sa typologie (Trouche, 1996). Les élèves « bricoleurs » sont ainsi rarement ceux dont la genèse instrumentale est, en fin d'année, la plus aboutie. En sens inverse, des élèves a priori un peu plus réticents peuvent se construisent un rapport plus distancié à la machine mais souvent plus efficace. Ce phénomène a cependant ses limites comme tend à le montrer la comparaison des deux classes effectuée dans la partie relative aux questionnaires.

- **Une instrumentation efficace de la TI92 requiert des connaissances mathématiques spécifiques**

Ceci est patent en ce qui concerne la gestion et l'exploitation des tracés graphiques et confirme ce que divers travaux sur les calculatrices graphiques avaient déjà montré (cf. par exemple (Trouche,1994)). L'utilisation de la calculatrice confronte les élèves au fait qu'une même fonction admet, suivant la fenêtre de représentation choisie, des représentations graphiques très différentes, la discrétisation et la continuité des tracés produisent des phénomènes spécifiques qu'il faut savoir repérer et interpréter.

Dans cette maîtrise, la coordination entre le travail mathématique mené avec l'application HOME et celui mené avec GRAPH et WINDOW et, dans une moindre mesure, TABLE et TblSet jouent un rôle essentiel. La TI92 offre ainsi des possibilités de contrôle que n'offrent pas les calculatrices graphiques usuelles et dont il est important d'apprendre aux élèves à tirer profit. Ceci nécessite un apprentissage. Dans le premier entretien, par exemple, la grande majorité des élèves, alors même qu'ils ne sont pas satisfaits du tracé obtenu, ne savent pas utiliser les applications TABLE et HOME, pour se faire une idée des valeurs extrémales prises par la fonction. Les élèves ne repèrent pas non plus alors facilement les incohérences existantes entre tracé et tableau de variation et si, dans le premier contrôle commun, ils affirment tous que la machine les a aidés à vérifier leurs résultats, on voit bien, à lire leurs copies, les limites à ce moment là de leurs moyens de vérification. Encore une fois, nous voudrions souligner l'intérêt des apprentissages correspondants, au delà de la seule instrumentation de la calculatrice, par les connexions et reformulations qu'ils mettent en jeu nécessairement.

A ces connaissances, s'ajoutent pour la TI92, des connaissances requises par la gestion et le contrôle des formes algébriques non canoniques fournies par la machine, notamment dans le traitement automatique qu'elle fait des expressions qui sont entrées. L'éventail des formes algébriques rencontrées pour une même expression s'élargit. Une instrumentation efficace suppose que l'on sache gérer cette richesse, que l'on mette également au point des moyens de contrôle rapides et efficaces (par exemple pour contrôler la validité des simplifications formelles faites par la machine et introduire éventuellement les restrictions nécessaires), que l'on sache piloter la machine pour vérifier l'adéquation d'une forme trouvée, par exemple dans un calcul P/C, différente de celle fournie par la machine, voire passer d'une forme à une autre alors qu'aucune commande de la machine ne permet le passage direct.

Nous renvoyons pour plus de détails sur ce point aux travaux menés par D.Guin et J.Delgoulet, dans un cadre similaire au nôtre, mais au niveau seconde (Guin, Delgoulet, 1996). Nous voudrions souligner cependant l'intérêt que présente l'utilisation de la TI92, même au niveau de la classe de première S, pour travailler ces questions d'équivalence d'expressions algébriques, de choix pertinent de la forme en fonction du travail que l'on a à réaliser. Comme le montrent les observations réalisées, ces questions sont loin d'être maîtrisées à l'entrée en première S et il nous semble important d'assurer l'instrumentation de la calculatrice dans ce domaine avant de débuter l'enseignement de l'analyse, si l'on ne veut pas voir les difficultés correspondantes parasiter au delà du raisonnable l'introduction de la notion de dérivée, comme nous avons pu l'observer dans les classes la première année.

Soulignons également que la mise en place rationnelle de moyens de contrôle et de pilotage se heurte parfois à des difficultés sérieuses dues à certaines caractéristiques de la transposition informatique au niveau interne. Ainsi, le passage dans les calculs effectués de façon interne, par les nombres complexes, n'apparaît à l'utilisateur qu'en cas de résultat définitif lui-même complexe. Mais la machine renverra $-\sqrt{5}$ si on lui fait calculer f(-3) pour la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}\,\sqrt{x-2}$. Sur un autre plan, pour éliminer certaines erreurs apparaissant dans la gestion de fonctions composées, les EPROM utilisées la deuxième année de l'expérimentation ne permettaient pas d'opérer des substitutions de la forme : $x \rightarrow x+1$, dans l'expression d'une fonction définie comme fonction de x, alors qu'en revanche il était tout à fait possible d'obtenir alors la valeur de f(t+1).

Enfin, de manière évidente, une instrumentation efficace de la TI92 suppose une maîtrise des rapports entre calcul exact et approché qui va bien au delà des exigences actuelles réelles de l'enseignement secondaire.

La TI92 cumule en effet des possibilités de calcul exact et approché dans l'application HOME, avec des niveaux d'approximation dépassant ceux des calculatrices ordinaires, mais le jeu subtil qui se joue dans son univers interne entre exact et approché n'est pas transparent à l'utilisateur qui, lui, choisit entre trois modes : exact, automatique, approché et qui, même dans les modes exact et automatique, peut demander une valeur approchée d'un résultat, en utilisant la touche diamant. L'exemple de $\cos(\frac{\pi}{16})$ présenté par L.Trouche dans (Trouche, 1996) l'illustre particulièrement bien. Les observations de classe montrent bien l'attention portée par les enseignants à ces rapports et des comportements des élèves qui, en retour, sont sensiblement différents de ceux que l'on a l'habitude d'observer.

Nous avons présenté les connaissances mentionnées ci-dessus comme des connaissances spécifiques, résultant des besoins mathématiques d'une instrumentation efficace. Cette spécificité est cependant toute relative. Globalement, les compétences mathématiques qu'elles expriment figurent parmi les attendus des programmes même si le niveau de maîtrise atteint par les élèves reste généralement faible. Nous voulions simplement souligner, en utilisant ce terme, que d'une part, les exigences de réussite dans les environnements usuels ne suffisaient pas assurer le niveau de maîtrise souhaitable ici, d'autre part que l'utilisation d'une calculatrice comme la TI92 pouvait aider à mettre en évidence l'importance de ces compétences et à organiser leur développement.

- **Les contraintes institutionnelles induisent des besoins instrumentaux spécifiques**

Les élèves qui utilisent la TI92 l'utilisent dans un cadre institutionnel qui est celui de l'enseignement secondaire actuel. Même s'ils ont droit à leurs calculatrices pour les contrôles de mathématiques, contrôles interne à la classe ou communs à plusieurs classes, la règle du jeu (en dehors des contrôles spécifiques organisés dans le cadre de la recherche pour lesquels des contrats plus élaborés ont été passés, en fonction de la progression des connaissances des élèves) est de fournir une rédaction d'où toute référence à l'utilisation de la machine a disparu. S'ils veulent utiliser efficacement leur instrument pour produire, voire même simplement pour vérifier des résultats obtenus en P/C, retrouver une erreur et la corriger, ceci induit des besoins d'instrumentation spécifique. Ils devront très souvent faire produire à la machine des formes intermédiaires qu'elle ne produit pas spontanément. On distingue très bien dans l'évolution des élèves, pour une tâche donnée, par exemple un calcul de dérivée, ce que nous appelons un premier niveau d'instrumentation qui correspond simplement à la connaissance de la commande de dérivation et de sa syntaxe et les niveaux supérieurs où l'élève peut décortiquer un calcul de dérivée un peu complexe à la machine, contrôler les étapes d'un calcul n'ayant pas abouti au résultat donné dans le texte, tester l'égalité de deux formes différentes. Les difficultés rencontrées par les élèves dans la comparaison des deux formes obtenues de la dérivée de la fonction sinusoïdale, dans le contrôle spécifique, l'illustrent particulièrement bien.

De manière plus globale, il ressort tant des entretiens que des observations que l'instrumentation efficace de la TI92, dès que l'on sort du cadre des tâches routinières pour lesquelles la machine fournit d'emblée le résultat demandé, sous la forme attendue ou une forme très directement exploitable, nécessite des connaissances mathématiques. Cette nécessité n'est pas immédiatement visible à l'enseignant tant ses pratiques mathématiques

usuelles sont naturalisées. Nous ne citerons ici qu'un exemple parmi les nombreux rencontrés. La TI92 fournissait, dans les situations de variation étudiées, les zéros de la fonction dérivée, dans le mode exact. Il était même possible, dans la quasi-totalité des cas, d'obtenir une factorisation de la dérivée. Comment ne pas penser dans ces conditions que la machine faisait tout le travail mathématique ? Pourtant il nous a suffi d'observer le comportement d'élèves confrontés à des dérivées pour lesquelles l'étude du signe ne se limitait pas, comme d'habitude, à l'étude du signe d'un trinôme du second degré, pour nous apercevoir que ces potentialités de la machine n'étaient d'aucun secours à un élève qui, tout en sachant fort bien se débrouiller dans les situations usuelles, n'avait pas compris que la connaissance des zéros d'un polynôme, la factorisation d'une expression algébrique permettent d'en déterminer le signe. Soulignons à ce propos l'aide apportée par la machine qui, en permettant de sortir justement du champ des situations usuelles, aide à mettre en jeu cette fonctionnalité de la factorisation qu'ils ont rarement perçue, en dépit des exercices de factorisation accumulés depuis le collège.

Les réactions des élèves aux décalages souvent subtils introduits par la TI92 dans les pratiques mathématiques, dans les techniques, font de la machine, de ce point de vue, un instrument de diagnostic tout à fait intéressant : elle nous aide à prendre conscience du sens réel des adaptations, des réussites des élèves. Il n'est pas neutre, de ce point de vue, de voir citer, dans le questionnaire de bilan, par divers élèves, les décalages obtenus entre les expressions formelles du calcul papier / crayon et du calcul à la TI92.

Nous voudrions souligner également que les caractéristiques de la genèse instrumentale comme celles de ses fondements mathématiques ne constituent en rien quelque chose d'absolu. Elles sont bien sûr dépendantes des conditions institutionnelles de l'enseignement. Plus localement, elles dépendent des tâches, non seulement de façon triviale, mais aussi parce que, pour des tâches relevant a priori de la même catégorisation mathématique, les besoins instrumentaux peuvent être très différents. Dans le cadre de l'expérimentation menée avec la TI92, nous avons essayé, à travers le choix des variables des tâches proposées aux élèves de conjuguer les apprentissages mathématiques visés et les apprentissages nécessaires à une instrumentation efficace de la TI92. Ceci n'a cependant rien d'évident et il nous a par exemple été rarement possible de reprendre, sans la modifier, une activité proposée dans un manuel. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant.

L'intégration des TI92 dans le quotidien de la classe

Il nous semble intéressant ici de mettre en perspective l'environnement TI92 et l'environnement DERIVE que nous avions préalablement étudié. Dans la recherche sur DERIVE, nous avions été amenés à observer, essentiellement, des situations d'enseignement en salle informatique dans lesquelles les élèves travaillaient en binômes, avec un ordinateur par binôme. Dans ces situations, l'enseignant, une fois le travail lancé, intervenait très peu collectivement, ses médiations étaient essentiellement des médiations individuelles, groupe par groupe. Ceci rigidifiait de fait le fonctionnement des processus de dévolution et d'institutionnalisation - on ne négociait pas au cours de la séance un changement de tâche ou de rapport à la tâche, il n'y avait pas d'institutionnalisation locale - et tendait à conduire systématiquement, nous semblait-il, à des situations se situant aux deux extrêmes d'un continuum possible : dans le premier cas, les élèves travaillaient à partir d'une fiche très détaillée qui "programmait" en quelque sorte leur activité mathématique sur toute la séance, dans le second cas, un problème relativement ouvert était proposé aux élèves et la séance était une séance de recherche sur ce problème. Nous avions mis en évidence les difficultés rencontrées par les enseignants observés, pourtant experts, pour en faire des séances conformes à leurs attentes.

Dans le premier cas, nous avions régulièrement observé que l'approche expérimentale généralement sous-jacente à l'élaboration de la fiche avait du mal à passer de l'univers de l'enseignant à celui de l'élève qui, face à un travail si fortement cadré et prévu à l'avance dans ses détails, avait plutôt tendance à se situer en position d'exécutant, avançant pas à pas dans la suite des activités proposées, sans en percevoir ni même rechercher la cohérence globale. Même s'il produisait avec l'aide de la machine des données et résultats intéressants, son niveau d'activité mathématique pouvait rester relativement bas, contrairement à ce qu'une simple lecture des fiches pouvait conduire à penser. Toutes les situations observées avaient donné lieu, après analyse, à des reconstructions plus satisfaisantes mais ceci n'allait pas de soi.

Dans le second cas, on se heurtait à des difficultés liées à l'incompressibilité du temps nécessaire à une recherche efficace ainsi qu'à la difficulté rencontrée à assurer chez les élèves une articulation satisfaisante entre diverses formes du travail mathématique, en particulier le travail très opportuniste de la recherche où le perceptif, l'analogique, les méthodes d'essai/erreur, de « pêche », jouaient un rôle essentiel et un travail plus "analytique", et donc, par voie de conséquence, à organiser la capitalisation de ce vécu mathématique. Ceci nous avait conduit à proposer d'inscrire ces situations soit dans des scénarios à plus long terme, alternant temps de travail en classe, sous de formes diversifiées et temps de travail hors classe, dans des scénarios plus complexes (exemple de la situation de factorisation de x^n-1) ou dans des scénarios en trois temps : recherche - synthèse collective orale - narration de recherche et prolongements écrits (exemple de la situation de tracé de fonctions sous contraintes). Nous soulignions également que ces réorganisations imposaient un choix judicieux des situations, nécessairement peu nombreuses, vu les contraintes institutionnelles, que l'on pourrait ainsi faire vivre de façon satisfaisante dans une année d'enseignement (Artigue, 1996).

Bien sûr, ce n'était pas les seuls types de séances d'enseignement possibles dans l'environnement DERIVE. Tous les enseignants concernés avaient également utilisé DERIVE dans leur salle de classe ordinaire, avec un dispositif de rétroprojection, DERIVE étant alors piloté par l'enseignant ou par un élève sous le contrôle immédiat de l'enseignant, dans un fonctionnement proche de celui généralement associé à la gestion collective des "imagiciels" par exemple. Dans ce cas, DERIVE fonctionnait comme un outil de l'enseignant.

Dès les premières observations menées avec la TI92, il est apparu comme le souligne J.B Lagrange dans (Lagrange, 1996), que les contraintes étaient profondément modifiées et rapprochaient les situations observées de situations de classes ordinaires. Ceci est particulièrement visible dans la classe A par exemple où il nous a été impossible de différencier réellement les modes de gestion des séances observées, en dehors du fait qu'il s'agisse de séances en groupe entier ou en demi-groupe, toutes les séances ayant fonctionné de façon similaire dans une alternance étroite de travail en binômes et de travail collectif piloté par l'enseignant, indépendamment des prévisions faites et de l'existence ou non de support écrit au travail de l'élève. Il apparaît évident que l'enseignant retrouve, dans cet environnement, l'espace dans lequel il déploie ordinairement ses médiations ainsi que les moyens dont il peut user pour faire avancer, lorsqu'il le désire, le temps didactique. Deux caractéristiques techniques nous semblent y contribuer : la visibilité et lisibilité de la rétroprojection de la TI92, même dans une salle normalement éclairée, la taille de la machine qui ne mobilise par l'espace de regard de l'élève comme le faisait l'écran d'ordinateur avec DERIVE.

Au niveau des élèves, ceci se traduit par des échanges entre élèves qui, eux aussi, tendent à retrouver les formes standards et une interaction du travail machine et du travail P/C favorisée elle aussi par la taille de la machine.

On peut différencier dans les séances observées différents types de fonctionnement de la calculatrice, suivant que la responsabilité est du côté de l'enseignant ou du côté de l'élève. Aux deux extrêmes, il y a les moments où la machine est sous la responsabilité complète de l'enseignant. C'est lui qui pilote et les élèves reproduisent chacun sur leur machine ce qui est fait par l'enseignant sur la rétroprojetable, en disposant du contrôle permanent fourni par son écran. A l'autre extrême, la machine est sous la responsabilité complète de l'élève qui en fait une utilisation que l'on peut qualifier de privée hors du regard de l'enseignant pour effectuer une tâche. Mais les rapports de responsabilité ne se limitent pas à ces deux extrêmes : fréquemment par exemple, les élèves utilisent la machine seuls mais sur la base d'indications ou consignes fournies par l'enseignant, oralement ou par écrit ; à d'autres moments, c'est l'enseignant qui s'empare d'une production privée d'élève jugée intéressante pour la collectivité et la reproduit sur la rétroprojetable pour la faire analyser. Une même séance combine généralement tous ces types d'utilisation, tout en intégrant également des moments où la machine ne doit pas être utilisée. En revanche, les journaux de bord des enseignants, même succincts, ne nous donnent pas à voir une alternance entre séances sans machine et séances avec machine. C'est, à quelques exceptions près, au sein même de chaque séance que se règlent prioritairement les rapports entre travail mathématique à la machine et sans machine.

Nous voudrions souligner que la TI92 apparaît dans cette expérimentation peut être plus encore comme un outil au service de l'enseignement que comme un outil au service de l'apprentissage. Elle sert à problématiser des situations, à visualiser des phénomènes, à multiplier les points de vue dans les bilans et synthèses, elle autorise des explorations par variation des données d'un problème, des recherches de régularités tant graphiques, numériques que formelles que les instruments usuels du travail mathématique ne permettent pas. On notera qu'un certain nombre des situations élaborées dans le projet d'ingénierie peuvent être adaptées sans difficultés à un environnement où la classe fonctionnerait avec une calculatrice TI92 rétroprojetable dans les phases collectives, les élèves ne disposant que de calculatrices graphiques. Mais on notera également le rôle essentiel que joue dans la quasi-

totalité des situations, même si ce n'est qu'au niveau collectif, l'application HOME de calcul formel.

L'environnement TI92, du moins tel qu'il fonctionnait dans l'expérimentation, conduit donc nous semble-t-il à installer ces machines comme des outils quotidiens du travail mathématique, dans une gestion de la classe qui offre à l'enseignant la même panoplie d'interactions avec l'élève que l'environnement usuel et donc ne déséquilibre pas a priori ses pratiques. On peut faire l'hypothèse que cette aisance va le conduire à se situer vis à vis de l'environnement TI92 dans un rapport d'assimilation plus que dans un rapport d'accommodation. Cette conservation apparente des équilibres fondamentaux antérieurs présente, les observations en témoignent, des avantages certains.

En revanche, elle nous semble pouvoir être aussi productrice d'obstacles dans la mesure où la tendance naturelle à l'assimilation, dès qu'elle est possible, peut conduire à minimiser l'importance de la gestion nécessaire par l'enseignement de l'instrumentation de la TI92 et introduire l'illusion d'une transparence de l'instrumentation. Or, comme nous l'avons souligné plus haut, au vu des données recueillies et de leur analyse, cette instrumentation ne peut en aucun cas être laissée au travail privé de l'élève. L'apprentissage de techniques instrumentées doit en particulier être travaillé et articulé avec celui des techniques usuelles papier/crayon. Leurs registres respectifs d'utilisation doivent être pris en compte, dans leur évolution au fil de la progression des connaissances et cette évolution, devenir une des composantes normales de l'évolution du contrat didactique. Les contraintes de justification imposées aux élèves dans le contrôle spécifique de fin d'année, par exemple, nous semblent caractéristiques d'un contrat de contrôle qui peut être passé à ce niveau d'enseignement et à ce moment de l'année. Des contrôles spécifiques antérieurs nous auraient sans aucun doute conduits à décider d'autres équilibres entre le travail P/C et le travail machine. Et il nous semble a posteriori que de telles évolutions tangibles du contrat didactique peuvent constituer de meilleurs indicateurs de la réalité de l'intégration de l'instrument que sa seule autorisation banalisée aux contrôles.

La prise en compte de l'instrumentation par l'enseignement ne va pas de soi. Comme nous le soulignions au début de cette partie, elle ne fait pas partie de notre culture d'enseignants de mathématiques. Les observations de séances montrent les problèmes indéniables que cette prise en compte pose, dans un premier temps, même à des enseignants experts. La première séance observée en 1995-96 dans la classe A, par exemple, montre clairement la tension existant entre plusieurs tendances :

- celle de profiter de toutes les occasions qui se présentent au cours de la séance, au delà de la phase de prise en mains de la machine du début de séance, pour attirer l'attention des élèves sur des caractéristiques de la machine, importantes à connaître pour pouvoir l'utiliser correctement et efficacement,
- celle d'avancer dans le problème mathématique à résoudre en tirant profit des moyens fournis par la machine,
- celle, enfin, constatant l'importance des difficultés d'ordre algébrique rencontrées par les élèves, de reprendre le travail mathématique à ce niveau, au lieu de déléguer les calculs à la machine pour avancer momentanément en dépit des difficultés.

A ce titre, cette situation nous semble exemplaire des tensions existantes et des choix qu'une gestion de ces tensions impose en temps réel à l'enseignant, notre déficit culturel dans le domaine de l'apprentissage instrumenté rendant difficile des anticipations efficaces. Dans les premières observations, ces tensions sont rarement résolues de façon satisfaisante. Dans ce cas

particulier, l'enseignante va avoir du mal à choisir entre les différents fils de la situation, mais ménager toutes les tendances conduit à un déroulement oscillant dont la cohérence globale devient difficilement lisible. On pourra comparer de ce point de vue cette première situation et la situation de travail sur les expressions littérales, la première observée cette fois en 1996-97, élaborée dans des conditions tout à fait différentes et où les rapports entre instrumentation TI92 et travail mathématique sur les expressions sont pris en compte de façon essentielle, dans la conception même de la situation.

Si les tensions existent et sont incontournables, du fait notamment de la transposition informatique des savoirs, nous voudrions cependant souligner l'évolution constatée sur ce plan entre les deux années d'expérimentation. L'attention portée à ces questions dans les observations quasiment naturalistes de la première année, dans l'analyse des données recueillies, a permis de mettre en place une organisation beaucoup plus satisfaisante la seconde année. Au cours de cette seconde année, des décisions ont été prises concernant :

- Le mode utilisé : on fonctionnera sauf circonstances particulières (par exemple travail avec les tableurs) en mode Exact, tout en insistant sur le fait que, même avec le choix de ce mode, le calcul n'est exact que dans l'application HOME.
- Les commandes officiellement introduites et travaillées et celles qui resteront du domaine d'utilisation privée de la machine, et le moment où elles seront officiellement introduites, en fonction de la progression de l'instrumentation et de la progression du savoir mathématique. L'introduction officielle de certaines commandes se fera ainsi assez tard, pour permettre à des connaissances, des rapports aux objets mathématiques jugés importants de se développer. Citons de ce point de vue par exemple le retard à l'introduction officielle de la commande *ZoomFit*, pour ne pas court-circuiter un travail d'ajustement du fenêtrage qui nous semblait mathématiquement important, le retard aussi à l'introduction officielle des commandes de limite et de dérivation formelle. L'ensemble des commandes régulièrement utilisées restera réduit pour limiter la tendance à l'éclatement constatée la première année. Enfin, on sera très vigilant à limiter, au delà de la première prise en mains de la machine, le « nouveau » en jeu dans une séance donnée, à la fois au niveau de la conception des séances mais aussi dans le choix fait de saisir ou non collectivement les opportunités qui pourront se présenter au cours d'une séance donnée.

Ce qui s'impose à travers ces choix, c'est une prise en charge de l'instrumentation mais ceci dans une optique où la machine est considérée comme un outil au service du fonctionnement mathématique, non comme un objet d'apprentissage autonome.

Cette deuxième année, nous avons aussi essayé, à travers le projet d'ingénierie, de construire une organisation de l'enseignement de l'analyse intégrant la TI92 plus satisfaisante que celle de la première année. Dans ce rapport, nous avons présenté la structure du projet, décrit de façon détaillée les situations qui nous semblaient en constituer des étapes cruciales, et essayé de dresser un bilan rapide de la première expérimentation dont l'analyse est loin d'être achevée. Globalement les résultats obtenus sont encourageants, tant au niveau des observations que des suivis d'élèves. Ces derniers, non pris en compte dans le rapport, attestent une évolution sensible par rapport à la première année. On atteint ainsi, dès le premier entretien, pour la grande majorité des élèves un niveau de compétence comparable voire supérieur à celui atteint dans le second entretien, la première année.

Il est reconnu qu'il est difficile de faire vivre, au lycée, aujourd'hui, un enseignement de l'analyse qui respecte les valeurs épistémologiques à l'origine des programmes actuels, tant en ce qui concerne le champ propre de l'analyse que les modes d'accès à ce savoir et les

interactions souhaitées entre enseignants et élèves. Il nous semble, après ces deux ans de recherche, que des instruments performants comme la TI92 peuvent nous aider à faire vivre ces valeurs dans l'enseignement. Mais nous voudrions aussi souligner que ceci ne devient pas pour autant miraculeusement facile. Des séances, comme celles observées dans l'enseignement des dérivées, montrent bien la multiplicité des variables à contrôler et ajuster si l'on veut exploiter efficacement les potentialités de l'instrument et construire des situations problématiques mais où les élèves ne se réduisent pas à de simples exécutants.

Au delà de ces questions, un des problèmes qui nous semble posé par l'utilisation d'outils comme la TI92 est celui des traces écrites de l'activité mathématique qui est une activité instrumentée. Nous avons très vite remarqué que les notes prises par les élèves pendant les séances reflétaient mal la réalité de leur travail mathématique, un travail complexe qui imbriquait des calculs à la main, des raisonnements « classiques », des calculs machines, des productions et interprétations de phénomènes graphiques ou numériques... Comment garder une trace écrite substantielle de ce travail qui permette d'y revenir si nécessaire, qui en favorise la capitalisation ? Nous aurions aimé constituer un journal de bord de la classe incluant des copies d'écran, dont par exemple, un binôme aurait été responsable à tour de rôle, pour assurer une sorte de mémoire collective de la classe. En fait, c'est l'enseignante de la classe A qui, pour quelques séances clefs, a reconstitué, pour la classe entière, les récits de séance qui ont été joints en annexe. Ils sont sans doute éloignés de ceux qu'auraient pu produire les élèves. Il serait intéressant de savoir comment ils ont été reçus par ces derniers et quel usage éventuel ils en ont fait.

Nous voudrions également souligner que n'avons pas mené, dans le cadre de cette étude, une analyse comparative des observations effectuées dans les deux classes mais, qu'à l'évidence, en dépit des régularités que nous avons essayé ci-dessus de dégager, il existe des différences sensibles dans les modes de fonctionnement des enseignants, dans leur rapport à la technologie aussi sans doute, qui se répercutent sur leur choix de situations et leur gestion de l'enseignement. Très grossièrement on pourrait dire que l'enseignant de la classe B s'appuie beaucoup plus sur l'écrit que l'enseignante de la classe A. C'est d'ailleurs lui qui est à l'origine du document distribué aux élèves au moment de l'introduction des machines. Les documents qui accompagnent les séances sur l'introduction de la dérivée, sur les suites par exemple sont typiques et s'opposent à celui concernant le problème d'optimisation, qui reproduit, aux généralisations proposées près, celui élaboré initialement pour la classe A. Ceci bien sûr n'est pas sans répercussion sur le fonctionnement des séances. L'enseignant de la classe B est aussi un enseignant pour lequel la familiarisation jugée nécessaire avec la machine va bien au delà de ce qui est mis en place dans la classe A. En témoignent par exemple, l'organisation d'une séance sur la gestion de la mémoire, la mise au point écrite sur les différents moyens d'obtenir une tangente (tracé et équation, exacte ou approchée) avec la TI92. Quels effets ont ces différences sur les rapports aux calculatrices que les élèves développent, sur les techniques instrumentées qu'ils élaborent et privilégient éventuellement, sur leurs apprentissages mathématiques ? Il nous est difficile de faire, dans l'état actuel de l'analyse, ne fut-ce que des hypothèses, et ce d'autant plus que les deux classes concernées ont des caractéristiques sensiblement différentes, comme le montrent bien l'analyse des réponses aux questionnaires.

Nous voudrions pour achever cette partie de conclusion insister sur le fait que l'étude menée, bien qu'il ne s'agisse que d'un travail exploratoire, montre bien que, pour progresser dans la question de l'intégration efficace à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, des instruments actuels du travail mathématique que sont les outils de calcul symbolique, nous devons dépasser les points de vue également sommaires qui consistent à estimer :

- soit que ces outils sont dangereux parce qu'ils permettent de réussir sans apprendre de mathématiques,
- soit que ces outils sont merveilleux, parce qu'ils rendent les mathématiques passionnantes et aisément accessibles.

Ces deux points de vue, certes, ne sont pas complètement infondés.

Si la réussite mathématique se mesure à l'aune de ce que permet une instrumentation de bas niveau d'une calculatrice comme la TI92, il y a sans aucun doute possibilité de réussir à peu de frais en mathématiques. Mais il est frappant de constater que les élèves qui ont participé aux expérimentations, qui ont vécu un an leur vie d'élève avec ces calculatrices, qui ont, pour certains d'entre eux, passé avec ces calculatrices des contrôles communs avec d'autres classes, sont loin pourtant de partager cette opinion. Ce qui leur était demandé ne se limitait sans doute pas à cela. Et, comme en témoignent leurs réponses au questionnaire de bilan de fin d'année, ils semblent estimer quant à eux que, même si la machine peut les aider, elle ne peut résoudre les problèmes mathématiques à leur place. Leurs résultats aux contrôles ne se sont pas miraculeusement envolés. Et les entretiens montrent bien que, même pour des tâches relativement simples, piloter sa calculatrice pour produire des résultats, choisir selon les questions entre fonctionner à la main ou avec la calculatrice, vérifier ses résultats avec la calculatrice ou contrôler les productions de la calculatrice ne va pas forcément de soi.

De la même façon, les élèves nous indiquent clairement que s'ils ont très majoritairement apprécié l'expérience, la richesse des situations que le travail avec la calculatrice leur a permis de rencontrer (notamment dans la classe A), les mathématiques n'en deviennent pas pour autant passionnantes si elles étaient peu appréciées, elles n'en deviennent pas miraculeusement faciles. La machine semble devenir très vite un instrument du travail scolaire et, comme le disent certains élèves, la motivation spécifique qu'elle peut engendrer au début ne dure pas. Ils sont sensibles à ses possibilités et la distinguent nettement d'une super calculatrice graphique, mais très majoritairement, ils estiment qu'ils auraient sans doute appris à peu près autant de mathématiques sans elle. Au vu des observations, ces appréciations nous semblent réalistes, si l'on se place dans la position de l'élève. Les situations problèmes qui leur sont proposées dans ces deux classes sont conçues pour être des situations problématiques, dans l'environnement considéré, pour nécessiter un réel travail mathématique. Les tâches des entretiens leur sont proposées sans aucune indication. Il leur est difficile de savoir s'ils auraient appris plus ou moins dans un autre environnement. Ce que permet la machine et que n'autorisaient pas ou permettaient plus difficilement les environnements usuels est, de fait, d'abord sensible à l'enseignant qui dispose d'éléments de comparaison.

REFERENCES

Arsac, G., Grea, J., Grenier, D. & Tiberghien, A. (Eds) (1995). *Différents types de savoirs et leur articulation*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Abboud, M., Artigue, M., Drouhard, J.P. & Lagrange, J.B. (1995*). Une recherche sur le logiciel DERIVE*. Cahier de DIDIREM n°3 (numéro spécial). IREM Paris 7.

A.H.A. (1997). *Vers l'infini pas à pas* (à paraître).

Aldon, G. (1995). Une voiture à la DERIVE. *Repères IREM*, n°21, 27-44.

Artigue, M. (1995). Un regard didactique sur l'utilisation d'outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques. *Repères IREM*, n°19, 77-108.

Artigue, M. (1995). Une approche didactique de l'intégration des EIAO à l'enseignement, in *Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur*, D.Guin, J.F.Nicaud, D.Py (eds), 17-28, Eyrolles, Paris.

Artigue, M. (1996) : Rapports entre dimensions technique et conceptuelle dans l'activité mathématique avec des systèmes de mathématiques symboliques, *Actes de l'Université d'Eté de Rennes*, Août 1996, IREM de Rennes (à paraître).

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14/1.2, 9-42.

Böhm, J. (Ed.) (1992). *Teaching Mathematics with DERIVE*. Chartwell Bratt.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática : el caso de la proprocionalidad.* Doctoral thesis. Universitat Autonoma de Barcelona.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.7.2, 33-115.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9.3, 309-336.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures - un exemple concret : celui de la tangente, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.15.1., 7-47.

Chevallard, Y. (1985-1990). *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*. LSD-IMAG, Grenoble.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12.1, 73-112.

Deledicq A. & Diener M. (1989). *Leçons de calcul infinitésimal*, A.Colin, Paris.

Deledicq A. (1992). De l'analyse non standard au calcul infinitésimal, in C.Hauchart et N.Rouche (eds), *L'enseignement de l'analyse aux débutants*, 55-86, Academia-Erasme.

Dreyfus, T. (1994). The role of cognitive tools in mathematics education, in R.Biehler, R.W.Scholtz,R.Strässer &B.Winkelmann (Eds) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 201-212. Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, Paris.

Hirlimann, A. (Ed.) (1994). *Enseignement des mathématiques et logiciels de calcul formel.* Ministère de l'Education Nationale, DITEN B2.

Guin D. & Delgoulet J. (1997). *Etude des modes d'appropriation de calculatrices graphiques et symboliques dans une classe de seconde.* IREM de Montpellier.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education, in D.A.Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 515-556. Reston VA : NCTM.

Kuntz, G. (1997). Droites sages et droites folles en première scientifique. *Repères IREM* n27, 5-20.

Kutzler, B. (1994). DERIVE, the Future of Teaching Mathematics. *The International DERIVE Journal*, vol. I.1, 37-48.

Lagrange, J.B. (1996) : How does a Computer Algebra System actually work to Teach and Learn Mathematics ? A Survey on the use of DERIVE in French Classrooms, *International DERIVE Journal.*

Lagrange, J.B. (1996). « Privately owned » versus « occasionally used » technology. Students' processes of understanding and managment of the class by the teacher in two experiments on the use of computer algebra. In *The Rôle of Technology in the Mathematics Classroom, Proceedings of WG 16 at ICME 8.*

Lagrange J.B. (1997) : Technical work and conceptual reflection in the learning of mathematics with Computer Algebra . *Proceedings of. European Reserch Conference on Math Education.*

Lutz R., Makhlouf A. & Meyer E. (1996). *Fondements pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur*, APMEP, Paris.

Monaghan, J. (1994). « Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System ». Proceedings of PME 8.

Monaghan, J. (1994). On the successful use of DERIVE. *The International DERIVE Journal*, vol. I.1, 49-56.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical* Meanings - Learning Cultures and Computers, Kluwer Academic Press.

Pihoué, D. (1996). *L'entrée dans la pensée fonctionnelle.* Mémoire de DEA, Université Paris 7.

Pozzi S. (1994). « Algebraic Reasoning and CAS : Freeing Stdents from Syntax ? », in Heugl, H. and Kutzler, B. (eds.) *DERIVE in Education : Opportunies and Strategies, Chartwell-Bratt,* Bromley.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains,* Armand Colin, Paris.

Schneider, M. (1989). *Des objets mentaux « Aires » et « Volumes » au calcul des primitives,* Thèse de doctorat, Louvain la Neuve.

Schneider, M. (1991). Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *Repères IREM* n°5, 65-82.

Tall, D. (1994). Computer environments for the learning of mathematics, in R.Biehler, R.W.Scholtz, R.Strässer & B.Winkelmann (eds), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 189-200. Kluwer Academic Publishers.

Tasso, D. & Vogel N. (1996). Quelques semaines du cours d'analyse de première S avec DERIVE logiciel de calcul symbolique. *Repères IREM* n°24.

Trouche, L. (1994). Calculatrices graphiques : la grande illusion. *Repères IREM,* n°14, 39-55.

Trouche, L. (1996). *T11S-TI92-9596-Rapport d'étape n°2.* IREM de Montpellier.

Trouche, L. (1996). *Enseigner les mathématiques en TS avec des calculatrices graphiques et formelles,* Tomes 1 et 2, IREM de Montpellier.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée

AUTEUR (S) :

Artigue M, Defouad B, Duperier M, Juge G, Lagrange J-B.

RESUME :

Ce cahier constitue le rapport final d'une recherche contractuelle menée avec le soutien de la DISTNB2 au Ministère de l'Education Nationale. Cette recherche concernait l'intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée et a été menée avec la TI92, dans deux classes de première S. Le rapport comporte trois parties principales. La première présente la problématique, le cadre théorique et la méthodologie de la recherche. La seconde est consacrée à la dimension ingénierie didactique de la recherche, elle concerne la globalité de l'enseignement de l'analyse en première S. La troisième est consacrée au suivi effectué au cours de la première année de recherche, en particulier celui d'élèves sélectionnés dans les deux classes, en prenant en compte leur sexe, leur rapport aux mathématiques et aux technologies informatiques. La conclusion revient sur les principaux résultats obtenus, en se centrant plus particulièrement sur l'analyse des processus d'instrumentalisation des calculatrices et l'intégration des TI92 dans le quotidien des classes.

MOTS CLES :

didactique-mathématique-analyse-lycée-première scientifique-NTIC-calculatrices-symboliques-TI92-intrumentation-écologie des savoirs-suivi biographique-ingénierie didactique

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : janvier 1998
ISBN : 2-86612-149-X