HISTOIRE ET ORIGINE DU CALCUL DIFFERENTIEL

Il est très utile de connaître les véritables origines des inventions mémorables, surtout de celles dont la découverte n'est pas due au hasard, mais au pouvoir de la pensée[3]. En effet, cela permet non seulement à l'Histoire de reconnaître la part qui revient à chaque inventeur et invite d'autres esprits à rechercher les mêmes titres de gloire, mais contribue de plus au développement de l'art d'inventer, en faisant connaître la méthode sur des exemples remarquables.

Parmi les découvertes très célèbres de ce temps se trouve un nouveau genre d'analyse mathématique, connu sous le nom de "Calcul différentiel" ; or, bien qu'on ait déjà suffisamment exposé sa structure, son origine en revanche, ainsi que le procédé employé pour le découvrir, ne sont pas encore publics. Ce calcul a été inventé il y a environ quarante ans[4] par l'Auteur, et une version concise en a été publiée neuf ans plus tard[5], il y a environ trente ans; à la suite de cette parution, il a non seulement été reconnu par des mémoires, mais surtout par son usage, puisque de nombreuses découvertes remarquables sont dues à son aide, et sont mises en lumière en particulier dans les *Acta Eruditorum*[6], puis dans les *Commentaires* publiés de l'Académie Royale des Sciences : la Mathématique semble ainsi prendre un nouveau visage.

Or, personne n'a eu de doute sur le véritable inventeur jusqu'à ce que, récemment, en 1712, certains nouveaux venus, par ignorance de la production scientifique des temps antérieurs, ou par envie, ou dans l'espoir

---

[3] *Historia et Origo Calculi Differentialis*, in *Mathematische Schriften*, ed. C.I.Gerhardt, 1849, rééd. Olms, 1962. La traduction et les notes ci-dessus ont été établies par Anne MICHEL-PAJUS, à partir du texte latin , de la traduction de Régine SZEFTEL-ZYLBERBAUM parue dans *Les cahiers de Fontenay*, N° 1, novembre 1975, Ed. ENS de Fontenay-aux-Roses, et de J.M.CHILD, *The early manuscripts of Leibniz*, 1920, The Open Court publishing company, Chapitre III.

[4] Sans doute en 1675.

[5] probablement le *Nova methodus pro maximis et minimis*, traduit par Marc Parmentier in *Naissance du calcul différentiel*, 1989, Vrin, p 107-117.

[6] *Acta Eruditorum* est le titre d'un journal fondé en 1682 par Leibniz et un groupe de ses amis à Leipzig. Les "Commentaires" sont ceux de l'Académie Royale des Sciences de Londres.

de se rendre célèbres grâce à une querelle, ou enfin par basse flatterie, ont dressé un rival contre l'Auteur ; et les louanges adressées à ce rival ont causé beaucoup de tort à l'Auteur, car ce premier semblait ainsi avoir détenu plus de vérités qu'il n'en a été découvert depuis sur le sujet en question. Ces nouveaux venus ont usé de ruse en retardant le déchaînement de la querelle jusqu'à la disparition de ceux qui étaient au courant de ces faits : Huygens, Wallis, Tschirnhaus[8], et d'autres dont le témoignage aurait pu les réfuter. Telle est bien l'une des raisons pour lesquelles les prescriptions fondées sur le temps ont été introduites en justice : car, en raison de la culpabilité de l'accusateur, ou de sa ruse, les requêtes peuvent être différées jusqu'à ce que disparaissent les arguments favorables à l'adversaire et susceptibles de le protéger.

Ils ont même changé le fond du débat ; en effet, dans leur écrit, publié en 1712 dans le dessein d'inspirer le doute sur Leibniz, sous le titre de *Correspondance*[9] *de John Collins* , à peine trouve-t-on quelque chose sur le calcul différentiel : il n'y en a que pour les séries qu'ils appellent infinies. C'est Nicolas Mercator, originaire du Holstein, qui, le premier, rendit publiques des séries de ce genre, obtenues par division[10], mais leur généralisation, par extraction de racines, est due à Isaac Newton[11]. C'est une découverte utile, qui introduit les méthodes d'approximation arithmétiques dans le Calcul Analytique, mais pas dans le calcul différentiel.

C'est de manière trompeuse aussi que, lorsque ce rival obtient une quadrature quelconque en additionnant des quantités qui épuisent progressivement la surface de la figure, ils proclament aussitôt que l'on a fait usage du Calcul Différentiel (par exemple : p. 15 de la *Correspondance*). Mais dans ces conditions, depuis un certain temps, Kepler (dans le *Dolio Austriaco*), Cavalieri , Fermat , Huygens et Wallis auraient connu le Calcul différentiel, et qui donc n'utilise pas ces indivisibles[12] ou infiniment petits ? Huygens en revanche, qui, sans nul doute, n'ignorait pas les méthodes des fluxions, tout autant que ces adversaires les connaissent et les utilisent, eut l'équité de reconnaître que ce Calcul allumait une clarté nouvelle en géométrie

---

[8]Quand commencent les attaques de Fatio, en 1699, Wallis et Tschirnaus sont encore en vie. Mais en 1712, date du rapport défavorable remis par la Royal Society, les trois hommes sont morts.

[9] *Commercium epistolicum*, en latin

[10]Mercator divise en puissances croissantes 1 par 1 + x. En portant en ordonnée $\frac{1}{1+x}$ on obtient une hyperbole équilatère. L'intégration terme à terme de la série obtenue donne l'aire d'un espace hyperbolique, dont on sait depuis Grégoire de Saint Vincent qu'il permet de calculer les logarithmes.

[11] Cette méthode est développée dans l'*Epistola Prior* (1676), qui sera traduite dans un prochain numéro. Comme l'explique son auteur, elle lui a été inspirée à la fois par la formule du binôme et par les techniques médiévales d'extraction de racines sous forme de tableaux. On n'y trouve en effet aucune trace de la *"méthode des fluxions»*, publiée pour la première fois en 1687.

[12]La méthode des indivisibles est théorisée par Cavalieri en 1653. Cf. *Mnémosyne*, Numéro spécial, Histoires de pyramides, ch 4.

et en reculait désormais les limites de façon étonnante. Et vraiment, il n'est venu à l'idée de personne, avant Leibniz, de constituer un Algorithme propre au nouveau calcul, qui permet d'affranchir l'imagination d'une attention continuelle aux figures, ce que Viète et Descartes avaient réalisé en géométrie ordinaire (ou géométrie d'Apollonius) ; mais Descartes avait clairement exclu de son calcul les domaines plus élevés touchant à la géométrie d'Archimède et les lignes que, pour cette raison, il appelait mécaniques[13]. Mais en réalité, déjà la géométrie entière, dans toute son extension, a été soumise au calcul nouveau de Leibniz, le calcul Analytique, et les lignes mécaniques de Descartes, les transcendantes elles-mêmes, ont aussi été réduites à des équations spécifiques, en considérant les différences dx, ddx, etc.- ainsi que les sommes qui sont les inverses de ces différences - comme des fonctions de x, et en les introduisant ainsi dans le calcul alors qu'auparavant on n'avait pas employé d'autres fonctions que x, xx, x^3 , $\sqrt{x}$, etc. c'est-à-dire des puissances et des racines. Par conséquent, on peut comprendre que ceux qui ont exprimé ces quantités [différentielles] par zéro, comme Fermat, Descartes[14] et ce rival en personne, dans ses *Principia* publiés en 16**, sont restés par ce fait très éloignés du calcul différentiel car, dans ces conditions, on ne peut distinguer ni les ordres de différences, ni les fonctions différentielles des diverses quantités.

Eh bien, que de telles méthodes aient été mis en oeuvre par quelqu'un avant Leibniz, il n'en reste pas la moindre trace nulle part. Et l'on pourrait, avec autant de droit que la partie adverse revendique pour Newton la découverte de méthodes de ce genre, revendiquer aussi bien celle de l'analyse cartésienne pour Apollonius, qui détenait l'idée essentielle, à défaut du calcul lui-même.

En conséquence, les nouvelles inventions dues au calcul différentiel n'ont pas été connues des disciples de Newton, qui n'ont pu ni produire de découverte d'une quelconque importance, ni même éviter les paralogismes, jusqu'à ce qu'ils aient appris le calcul de Leibniz, comme on peut le voir dans la recherche du problème de la chaînette par David Gregory.

Or ces chercheurs de querelle ont eu l'audace d'abuser du nom de la Société Royale d'Angleterre, qui plus tard a pris soin de faire savoir qu'elle n'avait rien publié de définitif à ce sujet (ce qui est digne de son équité), alors que les deux parties n'avaient pas été entendues, et que notre ami en personne ne savait même pas que la Société avait entrepris une enquête sur ce sujet : du reste, on aurait dû lui communiquer les noms de ceux

---

[13] Descartes accepte comme "géométriques" les courbes du second degré comme les coniques, étudiées par Apollonius, mais rejette, sous le nom de "mécaniques", celles de degré supérieur ou de nature transcendante, comme la spirale d'Archimède.

[14]cf. "La querelle entre Descartes et Fermat à propos des tangentes", Mnémosyne n°2.

à qui la Société allait confier la tâche de faire un rapport[15] pour qu'ils puissent être soit récusés, soit instruits de l'affaire. Quant à l'auteur même, surpris que sa bonne foi fût attaquée non par des arguments, mais par des fictions, il a considéré que des accusateurs de ce genre ne méritaient pas de réponse : il tenait pour certain que, devant ceux qui ne sont pas versés en cette matière (c'est-à-dire la majorité des lecteurs), il plaiderait sa cause en vain et qu'en revanche, ceux qui s'y entendaient reconnaîtraient aisément l'injustice des accusations.

Il était par hasard absent de chez lui quand ses adversaires ont répandu ces calomnies ; de retour après un intervalle de deux ans, absorbé par ses affaires, il n'a pas pu retrouver et examiner ce qui lui restait de son ancienne correspondance, de manière à se remettre en mémoire des événements aussi lointains, c'est-à-dire datant de plus de quarante ans auparavant ; en effet, il n'avait pas conservé de copies de la plupart des lettres qu'il avait écrites autrefois, et celles que Wallis a reçues en Angleterre et publiées (avec le consentement de l'auteur) au troisième tome de ses *Oeuvres*[16], Leibniz lui-même, pour la plupart, ne les possédait pas.

Cependant, les amis n'ont pas manqué, qui avaient le souci de sa renommée : surtout un Mathématicien contemporain de premier rang[17], très versé dans cette théorie, qui n'était engagé envers aucun des deux camps, et dont la partie adverse avait, en vain, tenté de gagner par ruse la bienveillance, a proclamé en toute bonne foi, en donnant les raisons de son jugement - et il a rapporté que cela n'était pas équitablement porté à la connaissance publique - qu'il lui semblait que ce rival n'avait non seulement pas découvert le calcul différentiel mais encore ne l'avait même pas suffisamment compris. Un autre ami[18] de l'inventeur a mis en lumière ces critiques et d'autres encore dans un court pamphlet pour rabattre de vaines vantardises.

Mais il vaut surtout la peine de connaître la voie même et la méthode par lesquelles l'inventeur est parvenu à ce nouveau genre de calcul : en effet, elles sont restées jusqu'à présent ignorées du public, peut-être même de ceux qui voudraient être pour une part dans son invention ; aussi s'était-il résolu à exposer et transmettre l'évolution de ses recherches en analyse, en partie de mémoire, en partie d'après ce qui demeure consigné dans les restes de quelques vieux manuscrits, et ainsi à éclairer, dans un petit Traité en règle, l'Histoire de cette haute Mathématique et l'art d'inventer lui-même. Mais comme ce projet ne pouvait alors se

---

[15] Il faudra attendre une enquête de de Morgan en 1852 pour connaître la liste complète des membres de la commission !

[16] Il s'agit des lettres de 1676, publiées en 1699 dans l'*Algèbre*.

[17] Il s'agit de Jean Bernoulli, qui relève une erreur dans la Proposition X du Livre II des *Principia*.

[18] Probablement Leibniz lui-même, dans un pamphlet anonyme, publié en 1713.

réaliser à cause d'occupations urgentes, l'auteur laissa dans l'intervalle un ami bien informé éclairer brièvement une partie de ce qu'il fallait dire et satisfaire un peu de la curiosité du public.

L'auteur de cette nouvelle Analyse, dans la fleur de sa jeunesse, avait joint aux études d'histoire et de jurisprudence des réflexions plus élevées pour lesquelles il avait un goût inné et, entre autres, il prenait plaisir aux propriétés et combinaisons des nombres : il avait même publié un opuscule sur l'*Art Combinatoire* en 1666 - plus tard réimprimé sans l'avis de l'auteur. Et encore tout jeune, alors tourné vers la logique, il avait remarqué que l'analyse ultime des vérités qui dépendent de la raison se réduit à deux choses : les définitions et les vérités identiques, les seules parmi les vérités nécessaires, à être vraiment primitives et indémontrables ; comme on lui objectait que les vérités identiques ne sont que des bagatelles inutiles, il donnait la preuve du contraire sur des exemples : entre autres, il indiquait déjà alors que ce grand Axiome : "Le Tout est plus grand que la partie", se démontrait par un syllogisme, dont la majeure était une définition et la mineure une proposition identique[19]. En effet, si de deux choses, l'une est égale à une partie de l'autre, on appelle la première "la plus petite", et la deuxième "la plus grande" : ce qui est la définition. Par conséquent, si l'on ajoute à cette définition l'axiome identique et indémontrable suivant : "tout ce qui est doué de grandeur est égal à soi-même", ou "A = A", on obtient le syllogisme :

- "Toute chose égale à une partie d'une autre est plus petite que cette autre" (par définition).
- Une partie est égale à une partie du tout (c'est-à-dire à elle-même par vérité identique).
- Donc "la partie est plus petite que le tout" C.Q.F.D.

Par la suite, il observait que, à partir de ceci : "A = A" ou à partir de son équivalent : "A - A = 0" (comme on peut le voir au premier abord, sans aller plus loin), on tire une très belle propriété des différences à savoir :

$$A \underbrace{-A+B}_{+L} \underbrace{-B+C}_{+M} \underbrace{-C+D}_{+N} \underbrace{-D+E}_{+P} - E = 0$$

[19] Cette démonstration du fait que "le tout est plus grand que la partie" figure dans plusieurs fragments de manuscrits, le plus ancien datant de 1679 . D'après Louis Couturat (*La logique de Leibniz*, Félix Alcan, 1901), Leibniz s'oppose à Descartes dans sa théorie de la vérité: "pour savoir si l'on peut et si l'on doit démontrer une proposition, il ne faut pas se demander si elle est évidente ou indubitable, ni même si on la conçoit clairement et distinctement, mais si elle est *identique*, c'est-à-dire réductible au principe d'identité". Un échange au sujet de cet axiome particulier a lieu en 1696 avec Jean Bernoulli. Cet axiome est proposé par Euclide et déjà discuté par Hobbes.

Si maintenant, on pose que A, B, C, D, E sont des quantités croissantes et que les différences des deux quantités consécutives B-A, C-B, D-C, E-D, sont appelées L, M, N, P, il s'ensuit alors que :

$A + L + M + N + P - E = 0$, ou : $L + M + N + P = E - A$,

c'est-à-dire que la somme des différences entre termes consécutifs (quel que soit le nombre) est égale à la différence entre les deux termes extrêmes.

Si, par exemple, à la place de : A, B, C, D, E, F, on prend des nombres carrés : 0, 1, 4, 9, 16, 25, on découvrira, en fait de différences, les nombres impairs : 1, 3, 5, 7, 9.

0		1		4		9		16		25
	1		3		5		7		9	

De manière évidente, on aura :

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 - 0 = 25$,

et : $3 + 5 + 7 + 9 = 25 - 1 = 24$,

et l'on obtiendra le même résultat, quel que soit le nombre de termes ou de différences et quels que soient les termes choisis comme extrémités.

Prenant plaisir à une découverte aussi facile et agréable, notre jeune homme s'essayait à différentes séries numériques, et parvenait même à des différences secondes (ou différences de différences) et à des différences troisièmes (ou différences entre différences de différences) et ainsi de suite.

De cette manière, il observait que s'annulent les différences secondes des nombres entiers naturels (c'est-à-dire des nombres pris dans l'ordre à partir de zéro), que s'annulent les différences tierces des carrés obtenus à partir des nombres naturels, que s'annulent les différences quatrièmes des cubes, les différences cinquièmes des bicarrés, les différences sixièmes des nombres élevés à la puissance 5 et ainsi de suite ; et il observait que la différence première des nombres entiers naturels était constante et égale à 1, que la différence seconde des carrés était égale à $1.2 = 2$, que la différence troisième des cubes était égale à $1.2.3 = 6$, la différence quatrième des bicarrés à $1.2.3.4 = 24$, la différence cinquième des nombres élevés à la puissance 5 égale à $1.2.3.4.5 = 120$, et ainsi de suite; observations que d'autres pouvaient faire depuis quelque temps, mais, pour l'auteur, elles étaient neuves et invitaient à continuer par leur agréable facilité .

Cependant, il réfléchissait surtout à des nombres qu'il appelait "combinatoires", dont on connaît cette table :

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462

Tout suite horizontale ou verticale contient toujours les différences premières de la suite immédiatement consécutive, les différences secondes de la suite qui lui succède en second lieu, et les différences troisièmes de la suite qui lui succède en troisième lieu, etc...; et n'importe quelle suite horizontale ou verticale contient les sommes de la suite qui la précède immédiatement, les sommes des sommes (ou sommes secondes), de la suite qui la précède en second lieu, les sommes troisièmes de la suite qui la précède en troisième lieu.[20]

Pour ajouter quelque chose qui n'est peut-être pas banal, il découvrait aussi des théorèmes à propos des différences et des sommes qui sont les suivantes[21] :

La suite a, b, c, d, e, etc ... décroissant à l'infini, soient :

les termes	a		b		c		d		e					etc ...
les différences 1ères		f		g		h		i		k				etc ...
les différences 2èmes			l		m		n		o		p			etc ...
les différences 3èmes				q		r		s		t		u		etc ...
les différences 4èmes					β		γ		δ		ε		θ	etc ...
etc ...						λ		μ		ν		ρ	σ	etc ...

On pose "a" comme terme premier et "ω" comme terme dernier. L'auteur trouvait alors :

$$a - \omega = 1\,f + 1\,g + 1\,h + 1\,i + 1\,k + \text{etc}$$

$$a - \omega = 1\,l + 2\,m + 3\,n + 4\,o + 5\,p + \text{etc}$$

[1] $$a - \omega = 1\,q + 3\,r + 6\,s + 10\,t + 15\,u + \text{etc}$$

$$a - \omega = 1\,\beta + 4\,\gamma + 10\,\delta + 20\,\varepsilon + 35\,\theta + \text{etc, etc.}$$

[20]Ces propriétés se retrouvent aisément en notant C^{i}_{i+j} l'élément du tableau situé sur la ième ligne et jième colonne (numérotées à partir de l'indice 0).

[21]Les chiffres entre [ ] renvoient à la présentation du texte p. 9 et 10, pour quelques compléments mathématiques

et en sens inverse :

$$
\begin{array}{llccccc}
 & & +1f & & & & \\
 & & & -1l & & & \\
 & & +1f & & +1q & & \\
 & & & -2l & & -1\beta & \\
 & & +1f & & +3q & & +1\lambda \\
[2] & a-\omega = & & -3l & & -4\beta & \\
 & & +1f & & +6q & & \text{etc.} \\
 & & & -4l & & \text{etc.} & \\
 & & +1f & & \text{etc.} & & \\
 & & & \text{etc.} & & & \\
 & & \text{etc.} & & & &
\end{array}
$$

Par conséquent, en adoptant la terminologie introduite plus tard par l'auteur, et en appelant y n'importe quel terme d'une suite (et dans ce cas même $a = y$), on pourra appeler la différence première dy, la différence seconde ddy, la différence troisième d^3y, la différence quatrième d^4y, et en appelant x n'importe quel terme d'une deuxième suite, on pourra appeler la somme de ces termes $\int x$, la somme des sommes (ou somme seconde) $\iint x$, la somme troisième $\int^3 x$, et la somme quatrième $\int^4 x$.

Si l'on pose ensuite que : $1 + 1 + 1 + 1 +$ etc, sont égaux à x, c'est-à-dire que x représente les nombres naturels, dont la différence première $dx = 1$, alors :

$$
\begin{array}{ll}
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \text{etc} \quad \text{font } \int x & \\
\text{et} \quad 1 + 3 + 6 + 10 + \text{etc font } \iint x & \\
\quad 1 + 4 + 10 + 20 + \text{etc font } \int^3 x & \\
\quad 1 + 5 + 15 + 35 + \text{etc font } \int^4 x &
\end{array}
$$

et ainsi de suite.

D'où finalement, il résulte :

[3] $\quad y - \omega = dy.x - ddy. \int x + d^3y \,.\, \iint x - d^4y \,.\, \int^3 x + \text{etc},$

ce qui est égal à y, si l'on convient de continuer à l'infini c'est-à-dire de rendre $\omega = 0$.

D'où il s'ensuit la somme de la suite y elle-même, soit

[4] $\quad \int y = yx - dy \,.\, \int x + ddy \quad \iint x - d^3y. \int^3 x + \text{etc.}$[22]

[22] Ce résultat est généralement attribué à Jean Bernoulli qui le donne dans les *Acta Eruditorum* en 1694, ou à Brook Taylor qui l'obtient comme cas particulier de son théorème général (publié en 1715).

Or, ces deux théorèmes ont pour propriété remarquable d'être également valides dans les deux calculs différentiels, aussi bien le Calcul différentiel numérique que le Calcul différentiel infinitésimal : nous parlerons plus bas de la distinction à établir entre eux.

Or, l'application des vérités numériques à la Géométrie, et la considération des suites infinies étaient alors complètement inconnues de notre jeune homme, qui se contentait, non sans plaisir, de l'observation des propriétés de ce genre dans les suites des nombres. Et, en dehors des règles pratiques les plus banales, il ne connaissait rien en Géométrie, à peine avait-il lu Euclide avec assez d'attention, absorbé comme il l'était par des études totalement différentes. Par hasard toutefois, il tomba sur la *Contemplation pleine d'agrément des Courbes* de Vincent Léotaud, où cet auteur traitait des différentes quadratures des lunules et sur la *Géométrie des Indivisibles* de Cavalieri : il les regarda un peu, et la facilité des méthodes lui plaisait, mais il n'avait pas du tout le courage alors de se plonger dans cette Haute Mathématique, bien qu'il se consacrât juste après à l'étude de la Physique et de la Mécanique pratique comme on peut le voir d'après l'opuscule édité sous le titre de *l'Hypothèse de la Physique*.

Il était alors admis parmi le Conseil de Révision du très Noble Electeur de Mayence ; après avoir obtenu du très gracieux et très puissant Prince (qui avait pris le jeune homme à son service, au moment où celui-ci devait entreprendre un assez long voyage) la permission de continuer sa route, il partit pour Paris en 1672. Là, il vint à connaître un homme supérieur : Christian Huygens ; l'auteur a toujours reconnu que c'est à l'exemple et aux conseils de Huygens qu'il doit son initiation à la haute Mathématique. Huygens publiait justement à cette époque son ouvrage *Sur les Pendules*. Comme il en avait apporté un exemplaire en cadeau au jeune homme, et que, pendant la conversation il avait remarqué que ce dernier ne connaissait pas suffisamment la nature du Centre de gravité, il lui exposa en peu de mots ce que c'était, et comment il pouvait être déterminé. Cela réveilla de sa léthargie notre jeune homme qui se jugeait indigne d'ignorer des notions de ce genre. Mais, à ce moment-là du moins, l'auteur ne put s'adonner à ces études et bientôt, vers la fin de l'année, il fit la traversée vers l'Angleterre, en compagnie de l'Ambassadeur de Mayence, avec qui il se fixa là-bas pendant quelques semaines ; c'est Henri Oldenbourg, alors secrétaire de la Société Royale qui l'a introduit auprès de cette illustre Association, mais il ne s'est entretenu avec personne de Géométrie (matière où lui-même avait alors une connaissance ordinaire) ; mais comme il ne négligeait pas la chimie, il rencontra à plusieurs reprises l'illustre Robert Boyle, et comme il s'était trouvé, par hasard, en présence de Pell et lui avait exposé certaines de ses remarques sur les nombres, Pell répondit que ce n'étaient pas des nouveautés et que, récemment, Nicolas

Mercator, dans sa *Quadrature de l'Hyperbole*, avait montré que les différences (si elles sont prises de façon répétée) des puissances des nombres naturels finissaient par s'annuler. Ce fut l'occasion pour notre jeune homme de chercher le livre de Mercator.

L'auteur ne connaissait pas alors Collins ; avec Oldenbourg, il discutait seulement de littérature, de physique et de mécanique, mais pas un seul mot ne fut échangé sur la haute Géométrie, et à plus forte raison sur les séries de Newton. En effet, il était complètement étranger à ces matières, excepté les propriétés des nombres (et encore s'en était-il bien peu occupé) : c'est ce qu'il a suffisamment montré dans les lettres, échangées avec Oldenbourg, qui ont été récemment publiées par ses adversaires ; la même constatation apparaîtra sans aucun doute dans les lettres qui, selon les adversaires, ont été conservées en Angleterre jusqu'à présent ; mais, ils les ont passées sous silence parce que - je le crois fermement - elles laisseraient assez voir qu'il n'y a eu aucune correspondance, jusqu'alors, entre Oldenbourg et l'auteur au sujet de la géométrie ; pourtant, les adversaires veulent faire croire (et sans même produire la moindre preuve !), que déjà à cette époque, Oldenbourg a communiqué à l'auteur tous les résultats de Collins, Gregory et Newton, en sa possession.

Il fut de retour d'Angleterre en France en 1673 et comme le très noble Electeur de Mayence, grâce auquel il avait été attaché au service de Mayence, avait entre-temps achevé sa vie, l'auteur, désormais plus libre, se mit, sur le conseil de Huygens, à étudier l'Analyse cartésienne (autrefois hors de sa portée), et comme introduction à la géométrie des quadratures, il consulta la *Vue d'Ensemble de la Géométrie* de l'estimable Fabri, Grégoire de St-Vincent et un petit livre de Dettonville (c'est-à-dire de Pascal)[23].

A la suite d'un exemple de Dettonville, l'auteur fut illuminé par une idée que Pascal lui-même - ce qui est étonnant - n'avait pas aperçue. En effet, lorsque celui-ci démontre le théorème d'Archimède sur la superficie de la sphère ou la mesure de ses parties, il se sert d'une méthode, selon laquelle la superficie de tout solide de révolution peut se ramener à celle d'une figure plane qui lui est proportionnelle[24]. De là, notre jeune homme élabora le théorème général suivant : les portions de droites perpendiculaires à la courbe comprises entre l'axe

---

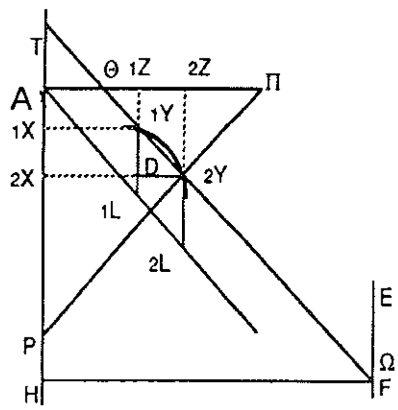
[23]Nous n'avons pas retrouvé ce texte. Il s'agit peut-être du travail sur la cycloïde.

[24]En termes modernes, si A désigne l'aire du solide de révolution autour de Oz engendré par la courbe (G) d'équation y = r(z) et s l'abscisse curviligne de (G), on a : $A = 2\pi \int_G r\, ds$, ce qui revient à calculer la surface en additionnant celles des anneaux (courbes) de rayon r(z). Mais l'aire de chaque anneau peut être calculée grâce à l'aire d'une figure plane définie dans le "théorème général" qui suit.

et la courbe, ordonnées par rapport à l'axe et prises normales à celui-ci, donnent une figure proportionnelle au moment de la courbe autour de l'axe[25].

Comme il avait montré ce théorème à Huygens, ce dernier fut entièrement d'accord et reconnut que, grâce à ce théorème, l'auteur avait découvert la superficie du cône parabolique, et d'autres superficies du même genre, que Huygens avaient posées sans démonstration dans son ouvrage *Sur l'oscillation des Pendules*, de nombreuses années auparavant.

Notre jeune homme, stimulé par ces découvertes, après avoir constaté la fécondité de ses réflexions, et comme il n'avait d'abord considéré que les infiniment petits du type des intervalles entre les ordonnées, conformément à la méthode de Cavalieri, imagina un Triangle[26] qu'il appela "caractéristique", ${}_1YD{}_2Y$, dont les côtés $D{}_1Y$ et $D{}_2Y$, égaux à ${}_1X{}_2X$ et ${}_1Z{}_2Z$ respectivement, étaient des portions des coordonnées ou des coabscisses AX et AZ et le troisième côté ${}_1Y{}_2Y$ étaient la portion de tangente TΩ (que l'on trace si nécessaire).



Il semblait toujours possible d'assigner des triangles semblables à ce triangle caractéristique, bien qu'inassignable ou infiniment petit. Soient en effet : $A{}_1X{}_2X$ et $A{}_1Z{}_2Z$, tracées perpendiculairement l'une par rapport à l'autre , les coabscisses AX et AZ, les coordonnées YX, YZ, la tangente TΘY, la normale PYΠ, les sous-tangentes XT et ZΘ, les sous-normales XP et ZΠ ; enfin, on mène EF parallèlement à l'axe AX et la tangente TY rencontre EF au point Ω , à partir duquel on mène la perpendiculaire ΩH à l'axe ; il en résulte les triangles semblables ${}_1YD{}_2Y$, TXY, YZΘ, TAΘ, YXP, ΠZY, ΠAP, THΩ et d'autres de ce genre, en plus grand nombre si l'on veut.

25 Ce résultat est démontré trois paragraphes plus loin (cf. note 24). La propriété se trouve déjà dans les *Lectiones Geometricas* de Barrow, Lect XII, Prop 1,2,3, publiées en 1670. Notons que Leibniz affirme dans ce texte avoir découvert Barrow ultérieurement.

26 Nous avons conservé la notation de Leibniz, qui place l'indice **à gauche** de la lettre

Par exemple[27], à cause des triangles semblables $_1YD_2Y$ et $_2Y_2XP$, il résulte que :

$P_2Y \times {}_1YD = {}_2Y_2X \times {}_2Y_1Y$, c'est-à-dire que la normale P_2Y multipliée par $_1YD$ (ou par le segment d'axe $_1X_2X$) est égale à l'ordonnée $_2Y_2X$ multipliée par le segment de courbe $_2Y_1Y$, c'est-à-dire qu'elle est égale au moment du segment de courbe autour de l'axe. Par conséquent, on obtient la totalité du moment de la courbe en faisant la somme des normales multipliées par les portions d'axe.

Et à cause des triangles semblables $_1YD_2Y$ et $TH\Omega$, il résulte :

$_1Y_2Y : {}_2YD = T\Omega : \Omega H$, soit $\Omega H. {}_1Y_2Y = T\Omega. {}_2YD$, c'est-à-dire que la longueur constante Ω H multipliée par le segment de courbe $_1Y_2Y$, est égale à $T\Omega$ multipliée par $_2YD$, (ou par le segment de coabscisse $_1Z_2Z$). Par conséquent, la figure plane formée par les droites $T\Omega$ portées orthogonalement sur l'ordonnée AZ en ZZ est égale à la courbe rectifiée multipliée par la longueur constante $H\Omega$.

De la même façon, à cause des triangles semblables $_1YD_2Y$ et $_2Y_2XP$, il résulte que

$_1YD : D_2Y = {}_2Y_2X : {}_2XP$ et surtout : $_2XP. {}_1YD = {}_2Y_2X . D_2Y$; c'est-à-dire que les sous-normales $_2XP$ multipliées par les [portions] d'axe $_1YD$ ou $_1X_2X$ sont égales aux ordonnées $_2Y_2X$ multipliées par leurs éléments D_2Y.

Cependant, des droites qui croissent à partir de zéro, multipliées par leurs éléments [d'accroissement], forment un triangle. En effet, soit toujours AZ = ZL, on obtient le triangle rectangle AZL qui est la moitié du carré de côté AZ. C'est pourquoi la figure formée par les sous-normales multipliées par les éléments d'axe est toujours égale à la moitié du carré ayant pour côté l'ordonnée correspondante.

Par conséquent, pour trouver la superficie d'une figure donnée, on cherche une autre figure dont les sous-normales soient égales aux ordonnées de la figure donnée : cette autre figure sera la quadratrice de la figure donnée.

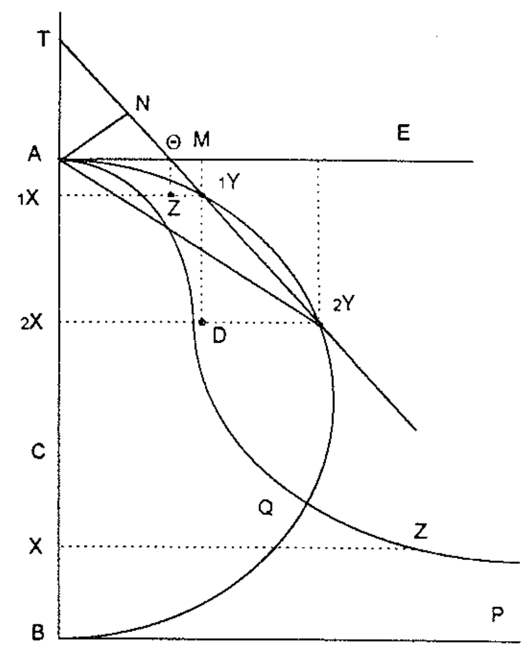
Ainsi, grâce à ce raisonnement très aisé, nous réduisons le calcul des superficies de solides de révolution aux problèmes de quadratures planes et de rectifications de courbes ; en même temps, nous réduisons

---

[27] cet exemple prouve le théorème énoncé plus haut (cf. note 22). Le moment de la courbe autour de l'axe AT est $\int z\, ds$ (en notant par z les ordonnées). Leibniz calcule la longueur n de la portion de normale comprise entre le point Y de coordonnées (x, z(x)) et l'axe. En reportant cette longueur normalement à l'axe, on obtient une autre courbe définie par Z= n. Alors z ds = n dx est la portion d'aire délimitée par l'axe, deux normales à l'axe

le problème des quadratures au problème inverse des tangentes. Après ces découvertes, notre jeune homme consigna un grand nombre de théorèmes (dont beaucoup ne manquaient pas d'élégance) dans un livre divisé en deux parties : en effet, une partie se limitait aux quantités assignables, selon la méthode de Cavalieri, Fermat et Fabri, mais aussi de Gregory, de St Vincent, des traités de Guldin et de Dettonville; quant à l'autre partie, elle concernait les quantités inassignables et faisait progresser la Géométrie beaucoup plus loin. Plus tard, cependant, notre jeune homme négligea de poursuivre, après s'être aperçu que Huygens, Wallis, Wren, Van Huraet et Neil, et même Jacques Gregory ainsi que Barrow avaient employé la même méthode et l'avaient perfectionnée. Toutefois, il n'a pas semblé inutile d'exposer en ce lieu (comme ce discours le montre clairement), par quels degrés on est parvenu à la haute Géométrie afin de diriger, comme par la main, ceux qui, novices encore dans les domaines les plus cachés de la Géométrie, souhaitent s'élever plus haut.

En 1673, et pendant une partie de 1674, Leibniz se rendit à Paris. Mais en 1674 (pour autant qu'il puisse s'en souvenir) il tomba en Arithmétique sur cette célèbre Quadrature[28] qui mérite bien que l'on expose selon quelle méthode elle a été réalisée. D'habitude, les Géomètres décomposaient les figures en rectangles, en traçant des droites parallèles aux ordonnées. Lui-même eut l'occasion par hasard de résoudre une figure en triangles, formés par des droites concourantes en un seul point : il examina comment on pouvait obtenir quelque chose de neuf, donc de commode.



Soit la courbe AYB, on trace autant de droites AY que l'on veut, on trace aussi un axe quelconque AC, et une droite AE perpendiculaire à AC, ou "co-axe" ; la tangente à la courbe en y coupe l'axe et le co-axe en T et Θ. A partir de A, on mène sur la tangente TY la perpendiculaire AN ; il est manifeste que le triangle élémentaire A_1Y_2Y est égal à la moitié du rectangle ayant pour côtés l'élément de courbe $_1Y_2Y$ et la normale AN.

distantes de dx et cette courbe auxiliaire. Ce genre de courbe auxiliaire s'appelle une "quadratrice".

28 Il s'agit de l'expression de l'aire du cercle unité sous forme de série. Le procédé est détaillé dans le texte de problème inspiré de la "lettre à La Roque", p. 49 de ce même numéro.

On trace alors le triangle caractéristique mentionné ci-dessus $_1YD_2Y$, dont l'hypoténuse est la portion de tangente ou l'élément d'arc, et les côtés sont parallèles à l'axe et au co-axe ; de manière évidente, à cause des triangles semblables $AN\Theta$ et $_1YD_2Y$, il y aura :

$_1Y_2Y : {_1YD} = A\Theta : AN$, soit : $A\Theta \,.\, {_1YD}$ ou $A\Theta \,.{_1X_2X} = AN \,.\, {_1Y_2Y}$ = (d'après ce qui a été dit ci-dessus) au double du triangle A_1Y_2Y.

C'est pourquoi, si l'on imagine que toute longueur $A\Theta$ est translatée sur XY (on effectue le tracé, si nécessaire) de telle façon que $A\Theta$ soit reportée sur XY en XZ, on obtiendra alors le triangle mixtiligne AXZA qui est égal au double de la surface AYA, comprise entre le segment de droite AY et le segment de courbe YA. On obtient ainsi ce que Leibniz avait appelé des figures de segments ou des figures proportionnelles à des segments.

La même méthode donne un bon résultat lorsqu'on prend le point A hors de la courbe ; on a alors des triangles mixtilignes, proportionnels aux secteurs délimités par des lignes concourantes en ce point. Bien plus, dans le cas où celles-ci n'ont pas leur extrémité sur une ligne droite mais sur une courbe (qu'elles touchent l'une après l'autre), elles n'en permettaient pas moins, pour cela, des théorèmes utiles ; mais ce n'est pas ici le lieu de poursuivre des développements de ce genre.

Il suffit, pour notre but, de ne considérer la "figure de segments" que dans le cas du cercle. Si le point A est placé au début du quadrant AYQ (cf. fig), la courbe AZQZ coupera le cercle à l'extrémité du quadrant en Q et, décroissant à partir de ce point, sera asymptotique à la base BP (perpendiculaire au diamètre en son autre extrémité B). Cependant, toute la figure de dimension infinie, comprise entre le diamètre AB, la base BP, etc..., et la courbe asymptote par rapport à la base AZ QZ, etc..., sera égale au cercle de diamètre AB.

Pour en venir au point qui nous intéresse, le rayon du cercle étant pris comme unité, AX ou ΘZ étant désigné par x, et $A\Theta$ ou XZ par z, il en résultera que $x = \dfrac{2zz}{1+zz}$

Or, la somme des x sur $A\Theta$, soit, comme nous le disons aujourd'hui : $\int x\, dz$, est le triangle mixtiligne $A\Theta ZA$ complémentaire du triangle mixtiligne AXZA[29], qui nous l'avons montré, est égal au double du segment circulaire [délimité par l'arc A_1Y et la droite A_1Y].

---

[29] Θ, Z, et X doivent correspondre au même point. Sur la figure, prendre par exemple $A\Theta ZA$ et A_1XZA. Notons que le passage d'une aire à l'autre correspond à une intégration par parties, comme Leibniz l'explique plus loin (voir note 35)

L'auteur a obtenu de même par la méthode des métamorphoses[30] le résultat qu'il a envoyé en Angleterre. Il s'agit de faire la somme de tous les $\sqrt{1-xx} = y$. Soit $y = \pm 1 \mp x z$. D'où $x = \frac{2zz}{1+zz}$, et $y = \frac{\pm zz \mp 1}{zz+1}$.

Ainsi, de nouveau, il est seulement nécessaire de sommer des nombres rationnels[31].

Cette méthode a paru nouvelle et élégante, même aux yeux de Newton; mais il faut reconnaître qu'elle n'est pas universelle. En réalité, il est évident que, par cette méthode, on obtient l'arc à partir du sinus et d'autres résultats de ce genre, mais indirectement. C'est pourquoi, après avoir entendu dire que Newton avait déduit ces résultats directement, grâce à sa méthode d'extraction des racines, notre jeune homme désira en prendre connaissance.

Alors, immédiatement, il apparut que la méthode suivie par Nicolas Mercator pour la Quadrature de l'Hyperbole, en employant une série infinie, permettrait aussi de réaliser celle du cercle, malgré l'asymétrie, en divisant par 1 + zz tout comme Mercator avait divisé par 1 + z. Bientôt, l'auteur découvrit un théorème général pour calculer l'aire d'une figure conique pourvue d'un centre. En effet, le secteur délimité par l'arc de section conique qui part du sommet et par les droites joignant le centre aux extrémités de l'arc est égal au rectangle ayant pour côtés le demi-axe horizontal et une droite de longueur :

$$t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7 \text{ etc ....}$$

en posant que "t" est la portion de tangente au sommet (comprise entre ce sommet et la tangente à l'autre extrémité de l'arc) et que l'unité est le carré ayant pour côté le demi-axe ou bien le rectangle ayant pour côtés le demi-axe vertical et le demi-axe horizontal et que la notation ± signifie + dans le cas de l'hyperbole, mais – dans le cas du cercle et de l'ellipse. Par conséquent, en prenant le carré du diamètre comme unité, il en résultait l'aire du cercle :

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc...}$$

---

[30] Ou" méthode des transmutations"

[31] cela revient à effectuer un changement de variable pour se débarrasser du radical

Comme notre auteur avait montré à Huygens cette découverte avec sa démonstration, ce dernier lui en fit beaucoup de louanges : lorsqu'il renvoya à Leibniz la dissertation, il ajouta, dans une lettre, que cette découverte resterait toujours dans la mémoire des Géomètres et qu'elle suscitait l'espoir de parvenir peut-être, un jour à la solution générale, en mettant en évidence la véritable valeur de l'aire du cercle ou bien en démontrant qu'il est impossible de l'exprimer en quantités admises. Sans nul doute, ni Huygens, ni l'inventeur, ni personne d'autre à Paris (c'est un fait reconnu) n'avait rien entendu dire au sujet d'une série rationnelle infinie donnant l'aire du cercle (ce qui, comme on l'a constaté plus tard, a été inventé par Newton et Gregory). Assurément, Huygens n'en savait rien, comme il est évident d'après sa lettre, ci-jointe ; c'est pourquoi Huygens crut que c'était la première fois qu'une démonstration avait été donnée de l'expression exacte de l'aire du cercle par une série de quantités rationnelles. Ce fut aussi l'opinion de l'inventeur (confiant dans l'avis de Huygens, qui était très habile en ces matières) et, pour cette raison, il écrivit, en 1674, ces deux lettres à Oldenbourg que ses adversaires ont publiées et où il annonce sa méthode comme une nouvelle invention : "il a, le premier de tous, sans aucun doute, découvert la surface du cercle exprimée par une série de nombres rationnels, ce qui avait déjà été démontré (c'était bien établi) dans le cas de l'hyperbole". Or, si à Londres, l'année précédente, Oldenbourg lui avait communiqué les séries de Gregory et de Newton, l'impudence de Leibniz devait être extrême pour oser écrire en ces termes, - et surprenants l'absence de mémoire ou la complicité d'Oldenbourg, puisqu'il ne condamna pas l'hypocrisie de Leibniz ! - En effet, les adversaires produisent la réponse où Oldenbourg révèle simplement ("je ne voudrais pas que vous l'ignoriez", dit-il) que des séries semblables étaient connues également de Gregory et de Newton ; il les lui communiqua l'année suivante exactement, dans une lettre (que les adversaires publient) écrite au mois d'avril.

Par conséquent, on peut s'apercevoir comme ils ont été aveuglés par l'envie ou armés de malveillance, ceux qui osent maintenant inventer de toutes pièces qu'Oldenbourg avait communiqué à Leibniz des nouvelles de ce genre déjà l'année précédente ; pourtant, un peu d'aveuglement se mêle à la malveillance, car ils n'ont pas vu qu'ils produisaient les preuves qui détruisent leurs mensonges (au lieu de supprimer complètement ou en partie ces lettres et celles d'Oldenbourg, comme ils l'ont fait pour d'autres missives).

D'ailleurs, l'auteur commença bien entendu à correspondre avec Oldenbourg sur de la Géométrie seulement à partir du moment où il jugea qu'il avait découvert quelque chose digne d'être communiqué, car il était auparavant novice dans ces études. En revanche, les premières lettres de Paris, datées des 30 mars, 26 avril, 24 mai, 8 juin 1673 que les adversaires ont, disent-ils, en leur possession, mais qu'ils suppriment avec les réponses d'Oldenbourg, ces lettres ont sans aucun doute traité de sujets différents et ne leur ont rien montré qui puisse rendre plus crédibles ces prétendues communications de la part d'Oldenbourg.

Par ailleurs, lorsque notre auteur entendit dire que Newton et Gregory étaient parvenus à des séries en employant l'extraction des racines, il admit que c'était nouveau pour lui ; au début, il ne comprit pas bien et le reconnut avec franchise ; il chercha l'explication de quelques points, surtout du cas des séries réciproques où il s'agit, à partir d'une série infinie donnée, d'extraire une racine au moyen d'une autre série infinie. Par conséquent, ce que ses adversaires ont imaginé est évidemment faux - à savoir la communication par Oldenbourg des écrits de Newton ; en effet, dans ces conditions, il n'aurait pas eu besoin de demander une explication ; mais plus tard, lorsqu'il se mit à développer le calcul différentiel, il imagina un nouvel art , de loin le plus universel, de trouver des séries infinies sans recourir aux extractions, art approprié aux quantités ordinaires aussi bien qu'aux transcendantes, en supposant que la série cherchée était donnée ; c'est cette méthode qu'il utilisa pour achever son petit ouvrage sur la Quadrature Arithmétique où il insérait aussi des découvertes qui ne lui étaient pas propres : des séries exprimant l'arc en termes de sinus, ou de sinus de l'arc complémentaire ; et inversement il démontrait aussi grâce à cette nouvelle Méthode comment, l'arc étant donné, trouver le sinus, ou le sinus de l'arc complémentaire. C'est pourquoi, plus tard, il n'a pas eu besoin des méthodes des autres. Finalement, il publia sa nouvelle méthode d'obtention des séries dans les *Acta Eruditorum*. Dans le temps où il publiait ce petit ouvrage de Quadrature Arithmétique à Paris, il fut rappelé en Allemagne et comme il avait perfectionné la technique du nouveau calcul, il s'occupa moins des premières méthodes.

D'autre part, il faut exposer comment, peu à peu, notre auteur est parvenu à un nouveau genre de notation, qu'il a appelé "calcul différentiel".

Déjà, en 1672, Huygens lui avait proposé, alors qu'ils s'entretenaient des propriétés des nombres, le problème suivant : trouver la somme d'une série décroissante de fractions dont les numérateurs sont égaux à 1, et dont les dénominateurs sont les nombres triangulaires[32] : somme que Huygens avait trouvée dans des travaux de Hudde sur l'estimation de la probabilité. Notre auteur trouva que la somme était 2, ce qui était en accord avec la proposition de Huygens. Du même coup, il découvrit les sommes des séries de nombres du même genre, où les dénominateurs sont des nombres combinatoires quelconques, et en fit part à Oldenbourg en février 1673, dans une lettre publiée par les adversaires. Quand l'auteur eut vu, plus tard, le triangle arithmétique de Pascal, il créa, sur cet exemple, le triangle Harmonique.

Triangle Arithmétique, où la suite fondamentale est constituée par une progression Arithmétique : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

Triangle Harmonique, où la suite fondamentale est la progression Harmonique $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{1} \\
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\
\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \\
\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4} \\
\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5} \\
\frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6} \\
\frac{1}{7} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{7}
\end{array}$$

Dans le triangle harmonique, si l'on divise les dénominateurs de n'importe quelle suite oblique descendant à l'infini et, de même, de n'importe quelle suite parallèle finie, par le dénominateur du terme correspondant dans la suite première, on obtient les nombres combinatoires figurant dans le triangle arithmétique.

---

32 Le terme général de la série est $\frac{2}{x(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$, ce qui permet à la "propriété des différences" de manifester toute son efficacité !

Par ailleurs, ce qui est commun aux deux triangles, c'est que les suites obliques sont déduites les unes des autres par somme ou par différence. Dans le triangle arithmétique, une suite donnée est obtenue en faisant la somme de la suite précédente la plus proche, ou en faisant la différence de la suite immédiatement consécutive ; mais, dans le triangle harmonique au contraire, une suite donnée est obtenue en faisant la somme de la suite immédiatement consécutive.

D'où il s'ensuit[33] :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+etc=\frac{1}{0}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+etc=\frac{2}{1}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}+etc=\frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}+\frac{1}{210}+etc=\frac{4}{3}$$

et ainsi de suite.

Et certes il possédait ces résultats, alors qu'il n'était pas encore versé dans l'Analyse Cartésienne ; après s'y être adonné, il considéra que n'importe quel terme d'une suite pouvait, la plupart du temps, être désigné par une notation générale, par laquelle on peut se référer à une suite simple. Par exemple, si le terme général de la suite des naturels 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. est appelé x, on appellera le terme général de la suite des carrés x.x ou de celle des cubes x^3 etc.; le terme général de la suite des nombres triangulaires[34], c'est-à-dire que 0, 1, 3, 6, 10, etc. s'écrira $\frac{x(x+1)}{1.2}$, ou $\frac{xx+x}{2}$.

N'importe lequel des nombres pyramidaux : 0, 1, 4, 10, 20, etc ... s'écrira $\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}$, soit $\frac{x^3+3xx+2x}{6}$, et ainsi de suite. Et de cette façon, au moyen d'un calcul général, on peut trouver la suite obtenue par différence d'une suite donnée, et quelquefois aussi la suite obtenue par somme [d'une suite donnée], lorsqu'elle est exprimée numériquement.

---

[33] En sommant les termes d'une oblique, on obtient le premier terme de l'oblique précédente: ici tous les termes sont de plus multipliés par l'inverse du premier terme de l'oblique.

[34] On a vu précédemment que si x est la suite des naturels, $\int x$ est la suite des nombres triangulaires, $\iint x$ est la suite des nombres pyramidaux, etc..

Par exemple, xx est un nombre carré, le carré qui lui est immédiatement supérieur est xx + 2x + 1, la différence des deux est 2x + 1, c'est à dire que la suite des nombres impairs est la "suite-différence" des nombres carrés. En effet, si x désigne 0, 1, 2, 3, 4, etc., 2x + 1 désigne 1, 3, 5, 7, 9. De la même manière, la différence entre x^3 et $x^3 + 3xx + 3x + 1$ est $3xx + 3x + 1$, c'est pourquoi tel est le terme général de la suite-différence de la suite des cubes. Par conséquent, si la valeur du terme général d'une suite donnée peut s'exprimer à l'aide d'une variable x, qui ne figure ni au dénominateur, ni en exposant, il semblait que l'on pût toujours trouver la suite-somme d'une suite donnée. Par exemple, si l'on cherche la somme des nombres carrés, comme il était certain que la variable x ne pouvait être supérieure à la puissance cubique, l'auteur supposait que son terme général était $z = lx^3 + mxx + nx$ où dz doit être xx . Il en résultera $dz = l\, d(x^3) + md\,(xx) + n$ (en posant que dx = 1). Mais $d(xx) = 2x + 1$ et $d(x^3) = 3xx + 3x + 1$ (d'après ce qui a été déjà trouvé). Donc :

$$
\begin{aligned}
dz = 3\,lxx + 3\,lx &+ l \\
+\,2\,mx &+ m \\
&+ n \quad \cong xx
\end{aligned}
$$

donc $l = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + n = 0$ ou $n = \frac{1}{6}$, c'est-à-dire que le terme général de la suite-somme des carrés est : $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$, soit $\frac{2x^3 - 3xx + x}{6}$.

Par exemple, si l'on veut la somme des 9 ou 10 premiers carrés à partir de 1 jusqu'à 81, ou de 1 jusqu'à 100, on prend pour x la valeur 10 ou 11, (nombre immédiatement supérieur à la racine du dernier carré), et

$\frac{2x^3 - 3xx + x}{6}$ sera $\frac{2000 - 300 + 10}{6} = 285$, ou $\frac{2.1331 - 3.121 + 11}{6} = 385$.

Il n'est pas beaucoup plus difficile de faire la somme de 100 ou 1000 nombres carrés grâce à cette formule abrégée.

La même méthode donne de bons résultats dans le cas de n'importe quelle puissance des nombres naturels ou des formules composées de puissances de ce genre, si bien que l'on peut toujours, grâce à cette abréviation, effectuer la somme des termes (peu importe leur nombre) d'une suite de ce genre.

Mais notre auteur voyait aisément qu'on ne réussissait pas toujours, lorsque la variable x figure au dénominateur, à trouver effectivement la suite-somme ; cependant, comme il devait poursuivre l'Analyse, il fit la découverte générale et même il publia dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig, que l'on peut toujours trouver une suite-somme, c'est-à-dire que le problème peut être ramené à la sommation d'un nombre de termes fractionnaires simples comme $\frac{1}{x}$ ou $\frac{1}{x^2}$ ou $\frac{1}{x^3}$, etc ..., qui peuvent s'additionner, si le nombre de termes donnés est fini, mais pas d'une façon assez condensée. Cependant, s'il s'agit d'un nombre infini de termes, les termes tels que $\frac{1}{x}$ ne peuvent s'additionner en totalité, puisque la somme totale d'un nombre infini de tels termes est une quantité infinie; mais des termes en nombre infini tels que $\frac{1}{x^2}$ ou $\frac{1}{x^3}$, bien qu'ils forment par composition une quantité finie, ne peuvent cependant jusqu'aujourd'hui être sommés, à moins d'y substituer des quadratures.

C'est pourquoi, en 1682 déjà, dans le second mois des Actes de Leipzig, Leibniz observa que, si l'on prend les nombres :

1.3, 3.5, 5.7, 7.9, 9.11, etc..., soit : 3, 15, 35, 63, 99, etc..., et si, à partir de là, on forme une série de fractions :[35] $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+etc\ldots$, cette série décroissante à l'infini n'est autre que $\frac{1}{2}$; mais, si l'on saute un nombre sur deux, la série : $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}+etc\ldots$ exprime l'aire du demi-cercle, dont le carré du diamètre est 1.

Effectivement, soit x = 1 , ou 2, ou 3, etc..; le terme général de la série $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\text{etc}\ldots$ est $\frac{1}{4x^2+8x+3}$; on cherche le terme général de la série-somme ; on examine par la méthode la plus simple si l'on peut l'obtenir sous la forme suivante : $\frac{e}{bx+c}$; on aura :

$$\frac{e}{bx+c}-\frac{e}{bx+b+c}=\frac{eb}{b^2x^2+b^2x+bc+2bex+c^2}=\frac{1}{4x^2+8x+3}$$

En identifiant ces deux formules on obtient :

b = 2, eb = 1, donc : e = $\frac{1}{2}$, $b^2 + 2bc = 8$, soit : 4 + 4c = 8 ou c = 1, et enfin : $bc + c^2 = 3$, ce qui en découle.

---

35 Cette série a pour terme général $\frac{1}{(2x+1)(2x+3)} = \frac{1}{4x^2+8x+3}$ que Leibniz écrit ensuite $\frac{1}{4x+2}-\frac{1}{4(x+1)+2}$. On a alors $\sum\frac{1}{4x^2+8x+3}=\frac{1}{2}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4x+2}=\frac{1}{2}$

La suite des différences est ici définie par $(dx)_n=x_n - x_{n+1}$.

Donc le terme général de la série-somme est : $\frac{\frac{1}{2}}{2x+1}$, soit $\frac{1}{4x+2}$; or 4x + 2 est le double d'un nombre impair.

En dernier lieu, il vit aussi une manière d'appliquer le calcul différentiel aux suites de nombres quand la variable entre dans l'exposant, comme dans le cas d'une progression géométrique, où, si l'on pose b comme base, le terme général est b^x , en désignant par x les nombres naturels. Donc le terme général de la suite-différence sera :

$$b^{x+1} - b^x = b^x (b - 1)$$

Par conséquent, il est manifeste que la suite-différence d'une progression géométrique donnée est aussi une progression géométrique proportionnelle à la progression donnée. De là. on obtient la somme d'une progression géométrique.

Or, notre auteur remarqua aisément que le calcul différentiel, dans le cas des Figures géométriques, était étonnamment facile pour celui qui s'est exercé à manier les nombres, puisque, dans les figures, les différences et ce qui diffère sont des incomparables ; toutes les fois que sont rapprochées, dans une addition ou une soustraction, des grandeurs incomparables, les petites sont négligeables par rapport aux grandes ; aussi, les quantités irrationnelles ne sont-elles pas moins faciles à différencier que les sourdes[36], ou que les quantités exponentielles, à l'aide de logarithmes.

D'autre part, il observait que les lignes infiniment petites qui se présentent dans les figures ne sont que les différences relatives aux moments des lignes variables. Et, de la même façon que les quantités considérées jusqu'ici par les analystes avaient des fonctions telles que, par exemple, les puissances et les racines, de même, désormais, des quantités considérées comme des variables admettent de nouvelles fonctions, comme par exemple les différences. Tout comme nous avons eu jusqu'ici les fonctions x, xx, x^3, etc.... y, yy, y^3, etc.... de même, nous pouvons employer dx, $dd\,x$, d^3x, etc... Ainsi, même les Courbes que Descartes a exclues de sa Géométrie, en tant que "mécaniques", peuvent être exprimées par des équations appropriées et traitées par le calcul, ce qui libère l'esprit de l'attention continuelle qu'il porte aux figures.

---

[36] Parmi les quantités que nous appelons irrationnelles, Leibniz distingue les sourdes qui peuvent s'exprimer à l'aide de radicaux, et les autres qu'il nomme irrationnelles.

Lorsqu'on applique le calcul différentiel à la Géométrie, les différences de premier ordre correspondent exactement aux tangentes, les différences de second ordre aux cercles osculateurs[37] (dont notre jeune homme a introduit lui-même l'usage), et on peut procéder ainsi de suite. Or, ces procédés ne s'appliquent pas seulement aux tangentes et aux quadratures, mais à toutes sortes de problèmes et de théorèmes, où sont diversement mêlées différences et intégrales (selon la terminologie de l'ingénieux Bernoulli), comme cela se produit d'ordinaire dans les problèmes physico-mécaniques.

Aussi Leibniz établit-il que, en général, si une suite de nombres ou de lignes dans une figure possède une propriété qui dépend de deux, trois, ou quatre, etc..., termes très proches, elle peut être exprimée par une équation contenant des différences de premier, second ou troisième ordre. Bien plus, il inventa des théorèmes généraux pour un ordre de différenciation quelconque, de même que nous avions des théorèmes de degré quelconque et découvrit un rapport remarquable entre les puissances et les différences, publié dans les *Mélanges de Berlin*.

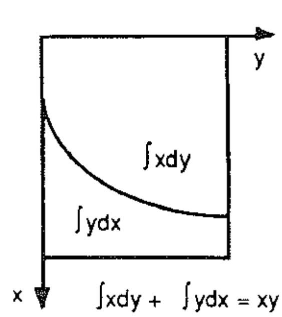
Si notre adversaire avait eu connaissance de ce rapport, il n'aurait pas utilisé, pour indiquer les différences d'ordres divers, des points, qui ne sont pas appropriés à la désignation du degré général d'une différence, mais il aurait conservé la notation "d" que notre jeune homme avait imposée ou une notation similaire, car ainsi "d^e" peut exprimer une différence de degré indéterminée.

Dès lors, tout ce qui, autrefois, était donné dans des figures, pouvait être exprimé par le calcul. En effet, $\sqrt{dxdx + dydy}$ exprimait un élément de courbe, ydx une portion de son aire ; du fait que $\int ydx$ et $\int xdy$ sont complémentaires, il ressort aussitôt avec évidence que : $d(xy) = xdy + ydx$, soit, si l'on préfère :
$xy = \int xdy + \int ydx$, bien que ces signes varient parfois, et du fait que : $xyz = \int xydz + \int xzdy + \int yzdx$, on met en évidence trois solides qui sont complémentaires les uns par rapport aux autres.[38]

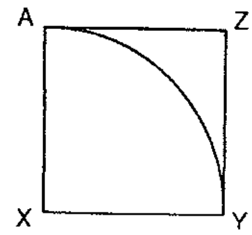
Et ce n'est pas la peine de connaître les théorèmes que nous avons déduits plus haut du triangle caractéristique ; par exemple, le moment de la courbe autour de l'axe peut être suffisamment exprimé par $\int x \sqrt{dxdx + dydy}$.

[37] Le rayon du cercle osculateur est le rayon de courbure, qui dépend de la dérivée seconde.

[38]La différentielle d'un produit est obtenue ici sous une forme équivalente à l'intégration par parties, obtenue elle-même comme le résultat de la partition d'un rectangle:



Les résultats que possède Grégoire de St-Vincent sur la méthode du *Ductus*[39], et ceux que lui ou Pascal possèdent sur les Onglets ou les Coins, toutes ces inventions proviennent d'un calcul de ce genre. Aussi, Leibniz avait-il vu avec plaisir qu'il avait découvert ce que d'autres avaient auparavant inventé sous les applaudissements ; il cessa désormais de s'en préoccuper beaucoup, parce que tout résultat était déjà contenu dans un calcul de ce genre.



Par exemple, le moment de la figure AXY surtout de l'axe XA est : $\frac{1}{2}\int yydx$; le moment de la tangente au sommet est $\int xydx$; le moment du triangle mixtiligne complémentaire AZYA autour de la tangente au sommet est $\int xxdx$; mais les deux derniers moments pris ensemble forment le moment du rectangle circonscrit AXYZ autour de la tangente au sommet (et, pour cette raison, sont complémentaires entre eux) à savoir : $\frac{1}{2}xxy$.

Mais, sans considérer la figure, ce résultat se démontre aussi par le calcul, en effet : $\frac{1}{2}d(xxy) = xydx + \frac{1}{2}xxdy$; aussi n'a-t-on plus besoin, désormais, de tant de théorèmes remarquables, faits par des hommes illustres, en Géométrie archimédienne, excepté ceux qui sont exposés par Euclide au livre II, et excepté la plupart des théorèmes de Géométrie commune donnés ailleurs.

Par merveille, il arriva un jour que le Calcul des Transcendantes se réduisit aux courbes ordinaires, ce qui donnait surtout satisfaction à Huygens. Par exemple, si l'on trouve : $2\int\frac{dy}{y} = 3\int\frac{dx}{x}$ il en résulte : $yy = x^3$, selon l'essence des Logarithmes, combinée avec le calcul différentiel (le calcul des Logarithmes est lui-même dérivé du calcul différentiel). En effet, soit $x^m = y$, il s'ensuit : $mx^{m-1}\,dx = dy$, donc, en divisant des deux côtés par des quantités égales, on aura : $m\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{y}$. Réciproquement, d'après l'équation $m \log x = \log y$, on aura:

$$\frac{\log x}{\log y} = \frac{\int\frac{dx}{x}}{\int\frac{dy}{y}}.$$

---

[39] la méthode de ductus plani in planum est exposée par Grégoire de Saint-Vincent dans l'*Opus geometricum* (1649)

Par conséquent, on peut aussi manier le calcul des exponentielles, en effet, soit : $y^x = z$, il résulte que

$x \log y = \log z$, donc : $$dx \ \log y + x \ \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Ainsi, nous débarrassons les exposants de la variable ou, inversement, nous transférons utilement la variable dans l'exposant, selon les circonstances. Enfin, de cette façon, ce qui, autrefois, suscitait l'admiration, est devenu un jeu.

En revanche, aucune trace de tout ce calcul ne se retrouve dans les écrits de notre adversaire, avant notre publication des principes du calcul, ni absolument rien, que Huygens ou Barrow n'auraient pu prouver de la même façon s'ils avaient traité des mêmes questions. Mais Huygens ne savait simplement pas combien ce calcul offrait de secours, ce que les adversaires passent sous silence autant que possible ; ils passent à des questions absolument différentes, ils ne touchent pas, dans leur rapport, à ce qui caractérise le calcul différentiel et s'attachent seulement aux suites infinies, dont notre rival, personne ne le nie, a fait progresser la méthode avant les autres. En effet, ils parlent de ce dont notre rival avait fait mystère, et qu'il avait finalement mis au clair, c'est-à-dire des Fluxions et Fluentes, en d'autres termes, des quantités finies et de leurs éléments infiniment petits ; en revanche, sur la manière de dériver une quantité de l'autre, ils n'offrent pas le moindre secours.

Notre rival, en considérant les raisons naissantes ou évanouissantes, s'est complètement détourné du calcul différentiel au profit de la méthode d'exhaustion, qui en est très éloignée (bien qu'elle ait aussi son utilité) et il ne met pas en oeuvre des quantités infiniment petites, mais des quantités ordinaires, qui, toutefois, deviennent finalement infiniment petites.

Donc, comme nos adversaires n'ont révélé, ni dans la *Correspondance* qu'ils ont publiée, ni ailleurs, la plus petite preuve établissant que notre rival a employé un calcul de ce genre avant que notre jeune homme ne l'ait édité, tout ce qu'ils ont allégué peut être repoussé comme hors du sujet. Ils se conduisent en avocats médiocres : ils détournent l'attention des juges du sujet dont il est question vers d'autres points, comme par exemple les suites infinies. Mais en cette matière, ils n'ont rien pu alléguer susceptible d'accabler la franchise de l'auteur; celui-ci a toujours reconnu à qui il devait ses progrès dans ce domaine; sur ce sujet aussi, pourtant, il est finalement parvenu à quelque chose de plus élevé et de plus général.