

Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 13



R. P. Bernard LAMY
GÉOMÉTRIE

ou
de la mesure de l'étendue

UNIVERSITE - PARIS VII
DENIS DIDEROT

Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 13



R. P. Bernard LAMY
GEOMETRIE
ou
de la mesure de l'étendue

Pourquoi une réédition des "Elémens de géométrie" ?

Le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Paris 7 dans ses divers travaux tant sur les proportions que sur les polygones réguliers et les résolutions des équations que sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques a été conduit, à maintes reprises, à se pencher sur ce livre du Père Lamy.

Dans le livre IV, Lamy traite des raisons et proportions sous la conduite conjuguée d'Euclide, Arnauld et Descartes et nous mène ensuite aux polygones réguliers.

Le livre VI est consacré aux équations, reprenant les travaux de Viète et Descartes.

La préface de l'ouvrage insiste sur le rôle de la géométrie dans la formation de l'individu ; elle est d'une lecture plaisante et délectable et mérite attention face aux problèmes d'enseignement que nous rencontrons.

Dans le même esprit nous conseillons la lecture de l'avertissement du livre VI dans lequel Lamy fait une distinction enrichissante entre "méthode d'invention" et "méthode de doctrine" dans l'enseignement des mathématiques.

Pour ces raisons il est apparu au groupe qu'il était bon de mettre à la disposition du plus grand nombre la totalité de cet ouvrage difficile à trouver dans les bibliothèques.

L'édition, reproduite est identique à la quatrième qui fut la dernière publiée du vivant du Père Lamy, en 1710. Elle contient un chapitre "Introduction aux sections coniques" qui ne figure pas dans les deux premières parutions.

Dans un livre consacré aux mathématiques on ne trouvera pas son nom, mais dans un ouvrage relatif à l'enseignement des mathématiques ou plus généralement à la place des sciences dans la formation de l'homme il y figurera en bonne place.

Bernard Lamy, né au Mans en 1640, fut élève au collège de l'Oratoire de cette ville. Ordonné prêtre en 1657, il enseigna dans les établissements de cet ordre à Vendôme, Saumur puis Angers.

Son enseignement ne fut pas sans refléter les idées neuves de l'époque, celles d'un Malebranche, d'un Descartes. Plus spécialement, en mathématiques, il renvoyait aux ouvrages de Viète, de Cavalieri ou d'Arnauld¹. Il combattait les cours dictés, en usage alors. Il vaut mieux, a-t-il écrit, user d'un seul livre "même s'il ne réussit pas en toutes choses, car " une tête bien faite corrige ce que le manuel a de défectueux."² En cela il était bien dans l'esprit de son ordre pour qui "les hommes ont toujours eu le pas sur les institutions."³

On conçoit que le Pouvoir, en 1676, accepte difficilement un enseignement déjà porteur de telles idées. C'est pourquoi les supérieurs de l'Oratoire jugèrent bon de l'exiler dans le diocèse de Grenoble où rapidement l'évêque l'estima à juste titre.

Lamy put revenir à Paris, au séminaire de l'ordre, en 1686.

Il avait mis à profit sa retraite pour publier, dès 1679 un "Traité de mécanique. De l'équilibre des solides et des liqueurs" (réédité en 1687 et en 1734).

Ce sont ensuite, en 1680, les "Elémens de mathématiques ou traité de la grandeur en général" qui eurent huit éditions jusqu'en 1765.

Cet ouvrage précède les "Elemens de géométrie ou mesure des corps" que nous reproduisons. Ceux-ci sont de 1685 avec six rééditions jusqu'en 1758. En effet Lamy estime que "l'objet des mathématiques en général, est la grandeur... c'est pourquoi il est assez évident que c'est par un traité de la grandeur en général que l'on doit ouvrir le cours des études des mathématiques."⁴

Ses "entretiens sur les sciences" parurent en 1684 et eurent quatre rééditions jusqu'en 1752. Lamy y critique les vieilles routines universitaires et prêche la lecture, sans parti pris des grandes expériences faites par les savants contemporains. Pour lui, le maître

¹Pour des précisions consulter :

Gibral : Bernard Lamy (P.U.F.)

J.P. Le Goff : Enseignement et diffusion des sciences : le père B. Lamy - "Scholie" n°6 oct. 88 (IREM de Caen)

²In Lamy : Entretiens sur les sciences.

³In P. Costabel : L'enseignement classique au 18^e siècle - Hermann

⁴In Lamy : Préface de la troisième édition des Elemens de mathématiques.

donnerait "seulement quelques remarques sur les traités que l'on choisirait et qui devaient faire l'objet de disputes publiques".⁵

Lamy publie également en 1701 un "Traité de perspective".

Nous avons cité les nombreuses rééditions des oeuvres du Père Lamy pour montrer le rôle important que sa pensée exerça sur l'enseignement tout au long du dix-huitième siècle en y répandant le goût de la liberté qu'il jugeait indispensable à tout acte, en particulier religieux. De même il espérait que les réflexions auxquelles incitent ses ouvrages "non seulement seront utiles pour donner de grandes ouvertures dans les sciences, mais encore pour redresser l'esprit et le coeur de leurs disciples, qui est le principal but que doivent se proposer les maîtres".⁶

Bernard Lamy est mort le 29 janvier 1715 à Rouen, lors seconde ville du royaume, où il s'était retiré à la suite, semble-t-il, de démêlés avec l'archevêque de la capitale.

Maryvonne HALLEZ

Henry PLANE

⁵In Lamy : Entretiens sur les sciences.

⁶In Lamy : Préface de la troisième édition des Elemens de mathématiques.

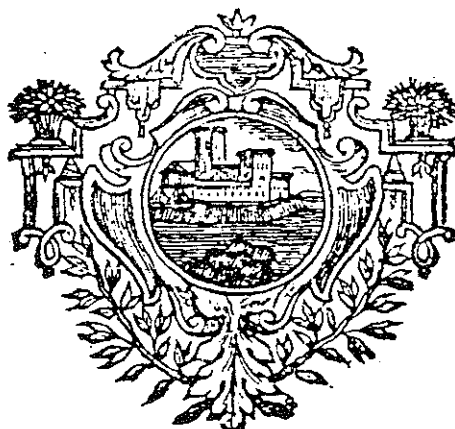
GEOMETRIE, OU

DE LA MESURE DE L'ÉTENDUE;

QUI COMPRENNENT LES ÉLÉMENTS
d'Euclide; les plus belles Propositions d'Archimède
touchant le Cercle, la Sphere, le Cylindre & le Cône;
avec une idée de l'Analyse, & une Introduction aux
Sections Coniques.

*Par le R. P. BERNARD LAMY, Prêtre
de l'Oratoire.*

Cinquième Edition revue & augmentée.



A P A R I S,
Chez JEAN LUC NION, Place de Conty, au premier
Pavillon du Collège Mazarin.

M. DCC. XXXI.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.



P R E F A C E.

OU L'ON FAIT VOIR CE QUE
c'est que la Geometrie : quelle est son
utilité, & quels sont ses Principes.



DANS les Elemens de Mathematique imprimés pour la troisième fois en 1704. nous avons considéré les propriétés de de la Grandeur en général. L'étendue qui est sensible dans les corps, en est une espece. Dans tout corps, ou dans ce qui est étendu, on distingue trois dimensions, la longueur, la largeur, & la profondeur. Ce sont les propriétés de l'étendue & par conséquent des corps, que nous allons examiner; non pas celles des corps sensibles, la dureté, la couleur, le froid, le chaud; mais celles de l'étendue intelligible, ou du corps enant qu'il est conçu, comme un être qui a trois dimensions, qui est long, large, & profond. Quand il n'y auroit aucun être tel dans le monde, tout ce que nous allons dire des propriétés du corps ainsi considéré, ne laisseroit pas d'être éternellement & immuablement vrai; car ce n'est pas une matiere sujette au changement qui est ici notre objet. Il ne s'agit d'aucun corps particulier; mais parceque

à ij

P R E F A C E.

c'est pour mesurer la terre qu'on s'est appliqué à étudier les propriétés du corps en général, on donne à ces Elemens le nom de Geometrie, qui s'étend bien plus loin qu'à la mesure de la terre. Comme elle découvre les propriétés de l'étendue, elle comprend la connoissance de presque toutes les choses qui sont dans le monde, qui est l'assemblage de tous les corps; car ce qui convient au corps intelligible, ou au corps en général, convient à tout ce qui est réellement étendu. Les Astres sont des corps, les Cieux sont étendus. Leur distance de la terre, leur grandeur, leur diametre, se mesurent par des lignes, qui peuvent aussi marquer leurs mouvemens; ainsi l'Astronomie ou la science des Astres, les operations, & les raisonnemens des Astronomes sont fondez sur la Geometrie.

La Gnomonique est un art qui trace sur un plan la route du Soleil, en marquant le chemin de l'ombre que fait le sommet du stile du quadrans qui represente la terre, autour de laquelle le Soleil tourne; ainsi les operations de cet art sont fondées sur la Geometrie. La Marine dans la plus grande partie de ses pratiques est une dépendance de l'Astronomie. Il est évident que l'Architecture, les Fortifications, les Mechaniques ont pour objet des choses étendues; par conséquent elles sont renfermées dans la science du corps en général. Il n'y a gueres autre chose dans les corps considerez dans leur état naturel, que ce qui est dans le corps mathematique, c'est-à-dire, seulement considéré com-

P R E F A C E.

me étendu. On a sujet de croire que toutes les qualités sensibles du corps naturel ne sont point en lui, mais dans l'ame qui les sent; on peut donc dire que toute cette partie de la Philosophie, qu'on nomme la Physique, n'est qu'une Geometrie. Je parle de cette partie où il ne s'agit point de l'esprit, ni de son union avec le corps, mais simplement du corps. On ne peut donc être Physicien sans être Geometre. Dans l'Optique, la Dioptrique, la Catoptrique, la Perspective, tout se démontre par lignes; & généralement dans une bonne Physique on rend raison de tous les effets des corps en montrant que ce sont des suites de leur figure, de leur mouvemens, qui s'expriment par des lignes. En un mot la Geometrie est comme les elemens de toutes les sciences, qui ont pour objet les corps.

Néanmoins ce n'est pas sur cela seul que je fonde l'estime qu'on doit faire de la Geometrie, mais sur ce qu'elle est propre pour former l'esprit, & le rendre exact, étendu & pénétrant. Nous avons vu dans la Preface du Traité de la Grandeur, l'importance qu'il y a de s'accoutumer à considérer les choses abstraites, c'est-à-dire, séparées de toute matiere sensible; & que pour cette raison l'Etude de ce Traité étoit avantageuse, parce que les veritez qu'on y proposoit étant expliquées sans figures, leurs idées se presentoient à l'esprit sans images. On ne peut voir par l'imagination que ce qui est corps; ceux donc qui ne font usage que de leur imagination, ne peuvent appercevoir les choses spirituelles.

à iij

P R E F A C E.

Ils ne croient pas même qu'il y en ait , parce qu'ils n'en trouvent point d'images dans leur imagination : comme lorsque dans les tenebres on cherche quelque corps avec les mains , si l'on ne rencontre rien qui résiste , on croit qu'il n'y en a aucun.

Il est donc important de s'accoutumer à voir sans images , & de se convaincre qu'il y a des veritez qui se conçoivent autrement que les corps. Mais il ne faut pas pour cela négliger de cultiver son imagination. On en peut même tirer un grand secours pour concevoir les choses spirituelles ; & c'est une nécessité dans l'état où nous nous trouvons , d'y avoir recours. En quittant Dieu nous sommes tombez dans les corps , il faut donc nous y appuyer pour nous relever , comme nous le faisons quand nous sommes tombez par terre. L'ame voit la verité qui lui est présente , & à laquelle elle est attentive : Mais les corps l'attirent vers eux par les impressions qu'ils font sur elle , & lui font perdre de vue cette verité , à moins qu'elle n'y soit comme attachée par les corps mêmes , qui sont la cause de ses distractions. Ce qui arrive lorsque cette verité est exprimée par des signes sensibles , qui tournent l'ame vers eux , & l'obligent de voir la verité qu'ils marquent. Peu de personnes se peuvent passer de ce secours. Il y a d'habiles gens qui ne voyent rien dans un sujet lorsqu'ils le considèrent par les seuls yeux de l'esprit , & qui après l'avoir exprimé sur le papier , apperçoivent tout ce qu'il faut voir pour en juger.

Ainsi après avoir lu le Traité de la Grandeur

P R E F A C E.

en général , & s'y être accoutumé à concevoir les choses sans images , ce qui est tres-important pour la Religion , il est utile d'apprendre ici comme il faut se servir de son imagination , qui n'est point dangereuse à ceux qui savent distinguer ce que l'esprit pur conçoit d'avec ce qu'elle présente. Elle est une source de plusieurs erreurs lorsqu'on ne consulte point la raison ; mais aussi il faut avouer que ceux qui veulent trop s'élever sans s'appuyer sur ce qui est sensible , sont fort sujets à l'illusion , & qu'ils s'égarent souvent dans de vaines pensées. L'ame qui est plus occupée des corps que des choses spirituelles , n'apperçoit qu'à demi celles-ci. Si elle n'est donc réservée dans ses jugemens pour ne prononcer que sur ce qu'elle voit : si ce qu'elle considère n'est extrêmement simple , comme sont les choses qui ont fait le sujet du Traité de la Grandeur , elle se trompe facilement. Dans les autres Sciences abstraites l'erreur y est toujours à craindre. On est obligé de se contenter des vrai-semblances : ce qui n'arrive pas dans celles qui sont aidées de l'imagination , comme la Geometrie , dont les Theorèmes frappent l'esprit trop vivement pour s'y tromper , quand on les considère avec un peu d'attention. La verité ou la fausseté y paroissent trop évidemment , pour être confonduës.

On trouve dans la Geometrie des modeles qui ne peuvent tromper , des démonstrations claires & convaincantes. Elle apprend la methode de conduire l'esprit de veritez en veritez. On y voit des

à iiij

P R E F A C E.

exemples , comme dans la recherche des Sciences il faut se servir des premieres connoissances qu'on a acquises , ou de celles qui nous sont naturelles , pour aller plus loin. L'art & le secret des Sciences ne consistent qu'à déduire des premieres veritez que Dieu a mises dans notre ame , les consequences dont elles renferment les principes , c'est-à-dire , à ménager la Science naturelle : ce que les Geometres font admirablement , comme nous l'allons faire voir , en découvrant en même tems les principes & les fondemens de la Geometrie , ce qui servira de disposition pour la comprendre avec plus de facilité.

Dans la Geometrie comme dans toutes les autres Sciences on ne se trompe point , quand on raisonne sur des idées claires , qu'on ne dit que ce que l'on conçoit. La Geometrie a cela de particulier , que les principes sur lesquels elle est fondée sont en très-petit nombre. Elle ne parle que de choses simples , faciles à connoître , ou de celles qui en sont des suites nécessaires & évidentes. Les idées de la ligne droite , & des cercles , dont elle s'occupe d'abord , sont claires. Les veritez , sur lesquelles elle s'appuie , sont incontestables , & connues de tout le monde ; & c'est à elles qu'on peut réduire tout ce qu'elle entreprend de démontrer. On ne peut ignorer ni contester , qu'une chose ne peut pas être , & n'être pas dans un même temps ; d'où il s'ensuit que puisque le tout & ses parties prises ensemble ne font qu'une même chose , il faut que le tout soit égal à ses parties : car autrement la même chose seroit

P R E F A C E.

& ne seroit pas. De ce principe on tire encore cette consequence , qu'il faut que deux grandeurs égales à une même grandeur , soient égales entr'elles ; car ces trois grandeurs ne font qu'une même chose ; ainsi si elles étoient inégales entr'elles , elles seroient & ne seroient pas. On peut de même rapporter à ce principe les quatre Axiomes suivans.

Si à des grandeurs égales on en ajoute d'égales , les tous seront égaux.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales , les restes seront égaux.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales , les restes seront inégaux.

Si à des grandeurs inégales on en ajoute d'égales , les tous seront inégaux.

Ces Axiomes sont fondés sur ce que les tous égaux ont des parties égales , & les inégaux des parties inégales. Or si les tous égaux n'avoient pas des parties égales , ils seroient & ne seroient pas.

De ces veritez suivent une infinité d'autres veritez ; par exemple , que les moitiés de deux tous égaux sont égales , ou que les doubles de ces tous sont égaux , & les tiers de deux tous égaux sont égaux , ou que les triples de deux tous égaux sont égaux , ainsi des quarts & des quadruples & d'une infinité de semblables propositions.

Les veritez suivantes , bien qu'elles soient , pour ainsi dire , grossieres , sont des sources tres-fécondes de plusieurs démonstrations , savoir que le tout

à v

P R E F A C E.

est plus grand qu'une de ses parties : & que ce qui est contenu, ou renfermé dans une grandeur, ne peut être plus grand que cette grandeur. Que deux grandeurs qui conviennent en tout, lorsqu'on les pose l'une sur l'autre, sont égales.

C'est sur ce principe, qu'une chose ne peut pas être, & n'être pas, que les Geometres se fondent, lorsqu'ils tirent leur preuve de la construction, ou de la supposition qu'ils ont faite, c'est-à-dire, qu'on ne peut pas contester leur conclusion, à moins qu'on ne dise qu'une chose peut être, & n'être pas en même temps, ce qui est absurde. Car leur conclusion est une suite si naturelle de ce qui a été fait, que si cette conclusion ne suit pas, il faut que la chose n'ait pas été faite comme on l'a supposé.

Tous ces principes ne sont dans le fond que celui-ci, qu'on ne se trompe point, quand on raisonne sur des idées claires; qu'on ne dit que ce que l'on conçoit; mais la difficulté, c'est de distinguer les idées, qui sont véritablement claires, & les choses qui se peuvent concevoir. Comme je l'ai dit, celles qui sont le sujet de la Geometrie sont simples, aisées à connaître, à distinguer. L'idée du corps est claire: les Geometres ne considèrent que ses dimensions, dont la notion est très-claire. Personne ne peut ignorer les propriétés générales de l'étendue, non plus que ces principes généraux, dont nous venons de parler. On sçait ce que c'est que d'être étendu, long, large & profond; & c'est le seul usage que les Geometres

P R E F A C E.

ont fait de ces connoissances, qui leur a fait découvrir une infinité de veritez cachées au reste des hommes; preuve évidente que si on usoit bien des premières connoissances naturelles, & si on alloit par ordre comme ils font, on feroit d'admirables progrès dans les Sciences. On ne les acquiert que par ce moyen; c'est pourquoi les premières études n'étant que pour apprendre comme il faut étudier, il n'y a point de Science plus propre pour les premiers exercices que la Geometrie.

Mais pour cela il faut qu'elle soit traitée avec méthode, ce que ne fait Euclide. Il n'a pensé qu'à ranger ses Propositions, de manière qu'elles se servissent de preuves les unes aux autres; en quoi il a réussi. La verité se trouve dans ses Elemens; mais au reste il y a tant de confusion, que bien loin de donner à l'esprit l'idée & le goût du véritable ordre, ils ne peuvent au contraire que l'accoutumer au désordre & à la confusion, comme s'en plaint Monsieur Nicole dans la Preface des Elemens de Geometrie de Monsieur Arnaud, qui furent imprimez pour la première fois en 1667.

C'est dans ces Elemens de Monsieur Arnaud qu'on trouve cet ordre naturel, qui n'est point dans ceux d'Euclide. S'il eut traité des Solides, je n'aurois peut-être jamais pensé à travailler à de nouveaux Elemens. Ce fut pour y suppléer que j'en eus la première pensée. Je traite en ceux-ci ce qui regarde les Solides d'une manière beaucoup plus étendue que ne fait Euclide & ses Commentateurs; car j'y

à vj

P R E F A C E.

comprends ce qu'Archimede a démontré de plus considérable touchant les Cylindres, les Cones & la Sphere.

J'ai pris à tâche d'expliquer tout Euclide, à la réserve du septième, du huitième & du neuvième Livre, qui ne traitent que des nombres, ce qui n'appartient pas à la Geometrie. Je n'ai pas aussi voulu grossir mon Ouvrage de toutes les propositions de son dixième Livre, parce qu'on ne le cite gueres; & que ce qui y est d'usage se peut expliquer en peu de pages, comme je croi l'avoir fait. Ses Elemens sont comme la clef commune à presque tous les Livres de Mathematiques. On les cite par tout; ce qui oblige de les sçavoir. Nous n'avons de lui que les propositions qui sont dans ses Elemens: les démonstrations sont de Proclus. Ainsi pour donner un Euclide, il n'est question que de rapporter ses Propositions. L'expérience fera voir que le seul ordre que je leur donne, en facilite la démonstration; c'est pourquoi j'espère qu'on apprendra ici Euclide avec beaucoup plus de facilité qu'en aucun de ses Commentateurs; outre que mon Ouvrage est plus court, quoiqu'il contienne plus de choses.

Je le distribue selon les trois dimensions, qui se distinguent dans le corps, sçavoir la longueur, la largeur, & la profondeur ou solidité. Dans le premier Livre je considère les propriétés de la première dimension, me bornant encore à la longueur qui est une ligne, ou droite ou circulaire. Ces lignes étant plus simples & plus faciles à connaître, l'ordre de-

P R E F A C E.

mande qu'on commence par elles, & qu'on réserve à un autre lieu de parler des autres lignes, qui sont plus composées, & qui ont des propriétés plus cachées. Dans le second Livre je traite de la seconde dimension, & je n'y parle pour la même raison que des largeurs ou surfaces qui sont les plus simples; c'est-à-dire, des surfaces droites qu'on nomme plans, qui sont bornées par des lignes droites ou par des cercles. Dans le troisième Livre j'applique aux lignes les propriétés de la grandeur en général, qui leur conviennent. Ainsi cette nouvelle Edition ne suppose point absolument qu'on ait vu les Elemens des Mathematiques, ou Traité de la Grandeur en général. Par conséquent on pourra commencer l'étude des Mathematiques par ces Elemens de Geometrie, si on espere y trouver plus de facilité. Dans le quatrième Livre j'explique ce qui regarde les raisons & les proportions des lignes droites, des cercles, & des surfaces droites, ou des plans. Dans le cinquième je traite de la solidité.

Comme mon principal dessein est de contribuer à rendre l'esprit exact & penetrant, à quoi la Méthode, que les Geometres appellent Analyse, est particulièrement utile; je tâche dans le sixième Livre de donner une idée de cette Méthode, appliquant à la Geometrie ce que j'en ai dit ailleurs par rapport à la Grandeur en général. Je fais voir comment l'on peut porter loin les premières connoissances de la Geometrie, & en même tems je propose des essais de cette Méthode sur quelques Problèmes.

P R E F A C E.

Je n'ai parlé dans ces *Elémens* que de la ligne droite & circulaire, & des solides compris sous des surfaces planes ou sphériques, qui se font par le mouvement de ces deux lignes. Mais j'ajoute à la fin une *Introduction aux Sections Coniques*, qui servira de premiers *Elémens* pour les lignes courbes & les solides qu'elles forment.

Ce n'est donc point en retranchant de ces *Elémens* des choses nécessaires, que je les ai rendu courts; mais en prenant des voyes abrégées, par où je mene tout d'un coup à la vérité. Je tire mes démonstrations de la notion de la chose même dont je parle; de sorte qu'avec un peu d'attention à cette notion, on découvre soi-même la démonstration. Il n'y a dans mes *Elémens* qu'un petit nombre de *Theorèmes* fondamentaux. Quand on les aura compris, les autres qui n'en sont que des *Corollaires*, c'est-à-dire, des conséquences évidentes, ne seront plus difficiles. Enfin ce qui donnera de la facilité pour entendre & retenir ne qu'on va lire, c'est que toutes les matières sont rangées sous des chefs qui les lient, & en font un corps de doctrine.

J'ai travaillé de nouveau cet *Ouvrage*, ayant reconnu qu'il pouvoit servir à former l'esprit & le cœur. C'est Dieu qu'il faut regarder en toutes choses & l'étude de la *Geometrie* y doit porter. On y trouve de grands sujets de penser à lui. Tout ce qu'on voit de beau dans cette Science touchant les figures, leurs raisons & leurs proportions, se remarque ensuite dans les *Ouvrages* de la Nature; ce qui donne lieu d'ad-

P R E F A C E.

mirer celui qui en est l'Ouvrier. Il n'y a point de petit corps qui ne soit capable de toutes les figures de *Mathématique*, selon qu'on concevra que sa matière sera disposée. Ces figures ont toutes leurs propriétés. L'esprit peut par conséquent découvrir en chaque Corps un nombre infini de vérités surprenantes, lorsqu'il le considère avec ordre; c'est-à-dire, s'il fait les considérations que peut faire un habile *Geometre*, & s'il applique à ce Corps tout ce que la *Geometrie* enseigne.

Combien d'admirables vérités verrions-nous donc en Dieu, si nous l'étudions autant que nous faisons les corps? Nous n'y voyons presque rien, parce que notre esprit ne peut s'appliquer autant de tems à lui, qu'il fait à la matière. Mais combien de choses les Saints découvrent-ils en sa Divine Essence, qui est la cause de la fécondité de la matière? Et si la connoissance des vérités que la *Geometrie* nous enseigne donne tant de contentement, quel est le plaisir des Bien-heureux qui voyent des vérités d'autant plus excellentes, que Dieu surpasse infiniment les Corps.

Ainsi outre le plaisir spirituel que donne la *Geometrie*, pour insinuer du mépris pour les voluptés, & par-là nous rendre plus propres pour la *Morale* de l'Evangile, qui est ennemie de ces voluptés: Outre qu'elle dispose l'esprit pour toutes les Sciences, pour celles mêmes qui sont élevées au-dessus de la matière, dont elle le rend capable, elle nous fait encore connoître qu'elle est la vaste étendue

P R E F A C E.

de la Science que possèdent ceux qui voyent Dieu, & de quel plaisir ils jouissent en découvrant tant de vérités dans la Divine Essence. Par conséquent la *Geometrie* pourroit donner un plus ardent desir de posséder Dieu, que de devenir *Geometre*, si on l'étudioit avec l'esprit, que je le prie lui-même de donner à ceux qui se serviront de mon *Ouvrage*.



P A S S A G E D E P L A T O N

du Livre septième de sa République, touchant l'excellence & l'utilité de la *Geometrie*.

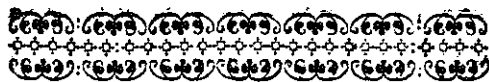
VOUS voyez donc, cher Ami, que les *Mathématiques* sont nécessaires, puisqu'elles nous obligent par cette exactitude, dont elles donnent l'habitude, de faire usage de notre esprit. C'est certainement ce qu'elles font; & c'est une chose remarquable que tous les hommes étant capables par leur nature de raisonner, & de comprendre toutes les Sciences, ceux qui ont moins d'ouverture, s'ils étudient cette Science, quand elle leur seroit inutile pour toute autre chose, ils en retirent cet avantage, que leur esprit devient plus ouvert; car il n'y a point d'étude qui l'exerce plus, & qui a rende autant capable d'attention; aussi c'est à cette étude qu'il faut appliquer ceux en qui on remarque un esprit qui mérite d'être cultivé.

P A S S A G E D E P L U T A R Q U E

du huitième Livre des Questions symposiaques, Question seconde.

P L A T O N loue la *Geometrie*, parce qu'elle détache des sens, auxquels nous nous donnons entièrement, & qu'elle nous tourne vers ce qui est intelligible & éternel, dont la connoissance est la fin de la Philosophie, comme la vue claire des *Mystères* est la fin de ceux qui s'y sont initiés. La volupté & la douleur sont comme un clou, qui attache si fortement l'Ame au Corps, qu'elle en devient dépendante: les choses corporelles lui deviennent ainsi plus claires, parce qu'elle en est plus touchée. Elle ne juge donc point des choses par la lumière de la raison, mais par les impressions qu'elle reçoit de son corps. La force de la douleur ou des plaisirs, fait qu'elle ne devient sensible qu'à ces perpétuels & divers changemens des choses corporelles qui agissent sur elle; ainsi elle s'aveugle, & perd cette lumière infiniment plus précieuse que les yeux du corps, étant seule capable de nous faire appercevoir la nature divine. La *Geometrie* est comme un miroir poli, où l'on voit des vestiges & des images des choses intellectuelles, vers lesquelles elle tourne l'esprit, après l'avoir comme purifié & dégagé de la servitude des sens.





TABLE

DES LIVRES, SECTIONS, CHAPITRES, ET PRINCIPALES MATIERES.

EXPLICATION des Termes, & des Notes, dont
on se doit servir. Page 1

LIVRE PREMIER.

De la premiere espece d'étenduë, qui est
la longueur.

Des Lignes droites & circulaires.

SECTION I. DES différentes especes d'étenduë.	7
SECT. II. De la longueur qui est la premiere & la plus simple dimension du corps. Des lignes droites.	11
SECT. III. De la ligne, qui est circulaire.	15
SECT. IV. De la difference position de deux lignes droites au regard l'une de l'autre.	19
Des lignes perpendiculaires.	20
Des lignes obliques.	27
Des lignes paralleles.	31
SECT. V. De la difference position de deux cercles au regard l'un de l'autre.	36

TABLE DES SECTIONS.

LIVRE TROISIEME.

Les proprietétez qui conviennent à toute gran-
deur, appliquées aux lignes, plans,
solides, & démontrées.

SECTION I. Les quatre operations de l'Arithméti- que, Addition, Soustraction, Mul- tiplication, & Division sur les lignes, sur les plans, & sur les solides.	129
SECT. II. De la puissance des lignes.	140
SECT. III. Des raisons & proportions des lignes, des surfaces & des solides.	151
SECT. IV. Des raisons composées, & de leurs pro- priététez.	170
SECT. V. De la comparaison des raisons.	177

LIVRE QUATRIEME.

Des raisons & proportions des Lignes, des
Triangles, des Figures, tant de leurs côtés
& circuit, que de leurs surfaces.

SECTION I. Methode pour trouver & démontrer les raisons, & les proportions des li- gnes.	186
SECT. II. Des raisons & proportions des côtés des Triangles.	192
Des Triangles dont les côtés sont coupezz par une li- gne parallele à la base.	196
Des Triangles dont les côtés sont coupezz par une an- tiparallele à la base.	199
Des lignes reciproques.	202

TABLE DES SECTIONS.	
SECT. VI. De la position d'une ligne droite au regard d'un cercle. Des cordes du cercle, arcs, dia- metres.	40
Des Lignes, Tangentes, ou Touchantes.	58

LIVRE SECONDE.

De la seconde espece d'étenduë, qui est
la largeur.

Des Surfaces planes.

SECTION I. DES Angles ou Surfaces, qui sont entre deux lignes, qui se rencontrent in- directement.	57
Des différentes sortes d'Angles par rapport à leur ouverture, ou par rapport au cercle.	61
Des Sinus.	65
SECT. II. De la comparaison des Angles, & de leur differente position au regard d'un cercle.	71
De la mesure d'un Angle, soit qu'il soit dedans ou hors du cercle, dans la circonference ou dans le centre, dans un segment, ou entre une Tangente & une corde, ou une secante.	73
SECT. III. Des Triangles, & de leurs différentes especes & propriétés.	83
SECT. IV. Des figures de plusieurs côtés, & polygones, ou de plusieurs angles : leurs especes : comment elles se font : & leurs propriétés.	100
SECT. V. De la mesure de l'aire des surfaces triangu- laires quadrilatères.	110
De la methode des indivisibles.	117
De la mesure des surfaces des polygones.	124

TABLE DES SECTIONS.

SECT. III. Des raisons & proportions que les aires cuits de deux ou plusieurs figures ont entr'eux, & avec les raisons des cercles où ces figures sont inscrites.	212
SECT. IV. Des raisons & des proportions des surfa- ces.	229
SECT. V. De la communurabilité ou incommunurabi- lité des lignes & des surfaces.	249
SECT. VI. Des raisons des cordes avec les rayons du cercle.	263

LIVRE CINQUIEME.

De la troisième espece d'étenduë, c'est-à-dire ;
des solides ; comment les solides se for-
ment, & se mesurent.

SECTION I. DES Sections & des rences des plans, dont on peut concevoir qu'un solide est formé.	287
SECT. II. De la composition des Solides selon leurs surfaces, & selon leur solidité. De leurs noms & différentes especes.	303
SECT. III. De la surface des Solides, comment elle se mesure.	315
SECT. IV. De la solidité des Solides, comment elle se mesure ; & de leurs raisons.	332
SECT. V. De la maniere d'inscrire ou circoncrire à une sphere les cinq corps reguliers,	349

TABLE DES CHAPITRES.

LIVRE SIXIÈME.

De la Méthode.

- CHAPITRE I. **D**E la methode qu'il faut suivre dans l'examen d'une Question, ou Problème. En premier lieu il la faut bien concevoir, & l'exprimer nettement. 375
- CHAP. II. On peut exprimer les lignes & toutes les grandeurs, dont il est parlé dans une question, & faire sur elles toutes les opérations de l'Arithmetique sans les connoître. 378
- CHAP. III. Après avoir exprimé une Question ou Problème, & fait la figure qui lui convient, il faut distinguer ce qui y est connu d'avec ce qui ne l'est pas, & considerer si le Problème est déterminé, ou indéterminé. 382
- CHAP. IV. La connoissance des rapports qui sont entre les lignes de la figure d'un Problème, donne le moyen de les égarer ou de trouver de doubles expressions; ce qui s'appelle Equation. 385
- CHAP. V. Il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de lignes inconnues, & réduire toutes ces Equations à une seule. 387
- CHAP. VI. Il faut réduire les termes d'une Equation à l'expression la plus simple, & faire en sorte que la grandeur inconnue se trouve seule dans l'un des membres de l'Equation. 389
- CHAP. VII. Les Equations sont d'une ou de plusieurs dimensions ou degrez; & ce sont ces degrez qui distinguent les Problèmes. 394
- CHAP. VIII. De la construction & effectiion Geometrique des Equations, c'est-à-dire, de la maniere d'exprimer avec des Lignes les Quantitez qui s'y rencontrent. 396

TABLE DES CHAPITRES.

- CHAP. IX. De la construction ou effectiion Geometrique, qui est un Lieu. Qu'est-ce que ce Lieu? Quand est ce qu'un Problème est un Lieu? Distinction des Problèmes selon cette consideration. 403
- CHAP. X. On ne peut exprimer Geometriquement avec la regle & le compas, que les Equations simples, ou qui ne sont que de deux degrez. On ne peut donc pas avec la connoissance de ces Elemens, résoudre les Problèmes solides. 406
- CHAP. XI. Essais de la methode sur quelques Problèmes. 408

INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES.

- CHAP. I. **D**Es lignes courbes, que representent les differentes Sections du cône. Leurs noms, & la methode la plus simple pour connoître leurs principales proprietéz. 424
- CHAP. II. De la Parabole ou ligne courbe, que represente la section d'un cône droit par un plan parallele à l'un de ses côtés. 427
- CHAP. III. De l'Ellipse, ou de la ligne que represente la section d'un cône par un plan, qui coupe ses deux côtés, & qui ne soit pas parallele à celui de la base. 434
- CHAP. IV. De l'Hyperbole ou de la ligne, qui represente la section d'un cône coupé par un plan parallele à son axe, ou de maniere que coupant un seul côté dudit cône, il puisse aussi couper l'autre étant prolongé au-dessus de son sommet. 449

FIN DE LA TABLE.

EXPLICATION DES TERMES

& des Notes dont on se doit servir.

Axiome.

ON appelle *Axiome* une verité claire & constante qu'on connoît sans étude: dont tout le monde convient.

Demande ou Proposition évidente.

C'est une proposition qui n'est pas connue avant qu'on l'étudie, mais qui le devient aussitôt qu'on y fait attention; qu'on a ainsi droit de demander qu'on reçoive comme incontestable. J'appelle plus volontiers *Proposition évidente*, ce qu'on nomme ordinairement, *Demande*; parce que ce mot n'est guères François dans le sens que lui donnent les Geomètres.

Définition.

C'est une proposition qui détermine l'idée d'un mot; ou qui donne une notion distincte de la chose qu'on veut que ce mot signifie.

Theorème.

On nomme ainsi une proposition dont il faut démontrer la verité.

Problème.

C'est aussi une proposition qu'il faut démontrer; mais dans laquelle il s'agit de faire quelque chose, & de prouver qu'on a fait ce qu'on avoit proposé de faire.

Lemme.

C'est une proposition qui n'est au lieu où elle est que pour servir de preuves à d'autres qui suivent.

A

JESUS, MARIA.

Permission du R. P. Supérieur Général de la Congregation de l'Oratoire de JESUS.

NOUS ABEL LOUIS DE SAINTE-MARTHE, Prêtre, Supérieur Général de la Congregation de l'Oratoire de N. S. J. C. suivant le Privilege à Nous donné par Lettres Patentes du Roi, en date du 22. Decembre 1672. signées NOBLET, par lesquelles sont faites défenses à tous Imprimeurs, Libraires & à tous autres, d'imprimer & mettre au jour aucun des Livres composez par ceux de notre Congregation, sans notre expresse licence par écrit, sous peine de confiscation des Exemplaires, & de mille livres d'amande. Permettons au R. P. LAMY Prêtre de notre Congregation, de faire imprimer par tel Imprimeur & Libraire qu'il voudra, *Les Elemens de Geometrie, ou de la Mesure du Corps, qui comprennent tout ce qu'Euclide a enseigné: Les plus belles Propositions d'Archimede & l'Analyse*, qu'il a composez. Fait à S. Paul aux Bois le 24 Juin 1684.

Signé, A. L. SAINTE MARTHE.

APPROBATION.

J'AY lu par ordre de Monseigneur le Chancelier, ces *Elemens de Geometrie*, composez par le R. P. LAMY Prêtre de l'Oratoire; & j'ay crû qu'une nouvelle Edition de cet Ouvrage ne pouvoit être que tres-utile au progrès des Mathematiques. Fait à Paris le 6. d'Octobre 1709.

Signé, SAURIN.

EXPLIC.

Corollaire.

C'est une proposition qui n'est qu'une suite d'une autre précédente.

NOTES.

Cette marque $+$ signifie plus. $A + B$, c'est A plus B .

Celle-ci $-$ signifie moins. $A - B$, c'est A moins B .

$\propto$ C'est la marque de l'égalité. $C \propto D$ signifie que C est égal à D . Mais l'on se sert aujourd'hui plus communément de cette marque $=$. $C = D$, signifie que C est égal à D .

$>$ Plus grand.

$<$ Plus petit.

$\times$ Par. C'est le signe de la multiplication. Comme $A \times D$ signifie A multiplié par D .

$\S$. Supra ou ci-dessus.

l. Livre.

n. Nombre. On met des nombres dans les marges de cet Ouvrage, qui servent à trouver les propositions qu'on allégué. l. 2. n. 6. C'est à dire : Livre second, nombre six. Si l'endroit où l'on renvoie est du même livre, on cite le nombre précédent qui est à la marge avec cette note $\S$. Ainsi $\S$ n. 5. C'est à dire : Ci-dessus nombre cinquième.

Prop. Proposition. Lorsque la proposition qu'on fait se trouve dans Euclide, on marque l'endroit de cette manière : Eucl. I. prop. 7. C'est à dire : Euclide livre premier, proposition septième.

Les autres notes qui sont dans l'Ouvrage sont expliquées dans les lieux où l'on commence de s'en servir. Afin qu'on s'accoutume à l'usage de ces notes, je m'en sers ici en proposant les vérités suivantes.

AXIOMES OU VERITÉZ⁵ claires & connus.

Premier Axiome.

Le tout est plus grand que sa partie.

Ainsi si A & B sont les parties d'une ligne que je nomme X ou de toute autre grandeur, ce tout X est plus grand que A & que B pris séparément. $X > A$, & $X > B$.

Second Axiome.

Le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

Si A & B sont toutes les parties de X , il est évident que $A + B$, c'est à dire A avec B est égal à X : Ce qui s'exprime ainsi $A + B = X$.

Troisième Axiome.

Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entr'elles.

Supposé que $A = Z$ & $B = Z$; c'est à dire que A soit égal à Z & que B soit aussi égal à Z , alors A & B sont deux grandeurs égales. On exprime ainsi ce raisonnement : Si $A = Z$ & $B = Z$; ou ce qui est la même chose, si $A = Z = B$: donc $A = B$; je me servirai souvent de cette expression : qu'on y fasse donc attention. On peut joindre à cet Axiome celui-ci qui n'est pas moins évident : Si A est égal à B , toute grandeur plus grande ou plus petite que B , sera plus grande ou plus petite que A .

Quatrième Axiome.

Si à des grandeurs égales on en ajoute d'égales, elles demeurent égales, les sommes sont égales.

Si $A = B$, ajoutant à A & à B la même grandeur X , ils demeurent égaux $A + X = B + X$.

A ij

Cinquième Axiome.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les restes seront égaux.

Si $A = B$, donc $A - X = B - X$; c'est à dire, que si A & B sont deux grandeurs égales, A moins X est égal à B moins X .

Sixième Axiome.

Si à des grandeurs inégales on en ajoute d'égales, elles resteront inégales, l'une plus grande si elle étoit plus grande, ou plus petite si elle étoit plus petite.

Si X & Z sont des grandeurs inégales, & que A & B soient des grandeurs égales, $X + A$ & $Z + B$ seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce qu'ils étoient auparavant.

Septième Axiome.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les restes seront inégaux, l'un plus grand si la grandeur étoit plus grande, l'autre plus petit si la grandeur étoit plus petite.

C'est à dire, que si X & Z sont des grandeurs inégales $X - A$ & $Z - A$ seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce que X & Z étoient auparavant.

Huitième Axiome.

Une grandeur qui a le signe $+$, étant jointe avec elle-même ou avec son égale qui a le signe $-$, est égale à rien, ou à zéro.

C'est à dire, $+A - A = 0$.

Neuvième Axiome.

Les choses qui sont moitié ou tiers &c. d'une même grandeur ou de grandeurs égales, sont égales ; mais elles sont inégales, si les grandeurs entières sont inégales ; plus grandes, si les grandeurs entières sont plus grandes ; plus petites, si les grandeurs entières sont plus petites.

Dixième Axiome.

Les grandeurs qui conviennent étant posées les unes sur les autres sont égales.

Si deux lignes posées l'une sur l'autre conviennent, elles sont égales.

On pourroit proposer plusieurs autres semblables Axiomes ; c'est à dire plusieurs autres vérités qu'on ne peut ignorer, & dont on ne dispute point.

AVERTISSEMENT.

On pourroit joindre à ces Axiomes, c'est à dire, à ces vérités connues & incontestables, cette proposition, Qu'une chose est vraie par sa construction quand elle est faite exactement selon une règle dont on étoit convenu. Ainsi après qu'on est convenu de ce qu'il faut faire pour couper une ligne en deux parties égales, & qu'on a

A B C

ainsi coupé A au point B , alors par la construction AB & BC sont les moitiés de cette ligne.

C'est aussi une vérité, qu'une proposition est incontestable lorsqu'on ne la peut nier sans dire une chose absurde, c'est à dire qui est manifestement fautive.

On réduit toutes les démonstrations dont on se sert, à ce petit nombre de vérités qu'on vient de proposer, & aux notions claires & distinctes des choses dont on doit parler. C'est dans la notion ou l'idée d'une chose qu'on découvre ses propriétés, & qu'on aperçoit ce qu'elle est véritablement ; ainsi toute l'habileté d'un Auteur ne consiste que dans l'art, avec lequel il fait faire attention à l'idée de la chose qui fait le sujet de son livre ; ne proposant d'abord que ce qu'il y a

A iij

de plus simple & de plus aisé à connoître dans ce sujet faisant toujours précéder ce qui est nécessaire pour entendre la suite. & sans rien oublier dont la connoissance soit nécessaire pour entendre ce qu'il propose. Mais comme l'attention est une chose pénible ; & que les démonstrations longues, quoique d'ailleurs claires, sont toujours difficiles, il doit s'accommoder à la faiblesse de l'esprit, & ménager sa capacité. On l'accable lorsqu'on lui présente plusieurs choses à la fois ; il les faut donc partager en toutes leurs parties naturelles, de sorte qu'on les puisse considérer les unes après les autres séparément & avec ordre, ce qui fait qu'on les conçoit & qu'on s'en souvient aisément. C'est ce qu'on a tâché de faire. Les Maîtres le doivent faire remarquer à ceux à qui ils enseigneront ces Elemens. Ils doivent en premier lieu leur en faire considérer le sujet, & la distribution de tout l'ouvrage, le soin qu'on prend de donner des idées nettes des choses qu'on veut faire connoître ; & comme c'est de ces idées qu'ordinairement on tire les démonstrations dont on se sert, l'étude de ces Elemens fait avec ces réflexions pourra contribuer à former l'esprit & servira de modèle de la manière dont il faut étudier & traiter les Sciences ; vûe principale qu'on a ici, comme on l'a dit dans la Préface.



ELEMENS DE GEOMETRIE OU DE LA MESURE DE L'ÉTENDUE.

LIVRE PREMIER.

De la premiere espece d'Etenduë,
qui est la Longueur. Des Lignes
droites & circulaires.

SECTION PREMIERE.

Des différentes especes d'Etenduë.

DEFINITION I.

Ly a trois especes d'étenduë, la Longueur, la Largeur, & la Profondeur, qui sont les trois dimensions du corps. L'objet de la Geometrie n'est pas cette étendue. A iij

8 Elemens de Geometrie.

duë materielle des corps, qui sont effectivement étendus en long, en large, & en profondeur ; c'est une étendue intelligible telle que l'esprit la conçoit ; en sorte que quand il n'y auroit point de corps au monde, ce que les Geometres démontrent de l'étenduë n'en seroit pas moins vrai ; & c'est pour cela que quoique les corps changent, les verités de Geometrie sont immuables, parcequ'elles ne dépendent point de la matiere, mais des notions claires qui sont dans l'esprit. Ainsi quoiqu'il n'y ait point de corps sans trois dimensions, on peut considérer l'une sans faire attention à l'autre, la longueur sans considérer la largeur, & la largeur sans considérer la profondeur, comme l'on regarde la longueur des chemins sans faire réflexion sur leur largeur, & leur largeur sans penser à la profondeur de la terre. La notion de la longueur exclut celle de la largeur & de la profondeur, & celle de la largeur exclut celle de la profondeur ; & ces notions ne sont point fausses, quoiqu'effectivement ces trois choses soient inséparables ; parceque dans la maniere dont elles sont conçues, elles sont distinguées en ce que l'une est considérée sans l'autre. Ainsi les Geometres peuvent supposer en cette maniere des êtres qui soient longs sans être larges, & qui soient larges sans être profonds ou épais ; & quand on voudroit soutenir que ces suppositions sont entièrement fausses, les conséquences qu'on en tire ne pourroient être rejetées comme fausses. Car par exemple, bien qu'il n'y ait point de cercle parfait dans le monde, il est évident que selon qu'on suppose que le cercle est une figure dont la circonférence est en toutes ses parties également éloignée du centre, il faut que toutes les lignes

Livre I. Section I.

9
tirées du centre du cercle à la circonférence soient égales.

DEFINITION II.

Le point est ce qui n'a aucune partie. C'est à dire dont on ne considère point les parties ; car tout ce qui est étendu a des parties. Or si le point n'est pas un rien, il est étendu ; ainsi on ne dit qu'il est sans parties, que parcequ'on ne fait point attention à celles qu'il peut avoir, & qu'on le considère comme indivisible.

DEFINITION III.

La ligne, est une longueur sans largeur. C'est à dire une étendue dont on ne considère point la largeur, on qu'on suppose n'avoir point de largeur. On peut concevoir que la ligne est la trace, ou l'écoulement d'un point qui se meut, ou qui change de place. Il y a de deux sortes de lignes, la ligne droite, & la ligne courbe.

DEFINITION IV.

La ligne droite est celle qui est la plus courte qui puisse être menée entre deux points donnés.

On peut dire que c'est la trace que laisse un point qui se meut par le plus court chemin.

DEFINITION V.

La ligne courbe est celle qui n'est pas la plus courte de toutes celles qu'on peut mener entre deux points.

Il y a des lignes courbes d'une infinité d'especes, de regulieres, & d'irregulieres, de Geometriques, & de mechaniques, mais dont on ne parlera point dans ces Elemens. On appelle lignes creues celles qui sont composées de deux ou de plusieurs lignes, comme A & B. La ligne A faite de deux lignes, & la ligne B faite de plusieurs li-



A v

gues ne peuvent être considérées comme une seule ligne droite. Ainsi pour les distinguer il faut les nommer creuses.

DEFINITION VI.

6. La Surface, est une étendue longue & large sans profondeur.

C'est à dire une étendue longue & large, dont on ne considère point la profondeur.

DEFINITION VII.

7. La Surface droite ou plane, est celle qui est la plus courte entre deux lignes droites.

On peut concevoir qu'une surface droite est faite par le mouvement d'une ligne droite.

DEFINITION VIII.

8. Surface courbe, celle qui est plus grande entre deux mêmes lignes, qu'une surface droite ou plane.

DEFINITION IX.

9. Le Solide, est une étendue qui a trois dimensions, de la longueur, de la largeur & de la profondeur.

Le solide est l'éconlement de la surface. Tout solide est un corps ; en tant qu'on prend ce nom pour ce qui est étendu, qui a de la longueur, de la largeur, & de la profondeur. Être étendu, & être corps, c'est la même chose, lorsque l'on ne considère dans les corps que leur extension, & qu'on ne fait aucune attention à leurs qualités sensibles, à la couleur, à l'odeur, & aux autres qualités qu'ils peuvent avoir.



SECTION II.

De la longueur, qui est la première & la plus simple dimension du corps.

Des lignes droites.

Propositions évidentes touchant les lignes droites, ou Corollaires de leur définition.

AVERTISSEMENT.

Ces propositions sont renfermées dans l'idée de la ligne droite ; c'est à dire qu'on ne peut concevoir une ligne droite qu'en même sens on n'aperçoive qu'elle n'est pas ce qu'on suppose qu'elle est si ce qu'on va dire n'est pas vrai. Les Geometres supposent toutes ces propositions sans le dire. Je les exprime, parcequ'elles feront que les notions de la ligne droite, d'où l'on doit tirer la démonstration de ses propriétés, seront plus claires. Cet avis est pour toutes les propositions évidentes que je proposerai sur chaque sujet avant les Théorèmes. Il n'y a rien de plus important que d'avoir des notions claires & exactes des choses dont on recherche les propriétés.

PROPOSITION I.

Les extrémités d'une ligne sont deux points. Les extrémités de la ligne X sont A & B¹⁰, qui sont indivisibles, premierement, quant à leur longueur ; car si A avoit deux parties, A vj

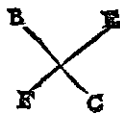
par exemple E & F, ce seroit F qui seroit l'extrémité. En second lieu, puisque cette ligne X n'a ni largeur ni profondeur, les deux extrémités A & B n'ont ni largeur ni profondeur, étant donc indivisibles en tous sens, ce

* 3 n. 1. sont deux points. *

PROPOSITION II.

11. Lorsque deux différentes lignes se coupent, leurs sections est un point indivisible.

La ligne EF coupe BC, si elle la coupe en deux différens points, cette ligne EF a de la largeur, ce qui est contre la définition de la ligne droite ; la section de BC & d'EF est donc un point.



PROPOSITION III.

12. Une ligne menée entre deux points, laquelle s'écarte d'une part ou de l'autre d'une ligne droite menée entre ces deux mêmes points, est plus grande que cette ligne droite.

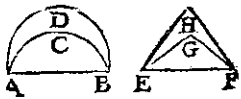
Les lignes courbes

ACB & ADB sont plus grandes que AB, & les lignes creuses EGF & EHF sont plus grandes que EF. C'est une suite de la notion de la ligne droite qui est la plus courte qu'on puisse mener entre deux points.

PROPOSITION IV.

13. Deux points étant donnés, on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre.

L'instrument dont on se sert pour mener une ligne droite est une règle. Pour connoître si une



règle est bonne, on tire avec elle une ligne, à laquelle on l'applique en différens sens ; & si après cela on trouve qu'elle convient toujours avec cette ligne, on juge qu'elle est juste. Un moyen sûr pour mener une ligne droite est de se servir d'un filet fort subtil, comme pourroit être un cheveu ; car après l'avoir tendu entre deux points autant qu'on le peut sans le rompre, selon la notion de la ligne droite, il marquera une ligne droite entre ces deux points.

PROPOSITION V.

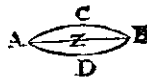
Une ligne droite étant donnée, on la peut prolonger. Elle ne peut être prolongée du même côté vers deux différens points.

On prolonge une ligne par le moyen d'une règle.

PROPOSITION VI.

Entre deux mêmes points on ne peut mener qu'une ligne droite.

Si on peut mener plusieurs lignes droites entre A & B autres que la ligne Z, il faut qu'elles s'écartent ou vers C ou vers D : ainsi elles seront plus longues que Z, par conséquent elles ne seront pas droites * puisqu'une ligne entre A & B ne peut être droite, qu'elle ne soit la plus courte de toutes les lignes qu'on puisse mener entre ces deux points. On ne peut donc mener qu'une seule ligne droite entre A & B. On pourroit concevoir plusieurs lignes entre deux points couchées les unes sur les autres, mais elles ne seroient qu'une même ligne. Entre deux mêmes points on peut mener une infinité de différentes lignes courbes. C'est pourquoi lorsqu'il s'agit de mesurer la distance d'un point à un autre point,



14. *Elémens de Geometrie.*

on ne prend pas pour mesure une ligne courbe, mais une ligne droite.

PROPOSITION VII.

16. Deux lignes droites qui ont deux points communs ne font qu'une même ligne droite.

La ligne BC & la ligne AD ont deux points communs, *çavoir* A & B , entre lesquels on ne peut concevoir qu'une ligne droite. Ainsi AB & BA ne font point deux différentes lignes. La ligne BA étant prolongée ne peut aller ailleurs qu'au même point C , ni AB ailleurs que vers D , lorsqu'on la prolonge; partant AD avec BD ne font qu'une même ligne droite; car entre C & D il n'y a qu'une seule ligne droite.

PROPOSITION VIII.

17. Donc, la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points.

Car si par les deux points donnés A & B l'on mène une ligne droite, elle sera celle que l'on cherche, puisqu'on ne peut mener par deux points plusieurs différentes lignes droites; toutes celles qui ont deux points communs n'étant qu'une même ligne, par la proposition précédente.

PROPOSITION IX.

18. Deux lignes droites qui se croisent, ou qui se coupent, ne se peuvent rencontrer que dans ce seul point où elles se coupent.

Car si elles se rencontraient en deux points, elles ne seraient qu'une même ligne par la septième proposition; ainsi elles ne seraient pas différentes l'une de l'autre, comme le sont deux lignes qui se croisent & qui se coupent.

PROPOSITION X.

19. La partie d'une ligne droite, est une ligne droite.

Livre I. Section III.

15
Qui dit partie d'une ligne droite, ne dit pas seulement un point.

SECTION III.

De la ligne qui est circulaire.

AVERTISSEMENT.

Le nombre des différentes espèces de lignes courbes étant infini, je ne considère ici que la ligne courbe qui est circulaire, laquelle après la ligne droite, est la plus simple & la plus aisée à connaître.

DEFINITION I.

Une ligne sur un plan, laquelle n'a ni commencement ni fin, & qui dans toutes ses parties est également éloignée d'un même point, est un cercle. Ce point dont toutes les parties de cette ligne sont également éloignées, s'appelle le centre du cercle.

Concevons que dans la ligne AB l'extrémité A est immobile, pendant que B l'autre extrémité tourne; si B laisse une trace, ce sera un cercle dont toutes les parties sont éloignées du point A d'un intervalle égal; *çavoir* AB . Ainsi A est le centre. Cette manière dont un cercle se fait est si uniforme, qu'on ne peut concevoir aucune différence entre toutes ses parties.



DEFINITION II.

Le cercle considéré comme une surface, en est une au dedans de laquelle il y a un point également éloigné de ses bornes.

16. *Elémens de Geometrie.*

DEFINITION III.

21. La ligne qui borne la surface d'un cercle, ou le cercle considéré comme ligne s'appelle circonférence.

DEFINITION IV.

22. Les lignes qui traversent la surface d'un cercle & passent par le centre, s'appellent diamètres.

DEFINITION V.

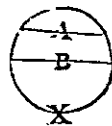
24. Les lignes qui partent du centre & se terminent à la circonférence, se nomment rayons, ou demi-diamètre.

AB est un rayon du cercle X . [figure 5 n. 20.]

DEFINITION VI.

25. Les lignes qui se terminent à la circonférence sans passer par le centre, ou qui sont menées d'un point de la circonférence à un autre de ses points, se nomment cordes.

A est une corde du cercle X , dont B qui passe par le centre est le diamètre.



DEFINITION VII.

26. La partie de la circonférence qui se trouve entre les extrémités d'une corde, s'appelle arc.

Lorsqu'une corde comme est AD dans le cercle X , ne passe pas par le centre, il y a deux portions de circonférence, qui se terminent aux extrémités de cette corde, l'une plus grande, l'autre plus petite. Quand on parle de la corde d'un arc, si l'on n'ajoute autre chose, on entend l'arc qui n'est pas le plus grand.

DEFINITION VIII.

27. Toute circonférence se conçoit divisée en trois cent soixante parties égales, qui se nomment degrés.

Livre I. Section III.

DEFINITION IX.

Chaque degré se divise en soixante minutes, 28.
ou petites parties, qu'on appelle premières. Chaque minute ou première en soixante secondes, & chaque seconde en soixante tierces: ainsi à l'infini.

DEFINITION X.

Cercles concentriques, sont ceux qui sont décrits d'un même centre. Excentriques, qui n'ont pas même centre.

Z & X qui ont pour centre le même point A , sont concentriques, & les cercles E & F , qui ont pour centres D & B deux points différens, sont excentriques.

Propositions évidentes touchant la ligne circulaire.

AVERTISSEMENT.

Toutes ces propositions sont des conséquences claires de la définition du cercle.

PROPOSITION I.

Un intervalle étant donné, on peut décrire une circonférence. Eucl. Liv. I. Pr. 2. & 3. Liv. IV. Prop. I.

L'instrument dont on se sert ordinairement pour décrire un cercle, est un compas; avec lequel on peut, comme il est évident, prendre une ligne égale à une autre ligne donnée; & de deux lignes inégales retrancher de la plus grande une ligne égale à la plus petite. Ce qui fait la deuxième & la troisième proposition du premier d'Euclide, & la première du quatrième.

PROPOSITION II.

31. Dans un même cercle ou dans les cercles égaux, les arcs égaux ont des cordes égales, & les cordes égales sont les cordes d'arcs égaux. Eucl. III. Pr. 24.
C'est une suite de la simplicité & uniformité du cercle, toutes les parties étant faites de même manière, on ne peut concevoir aucune différence entr'elles.

PROPOSITION III.

32. Dans les mêmes cercles, ou dans les cercles égaux, les plus grandes cordes soutiennent les plus grands arcs, & les plus grands arcs ont de plus grandes cordes. Eucl. III. Prop. 28. & 29.

PROPOSITION IV.

33. Les arcs d'un pareil nombre de degrés sont plus grands dans les plus grands cercles, & plus petits dans les plus petits cercles.

Cela est évident, car les parties d'un plus grand tout doivent être plus grandes. La centième partie d'une toise est plus grande que la centième partie d'un pied.

PROPOSITION V.

35. Les arcs d'un pareil nombre de degrés ont de plus grandes cordes dans les grands cercles, & de plus petites dans les plus petits cercles.

C'est encore une suite de la simplicité & uniformité du cercle. Tout doit être plus grand dans un plus grand cercle, le diamètre, le rayon & la corde de tel & tel degré.

PROPOSITION VI.

34. Le diamètre coupe le cercle en deux parties égales, qui s'appellent demie circonférence.

On ne pourroit concevoir que le cercle fût uniforme en toutes les parties si cela n'étoit vrai.

PROPOSITION VII.

Toutes les lignes tirées du centre à la circonférence étant égales, tous les rayons étant égaux : celles qui sont plus petites que les rayons, ont leur extrémité au dedans du cercle : si elles sont plus longues, elles l'ont au dehors : si égales, dans la circonférence même.

Cela est évident, puisque la circonférence est en toutes les parties également éloignée du centre de l'intervalle du rayon.

PROPOSITION VIII.

Les cercles sont égaux dont les rayons sont égaux.

C'est la longueur du rayon qui fait que le cercle est plus grand ou plus petit.

PROPOSITION IX.

Deux cercles qui ont un même centre & un même rayon ne sont pas différens.

Comme deux lignes droites entre deux mêmes points ne font qu'une ligne.

SECTION IV.

De la différente position de deux lignes droites au regard l'une de l'autre.

AVERTISSEMENT.

Deux lignes droites ne peuvent être disposées qu'en ces trois manières : ou elles se rencontrent ou elles se coupent, ou elles ne se rencontrent point. Quand elles se rencontrent, elles le peuvent faire de sorte, que l'une panche plus vers un côté que vers l'autre, ou qu'elle ne panche pas plus. On considère ici ces trois positions.

DES LIGNES PERPENDICULAIRES.

DEFINITION.

39. Une ligne qui tombe sur une autre ligne, ou qui la coupe de sorte qu'elle ne panche pas plus vers un côté de cette ligne qu'elle coupe que vers l'autre, s'appelle perpendiculaire.

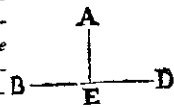
Propositions évidentes touchant les lignes perpendiculaires.

AVERTISSEMENT.

Je ne fais ces propositions que pour rendre plus distincte la notion, que la définition précédente vient de donner de la ligne perpendiculaire.

PROPOSITION I.

40. Une ligne tombant sur le milieu d'une autre ligne, si son sommet est également éloigné des extrémités de celle-ci, elle ne panche pas plus d'un côté que d'autre, ainsi elle est perpendiculaire.



AE tombe sur E le milieu de BD. Si A son sommet est également éloigné des extrémités B & D de la ligne BD, elle est perpendiculaire sur BD. C'est une suite de la notion de la ligne perpendiculaire que donne la définition précédente.

PROPOSITION II.

41. Si deux points dans une ligne sont également distans des extrémités de la ligne sur laquelle elle tombe, chaque point de cette première ligne sera également distant des mêmes extrémités de la seconde ligne.

Si les deux points A & E de la ligne AE sont également distans de B & de D, tous les autres

points de AE seront également distans de B & de D. C'est une suite de ce que la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points. On peut concevoir que quelque point dans la ligne AE soit plus près de B que de D, qu'on ne conçoive que A se courbe en ce point du côté de B ; & qu'ainsi elle n'est pas une ligne droite, comme on le suppose.

PROPOSITION III.

Dans une perpendiculaire si l'un de ses points est également éloigné de deux autres points de la ligne sur laquelle elle est élevée, tous les autres points sont également éloignés de ceux-ci.

Si AE est perpendiculaire sur BD & que l'un de ses points A ou E soit également distant de B & de D, l'autre sera également éloigné des mêmes points B & D. Car si A est également distant de B & D, & que E ne le soit pas, alors AE panchera plus d'un côté que d'autre ; ainsi elle ne sera pas perpendiculaire, contre la supposition qu'on fait qu'elle l'est.

PROPOSITION IV.

Pour démontrer donc qu'une ligne est perpendiculaire sur une autre, il suffit de faire voir que deux de ses points sont chacun en égale distance de deux points de celle-ci.

Pour démontrer que AE est perpendiculaire sur BD, il suffit de prouver que ses points A & E sont chacun également éloignés de B & de D.

PROPOSITION V.

Le prolongement d'une ligne perpendiculaire sur une autre ligne, est une perpendiculaire sur celle-ci.

AE est perpendiculaire sur BD ; son prolongement EC est perpendiculaire sur BD ; car c'en est qu'une même ligne droite, & l'on ne peut pas

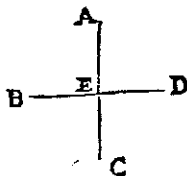
22. Elémens de Geometrie

concevoir la chose autrement, à moins que AC ne se courbe vers B ou vers D .

PROPOSITION VI.

45. Deux lignes sont perpendiculaires l'une sur l'autre, si l'une l'est sur l'autre.

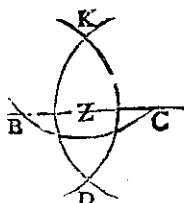
Si AC est perpendiculaire sur BD , la ligne BD est perpendiculaire sur AC . On ne peut concevoir que B panche plus vers A que vers C , qu'en même tems on ne conçoive que D panche plus vers C ; & cela étant, A panchera plus vers B que vers D , car cela est réciproque. Ainsi AE ne seroit pas perpendiculaire sur BD contre la supposition. BD est donc perpendiculaire sur AC , comme AC est perpendiculaire sur BD .



PROBLÈME I.

46. D'un point donné hors d'une ligne tirer sur elle une perpendiculaire. Eucl. I. Prop. 12.

Du point K hors de la ligne Z il faut tirer une perpendiculaire sur Z . 1°. De K comme centre je décris l'arc BC , ainsi B & C qui sont dans la circonférence de ce cercle & dans la ligne Z , sont également éloignés de K . 2°. De C comme centre & de l'intervalle CK je décris un cercle, & du point B un second du même intervalle. Ces deux cercles se coupent aux points K & D qui sont ainsi également distans de B & de C . 3°. Par K & D je



24. Elémens de Geometrie.

qui sera la perpendiculaire qu'on vouloit élever: ce qu'on ne peut démontrer en ce lieu.

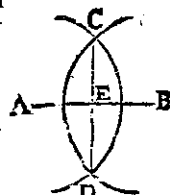
COROLLAIRE.

48. De-là nous apprenons comment l'on peut couper une ligne en deux parties égales. Eucl. I. Pr. 10.

Soit AB une ligne droite; de A & de B comme centres, je fais d'un même intervalle pris à discrétion deux cercles qui se coupent en C & D , par où je mène une ligne qui est perpendiculaire sur AB .

* § n. 43. * puisque D & C sont également éloignés de A & de B . Or le point E commun aux deux lignes DC & AB , est également éloigné de A & de B *, ainsi AE est égal à EB ; par conséquent la ligne AB est coupée par la moitié.

* § n. 41.



THEOREME I.

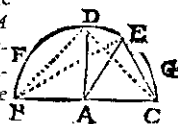
49. On ne peut élever sur un même point dans une ligne plus d'une perpendiculaire.

AD est perpendiculaire sur la ligne BC . Il faut démontrer qu'on ne peut élever sur le point A une autre ligne qui soit perpendiculaire: que par exemple AE & toute autre ligne ne le peut être.

De A comme centre, je décris le cercle BFD ECC . Ainsi B & C sont également distans de A . Et D où ce cercle coupe la perpendiculaire est également éloigné de B & de C . * Donc $DB = DC$, ainsi les deux arcs BFD & ECC sont

* § n. 42. égaux*, par conséquent D est le milieu de l'arc $BFDEGC$. Si EA est perpendiculaire, par les

* § n. 31. mêmes



Livre I. Section IV.

23

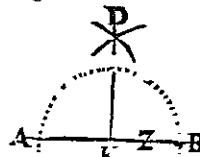
mène une ligne droite, dans laquelle les deux points K & D étant par la construction également éloignés de B & de C , il faut comme on l'a dit* que cette ligne KD soit perpendiculaire sur Z , ce qu'il falloit faire.

PROBLÈME II.

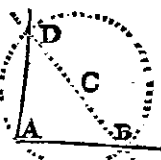
- Sur le point donné d'une ligne élever une perpendiculaire. Eucl. I. Prop. 11.

Soit K un point dans la ligne Z . Il faut élever

sur elle au point K une perpendiculaire. 1°. De K comme centre je décris un cercle qui coupe Z en deux points, qui sont ici A & B . 2°. De ces deux points A & B comme centres, je décris deux autres cercles d'un même intervalle pris à discrétion, de sorte que ces deux cercles se coupent. Je suppose que ce soit au point D . 3°. Je mène de ce point D une ligne au point K , qui est la perpendiculaire que l'on cherche. Car par la construction, D est également éloigné de A & de B , dont le point K est aussi également éloigné par la construction; ainsi cette ligne ayant deux de ses points également éloignés de A & de B , elle est perpendiculaire sur Z . *



Lors que le point donné est sur l'extrémité de la ligne donnée, comme est A , je prends à discrétion le point C . Ouvrant le compas de l'intervalle AC je décris un cercle. Je mène le diamètre BD . Du point de section D , je tire une autre ligne au point A ,



Livre I. Section IV.

25

mêmes raisons $BE = CE$ & $BFDE = CGE$; par conséquent E est aussi le milieu de BFD EGC , ainsi $BFD = BFDE$ ce qui est absurde.

THEOREME II.

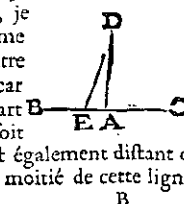
- Une ligne tombant perpendiculairement sur le milieu d'une autre ligne, passe par tous les points également éloignés des extrémités de cette autre ligne.

La ligne CD tombe perpendiculairement sur C , milieu de AB . Il faut prouver qu'elle passe par tous les points également éloignés de A & B , les extrémités de AB . Si on le conteste & qu'on veuille dire que le point E , par où CD ne passe pas, est également éloigné de A & de B , de ce point soit mené une ligne droite au point C , qui sera perpendiculaire sur AB , puisqu'en deux de ces points C & E , elle est également éloignée de A & de B . * Or il ne se peut faire par le Theorème précédent que sur le point C , il y ait deux perpendiculaires, il n'est donc pas vrai que le point E soit également éloigné de A & de B .

THEOREME III.

- On ne peut mener plus d'une perpendiculaire d'un même point sur une même ligne.

La ligne AD tombe perpendiculairement sur le milieu de la ligne BC , je dis qu'on ne peut du même point D mener aucune autre perpendiculaire sur BC ; car cette ligne tomberoit de part ou d'autre de A ; que ce soit en E . Alors le point E est également distant de B & de C ; * donc BE est moitié de cette ligne.



26 Eléments de Géométrie.

Mais AB en est aussi la moitié, ainsi $BA = BE$, ce qui est absurde. Donc, &c.

THEOREME IV.

52. Dans un plan deux lignes qui sont perpendiculaires sur une troisième, ne se peuvent rencontrer. Car si elles se rencontroient ou se coupoient, du point de cette rencontre ou section il y auroit deux perpendiculaires sur la même ligne; ce qu'on vient de démontrer impossible.

AVERTISSEMENT.

L'on mesure la distance d'un point à une ligne par une perpendiculaire, parce que c'est la mesure la plus simple & la plus constante; puisqu'on ne peut mener d'un point à une ligne qu'une seule perpendiculaire, & qu'outre cela elle est plus courte que toute autre ligne qu'on puisse tirer du même point à la même ligne, comme on le va faire voir dans le Theorème suivant.

THEOREME V.

53. La perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes qu'on puisse mener d'un point à une ligne.

La ligne BA est perpendiculaire sur Z , il faut démontrer qu'elle est la plus courte de toutes les lignes qui puissent être menées du point B sur la ligne Z .

- Prolongez BA jusqu'en C , en sorte que BA soit égal à AC ; la ligne DA est perpendiculaire sur Z .
 * 5 n. 43. BC comme BC l'est sur AD . * Le point D est donc également éloigné de B & de C , ainsi BD est égal à DC ; mais la ligne droite BC est
 * 5 n. 42. plus courte que la ligne $BD + DC$. * Par conséquent AB , moitié de BC est plus courte que BD moitié de $BD + DC$ ce qu'il falloit démontrer.



Livre I. Section IV. 27

C'est une suite de la nature de la perpendiculaire, qui ne s'écartant point, & s'éloignant également des extrémités de la ligne, sur le milieu de laquelle elle tombe, va par le chemin le plus droit, & par conséquent le plus court.

DES LIGNES OBLIQUES.

DEFINITION I.

Les lignes qui panchent plus vers un côté que vers l'autre de la ligne qu'elle rencontre, s'appellent obliques.

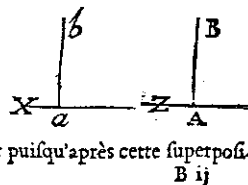
DEFINITION II.

BC est une ligne oblique sur Z ; ayant mené de B son extrémité, la perpendiculaire AB , la ligne AC entre A , pied de la perpendiculaire, & C le pied de l'oblique, est l'éloignement du perpendiculaire, & cet éloignement est la mesure de l'obliquité de BC . Ainsi une ligne est plus oblique, lorsque son éloignement du perpendiculaire est plus grand.

LEMME I.

Deux lignes droites, qui ont sur elles chacune une perpendiculaire, étant posées l'une sur l'autre, de sorte que les pieds de ces perpendiculaires soient l'un sur l'autre, ces deux perpendiculaires conviendront.

AB est perpendiculaire sur Z , & ab sur X . Il faut prouver que si l'on pose X sur Z de sorte que a soit mis sur A , les deux perpendiculaires AB & ab conviendront. Car puisqu'après cette superposition B ij



28 Eléments de Géométrie.

- tion, Z & X ne sont plus qu'une ligne, AB sera perpendiculaire sur l'une & sur l'autre, comme aussi ab . Donc si AB , & ab ne convenoient pas, il y auroit deux perpendiculaires sur une même
 * 5 n. 49. ligne au même point; ce qui est impossible. *

LEMME II.

57. Si des extrémités d'une ligne l'on en mène quatre autres, dont deux se joignent dans un point plus proche de la ligne donnée que les deux autres, je dis que la somme des deux dernières sera plus grande que la somme des deux autres. Eucl. I. prop. 21.

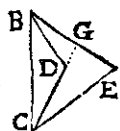
Soit la ligne donnée BC , & des points B & C soient menées les deux lignes BD , CD , & les deux autres BE , CE . Je dis que $BE + CE$ est plus grande que $BD + CD$.

- 1°. La ligne droite entre deux points étant la plus courte, * $CE + EG$ est plus grand que $CD + DG$, & par la même raison $BG + GD$ est plus grand que BD . Donc $CE + EG + GD + BG$ est plus grand que $CD + DG + BD$. Orant de part & d'autre DG , selon l'Axiome 7. le reste $CE + FG + BG$ ou $CE + EB$ sera plus grand que $BD + DC$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME I.

58. S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'éloignement du perpendiculaire les lignes obliques sont égales.

AB est perpendiculaire sur AC , & ab sur ac . Ces deux perpendiculaires sont égales; comme aussi AC éloignement du perpendiculaire AB est égal à ac éloignement du perpendiculaire ab



Livre I. Section IV. 29

Il faut prouver que $BC = bc$.

Par le premier Lemme ayant posé ac sur AC deux lignes égales, la perpendiculaire ab conviendra avec la perpendiculaire AB , qui étant égales, b conviendra avec B , & c avec C ; ainsi bc avec BC ; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME II.

Les lignes obliques menées du même point à une même ligne sont plus longues, si elles sont plus éloignées de la perpendiculaire.

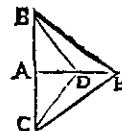
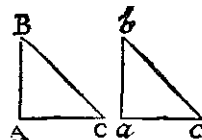
Il faut prouver que BE est plus longue que BD . Pour cela soit prolongé BA jusqu'à C ; de sorte que $AB = AC$. Alors, * $BD = DC$ & $BE = EC$. Or $BE + EC$ est plus grande que $BD + DC$ par le II. Lemme; Donc BE moitié de $BE + EC$ est plus grande que BD moitié de $BD + DC$, selon l'Axiome neuvième.

THEOREME III.

Une ligne oblique est plus grande, dont la perpendiculaire, & l'éloignement du perpendiculaire sont plus grands: & si l'éloignement du perpendiculaire est le même & l'oblique plus grande, la perpendiculaire est plus grande.

Soient 1° . BC & DE deux lignes obliques, la perpendiculaire AB est plus grande que AD ; & AC l'éloignement du perpendiculaire de BA est plus grand que AE , celui de DA , je dis que l'oblique BC est plus grande que l'oblique DE . Car par le Theorème précédent AB est plus grande que BE ; & puisque AC est perpendi-

B ij



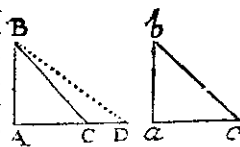
culaire sur AB , par le même Théorème BE est plus grande que DE ; par conséquent BC plus grande que BE , sera encore plus grande que DE .

2°. AE est le même éloignement, je dis que si BE est plus grande que DE , la perpendiculaire AB est plus grande que la perpendiculaire AD . Car si AD étoit plus grand que AB , ou égal, alors par le précédent Théorème ou par le premier, BE seroit plus petit que DE , ou égal l'un & l'autre, contre la supposition qu'on fait que BE est plus grande.

THEOREME IV.

61. *S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans la ligne oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendiculaire.*

Soit $AB=ab$, & $BC=bc$. Il faut prouver que $AC=ac$. Ayant posé ab sur AB , ces deux lignes égales conviendront entièrement; & par le premier Lemme, la perpendiculaire ac conviendra au moins en partie avec la perpendiculaire AC .



Si $AC < ac$, & qu'ainsi c ne convient pas avec C , mais avec D , alors bc conviendra avec BD ; mais $BD > BC$, * ce qui est contre ce qu'on suppose $BC=bc$. On auroit conclu une égale absurdité, si AC avoit été supposée plus grande que ac . Partant il faut que $AC=ac$, ce qu'il falloit démontrer.

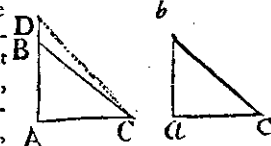
* § n. 59.

THEOREME V.

S'il y a égalité dans la ligne oblique, & dans l'éloignement du perpendiculaire, les perpendiculaires sont égales.

Soit $AC=ac$, & $BC=bc$. Il faut prouver que $AB=ab$. Soit posé ac sur AC , ces deux lignes égales conviendront, & la perpendiculaire ab avec la perpendiculaire AB , au moins en partie, par le

premier Lemme. * Si l'on dit que $AB < ab$, & qu'ainsi b convient avec D , alors bc conviendra avec DC , ainsi lui sera égale, & partant DC * plus grande que BC , à qui on la suppose égale. On auroit aussi conclu une égale absurdité, si AB avoit été supposée plus grande que ab . Il faut donc que ab convienne entièrement avec AB , & qu'ainsi $AB=ab$; ce qu'il falloit prouver.



* § n. 56.

DES LIGNES PARALLELES.

DEFINITION.

Deux lignes droites qui sont également distantes l'une de l'autre dans toutes leurs parties, sont dites parallèles.

Propositions évidentes touchant les lignes parallèles.

AVERTISSEMENT.

Ces propositions sont des Corollaires de la Définition des lignes parallèles.

B iij

PROPOSITION I.

64. *Une ligne droite qui est également éloignée en deux de ses points d'une autre ligne droite, est parallèle à cette ligne.*

Car la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points; ainsi ces deux lignes étant également éloignées l'une de l'autre, elles sont parallèles selon la définition.

PROPOSITION II.

65. *Les perpendiculaires entre deux parallèles sont égales.*

Ces perpendiculaires sont la mesure de la distance de ces deux parallèles; qui étant par tout la même, sont égales.

PROPOSITION III.

66. *Deux lignes parallèles étant prolongées à l'infini ne se rencontreront point.*

Car elles ne peuvent se rencontrer qu'elles ne s'approchent d'un côté; ainsi elles ne sont plus dans la même distance; par conséquent elles ne sont plus parallèles, ainsi qu'on suppose.

PROPOSITION IV.

67. *Deux lignes droites qui ne sont pas parallèles, mais qui s'approchent plus d'un côté que d'un autre se rencontrent enfin, si on les prolonge assez.*

Cela est évident.

AVERTISSEMENT.

Cela ne se doit entendre que des lignes droites; car il y a des lignes courbes dont la nature est telle, qu'il y a des lignes droites qui s'en approchent toujours sans jamais les rencontrer, comme on le démontre; & ces lignes droites s'appellent les Asymptotes de ces courbes.

PROPOSITION V.

68. *Deux lignes qui sont perpendiculaires sur une*

même ligne, sont parallèles entr'elles.

Car ces deux perpendiculaires ne se rencontreront jamais. * Or si elles n'étoient pas parallèles, elles se rencontreroient, selon la Proposition précédente; elles sont donc parallèles.

LEMMES.

Entre deux parallèles, les lignes perpendiculaires sur l'une le sont sur l'autre.

Si AB perpendiculaire sur X , ne l'est pas sur Z , donc Z ne l'est pas

sur AB ; * ainsi étant inclinée sur cette ligne AB , elle s'approchera ou d'un côté ou d'autre de la ligne X , & la rencontrera: * par conséquent elle ne lui est pas perpendiculaire contre la supposition qu'on fait qu'elle l'est.

LEMMES.

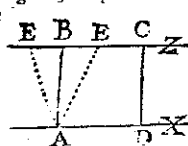
La ligne AB ne peut être perpendiculaire sur Z & X , que ces deux lignes ne soient parallèles.

Car ces deux lignes (même figure) sont réciproquement perpendiculaires sur AB ; * partant elles sont parallèles. *

LEMMES.

Si entre deux lignes droites, sont deux autres lignes droites égales, dont l'une est perpendiculaire sur la première & l'autre sur la seconde, je dis que ces deux premières lignes sont parallèles.

Entre Z & X sont AB & CD deux lignes égales, dont AB est perpendiculaire sur X & CD sur Z , je dis que Z & X sont parallèles.



Car si Z n'est pas pa-

B v

34. Elémens de Geometrie.

rallele à X , elle s'en éloignera ou s'en approchera, on montrera que l'un & l'autre est absurde; ainsi il faut qu'elles soient parallèles.

1°. Si on suppose qu'elle s'éloigne ayant du point A , tiré AE per-

* § n. 46. pendiculaire sur Z , * alors si cette perpendiculaire convient avec AB , Z & X seront perpendiculaires sur AB par la construction & ainsi parallèles entr'elles * contre la supposition. Que si AE

* § n. 68. tombe à côté de AB , la perpendiculaire AE sera

* § n. 53. plus courte que l'oblique AB : par conséquent

* § n. 41. aussi plus courte que $CD = AB$, ainsi la ligne Z

me 3. s'approchera de la ligne X contre la supposition.

2°. Si on suppose que la li-

gne Z s'approche de la ligne X , il y aura une semblable

absurdité : car au point B

* § n. 47. ayant élevé sur la ligne Z la perpendiculaire BE , com-

me AB est perpendiculaire

sur X , si elle convient avec AB alors, suivant

ce qui vient d'être dit, Z & X seront parallèles ;

mais si BE tombe à côté comme AB a été pro-

* § n. 51. posée perpendiculaire sur X , BE sera oblique,

& par conséquent BE plus grande que BA ou que son égale CD ; ainsi Z & X s'éloigneront

contre la supposition qui avoit été faite de s'ap-

procher, ce qu'il falloit démontrer.

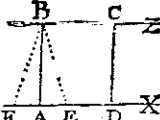
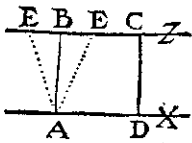
PROBLEME.

72. Par un point donné mener une ligne parallèle

à une ligne donnée. Eucl. I. Prop. 31.

Soit AB une ligne à laquelle il faut mener

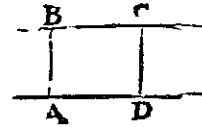
une parallèle par le point donné C . De ce point C



Livre I. Section IV.

35

j'abaisse une perpendiculaire sur la ligne donnée AD , sur laquelle ayant élevé une perpendiculaire telle qu' AB égale à CD , il est clair que la ligne qui passera par les deux points B & C sera parallèle à AD , suivant la Définition. *



Voici encore une autre manière. D'un point quelconque A , soit décrit un Arc de telle ouverture qu'il passe par le point donné C , duquel & de la même ouverture AC ayant fait l'Arc AB égal à DC , la ligne menée par les points B & C sera la parallèle requise.

THEOREME.

Deux lignes parallèles à une troisième sont parallèles entr'elles. Eucl. I. Prop. 30.

X & Y sont parallèles avec Z . De X je mène

AB , perpendiculaire sur Z , laquelle étant pro-

longée jusqu'en C , puisqu'elle est perpendicu-

laire sur Z , elle le sera

sur Y , parallèle avec Z , *

& puisque Z , est paral-

lele avec X , cette ligne

perpendiculaire sur Z le

sera aussi sur X parallèle

avec Z . * Ainsi puisque X & Y sont perpendicu-

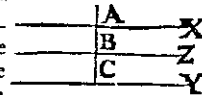
laire sur AC , elles sont parallèles entr'elles, *

ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

On ne sauroit faire passer par le même point

B & j



36. Elémens de Geometrie

deux différentes lignes qui soient parallèles à une même.

Car il faudroit par ce Theorème qu'elles fussent parallèles entr'elles, ce qui est absurde, puisqu'elles auroient un point commun, & qu'il est de l'essence des parallèles de ne se rencontrer jamais.

SECTION V.

De la différente position de deux cercles au regard l'un de l'autre.

AVERTISSEMENT.

75. Un cercle peut être posé tellement au regard d'un autre cercle, 1°. Qu'il ne le coupe ni ne le touche point. 2°. Qu'il le coupe ; ou que sans le couper il le touche ou en dedans ou en dehors. *

Propositions évidentes touchant la proposition des cercles.

PROPOSITION I.

LES cercles concentriques ne peuvent ni se couper ni se toucher.

On peut concevoir que les cercles X & Z con-

centriques dont A est le centre,

font faits par les points B & C

de la même ligne AD . Ainsi le

cercle que décrira B sera tou-

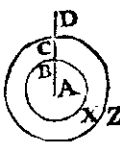
jours au dedans du cercle Z que

décrira C . Ces deux cercles ne

se peuvent donc rencontrer.

PROPOSITION II.

76. Deux cercles concentriques sont toujours en même distance.



Livre I. Section V.

37

Car entre X & Z il y a toujours la même distance BC .

THEOREME I.

Deux cercles qui se coupent ne sont pas concentriques. Eucl. III. Prop. V.

Soient deux cercles qui se coupent aux points

B & E , je dis qu'ils n'ont

pas pour centre un même

point. Car si A est le centre

de ces deux cercles qui se

coupent au point B , les li-

gnes AB & AC rayons du

même cercle sont égales.

* $AC = AB$. Et par la même

raison $AB = AD$. Ainsi

$AC = AB = AD$; donc $AC = AD$. * C'est-à-

dire, que la partie est égale au tout, ce qui ne

peut pas être. *

THEOREME II.

Deux cercles qui se touchent ne sont pas concentriques, ou n'ont pas même centre. Eucl. III.

Prop. 6.

Soient deux cercles qui se touchent au point

B , je dis qu'ils n'ont point le

même centre ; car si A étoit

le centre de ces deux cercles,

alors $AD = AB$ & AB

$= AC$: par conséquent AD

$= AB = AC$; ainsi AD

$= AC$, c'est-à-dire, que la

partie AC seroit égale à son tout AD , ce qui

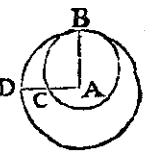
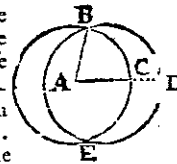
est absurde.

THEOREME III.

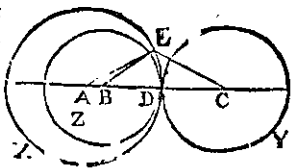
Si deux ou plusieurs cercles ont leur centre

dans une même ligne, qu'ils coupent dans un

même point, ils se touchent en ce seul point.



Les cercles X, Z, Y , ont leurs centres dans la même ligne qu'ils coupent au point D . Il faut prouver qu'ils se touchent en ce seul point D . Si l'on prétend qu'ils se touchent ailleurs, ou qu'ils se rencontrent en E , alors $AE = AD$, puisque ce sont les rayons d'un même cercle. Par la même raison $CD = CE$. Partant $AE + CE = AD + CD$, ce qui est absurde. * De même on démontre que Z & X ne se rencontrent point en E ; car s'ils se rencontreroient; $BD = BE$, & $AE = AD$; mais $AD = AB + BD$, ou $AB + BE$; Donc $AE = AB + BE$, ce qui est absurde. *



* § n. 11. ce qui est absurde. * De même on démontre que Z & X ne se rencontrent point en E ; car s'ils se rencontreroient; $BD = BE$, & $AE = AD$; mais $AD = AB + BD$, ou $AB + BE$; Donc $AE = AB + BE$, ce qui est absurde. *

COROLLAIRE.

80. Deux cercles ne se peuvent toucher en dedans ou en dehors qu'en un seul point. Eucl. III. Prop. 13.

X & Z se touchent en dedans, (même figure.) Si c'est au point D , ils ne se peuvent toucher ailleurs, par exemple au point E . S'ils se touchent en E , ils ne se peuvent toucher en D , car

* § n. 12. $AB + BE$ seroit égal à AE , ce qui est absurde. *

Que X & Y se touchent en dehors, si c'est au point D , ils ne se peuvent toucher dans un autre, par exemple en E , car alors $AC = AE + EC$, ce qui est absurde. *

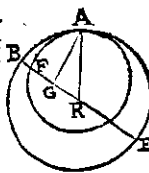
81. THEOREME IV.

Si deux cercles se touchent en dedans, la ligne droite qui joindra leurs centres étant prolongée

gée tombera sur le point d'attouchement de ces deux cercles. Eucl. III. prop. 11.

1°. Par le Theorème II. ces deux cercles n'ont pas un même centre. 2°. Soit R , centre de BAB ;

si on veut que G le soit de $F A F$ qui n'est pas dans la ligne $R A$, qui passe par A point de l'attouchement, alors $G A = G F$ *. Ainsi $R G + G A = R G + G F$ *. Or $R G + G A > R A$ *, & par conséquent, que $R B$ car $R A = R B$ *. Ainsi $R G + G F > R B$ ou $R G + G B$. Orant donc $R G$, partie commune, restera $G F >$ que le tout $G B$ *, ce qui est impossible.



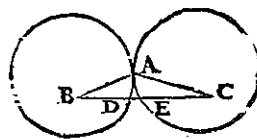
* § n. 20.
* § A.
xième 4.
* § n. 12.
* § n. 20.

THEOREME V.

82.

Si deux cercles se touchent en dehors, une ligne droite menée par leurs centres, passera par le point de leur attouchement. Eucl. III. Prop. 12.

Soient deux cercles DAD & EAE qui se touchent en A . Je dis que la ligne qui joindra leurs centres passera par le point A . Si on le nie, on est contraint de dire une chose absurde; car que B soit centre de DAD , & C de EAE , & qu'ainsi la ligne BC ne passera pas par



A où ces deux cercles se touchent: $BA = BD$ & $CA = CE$ *. Donc $BA + AC = BD + CE$. Puisque BC ne passe pas par le point d'attouchement de ces deux cercles qui est commun, D & E ne sont pas un même point: il y a entre

* § n. 20.

deux un intervalle, savoir DE , je l'ajoute à $BD + CE$; alors $BD + DE + CE$ est plus grand que $AB + AC$, ce qui est absurde. *

* § n. 12.

SECTION VI.

De la position d'une ligne droite au regard d'un cercle.

AVERTISSEMENT.

Une ligne droite peut être entièrement dans un cercle, ou au dehors. Si elle est dehors, elle le peut quelquefois atteindre, lorsqu'on la prolonge; de sorte qu'elle le coupe ou qu'elle le touche seulement sans y entrer.

83. THEOREME I.

Si en la circonférence d'un cercle on prend deux points comme on voudra, la ligne droite menée de l'un à l'autre de ces deux points, tombera dans le cercle. Eucl. III. Prop. 2.

B & C sont deux points dans la circonférence du cercle X ; il faut prouver que la ligne BC menée entre ces points est entièrement dans ce cercle. De A centre de X soit sur D milieu de BC une ligne droite; puisque AB & AC rayons de X sont égaux, & que D est le milieu de BC , cette ligne AD est perpendiculaire *, & partant B plus courte que AB & AC *.



* § n. 36.

* § n. 40.

* § n. 53.

* § n. 59.

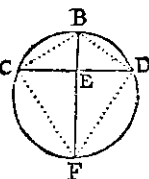
Ainsi D est dans le cercle *. Or tout autre ligne oblique menée de A sur BC , sera aussi plus courte que AB & AC *. La ligne BC est donc entièrement dans le cercle.

THEOREME II.

Si une corde est coupée perpendiculairement en deux parties égales, par une ligne, je dis que cette ligne coupe l'arc du cercle en deux également, & passe par le centre.

Soit la corde CD coupée perpendiculairement en deux parties égales par la ligne BF au point E , je dis que cette ligne coupe l'arc CD en deux également en B , & passe par le centre du cercle.

1°. Puisque le point E est également éloigné des points C & D , & que BF est perpendiculaire sur CD , le point B qui est dans cette perpendiculaire sera aussi également éloigné des points C & D *, & partant la corde BC égale à la corde BD , & par conséquent l'arc BC égal à l'arc BD *; ainsi l'arc CBD est coupé en deux également, la même chose sera pour l'arc CFD .



* § n. 42.

2°. La perpendiculaire, BF passe par tous les points également éloignés de C & de D *. Or le centre de ce cercle est également éloigné de ces deux points C & D ; donc BF passe par ce centre.

COROLLAIRE I.

Il est évident que pour couper un arc en deux parties égales, il faut élever sur la moitié de sa corde une perpendiculaire. Eucl. III. Prop. 30.

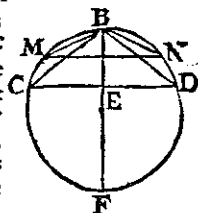
COROLLAIRE II.

Les deux arcs compris entre deux lignes parallèles sont égaux.

Les deux arcs MC & ND , compris entre les deux lignes ou cordes parallèles MN & CD sont égaux; car ayant tiré le diamètre BF per-

42 Elémens de Geometrie.

- * 5 n. 46. perpendiculaire sur CD *, il
 * 5 n. 69. le fera aussi sur MN * ;
 ainsi $BM = BN$ & BC
 * 5 n. 42. $= BD$ *. Les arcs de
 ces cordes égales seront
 * 5 n. 31. égaux*. Donc l'arc BC
 $= BM = BD = BN$;
 mais l'arc BC moins
 l'arc BM est égal à l'arc
 CM , & pareillement BD
 $= BN = ND$; donc $CM = ND$: ce qu'il
 falloit démontrer, que si, au lieu de la corde MN
 on avoit supposé en B une Tangente parallèle à
 CD , on auroit démontré encore plus prompte-
 ment l'arc BC égal à l'arc BD .

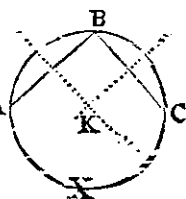


PROBLEME I.

87. Trois points étant donnez, trouver le centre
 d'un cercle qui passe par ces points. Euclid. III.
 Prop. I.

Soient trois points donnez A, B, C . On les
 joindra par deux droi-
 tes AB, BC , que l'on
 regardera comme les
 cordes du cercle cher-
 ché ; & menant deux
 perpendiculaires sur le
 milieu de ces deux li-
 gnes, je dis que le
 point K où ces deux
 lignes se coupent, est le centre du cercle que
 l'on demande : ce qui est évident par le Théo-
 rème précédent.

Si les trois points donnez étoient dans une li-
 gne droite, la question auroit été impossible, com-
 me il est évident ; car alors les deux per-
 pendiculaires ne se couperont pas étant pa-
 ralleles.



Livre I. Section VI.

COROLLAIRE I.

Deux cercles ne peuvent avoir trois points com-
 muns, comme A, B, C , qu'ils ne les aient tous.

Ces deux cercles ayant un même centre, sa-
 voir K , & étant décrits d'un même intervalle,
 ils ne peuvent être qu'un même cercle. * 5 n. 38.

COROLLAIRE II.

Deux cercles ne se peuvent couper en plus de
 deux points. Eucl. III. Prop. 10.

Car s'ils se coupoient en trois, ils auroient
 trois points communs ; ainsi par le Corollaire
 précédent ce ne seroit pas deux differens cer-
 cles.

COROLLAIRE III.

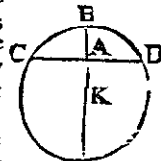
Une portion de cercle étant donnée, on peut
 achever le cercle. Eucl. III. Prop. 25.

Marquez trois points dans cette portion,
 après quoi vous pouvez trouver le centre du
 cercle dont elle est partie par le Problème pré-
 cédent.

THEOREME III.

Si une ligne coupe la corde ou l'arc d'un cercle
 en deux parties égales, & passe par le centre, je
 dis qu'elle la coupe perpendiculairement. Eucl.
 III. Prop. 3.

Soit la ligne BK , qui coupe l'arc, ou la cor-
 de d'un cercle, en deux parties
 égales & passe par le centre K ;
 je dis qu'elle coupe cette corde
 perpendiculairement ; car il y
 a dans cette ligne BK deux
 points, savoir A ou B , & K
 également éloignés de C & de
 D , puisque A est la moitié de
 la ligne CD , & B moitié de l'arc CBD , & que
 K est le centre. Donc BK est perpendiculaire. * 5 n. 40.

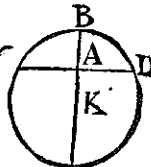


44 Elémens de Geometrie.

THEOREME IV.

92. Si une ligne coupe perpendiculairement la cor-
 de d'un cercle, & passe par le centre, je dis
 qu'elle la coupe en deux parties égales. Eucl. III.
 Prop. 1.

La ligne BK passe par le centre K , & est per-
 pendiculaire sur CD ; je dis
 qu'elle coupe CD par la moi-
 tié. Le centre est égale-
 ment éloigné de C & de D ,
 & BK étant perpendiculaire,
 le point A & tous les au-
 tres de BK doivent être
 également éloignés de C &

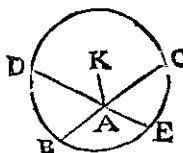


- * 5 n. 41. de D *. Donc $AC = AD$; ainsi CD est coupé
 par la moitié.

THEOREME V.

93. Deux cordes qui ne passent pas par le centre
 ne se peuvent couper par le milieu. Eucl. III.
 Prop. 4.

Soient deux cordes DE, BC , qui se coupent
 au point A , autre le centre du cercle ; je dis
 qu'elles ne se coupent pas en parties égales. Si
 ces deux cordes se cou-
 pent en A , qui n'est pas
 le centre, & que ce point
 soit le milieu de ces deux
 lignes, ayant mené de A
 une ligne au centre K ,
 cette ligne KA sera per-
 pendiculaire sur BC &



- * 5 n. 91. sur DE *. Donc BC & DE seront perpendic-
 laires sur KA ; ainsi sur le même point A il y
 * 5 n. 49. a deux perpendiculaires, ce qui est impossible*.

THEOREME VI.

94. Les cordes qui sont également éloignées du cen-

Livre I. Section VI.

tre sont égales, & si elles sont égales, leurs di-
 stances du centre sont égales. Eucl. III. Prop. 14.

Soient les cordes BC , & GH également éloi-
 gnées du centre K ; je dis qu'elles sont égales ;
 & si elles sont égales, leurs distances KE & KF
 du centre sont égales.

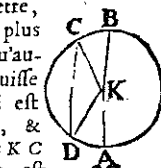
1°. Je mène sur ces
 cordes les perpendicu-
 laires DK & KL qui
 les coupent par le mi-
 lieu. * Par l'hypothèse
 $KE = KF$, & puisque
 $BK = KH$ & KC
 $= KG$; donc l'oblique
 KB étant égale à l'obli-
 que KH , & les perpendiculaires KE & KF de
 ces obliques étant égales, les éloignemens du
 perpendiculaire BE & HF seront égaux*. Par la
 même voye on prouve que $EC = FG$, qu'ainsi
 $BC = HG$; ce qu'il falloit prouver.

2°. On a montré que les obliques comme KB
 & KH étant égales, & les distances BE & HF
 du perpendiculaire étant égales, les perpendiculai-
 res KE & KF sont égales.*

THEOREME VII.

De toutes les lignes qui sont dans le cercle, le
 diamètre ou la ligne qui passe par le centre est la
 plus grande. Eucl. III. Prop. 15.

Soit la ligne AB le diamètre,
 il faut prouver qu'il est plus
 grand que CD , ou que quelqu'aut-
 re ligne que ce soit qui ne puisse
 passer par le centre : ce qui est
 évident. Car $KC = KB$, &
 $KD = KA$; ainsi $BA = KC$
 $+ KD$. Or $KC + KD$ est

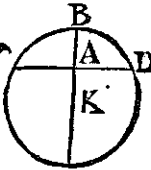


44 *Elémens de Géométrie.*

THEOREME IV.

92. Si une ligne coupe perpendiculairement la corde d'un cercle, & passe par le centre, je dis qu'elle la coupe en deux parties égales. Eucl. III. Prop. 3.

La ligne BK passe par le centre K, & est perpendiculaire sur CD; je dis qu'elle coupe CD par la moitié. Le centre est également éloigné de C & de D, & BK étant perpendiculaire, le point A & tous les autres de BK doivent être également éloignés de C &

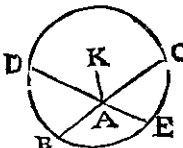


- * § n. 41. de D*. Donc $AC = AD$; ainsi CD est coupé par la moitié.

THEOREME V.

93. Deux cordes qui ne passent pas par le centre ne se peuvent couper par le milieu. Eucl. III. Prop. 4.

Soient deux cordes DE, BC, qui se coupent au point A, autre le centre du cercle; je dis qu'elles ne se coupent pas en parties égales. Si ces deux cordes se coupent en A, qui n'est pas le centre, & que ce point soit le milieu de ces deux lignes, ayant mené de A une ligne au centre K, cette ligne KA sera perpendiculaire sur BC &



- * § n. 91. sur DE*. Donc BC & DE seront perpendiculaires sur KA*; ainsi sur le même point A il y a deux perpendiculaires, ce qui est impossible*.

THEOREME VI.

94. Les cordes qui sont également éloignées du cen-

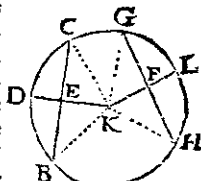
Livre I. Section VI.

45

tre sont égales, & si elles sont égales, leurs distances du centre sont égales. Eucl. III. Prop. 14.

Soient les cordes BC, & GH également éloignées du centre K; je dis qu'elles sont égales, & si elles sont égales, leurs distances KE & KF du centre sont égales.

19. Je mène sur ces cordes les perpendiculaires DK & KL qui les coupent par le milieu. * Par l'hypothèse $KE = KF$, & puisque $BK = KH$ & $KC = KG$: donc l'oblique KB étant égale à l'oblique KH, & les perpendiculaires KE & KF de ces obliques étant égales, les éloignemens du perpendiculaire BE & HF seront égaux*. Par la même voye on prouve que $EC = FG$; qu'ainsi $BC = HG$; ce qu'il falloit prouver.



* § n. 92.

20. On a montré que les obliques comme KB & KH étant égales, & les distances BE & HF du perpendiculaire étant égales, les perpendiculaires KE & KF sont égales*.

* § n. 61.

THEOREME VII.

De toutes les lignes qui sont dans le cercle, le diamètre ou la ligne qui passe par le centre est la plus grande. Eucl. III. Prop. 15.

Soit la ligne AB le diamètre, il faut prouver qu'il est plus grand que CD, ou que quelque autre ligne que ce soit qui ne puisse passer par le centre: ce qui est évident. Car $KC = KB$, & $KD = KA$; ainsi $BA = KC + KD$. Or $KC + KD$ est



* § n. 52.

65.

46 *Elémens de Géométrie.*

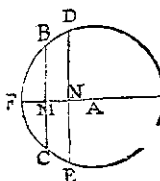
- * § n. 12. plus grand que CD*; donc BA est plus grand que CD.

THEOREME VIII.

96. Les cordes les plus proches du centre du cercle sont les plus grandes, & les plus grandes sont les plus proches du centre du cercle. Eucl. III. Prop. 15.

A soit le centre d'un cercle, & les lignes proposées soient BC, & DE. Il faut prouver que DE qui est plus proche du centre A, est plus grande que BC qui en est plus éloignée.

La distance de BC est AM, & celle de DE est AN, laquelle distance est plus petite. Il faut prouver que DE qui est plus proche du centre est plus grande que BC, qui en est plus éloignée, ce qui est évident; car l'arc EFD est plus grand que l'arc CFB: Or les plus grands arcs ont de plus grandes cordes*. Donc DE corde EFD est plus grande que BC corde CFB. C'est ce qu'il falloit démontrer.



* § n. 32.

THEOREME IX.

97. Si une ligne est la corde commune de deux arcs de cercles inégaux qui se coupent, je dis que l'arc du petit cercle contient plus de degrés que l'arc du grand.

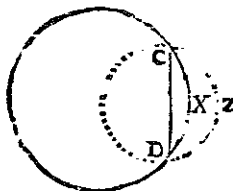
Soient deux cercles inégaux X & Z qui se coupent aux points C & D, la corde CD leur est commune. Je dis que l'arc CZD du petit cercle contient plus de degrés que l'arc CXD du grand. Car si les deux arcs dont CD est la corde étoient les mêmes, qu'ils fussent pas

Livre I. Section VI.

47

exemple également de dix degrés, il ne

seroit pas vray, comme on en est convenu, * que les arcs d'un pareil nombre de degrés ont de plus grandes cordes dans les plus grands cercles.



* § n. 33.

COROLLAIRE.

Donc une même ligne ne peut être la corde de deux arcs d'un pareil nombre de degrés, qui soient portions de cercles inégaux.

98.

AVERTISSEMENT.

Il a été observé § n. 26. qu'on considère toujours le plus petit arc de chaque cercle, à moins qu'il ne soit expliqué autrement.

THEOREME X.

Si d'un point pris hors d'un cercle, on mène plusieurs lignes qui le traversent & se terminent à la circonférence, je dis 1°. De toutes celles qui tomberont sur la partie convexe, celle qui passera par le centre étant prolongée, sera la plus courte. Celles ensuite qui seront plus près d'elle, seront plus courtes que les plus éloignées. 20. C'est le contraire dans les lignes qui tombent sur la partie concave. Eucl. III. Prop. 8.

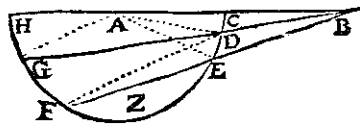
99.

Soit le point B, duquel on ait mené les lignes BH, BG, BF; je dis 1°. Que BC qui passe par le centre est plus courte que toute autre menée du même point, par exemple que BD. Car $AC = AD$: Or $AC + CB$ est plus courte que $AD + DB$ *. Donc BC sera plus courte que BD*. $AD = AE$. Or $AD + DB$ est plus

* § n. 12.
* § n. 7.

48 *Elémens de Geometrie.*

- * § n. 17. court que $AE + EB$. * Donc retranchant les grandeurs égales AD & AE , le reste DB sera plus court que le reste BE *.



- 2°. Que BH qui passe par le centre est la plus grande; car $AB + AH = AB + AG$. Or $AB + AG$ est plus grand que BG *. Donc BH est plus grand que BG . Il est pareillement évident que $BD + DF$ est plus grand que BF *. Or DG est plus grand que DF *. Donc $BD + DG$ est plus grand que BF .

COROLLAIRE.

100. S'il y a deux lignes droites égales ou inégales posées l'une sur l'autre, & convenantes par un point d'une de leurs extrémités, sur lequel l'une ou l'autre tourne circulairement, en s'écartant, la ligne qui joindra leurs autres extrémités deviendra toujours plus grande jusqu'à ce que ces deux lignes ne fassent qu'une seule ligne droite.
- Soient deux lignes AB, AC , sur AB figure précédente, dont AC tournera circulairement sur l'extrémité A , en s'écartant de AB , passant par D, E, F . Les lignes comme BD, BE, BF , &c. qui joignent leurs extrémités deviennent toujours plus grandes, jusqu'à ce que lesdites deux lignes forment la seule droite BAH , c'est ce qui vient d'être prouvé.

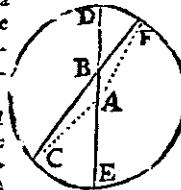
THEOREME XI.

101. Si d'un point pris hors le centre du cercle, on mène

Livre I. Section VI.

49 mène des lignes à la circonférence, je dis que celle qui passera par le centre sera la plus grande, & le reste de ce diamètre sera le plus court. Eucl. III. Prop. 7.

Soit le point B , & soient menées par ce point les lignes BE qui passe par le centre A , BC, BF , BD ; je dis que BE est la plus grande, & la partie BD la plus courte de celles qui peuvent être terminées à ce point.



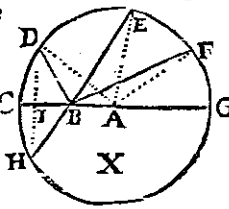
1°. $BA + AE = BA + AC$, puisque $AE = AC$. Or $AB + AC > BC$ *. Donc BE égal à $BA + AC$, est plus grand que BC .

2°. $AF = AB + BD$. Or $AB + BF$ est $> AF$ *, étant donc AB partie commune, le reste BF sera plus grand que le reste BD *.

THEOREME XII.

De tous les points qui sont dans le cercle hors le centre, on ne peut mener à la circonférence plus de deux lignes qui soient égales. Eucl. III. Prop. 9.

Soit A le centre du cercle X , le point B ne l'est donc pas. Je dis 1°. Que BD est plus grande



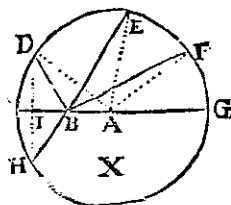
que BC *. 1°. Que BE est plus grande que BD ; car AD & AE sont toujours le rayon de X , qui en tournant & s'éloignant de AB , doit faire BE plus grande que BD *, & pareil-

ment BF est plus grande que BE . Or BG est plus grande que BF *. Par conséquent dans tout.

50 *Elémens de Geometrie.*

te la partie CD, FG du cercle X , toutes les lignes menées de B à la circonférence de X sont toutes inégales.

Prenant l'arc CH égal à CD , puisque AC est rayon, il coupera DH perpendiculairement * & en deux parties égales au point I *, ainsi y ayant égalité de perpendicule & de son éloignement, les obliques BH, BD seront égales *; mais toute autre ligne que BH sera ou plus petite ou plus grande, comme on vient de le voir. On peut démontrer de la même manière que de part & d'autre de C , on peut mener deux lignes égales, & non davantage.



- * § n. 91. les au point I *, ainsi y ayant égalité de perpendicule & de son éloignement, les obliques BH, BD seront égales *; mais toute autre ligne que BH sera ou plus petite ou plus grande, comme on vient de le voir. On peut démontrer de la même manière que de part & d'autre de C , on peut mener deux lignes égales, & non davantage.

COROLLAIRE I.

103. Il n'y a donc que le seul centre du cercle d'où l'on puisse tirer à la circonférence plus de deux lignes égales.

COROLLAIRE II.

104. Tout point dans le cercle dont on peut tirer à la circonférence trois lignes égales, est le centre du cercle. Eucl. III. Prop. 9.

THEOREME XIII.

105. Une ligne traversant deux cercles concentriques, soit qu'elle passe par le centre ou qu'elle n'y passe pas, les parties de chacune de ces lignes interceptées entre les deux circonférences sont égales entr'elles.

Soient BC, BD qui traversent deux cercles concentriques; je dis que $BM = NC$, & BF

Livre I. Section VI.

51 $= ED$. 1°. Pour BC qui passe par le centre, cela a été prouvé *.

2°. De A menant une perpendiculaire sur BD , alors $GD = GB$ & $GE = GF$ *. Donc $GD - GE = GB - FG$ *. Or $GD - GE = DE$ & $GB - FG = FB$; donc $DE = FB$.

THEOREME XIV.

Une ligne perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, touche le cercle. & ne le touche qu'en un seul point. Eucl. III. Prop. 16. & 18.

BD est perpendiculaire sur BK , il faut prouver que cette ligne ne touche le cercle X qu'au point B .

Si on dit qu'elle le touche dans un second point, comme en C , je mène de K à C une ligne, laquelle n'est pas perpendiculaire sur BD , puisque de K sur BD on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire *.

Elle est donc plus grande que le rayon BK , qui est perpendiculaire sur BD *. partant le point C est hors le cercle X : ainsi BD ne le touche pas en ces deux points B & C , mais seulement en B .

COROLLAIRE.

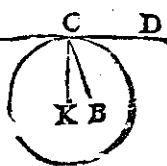
Il ne peut y avoir qu'une seule ligne qui touche le cercle dans un même point.

Deux différentes lignes ne peuvent toucher le cercle X au même point B ; car par ce Théorème, elles seroient toutes deux perpendiculaires sur BK ; ce qui est impossible *.

Cij

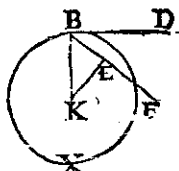
108. Si au dedans d'un cercle on tire une ligne qui soit perpendiculaire sur le point de l'attouchement de la tangente ou touchante, cette perpendiculaire passera par le centre de ce cercle. Euclid. III. Prop. 19.

CD est une tangente ou touchante: de C point d'attouchement, je mène au dedans du cercle une perpendiculaire, je dis qu'elle passe par le centre K; si on veut que ce soit par B qui n'est pas le centre, je prouve qu'on n'a pas raison; car de C ayant mené le rayon KC, & élevé au point C une perpendiculaire qui sera tangente*, mais elle sera la même que CD, puisqu'au point C il n'y peut avoir qu'une seule Tangente*: Ainsi sur la ligne CD au même point il y auroit deux perpendiculaires CK & CB, ce qui implique*.



THEOREME XVI.
109. Entre une tangente & la circonférence d'un cercle, on ne peut mener aucune ligne droite, mais on peut mener un nombre infini de lignes circulaires. Eucl. III. Prop. 16.

Si entre BD tangente & le cercle X, on peut mener quelque ligne droite qui partage l'espace entre la tangente BD & le cercle, que ce soit la ligne BF, sur laquelle je mène du point K une autre ligne qui lui soit perpendiculaire, sçavoir KE, qui sera plus courte que

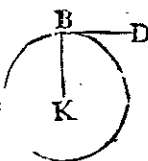


elle passe par B, ce n'est pas une autre ligne que AB. 3°. Si elle passe au dessous de B par le point D; puisqu'on a CB > CD, le point D sera dans le cercle*. Donc AD entre dans le cercle, & le coupe.

PROBLEME II.

111. Mener une ligne droite qui touche un cercle dans un point donné.

Le centre est K, le point donné B, je mène le rayon KB, & sur son extrémité B*, j'éleve perpendiculairement BD qui sera la tangente qu'il falloit faire*.

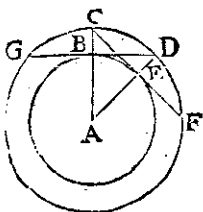


PROBLEME III.

113. D'un point donné hors d'un cercle, tirer une tangente. Eucl. III. Prop. 17.

Le cercle est BEB, le point donné est C, duquel je mène une ligne au centre A & au point B, où cette ligne coupe le cercle, par le Problème précédent je fais la tangente GD. Je décris un cercle concentrique par C, & de D où ce cercle est coupé par la tangente GD, je prens DF égale à DC, je joins C & F par une ligne qui sera la tangente.

Par la construction, la corde GD = CF, car



le rayon BK, qui n'est pas perpendiculaire sur cette ligne*; ainsi KE étant plus petite que le rayon BK, son extrémité E est au dedans du cercle. Par conséquent la ligne BF n'est pas hors du cercle, ainsi elle ne partage pas l'espace qui est entre lui & la tangente BD.

Mais entre la tangente AB & le cercle X, on peut faire passer une infinité de cercles; car ayant prolongé le rayon AC au de-là du centre C, & de E comme centre, & de l'intervalle EA ayant fait le cercle Z, la ligne AB sera tangente à ce cercle, lequel étant plus grand, sera au dehors du cercle X. Pareillement le cercle Y, dont le centre est P, sera encore entre AB & X, ainsi à l'infini. Par conséquent entre la tangente AB & le cercle X on peut faire passer une infinité de lignes circulaires.

COROLLAIRE.

110. Il est évident que l'espace compris entre la tangente & la circonférence d'un cercle se peut donc diviser en une infinité de parties.

THEOREME XVII.

111. D'un point hors le cercle on ne peut mener au cercle d'un même côté plus d'une tangente. Toute autre ligne le coupera, ou ne l'atteindra pas.

Soit A un point donné hors le cercle. La ligne AB le touche au point B. Je dis que de A vers B on ne peut point mener une autre tangente, que toute autre ligne le coupera, ou ne le touchera pas. Car 1°. Si elle est au delà de AB, elle ne touchera pas le cercle. 2°. Si

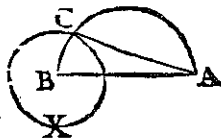
Ciiij

l'arc GC est égal à l'arc CD*, & l'arc CD à l'arc DF; ainsi les arcs GD & CF étant égaux, leurs cordes sont égales*.

Je mène de D au centre A la ligne AD qui sera perpendiculaire sur CF, puisque deux de ses points, sçavoir A & D sont également éloignés de ses extrémités: Or puisque les cordes DG & CF sont égales, les lignes AB & AE sont égales*. Donc le point E aussi bien que B est dans la circonférence du cercle BEB, ainsi la ligne CF étant perpendiculaire sur E, extrémité du rayon AE, elle touche le cercle*.

AVERTISSEMENT.

114. Ce Problème se pratique plus facilement ainsi: soit A le point donné, duquel il faut mener une tangente au cercle X; Après avoir tiré la ligne AB de A à B centre du cercle X, il faut décrire sur cette ligne le cercle ABC, & au point de section C mener AC qui sera la tangente qu'on cherchoit; ce que l'on ne peut pas démontrer en ce lieu.





ELEMENS DE GEOMETRIE, OU DE LA MESURE DE L'ETENDUE.



LIVRE SECOND.

De la seconde espece d'Etendue, qui est
la Largeur, Des Surfaces planes.

SECTION PREMIERE.

*Des Angles, ou Surfaces qui sont entre
deux lignes, qui se rencontrent
indirectement.*

AVERTISSEMENT.

En parlant ici des Surfaces, nous ne conside-
rons que les planes, c'est-à-dire celles qui sont

Elemens de Geomet. Liv. II. Sect. 1. 57
les plus courtes entre deux lignes droites, com-
mençans par celles qui sont renfermées entre
deux lignes, qui se rencontrent ou qui se cou-
pent dans un point.

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

L Angle est l'ouverture de deux lignes, 1.
qui se rencontrent indirectement.
Deux lignes qui se rencontrent di-
rectement, ne font qu'une même li-
gne.

DEFINITION II.

On appelle *sommet de l'Angle*, le point de ren- 2.
contre des deux lignes qui le
forment, comme le point B;
En ces deux lignes sont ap-
pelées les *côtés*, ou les *jam-
bes de l'Angle*.

Ainsi AB & BC sont les
côtés ou les jambes; lors-
qu'on marque un Angle
avec trois lettres comme ABC, celle du mi-
lieu B marque le sommet, & les deux autres A
& C, les côtés.

DEFINITION III.

On nomme *Angle plan*, celui qui est fait sur 3.
un plan.

DEFINITION IV.

Il y a trois sortes d'Angles considérez par rap- 4.
port à leurs côtés. Le *rectiligne*, le *curviligne*,
C v



port à leurs côtés. Le *rectiligne*, le *curviligne*,
C v

58 *Elemens de Geometrie.*

Le *mixtiligne*. Le *rectiligne* est celui qui est
formé par la rencontre de deux lignes droites,
comme C; le *curviligne* est celui qui est formé par
la rencontre de deux lignes courbes, comme A; le
mixtiligne est celui qui est formé par la rencon-
tre d'une ligne droite, & d'une courbe, com-
me B.

Propositions évidentes touchant les
Angles.

AVERTISSEMENT.

Ce sont des Corollaires de la Définition de
l'Angle.

PROPOSITION I.

5. Il est évident par la définition de l'Angle,
que sa grandeur ne dépend pas de la longueur
des lignes qui le forment, mais de leur ouver-
ture.

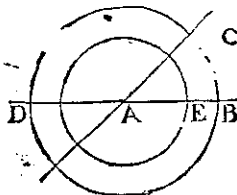
Qu'on prolonge
les lignes AB, &
AC, ou qu'on en
retranche, c'est tou-
jours la même ou-
verture; & la sur-
face qui est à cette
ouverture, c'est-à-
dire la plus près du sommet A, n'en est au-
gmentée, ni diminuée.

PROPOSITION II.

6. Un angle ne peut être augmenté, ni diminué,
que lorsqu'un de ses côtés, en tournant sur le
sommet comme sur un centre, s'éloigne ou s'ap-
proche de l'autre côté.

PROPOSITION III.

7. Un des côtés de l'angle en tournant & s'é-



Livre II. Section I.

59

loignant de l'autre côté, fait toujours cet angle
plus grand, jusques à ce que faisant une ligne
droite avec cet autre côté, il ne fait plus d'an-
gle.

PROPOSITION IV.

8. Un des côtés de l'angle ne peut faire en tour-
nant qu'un tour entier ou un cercle, après quoy
il se joint avec l'autre côté, & ne fait avec
lui qu'une seule ligne.

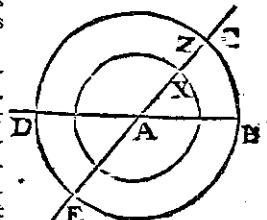
PROPOSITION V.

9. Les arcs ou portions de différens cercles décrits
par les différens points d'un des côtés de l'an-
gle sont d'un pareil nombre de degrés.

Le point X du côté AB ou AC décrit le cer-
cle XX, & le point Z le cercle ZZ; je dis que
les portions de ces deux cercles comprises entre
les rayons AB & AC sont d'un égal nombre de
degrés. Car puisqu'ils sont décrits en même
temps, si nous
divisons ce temps
en 360 momens,
autant que le cer-
cle a de degrés.
Dans le premier
moment où Z dé-
crit la 360^e par-
tie de toute sa
grandeur, il est
évident que X fe-
ra aussi une même partie du cercle qu'il dé-
crit. Car comme dans un même temps ces deux
cercles entiers s'achevent, aussi chaque partie
s'acheve à proportion.

PROPOSITION VI.

10. Du sommet d'un angle, comme d'un centre,
ayant fait un cercle, la portion de ce cercle
C v

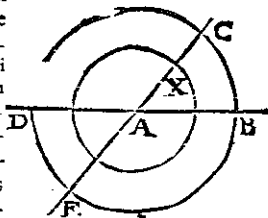


comprise entre les côtés de cet angle, est la mesure de cet angle.

PROPOSITION VII.

11. Le plus grand angle ne peut avoir pour sa mesure toute la demie circonférence.

Car lorsque le côté AC de l'angle BAC , a fait en tournant la demie circonférence BCD , que C est venu au point D , alors il ne fait plus qu'une ligne droite avec AB : Car puisqu'on suppose que BCD est la demie circonférence, il faut que $AD + AB$ soit le diamètre du cercle ; & qu'ainsi AD & AB ne soient qu'une ligne droite qui coupe le cercle en deux parties égales. Toute la circonférence du cercle est de trois cents soixante degrés, & par conséquent la demie circonférence de cent quatre-vingts degrés ; ainsi un angle ne peut jamais être de cent quatre-vingts degrés : car lorsque le côté AB est venu en D , AC & AB ne font qu'une ligne droite.



AVERTISSEMENT.

Que si AC passe au delà de DA , & vient en E , il se formera par ce moyen l'angle BAE , plus grand que 180 degrés, que quelques Geomètres nomment *Revers*, & qui a pour sa mesure l'arc $BCDE$, on ne considère pas ici cette sorte d'angle, mais seulement celui EAB mesuré par l'arc EB complément de l'arc $BCDE$ au cercle entier, ainsi qu'on le va expliquer.

Des différentes sortes d'angles par rapport à leur ouverture, ou par rapport au cercle.

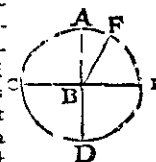
AVERTISSEMENT.

Il y a de trois sortes d'angles, par rapport à leur ouverture ou au cercle, qui sont, l'angle droit, l'angle aigu, & l'angle obtus.

DEFINITION I.

Un angle qui a pour sa mesure la moitié de la demie circonférence, ou le quart de l'entière circonférence du cercle, c'est-à-dire un arc de quatre-vingts-dix degrés, s'appelle Angle droit.

Ainsi supposant que l'arc AC est le quart de la circonférence $ACDE$, & par conséquent de nonante degrés, qui font le quart de trois cents soixante degrés que vaut tout le cercle, l'angle ABC qui a pour mesure cet arc AC , est droit.



DEFINITION II.

Un angle qui a pour sa mesure un arc de plus de nonante degrés, est dit obtus.

L'angle FBC est obtus, fig. preced. l'arc FC qui le mesure, étant de plus de nonante degrés, puisqu'il est plus grand que le quart du cercle AC .

DEFINITION III.

Un angle qui a pour sa mesure un arc qui a moins de nonante degrés, est appelé aigu.

L'angle FBE est aigu, ayant pour sa mesure l'arc FE , moindre que l'arc AE de nonante degrés, même figure. L'angle aigu, peut diminuer

à l'infini. Mais l'obtus ne peut augmenter que jusqu'à ce qu'il s'approche infiniment de deux angles droits.

DEFINITION IV.

15. L'angle aigu qui avec l'obtus vaut deux droits, est appelé le complément de l'angle obtus au demi cercle.

Ainsi, figure précédente, l'Angle FBE est le complément de l'angle obtus CBE .

THEOREME I.

16. Une ligne perpendiculaire sur une autre ligne, fait avec elle deux angles droits ; & si elle fait deux angles droits, elle est perpendiculaire.

1°. BA est perpendiculaire sur A milieu de CD ; d'où comme centre ayant décrit le demi cercle CBD , par la notion de la perpendiculaire, les lignes ou cordes BC &

* L. 1. n. 50. BD sont égales ; ainsi les arcs qu'elles soutien-

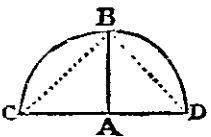
* L. 1. n. 36. nent sont égaux ; & partant puisque CBD est la moitié de la cir-

conférence, CD étant le diamètre du cercle, les arcs BC & BD en seront le quart ; donc les angles BAC & BAD ayant chacun pour mesure le quart de cercle, ils sont droits *.

2°. Il est facile de démontrer la seconde partie ; car si les deux angles CAB & DAB sont droits, les arcs BC & BD sont égaux, moitié chacun de la demie circonférence ; mais A & B étant ainsi en égale distance de C & de D , la ligne AB est perpendiculaire *.

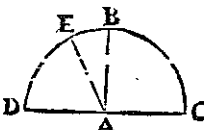
THEOREME II.

17. Toute ligne tombant sur une autre forme deux angles égaux à deux droits, Eucl. I. Prop. 13.



Soit la ligne EA , qui tombe sur la ligne DC , je dis que l'angle DAE , plus l'angle EAC valent deux droits. Car

du point A comme centre, ayant décrit le demi cercle DEC , & élevé la perpendiculaire AB , soit que l'angle DAE soit droit, obtus, ou aigu sui-



vant les Définitions*, il a pour sa mesure l'arc DE , & l'angle EAC a pour la sienne l'arc EC ; ces deux arcs font ensemble la demie circonférence du cercle égale à 180 degrés, ou à deux droits *.

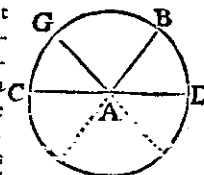
COROLLAIRE I.

Il est évident qu'une infinité de lignes tombant sur une autre ligne dans le même point, formeront des angles qui tous ensemble ne vaudront que deux droits.

COROLLAIRE II.

Ainsi deux ou plusieurs lignes se coupant en un point lors qu'elles sont prolongées, forment des angles qui tous ensemble ne vaudront que quatre angles droits.

Qu'on conçoive tant de lignes qu'on voudra, qui tombent sur CD au point A . De ce point comme centre ayant décrit un cercle, la mesure de tous ces angles sera la demie circonférence $CGBD$, qui est la mesure de deux angles droits. Ayant prolongé les côtés AB , & AG , les angles qu'ils feront



64 *Elémens de Geométrie.*

seront aussi égaux à deux droites : Donc tous les angles qui se peuvent faire au tour de A sont égaux à quatre droites.

THEOREME III.

20. Si à un point de quelque ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites, faisant avec elle de part & d'autre deux angles égaux à deux droites, ces deux lignes se rencontreront directement. Euclid. I. Prop. 14.

Les deux lignes droites AB & AC se rencontrent au point A de la ligne droite AE , & font de part & d'autre de cette ligne les deux angles EAB & EAC égaux à deux droites, il faut prouver qu'elles se rencontrent directement, c'est-à-dire qu'elles ne font ensemble qu'une seule ligne droite.

Soient $BAE + CAE$ égaux à deux droites. Si on dit que BA & AC ne font pas une seule ligne, & que BA étant prolongée va en D ; donc par le Théorème précédent les angles BAE & EAD vaudront deux droites; donc $EAD = EAC$; ce qui est absurde.

THEOREME IV.

21. Deux lignes qui se coupent font les angles opposés au sommet égaux. Eucl. I. Prop. 15.

Les deux lignes BD & CE se coupent au point A . Je dis que les angles DAC & BAE sont égaux, comme aussi DAE & CAB .

CAB & BAE valent deux droites; BAC & CAE valent aussi deux

* 5 n. 17. droits; donc $CAB + BAE = CAB + DAC$;



Livre II. Section I. 65

Orant de ces deux valeurs égales l'angle commun CAB , les restes DAC & BAE seront égaux. Par le même raisonnement, on fait voir que $CAB = DAE$.

DEFINITION IV.

Le Sinus d'un arc, est la moitié de la corde du double de cet arc, ou la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cet arc sur le rayon.

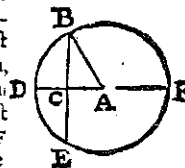
L'arc EB , Figure suivante, est le double de l'arc BD ; la ligne BC , moitié de BE corde de BDE est sinus tant de l'arc BD que de l'arc BF , son complément au demi cercle; ainsi les arcs DE & BF égaux ensemble au demi cercle ont un même sinus, & sont réciproquement complément l'un de l'autre au demi cercle.

DEFINITION V.

Le sinus d'un angle est le sinus de l'arc qui le mesure.

Ainsi BC qui est sinus de l'arc BD , mesure de l'angle BAD , est le sinus de cet angle. Lorsqu'un angle est obtus, son sinus est aussi le sinus de l'angle aigu, qui est son complément au demi cercle; ainsi BC est sinus de l'angle obtus BAF aussi-bien que de l'angle aigu BAD . Mais dans la suite l'on ne considère que les sinus des angles aigus, s'il n'est autrement expliqué.

BC étant le sinus de l'angle BAD , on appelle CD compris entre BC & l'arc BD , le sinus verse de cet arc BD ; donc BC est le sinus qu'on nomme sinus droit, ou simplement sinus, CD étant toujours distingué par sinus verse. La ligne DE



66 *Elémens de Geométrie.*

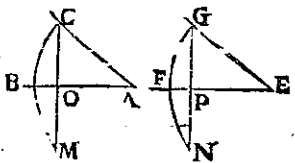
qui touche l'arc ED , & qui est terminée par AE & AD qui comprennent le même arc, se nomme tangente de cet arc & de l'angle BAD ; la ligne AE s'appelle sécante de cet angle & de cet arc. On a supputé les rapports ou raisons qu'ont tous les différens sinus avec le rayon le supposant de tant de parties, par exemple de 10000. Il y a des Tables de toutes ces supputations, dont on retire de grands avantages, qui sont expliquées dans l'explication & l'usage de ces Tables.

THEOREME V.

22. Les angles égaux ont des sinus égaux; & si les sinus sont égaux, les angles sont égaux.

1°. Les angles CAB & GEF sont égaux. Ainsi de leur sommet A & E , & d'un intervalle égal, ayant fait les arcs CB & GF qui mesurent ces angles, ces arcs seront égaux. * Je les continue de sorte que $CB = BM$ & $GF = FN$: donc puis-

* L. 1. n. que les arcs égaux ont des cordes égales, 31. $CM = GN$; & par conséquent CO & GP les moitiés de ces cordes sont égales; or ces moitiés sont les sinus des angles CAB & GEF , suivant la Définition; donc les sinus de ces angles sont égaux. * 5 n. 12. Si les sinus CO & GP sont égaux, $CM = GN$, & partant $CBM = GFN$; donc les angles CAB & GEF étant mesurés par les moitiés de ces arcs égaux, ils sont égaux.

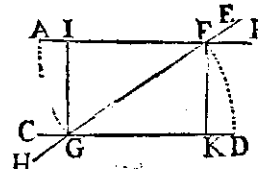


Livre II. Section I. 67

THEOREME VI.

Si une ligne coupe obliquement deux parallèles, elle forme huit angles, dont il y en a quatre d'alternes intérieurs, & quatre extérieurs. Je dis que les alternes extérieurs, ou intérieurs sont égaux. Eucl. I. Prop. 29.

Il faut prouver que $AFE = HGD$, & que $AFG = FGD$. Les deux premiers sont alternes extérieurs, & les deux autres alternes intérieurs.



DEMONSTRATION

Je mène entre les deux parallèles les perpendiculaires FK & GI , qui sont égales*. D'un même intervalle GF , & des centres F & G je fais les arcs AG & DF , mesure des angles AFG & FGD . Les sinus de ces arcs ou angles sont les perpendiculaires égales GI & FK . Ces angles sont donc égaux*, & AFE & AFG valent deux droits*, comme FGD & DGH ; ainsi $AFE + AFG = FGD + DGH$. Orant de part & d'autre les angles égaux AFG & FGD , restera $AFE = DGH$.

AUTRE DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit que AB tombe toujours parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle arrive à CD , & que le point F s'unisse avec le point G ; il est clair qu'elle la couvrira parfaitement. Alors l'angle AFE deviendra CGF ; mais $CGF = HGD$. Il en est de même des autres.

THEOREME VII.

Si une ligne joignant deux autres lignes fait

les angles alternes égaux, ces deux lignes sont parallèles. Eucl. I. Prop. 27.

Si AFG & FGD (même figure) sont égaux, leurs sinus GI & FK sont égaux*, GI est perpendiculaire sur AB , & FK sur CD , par la Définition des sinus* ; partant

* L. 1. n. les deux lignes AB & CD *, sont parallèles. 71.

THEOREME VIII.

27. Une ligne coupant deux ou plusieurs parallèles, tous les angles qu'elle fait avec elles d'une même part, sont égaux.

Il faut prouver que $GAY = ABX = BCZ$, que $YAB = XBC = ZCH$, & qu'il en est de même de l'autre part, que $GAF = ABE = BCI$, & $FAB = EBC = ICH$.

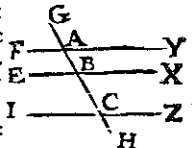
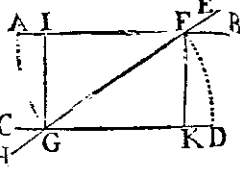
* § n. 25. 1°. $ZCB = CBE^*$, &

* § n. 21. $CBE = ABX^*$; Donc $ZCB = CBE = XBA$. Ainsi selon l'Axiome que deux grandeurs égales à une troisième, sont égales: $ZCB = XBA$. On démontrera de même que $GAY = ABX$, & le reste.

THEOREME IX.

28. Si une ligne tombant sur plusieurs autres lignes fait avec elles des angles égaux pris du même sens, ces lignes seront parallèles. Eucl. I. Prop. 28.

$GAY + YAB$, (fig. précéd.) valent deux droits, comme aussi $GBX + GBE^*$. Orant

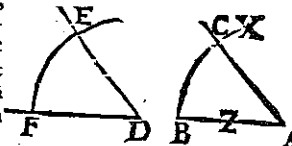


donc de ces deux tous égaux les angles GAY & GBX qu'on suppose égaux, les angles alternes YAB & GBE resteront égaux. Donc* les lignes Y & X sont parallèles. On démontrera de la même manière que Y & Z , ou X & Z sont parallèles. * § n. 26.

PROBLEME I.

D'un point donné sur une ligne droite, décrire un angle rectiligne égal à un angle donné. Eucl. I. Prop. 21.

Du point donné A sur la droite Z , il faut décrire l'angle CAB égal à l'angle EDF . Du point D , comme centre, je fais l'arc EF ; après du point donné A comme centre, & de l'intervalle DE , je fais le cercle X , dont je prends l'arc BC égal à l'arc EF , au moyen des cordes égales EF , BC^* ; ensuite menant de C au point A une ligne droite, l'angle CAB fera celui que l'on proposoit de faire égal à EDF ; car ils ont pour mesure des arcs égaux; ainsi ils sont égaux*.



PROBLEME II.

D'un point donné hors d'une ligne mener une ligne droite sur une autre, qui fasse avec elle un angle égal à un angle donné. 30.

Soit donné le point D duquel il faut mener une ligne droite sur Z , qui fasse avec elle un angle égal à X .

Sur Z dans quelque point que ce soit pris à discrétion, j'éleve une ligne telle que AC , qui

par le Problème précédent fasse l'angle CAB égal à l'angle donné X . Si cette ligne passe par le point D , le Problème est achevé.

Si elle n'y passe pas, je mène par D une ligne parallèle à CA^* , donc

* L. 1. n. 72. * § n. 27. $DEB = CAB = X^*$. Ainsi $DEB = X$.

PROBLEME III.

31. Couper un angle en deux parties égales. Eucl. I. Prop. 9.

L'angle donné est BAC ; ayant fait ses deux côtés AB & AC égaux, il faut les joindre par la ligne BC , sur laquelle, & du point A ayant mené une perpendiculaire

* L. 1. n. 40. AG^* , $BD = DC^*$; partant concevant que l'arc

* L. 1. n. 42. BGC est partie d'un cercle dont A est le centre, AB & AC les rayons, & BC la corde coupée en deux également par la

dite perpendiculaire AG , l'arc BC le fera aussi au point G^* ; ainsi l'arc BG sera égal à l'arc GC ; & partant les angles BAG & GAC qu'ils mesurent* seront égaux. Donc l'angle BAC est coupé en deux également.

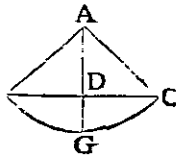
* L. 1. n. 34. qu'ils mesurent* seront égaux. Donc l'angle BAC est coupé en deux également.

* § n. 10. qu'ils mesurent* seront égaux. Donc l'angle BAC est coupé en deux également.

THEOREME X.

32. L'angle mixte compris entre le cercle & sa tangente, est plus petit qu'aucun angle rectiligne. Eucl. III. Prop. 16.

On ne peut mener une ligne droite entre le



cercle & la tangente*. On ne peut donc diviser l'angle mixte que fait le cercle avec la tangente; ainsi cet angle est plus petit qu'aucun angle rectiligne. * L. 1. n. 109.

AVERTISSEMENT.

C'a été une grande dispute, si l'angle étoit une quantité qui se pût diviser; & ce qui en a fait douter, c'est la mauvaise définition qu'Euclide en donne. L'idée que nous en avons donnée en le définissant: l'ouverture des deux lignes qui se rencontrent indirectement, renferme un espace, & par conséquent une grandeur divisible.

SECTION II.

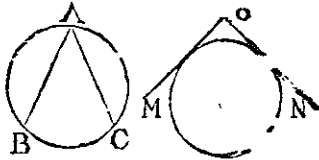
De la comparaison des angles, & de leur différente position au regard d'un cercle.

AVERTISSEMENT.

La mesure d'un angle, comme nous avons dit est l'arc du cercle qui a pour centre le sommet dudit angle, & pour termes les côtés qui le forment. Or le sommet d'un angle peut se trouver dans un cercle au centre, ou hors la circonférence; & en tous ces cas, quoique ce soit toujours le même angle, il donne lieu à différentes considérations.

DEFINITION I.

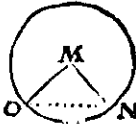
L'Angle dont le sommet est dans la circonférence du cercle, & les côtés dans le cer-



Euclide appelle Angle inscrit, celui qui est dans la circonférence, & circonscrit celui qui est hors le cercle, & dont les côtes touchent le cercle. BAC est un angle inscrit, MON est circonscrit.

DEFINITION II.

34. L'angle au centre est l'angle dont le sommet est au centre du cercle, & dont les côtés sont rayons, comme OMN.

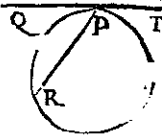


DEFINITION III.

35. Le segment d'un cercle est une partie de ce même cercle comprise entre une corde, comme dans la figure suivante, PR forment un grand & un petit segment.

DEFINITION IV.

36. L'Angle formé par une tangente & une corde ou sécante, tirée du point d'atouchement, est nommé Angle du segment, comme QPR ou RPT.

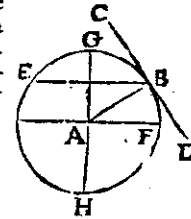


THEOREME

L'angle du segment a pour mesure la moitié de l'arc qu'il comprend entre sa corde. Euclid. III. 37

Prop. 32.
Soit l'angle CBE, formé par la tangente CB, & par la corde BE, il faut prouver qu'il a pour mesure la moitié de l'arc BE.

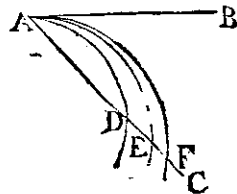
Soit mené le diamètre GH coupant l'arc & la corde EB en deux parties égales; & soit encore tiré le diamètre AF parallèle à la corde EB, & le rayon AB passant par le point d'atouchement, il formera l'angle au centre GAB, qui a pour mesure l'arc GB. Il n'y a donc qu'à prouver que l'angle CBE lui est égal: ce qui est évident; car l'angle CBA est droit aussi bien que l'angle GAF*: mais l'angle EBA est égal à l'angle BAF, parce qu'ils sont alternes*. Donc étant ces deux angles égaux, savoir FAB de GAF qui est droit, & ABE de l'angle droit ABC, les restes BAG & CBE seront égaux. Or BAG a pour mesure l'arc BG; donc CBE qui lui est égal, a pour sa mesure un arc égal à BG, moitié de BGE; ce qu'il falloit prouver.



On prouvera par un semblable raisonnement, que l'autre angle DBE a pour sa mesure l'arc BH, moitié de l'arc BHE, compris dans ledit angle entre la tangente BD & la corde BE, en ajoutant aux angles droits DBA, FAH, les angles alternes égaux EBA, BAF, au lieu que pour la précédente démonstration on les en a retranchés.

D

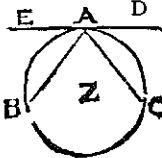
38. Il est évident que, si l'on fait passer entre la tangente & la corde, une infinité de portions de circonférences de cercles, coupées par cette corde prolongée, elles seront toutes d'un égal nombre de degrés, puisqu'elles serviront de mesure à un même angle. Car l'angle BAC ayant pour mesure la moitié de AD, de AE, de AF, &c. s'il étoit par exemple de dix degrés, toutes ces portions seroient chacune de vingt degrés.



THEOREME II.

39. L'Angle à la circonférence a pour mesure, la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé.

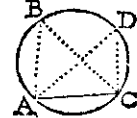
Soit l'angle BAC. Il faut prouver qu'il a pour mesure la moitié de l'arc BC. Soit mené par le point de A la touchante ED; elle formera deux nouveaux angles EAB, & DAC, qui par le précédent Theorème auront pour mesure la moitié des arcs AB, AC; mais les trois angles qui se forment au point A



Z n. 18. sont égaux à deux droits; donc ils ont pour mesure la moitié de la circonférence du cercle*; donc les moitiés des arcs AB & AC étant mesures des angles BAE & CAD, la moitié du reste du cercle, c'est-à-dire la moitié de BC, sera la mesure de BAC.

Il est évident que tous les angles à la circonférence d'un cercle, & qui s'appuyent sur le même arc, sont égaux. Eucl. III. Prop. 21.

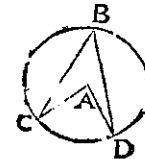
Ainsi les angles ABC & ADC, en quelque endroit de la circonférence ABDC qu'ils soient, sont tous égaux; car ils ont tous pour leur mesure la moitié de l'arc AC, sur lequel ils sont appuyés: partant ayant une même mesure, ils sont égaux.



COROLLAIRE II.

L'Angle du centre est double de l'angle à la circonférence qui s'appuie sur le même arc. Eucl. III. Prop. 20.

Soit l'angle CAD au centre, & CBD à la circonférence; il est clair que ce premier qui a pour mesure tout l'arc CD est double de CBD, qui n'en a que la moitié.



COROLLAIRE III.

Dans des cercles égaux, les angles égaux (soit qu'ils soient au centre ou à la circonférence,) sont appuyés sur les arcs égaux. Eucl. III. Prop. 26.

Si cela n'étoit pas, ces angles ayant des mesures inégales, ils seroient inégaux; & on les suppose égaux.

COROLLAIRE IV.

Dans des cercles égaux, les angles (soit au centre ou à la circonférence,) qui sont appuyés sur des arcs égaux, sont égaux. Euclid. III. Prop. 27.

Dij

76 *Elémens de Geometrie.*

Ils ont des mesures égales ; ils sont donc égaux.

COROLLAIRE V.

44. L'angle à la circonférence dans le demi-cercle, ou qui a pour base le diamètre du cercle, est droit. Eucl. III. Prop. 31.

Car il est appuyé sur la demie circonférence, dont la moitié, qui est de nonante degrez, est la mesure de l'angle droit *.

COROLLAIRE VI.

45. L'angle dans le grand segment est aigu. Eucl. III. Prop. 31.

Car il est appuyé sur un arc moindre que la demie circonférence ; ainsi la moitié de cet arc, qui est sa mesure, est moins de nonante degrez ; partant cet angle est aigu *.

COROLLAIRE VII.

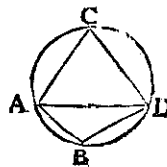
46. L'angle dans le petit segment est obtus. Eucl. III. Prop. 31.

Car il est appuyé sur un arc plus grand que la demie circonférence, dont la moitié qui est la mesure, est de plus de nonante degrez : partant cet angle est obtus *.

COROLLAIRE VIII.

47. Les angles à la circonférence étant oppo-
sés & s'appuyant sur les mêmes points, sont égaux à deux droits.

Soient les angles ACD , & ABD ; il est clair qu'ils ont pour mesure la moitié des arcs ABD , & ACD : & par conséquent la moitié de toute la circonférence, qui vaut deux fois nonante degrez ; ainsi ces deux angles ayant pour



Livre II. Section II.

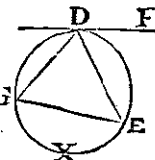
77 mesure ensemble la valeur de deux angles droits, sont égaux à deux droits.

PROBLEME I.

Couper un segment dans le cercle, qui soit capable d'un angle donné. Eucl. III. Prop. 34.

Soit le cercle X duquel il faut retrancher un segment capable de contenir un angle égal à l'angle donné A , ou ce qui est le même, que l'angle qui sera appuyé sur l'autre segment restant soit égal à l'angle donné A .

Je mène DF qui touche le cercle X , & sur DF je mène DE une seconde ligne qui fasse avec DF un angle égal à l'angle A *, tout angle inscrit dans le cercle X qui est appuyé sur DE , a pour sa mesure la moitié de l'arc ED *. Or la moitié de cet arc est la mesure de l'angle EDF , égal à A * ; donc on a fait ce qui étoit proposé : c'est-à-dire, que tout angle inscrit dans le cercle X , dont la base sera l'arc DE , en quelque part de la circonférence du cercle que soit son sommet, il sera égal à l'angle A .



PROBLEME II.

Trouver le cercle dont le segment terminé par une ligne donnée, soit capable d'un angle égal à un angle donné. Euclid. III. Prop. 33.

Sur BD soit fait l'angle FBD égal à l'angle K * au point B soit élevée BC perpendiculaire sur BF *, & sur le milieu de BD une autre perpendiculaire EC , qui coupera BC au point C ; d'où ayant décrit un cercle de l'in-

D iij

78 *Elémens de Geometrie.*

tervalle BC *, on aura le cercle que l'on cherchoit ; ce qu'il faut prouver.

BF perpendiculaire sur le rayon BC , touche ce cercle *.

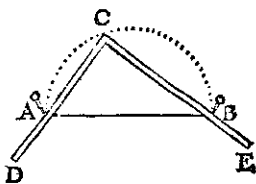
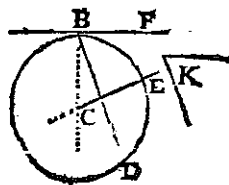
L'angle FBD a pour sa mesure un arc é-

gal à la moitié de l'arc BD *, tous les angles inscrits dans ce cercle & appuyés sur BD sont égaux, & ont pour leur mesure la moitié de l'arc BD * ils sont donc égaux à l'angle FBD ; & partant à l'angle K , à qui on a fait égal FBD .

AVERTISSEMENT.

De ce que l'on a prouvé que tous les angles appuyés sur le même arc sont égaux, * on apprend le moyen de faire une portion de cercle de tant de degrez que l'on voudra, sans compas, ou sans avoir le centre de ce cercle, ce qui est d'une grande utilité.

AB est la corde d'un arc proposé, ou de la portion d'un cercle, laquelle il faut tracer. On veut que cet arc soit de dix degrez, ainsi l'angle inscrit dans cet arc, aura pour sa mesure la moitié de 350 degrez, ou de trois cents soixante degrez moins dix, c'est-à-dire, que cet angle sera de cent soixante-quinze degrez. Je dispose donc les deux règles droites CD & CE , de sorte que l'an-



Livre II. Section II.

79 $gle DCE$ soit de cent soixante-quinze degrez, & je les joins ensemble. Je plante deux clous à l'extrémité de la corde A & B , après quoi tournant le point C en sorte que les deux règles CD & CE passent toujours les clous A & B ; je décrirai la ligne circulaire ACB , qui sera l'arc que l'on cherchoit.

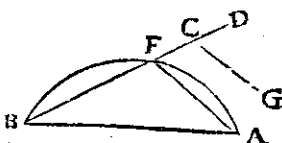
par ce moyen on peut décrire la portion d'un cercle, quelque grandeur que puisse avoir ce cercle. Cette operation est mécanique ; en voici une qui est géométrique.

PROBLEME III.

La corde d'un segment de cercle étant donnée avec l'angle dans ce segment, trouver les points par où passe l'arc dont la corde est donnée, sans connoître ni chercher le centre du cercle, dont cet arc est partie.

La corde donnée du segment qu'on veut décrire, est AB . Je tire la ligne BD , faisant quel-qu'angle avec BA . Ensuite dans un point de cette ligne pris à discretion, je fais l'angle GCF égal à l'angle donné ; ensuite je mène par A une ligne parallèle à GC ; ainsi l'angle AFB est égal à GCF *, & à l'angle donné : partant l'arc proposé, selon ce que vient d'être démontré, passe par F ; par une semblable operation, je trouve les autres points par où passe cet arc, sans qu'il soit nécessaire de chercher le centre du cercle dont cet arc fait partie.

D iij



THEOREME III.

61. L'angle dont le sommet est dans la circonférence, fait par une corde & par une sécante prolongée hors le cercle, a pour sa mesure la moitié de l'arc de la corde, plus la moitié de l'arc de la sécante.

Soit AB une corde, & CD une sécante prolongée hors le cercle, dont une partie est la corde de l'arc CA . Il faut prouver que l'angle BAD formé par la corde AB , & la sécante CD , a pour sa mesure la moitié de l'arc AB , plus la moitié de l'arc AC .

Les deux angles CAB & BAD font ensemble

* 5 n. 17. égaux à deux droits ; ils ont donc pour leur

* 5 n. 12. mesure la moitié de la circonférence du cercle ; mais l'angle CAB a pour sa mesure la moitié de

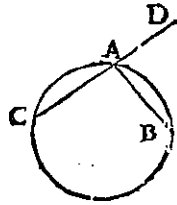
* 7 n. 39. l'arc CB ; l'angle BAD restant aura donc pour sa mesure les moitiés des arcs restans CA , AB qui avec l'arc CB font le cercle entier.

THEOREME IV.

52. L'angle formé par la section de deux cordes qui se coupent au dedans d'un cercle, a pour sa mesure la somme des moitiés des arcs sur lesquels il s'appuie.

Soit B le le sommet de l'angle dans le cercle. Il faut prouver qu'il a pour sa mesure la moitié des arcs AE & DC . Si B étoit le centre, cela seroit évident. Que le point G soit le centre, je mène par G des parallèles aux côtés de l'angle CBD . Cet angle est égal à l'angle

* 5 n. 17. IGH , dont la mesure est l'arc HI . Il n'est



donc question que de prouver que l'arc HI est la moitié des arcs DC & AE .

Les arcs HI & FL sont égaux*. $DI = AL$ & $CH = EF$ *. Or $HI = AE + AL + EF$. Comme aussi $HI = DC - CH$ (ou EF) - DI (ou AL),

c'est - à - dire, $HI = DC - EF - AL$. Par conséquent $HI + HI = AE + AL + EF + DC - EF - AL$. Or $AL + EF - AL - EF = \text{zero}$. Donc $HI + HI$ (ou $2 HI$) $= AE + DC$. Par conséquent l'arc HI est aussi la moitié des arcs DC & AE , qui font ainsi la mesure de l'angle CBD égal à IGH , dont l'arc HI est la mesure.

THEOREME V.

L'angle dont le sommet est hors du cercle, mais dont les côtés le traversent, & s'appuient sur la circonférence, a pour sa mesure la moitié de l'arc concave moins la moitié de l'arc convexe.

Soit l'angle BAC . Je dis qu'il a pour mesure la moitié de l'arc BC , moins la moitié de DF .

Je mène par D une parallèle à AC * ; ainsi l'angle BAC est égal à BDE *, qui a pour sa mesure la moitié de l'arc BE *. Les arcs CE & DF sont égaux*. Or $BE = BC - CE$; donc $BE = BC - DF$. Donc la moitié de BE est égale à la moitié



* 5 n. 17.
* 7 n. 42.
* L. 1. 76.
86.

* L. 1. 76.
72.
* 5 n. 17.
* 5 n. 39.
* L. 1. 76.
86.

de $BC - DF$; ainsi puisque l'angle BAC a pour sa mesure la moitié de BE ; il a pour mesure la moitié de l'arc concave BC , sur lequel il est appuyé, moins la moitié de l'arc convexe DF ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VI.

54. L'angle dont les côtés touchent le cercle, a pour mesure la moitié de l'arc concave moins la moitié de l'arc convexe.

Soit l'angle BAC , les côtés AB , AC touchant le cercle. Il faut prouver qu'il a pour mesure la moitié de BEC moins la moitié de BEC .

Je mène par C un des points d'attouchement CE parallèle à AB *, l'angle

* L. 1. 76. BAC est égal à l'an-

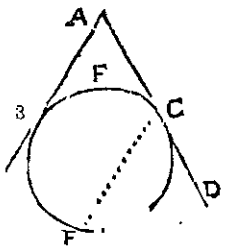
* 5 n. 17. g'e DCE *. Or DCE a pour sa mesure la

* 5 n. 37. moitié de l'arc CE *, qui l'est aussi de

CAB ; partant reste à prouver que l'arc $BEC - BFC$ est égal à l'arc CE . 1°. L'arc $BEC - BE$

* L. 1. 76. est égal à l'arc EC . 2°. Puisque * l'arc BC est

20. égal à l'arc BE : donc $BEC - BFC = EC$; ce qu'il falloit prouver.



SECTION III.

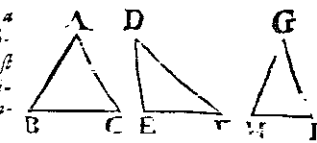
Des Triangles.

DEFINITION I.

Le triangle est une surface bornée par trois lignes, il y en a de six especes : trois par rapport aux côtés, & trois par rapport aux angles.

DEFINITION II.

Le triangle qui a ses trois côtés égaux est appelé équilatéral comme ABC .



DEFINITION III.

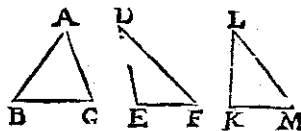
Le triangle qui a seulement deux côtés égaux est nommé isocèle, comme HGI , fig. précéd.

DEFINITION IV.

Le triangle dont les côtés sont inégaux est nommé Scalène, comme DEF , fig. précédente.

DEFINITION V.

Le triangle qui a un angle droit, est appelé Rectangle, comme LKM .



DEFINITION VI.

Le triangle qui a un angle obtus, est nommé

Dvj

84 *Elémens de Geometrie.*
Obtus-angle, ou Amblygone, comme DEF.

DEFINITION VII.

61. Le triangle qui a tous ses angles aigus est appelé *Acutangle*, ou *Oxigone*: comme ABC.

DEFINITION VIII.

62. Un triangle est dit *inscrit* dans le cercle lorsque le sommet de ses trois angles est dans la circonférence de ce cercle, & alors ce cercle est dit *Circonscrit* à ce triangle.

DEFINITION IX.

63. Un triangle est dit *circonscrit* à un cercle lorsque ses angles sont hors du cercle, & que ses côtés touchent ce cercle; & alors ce cercle est dit *inscrit* dans ce triangle.

DEFINITION X.

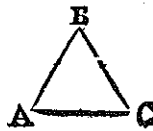
64. Deux triangles sont dits *équiangles*, lorsque les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun.

DEFINITION XI.

65. Deux triangles sont dits *entièrement égaux*, lorsqu'étant équiangles, les côtés qui comprennent les angles de l'un sont égaux aux côtés qui comprennent les angles de l'autre chacun à chacun.

THEOREME I.

66. Dans un triangle deux de ses côtés, quels qu'ils soient, sont plus grands que le troisième. Eucl. I. Prop. 20.
 $AB + BC$ sont plus grands que AC : On a dit



Livre II. Section III. 85

qu'entre deux points A & C on ne peut concevoir aucune ligne plus courte que la droite AC*.

COROLLAIRE.

Ainsi on ne peut faire un triangle de trois lignes données, si deux de ces lignes ne sont plus grandes que la troisième. Eucl. I. Prop. 22.

PROBLEME I.

Trois lignes étant données en former un triangle. Eucl. I. Prop. 1. & 22.

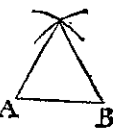
Soient les trois lignes données A, B, C. D'une des extrémités de ces trois lignes, par exemple de C, je fais un arc de l'intervalle de A; & de l'autre extrémité, je fais un autre arc de l'intervalle de B, ensuite ayant mené du point où ces deux arcs se coupent, les deux lignes A & B aux extrémités de C, le triangle sera fait, dont les côtés par la construction seront égaux aux lignes données.



PROBLEME II.

Sur une ligne donnée décrire un triangle équilatéral.

Soit la ligne donnée AB. Il faut de l'ouverture de cette ligne, & de ses extrémités A & B comme centres, décrire deux arcs; du point où ils se couperont, menant des lignes A par A & par B, on aura un triangle équilatéral.



PROBLEME III.

Circoncrire un cercle à un triangle donné. Eucl. IV. Prop. 1.

86 *Elémens de Geometrie.*

C'est la même chose que de faire passer un cercle par trois points donnés*.

COROLLAIRE.

71. Il est évident que pour trouver un point également éloigné de trois points donnés, qui ne sont pas sur une même ligne, il faut décrire par ces trois points un cercle, le centre de ce cercle sera le point qu'on cherche.

DEFINITION XII.

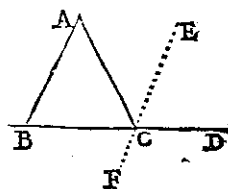
72. L'on appelle angle extérieur de tout triangle, l'angle formé par le prolongement d'un des côtés.

Dans le triangle BAC figure suivante, ayant prolongé BC en D, l'angle ACD est nommé l'angle extérieur, considéré comme opposé aux deux intérieurs CAB & ABC.

THEOREME II.

73. L'angle extérieur d'un triangle est égal aux deux intérieurs opposés. Eucl. I. Prop. 32.

Je mène CE parallèlement à AB, & je partage ainsi l'angle extérieur ACD en deux angles ACE & ECD, qu'il faut prouver égaux aux deux intérieurs opposés, ce qui est évident, car $ABC = ECD$, & $BAC = ACE$.



COROLLAIRE.

74. Donc l'angle extérieur est plus grand qu'aucun des intérieurs opposés. Eucl. I. Prop. 16.

Il faut bien que cela soit, puisque cet angle extérieur est égal aux deux intérieurs opposés, ainsi qu'on vient de le démontrer.

Livre II. Section III. 87

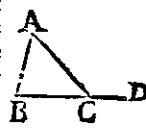
THEOREME III.

Les trois angles d'un triangle sont ensemble égaux à deux angles droits. Eucl. I. Prop. 32.

Pour le démontrer, je circonscris un cercle au triangle donné*. Ses trois angles ont pour mesure la moitié des arcs qui les soutiennent*; ainsi ils ont pour mesure la moitié de la circonférence du cercle, c'est-à-dire 180 degrés, valeur de deux angles droits*.

AUTRE DEMONSTRATION.

Les deux angles ACB & ACD valent deux angles droits*; mais ACD angle extérieur, est égal aux deux opposés intérieurs ABC & CAB*; donc ces deux angles avec ABC sont égaux à deux angles droits,



COROLLAIRE I.

Donc connaissant les deux angles d'un triangle, on connaît le troisième. Car les trois valent 180 degrés; si deux valent 160, le troisième doit valoir 20.

COROLLAIRE II.

Les trois angles d'un triangle peuvent être aigus.

Car on peut partager cent quatre-vingt degrés, valeur des trois angles d'un triangle, en trois parties, dont chacune sera moindre que la valeur d'un angle obtus ou d'un angle droit, & qui toutes trois ne feront que cent quatre-vingt degrés valeur de deux angles droits.

COROLLAIRE III.

Dans un triangle il ne peut y avoir plus d'un angle droit, ni plus d'un obtus.

Si deux des angles étoient droits, les trois ensemble vaudroient plus de deux droits. Si deux

étoient obtus, l'angle obtus étant plus grand que le droit, les trois ensemble vaudroient aussi davantage que deux droits ; ce qui est contre le Théorème précédent.

COROLLAIRE IV.

79. Deux angles d'un triangle sont donc nécessairement aigus, ou plus petits que deux droits, Eucl. I. Prop. 17.

Cela est évident, puisqu'un triangle ne peut avoir deux de ses angles, ni droits ni obtus.

COROLLAIRE V.

80. Si dans deux triangles, deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, ils sont équiangles, c'est à-dire que le troisième angle de l'un est égal au troisième angle de l'autre.

Car les trois angles de chacun de ces triangles sont égaux à deux droits ; ainsi puisque de deux tous égaux, ôtant des parties égales, les restes sont égaux, il faut qu'après avoir ôté de chaque triangle les deux premiers angles de l'un, égaux aux deux premiers de l'autre, le troisième angle de l'un qui reste, soit égal au troisième angle de l'autre.

COROLLAIRE VI.

81. Si un triangle a un de ses angles plus grand que celui d'un autre triangle, les deux autres ensemble seront plus petits que les deux autres de celui-là.

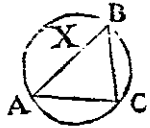
Car ôtant de la valeur de deux droits une plus grande partie, ce qui reste doit être plus petit, que lorsqu'on ôte moins.

THEOREME IV.

82. Le triangle scalène à ses trois angles inégaux.

Soit ABC un triangle scalène. Je lui circonscris le cercle X , puisque les trois côtés AB ,

AC , BC sont inégaux, les trois arcs dont ils sont les cordes sont inégaux*, par conséquent les trois angles du triangle ABC , qui ont pour mesure la moitié de ces arcs*, sont inégaux.



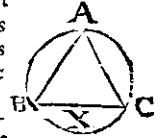
* L. I. n. 32.

* S. n. 39.

THEOREME V.

Dans le triangle isocèle les angles sur la base sont égaux ; & si les angles sur la base sont égaux, le triangle est isocèle. Eucl. I. Prop. 5.

Soit ABC un triangle isocèle. Je lui circonscris le cercle X , puisque $AB = AC$, les arcs que ces côtés soutiennent sont égaux. Or la moitié de ces arcs égaux est la mesure des angles ABC & ACB ; donc ces angles sont égaux.



* S. n. 39.

L'autre partie de cette proposition est facile. Car si les deux angles ABC & ACB sont égaux, les arcs AB & AC , ou leur cordes sont égales ; ainsi le triangle ABC est isocèle.

COROLLAIRE I.

Aucun des angles de la base d'un isocèle ne peut être droit ni obtus.

Car si l'un étoit droit, l'autre le seroit aussi ; ainsi les trois angles vaudroient plus que deux droits ; ce qui ne peut être*. Et si l'un étoit obtus, l'autre le seroit ; ainsi deux seuls angles de ce triangle vaudroient plus que deux angles droits ; ce qui est encore plus impossible.

COROLLAIRE II.

Si deux triangles isocèles ont l'angle de leur sommet égal, ou un des deux de leur base, ils les ont tous.

Car 1°. Si cet angle égal est sur la base, il, autont le second angle de la base égal, partant

2°. Si c'est l'angle du sommet, la valeur des deux angles sur la base de chaque triangle sera la même ; or chacun sera la moitié de cette même somme, ainsi ils seront égaux.

THEOREME VI.

86. Les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux.

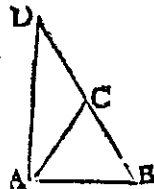
Ayant décrit un cercle à l'entour du triangle équilatéral, les arcs dont les côtés de ce triangle sont les cordes, sont par conséquent égaux*, & leurs moitiés égales. Or ces moitiés sont la mesure des angles du triangle*. Donc tous ces angles sont égaux.

COROLLAIRE.

87. Ainsi chaque angle d'un triangle équilatéral est aigu, & toujours de soixante degrés.

AVERTISSEMENT.

88. De ce Corollaire on tire un moyen d'élever autrement qu'il a été enseigné, une perpendiculaire sur le point donné d'une ligne, par exemple sur le point A de la ligne AB . Je fais le triangle équilatéral ABC , en suite je prolonge BC jusqu'en D , de sorte que $CD = CB$, je mène une ligne droite de D à A , qui sera perpendiculaire, si l'angle BAD est droit. Or je démontre qu'il l'est : car l'angle ACB est égal aux deux opposés D & A qui sont égaux*, puis-



* S. n. 73.

* S. n. 83.

que $CD = CA$; ainsi ACB étant de 60 degrés, DAC est de 30 ; CAB est de 60 ; partant

l'angle BAD est de 60 + 30 ou de 90 degrés, valeur de l'angle droit.

THEOREME VII.

Dans un triangle le plus grand côté soutient le plus grand angle, & le plus grand angle est soutenu par le plus grand côté. Eucl. I. Prop. 18. & 19.

Ayant décrit un cercle à l'entour d'un triangle, le plus grand côté de ce triangle soutient le plus grand arc*. Or la moitié de cet arc mesure l'angle opposé à ce plus grand côté ; donc cet angle qui est mesuré par la moitié du plus grand arc, est le plus grand.

Dans un triangle inscrit dans un cercle, le plus grand angle est mesuré par la moitié du plus grand arc. Or ce plus grand arc à la plus grande corde* ; ainsi le côté opposé à cet angle est le plus grand.

THEOREME VIII.

Dans un triangle, si deux de ses angles sont égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux. Eucl. I. Prop. 6.

Ayant inscrit ce triangle dans un cercle, ces angles égaux seront soutenus par des arcs égaux, qui ont des cordes égales, côtés opposés à ces angles.

THEOREME IX.

Dans un triangle, la moitié de chaque côté est le sinus de l'angle opposé.

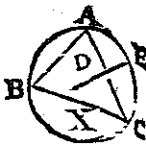
Le triangle ABC soit inscrit dans le cercle X , il faut démontrer que AD , moitié de AC , est le sinus de l'angle ABC .

L'arc AE , moitié de l'arc AC , est la mesure de l'angle



92 *Elémens de Géométrie.*

* 3 n. 39. ABC^* ; ainsi l'arc AC est double de l'arc ; qui est la mesure de l'angle ABC : Donc AD moitié de la corde de l'arc AC , est le sinus de l'arc AE^* , & celui de l'angle ABC .



On démontre par la même voye que la moitié de BA est le sinus de l'angle ACB , & la moitié de BC celui de BAC .

AVERTISSEMENT.

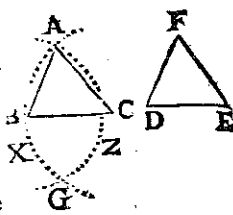
Donc le sinus d'un angle est au côté opposé à cet angle , comme le sinus d'un autre angle est à son côté opposé , ou les sinus des angles sont entr'eux comme les côtés opposés , puisque les moitiés sont comme les tous.

THEOREME X.

92. Deux triangles dont les côtés sont égaux, sont équiangles, & entièrement égaux.

Les triangles ABC & DEF ont leur côté égaux. Je dis qu'ils sont équiangles & entièrement égaux : ou ce qui est la même chose, qu'étant posés l'un sur l'autre, ils conviennent.

1°. BC étant égal à DE , il est clair que la ligne DE étant posée sur BC , elles conviendront ensemble. Si on dit que DF ne conviendra pas avec AB , ni FE avec AC , je démontre le contraire. De B comme centre & de l'intervalle AB ou DF , lignes égales, je décris le cercle Z ; & de C & de



Livre II. Section III.

93 l'intervalle AC ou EF , qui sont égales, le cercle X ; ces deux cercles se coupent nécessairement au point A .

2°. Il est évident que D étant posé sur B , le point F se trouvera nécessairement dans le cercle Z , & que E étant posé sur C , le point F se trouvera dans le cercle X : le point F se trouvera donc dans Z & X , partant dans le point A où ces deux cercles se coupent ; ainsi ces deux triangles posés l'un sur l'autre conviendront en tout, & seront égaux : ce qu'il falloit démontrer.

On pourroit dire que ces deux cercles Z & X se coupent ailleurs qu'en A ; il est vrai ; mais parce qu'il a été démontré, ce ne peut être qu'en deux points*, & ce second point est nécessairement au-dessous de BC ; sçavoir au point G , comme il est évident : ainsi s'ils se coupoient au-dessus de BC en un autre point qu'en A , ils se couperoiennent en trois ; ce qui ne peut être*.

COROLLAIRE I.

93 Si des extrémités d'une ligne droite on mène deux autres lignes droites, qui se rencontrent en point, on ne pourra des mêmes extrémités, & de même part, mener deux autres lignes droites égales aux deux premières chacune à la sienne, qui se rencontrent en un autre point. Eucl. I. Prop. 7.

Car cela fait deux triangles dont les côtés sont égaux, qui par conséquent étant équiangles doivent convenir.

COROLLAIRE II.

94 Deux triangles qui ont chacun deux côtés égaux aux deux côtés de l'autre, & la base égale à la base, les angles compris entre les côtés égaux, sont égaux, Eucl. I. Prop. 8.

94 *Elémens de Géométrie.*

Ces deux triangles ayant leurs côtés égaux, sont entièrement équiangles.

THEOREME XI.

95. Deux triangles équiangles, qui ont un côté égal, sont entièrement égaux.

ABC & DEF sont équiangles, & $AB = DE$, je dis qu'ils sont entièrement égaux, car si on les pose l'un sur l'autre, DE conviendra avec AB , puisque ce sont deux lignes égales. Si D ne convient pas avec AC , mais avec AG : comme les angles, FDE & CAB sont égaux, il s'ensuivra que l'angle $CAB = GAB$ qui sera le même que FDE ; ce qui ne pouvant être, il faut reconnaître que DF conviendra avec AC , & par la même raison FE avec BC , ainsi le point F avec C , & par conséquent ces deux triangles sont en tout égaux.

COROLLAIRE.

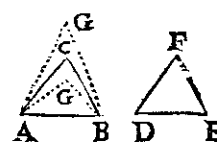
96. Deux triangles qui ont deux angles égaux & un côté égal, sont entièrement égaux. Eucl. I. Prop. 26.

Car deux triangles qui ont deux angles égaux, s'ils ont un côté égal, il faut selon ce Théorème, qu'ils soient entièrement égaux.

PROBLEME IV.

97. Faire un triangle dont on a un côté, & les deux angles sur ce côté.

Le côté donné est AB . L'angle au point A soit nommé X , & celui qui doit être sur B soit Z . J'éleve sur A la ligne AC qui fasse l'angle



Livre II. Section III.

95 CAB égal à X^* , & sur B la ligne BD qui fasse l'angle ABD égal à Z . Ces deux lignes se couperont, si X & Z ne sont ni droits ni ensemble plus grands que deux droits ; car s'ils l'étoient le Problème seroit impossible*, & ces deux lignes ne se couperoiennent point mais seroient parallèles*, ou iroient en s'écartant, & il faut qu'elles concourent pour former un triangle tel que ABE qui est celui qu'on proposoit de faire. Car 1°, ayant deux angles égaux, il lui est équiangle*, & ayant un côté égal, ils sont entièrement égaux par le Corollaire précédent.

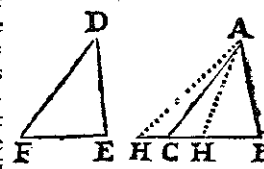
THEOREME XII.

98 Deux triangles qui ont un angle égal, & les deux côtés qui comprennent cet angle, égaux, sont en tout égaux. Eucl. I. Prop. 4.

L'angle $BAC = EDF$, & $AB = DE$, & $AC = DF$; je dis que ces deux triangles conviendront étant posés l'un sur l'autre ; car DE conviendra avec AB ; si DF ne convenoit pas avec AC , mais avec AH , l'angle BAC seroit égal à l'angle BAH ; ce qui ne peut être : ainsi DF convient avec AC , & le point F avec C , par conséquent $BC = EF$; ainsi ces deux triangles qui ont leurs côtés égaux, sont équiangles*, c'est-à-dire, égaux en toutes choses.

THEOREME XIII.

99 Deux triangles ayant une même base, l'an-



96 *Elémens de Geometrie.*

gle du sommet de celui qui est compris, est plus grand que l'angle du sommet du triangle qui le comprend. Eucl. I. Prop. 21.

Les deux triangles CAD & CBD , ont CD pour base. CAD est renfermé dans CBD , il faut prouver que $A > B$.

Je prolonge DA jusqu'en E . L'angle extérieur CAD est égal aux opposés intérieurs $* 73. AEC, ECA$; ainsi il est plus grand que chacun d'eux. Par même raison $CED = EBD$, BDE ; ainsi il est aussi plus grand qu'aucun d'eux. CAD par conséquent étant $> CED$, il est $>$ que CBD ; ce qu'il falloit prouver.

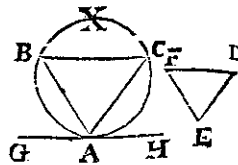
PROBLÈME V.

100. Dans le cercle inscrire un triangle équiangle à un triangle donné. Eucl. IV. Prop. 2.

Soit le triangle donné FED . Il faut l'inscrire * $L. 1. n.$ dans le cercle BAC . Je tire la tangente GH ;

je fais l'angle GAB égal à FDE , & CAH égal * $72. 29.$ à DFE ; j'achève le triangle ABC en tirant la ligne BC . Puisque l'angle BAG , dont la mesure est la moitié de l'arc BA , qui est aussi la mesure de l'angle BCA , est égal à FDE , donc $BCA = FDE$.

Par la même raison CAH égal à DFE ; ayant pour sa mesure la moitié de l'arc AC , mesure de CBA , il faut que CBA & DFE soient égaux; ainsi ces deux triangles ABC & FED , ayant deux angles égaux, ils sont entièrement équiangles,



Livre II. Section III.

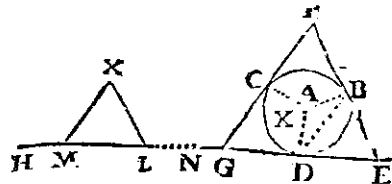
97

équiangles*: ayant donc inscrit ce triangle * $72. 80.$ ABC , on aura fait ce qui étoit proposé.

PROBLÈME VI.

A l'entour du cercle décrire un triangle équiangle à un triangle donné, ou circoncrire au cercle un triangle équiangle à un triangle donné. Eucl. IV. Prop. 3.

Le triangle donné est KLM , & le cercle est X . Ayant tiré le rayon AD , je fais * d'une part * $72. 29.$ l'angle $BAD = NLK$, & de l'autre $DAC = KMH$; ensuite ayant mené par les trois points B, D, C , les tangentes EF, FG, GE : je dis * $L. 1. n.$ que le triangle EFG sera équiangle à LKM . 111.



Les six angles des deux triangles BAD & BED valent quatre angles droits*; AB & AD * $72. 76.$ étant perpendiculaires $EBD + ABD$ vaut un droit, $EDB + BDA$ vaut encore un droit. Donc $BED + BAD$ vaut deux droits. Or par la construction $BAD = KLN$, cet angle $KLN + KLM$ vaut deux droits. Donc $BED = KLM$. Par la même voye on démontre que $DGC = KML$, & par conséquent que $EFG = LKM$, & qu'ainsi les triangles EFG & LKM sont équiangles*.

PROBLÈME VII.

Décrire un cercle dans un triangle. Eucl. IV. 101. Prop. 4.

E

98 *Elémens de Geometrie.*

* $72. 31.$ Je coupe, comme on l'a enseigné*, les angles CBD & CDB en deux parties égales par les lignes BA & DA : & du point A où ces deux * $L. 1. n.$ lignes se coupent, je mène * les perpendiculaires 46. AE, AF, AG sur les côtés du triangle; ensuite de A , & de l'intervalle de l'une de ces lignes, je décris le cercle X , qui se trouvera inscrit dans le triangle BCD : pour le prouver il faut faire voir que les trois lignes AE, AF, AG sont égales.

Les deux triangles AEB & AFB sont rectangles par la construction, puisque AE & AF ont été faites perpendiculaires. Les angles EBA & ABF sont égaux par la construction: ainsi ces deux triangles ayant deux angles égaux sont équiangles*.

Ils ont le côté AB commun. Donc ils sont entièrement égaux*. Ainsi $AE = AF$: par la même voye on démontrera que AG est égal à AE & à AF : ce qu'il falloit prouver.

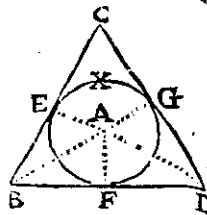
COROLLAIRE.

103. Trois lignes étant données, qui font un triangle si elles sont prolongées, on peut trouver un point qui en soit également éloigné.

Le triangle fait, il y faut inscrire un cercle; dont le centre sera le point qu'on cherche.

THEOREME XIV.

104. Deux triangles qui ont deux côtés égaux à deux côtés chacun au sien, lesquels contiennent des angles inégaux, celui qui a le plus grand angle aura aussi la base plus grande, & réciproquement celui qui a la plus grande base, au-

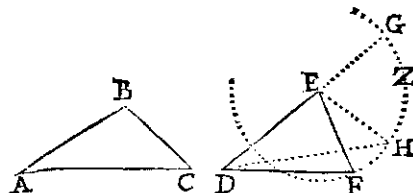


Livre II. Section III.

99

ra le plus grand angle. Euclide I. Prop. 24 & 25.

Soient deux triangles ABC, DEF . Si $AB = DE$, & $BC = EF$, & l'angle $B > E$; je dis la base $AC > DF$.



10. Car si on conçoit le triangle ABC posé sur le triangle DEF , en sorte que les points A & B conviennent avec D & E . Comme l'angle ABC a été posé plus grand que l'angle DEF , le côté BC ne conviendra pas avec EF , mais sera plus proche de EG comme en EH , & la ligne DH sera égale à AC *. Considérant donc la ligne $EF = EH$ comme tournant circulairement sur E , extrémité de DE , en s'approchant par l'autre extrémité EG au point H , la ligne DH qui enjoint les autres extrémités sera plus grande que DF *: ce qu'il falloit premièrement démontrer. * $L. 1. n.$ 100.

20. On démontrera en la même manière l'inverse, si on pose la ligne AC ou $DH > DF$, que l'angle $DEH = ABC$ sera plus grand que l'angle DEF , si on considère que la ligne EH est plus approchée de EG que EF , ayant tourné circulairement sur le point E en la manière expliquée*.

* $L. 1. n.$ 100.

E ij

SECTION IV.

Des Figures de plusieurs côtes.

DEFINITION I.

105. **L**ES figures Quadrilateres, ou, de quatre côtes, reçoivent différens noms. 1°. Si les côtes opposées sont parallèles, c'est un Parallélogramme. 2°. Si les quatre côtes sont égaux, & tous les angles droits, c'est un carré.

3°. Si les quatre côtes sont égaux, & les angles opposés aussi égaux, mais non droits, c'est un Rhombe ou Losange, comme B.



4°. Si tous les côtes ne sont pas égaux, mais tous les angles droits, c'est un Carré long, oblong, Parallélogramme rectangle, ou simplement Rectangle, comme C.



5°. Si seulement les côtes opposées sont égaux, & les angles opposés aussi égaux, mais non droits, cette figure est Rhomboïde, comme D.



6°. Tout autre quadrilatère, dont les côtes opposés ne sont ni parallèles ni égaux, s'appelle un Trapeze, comme E.



Livre II. Section IV.

DEFINITION II.

Une figure est dite régulière, lorsque tous ses côtes & tous ses angles sont égaux. 106.

DEFINITION III.

Une figure de plusieurs côtes se somme généralement Polygone. Elle prend le nom qui lui est propre du nombre de ses côtes, ou du nombre de ses angles que comprennent ses côtes. Ainsi une figure de cinq côtes est nommée Pentagone; de six, Exagone; de sept, Eptagone; Octogone, Enneagone, Decagone, Endecagone, Dodecagone; ainsi de suite. 107.

DEFINITION IV.

Une figure régulière est dite inscrite dans un cercle, lorsque tous ses angles sont dans la circonférence du cercle; mais elle est dite circonscrite, lorsque tous ses côtes touchent la circonférence du cercle. 108.

DEFINITION V.

Ayant mené deux lignes des extrémités d'un des côtes d'une figure régulière inscrite dans un cercle ou circonscrite, au centre de ce cercle, l'angle que ces lignes font est appelé Angle du centre; & les angles que font ses côtes pris deux à deux, sont nommez Angles de la figure. 109.

LEMME I.

Les lignes obliques qui font des angles égaux entre les mêmes parallèles, sont égales. 110.

Soient menées les perpendiculaires AC & DF entre les parallèles Z & X, elles seront égales; * L. I. n. 65. mais les angles ACB & DFE étant droits, & les angles ABC & DEF égaux par l'hypothèse, les deux triangles ABC & DEF sont donc équiangles; * partant AC égal à DF, ils seront



E iij

102. *Elémens de Géométrie.*

* § n. 96. tous égaux; & par conséquent $AB = DE$: ce qu'il falloit démontrer.

LEMME II.

111. Les lignes qui sont sur une même ligne, mêmes angles, sont parallèles.

Les lignes AB & DE sont sur Z & X (même figure ci-dessus) les mêmes angles; ainsi $ABC = DEF$: par conséquent AB & DE doivent

* § n. 28. être parallèles*.

LEMME III.

112. Deux lignes qui joignent deux lignes égales & parallèles, sont égales. Eucl. I. Prop. 33.

Si AD & BE, fig. précéd. joignent les deux lignes AB & DE égales & parallèles, je dis qu'elles sont aussi égales. Les perpendiculaires AC

* L. I. n. 65. & DF sont parallèles*, & AB & DE étant parallèles, les angles ABC & DEF sont égaux*.

* § n. 27. Or ACB & DFE sont droits; ainsi ces deux triangles ABC & DEF étant équiangles* & ayant un côté égal, puisque $AB = DE$ ils sont

* § n. 95. entièrement égaux; partant $BC = EF$: donc

* L. I. n. 65. $CF = BE$. Or AD & CF sont entre les parallèles AC & DF, elles sont égales*. Donc $BE = CF = AD$; ainsi $BE = AD$.

THEOREME I.

113. Les quatre angles d'un quadrilatère sont égaux à quatre droits.

Soit le quadrilatère ABCD. Il faut prouver que ses quatre angles valent quatre



angles droits. Ayant mené la ligne AC d'un des angles, à l'angle opposé, & partagé cette figure dans les deux triangles ABC & ACD, les angles de chacun desquels valent deux droits*. Ainsi tous les angles de ABCD valent quatre droits.

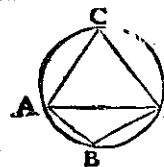
Livre II. Section IV.

THEOREME II.

Les angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle, valent deux angles droits. Eucl. III. Prop. 22. 114.

Le quadrilatère ABCD est inscrit dans le cercle. Les deux angles opposés ACD & ABD, ont

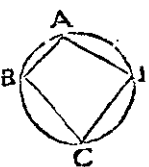
chacun pour mesure la moitié de l'arc sur lequel ils sont appuyés*. Or étant appuyés ensemble sur toute la circonférence; ils ont donc pour mesure la moitié de toute la circonférence: donc ils valent deux angles droits*. Il en est de même pour les deux autres angles BAC & BDC. * § n. 47.



COROLLAIRE.

Si les angles opposés d'un quadrilatère ne valent pas deux droits, on ne le peut inscrire dans un cercle. 115.

Car si on le pouvoit, les angles opposés de ce quadrilatère seroient égaux à deux droits par ce Theorème. Ils ne le seroient pas par la supposition; ce qui est impossible.



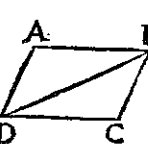
THEOREME III.

Si les côtes opposés du quadrilatère sont égaux, ils sont parallèles. 116.

$AB = CD$ & $BC = AD$, le côté BD est commun;

donc ces deux triangles ABD & BCD étant égaux,

sont équiangles*. Donc l'angle ABD = BDC, par-



* § n. 94.

E iij.

* 7 n. 26. tant AB est parallèle à DC *, De même BC sera parallèle à AD , puisque l'angle A & ADB est égal à DBC .

THEOREME IV.

117. Si deux des côtes opposés d'un quadrilatère sont égaux & parallèles, les deux autres sont aussi égaux & parallèles. Eucl. I. Prop. 23.

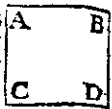
* 7 n. 112. Ils sont égaux* ils sont parallèles*.

* 7 n. 116. THEOREME V.

118. Si les quatre angles du quadrilatère sont droits, c'est un Parallelogramme.

Car AB & CD , par l'hypothèse, sont perpendiculaires sur AC ;

* L. 1. 1. partant* ils sont parallèles. AC & BD sont aussi perpendiculaires sur DC ; par conséquent par la même raison, ces lignes sont parallèles.



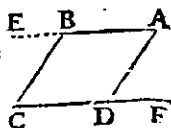
THEOREME VI.

119. Des angles opposés d'un Parallelogramme sont égaux, & ceux qui sont proches valent deux droits.

* 7 n. 27. 1°. L'angle $FDA = DCB$ *, & $FDA =$

* 7 n. 25. DAB *; partant puisque deux angles égaux à un troisième, sont égaux $DAB = BCD$: Or $FDA +$

* 7 n. 17. droits*. Donc BCD égal à ADF , vant avec ADC deux droits.



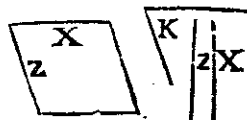
2°. On démontre de même que les deux angles opposés ABC & ADC sont égaux, & que $BAD + ABC$ valent deux droits; ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME I.

120. Faire un Parallelogramme dont on a un an-

gle, & les deux côtes qui le comprennent.

Les côtes donnez sont Z & X , l'angle donné K : il faut joindre Z & X , de sorte qu'ils fassent un angle égal à K *, & ensuite tirer deux lignes parallèles à Z & à X .*



* 7 n. 19.

* L. 1. n. 72.

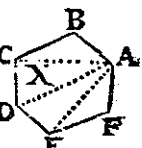
COROLLAIRE.

Donc pour faire un carré dont on a un côté, il n'est question que de joindre deux lignes égales à celle qui est donnée, de sorte qu'elles fassent un angle droit. Eucl. I. Prop. 46.

THEOREME VII.

Toute figure polygonale ou de plusieurs côtes, se réduit en autant de triangles qu'elle a de côtes, moins deux.

Dans la figure Polygone X , ayant tiré d'un de ses angles A , à tous les autres angles, des lignes droites, on fait plusieurs triangles qui ont pour base les côtes de ce Polygone, à la réserve de deux qui sont aux deux côtes de A , dont AB & AF sont un des côtes. Ainsi il y a autant de triangles, qu'il y a de côtes moins deux. La même chose se trouve dans tous les Polygones; c'est pourquoi on peut dire absolument qu'un Polygone se peut réduire en autant de triangles qu'il a de côtes, moins deux.



COROLLAIRE.

Donc tous les angles d'une figure de plusieurs côtes sont égaux à deux fois autant d'angles $E V$.

droits, qu'elle a de côtes moins quatre.

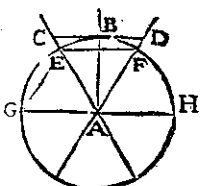
C'est-à-dire, que tous les angles de X qui a six côtes, sont égaux à huit angles droits. Car ce Polygone se réduit en autant de triangles qu'il a de côtes moins deux, c'est-à-dire en quatre. Donc puisque les angles de chaque triangle sont égaux à deux droits, tous les angles de ces quatre triangles seront ensemble égaux à huit droits; mais ils composent ensemble tous les six angles de cette figure. Ils seront donc égaux à huit droits, c'est-à-dire, à douze droits moins quatre. On peut donc dire que tous les angles d'un chiliogone, c'est-à-dire, d'une figure de mille côtes, sont égaux à mille neuf cents quatre-vingt-seize angles droits; ce qu'on conçoit clairement, quoiqu'il soit impossible d'imaginer nettement un Chiliogone.

AVERTISSEMENT.

On entend par Figures Regulieres, celles dont tous les angles & tous les côtes sont égaux*, & qui par conséquent peuvent être inscrites dans un cercle comme est la figure ci-jointe d'un exagone, on nomme l'angle EAF l'Angle du centre, parce qu'il est formé au centre du cercle par les rayons AE , AF tirez aux extremités des côtes du Polygone, & les angles semblables à GEF , formés par la rencontre des côtes du Polygone, se nomment Angles du Polygone:

* 7 n. 19. Et comme il a été démontré* que tous les angles qui se forment au point A , pris ici pour le centre du Polygone, sont ensemble égaux à quatre droits. lorsqu'on veut savoir la grandeur de chaque angle du centre, comme ici dans l'exemple de l'exagone; il faut diviser 360 degrés valeur de quatre droits par six, nombre des côtes du Polygone, comme l'enseigne l' A .

arithmétique, le nombre de soixante qui vient au quotient de la division donnera la valeur de l'angle du centre de l'exagone. L'angle du centre étant connu, celui du Polygone sera aussi; car comme les trois angles du triangle isocèle EAF sont ensemble égaux à deux droits*, ou 180 degrés, étant l'angle du centre, le reste sera la valeur des deux angles égaux sur la base ou côté du Polygone, lesquels sont égaux au seul GEF angle dudit Polygone; ainsi celui de l'exagone se trouvera être de 120 degrés. On pourroit également le connoître, parce qu'il a été démontré*; puisque cet angle GEF a pour sa mesure la moitié de la portion du cercle GHE , sur lequel il est appuyé: ainsi étant de 360 degrés, que vaut tout le cercle, la partie GF , supposée ici de 120, restera 240, dont la moitié est la valeur de l'angle GEF ou du Polygone.



QUESTION.

Quels sont les Polygones qui se peuvent toucher par leurs angles, sans laisser d'espace vuide entr'eux.

Pour cela il faut que leurs angles qui seront autour d'un point commun, fassent précisément quatre angles droits*. Ainsi il n'y a que les quatre angles de quatre carrez qui ont un point commun, font quatre angles droits. Les trois angles des trois exagones qui ont un point

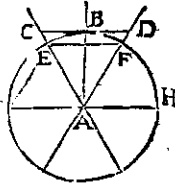
$E V$.

commun, étant chacun de cent vingt, font ensemble trois cens soixante, valeur de quatre angles droits.

Des triangles équilatéraux peuvent aussi le toucher ; car en ayant placé six autour d'un point, leurs six angles qui se touchent font quatre angles droits.

Lorsqu'on connoît l'angle du centre d'une figure régulière, on la peut inscrire dans un cercle. Il faut mener du centre deux rayons qui fassent un angle tel que doit être l'angle du centre de cette figure ; car si c'est une figure de dix côtés, faisant un angle de trente-six degrés, qui est la dixième partie de trois cens soixante, la corde de cet angle sera un des côtés de cette figure.

Pour circonscrire un polygone ou figure régulière autour d'un cercle, il faut premièrement l'inscrire & en prolonger les rayons ; après, ayant divisé par la moitié un des côtés de ce polygone inscrit, comme EF , en menant le rayon AB par cette moitié, & fait au point B une tangente entre AC & AD , on aura un des côtés du polygone circonscrit. Ensuite il faut faire tous les rayons prolongez de l'inscrit égaux à AC & AD , par l'extrémité desquels ayant mené des lignes droites on aura la figure que l'on cherche, ainsi qu'il est évident ; mais l'on ne peut faire avec la seule règle & le compas l'angle du centre de toute figure régulière, sans exception, comme nous le ferons voir ; cela ne se peut que mécaniquement, en se ser-



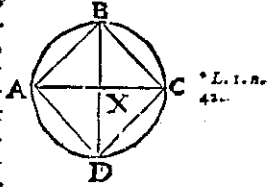
Livre II. Section IV. 109
tant d'un demi cercle qui est divisé par degrés, qu'on nomme rapporteur.

PROBLÈME II.

Inscrire un carré dans le cercle X . Eucl. IV. 124.

Prop. 6.

Le cercle X est donné pour y inscrire un carré. Il faut mener une ligne par le centre du cercle telle que AC qui en soit le diamètre ; & sur celle-là & au centre, la perpendiculaire BD . Les quatre points A, B, C, D sont en égales distances* ; ayant donc mené des lignes droites par ces quatre points, on aura un carré dans le cercle X . Car 1^o, cette figure a quatre côtés égaux. 2^o. Tous les angles de $ABCD$ sont droits*, car chacun d'eux est appuyé sur la demie circonférence.

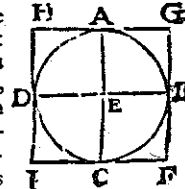


PROBLÈME III.

Faire un cercle dans un carré. Eucl. IV. 135.

Prop. 8.

Le carré $FGHI$ est donné pour y inscrire un cercle. Ayant coupé par la moitié les quatre côtés de ce carré, & mené AC & BD , si du point E où ils se coupent, & de l'intervalle AE , on décrit un cercle, il se trouvera inscrit dans ce carré : car les quatre lignes AE, BE, CE, DE sont égales ; ainsi le cercle passera par les points A, B, C, D .



PROBLÈME IV.

126. Circonscrire un carré à un cercle. Eucl. IV. Prop. 7.

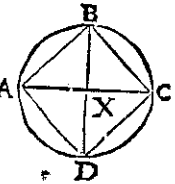
Le cercle $ABCB$, fig. preced. est donné pour lui circonscrire un carré. Il faut mener deux diamètres qui se coupent à angles droits ; ensuite par les quatre extrémités de ces deux diamètres, ayant mené quatre lignes tangentes au cercle, elle feront le carré que l'on cherche, comme il est évident.

* L. 1. n. 112.

PROBLÈME V.

127. Faire un cercle autour d'un carré. Euclid. IV. Prop. 9.

Le carré $ABCD$ est donné pour lui circonscrire un cercle. Ayant tiré des Diagonales, c'est-à-dire, des lignes droites d'un angle à un autre angle opposé, & prenant pour rayon la moitié d'une des Diagonales, le cercle qu'on décrira sera celui que l'on cherche.



SECTION V.

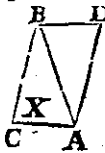
De la mesure de l'Aire des Surfaces.

THEOREME I.

128. EN tout Parallelogramme, les côtés & les angles opposés sont égaux entr'eux, & la Diagonale le coupe en deux également. Eucl. I. Prop. 34.

Livre II. Section V.

Soit X un parallelogramme dont AB est la diagonale ; il faut prouver que l'angle ADB est égal à ACB , & que les côtés AC & BD sont égaux. Les deux angles ABD & BAC opposés alternativement sont égaux, * par le même raisonnement $BAD = ABC$ le côté AB est commun ; ainsi ces deux triangles ABD, BAC sont entièrement égaux* : Donc l'angle D égal à l'angle C , & l'angle A à l'angle B , puisqu'ils sont composés d'angles égaux, & $AD = CB$, comme aussi $AC = BD$, & AB coupe en deux également le parallelogramme $ABCD$.

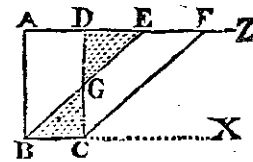


THEOREME II.

Les Parallelogrammes qui sont entre mêmes parallèles & sur même base, ou une autre égale, sont égaux. Eucl. I. Prop. 35. & 36.

Si les Parallelogrammes $ABCD, EFCB$ sont entre mêmes parallèles Z & X , & sur une même base, BC , ou une autre égale ; je dis qu'ils sont égaux.

Si la base du Parallelogramme $EFCB$ n'est pas la même de $ABCD$, sur BC soit fait * le Parallelogramme

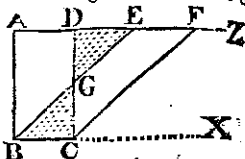


$EFCB$ semblable & égal au donné $EFCB$. Il faut prouver que ce dernier Parallelogramme $EFCB$ est égal au Parallelogramme $ABCD$.

Les côtés AB, CD du Parallelogramme sont parallèles par la supposition, ils sont aussi égaux*, * n. 128 ; Il en est de même des côtés EB, FC ; mais si

112 *Elémens de Geometrie.*

à AD & EF supposées égales on ajoute ED, les
toutes AE, DF seront égales; ainsi les deux
triangles EAB, FDC ayant leurs trois côtés
égaux seront entièrement égaux*, & étant de
ces deux trian-
gles égaux la
partie DGE qui
leur est commu-
ne, les trapezes
ABGD & CGEF
seront égaux.



Ajoûtant donc à l'un & à l'autre la même gran-
deur BGC, ce qui fait les Parallelogrammes
ABCD & BCEF, ces deux figures seront éga-
les; ce qu'il falloit prouver.

Il faut remarquer que si le point E se trouvoit
entre D & A, au lieu d'ajouter DE on l'auroit
retranché pour conclure l'égalité des lignes AE,
DF, & ensuite celle des deux triangles EAB,
FDC, & conséquemment celle des deux Parallelo-
grammes, au moyen du trapeze commun
qu'on auroit ajouté.

COROLLAIRE I.

130. Donc en mesurant la surface d'un parallelo-
gramme, il ne faut avoir égard qu'à la ba-
se, & à la perpendiculaire qui mesure sa hau-
teur.

Car fig. preced. le parallelogramme BCEF est
égal à un parallelogramme rectangle dont BC est
la base, & dont les côtés qui sont perpendiculaires
sont égaux à sa hauteur. Ainsi c'est le parallelo-
gramme rectangle, comme ABCD, qui est la me-
sure de tous les parallelogrammes dont les bases
seront égales à BC, & qui auront même hau-
teur, ou seront entre les mêmes parallèles X &
Z. Il ne peut y avoir qu'un parallelogramme

Livre II. Section V.

113
rectangle sur la base BC entre X & Z; & il
peut y avoir une infinité de parallelogrammes
non rectangles sur la même base, & entre ces
mêmes parallèles X & Z.

COROLLAIRE II.

114.
Donc en mesurant l'étendue d'un parallelo-
gramme non rectangle, il ne faut point avoir
égard à son circuit.

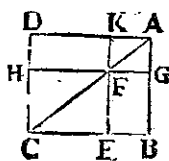
Car quand les côtés BE & CF seroient d'un
million de lieues ou infinis; ce qui se peut con-
cevoir en supposant que les lignes X & Z soient
prolongées à l'infini: ce parallelogramme dont
le circuit est infini, ne fera pas plus grand que
ABCD dont le circuit est fini.

THEOREME III.

115
Si par un point quelconque de la diagonale
d'un parallelogramme on tire deux lignes paral-
lèles aux côtés, elles diviseront le parallelo-
gramme en quatre pieces, dont les deux que la
diagonale ne traverse pas, & qu'on appelle
Complémens, sont égaux entr'eux. Euclid. I.
Prop. 43.

ABC = ADC, & AGF
= AKF, & FEC = FHC*.

Des deux triangles égaux
ADC, & ABC, étant des
grandeurs égales AKF, &
FHC d'une part; & AGF
& FEC de l'autre, les res-
tes FKDH & BEFG seront
égaux; ce qu'il falloit démontrer.

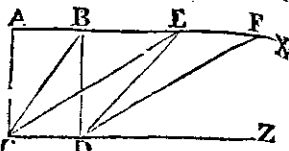


THEOREME IV.

116.
Les parallelogrammes sont doubles des trian-
gles de même hauteur & de même base. Eucl. I.
Prop. 41.

114 *Elémens de Geometrie.*

Le triangle ECD a même base que le paral-
lelogramme ABCD, & ils ont même hauteur
étant entre
les parallèles
X & Z: je
mene DF
parallèle à
CE pour faire
le parallelo-



117.
logramme DCEF, lequel est égal à ABCD*.
118. Or CED est égal à EDF*. Donc DCEF ou
la grandeur égale ABCD, est le double de
CED.

COROLLAIRE I.

119.
Donc les triangles de même base ou de base
égale & de même hauteur, sont égaux. Eucl. I.
Prop. 37. & 38.

Puisqu'ils font tous la moitié d'un parallelo-
gramme de même base & de même hauteur.

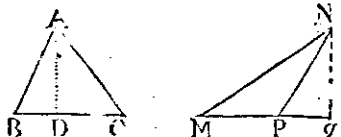
COROLLAIRE II.

120.
Donc pour mesurer la surface d'un triangle;
il ne faut avoir égard qu'à sa hauteur & à sa
base.

Puisqu'il est égal à la moitié d'un parallelo-
gramme, qui a même base & même hauteur.

AVERTISSEMENT.

Pour mesurer le triangle ABC, il faut
donc abaisser du sommet la perpendiculaire AD,



qui en est la hauteur, & multiplier BC par la

Livre II. Section V.

115
moitié de AD, ou AD par la moitié de BC;
ou BC par AD, & en prendre la moitié: ce
qui revient au même.
Si le triangle étoit obtusangle, comme MNP,
alors pour avoir la hauteur, il faudroit prolonger
le côté MP, & du sommet N tirer la perpendicu-
laire NQ.

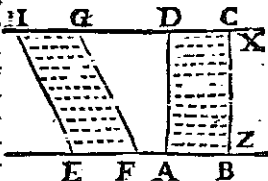
THEOREME V.

116.
Les triangles égaux de même base, ou de base
égale, & posés d'une même part, sont entre les
mêmes parallèles. Eucl. I. Prop. 39. & 40.

S'ils sont égaux, ils ont même hauteur*; & 114.
par conséquent les perpendiculaires abaissées de
leur sommet sur leurs bases seront égales. Si on
mene donc une ligne par leur sommet, elle sera
parallèle à leur base*.

AVERTISSEMENT.

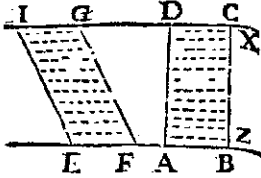
Ces propositions se peuvent démontrer par une
autre methode, dont il est bon ici de donner quel-
que connoissance. Il est évident 1º, que lorsque
deux surfaces planes sont faites par le mouve-
ment de deux lignes droites & égales, si le mou-
vement de l'une & de l'autre ligne est égal, &
qu'il dure autant de temps, ces deux surfaces
sont égales. Si
par exemple AB
est égale à EF,
& que ces deux
lignes se mou-
vent parallele-
ment à elles-mêmes d'un mouve-
ment égal, ve-
nant dans un même temps de Z à X deux lignes
parallèles, les deux parallelogrammes ABCD
& EFGI que décrivent AB & EF sont égaux.



116 *Elémens de Geometrie.*

Si EF se meut bien toujours parallèlement à elle-même : mais qu'en même-temps elle ait un autre mouvement qui la porte ou à droit ou à gauche, en voit bien que ses extrémités E & F décrivent de plus grandes lignes, que A & B extrémités de AB qu'on suppose n'avoir qu'un mouvement qui la porte par le plus court chemin de Z à X : ainsi quoique ABCD & EFGI soient des surfaces égales, le circuit de celle-ci est plus grand.

Si ces lignes AB & EF en se mouvant laissent à chaque instant une trace, il est évident que comme on suppose qu'elles sont portées dans un même temps de Z à X, les deux surfaces ABCD & EFGH qu'elles décrivent, seroient couvertes d'un nombre égal de lignes toutes égales : & par conséquent que ces deux surfaces doivent être égales. Ce qu'on peut démontrer encore plus sensiblement, au lieu que AB & EF sont des lignes mathématiques sans largeur ; supposons que ce soient des lignes qui ont quelque largeur, mais si petite qu'elle soit absolument indivisible, & qu'on les arrange parallèlement les unes à côté de AB, les autres à côté de EF entre Z & X lignes parallèles. Puis, que l'espace entre Z & X est partout le même, & que ces indivisibles sont toutes égales, il y en aura autant sur AB que sur EF, elles feront par conséquent deux surfaces égales, si celles qui sont sur EF sont bien toujours parallèles en-

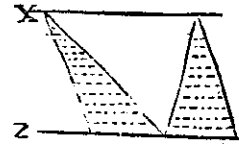


Livre II. Section V. 117

si elles ; mais que l'extrémité de la seconde passe au de-là de E, & celle de la troisième encore au de-là ; alors le circuit de EFGI sera plus grand que celui de ABCD ; & si nous supposons dans ces lignes une largeur indivisible, posons à-dire insensible, les côtes EI & FG ne seroient pas des lignes ; mais des lignes comme dentelées.

Cette methode que nous expliquons ici s'appelle la methode des indivisibles ; parce qu'on suppose des lignes qui ont une largeur indivisible à cause de sa petitesse.

On peut employer cette même methode pour prouver l'égalité des triangles qui sont sur une même base, & qui ont la même hauteur ou qui sont entre deux parallèles ; car si on suppose que deux lignes égales ont le même mouvement, & qu'elles se diminuent proportionnellement, il faut que dans le même temps elles fassent des surfaces égales. Si aussi on conçoit deux surfaces sur deux bases égales, composées d'un égal nombre de lignes indivisibles, qui sont diminuées proportionnellement ; de sorte que toutes soient égales chacune à chacune, il faut que ces deux surfaces qui sont deux triangles soient égales.



Remarquez que de deux triangles d'une surface égale, celui dont les côtes & les angles sont plus égaux entr'eux, a moins de circuit. Le triangle même rectangle aura plus de circuit qu'un équilateral qui lui soit égal : car

118 *Elémens de Geometrie.*

soit ABC un rectangle & ABD un équilateral de même hauteur ; ils sont égaux *. Soit AC prolongé en E, de sorte que AC=CE. Le circuit de ACB est AB+BC+CE. Soit prolongé BD jusqu'à E, chaque angle de ABD est de 60°, & EAB étant de 90°, les angles AEB & EAD sont chacun de 30°. Ainsi EDA est un isocèle, & DE=AD. Donc AB+BE est le circuit de ABD. Or BE est plus petit que BC+CE ; donc le circuit de ABD est plus petit que le circuit de ABC. Nous ferons voir dans la suite qu'une figure qui est plus uniforme en toutes ses parties, renferme une plus grande surface dans un moindre circuit.

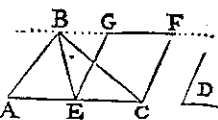


PROBLEME I.

138. Faire un parallelogramme égal à un triangle donné, & qui ait un angle donné. Euclid. I. Prop. 42.

Le triangle donné est ABC, & l'angle donné D. Il faut faire un parallelogramme égal au triangle qui ait l'angle égal à D.

1°. Par B sommet du triangle ABC, je mene BF parallèle à la base AC*. 2°. Sur E, moitié de cette base, j'éleve GE qui fasse A 3°. J'acheve le parallelogramme CEGF*, qui sera celui qu'on demande ; car il est égal au triangle ABC*, & il a l'angle GEC égal à l'angle donné D.



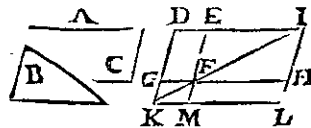
Livre II. Section V. 119

PROBLEME II.

Sur une ligne droite donnée, décrire un parallelogramme égal à un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné. Eucl. I. Prop. 44.

La ligne donnée est A, l'angle donné est C. Il faut faire un parallelogramme égal au triangle B.

1°. Par le Problème precedent, je fais, selon l'angle C, le parallelogramme DEFG égal au triangle B. 2°. Je prolonge GF & DE : de sorte que FH=A, & EI=FH j'acheve le parallelogramme EFHI, je prolonge la ligne IF jusqu'à

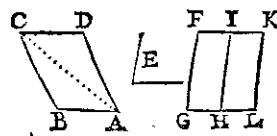


ce qu'elle trouve le prolongement de DG ; & j'acheve le parallelogramme DKLI, dans lequel FHLM est égal à DEFG*. Ainsi FHLM est le parallelogramme que l'on cherche égal au triangle B à qui DEFG a été fait égal. Ayant un angle égal à l'angle donné C, & étant fait sur FH égale à la ligne donnée A.

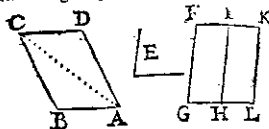
PROBLEME III.

Décrire un parallelogramme égal à une figure rectiligne donnée, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné. Eucl. I. Prop. 45.

La figure rectiligne donnée est ABCD l'angle donné E. 1°. Je refais la figure



$ABCD$ en deux triangles par la ligne AC . 2°. Je fais le parallélogramme GI égal au triangle ABC , ayant l'angle G égal à l'angle



- * § n. 138. donné E^* . 3°. Sur HI je fais aussi le parallélogramme IL égal au triangle ACD , ayant l'angle I égal audit angle E^* . Cela étant fait, $GK = GI + IL$, donc $GK = ABCD$ est le parallélogramme requis.

Que si la figure avoit été composée de plus de deux triangles, on auroit fait la même chose sur la ligne KL pour le troisième triangle qu'il étoit fait sur HI pour le second, & ainsi des autres.

DEFINITION.

141. Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit se nomme Hypoténuse.

THEOREME VI.

142. Dans tout triangle rectangle le carré de l'hypoténuse, ou du côté qui soutient l'angle droit est égal aux deux carrés des deux autres côtés. Eucl. I. Prop. 47.

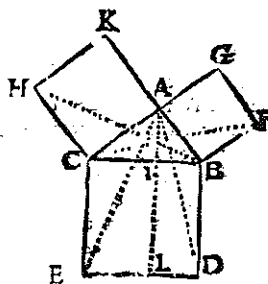
Soit le triangle rectangle CAB . Si sur l'hypoténuse CB on fait le carré CD , (on désigne ainsi un carré ou parallélogramme par deux lettres en diagonale) & sur les deux autres côtés CA & AB , on fait les carrés CK , BG . Je dis que $CD = CK + BG$.

Soit mené du sommet A , la ligne AL perpendiculaire sur l'hypoténuse BC , elle divisera le carré CD en deux parallélogrammes IE & ID , dont le premier est égal au carré CK ,

&

& le second au carré BG ; ce que l'on démontrera ainsi.

Soit mené du point A au point E la ligne AE , & du point B au point H la ligne BH . Ces deux lignes formeront les deux triangles égaux ACE , BCH^* . Car le côté $CE = CB$



* § n. 98;

& $CA = HC$; & les angles ACE & HCB renfermez par ces côtés sont égaux, ayant chacun un angle droit, & l'angle ACB commun. Mais le triangle ACE est moitié du parallélogramme IE^* , parce que ces deux figures ont même base & qu'elles sont entre les mêmes parallèles. De même le triangle HCB est moitié du carré CK , par la même raison. Or ces triangles sont égaux, donc les parallélogrammes qui en sont doubles, seront aussi égaux.

Ce que l'on vient de dire du parallélogramme IE , & du carré CK , se doit entendre du parallélogramme ID , & du carré BG , donc, &c.

REMARQUE.

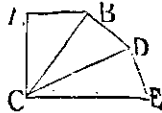
Cette proposition est d'un usage très-fréquent & très-étendu dans la Geometrie, aussi bien que dans la Résolution des Problèmes par l'analyse.

PROBLEME IV.

Trouver un carré égal à deux ou à plusieurs autres carrés. 143

F

Il ne faut que joindre les deux bases, AB , AC des deux carrés proposés, de sorte qu'ils fassent un angle droit; la base CB de cet angle sera le côté d'un carré égal à ces deux carrés, selon le précédent Théorème. Si l'on demande un carré égal à trois carrés donnez, & que BD soit le côté du troisième; je joins BC & BD , de sorte que ces deux lignes fassent un angle droit. Alors le carré de CD est égal aux carrés de BC & de BD , par conséquent aux carrés de AC , de AB , de BD ; & par cette méthode l'on trouvera un carré qui soit égal à tant de carrés que l'on voudra.



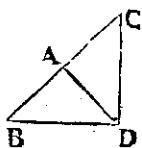
THEOREME VII.

144. Si le carré d'un des côtés d'un triangle est égal aux carrés des deux autres côtés, l'angle compris entre ces deux côtés est droit. Eucl. I. Prop. 48.

Je suppose qu'au triangle ABD le carré du côté BD soit égal aux carrés des deux autres côtés AB , AD . Cela étant, je dis que l'angle BAD compris entre les deux côtés AB , AD est droit.

Soit fait AC perpendiculaire sur AD & égale à AB ; donc les carrés de AD & AC sont égaux à celui de

- * § n. 142. DC^* . Or ces deux carrés sont égaux par hypothèse à celui de BD ; donc les carrés de BD & de DC sont égaux; Ainsi CD & BD sont égaux; donc les deux triangles ABD &



ADC sont entièrement égaux, & par conséquent équiangles*. BAD est donc droit, aussi bien que CAD . On suppose ici, ce qui est évident, que les carrés égaux ont des côtés égaux.

THEOREME VIII.

Un triangle est égal à deux ou plusieurs triangles de même hauteur, dont les bases prises ensemble sont égales à la sienne. 145;

Le triangle ABC est égal aux triangles ABE , EAD & DAC , qui sont ses parties. Or $ACD = CFD$, & $DAE = DGE$, & $EAB = EHB^*$; donc CAB est égal à deux ou plusieurs triangles, &c. Ce qu'il falloit prouver.



* § n. 144;

DEFINITION.

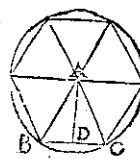
On appelle Apothème la partie du rayon perpendiculaire, qui est entre le côté d'un polygone inscrit. & le centre du cercle.

AD est un apothème. (figure suivante.)

THEOREME IX.

La surface d'un polygone régulier est égale à un triangle qui a pour base le circuit de ce polygone. & pour hauteur l'apothème de ce polygone. 147;

Ayant mené des lignes du centre A à chaque angle, on le réduit en autant de triangles qu'il a de côtés, tous égaux au triangle ABC qui a BC pour base & pour hauteur l'apothème AD ; or un triangle qui a AD pour hauteur, & pour base le circuit de ce polygone est égal à tous ces triangles dont la hauteur est DA , & les bases prises en-



F ij

Elémens de Geometrie.

143. semble, font le circuit de ce polygone, * qui est ce qu'il falloit prouver.

Propositions évidentes touchant les Polygones.

PROPOSITION I.

148. Un polygone est plus grand que le cercle auquel il est circonscrit.

PROPOSITION II.

149. Un polygone est plus petit que le cercle dans lequel il est inscrit.

PROPOSITION III.

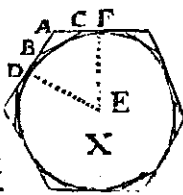
150. Un cercle peut être pris pour un polygone d'une infinité de côtes.

Car si un polygone dont le diamètre est petit avoit un million de côtes, il est évident qu'il ne différerait pas sensiblement d'un cercle. Si, dis-je, on conçoit dans un cercle autant de côtes qu'il a de points sensibles, ce sera un polygone & un cercle en même temps.

THEOREME X.

151. De deux polygones réguliers circonscrits à un cercle, celui qui a plus de côtes, a une plus petite surface.

X est un polygone circonscrit à un cercle, je divise ses côtes pour faire un autre polygone qui ait plus de côtes, en menant des tangentes qui seront hors du cercle *; ainsi ce polygone sera plus grand que ce cercle*. Je considère la même partie de ces deux polygones, c'est-à-dire, qui soit circonscrite à la même partie



*L. I. n. 106.

*S. n. 146.

Livre II. Section V.

du cercle, par exemple à EFD, puis que $BA + AC$ est plus grand que BC ; donc $BD + BA + AC + CF$ est plus grand que $DB + BC + CF$; ainsi le circuit de celui qui a moins de côtes est plus grand. La figure EFCABD excède EFCBD de la grandeur du triangle ABC; la surface de celui qui a plus de côtes est donc plus petite.

COROLLAIRE.

162. Donc puisque plus un polygone circonscrit a de côtes, plus il est petit, demeurant toujours plus grand que le cercle auquel il est circonscrit; il s'ensuit que plus un polygone a de côtes, son circuit & sa surface approchent plus du circuit & de la surface du cercle auquel il est circonscrit; & qu'ainsi un polygone circonscrit d'une infinité de côtes ne diffère point du cercle.

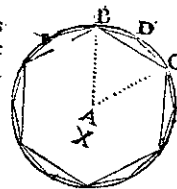
THEOREME XI.

153. De deux polygones réguliers inscrits dans un même cercle, celui qui a plus de côtes a une plus grande surface.

Deux polygones étant inscrits dans le cercle X; je considère la partie ABDC, & les parties de ces deux polygones qui y répondent.

1°. $BD + DC$ est plus grand que BC ; partant le circuit de celui qui a plus de côtes est déjà plus grand.

2°. La figure ABCD surpasse ABC de la grandeur du triangle BDC; ainsi le polygone qui a plus de côtes a une plus grande surface ce qu'il falloit prouver.



F iij

Elémens de Geometrie.

COROLLAIRE.

154. Donc puisque de deux ou plusieurs polygones inscrits dans un même cercle, celui là est plus grand qui a plus de côtes, demeurant toujours plus petit que le cercle *; il s'ensuit que plus un polygone inscrit a de côtes, plus il approche de la circonférence & de la surface du cercle; & qu'ainsi un polygone inscrit, qui a une infinité de côtes, ne diffère point du cercle.

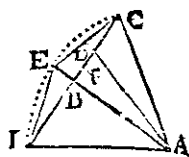
THEOREME XII.

155. De deux polygones réguliers inscrits dans un même cercle, ou cercles égaux, celui qui a plus de côtes a une plus grande apothème.

EC est la corde du polygone qui a plus de côtes, CI celle de celui qui en a moins; ainsi CE étant la corde d'un plus petit arc est plus petite, & par conséquent plus éloignée du centre A que CI*.

*L. I. n. 96.

Donc la perpendiculaire AD qui est l'apothème du polygone dont CE est la corde, est plus grande que AB apothème du polygone, dont CI est la corde; ce qu'il falloit prouver.



THEOREME XIII.

156. La surface d'un cercle est égale à un triangle qui a pour sa hauteur le rayon du cercle, & pour base la circonférence.

On peut supposer selon les deux Theorèmes précédens & leurs Corollaires, qu'un cercle est égal à un polygone d'une infinité de côtes, qui lui est circonscrit ou inscrit. La surface de ce

Livre II. Section V.

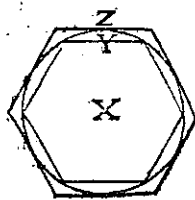
157. polygone est égale à un triangle qui a pour base son circuit, qui est ici la même chose que la circonférence du cercle, & pour hauteur l'apothème ou la perpendiculaire menée du centre de ce polygone sur un des côtes de ce même polygone, qui ayant un nombre infini de côtes, cette perpendiculaire n'est point différente du rayon du cercle où il est inscrit. Prenant donc le cercle pour un polygone semblable, sa surface est égale à un triangle, dont la base est égale à la circonférence, & la hauteur est égale à son rayon.

Le rayon d'un cercle se peut mesurer facilement, il n'en est pas de même de sa circonférence qu'on ne connoît pas encore. C'est ce qui empêche de trouver la quadrature du cercle, c'est-à-dire, de faire un carré égal à la surface renfermée dans un cercle: car si on connoissoit cette circonférence, on formeroit facilement un triangle égal au cercle, faisant sa base égale à cette circonférence, & sa perpendiculaire égale au rayon. Ce triangle, suivant ce qui sera enseigné dans la suite, se changeroit facilement en un carré qui lui seroit égal. & par conséquent audit cercle. Mais on ne peut exprimer la grandeur de la circonférence d'un cercle qu'en assignant deux lignes, l'une plus grande & l'autre plus petite que cette circonférence, qui ne diffèrent entr'elles que d'une grandeur moindre que toute grandeur qu'on puisse marquer; ce que l'on démontre de cette manière.

Soit le cercle donné X; je suppose qu'un polygone, que je nomme Z, lui soit circonscrit, & qu'un autre que j'appelle Y lui soit inscrit. La grandeur donnée, qui est la différence de la surface du cercle à une autre surface, est T.

F iij

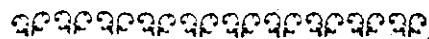
Faugmenter on di-
minuer les côtes des
polygones Z & Y, jus-
qu'à ce que leur diffé-
rence soit plus petite
que la grandeur T ;
ce qui est facile : car
en augmentant les cô-
tes de l'un & de l'autre,
ou augmente la



En 151. grandeur de X. &
En 149. on diminue celle de Z. Ainsi l'un & l'autre
approchent plus de la circonférence du cercle.
La différence de Z avec Y est plus grande que
celle de Z avec le cercle X, puisque X est plus
grand que Y : donc la différence des surfaces de
Z & de Y étant plus petite que la grandeur T,
on trouve une surface qui diffère de celle du cer-
cle d'une grandeur plus petite que celle qu'on
avoit proposée ; c'est-à-dire, que si on propose
de trouver une surface qui ne diffère de celle
d'un cercle donné que de la cent millième partie
d'une ligne, on en pourroit trouver une qui dif-
fereroit encore moins.



ELEMENS DE GEOMETRIE.



LIVRE TROISIEME.

Les propriétés qui conviennent à toute
Grandeur, appliquées aux Lignes,
Plans, Solides, & démontrées.

SECTION PREMIERE.

Les quatre Operations de l'Arithmétique,
Addition, Soustraction, Multi-
plication, & Division sur les Lignes,
sur les Plans, & sur les Solides.

OPERATION I.



A première & la plus simple propriété
de toute grandeur, & par conséquent
d'une ligne, d'un plan, d'un solide,
c'est de pouvoir être augmentée, ou
diminuée. On peut ajouter une ligne à une ligne,
F v

130 *Elemens de Geometrie.*

les joignant, ou les prolongeant. On peut de
même ajouter un plan à un plan en les conti-
nuant ou les mettant côte à côte l'un de l'autre.
Quand on exprime des grandeurs soit lignes,
soit plans, soit solides avec des lettres, le signe
de l'Addition est celui-ci $+$, ainsi $a + b$ veut
dire que les grandeurs qu'on appelle a & b ,
nombres ou lignes, sont ajoutées ensemble.
Lorsque la même lettre se trouve répétée plu-
sieurs fois, on ne la marque qu'une seule fois,
mais on met devant un chiffre, qui signifie com-
bien de fois elle est ajoutée à elle-même, & si
gnifie que b est ajouté trois fois à lui-même.
Pour ajouter une grandeur qui a le signe $+$ à la
même qui a le signe $+$, on les efface toutes
deux ; car plus & moins une même grandeur,
ce n'est rien. Ainsi dans une Addition, il faut
effacer les mêmes grandeurs qui ont des signes
contraires. Dans la Geometrie l'on marque or-
dinairement une ligne par deux majuscules aux
deux extrémités, comme AB , ou par une seule
petite lettre qu'on met au milieu. a , marque la
ligne AB .

A — C — B

OPERATION II. Soustraction.

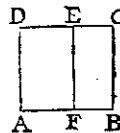
Le signe de la Soustraction est une petite bar-
re ; ainsi $a - b$ marque que l'on conçoit que de
 a on a retranché b , & que par conséquent a
étoit plus grand que b .

La différence de deux grandeurs ; c'est l'excès
de la plus grande par dessus la plus petite, ou la
plus grande moins la plus petite. Soient deux
lignes AB & CD ; ayant pris
sur AB la ligne AE égale à CD , leur différence est EB ,
E — B

Livre III. Section I. 131

excès de AB par dessus CD , ou la plus grande
ligne AB moins la plus petite CD ; c'est-à-dire,
ce qui reste de la plus grande après le retranche-
ment de la plus petite.

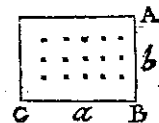
Si l'on retranche du plan $ABCD$, le plan
 $BCEF$, pour marquer ce retranchement l'on
écrit de même $ABCD - EBCE$; ce qui sera
la différence de ces deux plans.
Après ce retranchement, le re-
ste est le plan $ADEF$. La règle
générale de la Soustraction est
de changer les signes de la gran-
deur qu'on veut retrancher. On
sous-entend toujours le signe $+$
devant la grandeur qui n'a aucun signe. Ainsi
pour ôter b de a , c'est-à-dire, $+b$ de a , il faut
changer ce $+$ en $-$, & écrire $a - b$.



OPERATION III.

Multipliation.

Multiplier une grandeur par une autre, c'est
prendre l'une, (n'importe par laquelle on com-
mence) autant de fois qu'il y a d'unités dans
l'autre. Multiplier a par b , c'est prendre a au-
tant de fois que b a d'unités ou de parties ; ce
qu'on marque en unissant
ainsi ces deux lettres, ab . Il
est évident que ce plan est
fait par le mouvement de
la ligne b , mué de B à C ;
partant répétée on prise au-
tant de fois qu'il y a d'unités
ou de parties en a . Quand on marque un plan
par deux lettres ainsi, ab , on suppose que a ou
 BC fait un angle droit avec b ou AB . Nous avons
F vj

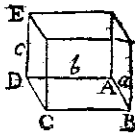


démontré dans le Livre précédent, que la grandeur d'un plan ne dépend pas seulement de la longueur de ses côtés, mais aussi de la nature de l'angle qu'ils font; qu'un parallélogramme rectangle est plus grand* que celui qui ne l'est pas. Il a ainsi une mesure déterminée; C'est pourquoi on suppose, comme je le viens de dire, que deux lignes qu'on conçoit multipliées l'une par l'autre, font un rectangle.

* L. 2. n.
130.

Quand on se sert de petites lettres, leur union est une marque qu'elles sont multipliées. l'une par l'autre; mais il n'est pas de même quand on se sert de capitales. Ainsi AB ne marque pas que A est multiplié par B , mais que AB est une ligne, dont A & B sont les extrémités. Le signe de la multiplication de deux lignes marquées avec des capitales est celui-ci $\times$, qui est une petite croix de S. André, $AB \times BC$, marque que AB est multiplié par BC .

Si l'on conçoit que le plan $ABCD$ est pris autant de fois, & mis sur soi-même, qu'il y a de parties dans DE , cela fait un solide $ABCD \times DE$. Si $AB = a$, & $AD = b$, & $DE = c$, le produit sera $a b c$. Comme l'on marque un plan avec deux petites lettres, on marque le solide avec trois.



OPERATION IV.

Division.

On nomme Dividende la grandeur qu'on propose à diviser; Diviseur, celle par laquelle on divise; Quotient, celle qui exprime combien

de fois le Diviseur est dans le Dividende.

Pour marquer qu'une grandeur est divisée par une autre, on met leurs lettres l'une sous l'autre, & on les sépare par une petite ligne. Pour diviser a par b , on met a sur b , de cette manière $\frac{a}{b}$, qui marque qu'on conçoit

que a est divisé par b . La Division est une espèce de Soustraction. Quand on ôte une grandeur toute entière d'elle-même, il ne reste rien; Ainsi diviser a par a , c'est ôter a de a autant de fois qu'il y est contenu. Il y est une fois; ainsi en divisant a par a , il ne doit rien rester: le Dividende & le Diviseur disparaissent; par conséquent leurs lettres qui sont également dans le Diviseur & dans le Dividende, doivent être supprimées. Pour diviser cd par e , il faut supprimer e , & laisser d , qui sera le quotient de cd divisé par e ; c'est-à-dire, que d sera le signe du nombre de fois que e est dans cd . La Division défait ce qu'a fait la Multiplication. Quand on multiplie e par d , on les joint, ed . Divisant donc cd par e , il faut que e ne paroisse plus, & qu'il ne reste que d . S'il falloit multiplier $\frac{cd}{e}$ par e il faudroit effacer e ; c'est-à-dire, que le produit de $\frac{cd}{e}$ par e est cd : car $\frac{cd}{e}$ c'est cd divisé par e , & effaçant e , on rétablit cd ; la division défait, & la multiplication refait.

Remarquez que le quotient d'une division étant multiplié par le Diviseur, il produit une grandeur égale à celle qui a été divisée, ce qui est évident: car multiplier le quotient par le Diviseur, c'est le prendre autant de fois qu'il est contenu dans la grandeur à diviser.

Les mêmes Operations, Addition, Soustraction, Multiplication & Division, lorsque les Grandeurs sont complexes.

On dit qu'une grandeur est complexe, lorsqu'elle est composée de deux ou de plusieurs grandeurs, qui sont exprimées chacune par un signe particulier: $a + b$ & $a - b$, sont des grandeurs complexes. Plus une grandeur, moins la même grandeur, ce n'est rien. $+3 - 3$ est égal à zéro; donc pour rendre une expression nette, on efface celles qui se trouvent avec des signes contraires. Ayant par exemple cette expression $sb - 2b$, on la réduit à celle-ci; sb . Car comme nous en avons averti, lorsqu'une grandeur n'a point de signe exprimé, il faut sous-entendre le signe $+$; ainsi $sb - 2b$, c'est comme s'il y avoit $+sb - 2b$. Or dans cette expression il y a $2b$ avec des signes contraires, je l'efface donc, & j'écris $+sb$, ou simplement, sb .

Addition des Grandeurs complexes.

Les grandeurs complexes s'ajoutent comme les simples. Pour ajouter $b + c$ avec $f + b$; il faut les joindre par le signe $+$ ainsi; $b + c + f + b$. Il faut toujours effacer les lettres qui se trouvent avec des signes contraires; ainsi ajoutant $b + d$ avec $c - d$, on écrit seulement $b + c$.

Lorsque les mêmes lettres se trouvent répétées plusieurs fois, on n'en met qu'une avec le chiffre devant, qui fait connoître combien de

fois elle est prise; comme ici pour ajouter $4f + 6g$ avec $f - 4g$, on écrit: $7f + 2g$. Si l'on avoit marqué cette operation au long, on auroit écrit; $4f + 6g + f - 4g$. Or $4f + f = 7f$, & $+6g - 4g = +2g$.

Pour ajouter de part & d'autre du signe de l'égalité une même grandeur, là où elle se trouve avec le signe $-$, il faut l'effacer, & la mettre de l'autre côté avec le signe $+$. Soit cette égalité $a = b - d$; pour ajouter d de part & d'autre, j'écris $a + d = b$. L'operation tout au long seroit: $a + d = b - d + d$. Mais $-d + d = 0$.

Soustraction des Grandeurs complexes.

La règle générale de cette operation, est la même que pour les grandeurs simples: il faut changer les signes de la grandeur à retrancher. On doit toujours sous-entendre le signe $+$ devant toute grandeur, qui n'a aucun signe. Partant pour ôter $b + d$ ou $+b + d$ de $c + f$, il faut écrire $c + f - b - d$. Car 1^o, il faut joindre b avec $c + f$ par $-$, signe de la Soustraction. 2^o, Ce n'est pas seulement $+b$ qu'on veut retrancher, mais encore $+d$; il le faut donc écrire ainsi $-d$. Au contraire, pour ôter $b - d$ de $c + f$, il faudroit changer les signes de $+b - d$, mettant $c + f - b + d$. Car quand on soustrait $b - d$ de $+f$, on ne veut pas ôter entièrement la grandeur b ; il s'en faut la grandeur d . Ainsi ayant mis $c + f - b$, on retranche de $c + f$ plus qu'il ne faut retrancher, savoir la grandeur d ; c'est pourquoi on l'ajoute $a + c + f$ en cette manière, $c + f - b + d$.

Remarquez bien que dans cette expression.

$a + f - b - d$, ce n'est pas de b que d est retranché; mais b & d sont retranchés de $c + f$. Quand on a à soustraire de part & d'autre du signe de l'égalité une même grandeur; il n'y a qu'à l'effacer où elle se trouve avec le signe $+$ & la mettre de l'autre côté avec le signe $-$. Soit $a = b + d$; pour ôter d de part & d'autre, j'écris: $a - d = b$.

Multiplication des Grandeurs complexes.

Les questions sur la multiplication des Grandeurs complexes, se réduisent à ces trois. 1°. Multiplier une ligne, plus une autre ligne, par une ligne, plus une autre ligne: comme $a + b$ par $f + g$. 2°. Multiplier une ligne moins une autre ligne, par une ligne, plus une autre ligne; comme $a - b$ par $f + g$. 3°. Multiplier une ligne moins une autre ligne, par une ligne moins une autre ligne.

Regles pour ces trois cas.

RÈGLE I.

Lorsque les deux grandeurs données à être multipliées l'une par l'autre, ont chacune le signe $+$, leur produit doit avoir le même signe $+$.

Pour multiplier $a + b$ par $f + g$; il faut commencer l'opération par multiplier a par f , écrivant af , ce qui est le signe du produit de a par f . Faisant de même autant de multiplications partielles qu'il y a ici de lettres, on aura $af + bf + ag + bg$, pour produit de $a + b$ par $f + g$. Pour rendre la chose sensible, soit

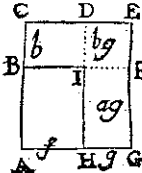
$a + b = AC$. Soit $a = AB$, & $b = BC$. Soit aussi $f + g = AG$, & $f = AH$ & $g = HG$. Je suppose que $ACEG$ est un rectangle coupé par des parallèles, qui font les parallélogrammes, $ABIH$, $FGIH$, $BCDI$, $DEFI$, auxquels parallélogrammes est égale leur somme $ACEG$. Le tout est égal à ses parties. Or ces quatre produits $af + bf + ag + bg$ sont égaux à ces quatre parallélogrammes, comme il est évident: ils sont donc égaux à $AC \times AG$; c'est-à-dire, au parallélogramme de AC par AG , ou de $a + b$ par $f + g$.

RÈGLE II.

Plus en moins, ou moins en plus donne un produit, qui doit avoir le signe $-$.

C'est-à-dire, que si l'une des deux grandeurs a le signe $-$, & l'autre le signe $+$, leur produit doit avoir le signe $-$. Suivant cette Règle, pour multiplier $a + b$ par $f - g$, je multiplie 1°. $a + b$ par f , ce qui fait $af + bf$; mais comme ce n'étoit pas par toute la valeur de f qu'il falloit multiplier $a + b$, qu'il s'en falloit la valeur de g , ce produit $af + bf$ est trop grand de la valeur de g , multipliant $a + b$, c'est-à-dire, de $ag + bg$. J'ôte donc ce que j'avois mis de trop, & l'expression sera $af + bf - ag - bg$.

Soit $a = AB$ ou HI . $b = BC$ ou ID . $g = HG$ ou IF , & $f = AG$. Ainsi $a + b = AC$, & $f - g = AH$; donc $af = AB \times AG$; & $bf = BC \times BF$. Il faut démon-



trier que $af + bf - ag - bg = ACDH$, ou que $ACDH = ACEG - FGIH - DEFI$; ce qui est évident.

RÈGLE III.

Moins en moins donne plus.

Multipliant ces deux grandeurs complexes l'une par l'autre; $a - b$, & $f - g$, leur produit est $af - bf - ag + gb$, où vous voyez qu'on marque le produit de $-g$ par $-b$ avec le signe $+$. Il faut prouver que cela est bon.

Soit $a = AC$, & $b = BC$. Ainsi $a - b = AB$. Soit aussi $f = AG$, & $g = HG$; ainsi $f - g = AH$. Pour démontrer ce qui est en question, considérez que $ABIH$ est égal à $ACEG$, ou af . Si l'on en retranche 1°. $DEGH$, ou ag , & $BCEF$ ou bf , pourvu qu'on lui rajoute $DEFI$, ou bg , qu'on lui ôte de trop; car en ôtant $DEGH$, & $BCEF$, on ôte deux fois $DEFI$, ou bg . Ainsi $af - bf - ag + bg$ est le produit de $a - b$ par $f - g$. Moins en moins donne donc plus, c'est-à-dire, qu'à la fin du produit le signe $+$ se doit trouver, parce qu'ayant trop ôté, il faut remettre ce qu'on ôtoit de trop.

Division des Grandeurs complexes.

La règle générale de la Division, soit des Grandeurs complexes, soit des Grandeurs complexes est de mettre le dividende au dessus d'une ligne, & le diviseur dessous. Ainsi pour

diviser $ax + cd$ par $xd + cb$, j'écris $\frac{ax + cd}{xd + cb}$.

On a vu que dans les complexes il faut effacer les mêmes lettres qui se trouvent dessus & dessous; il le faut faire aussi dans les complexes, lorsqu'elles se trouvent dans chaque partie du dividende & du diviseur. Cette expression $\frac{ax + dx}{bx + cx}$ se peut donc réduire à celle-ci plus simple, $\frac{a + d}{b + c}$, qui est d'égale valeur.

Comme la division défait ce que la multiplication a fait, les trois règles qu'on vient de donner de la multiplication font connoître en voyant les signes d'un quotient, quels signes peuvent avoir le dividende & le diviseur, 1°. si tous deux ont le signe $+$; 2°. si l'un a $+$, & l'autre $-$; 3°. si tous deux ont le signe $-$.

AVERTISSEMENT.

En voila assez pour entendre la suite de ces *Elémens de Geometrie*; mais pour pratiquer avec plus de facilité cette manière d'Arithmétique par lettres, ce qui s'appelle *Algebre*, il faut lire les *Elémens des Mathématiques*.



SECTION II.

De la puissance des Lignes.

EN multipliant une grandeur, on l'élève comme par degrez, selon qu'on la multiplie. On nomme Puissances, ces degrez.

DEFINITION I.

20 *Premiere puissance d'une ligne, c'est la ligne même sans être multipliée.*

DEFINITION II.

21 *Seconde puissance, ou carré d'une ligne, c'est son produit, étant multipliée par elle-même.*

La seconde puissance de b est bb , ou b^2 . Ce nombre 2, marque les deux dimensions de bb . Remarquez qu'il y a bien de la difference entre b^2 & $2b$; car cette seconde expression, $2b$, marque que b a été ajouté à lui-même; au lieu que b^2 , fait connoître que c'est un carré, ou que b est multiplié par lui-même. Or cela est bien différent; car par exemple, 3 & 3 ou 3, ajouté à lui-même, ne fait que 6; au lieu que 3 fois, ou 3 multiplié par lui-même, fait 9.

Lorsqu'on marque une ligne avec deux lettres capitales A & B à ses extrémités, son produit, ou sa seconde puissance, qui est le carré $ABCD$, se marque avec ces quatre lettres, ou par deux seulement, qui sont aux extrémités de la diagonale, comme sont ici A & C , écrivant AC . Ou A  B on joint la même ligne AB avec elle-même par une petite croix de saint André, qui est le signe

Libre III. Section II. 141
de la multiplication, ainsi, $AB \times AB$, ou enha on tire une ligne sur AB , & on y ajoute le signe de la seconde puissance, de cette maniere, AB^2 . Ainsi MN^2 est un carré dont MN est le côté, ou qui est faite de MN multiplié par MN .

AVERTISSEMENT.

Euclide, & les anciens Geometres prenoient le carré pour la premiere puissance, qui dans le langage des nouveaux Geometres est la seconde. Une grandeur réelle avant que d'être multipliée par elle-même, ou par une autre, a une valeur, ou une puissance.

DEFINITION III.

On appelle racine d'une puissance, la ligne de la multiplication de laquelle s'est fait cette puissance.

La racine quarrée de bb ou de b^2 , est une ligne égale à b , c'est-à-dire, au côté d'un carré égal à bb .

AVERTISSEMENT.

Lorsque la racine d'une puissance ne se peut exprimer par un nombre; ce qui arrive en certaines occasions, comme on le démontrera, on met devant elle ce signe $\sqrt{}$ avec la marque de la puissance; ainsi, $\sqrt{b^2}$, si c'est une racine quarrée; $\sqrt[3]{b^3}$, si c'est une racine cube.

DEFINITION IV.

Le cube, ou la troisieme puissance d'une ligne, c'est le produit qu'elle fait, lorsqu'elle multiplie son carré.

Le carré de b est bb . Si l'on multiplie bb par b , ce qui fait bbb , ce solide ou cube est la troisieme puissance de la ligne b . Ce cube bbb se peut exprimer ainsi, b^3 . Ce nombre 3, en marque les trois dimensions, b^3 est différent de $3b$ à

142 *Elements de Geometrie.*

car $3b$, c'est b , pris par trois fois, & b^3 , est multiplié une premiere fois par lui-même, ce qui produit son carré bb ou b^2 ; & en second lieu, ce carré est multiplié par b , ce qui fait bbb , ou b^3 . Prenant 3 fois ce nombre de 4, cela fait 12. Mais prenant le carré de 4, qui est 16, & le multipliant par sa racine, qui est 4, cela fait 64.

Lorsqu'une ligne comme AB est marquée par deux lettres capitales à ses extrémités, on peut exprimer ainsi sa troisieme puissance ou son cube: $AB \times AB \times AB$, ce qui fait connoître qu'on a multiplié 1^o AB par AB , ce qui fait le carré de AB ; 2^o qu'on a multiplié ce carré de AB par AB , racine de ce carré. On a abrégé cette expression en mettant sur AB une ligne avec le petit chiffre, qui marque le nombre de ses dimensions; AB^3 est le cube de AB .

DEFINITION V.

24 *Toute grandeur faite du produit de deux autres, s'appelle Plane.*

Ainsi bd est une grandeur plane, ou un plan, dont une de ces lettres marque la largeur, & l'autre la longueur, c'est-à-dire, les deux dimensions; $AB \times BC$ est une grandeur plane, ou un plan.

DEFINITION VI.

25 *Toute grandeur faite du produit de trois autres, s'appelle Solide.*

Ainsi bcd est un solide, dont ces trois lettres marquent les trois dimensions. Le produit de deux de ces lettres en marque le plan ou la surface, & la troisieme marque la hauteur, ou l'épaisseur par laquelle le plan a été multiplié.

AVERTISSEMENT.

Par quelque ordre que l'on multiplie deux

Libre III. Section II.

143
grandeurs, le produit est toujours égal. ab & ba sont le même plan. Il en est de même de trois ou de plusieurs lignes: abc , bca , cab , par quelque ordre qu'on les multiplie, le produit est le même. Dans Euclide, ce mot rectangle signifie un plan dont les angles sont droits. Nous supposons que les plans & les solides dont nous allons parler, sont tous rectangles.

Remarquez aussi que comme il est d'un très-grand avantage d'accoutumer promptement son esprit à ces sortes de calculs, pour la formation des quarrés & des rectangles, on supprimera après les figures dont Euclide & ses Interpres se servent ordinairement pour les demonstrations de plusieurs des premieres Propositions suivantes, & il est à propos de faire actuellement ces calculs la plume en main.

PROPOSITION I.

Si de deux lignes droites, l'une est coupée en tant de parties que l'on voudra; les rectangles compris de la non-coupée, & de chacune des parties de la coupée, sont égaux au rectangle des deux toutes. Eucl. II. Prop. 1.

Soient AE & AB deux lignes droites. AE est coupée en ses parties AC , CD , DE . La ligne AB n'est point coupée; il faut prouver que le rectangle des toutes AB & AE est égal aux rectangles faits de la toute AB , & de chacune des parties de AE ; c'est-à-dire, que $AB \times AC + AB \times CD + AB \times DE = AB \times AE$.

Les parties étant égales à leur tout, AE est la même chose que $AC + CD + DE$. Par conséquent c'est la même chose de multiplier



144 *Elémens de Geometrie.*

AB par AE ou par $AC + CD + DE$. Donc $AB \times AE = AB \times AC + AB \times CD + AB \times DE$: ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

18 Si une ligne droite est coupée comme l'on voudra, les rectangles compris de la toute & de chacune de ses parties, sont égaux au carré de la toute. Eucl. II. Prop. 2.

Soit la ligne AB coupée en deux parties au point C . Soit $AB = a$ & $AC = b$, & $BC = d$. Le tout étant égal à ses parties $a = b + d$. Donc multiplier a par a , & multiplier a par $b + d$, c'est faire la même chose ; & par conséquent $aa = ab + ad$. C'est à dire que le carré de la toute AB ou aa , est égal aux rectangles faits de la toute AB , & de ses parties AC & CB ; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION III.

19 Si on divise une ligne comme on voudra en deux parties, le rectangle de la toute & de l'une de ses parties, est égal au rectangle des deux parties plus le carré de la partie premièrement prise. Eucl. II. Prop. 3. même figure.

Soit la ligne AB divisée en deux parties, telles qu'on voudra au point C , il faut démontrer que $AB \times AC = AC \times BC + AC^2$.

Soit $AB = a$, & $AC = b$, & $BC = d$. Ainsi comme $AC + CB = AB$, de même $a = b + d$. Multipliant donc a & $b + d$ par le même multiplicateur b , les produits seront égaux : $ab = bd + bb$. Or ab , est le rectangle de AB par AC & $bd + bb$ est le rectangle fait des parties b & d , plus le carré de la partie b premièrement

Livre III. Section II. 145

premierement prise ; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

20 Si on divise une ligne comme on voudra en deux parties, je dis que le carré de toute la ligne est égal au carré de chaque partie, & à deux fois le rectangle fait d'une partie par l'autre. Eucl. II. Prop. 4.

Soit la ligne AB divisée en deux parties au point D . Il faut prouver que $AB^2 = AD^2 + 2AD \times DB + DB^2$.

$A \quad D \quad B$

Soit $AD = b$, & $DB = d$. Donc $AB = b + d$. Or le carré de $b + d$, c'est $b^2 + 2bd + d^2$. Mais $AD^2 = bb$ & $DB^2 = dd$, & $2AD \times DB = 2bd$. Donc $AB^2 = bb + 2bd + dd$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION V.

21 Si l'on divise une ligne en deux parties égales, & en deux parties inégales, le rectangle fait des parties inégales, plus le carré de la partie du milieu sont égaux au carré de la moitié de la ligne. Eucl. II. Prop. 5.

La ligne AB est divisée également en C , & inégalement en D . Je dis que $AD \times DB + CD^2 = AC^2$.

Soit AC ou $A \quad C \quad D \quad B$. $CB = a$ & $CD = b$. Donc $DB = a - b$ & $AD = a + b$. Or le rectangle de $a + b$ par $a - b$ est $aa - ab - ab + bb$. Mais $-ab - ab = -2ab$; donc $AD \times DB = aa - 2ab + bb$. Par conséquent $AD \times DB + CD^2 = aa - 2ab + bb + bb = aa - 2ab + 2bb$. Donc ajoutant de part & d'autre $2ab - 2bb$, on a $AD \times DB + CD^2 = AC^2$.

146 *Elémens de Geometrie.*

d'autre bb ou CD^2 égal à bb , cela fera $AD \times DB + CD^2 = aa$; ce qu'il faut prouver.

Pour ajouter bb à $aa - 2ab$, il ne faut que supprimer $-2ab$; car il est évident que $aa - 2ab + bb = aa$. Ainsi qu'il a été expliqué.

PROPOSITION VI.

22 Si une ligne droite est coupée par la moitié, & qu'on lui ajoute directement une autre ligne droite, le rectangle compris de la toute & de l'ajoutée, comme d'une seule ligne & de l'ajoutée, avec le carré de la moitié de la toute, sont égaux au carré de la moitié de la toute & de l'ajoutée comme d'une seule ligne. Eucl. II. Prop. 6.

La ligne AB est coupée par la moitié au point C . On lui a ajoutée directement la ligne droite BD . Il faut démontrer que $AD \times BD + EC^2 = CD^2$.

$A \quad C \quad B \quad D$

Soit AC ou $C \quad B = b$. Donc $AB = 2b$, & EC ou $EC = bb$. Soit $BD = d$. Donc $CD = b + d$, & $2b + d = AD$. Partant $AD \times BD = 2bd + dd$; & $AD \times BD + EC^2 = 2bd + dd + bb$. Or le carré de CD ou de $b + d$ est $bb + 2bd + dd$; Ainsi $AD \times BD + EC^2 = CD^2$; ce qu'il falloit prouver, savoir que le rectangle de $AD \times BD$, plus le carré de AC ou BC étoient égaux au carré de CD .

PROPOSITION VII.

23 Si on coupe une ligne comme on voudra, le carré de la toute & celui de l'une des parties

Livre III. Section II. 147

sont égaux au carré de l'autre partie & à deux rectangles faits de la toute, & de la partie premièrement prise. Eucl. II. Prop. 7.

La ligne AB a été coupée, comme on a voulu, au point C . Il faut démontrer que $AB^2 + BC^2 = AB \times BC + AC^2$.

Soit $AC = b$. Donc $AB^2 = bb$. Soit $BC = d$, $B \quad C \quad A$ donc $BC^2 = dd$. De même puisque $AB = b + d$, donc $AB^2 = bb + 2bd + dd$; & $AB \times BC = bd + dd$. Doublant ces deux grandeurs $2AB \times BC = 2bd + 2dd$, & leur ajoutant AC^2 ou bb , viendra $2AB \times BC + AC^2 = 2bd + 2dd + bb$, & conséquemment égal à $AB^2 + BC^2$; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VIII.

24 Si une ligne droite est coupée en deux parties comme l'on voudra, quatre fois le rectangle compris de la toute, & de l'une de ses parties, avec le carré de l'autre partie, sont égaux au carré de la toute & de la partie premièrement prise comme d'une seule ligne. Euclid. II. Proposition. 8. Même figure.

La ligne AB a été coupée, comme on a voulu, en deux parties au point C . Il faut démontrer que $4AB \times BC + AC^2$ est égal au carré d'une ligne égale à $AB + BC$.

Soit $AC = b$, & $BC = d$. Donc $AB = b + d$, & $AB + BC = b + d + d$, ou $b + 2d$, dont le carré est $bb + 4bd + 4dd$, qui sera égal à celui de la ligne $AB + BC$. Or $AB \times BC = bd + dd$, puisque AB vient

148 *Elémens de Geometrie.*

d'être posé $b + d$, & $CB = d$: donc $4AB \times BC = 4bd + 4dd$, ajoutant d'une part AC^2 ,

& de l'autre son égal bb , on aura $AC^2 + 4AB \times BC = bb + 4bd + 4dd$, qui est la même valeur qu'on vient de trouver pour le carré de la ligne $b + 2d = AB + BC$; ainsi le carré de $AC + 4AB \times BC$ sont égaux au carré de la ligne $AB + BC$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION IX.

25. Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & en deux inégales; les quarrés des deux parties inégales sont le double du carré de la moitié de la toute & du carré de la partie du milieu. Eucl. II. Prop. 9.

La ligne AB est coupée en deux parties égales en C , & en deux inégales en D . Il faut prouver que $AD^2 + DB^2$ est double de $AC^2 + CD^2$.

Soit AC ou $CB = A$ C D B
= b . Soit $CD = d$. Donc $AD = b + d$, & $DB = b - d$.
Ainsi $AD^2 = bb + 2bd + dd$; & $DB^2 = bb - 2bd + dd$.
Ainsi $AD^2 + DB^2 = bb + 2bd + dd + bb - 2bd + dd = 2bb + 2dd$.
Et puisque $2bb + 2dd = 2(bb + dd)$, ce qui est le double de $AC^2 + CD^2$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION X.

26. Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & qu'on lui ajoute directement une autre ligne droite, le carré de la toute & de l'ajoutée

Livre III. Section II.

149

comme d'une seule ligne, avec le carré de l'ajoutée, sont doubles du carré de la moitié de la toute, & du carré de ladite moitié & de l'ajoutée, comme d'une seule ligne. Euclid. II. Prop. 10.

La ligne AB est coupée par la moitié au point C ; & on lui a ajoutée la ligne BD . Il faut démontrer que le carré de $AB + BD$, plus celui de BD sont le double de celui de BC & de CD ; c'est-à-dire, que $AD^2 + BD^2$ est égal à $2BC^2 + 2CD^2$.

Soit $AC = A$ C B D
ou $BC = b$.
Donc $BC^2 = bb$, & $AB = 2b$; donc $AB^2 = 4bb$. Soit $BD = d$; donc $AD = 2b + d$, & $AD^2 = 4bd + 4bd + dd$. Donc le carré de $AB + BD$, avec le carré de BD est égal à $4bb + 4bd + 4bd + dd$. Or le carré de BC ou bb avec celui de BD ou dd , est $bb + dd$, & $2bb + 2dd$, moitié de $4bb + 4bd + 4bd + dd$; ce qu'il falloit prouver.

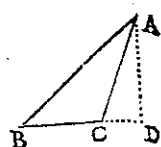
PROPOSITION XI.

Dans tout triangle ambigone le carré du côté qui est la base de l'angle obtus, est égal aux quarrés faits sur les deux autres côtés; plus deux fois le rectangle du côté sur lequel tombe la perpendiculaire (hauteur du triangle) & du prolongement de ce côté jusqu'à cette perpendiculaire. Eucl. II. Prop. 12.

Je suppose que le triangle ABC est ambigone, que l'angle ACB est obtus; & que AD hauteur du triangle ABC tombe perpendiculairement sur le côté BC prolongé. Ce qui étant, il faut démontrer que le carré de AB ,
G iij

150 *Elémens de Geometrie.*

base de l'angle obtus ACB , est égal aux quarrés des deux autres côtés AC & BC , plus deux fois le rectangle fait du côté BC & de son prolongement, compris entre l'angle obtus C & la perpendiculaire AD ; ce qui s'exprime ainsi:



si: $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$.
L'angle ADB étant droit * $AD^2 = BD^2 - BC^2$.
Et par la même raison $AC^2 = CD^2 + AD^2$.
Mais $BD^2 = BC^2 + 2BC \times CD + CD^2$.
Substituant donc cette grandeur en la place de BD^2 ; & en la place de $AD^2 + CD^2$ la grandeur égale AC^2 , on aura $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XII.

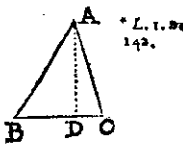
28. Dans tout triangle oxygone ou acutangle, le carré d'un de ses côtés est égal aux quarrés des deux autres côtés moins deux fois le rectangle fait d'un desdits autres côtés, & d'une de ses parties comprise entre la perpendiculaire qui le coupe, & l'angle opposé au côté premierement pris. Eucl. I. Prop. 13.

Je suppose que le triangle ABC est oxygone, que AD est une perpendiculaire qui tombe sur le côté BC ; il faut démontrer que le carré de AB est égal aux quarrés des deux autres côtés AC , & BC moins deux fois le rectangle fait du côté entier BC , & de la partie CD comprise entre la perpendiculaire AD & l'angle C opposé au côté AB premierement pris; il faut ainsi démontrer $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times CD$.

Livre III. Section II.

151

L'angle ADC étant droit $AC^2 = AD^2 + CD^2$. Otant CD^2 de part & d'autre, vient $AC^2 - CD^2 = AD^2$. Cette soustraction se fait comme on l'a enseigné, en faisant CD^2 , où il étoit avec le signe +, & l'écrivant de l'autre côté avec le signe -.
Puisque ADB est droit; donc $AB^2 = AD^2 + BD^2$.
Or $BD = BC - CD$. Le carré de $BC - CD$ est $BC^2 - 2BC \times CD + CD^2$.
Ainsi $AB^2 = AC^2 - 2BC \times CD + CD^2$.
Mettant donc à la place de AD^2 & BD^2 les grandeurs qui leur sont égales, on aura $AB^2 = AC^2 - 2BC \times CD + CD^2$. (Et comme $CD^2 + CD^2 = 0$.) $AB^2 = AC^2 - 2BC \times CD$; ce qu'il falloit démontrer.



SECTION III.

Des raisons & proportions des Lignes, des Surfaces & des Solides.

AVERTISSEMENT.

ON peut considérer ce qu'une ligne est en elle-même, ou ce qu'elle est par rapport à d'autres; lequel rapport fait qu'on dit qu'elle est égale ou inégale, petite ou grande, il en est de même des surfaces, & des solides. Or on peut rapporter une ligne à une autre, & les comparer différemment, considérant ou l'excès de
G iij

152 *Elemens de Geometrie.*

L'une par dessus l'autre, c'est à-dire, leur différence ou la maniere dont l'une contient l'autre ; ce qui fait deux sortes de rapports. Les Geometres ne considerent guere que le second. Aussi lui donnent-ils le nom de *Raison*, qui en général signifie rapport. C'est des raisons ou de la seconde sortes de rapport que nous allons parler.

Autrefois les Interpretes d'Euclide définissoient les raisons, une habitude de deux grandeurs de même genre, comparées l'une avec l'autre selon la quantité. L'on ne compare les choses entr'elles, que lorsqu'elles sont de même genre ; car on ne compare pas la longueur avec la chaleur. Quand on parle de la raison de deux choses, c'est donc leur quantité ou grandeur que l'on compare. Mais le mot d'habitude étoit employé ici mal-à-propos.

Le terme Grec dont Euclide s'est servi, & qu'il traduisoient habitude, signifie maniere d'être d'une chose à l'égard d'une autre ; & c'est ce que signifie dans la Geometrie le mot de *Raison* ; mais comme je l'ai dit, c'est de la seconde sorte de rapport qu'il s'agit ; ce que vous allez voir dans les Définitions suivantes.

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

29. *Raison d'une ligne à une ligne, d'un plan à un plan, d'un solide à un solide ; c'est la maniere dont une ligne contient ou est contenu dans celle avec qui on l'a comparé ; qu'un plan contient, ou est contenu dans un plan ; un solide contient ou est contenu dans un solide, avec lequel on le compare.*

154 *Elemens de Geometrie.*

DEFINITION IV.

32. *L'égalité des raisons se nomme Proportion.*
S'il y a même raison de A à B que de C à D , on dit de ces quatre grandeurs qu'elles sont proportionnelles ; ce qu'on marque ainsi :

$$A : B :: C : D.$$

On a dit que la raison de A à B s'exprime de cette maniere $\frac{A}{B}$; ainsi celle de C à D de

la même façon $\frac{C}{D}$. Par conséquent la proportion de ces quatre lignes, qui consiste dans l'égalité de leurs raisons, se peut aussi exprimer de cette maniere :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

DEFINITION V.

33. *Le premier terme d'une raison se nomme l'Antecedent, l'autre terme le Consequent.*

L'antecedent c'est la chose qui est rapportée, ou comparée ; le consequent celle avec qui se fait la comparaison. Toute comparaison suppose deux termes. La raison qui est un rapport ou comparaison, demande donc deux termes.

DEFINITION VI.

34. *Une proportion à deux antecedens, & deux consequens.*

La proportion est une égalité de raisons qu'on compare. Chaque raison suppose deux termes. La proportion en demande donc quatre.

DEFINITION VII.

35. *Le même terme dans une proportion peut servir*

Livre III. Section III. 155

C'est par la division qu'on connoit la maniere qu'une grandeur est contenue dans une autre grandeur. Ainsi pour exprimer le rapport, ou la raison d'une ligne à une autre, comme de la ligne A à la ligne B on divise B par A , écrivant comme on l'a marqué l'une sous l'autre,

$\frac{B}{A}$ ou $\frac{A}{B}$. Cette expression expose ou exprime la raison de A à B , c'est à-dire, combien de fois, & de quelle maniere A est dans B , ou quelle partie B , est de A ; ce qui se nomme l'Exposant de la raison de A , à B .

DEFINITION II.

Une raison dont l'exposant se peut exprimer en nombres, s'appelle *Raison de nombre à nombre.* 30a

L'exposant marque la maniere qu'une grandeur est contenue dans une autre, ou qu'elle la contient ; c'est à-dire, en termes d'Arithmetique, quel est le quotient de la division de ces deux grandeurs l'une par l'autre. Si cet exposant ou ce quotient est un nombre, que par exemple la ligne B soit en A six fois, la raison de ces deux lignes A & B est une raison de nombre à nombre.

DEFINITION III.

Une raison dont l'exposant ne se peut exprimer par aucun nombre, se nomme *Sourde ou Irrationnelle.* 31a

Si on ne peut trouver aucun nombre qui marque exactement combien de fois la ligne A contient ou est contenue dans la ligne B , la raison de ces deux lignes A & B est sourde. On démontrera dans la suite qu'il y a de telles raisons.

G. V.

Livre III. Section III. 155

de consequent & d'antecedent ; & quand cela est, cette proportion se nomme *Continuë.*

Si A est à B comme B à C , cela fait deux raisons égales, & par conséquent qui font cette proportion.

$$A : B :: B : C.$$

Or B sert dans cette proportion de consequent à la premiere raison, & d'antecedent à la seconde raison. Cette proportion se marque ainsi :

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}.$$

On nomme cette proportion *Continuë*, à cause que les lettres qui la marquent sont de suite, sans interruption.

DEFINITION VIII.

Une proportion continuë quand elle a plus de trois termes, s'appelle *progression.* 36a

Si A est à B comme B à C , & B à C comme C à D , & C à D comme D à E , & de suite ; cela s'appelle *Progression*, qu'on exprime ainsi :

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{E}.$$

DEFINITION IX.

Lorsque d'un côté il y a un certain nombre de grandeurs, trois d'une part par exemple & autant de l'autre ; savoir trois. Si en les comparant toutes six, 1^o, la premiere avec la seconde, & la quatrième avec la cinquième ; 2^o, la seconde avec la troisième, & la cinquième avec la sixième, on les trouve en proportion, on dira que cette proportion est ordonnée. 37a

Soient A, B, C d'un côté, & D, E, F de l'autre. Si $A : B :: D : E$ & $B : C :: E : F$, cette proportion sera ordonnée.

DEFINITION X.

Trois grandeurs étant d'un côté & trois d'un 38a

autre. Si en comparant la première avec la seconde, & la cinquième avec la sixième, elles sont en proportion : & qu'en changeant d'ordre on compare la seconde à la troisième, & la quatrième à la cinquième & qu'elles soient encore en proportion, alors cette proportion s'appelle Troublée.

Soient $\begin{matrix} A. B. C \\ 12. 8. 4 \end{matrix}$ & $\begin{matrix} D. E. F \\ 12. 6. 4 \end{matrix}$.

Si $A.B :: E.F$ & $B.C :: D.E$, cette proportion se nomme Troublée, à cause qu'on n'y garde pas le même ordre.

DEFINITION XI.

39. Le premier & le dernier terme d'une proportion, s'appellent les Extrêmes de cette proportion : & le second & le troisième, les termes Moyens.

Soit cette proportion $A.B :: C.D$; les extrêmes sont A & D ; & B & C les moyens.

DEFINITION XII.

40. Les termes Omologues d'une proportion sont ceux qui tiennent le même rang, ou qui sont de même nom.

Dans cette proportion $A.B :: C.D$, les termes A & C qui sont les antécédens, & B & D qui sont les conséquens, sont termes Omologues.

Propositions évidentes touchant les Raisons & les Proportions.

PROPOSITION I.

Les raisons égales ont des exposans égaux.

41. L'exposant d'une raison marque la manière

que l'un de ces termes est contenu dans l'autre. Si les manières sont égales, les exposans sont égaux.

PROPOSITION II.

Les grandeurs égales ne peuvent être les exposans que de raisons égales. 42.

Soit X l'exposant de la raison de A à B , & de la raison de C à D ; ces deux raisons doivent être égales, puisque l'une contient l'autre de la même manière.

LEMME.

Le premier terme d'une raison devient égal au second, quand on le multiplie par l'exposant de cette raison. 43.

Soit A le premier terme ou l'antécédent de la raison de A à B . L'exposant de cette raison, ou ce qui est la même chose le quotient de la division de ces termes l'un par l'autre soit q , il marque combien de fois A est dans B , ou quelle partie B est de A . Par conséquent étant pris autant de fois qu'il y est contenu, c'est-à-dire, étant multiplié par q , il doit devenir égal à B , & qu'il a divisé. Ainsi $Aq = B$; ce qu'il falloit prouver. 44.

REMARQUE.

Je suppose presque toujours dans la suite, que ce sera l'antécédent qui sera plus petit. Ainsi l'ayant nommé A le conséquent B , je dirai que $Aq = B$; quoique s'il en étoit au contraire, & que l'antécédent A fût plus grand que le conséquent B , il soit également vrai de dire, que le terme A multiplié par l'exposant de A à B produira toujours le conséquent B , puisque l'exposant peut marquer également la manière de contenir ou d'être contenu, soit que la raison soit

fourde ou de nombre à nombre. Ainsi lorsque l'antécédent A est plus petit que le conséquent B , l'exposant de cette raison sera plus grand, que l'unité; & au contraire plus petit (ce qu'on nomme Arithmétiquement une fraction) lorsque l'antécédent est plus grand que le conséquent. Mais de quelque manière que la proportion soit ordonnée, le premier terme multipliant l'exposant de sa raison au second, il produira toujours ledit second terme qu'il avoit divisé.

PROPOSITION III.

44. Quatre termes demeurent en proportion, quel que changement qu'on y fasse, pendant que le premier antécédent est à son conséquent, comme le second antécédent, est à son conséquent; & c'est la définition même de la proportion.

PROPOSITION IV.

45. Quatre grandeurs étant proportionnelles, permutando, c'est-à-dire, les changeant & faisant que les antécédens deviennent les conséquens, elles seront encore proportionnelles.

Si $A.B :: C.D$, il faut prouver que $B.A :: D.C$.

Contenir & être contenu, sont des termes réciproques. Ainsi si A contient B , comme C contient D , & par conséquent qu'il y ait égalité de raisons, il faut que B soit contenu dans A ; comme D est contenu dans C , & qu'ainsi il y ait encore égalité de raisons. Quand on tire une conséquence de cette proportion, cela s'appelle conclure permutando, ou par raison inverse.

PROPOSITION V.

46. Quatre grandeurs étant proportionnelles, alternando, c'est-à-dire, en comparant le premier

antécédent avec le second antécédent, & le premier conséquent avec le second conséquent, ces quatre grandeurs seront encore proportionnelles. Eucl. V. Prop. 16.

Soit cette proportion $A.B :: C.D$. Il faut prouver qu'alternando $A.C :: B.D$. Supposant que q est l'exposant de ces deux raisons * § n. 43. $Aq = B$, & $Cq = D$. Donc au lieu de $A.B :: C.D$, je puis écrire $A.Aq :: C.Cq$. Il faut donc prouver qu'alternando $A.C :: Aq.Cq$; ce qui est évident : puisque le quotient de C divisé par A est $\frac{C}{A}$, le même que celui de Cq divisé par Aq , qui est $\frac{Cq}{Aq}$. Or selon les règles de la Division *, on peut effacer q qui est au dessus & au-dessous de la ligne, après quoi il ne reste que $\frac{C}{A}$; Ainsi ces deux raisons ayant un même exposant, sont égales. 44.

PROPOSITION VI.

Ajoûtant aux deux termes d'une raison deux autres termes de même raison à l'antécédent de la première l'antécédent de la seconde, au conséquent de la première le conséquent de la seconde; la même raison demeure. 47.

Soit cette proportion $A.B :: C.D$, il faut prouver que $A+C.B+D :: A.B$. L'exposant des raisons de A à B & de C à D est q . Ainsi $Aq = B$, & $Cq = D$. Il faut donc prouver que $A+C.Aq+Cq :: A.B$.

Le quotient de $Aq+Cq$ divisé par $A+C$, est q . Donc ces deux termes $A+C$ & $Aq+Cq$ 44.

+ Cq ayant un même exposant que A & Aq;
* 5 n. 41. ou que A & B, ils ont la même raison*.

PROPOSITION VII.

48. Retrachant des deux termes d'une raison deux autres termes de même raison, l'antécédent de l'antécédent, le conséquent du conséquent, la même raison demeure.

Soit cette proportion $A : B :: C : D$, il faut prouver que $A - C : B - D :: A : B$. Si l'exposant de ces raisons est q : donc $Aq = B & Cq = D$ *. Il faut ainsi prouver que $A - C : Aq - Cq :: A : B$. Or le quotient de $Aq - Cq$ divisé par $A - C$ est q : donc ces deux termes ont le même exposant, & partant la même raison que A & B.

PROPOSITION VIII.

49. Quatre grandeurs étant en proportion, composendo, c'est-à-dire, le premier antécédent, plus son conséquent est à son conséquent, comme le second antécédent plus son conséquent est à son conséquent, Eucl. V. Prop. 18.

$A : B :: C : D$, il faut démontrer que $A + B : C + D :: A : C$.
* 5 n. 46. $B : B :: C + D : D$. 1°. alternando $AC :: B : D$.
* 5 n. 46. Donc ajoutant * à A & à B les termes C & D, qui sont en même raison * $A + B : C + D :: B : D$;
* 5 n. 47. & derechef alternando $A + B : B :: C + D : D$: ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX.

50. Lorsque plusieurs grandeurs sont en proportion, la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent, Eucl. V. Prop. 12.

Soit $A : E :: C : D :: E : F$, il faut prouver

que $A + C + E : B + D + F :: A : B :: C : D :: E : F$. Par la Proposition précédente $A + C : B + D :: A : B$. Or la raison de C à D est la même, que celle de E à F : donc $A + C : B + D :: E : F$. alternando $A + C : E :: B + D : F$: donc encore, selon la précédente $A + C + E : B + D + F :: A : B$, ou $C : D$; car c'est toujours la même raison, C'est ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION X.

Quatre grandeurs étant en proportion, dividendo, c'est-à-dire, le premier antécédent moins son conséquent, est à son conséquent comme le second antécédent moins son conséquent est à son conséquent. Euclide V. Prop. 17.

Soit $A : B :: C : D$. Il faut prouver que $A - B : B :: C - D : D$. Puisque $A : B :: C : D$: donc alternando $A : C :: B : D$: donc ôtant B de A & D de C*, $A - B : C - D :: A : C$. Or la raison de A à C est la même que celle de B à D ; ainsi $A - B : C - D :: B : D$. Donc alternando $A - B : B :: C - D : D$; ce qu'il falloit prouver.

AVERTISSEMENT.

La raison inverse de la division, c'est-à-dire, le changement d'une proportion où l'on conclut dividendo, s'appelle conversion de raison : par exemple, si $A - B : B :: C - D : D$, en changeant ainsi $A - B : C - D :: B : D$. après ce dernier changement, la proportion demeure encore, comme il est évident ; & cela se nomme Conversion de Raison, terme qui n'est point nécessaire.

PROPOSITION XI.

51. Deux grandeurs qui ont une même raison avec une troisième, sont égales entr'elles. Eucl. V. Prop. 9.

Si $A : B :: C : B$. Il faut que $A = C$: car q soit l'exposant de la raison A de à B ; il le sera de celle de C à B, qui est la même : donc $Aq = B$, & $Cq = B$ *, partant $Aq = B = Cq$. Ces deux grandeurs étant égales à une troisième, savoir, à B, elles sont égales entr'elles par le troisième axiome.

PROPOSITION XII.

53. Deux raisons égales à une troisième raison, sont égales entr'elles. Eucl. V. Prop. 11.

Si $A : B :: E : F$, & $C : D :: E : F$, il faut prouver que $A : B :: C : D$. Si l'exposant de la raison de A à B est q, celui de la raison de E à F qui est la même, est aussi q. Or celui de C à D est le même, que celui de la raison de E à F. C'est donc encore q. Les deux raisons de A à B, & C à D, ont donc un même exposant ; ainsi elles sont égales*.

PROPOSITION XIII.

54. Lorsque deux grandeurs sont multipliées par une même grandeur, elles sont en même raison après avoir été multipliées, qu'avant que d'être multipliées.

On a multiplié A & B par x, il faut prouver que $Ax : Bx :: A : B$. L'exposant de la raison de A à B est $\frac{A}{B}$, & celui de la raison de Ax à Bx est $\frac{Ax}{Bx}$. Or c'est un même exposant ; car

dans $\frac{Ax}{Bx}$ ayant effacé x qui se trouve au dessus,

& au dessous de la ligne, reste* $\frac{A}{B}$; partant* 5 n. 41. ces deux raisons ayant un même exposant, elles sont égales*.

PROPOSITION XIV.

Divisant deux grandeurs par une troisième, les quotiens de ces divisions seront en même raison que ces grandeurs.

Soient deux grandeurs B & D. Je les divise par x. Le quotient de B par x soit nommé p, & celui de D par x, soit nommé q ; il faut prouver que $p : q :: B : D$. Or $px = B$, & $qx = D$; donc $px : qx :: B : D$. p & q ayant été multipliés par x, selon la Proposition précédente $px : qx :: p : q$. Donc puisque $px : qx :: B : D$, il faut que $p : q :: B : D$,* ce qu'il falloit démon- * 5 n. 53. trer.

PROPOSITION XV.

Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, le produit ou le rectangle des extrêmes est égal à celui des moyens. Eucl. VI. Prop. 16.

$A : B :: C : D$. Il faut prouver que $A \times D = B \times C$. Soit x l'exposant de ces deux raisons égales : donc $Ax = B$ & $Cx = D$; ainsi je puis exprimer cette proportion de la sorte : $A : Ax :: C : Cx$. Il faut donc démontrer que $ACx = ACx$; ce qui est évident.

COROLLAIRE.

Trois grandeurs étant en proportion continue, le produit des extrêmes est égal au carré du terme moyen. Eucl. VI. Prop. 17.

Soient $A : B : C$. Puisque $A : B :: B : C$: donc $AC = BB$, ou $AC = B^2$.

PROPOSITION XVI.

38. Lorsque quatre grandeurs sont tellement disposées, que le rectangle ou produit des extrêmes est égal à celui des moyens, elles sont proportionnelles. Eucl. VI. Prop. 16.

Dans ces quatre lignes, A, B, C, D le produit AD des extrêmes est égal à BC produit des moyens, il faut démontrer que $A : B :: C : D$ soit x le quotient de B divisé par A & z , celui de D par C : donc $Ax = B$, & $Cz = D$. Ainsi je réduis ces quatre termes à ceux-ci, A, Ax, C, Cz . Selon qu'on le suppose $A \times Cz = Ax \times C$. Orant de part & d'autre $A \times C$, restera $z = x$. Par conséquent l'exposant de la raison de A à B est égal à celui de la raison de C à D ; ainsi elles sont égales * : par conséquent ces quatre grandeurs sont proportionnelles.

COROLLAIRE I.

39. En changeant les quatre termes d'une proportion, pourvu que les deux mêmes termes soient toujours ou les deux extrêmes ou les deux moyens, ils seront toujours rangés proportionnellement.

Soient ces quatre termes $A, B :: C : D$, pourvu que A & D , par exemple, soient toujours ou les deux moyens ou les deux extrêmes, leurs produits seront toujours égaux ; par conséquent ils seront proportionnels, selon cette Proposition.

COROLLAIRE II.

40. Divisant le produit des moyens d'une proportion par le premier, le quotient de la division sera le quatrième terme, & divisant ce même produit par le quatrième, le quotient sera le premier :

Car ce quotient, multipliant le diviseur, refait le même produit qui a été divisé *.

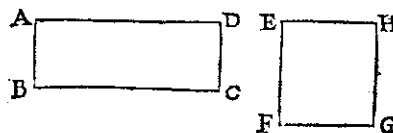
REMARQUE.

Remarquez que ces deux dernières Propositions & leurs Corollaires sont d'un très-grand usage dans la Geometrie, aussi-bien que dans l'Arithmétique, étant le fondement de toutes les Regles de trois, ou de proportion.

DEFINITION.

Le produit de deux grandeurs étant égal à celui de deux autres (elles peuvent donc faire une proportion, si la première est à la troisième, comme la quatrième est à la seconde, cette proportion se nomme Reciproque, ou Inverse.

Soient ces deux rectangles AC & EG égaux. Si $AB, EF :: FG, BC$, cette proportion se



nommera Reciproque ou Inverse, laquelle commence & finit dans la même figure. Si un des côtés de ces deux rectangles est plus grand, l'autre est reciproquement plus petit.

PROPOSITION XVII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra d'un côté, & autant d'autres d'un autre côté, lesquelles étant prises de deux en deux soient en même raison ; celles-là en raison égale, seront proportionnelles. Eucl. V. Prop. 22.

Soient trois grandeurs A, B, C d'un côté, &

trois autres D, E, F de l'autre côté. Si $A, B :: D, E$ & $B, C :: E, F$, il faut démontrer qu'en raison égale $A, C :: D, F$.

46. 1°. Alternando. $B, F :: A, D$, & $B, E :: C, F$; donc les deux raisons de A à D , & de C à F étant égales à celle de B à E , elles sont égales * par conséquent $A, D :: C, F$, & alternando $A, C :: D, F$; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVIII.

43. Si la première est à la seconde comme la troisième à la quatrième, & la cinquième à la seconde comme la sixième à la quatrième, la première plus la cinquième sera à la seconde comme la troisième plus la sixième sera à la quatrième. Eucl. V. Prop. 24.

Soient A, B, C, D, E, F six grandeurs ; si la première A est à la seconde B comme la troisième C est à la quatrième D , & la cinquième E à la seconde B comme la sixième F à la quatrième D ; ce qui s'exprime ainsi :

$$A : B :: C : D \text{ \& } E : B :: F : D.$$

- Je dis que $A + E : B :: C + F : D$; car 1°. alternando *, $A, C :: B, D$ & $E, F :: B, D$; donc * $A, C :: E, F$: donc $A + E : C + F :: B, D$; donc * A, C *. Et puis que $A, C :: B, D$; donc * $A + E : C + F :: B, D$ *, & alternando * $A + E : B :: C + F : D$; ce qu'il falloit démontrer.

Propositions touchant les Proportions qu'Euclide, dans son cinquième Livre, énonce d'une autre manière que nous n'avons fait.

Euclide nomme Grandeur multiple, celle

qu'une plus petite grandeur mesure exactement tant de fois ; & Grandeurs équimultiples, celles qui contiennent un égal nombre de fois la grandeur dont elles sont multiples. Le produit d'une grandeur multipliée par une autre, est le multiple de cette grandeur. Ainsi Ax est le multiple de A ; mais A & B ayant été multipliés par le même multiplicateur x , ces deux produits Ax & Bx sont équimultiples de A & B . Les Propositions suivantes ont été démontrées ci-dessus, comme vous l'allez voir. On ne les met donc ici, que parce qu'elles n'ont pas été proposées de la manière que le fait Euclide, dans son Livre V.

PROPOSITION I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, équimultiples d'autant d'autres grandeurs, chacune à la sienne ; comme l'une sera multiple de l'une, ainsi les toutes seront multiples des toutes.

J'exprime ainsi cette Proposition Bx & Cx étant équimultiples de B & de C , je dis que la grandeur Bx est à B & Cx à C , comme $Bx + Cx$ à $B + C$.

- 1°. $Bx, Cx :: B, C$. 2°. alternando. $Bx, B :: Cx, C$. 3°. Ajoutant donc à Bx & à B les grandeurs Cx & C , qui sont en même raison *, * $Bx, B :: Bx + Cx, B + C$, & $Cx, C :: Bx + Cx, B + C$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION II.

Si la première est autant multiple de la seconde, que la troisième de la quatrième, & la cinquième autant multiple de la seconde, que la sixième de la quatrième ; la composée de la première & de la cinquième sera autant multiple

de la seconde, que la composée de la troisième & de la quatrième se fera de la quatrième.

Si $A. B :: C. D$, & que $E. B :: F. D$; je dis que $A + E. B :: C + F. D$.

Puisque $A. B :: C. D$ & $E. B :: F. D$; donc alternando $A. C :: B. D$ & $E. F :: B. D$; Ainsi la raison de A à C est la même que celle de E à F , ces deux raisons étant la même que

* § n. 53. celle de B à D ; Partant $A. C :: E. F$. Donc

* § n. 47. ajoutant E avec A , & F avec C * $A + E, C + F :: B. D$. Or alternando $A + E. B :: C + F. D$: ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION III.

66. Si la première est autant multiple de la seconde que la troisième de la quatrième, & qu'on prenne les équi-multiples de la première & de la troisième ; le multiple de la première sera autant multiple de la seconde, que le multiple de la troisième le sera de la quatrième.

Une grandeur multiple contient celle dont elle est le multiple ; ainsi c'est la même chose que si on disoit, si la première contient autant de fois la seconde, que la troisième contient la quatrième. Ainsi il s'agit de démontrer que si $A. B :: C. D$, & que E & F soient équi-multiples de A & C ; c'est-à-dire, que E contienne A comme F contient C , qu'ainsi $A. C :: E. F$; il faut que $B. D :: E. F$. Car puisque $A. B :: C. D$; donc alternando $A. C :: B. D$. Or $A. C :: E. F$. Ainsi la raison de B à D est la même que celle de E à F , étant égale à une même raison*.

* § n. 53.

PROPOSITION IV.

67. Si la première est à la seconde en même raison que la troisième à la quatrième ; aussi les équi-multiples

équi-multiples de la première & de la troisième, auront même raison aux équi-multiples de la seconde & de la quatrième, en quelque multiplication que ce soit, si elles sont prises ainsi qu'elles se répondent.

Cela veut dire que si $A. B :: C. D$, ainsi alternando $A. C :: B. D$; il faut que $Ax. Cx :: Bx. Dx$.

Car * $Ax. Cx :: A. C$; & $Bx. Dx :: B. D$. * § n. 54.

Mais, $A. C :: B. D$; donc * $Ax. Cx :: Bx. Dx$; ce qu'il falloit démontrer. * § n. 53.

PROPOSITION V.

68. Si une grandeur est autant multiple d'une grandeur, que la retranchée de la retranchée ; aussi le reste sera autant multiple du reste, que la toute de la toute.

Cette Proposition se peut exprimer ainsi : Si $A. B :: E. F$; je dis que $A - E. B - F :: A. B$. Car alors on leur ôte des grandeurs qui sont en même raison : ainsi elles demeurent en même raison*.

* § n. 48.

PROPOSITION VI.

69. Si deux grandeurs sont équi-multiples de deux autres grandeurs, & qu'on retranche d'elles des équi-multiples, ou les restes seront égaux aux mêmes, ou équi-multiples d'elles.

J'exprime ainsi cette Proposition. Si $Ax. Bx :: Ax - C. Bx - D$; je dis que $Ax - C. Bx - D :: A. B$.

Cela est évident : car $Ax. Bx :: A. B$. Or * § n. 54. deux raisons égales à une troisième, sont égales*. * § n. 53. Ainsi si $Ax. Bx :: Ax - C. Bx - D$; il faut que $Ax - C. Bx - D :: A. B$.

H

PROPOSITION VII.

70. Les grandeurs sont entr'elles comme l'ont leurs équi-multiples entr'elles, étant prises comme elles se répondent.

$Bx. Cx :: B. C$ ou $Bx. B :: Cx. C$; c'est ce qui a été prouvé*.

* § n. 54.

Les autres Propositions du cinquième Livre d'Euclide, sont dans les endroits qui leur conviennent.

SECTION IV.

Des raisons Composées, & de leurs Propriétés.

AVERTISSEMENT.

Lorsque l'exposant d'une raison est simple, l'on doit dire de cette raison qu'elle est simple ; & qu'elle est composée, si son exposant est fait de l'Addition ou de la Multiplication de deux ou de plusieurs autres exposans. Par exemple, l'exposant de la raison de A à B soit 5, si on considère que ce nombre peut être fait de l'addition de 2 & de 3 exposans de la raison double, & de la raison triple, on pourroit dire que la raison de A à B est composée. Si l'exposant de cette raison de A à B étoit six, nombre qui est fait de deux multiplié par trois ; c'est pour lors qu'on doit dire que cette raison est composée, savoir de ces deux exposans 2 & 3 multipliés l'un par l'autre. Car l'usage veut que par une raison composée on n'entende qu'une raison dont l'exposant est fait non par l'addition, mais seule-

ment par la multiplication de deux ou de plusieurs exposans.

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

Les raisons composées sont celles dont les exposans sont faits de la multiplication de deux ou plusieurs exposans.

71.

Soit la raison de A à B dont x est l'exposant, & que $x = zy$; alors cette raison de A à B est dite composée des deux raisons, dont z & y sont les exposans.

DEFINITION II.

Une raison composée de deux raisons égales, s'appelle doublée.

72.

Si l'exposant de la raison de A à B est fait de z multiplié par z , c'est-à-dire, si zz est l'exposant de cette raison, elle est doublée.

COROLLAIRE.

Ainsi une raison qui a pour son exposant un carré, est une raison doublée.

73.

Soit zz , ou z^2 , l'exposant de la raison de A à B . Il est fait de z multiplié par z , ainsi de deux exposans égaux : il est donc l'exposant d'une raison doublée.

DEFINITION III.

Une raison composée de trois raisons égales, se nomme Triplée.

74.

COROLLAIRE.

Ainsi une raison qui a pour son exposant un cube, est une raison Triplée.

75.

Si le cube zzz , ou z^3 est l'exposant de la raison de A à B , cette raison est triplée ; car son

H ij

172 *Elémens de Geometrie.*
exposant est fait de la multiplication de ces trois grandeurs égales z, z, z .

THEOREME I.

76. Plusieurs grandeurs étant de suite, la raison de la première à la dernière est composée des raisons de toutes les grandeurs qui sont entre les deux extrêmes.

Soient ces grandeurs $A, B, C, D, E, F, &c.$ Il faut démontrer que la raison de A à C est composée de celles de A à B , & de B à C . Soit * 5 n. 43. * l'exposant de A à B , donc $Ax = B^*$; celui de B à C est z : donc par la même raison Bz , ou $Axz = C$. Ainsi je puis changer les trois grandeurs A, B, C en celles-ci A, Ax, Axz . Je divise Axz par A , le quotient de la division sera xz exposant de la raison de A à Axz , lequel est fait des exposans de ces raisons multipliez l'un par l'autre; partant par la première définition, la raison de A à C est composée de celle de A à B , & de celle de B à C . Par cette méthode je puis démontrer, que la raison de A à F est composée de toutes les raisons des grandeurs interposées.

THEOREME II.

77. La raison de deux plans est composée des raisons qu'ont les côtes de l'un aux côtes de l'autre, de la largeur à la largeur, de la longueur à la longueur.

Soient ces deux plans ab & cd . Il faut démontrer que leur raison est composée de celles de



174 *Elémens de Geometrie.*

Soit $a, b :: c, d$; le produit ac des antécédens, selon la Proposition précédente, est à bd celui des conséquens en raison composée de celles de a à b & de c à d , qui étant égales, cette * 5 n. 72. * raison est doublée *. Le carré aa de l'antécédent a est à bb , carré du conséquent b , en raison composée des raisons de a à b & de a à b ; & par conséquent doublée de ces deux raisons. Or ces raisons sont les mêmes que ces deux raisons de a à b & de c à d . Par conséquent le produit ac est au produit bd , comme le carré aa est au carré bb .

COROLLAIRE.

80. Les plans semblables, c'est-à-dire, dont les côtes sont proportionnels, sont entr'eux en raison doublée de celles des côtes de l'un aux côtes de l'autre.

Leur raison est composée de celles des côtes de l'un, aux côtes de l'autre *. Ces deux raisons * 5 n. 72. * sont égales. C'est donc une raison doublée *. Ainsi tous les quarrés étant des plans semblables, sont en raison doublée de celles de leurs côtes.

THEOREME V.

81. Lorsque six grandeurs sont proportionnelles, le produit des trois antécédens est à celui des trois conséquens en raison triplée de chaque antécédent à son conséquent, ou comme le cube de chaque antécédent au cube de son conséquent.

Soient $a, b, c :: d, e, f$ le produit abc est au produit def en raison composée de celles de * 5 n. 73. * a à d , de b à e , & de c à f ; *. Or ces trois raisons sont égales. Cette raison composée est donc * 5 n. 74. * triplée *. La raison de aaa cube de a est à ddd cube de d en raison triplée de celle de a à d . Or

Livre III. Section IV. 175

a à c & de b à d . Soit x exposant de la raison de a à c : donc $ax = c$. Soit x celui de b à d , * 5 n. 43. * alors $bx = d$, & $axbx = cd$. Divisant $axbx$ par ab , le quotient sera x composé de x & de x exposans des raisons de a à c , & de b à d : donc ces deux plans sont en raison composée de celles de a à c & de b à d , c'est-à-dire, de leurs côtes: ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

Il faut se souvenir qu'on suppose toujours ici, que tous les Plans & les Solides sont rectangles; ainsi qu'on l'a fait remarquer cy-devant.

THEOREME III.

La raison d'un solide à un autre solide, est composée de la raison qu'ont les trois côtes de l'un aux autres trois côtes de l'autre. 78.

Soient deux solides abc & def . Il faut démontrer que leur raison est composée de ces trois raisons $\frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f}$. La raison de abc à def , se

peut exprimer ainsi $\frac{abc}{def}$. Or cet exposant est fait des trois exposans des raisons, dont il est question de prouver que la raison de ces deux solides est composée. Partant selon la première Définition, ces deux solides sont entr'eux en raison composée de celles de leurs côtes.

THEOREME IV.

Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, le produit des antécédens est à celui des conséquens en raison doublée de celles de chaque antécédent à son conséquent, ou comme les quarrés de chaque antécédent au carré de son conséquent. 79.

H iij

Livre III. Section IV. 176

c'est la même raison que celle de a à d , de b à e , & de c à f ; par conséquent les produits dont il est question, sont entr'eux comme le cube de chaque antécédent au cube de son conséquent.

COROLLAIRE.

Les solides semblables, c'est-à-dire, dont les côtes sont proportionnels, sont en raison triplée de celles des côtes de l'un au côté de l'autre. 82.

Les côtes de ces deux solides semblables sont six grandeurs proportionnelles; partant la raison de l'un à l'autre est triplée.

Ainsi tous les cubes étant des solides semblables, sont en raison triplée de celles de leurs côtes.

THEOREME VI.

Dans une progression Geometrique, la raison de deux termes entre lesquels il y a deux intervalles, est doublée; & s'il y a trois intervalles, triplée. 83.

Soit $... A, B, C, D$. La raison de A à C est composée ou égale à une raison composée de celle de A à B , & de celle de B à C *. Or ces * 5 n. 76. * termes étant en progression, ces deux raisons sont égales. La raison qu'elles composent est donc une raison doublée *. On démontre de la * 5 n. 72. * même manière, que la raison de a à d est triplée *. * 5 n. 74.

THEOREME VII.

Lorsque des grandeurs sont proportionnelles, leurs quarrés sont proportionnels. 84.

Si $a, b :: c, d$; je dis que $aa, bb :: cc, dd$. Ces quarrés sont en raison doublée de celles de leurs côtes *, c'est-à-dire, en raison doublée de * 5 n. 80. * a à b , & de c à d : Et comme ces deux raisons sont égales par la supposition, aussi celles qu'el-

H iij

les composent sont égales ; la raison de aa à bb , est donc égale à celle de cc à dd ; ainsi ces quatre sont en proportion.

THEOREME VIII.

85. Lorsque des grandeurs sont proportionnelles ; leurs cubes sont proportionnels.

Si $a, b :: c, d$; je dis que $aaa, bbb :: ccc, ddd$: car la raison de a^3 à b^3 , & celle de c^3 à d^3 * 5 n. 32. sont triplées des mêmes raisons*. Ainsi elles sont égales.

THEOREME IX.

86. Trois grandeurs étant en proportion continuë, le carré de la première est à celui de la seconde, comme la première à la troisième.

Soient $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$; je dis que $a^2 : b^2 :: a : c$. La raison de a à c est composée des deux raisons de a à b & de b à c *, ces deux raisons sont * 5 n. 76. égales. Ainsi la raison de a à c est doublée*. Or la raison de a^2 à b^2 est aussi doublée des mêmes * 5 n. 80. raisons* : donc $a^2 : b^2 :: a : c$.

THEOREME X.

87. Quatre grandeurs étant en proportion continuë, le cube de la première est au cube de la seconde, comme la première est à la quatrième.

Soient $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. La raison de b à f est * 5 n. 76. composée des trois raisons interpolées*, & ces trois raisons étant les mêmes, cette raison de b à f est triplée*. Or le cube b^3 est au cube f^3 en * 5 n. 32. raison triplée de la même raison* : donc $b^3 : f^3 :: b : f$.

THEOREME XI.

88. Si trois grandeurs & autant d'autres prises de deux en deux sont en même raison, & en.

proportion troublée, ces grandeurs en raison égale seront proportionnelles. Eucl. V. Prop. 23.

Trois grandeurs A, B, C , & autres D, E, F prises de deux en deux, sont en même raison : mais la proportion est troublée ; c'est-à-dire que $A : B :: E : F$, & $B : C :: D : E$, il faut démontrer que $A : C :: D : F$.

La raison de A à C est composée de celles de A à B , & de B à C . Celle aussi de D à F est composée de celles de D à E & de E à F . Or ces deux raisons le sont de raisons égales : car $A : B :: E : F$ & $B : C :: D : E$; par conséquent les composantes étant égales, les composées sont égales. Ainsi $A : C :: D : F$; ce qu'il falloit démontrer.

SECTION V.

De la comparaison des Raisons.

Eclaircissement touchant la grandeur ou la petitesse d'une Raison.

Les raisons sont des comparaisons. La raison de A à B , c'est le rapport de A à B . Or on peut comparer ces raisons, par exemple la raison de A à B , avec la raison de C à D , lesquelles raisons se pourront marquer ainsi, $\frac{A}{B}$ & $\frac{C}{D}$. Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, c'est-à-dire, si ces deux raisons sont égales, c'est une proportion, ou une égalité de raisons. Nous parlerons dans cette Section, de l'inégalité des raisons. Le signe de cette inégalité, c'est $>$ ou $<$. Lors

H v

que l'ouverture de ce signe est de la droite à la gauche, cela marque que la raison est plus grande. Ainsi si $\frac{M}{N} > \frac{P}{Q}$, que la raison de M à N est plus grande que celle de P à Q . Si l'ouverture du signe de l'inégalité est de la gauche vers la droite, cela marque que la raison est plus petite. Si $\frac{M}{N} < \frac{P}{Q}$, que la raison de M à N est plus petite que celle de P à Q .

Il faut d'abord examiner ce qui fait qu'une raison est plus grande, ou plus petite. Ces mots de grand & de petit, sont relatifs. Une plus grande raison, c'est quand la chose qu'on compare, par rapport au terme de la comparaison, est plus grande. La raison est plus petite, si cette chose qu'on compare est plus petite, par rapport au terme de la comparaison.

L'idée la plus nette & la plus précise de la grandeur, & de la petitesse, c'est que ce qui est plus grand contient ce qui est plus petit : & plus il le contient de fois, plus il est grand. Ce qui est contenu est d'autant plus petit, qu'il est contenu plus de fois. En divisant l'antécédent d'une raison par le conséquent, le quotient de la division qui expose comment ou combien de fois l'un est dans l'autre, est l'exposant de cette raison, duquel par conséquent dépend sa grandeur ou sa petitesse. Quand cet exposant est plus grand, la raison est plus grande. Mais il faut qu'alors l'antécédent contienne son conséquent, ou soit plus grand. Car comme je le viens de remarquer, plus une grandeur contient celle avec qui on la compare, plus elle est grande. Mais si au contraire elle étoit contenue ; alors plus l'exposant

seroit petit, l'antécédent seroit plus grand, ou moins petit ; car moins une grandeur est contenue, plus elle est grande. Lorsque, dis-je, l'antécédent est plus grand, ou qu'il contient plus de fois son conséquent, l'exposant de la raison étant plus grand, la raison est plus grande : & si l'antécédent est plus petit que le conséquent, ou s'il est contenu dans le conséquent, l'exposant de la raison étant plus grand, la raison est plus petite.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

Faire que deux différentes raisons aient le même conséquent.

Soient ces deux différentes raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$.

Pour faire qu'elles aient le même conséquent, je les multiplie, l'antécédent & le conséquent de la première par le conséquent de la seconde ; ce qui produit $\frac{ad}{bd}$. Je multiplie de même l'antécédent de la seconde raison, & son conséquent par le conséquent de la première ; ce qui produit $\frac{bc}{bd}$. Ainsi les deux raisons proposées sont réduites à celles-ci, $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$. Ces deux raisons ont le même conséquent, & cependant conservent toujours le même rapport de l'antécédent à son conséquent*.

* 3 n. 54.

PROPOSITION II.

THEOREME I.

Deux raisons qui ont un même conséquent, sont entr'elles comme leurs antécédens.

H vj

Soient les deux raisons de A à X , & de B à X , qui ont un même conséquent X . Il faut démontrer qu'elles sont l'une à l'autre, comme les antécédens A & B . Je divise A & B par X , & ces deux se trouveront ainsi exprimées; la première

* 5 n. 11. sera $\frac{A}{X}$ & la seconde $\frac{B}{X}$. Or A & B étant divi-

sez par un même diviseur X , les quotiens $\frac{A}{X}$ & $\frac{B}{X}$ sont entr'eux comme A & B ; ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

En réduisant ainsi ces deux raisons $\frac{5}{10}$ & $\frac{2}{12}$ à celles-ci, qui ont un même conséquent $\frac{60}{120}$ & $\frac{20}{120}$, on voit quelle raison elles ont entr'elles, que 5, au regard de 10, a une plus grande raison, que 2 au regard de 12. Cela ferait douter qu'il fût vrai que la raison est plus grande, quand l'exposant est plus grand; car divisant 10 par 2 le quotient est 5, qui est plus petit que 6, le quotient de 12 divisé par 2. Mais il faut se souvenir de ce qu'on vient de voir, que quand les antécédens sont plus petits que leurs conséquens; moins l'exposant est grand, la raison est plus grande: 60 n'est contenu que deux fois dans 120, & par conséquent plus grand que 20, qui est contenu six fois.

PROPOSITION III.

THEOREME II.

91. Si deux grandeurs sont inégales, la plus grande a une plus grande raison à une même gran-

deur, que la plus petite, & plus grande raison à la plus petite, qu'à la plus grande. Eucl. V. Prop. 8.

Soient deux grandeurs inégales A & B . La plus grande est A , & C une troisième, telle qu'elle soit. Il faut démontrer 1°. que la raison de A à C , est plus grande que celle de B à A B C . J'exprime ainsi ces deux raisons

$\frac{A}{C}$ & $\frac{B}{C}$, ou $\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{C}$. Elles ont un même conséquent; ainsi selon la Proposition précédente, elles sont comme A & B . Or A est plus grand que B : donc $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$.

2°. Il faut démontrer que la raison de C à B est plus grande, que celle de C à A , que $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$. Je donne à ces deux raisons le même

conséquent *, les réduisant ainsi $\frac{AC}{AB}$ & $\frac{BC}{AB}$ * 5 n. 89.

La raison $\frac{AC}{AB}$ est donc la même que $\frac{C}{B}$; & la

raison $\frac{BC}{AB}$, la même que $\frac{C}{A}$ *. Or ces deux rai- * 5 n. 54.

sons $\frac{AC}{AB}$ & $\frac{BC}{AB}$ sont entr'elles *, comme A est * 5 n. 90.

à B . Mais A , selon la Proposition, est plus grand que B : donc la raison de C à B est plus grande, que celle de C à A ; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.;

THEOREME III.

De deux grandeurs, celle qui a une plus grande 22;

raison à une même, est la plus grande; & au contraire celle à laquelle une même a plus grande raison, est la plus petite. Eucl. V. Prop. 10.

Soient A & B deux grandeurs inégales. A a une plus grande raison avec C , que B avec C ; ainsi $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$ & $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$. Je dis que $A > B$; ce qu'il faut démontrer. 1°. On suppose donc * 5 n. 90. $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$. Or ces deux raisons sont comme A

& B . Il faut donc que $A > B$. 2°. Si $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$

il faut démontrer que B est plus petit que A . Ayant réduit ces deux raisons au même conséquent $\frac{C}{B}$ à $\frac{CA}{BA}$ & $\frac{C}{A}$ à $\frac{CB}{BA}$, selon qu'on le sup-

pose, il faut que $\frac{CA}{BA} > \frac{CB}{BA}$. Or ces deux

* 5 n. 90. raisons sont comme A & B ; il faut donc que A soit plus grand, & B plus petit.

PROPOSITION V.

93. Si la première est à la seconde comme la troisième à la quatrième, & que la troisième ait une plus grande raison à la quatrième, que la cinquième à la sixième; aussi la première aura une plus grande raison à la seconde, que la cinquième à la sixième. Eucl. V. Prop. 13.

Soient ces six grandeurs, A, B, C, D, E, F ; dont les quatre premières sont en proportion $A.B :: C.D$, ou $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Il faut démon-

trer que si $\frac{C}{D} > \frac{E}{F}$, la raison $\frac{A}{B}$ sera aussi plus grande, que la raison $\frac{E}{F}$. Puisque $\frac{A}{B} & \frac{C}{D}$

sont une même raison; $\frac{C}{D}$ étant plus grande

que $\frac{E}{F}$, il faut que $\frac{A}{B}$ soit aussi plus grand que $\frac{E}{F}$.

PROPOSITION VI.

Si la première est à la seconde comme la troisième à la quatrième, & que la première soit plus grande que la troisième; aussi la seconde sera plus grande que la quatrième; & si égale, égale; si plus petite, plus petite. Euclid. V. Prop. 14.

Soit cette proportion $A.B :: C.D$. Il faut démontrer que si $A = C$, de même $B = D$; & que si $A > C$, de même $B > D$; & enfin si $A < C$, de même $B < D$.

Alternando $A.C :: B.D$; ce qui ne seroit pas, si comme $A = C$, de même B n'étoit pas égal à D ; ou si A étant plus grand que C , B n'étoit pas plus grand que D ; ou si A étant plus petit que C , le terme B n'étoit pas aussi plus petit que D .

PROPOSITION VII.

Si trois grandeurs d'un côté & trois d'un autre étant prises de deux en deux sont en même raison, & qu'en raison égale la première soit plus grande que la troisième; aussi la quatrième sera plus grande que la sixième; & si égale,

184 *Elemens de Geometrie.*
égale ; si plus petite, plus petite. Eucl. V. Prop.
20.

Soient A, B, C d'une part, & D, E, F de l'autre. Soient $A. B :: D. E$ & $B. C :: E. F$. Si $A > C$; je dis que $D > F$. Si $A < C$, que $D < F$. Si $A = C$, que $D = F$; autrement A ne seroit pas à C , comme D est à F ; ainsi qu'on le suppose, s'il étoit ou plus grand ou plus petit : car deux grandeurs inégales ne peuvent pas contenir de la même manière une troisième grandeur, ou y être contenues.

PROPOSITION VIII.

96. Si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, prises de deux en deux sont en même raison, leur proportion étant sans ordre ; & qu'en raison égale la première soit plus grande que la troisième : aussi la quatrième sera plus grande que la sixième ; & si égale, égale ; si plus petite, plus petite. Eucl. V. Prop. 21.

Soient A, B, C & D, E, F . Si $A. B :: E. F$, & $B. C :: D. E$, & que A soit plus grand que C ; je dis que D sera plus grand que F ; si égal, égal ; si plus petit, plus petit : car C , ayant été posé plus petit que A , la raison de C à B est plus petite, que celle de A à B : donc puisque $B. C :: D. E$, & permutando $C. B :: E. D$, la raison de E à D est plus petite que celle de A à B , ou que celle de E à F , que est la même. D est donc plus grand que F ; le reste est aisé.

PROPOSITION IX.

97. Si quatre grandeurs sont en proportion, la plus grande jointe avec la plus petite, sera plus grande que les deux autres ensemble. Eucl. V. Prop. 25.

Livre III. Section V. 185

Soient ces quatre grandeurs en proportion $A. B :: C. D$. Je suppose A la plus grande & D la plus petite, & je dis que $A + D > B + C$.

Soit X l'excès de A par-dessus B , & Z l'excès de C par-dessus D ; ainsi $A = X + B$, & $C = Z + D$. Je mets donc ces nouvelles valeurs en place de A & de C , & j'ai cette proportion $X + B. B :: X + D. D$, qui est la même que la précédente. Il faut donc démontrer $X + B + D > B + Z + D$. J'en retranche de part & d'autre la grandeur $B + D$; ainsi il ne reste plus qu'à démontrer $X > Z$.

Puisque X est la différence de A à B , & Z celle de C à D . $A - B = X$ & $C - D = Z$. Or $A - B. B :: C - D. D$. * 50. 536. Mettant donc X & Z en place de leurs égales. $A - B & C - D$, on aura $X. B :: Z. D$ ou alternando * X. * 50. 46. $Z :: B. D$, & $B. D :: A. C$, suivant la supposition. Ainsi A étant plus grand que C , aussi $X > Z$; ce qu'il restoit à prouver.

PROPOSITION X.

Les grandeurs faites de grandeurs égales & inégales sont entr'elles, comme les inégales. 98.

Soient ces deux grandeurs ab & ac , on peut concevoir qu'elles sont faites de b & de c multipliés par a ; ainsi $ab. ac :: b. c$, de même * 50. 546. $abd. acd :: b. c$.

COROLLAIRE.

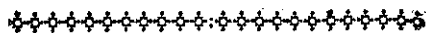
Ainsi les triangles & les parallelogrammes de même hauteur sont l'un à l'autre comme leurs bases. Eucl. VI. Prop. 1. 99.

Les grandeurs des triangles & des parallelogrammes * dépendent de leur hauteur & de leurs bases ; donc si la hauteur est la même, ils seront comme leurs bases, 130. & 135.



ELEMENS DE GEOMETRIE

OU DE LA MESURE DE L'ÉTENDUE.



LIVRE QUATRIÈME.

Des raisons & proportions des Lignes ; des Triangles, des Figures, tant de leurs côtes & circuit, que de leurs surfaces.

SECTION PREMIERE.

Méthode pour trouver & démontrer les raisons, & les proportions des Lignes.

AVERTISSEMENT.

SELON la notion qu'on a donnée des raisons & des proportions, il est évident que pour démontrer, que quatre Lignes sont en proportion, il faut faire voir que si on les divisoit en deux, ou en trois,

Livre IV. Section I. 187

ou en tant de parties qu'on voudra. Si chaque partie de la première étoit égale à chaque partie de la seconde, chaque partie de la troisième seroit aussi égale à chaque partie de la quatrième. Si les parties de la première étoient plus grande que celles de la seconde, celles de la troisième seroient plus grandes que celles de la quatrième ; si plus petites, plus petites ; & que si chaque partie de la première ne se trouvoit pas tant de fois dans la seconde, chaque partie de la troisième ne se trouveroit pas exactement tant de fois dans la quatrième. Enfin, que s'il y avoit excès ou défaut, en divisant la première & la seconde l'une par l'autre, il y auroit excès ou défaut, en divisant la troisième & la quatrième l'une par l'autre. C'est la méthode la plus naturelle, puisque raison n'est que la manière de consentir, & d'être consentu ; & l'on ne sauroit prouver plus sensiblement qu'une première Ligne est contenue dans une seconde, comme une troisième dans une quatrième, qu'en prouvant de ces quatre Lignes ce que nous venons de dire. C'est la méthode qu'on va suivre.

DÉFINITION.

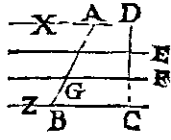
On appelle Espace parallèle, celui qui est compris entre deux lignes parallèles. 1.

X & Z étant deux lignes parallèles, l'espace qu'elles renferment se nomme espace parallèle.

LEMME PREMIER.

Si l'on coupe un espace parallèle, ou la perpendiculaire, qui le mesure par des lignes parallèles ; les lignes obliques comprises dans cet espace seront partagées en autant de parties, que la perpendiculaire. 2.

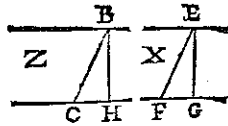
X & Z deux parallèles renferment l'espace ; que la perpendiculaire DC mesure. La ligne AB est une oblique, comprise dans cet espace, si on divise DC en trois parties, menant les deux parallèles E & F ; je dis que ces deux parallèles couperont aussi en trois parties l'oblique AB . Ces deux parallèles E & F divisant tout l'espace parallèle, compris entre X & Z en trois autres espaces parallèles, dans lesquels se trouve l'oblique AB , aussi bien que DC . Ainsi elle est divisée en autant de parties, que la perpendiculaire DC ; ce qu'il falloit prouver.



LEMME II.

3. Les lignes obliques, qui dans des espaces parallèles égaux font les mêmes angles, sont égales, & également obliques.

Soient Z & X deux espaces parallèles égaux ; où les lignes obliques BC & EF font les angles BCH & EFG égaux ; je dis que ces deux lignes sont égales, & également obliques. Des points B & E , je mène perpendiculairement les lignes BH & EG ;



- * L. 1. n. lesquelles sont égales ; ainsi les triangles BCH , EFG sont rectangles & entièrement égaux ; & partant BC & EF sont des lignes égales : comme * L. 2. n. aussi CH & FG ; par conséquent * BC & EF sont également obliques ; ce qu'il falloit prouver.

LEMME III.

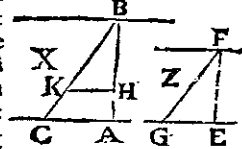
4. Les lignes obliques qui font les mêmes angles

dans des espaces parallèles inégaux, sont inégales ; plus grandes, si l'espace est plus grand ; plus petites, si l'espace est plus petit.

Les lignes BC & FG obliques dans les espaces X & Z , font les mêmes angles. La perpendiculaire AB est plus grande que EF ; ainsi l'espace X est plus grand que l'espace Z : il faut démontrer que l'oblique FG est plus petite, que l'oblique BC .

Soit pris sur BA la partie BH égale à EF ; & par H soit menée une parallèle à la base AC ;

les deux triangles ABC & EFG étant rectangles & l'angle BCA étant égal à FGE , comme on le suppose, ils sont équiangles *. L'angle BKH est égal



à BCA , & BKH à BAC *. Ainsi le triangle BKH est équiangle avec BAC ; & partant avec FGE . On suppose FE égal à BH ; donc $FG = BK$ *. Or BK est partie de BC ; donc FG égale à BK est aussi partie de BC , & par conséquent plus petite ; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME I.

Ayant partagé une espace parallèle par deux ou plusieurs parallèles, la perpendiculaire de cet espace & la ligne oblique qui y sera, seront coupées proportionnellement.

1°. La ligne oblique sera coupée en autant de parties que la perpendiculaire, par le Lemme premier *. Si par exemple, la perpendiculaire est coupée en cent parties, l'oblique sera aussi

coupée en cent parties.

- 2°. Si les parties de la perpendiculaire sont égales entr'elles, celles de l'oblique seront égales entr'elles, par le Lemme second * : car ces obliques font les mêmes angles sur ces parallèles ; ainsi elles sont égales & également obliques, selon ce Lemme. Si les cent parties dans lesquelles la perpendiculaire a été coupée sont toutes égales, les cent parties de l'oblique seront donc aussi toutes égales.

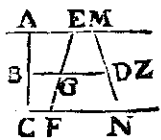
- 3°. Si les parties de la perpendiculaire sont inégales, celles de l'oblique selon le troisième Lemme sont aussi inégales. D'où il suit, que si on prend cent parties égales dans la perpendiculaire, & qu'il reste une partie qui soit ou plus petite ou plus grande, l'oblique se trouvera divisée, de sorte qu'après les cent parties égales, il y aura un reste plus petit, si le reste de la perpendiculaire est plus petit ; plus grand, si le reste de la perpendiculaire est plus grand, comme on l'a prouvé dans le Lemme troisième. Partant comme la toute sera contenue, ou contiendra la toute, les parties seront contenues ou contiendront les parties. Ainsi, selon la notion des proportions, les deux lignes dont il est question sont coupées proportionnellement.

THEOREME II.

5. Plusieurs lignes obliques étant dans un même espace parallèle, si on coupe cet espace par une ligne parallèle, ces lignes seront coupées proportionnellement.

Les lignes obliques EF & MN sont entre deux parallèles, entre lesquelles AC est perpendiculaire. Cet espace est partagé par Z une parallèle : donc par le Theorème précédent

MN , $AC :: MD$, AB & de même EF , $AC :: EG$. AB . Et alternando MN , $MD :: AC$, $AB :: EF$. EG . Donc MN , $MD :: EF$, EG . Et permutando, MN , $EF :: MD$, EG ; ce qu'il falloit prouver.



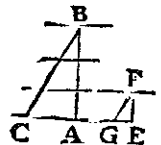
THEOREME III.

Les lignes obliques qui font les mêmes angles dans les espaces parallèles différens, sont entr'elles comme ces espaces.

Les lignes BC & FG obliques font les angles BCA & FGE égaux ; par conséquent si AB est égal à EF , par le Lemme second * $BC = FG$.

Si AB est plus grand que EF , par le Lemme troisième * BC sera plus grand que FG .

Si AB est par exemple triple de EF , alors BC sera triple de FG : car supposant que BA est partagé en trois parties égales ; par le Lemme premier * BC sera aussi partagé en trois parties, lesquelles par le Lemme second * seront chacune égale à GF ; car ces parties font les mêmes angles : ainsi BC est triple de FG , comme nous venons de le démontrer.



Par cette méthode on démontrera que telle partie que EF est de AB , l'oblique FG est partie de l'oblique BC ; ou que comme EF sera contenue en AB , aussi FG sera contenue en BC .

Si AB est égal, on contient une ou plusieurs fois EF , plus quelque reste, on démontrera que BC est égal ou contient de la même manière une ou plusieurs fois exactement FG , plus quelque reste. Ainsi les lignes également obliques, &c. ce qu'il falloit démontrer.

SECTION II.

Des Raisons & Proportions des côtes des Triangles.

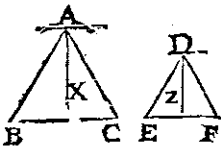
DEFINITION I.

2. Deux Triangles sont dits semblables, lorsque leurs côtes sont des angles égaux, ou qu'ils sont équiangles.

DEFINITION II.

9. Dans les Triangles semblables que l'on compare, les côtes opposés aux angles égaux sont nommez, Côtes Homologues.

X & Z sont des triangles semblables ou équiangles, chacun de leurs côtes, comme AB & DE opposés aux angles égaux C & F , sont nommez Homologues, c'est-à-dire, proportionnels. On va démontrer, que ce nom leur convient.



THEOREME I.

30. Deux Triangles semblables ont leurs côtes proportionnels. Eucl. VI. Prop. 4.

[E]

Je mène par le sommet des deux triangles ABC & DEF des lignes parallèles à leurs bases, & de leur sommet j'abaisse sur ces bases les perpendiculaires X & Z . Fig. précédente.

Les angles ABC & DEF sont égaux; les obliques AC & DF sont aussi les mêmes angles: Donc $AB : DE :: X : Z :: AC : DF$.

* 5 n. 7.

Ainsi $AB : DE :: AC : DF$. En menant par B & E des lignes parallèles aux côtes AC & DF , on démontrera de la même manière que $AB : DE :: BC : EF$, & qu'ainsi deux triangles semblables ont tous leurs côtes proportionnels.

C'est pour cette raison qu'on appelle Omologues, les côtes qui se répondent dans les figures semblables; parceque ces côtes sont proportionnels les uns aux autres, ou qu'ils ont même raison; ce que signifie ce mot Omologues.

THEOREME II.

Deux triangles semblables à un troisième sont semblables entr'eux. Eucl. VI. Prop. 21.

Soient A , B , C trois triangles. Si A & C sont semblables à B , les angles de B sont égaux à ceux de A & de C : Donc les angles de A & de C sont aussi égaux les uns aux autres. * L. 3. n. 52. selon la première Définition*, A & C sont semblables. * 5 n. 8.

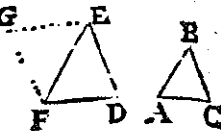
THEOREME III.

Si deux triangles ont leurs côtes proportionnels, ils seront semblables. Eucl. VI. Prop. 5.

Les côtes des deux triangles ABC & DEF sont tels, que $AB : BC :: FE : ED$, & $AC : AB :: DF : EF$. Je dis que ces deux triangles sont semblables.

I

Je fais sur EF l'angle GEF égal à ABC , & l'angle EFG égal à BAC ; ainsi EGF est égal à ACB . Par conséquent EFG & ABC



- * L. 2. n. 50. à ACB . Par conséquent EFG & ABC sont deux triangles semblables. * Ainsi il n'est pas besoin plus que de montrer que les deux triangles EFG & EFD sont égaux; & qu'ainsi EFD , le même que EFG , est semblable à ABC .

Puisque EFG & ABC sont semblables, donc $AB : BC :: EF : EG$. Par la supposition, $AB : BC :: EF : ED$: donc EG & ED , qui ont une même raison avec EF , sont égaux. * On démontrera de la même manière que tous les côtes de EFG , sont égaux à ceux de EFD ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME IV.

33. Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal, & les côtes qui comprennent cet angle proportionnels. Euclid. VI. Prop. 6. même figure.

L'angle FED est égal à ABC & $AB : BC :: FE : ED$; je dis que ABC & FED sont entièrement semblables. Pour le prouver, je fais comme ci-dessus le triangle EFG semblable à ABC , & je montre en la même manière, que les triangles EFG & DEF ont égaux: car $AB : BC :: EF : EG :: EF : ED$. Ainsi EG & ED ont une même raison avec EF : donc ils sont égaux. * Or puisque l'angle DEF est supposé égal à l'angle ABC : donc il l'est à FEG , qu'on a fait égal à ABC . Ainsi ces deux triangles DEF & GEF , ayant deux côtes égaux EG à ED , &

* L. 1. n. 52.

EF à EF , & les angles FED & GEF que ces côtes comprennent, égaux, ils sont égaux. * Donc $L. 1. n. 51.$ puisque DEF & GEF sont semblables à EGF , ils sont semblables entr'eux. * 5 n. 8.

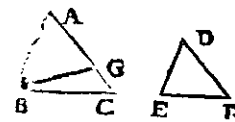
THEOREME V.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtes au long d'un autre proportionnels, les troisièmes angles étant de même espèce, c'est à dire, ou aigus, ou droits, ou obtus, ces deux triangles sont équiangles; & les angles, dont les côtes sont proportionnels, sont égaux. Eucl. VI. Prop. 7.

Soient ces deux triangles ABC & DEF , l'angle A est égal à l'angle D , & les côtes qui comprennent un autre angle proportionnels; je dis que, si C & F sont de même espèce, ces deux triangles sont équiangles; & les angles, dont les côtes sont proportionnels, égaux.

Que C & F soient

1°. aigus; je dis que ces triangles sont équiangles; & savoir que les angles B & E sont égaux, comme C & F .



Si B est égal à E , ces triangles, selon la Proposition précédente, sont équiangles. Mais si B est plus grand que E , soit fait ABG égal à DEF , dont le troisième angle AGB sera égal au troisième angle F , & partant aigu comme lui; & ABG & DEF seront équiangles, & semblables: ainsi $AB : BG :: DE : EF$. Or on suppose que $DE : EF :: AB : BC$. Ainsi $AB : BG :: DE : EF :: AB : BC$: donc BC & BG ayant une même raison avec AB sont égaux: ainsi

I ij

51.

le triangle GBC est isocèle, & par conséquent les angles BCG &

L. 2. n. BGC seront égaux,

84. & par conséquent

BGA sera plus

L. 2. n. grand qu'un droit.

17. Mais l'angle AGB

a été démontré égal

à l'angle F , qu'on a supposé aigu; ainsi il seroit

en même temps plus grand & plus petit qu'un

droit; ce qui est absurde.

Que C & F ne soient pas aigus: donc BGC

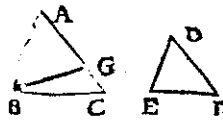
égal à C ne sera pas aigu; ce qui ne peut pas

L. 2. n. être. Par conséquent les angles ABC & E sont

84. nécessairement égaux; ainsi ABC & DEF sont

L. 2. n. entièrement égaux. Donc si dans les deux

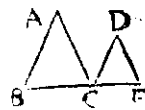
80. triangles, &c.



THEOREME VI.

35. Si deux triangles semblables ont un point commun, & les côtés homologues parallèles, les deux autres côtés se rencontrent directement. Eucl. VI. Prop. 3.

Soient ces deux triangles semblables ABC , DCF , qui ont un point commun, savoir C ; les côtés AB & DC sont parallèles, comme aussi AC & DE ; je dis que BC & CE est une ligne droite.



Puisque AB & DC sont parallèles, l'angle $BAC = ACD$ *, & l'angle $ABC = DCE$ par la supposition donc les trois angles ACB , ACD , DCE sont égaux aux trois angles ACB , CAB , ADC du triangle ABC , lesquels valent ensemble *L. 2. n. deux droits*: donc BCE est une ligne droite*.

L. 2. n. AED sont égaux & par la même raison CBD

27. & BDE *. On suppose ABC & CBD égaux;

*L. 2. n. donc CBD & BED seront aussi

23. égaux, & par conséquent

BDE & BED : ainsi le trian-

gle DBE , étant isocèle, BD

$= BE$. Or AB , AC :: BE

*L. 2. n. (ou BD), CD *. Donc AB ,

AC :: BD , CD . & alternan-

do AB , BD :: AC , CD .

2°. Il faut prouver que si cela est, BC coupe

ABD par la moitié. Puisque supposant comme

dessus DE parallèle à BC , & AB prolongée en

*L. 2. n. E , alors AB , BE :: AC , CD *, & par l'hypo-

thèse AB , BD :: AC , CD : donc $BE =$

*L. 2. n. BD *, & le triangle DBE sera isocèle* &

27. aura les angles $BED = BDE$ *; mais à cause

des parallèles BC , ED , les angles ABC , BED

17. ou son égal BDE seront égaux, *comme aussi

*L. 2. n. CBD , BDE *: donc l'angle $ABC = CBD$; ce

27. qu'il falloit prouver.

*L. 2. n.

25. DEFINITION. I.

18. Les lignes antiparallèles sont celles qui sur les lignes qu'elles coupent font bien les mêmes angles, mais c'est d'un autre côté.

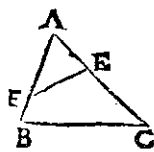
Les lignes parallèles font les mêmes angles d'un même côté, avec les lignes

L. 2. n. qu'elles coupent. Si AFE

27. $= ABC$, les lignes FE &

BC seroient ainsi parallèles; mais si $AFE = ACB$,

ces lignes sont antiparallèles.



THEOREME VII.

Lorsqu'on coupe deux côtés d'un triangle par une ligne parallèle à la base de l'angle qu'ils comprennent, ils sont coupés proportionnellement. Eucl. VI. Prop. 2.

Soit le triangle ABC , je mène EF parallèle à BC , je dis que AE , EB :: AF , FC . Le triangle AEF est semblable au

triangle ABC , puisqu'ils sont égaux: car outre que l'angle A est commun, l'angle $AEF = ABC$,

& l'angle $AFE = ACB$ *: donc AB , AE :: AC .

AF * & dividendo $AB - AE$, AE :: AC

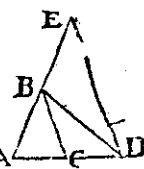
$- AF$, AF . Or $AB - AE = EB$, & $AC - AF = FC$. Donc EB , AE :: FC , AF .

Permutando, AE , EB :: AF , FC .

THEOREME VIII.

Si l'angle d'un triangle est coupé en deux également par une ligne droite, qui coupe aussi la base, les segments de la base seront l'un à l'autre comme les deux autres côtés. Et si cela est, la ligne tirée du sommet à la base coupe l'angle en deux également. Eucl. VI. Prop. 3.

Soit le triangle ABD . La ligne EC tirée du sommet, coupe l'angle B en deux également. Il faut prouver, 1°. que AB , BD :: AC , CD . Soit mené DE parallèle à BC , & prolongez le côté AB jusqu'à ce qu'il rencontre cette parallèle. Les angles ABC &



I iij

THEOREME IX.

Lorsqu'on coupe les côtés d'un triangle par une ligne antiparallèle à la base, les côtés de ce triangle sont coupés en proportion reciproque. Même Figure.

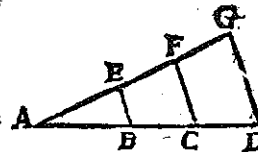
FE est antiparallèle à BC : ainsi $AFE = ACB$, en $AEF = ABC$. Le triangle AEF a donc les mêmes angles que ABC , & par conséquent ils sont semblables, & leurs côtés sont proportionnels*, mais leurs côtés homologues n'ont pas la même situation, car AB n'est pas homologue avec AF , mais avec AE : ainsi ces côtés AB & AC ne sont pas coupés dans une proportion droite. AB n'est pas à AF comme AC à AE ; de sorte que de ces quatre grandeurs, la première est à la quatrième comme la troisième à la seconde. AB , AE :: AC , AF .

PROBLEME I.

Couper une ligne droite semblablement, à une ligne qui est déjà coupée. Eucl. VI. Prop. 10.

La ligne AD est coupée en trois parties AB , BC , CD : on propose de couper la ligne AG en trois parties proportionnelles à celles de AD . Je joins AG avec AD ; de sorte qu'elles fassent un angle, quel qu'il

soit. Après je mène par les points G & D une ligne droite, & à celle-ci des parallèles par les points B & C de la coupée. Les parallèles coupent AG , en trois parties, qui sont propor-



I iiij

tionnelles à celles de AD : car $AD : AC :: AG : AF$, & $AC : AF :: AE : AF$: ainsi on a fait ce qui étoit proposé.

PROBLÈME II.

21. Diviser une ligne en tant de parties égales qu'on voudra.

La ligne donnée est X , qu'il faut diviser en trois parties : je la joins avec Z une ligne infinie : de sorte qu'elles fassent l'angle ZAX , n'importe de quelle grandeur. Ayant ouvert le compas au hasard, & mis une de ses pointes sur A , je marque sur Z de suite avec la même ouverture trois parties égales : après de B , extrémité de ces trois parties je mène une ligne au point C , extrémité de X ; & à celle-ci, des parallèles par les divisions de Z ; selon ce qu'on vient de démontrer dans le Problème précédent, AC sera divisé semblablement en AB , c'est-à-dire, en trois parties.

PROBLÈME III.

22. Retrancher d'une ligne telle partie qu'on voudra. Eucl. VI. Prop. 9.

Si de AC , fig. précéd. on veut retrancher la troisième partie, il n'est question que de diviser AC en trois parties, suivant le Problème précédent, & retrancher de AC une de ces trois parties.

le CE : je prolonge AD jusqu'à ce qu'elle rencontre cette parallèle CE ; ce qui étant fait, je dis que DE est la quatrième proportionnelle :

* L. 3. n. car $AB : AC :: AD : AE$; si l'on divise $AB : AC :: AD : AE$; c'est-à-dire, que $AB : BC :: AD : DE$, & par conséquent alternando $AB : AD :: BC : DE$.

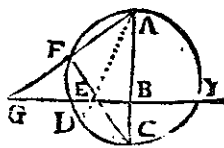
PROBLÈME VI.

25. Trouver toutes les réciproques possibles à deux lignes données.

Soient les deux lignes données AB & AC : il faut prendre AB , la plus petite, sur la plus grande AC , & faire un cercle qui ait la plus grande pour diamètre ; ensuite du point B où la plus petite se termine, tirer sur ce diamètre une perpendiculaire indéfinie, comme Y .

Toute ligne qu'on mènera de A qui coupera l'indéfinie, & se terminera au cercle comme AD , ou qui coupera le cercle & se terminera à l'indéfinie, satisfera au Problème. AE & AD sont réciproques à AB , AC , comme aussi AF & AG : car BE est antiparallèle à DC , puisque AEB

* L. 2. n. $= ACD$, & $AEB = ADC$: ainsi ces lignes sont coupées réciproquement. * L. 3. n. $AF = AG$: donc BF & GC sont antiparallèles, ainsi AC & AG sont coupées réciproquement.



PROBLÈME IV.

Deux lignes étant données trouver une troisième qui soit à la seconde, comme celle-là est à la première, ou à deux lignes données trouver une troisième proportionnelle. Eucl. VI. Prop. II.

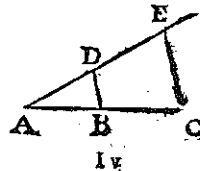
La première ligne est AB , la seconde BC ; je joins ces deux lignes de sorte qu'elles ne fassent qu'une ligne droite : ensuite je prends AD égal à BC , que je joins avec AB , de sorte qu'elles fassent un angle qu'il m'il soit. Je mène de D une ligne sur B , & à celle-ci une parallèle par le point C ; je prolonge AD jusqu'à ce qu'elle rencontre la parallèle CE ; ce qui étant fait, je dis que DE est la troisième proportionnelle cherchée.

Car AB est à AD ou à son égale BC , comme AC est à AE ; & par conséquent comme $AC : AB :: AE : AD$, c'est-à-dire, comme $BC : AE :: AE : AD$; ainsi $BC : AE :: AE : AD$; ce qui étoit proposé.

PROBLÈME V.

Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes qui sont en proportion. Eucl. VI. Prop. 12.

La première est AB , la seconde AD , & la troisième BC que je joins avec AB , de sorte que toutes ces lignes fassent une ligne droite ; après je mène par A & D une ligne droite, & à celle-ci par le point C la paral-



PROBLÈME VII.

Sur une ligne donnée décrire une figure semblable à une figure donnée. Eucl. VI. Prop. 18.

Il n'est question que de réduire cette figure donnée en triangles, & sur la ligne donnée mener des lignes qui fassent les mêmes angles, & forment de semblables triangles.

LEMME I.

Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on tire une perpendiculaire sur la base, cette ligne le partagera en deux autres triangles semblables, & à lui, & entr'eux. Eucl. VI. P. 8.

Soit ABD un triangle rectangle. Si de A l'angle droit on mène AC une perpendiculaire sur la base BD , je dis que les trois triangles ABD , ABC , ACD sont tous trois semblables.

1°. Ils sont tous rectangles. 2°. Les deux triangles ABD & ABC ont l'angle B commun ; ainsi ils ont tous leurs angles égaux, & par conséquent semblables. Les triangles ABD & ADC ont aussi l'angle D commun ; ils sont donc aussi semblables, puisque ABC & ADC ont semblables à un troisième, ils sont semblables entr'eux. Par conséquent les trois triangles rectangles ABD , BCA , CAD sont semblables.

THEOREME X.

Lorsque dans un triangle rectangle on mène une perpendiculaire de l'angle droit au hypoténuse, voilà ce qui arrive.

1°. La perpendiculaire est une moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypoténuse.

204 *Eléments de Géométrie.*

- 2°. Le côté majeur est un moyen proportionnel entre l'hypoténuse, & la plus grande partie.
3°. Le côté mineur est un moyen proportionnel entre l'hypoténuse & la plus petite partie.

Par le Lemme précédent le triangle rectangle ABD, est divisé par la perpendiculaire AC en deux triangles rectangles qui lui sont semblables & entr'eux; de sorte que ABD, CBA, CAD sont trois triangles semblables. Partant 1°. $BC : AC :: AC : CD$, ou $BC \cdot AC = CD^2$.
2°. $CD : AD :: AD : BD$ ou $CD \cdot AD = BD^2$.
3°. $BC : AB :: AB : BD$ ou $BC \cdot AB = BD^2$; ce qu'il falloit démontrer.

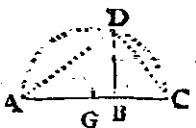
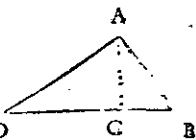
PROBLÈME VIII.

29. Entre deux lignes données trouver une moyenne proportionnelle. Eucl. VI. Prop. 13.

Première manière.

Les deux lignes données sont AB & BC; je les joins de sorte qu'elles fassent une ligne droite, du milieu de laquelle, qui est G, & de l'intervalle de sa Moitié, savoir de l'intervalle AG je décris un demi-cercle; j'éleve ensuite sur B une perpendiculaire, que je prolonge jusqu'à ce qu'elle se termine dans la circonférence du cercle, savoir au point D; je dis que BD est moyenne entre AB & BC.

L. 1. n. L'angle ADC dans le demi-cercle est droit.
44.



Livre IV. Section II.

205

Par la construction BD est perpendiculaire: donc par le Théorème précédent BD est moyenne proportionnelle entre AB & BC ou $AB : BD :: BD : BC$.

Seconde manière.

AB & CB sont de x lignes données; je prolonge AB de sorte que BD = AC: & de D & de A, comme centres & d'intervalle égaux AB & CD, je fais deux cercles qui se coupent en E: la ligne EB ou EC sera la moyenne entre AB & CB.

Par la construction

AB = AE, & CE =

BE: donc EAB &

CEB sont deux isocèles; ils ont l'angle com-

mune ABE: donc ces

deux isocèles sont

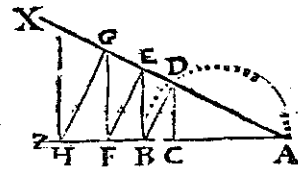
équilatéraux*, & partant semblables*: donc AB.

BE :: BE. BC, ou $AB \cdot BE = BC^2$.

PROBLÈME IX.

Avant les trois premières lignes d'une progression géométrique de lignes, trouver les autres à l'infini.

Soient trois lignes en progression. La première est AC, la seconde AD, la troisième ligne est AB, que je partage par la moitié; & de l'intervalle de cette moitié, je décris un demi-cercle. Je prens sur cette ligne AB une partie égale à la première ligne AC; & sur C j'éleve une perpen-



206 *Eléments de Géométrie*

diculaire qui se termine à la circonférence du cercle au point D, d'où je mène une ligne au point B & de A par D, une ligne infinie X. Je prolonge aussi à l'infini la ligne AB, que je nomme Z; ensuite j'éleve au point B une perpendiculaire qui coupe X au point E, duquel je mène une perpendiculaire qui coupe Z au point F, où je dresse une perpendiculaire qui coupe X au point G d'où j'abaisse une perpendiculaire GH, & ainsi de suite.

- 1°. La ligne AD étant moyenne proportionnelle entre AC & AB*, est égale à la seconde ligne donnée, qui se trouve au si, si elle n'étoit pas donnée.

2°. Tous les triangles ADB, ABE, AEF, AFG, &c. sont équilatéraux*, puis, outre leur angle commun XAZ, ils sont tous rectangles; car l'angle ADB dans le demi-cercle est droit*, & par la construction EF & HG sont perpendiculaires sur X, comme DC, BE, GF le sont sur Z: ainsi, si l'on a la Définition* ils seront semblables, & auront leurs côtés homologues proportionnels*: donc AC. AD :: AD. AB, & AD. AB :: AB. AE, & AB. AE :: AE. AF, & AE. AF :: AF. AG, &c. par conséquent $AC \cdot AD = AB^2$, &c.

31. Jusqu'à présent on n'a point découvert le moyen de trouver avec le compas & la seule règle deux moyennes proportionnelles entre deux

Livre IV. Section II.

207

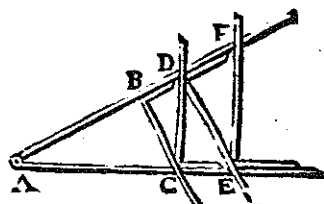
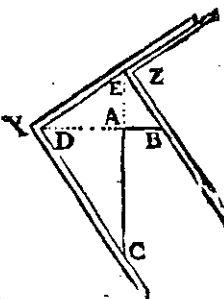
lignes données on les trouve mécaniquement.

Les lignes données sont AB & AC, qu'on joint de sorte qu'elles fassent un angle droit. On dispose l'équerre X de manière, que son angle soit sur le prolongement de AB, & qu'une de ses règles passe C extrémité de AC.

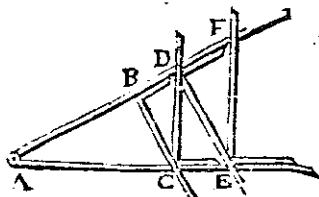
Z est une seconde équerre qu'on dispose, en sorte qu'une de ses règles passe X, & l'autre le point B extrémité de AB: ainsi les triangles CDE & DEB, sont rectangles, & DA & EA sont des perpendiculaires; ainsi* $AC \cdot AD = AE^2$, &c. AE. AB :: AB. AE: donc $AC \cdot AD = AB^2$.

Cette invention est de Platon. Descartes en propose une autre, avec laquelle il trouve entre deux lignes données autant de proportionsnelles, qu'on en veut.

L'instrument dont il se sert est composé de plusieurs équerres, qui sont tellement ajustées les unes avec les au-



ires, que lorsque l'angle $F A E$ est fermé, ou que les deux règles $F A$ & $A E$ se touchent, toutes les autres règles $B C, C D, D F, E F$



se touchent & viennent au point A : si cet angle $E A F$ s'ouvre, ces mêmes règles se poussent & se chassent.

Deux lignes étant donc données, je pousse la règle $B C$, de sorte que $A B$ soit égale à la plus petite, & j'ouvre l'angle $E A F$ de sorte que la règle $D E$ soit éloignée de A de la grandeur de la seconde ligne.

Il est évident que $A C$ & $A D$ seront deux moyennes proportionnelles entre $A B$ & $A E$.

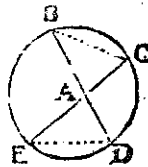
pour trouver plusieurs moyennes proportionnelles, il faut augmenter le nombre des équerres.

THEOREME XI.

32. Deux cordes qui se coupent dans un cercle, ont leurs parties en proportion réciproque.

Soient les deux lignes $B D$, $C E$ qui se coupent au point A , il faut prouver que $B A \cdot C A :: A E \cdot A D$.

Soient tirées $E C$, $E D$; et les formeront les deux triangles semblables $B A C$, $E A D$; car les angles en A sont

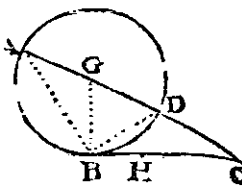


Moyenne & Extrême raison. Eucl. VI. Prop. 30.

La ligne donnée est $B C$; au point B j'éleve la perpendiculaire $B G$, qui soit la moitié de $B C$. De l'intervalle de $B G$, je fais un cercle dont le diamètre sera par conséquent égal à $B C$; je tire la secante $A C$ après quoi ayant pris $C H$ sur $B C$, égal à $C D$, je dis que la ligne $B C$ sera divisée au point H , comme il est requis. Si $H C$ ou $D C$ est la plus grande partie, & $B H$ ou $B C - H C$ la plus petite. Il faut démontrer que $B C \cdot C H \cdot H B$. Par le Lemme précédent $A C \cdot B C :: B C \cdot C D$, & retranchant de $A C$ & $B C$ les lignes $B C$ & $C D$, les restes $A C - B C$ & $B C - C D$ seront encore en même proportion : ainsi $B C \cdot C D :: A C - B C \cdot B C - C D$; mais par la construction $A C - B C = D C = H C$, & $B C - C D = H C = H B$: ainsi $B C \cdot C H :: H C \cdot H B$; ce qu'il falloit démontrer.

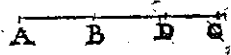
33. Une ligne étant coupée en moyenne & extrême raison, si on luy ajoute la médiane, c'est à dire la plus grande partie, cette nouvelle ligne sera encore divisée en moyenne & extrême raison, dont la première sera la médiane.

34. Soit $A C$ une ligne divisée en moyenne & extrême raison au point B . La médiane ou la



COROLLAIRE I.

35. Une ligne étant coupée en moyenne & extrême raison, si on luy ajoute la médiane, c'est à dire la plus grande partie, cette nouvelle ligne sera encore divisée en moyenne & extrême raison, dont la première sera la médiane.



Soit $A C$ une ligne divisée en moyenne & extrême raison au point B . La médiane ou la

égaux, & l'angle B est égal à l'angle F , p. f. qu'ils s'appuyent sur le même arc $C D$; donc ils ont leurs côtés homologues proportionnels. Donc $B A \cdot C A :: A E \cdot A D$. Donc alternando réciproquement $A B$ est à $A E$, comme $C A$ à $A D$; ce qu'il falloit prouver.

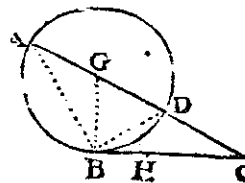
LEMME II.

Si d'un point hors d'un cercle on tire une tangente & une secante, cette tangente est moyenne proportionnelle entre la secante entière, & sa partie hors le cercle.

Soit la tangente $C B$ & la secante $C A$; il faut prouver que $A C \cdot C B :: C B \cdot C D$, ou $A C \cdot C B \cdot C D$.

Les deux triangles $A C B$ & $D C B$ ont l'angle

C commun. L'angle $D B C$ a pour sa mesure la moitié de l'arc $B D$. Cette moitié est aussi la mesure de l'angle $B A C$; ainsi les deux triangles $A C B$ & $B D C$ ayant deux



angles égaux, & par conséquent le troisième; ils sont semblables, & proportionnels : le côté $B C$ du triangle $B C D$ est homologue avec le côté $B C$ du triangle $A C B$; ainsi $A C \cdot B C :: B C \cdot C D$, ou $A C \cdot B C \cdot C D$; ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME X.

Diviser une ligne en telle sorte, que la plus grande partie soit moyenne proportionnelle entre la plus petite & la toute : ce qui s'appelle

plus grande partie est $B C$, que j'ajoute à cette ligne, faisant que $C D$ soit égal à $B C$. Il faut prouver que $A D \cdot A C \cdot C D$.

Soit $A C = a$, & $C B = x$; ce $a - x = A B$, & $C D = x$, & $a + x = A D$. Il faut donc prouver que $x \cdot a + x \cdot a \cdot x$.

Par l'Hypothèse $a \cdot x :: x \cdot a - x$.

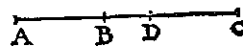
Permutando $x \cdot a :: a - x \cdot x$.

Compenendo $x + a \cdot a :: a - x + x \cdot x$.

Mais $a - x + x = a$; donc $x + a \cdot a :: a \cdot x$, ou $x + a \cdot a \cdot x$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE II.

Une ligne étant divisée en moyenne & extrême raison, si on retranche de la médiane la plus petite partie, le reste sera encore divisé en moyenne & extrême raison.



La ligne $A C$ est divisée en moyenne & extrême raison, au point B . Sa plus petite partie est $A B$. Il faut prouver, que si de $B C$ on retranche $D C = A B$, le reste $A D$ sera divisé selon la même raison; c'est à dire, que $A D \cdot A B \cdot B D$. Soit $A B = y$, $B C = x$, $B D = x - y$. Donc $A C = y + x$. Il faut ainsi démontrer que $x - y \cdot y \cdot x$.

Selon l'Hypothèse $y \cdot x :: x \cdot y + x$.

Permutando $x \cdot y :: y + x \cdot x$.

Dividendo $x - y \cdot y :: y + x - x \cdot x$. Et comme $+ x - x = 0$; donc $x - y \cdot y :: y \cdot x$. Ainsi $x - y \cdot y \cdot x$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE III.

Du premier Corollaire il est aisé de conclure

que lorsqu'on a une ligne divisée en moyenne & extrême raison, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes divisées en-moyenne & extrême raison, si on ajoute à la route la médiane : Et par le second Corollaire qu'on en peut avoir une infinité de plus petites toutes divisées en moyenne & extrême raison, en retranchant la plus petite de la médiane.

SECTION III.

Des raisons & proportions que les circuits de deux ou plusieurs figures ont entr'eux ; & avec les rayons des cercles, où ces figures sont inscrites.

DEFINITION.

38. Deux figures rectilignes sont dites semblables, lorsque leurs angles sont égaux chacun à chacun, & que les côtes qui les composent sont proportionnels.

COROLLAIRE.

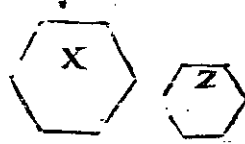
39. Il s'ensuit que toutes les figures régulières de même nom sont semblables : car étant de même nom, elles auront même nombre de côtes & d'angles ; & à cause de la régularité, tous ces angles seront égaux aussi bien que les côtes qui les comprennent*, & partant proportionnels en raison d'égalité ; ainsi suivant cette Définition, elles seront semblables.

THEOREME I.

40. Les circuits de deux figures semblables sont

entr'eux en même raison, que leurs côtes chacune à chacune.

Soient X & Z deux hexagones, chaque côté de X est a ; ainsi tout son circuit est 6a, chaque côté de Z est b, & tout son circuit par conséquent est 6b. Or 6a, 6b :: a. b*.

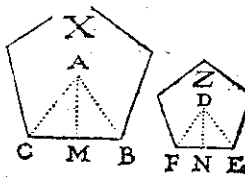


THEOREME II.

Les circuits de deux figures régulières & semblables, sont entr'eux comme les rayons ou diamètres des cercles où elles sont inscrites, & comme leurs apothèmes.

X & Z sont deux polygones réguliers & semblables. Du centre du cercle où ils sont inscrits, je mène les lignes AB & AC, DE & DF, qui sont rayons.

Les deux triangles BAC & DEF sont isocèles par la construction ; & puisque ces deux figures sont semblables, les angles de leurs centres BAC & EDF



sont les mêmes ; ainsi ces triangles sont semblables ; donc AB, où le rayon de X est à DE : rayon de Z, comme BC à EF. Or le circuit de X est à celui de Z par le Théorème précédent, comme BC & BF : donc le circuit de X est à celui de Z, comme le rayon de X à celui

de Z, ou comme le diamètre de l'un est au diamètre de l'autre ; car les rayons & les diamètres ont entr'eux une même raison, les rayons étant la moitié des diamètres.

Soit AM une perpendiculaire sur

* L. 2. n. BC, elle sera l'apothème de X*. De même soit

144. DN perpendiculaire de D sur EF, elle sera l'apothème de Z. Or selon ce qu'on a prouvé*, BC

* L. 2. n. sera à EF comme l'apothème de X est à Z ; ainsi le circuit de X est à celui de Z, comme l'apothème de X à l'apothème de Z.

COROLLAIRE.

42. Les circonférences de deux cercles sont entr'elles, comme les diamètres ou rayons de cercles.

Les cercles peu et être considérés comme des polygones réguliers : or les circuits de deux polygones sont entr'eux comme leur diamètres ; donc les circuits ou circonférences des cercles sont entr'elles comme les diamètres des cercles ; & par conséquent puisque les rayons sont la moitié des diamètres, comme les rayons de ces cercles.

Si on conçoit dans un cercle une infinité d'autres cercles concentriques, dont les circonférences soient déployées & dressées comme des lignes droites, le rayon du grand cercle & son circuit feront un triangle rectangle, dans l'hypoténuse duquel les extrémités des cercles concentriques aussi déployés doivent se trouver, puis qu'ils sont



entr'eux comme les parties du rayon du cercle qu'ils composent. C'est pourquoi l'on a conclu de là, que la surface du cercle étoit égale à un tel triangle. Ce que nous avons démontré par une autre voye*.

THEOREME III.

Les arcs d'égal quantité de degrés dans différents cercles, sont entr'eux comme ces cercles dont ils sont les parties.

Les degrés sont les parties proportionnelles d'un tout ; ils sont donc entr'eux comme les tous dont ils sont les parties ; c'est à-dire, comme les cercles dont ils sont les degrés.

THEOREME IV.

Les cordes d'arcs semblables, dans différents cercles, sont entr'elles comme les arcs dont elles sont les cordes.

Concevant que du centre des cercles où sont ces cordes on ait mené des lignes à leurs extrémités, on aura des triangles semblables, puisque ces cordes d'arcs semblables ont les angles au centre égaux : ces cordes sont donc entr'elles comme les rayons de ces cercles ; & partant comme ces cercles, qui sont entr'eux comme leurs rayons*. Or les arcs d'égal quantité de degrés sont entr'eux, comme les cercles dont ils

sont parties par le Théorème précédent ; ces cordes sont donc entr'elles comme les arcs dont elles sont les cordes.

THEOREME V.

Si d'un point où plusieurs cercles se touchent, on mène une ligne qui coupe ces cercles, les parties de cette ligne seront entr'elles comme les cercles qu'elle coupe.

A est un point où se touchent plusieurs cercles. Soit mené de A une ligne qui coupe les cercles C, D, E ; il faut prouver que les parties AC, AD, AE de cette ligne seront entr'elles, comme les cercles qu'elles coupent. Par A je mène AB, qui touche ces cercles ; ainsi l'angle BAE, a pour mesure ou l'arc CA, ou AD, ou AE* ; ainsi ces trois arcs sont semblables. Les cordes AC, AD, AE, par le Théorème précédent d'arcs semblables, sont entr'elles, comme les arcs AC, AD, AE, & ces arcs sont entr'eux comme leurs cercles ; les parties de la même ligne seront donc entr'elles, comme les cercles qu'elle coupe.

THEOREME VI.

Dans le même cercle ou dans les cercles égaux, les angles qui en leur omme, soit dans la circonférence, soit dans le centre, sont entr'eux comme les arcs sur lesquels ils sont appuyés. Eucl. VI. Prop. 33.

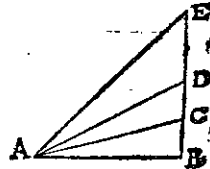
Cela est bien évident, puisque ces arcs en font leurs mesures*.

LEMME

LEMME.

Dans un triangle rectangle divisant un des angles aigus en tant de parties égales qu'on voudra, & menant des lignes droites sur le côté opposé, les parties de ce côté les plus éloignées de la perpendiculaire, sont les plus grandes.

Soit ABE un triangle rectangle, dont l'angle BAE est divisé en tant de parties égales qu'on voudra par des lignes droites menées du point A jusques à BE. Il faut prouver que les parties de BE les plus éloignées de AB, seront les plus grandes. Que la partie DC est plus grande que CB, & ED plus grande que DC.



Puisque suivant l'hypothèse, l'angle BAC a été fait égal à l'angle CAD, l'angle BAD sera divisé en deux ; & suivant ce qui a été démontré*, DC CB :: AD. AB. Or* AD > AB ; donc DC > CB.

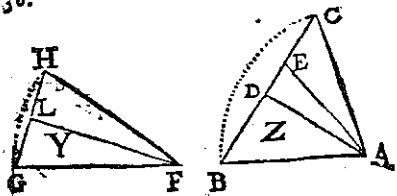
Par la même raison si l'angle CAE est divisé en deux, que CAD soit égal à DAE ; alors ED. DC :: AE. AC ; & puisque AE > AC ; donc ED > DC. Ainsi les parties de BE plus éloignées de AB seront les plus grandes.

THEOREME VII.

Deux Polygones réguliers inscrits dans les mêmes, ou en différens cercles, celui qui a plus de côtes a un plus grand apothème, à raison de son circuit.

Soient deux Polygones Z & Y. Je suppose

que Y a deux fois plus de côtes que Z ; qu'ainsi si BC est une corde de 20 degrés, GH sera de 10 ; c'est-à-dire, que si Z a 18 côtes, Y en aura 36.



AD est l'apothème de Z*, & FL l'apothème de Y. On suppose l'angle BAC double de GFH ; ainsi DAC est égal à GFH. Ayant donc partagé également en deux l'angle DAC, l'angle DAE sera égal à LFH.

Ces deux triangles LFH & DAE sont rectangles, & ont les angles LFH, EAD égaux ; ils sont donc équiangles*, & semblables* ; ainsi LH. LF :: DE. DA*. Le Polygone Y est de 36 côtes ; ainsi 72 LH est son circuit ; je multiplie par le même nombre DE. Si DE étoit la quatrième partie de BC, alors 72 DE seroient justement le circuit du Polygone Z, qui a 18 côtes, & contient 18 fois BC ; mais par le Lemme précédent DE est plus petit que EC, partant moindre que la quatrième partie de BC, 72 DE seront donc moindres que le circuit de Z, que je nomme m ; partant 72 DE auront moindre raison à DA, que non pas m, qui est plus grand*. Mais comme il vient d'être démontré, LH. LF :: DE. DA, aussi* 72 LH. LF :: 72 DE. DA ; partant 72 LH auront moindre raison à l'apothème LF, que le dit m, circuit

dit Polygone Z à DA son apothème ; ce qu'il falloit prouver.

La précédente démonstration bien entendue, se peut appliquer généralement à tous autres Polygones, non seulement en raison multiple des côtes, mais aussi en quelque proportion que ce soit, comme de 5 à 13, ou telle autre qu'on voudra, laquelle ne peut jamais être que de nombre à nombre ; ainsi au lieu que dans l'exemple proposé l'angle DAC est double de DAE, il seroit ici comme 13 à 5 ; & on pourra le supposer être divisé en 13 parties égales, dont l'angle DAE en contiendrait 5, & par le même Lemme les cinq portions de la partie DE plus près de la perpendiculaire DA, seront toujours à proportion plus petites, que les 13 de la ligne DC ; & ainsi 26 fois DE seront toujours moindres que dix fois DC qui sont les circuits des Polygones, dont le nombre des côtes est 13 & 5. DE & DC n'étant chacune qu'une moitié de leurs côtes ; & partant on conclura toujours, comme ci-devant, ce qui a été proposé.

COROLLAIRE I.

De deux Polygones de même circuit, l'apothème de celui qui a plus de côtes est plus grand.

Soient deux Polygones Z & Y, qui ont un même circuit m. L'apothème de Z qui a moins de côtes soit b, celui de Y qui en a plus soit d. Par le présent Théorème b est plus petit, au regard de m, que d au regard de m ; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE II.

Un cercle d'un même circuit qu'un Polygone, a son rayon plus grand que l'apothème de ce Polygone.

K ij

220 *Eléments de Géométrie.*

Un cercle est un Polygone d'une infinité de côtes, qui a pour apothème son rayon ; qui est ainsi plus grand que l'apothème d'aucun autre Polygone, selon le Corollaire précédent.

SECTION IV.

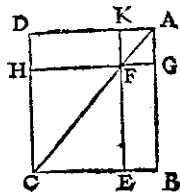
Des raisons & des proportions des Surfaces.

THEOREME I.

51. En tout parallélogramme, les parallélogrammes adjacens, ou qui sont au tour du diamètre, sont semblables entr'eux, & au parallélogramme entier. Eucl. VI. Prop. 14.

Soit ABCD un parallélogramme, dont le diamètre est AC, autour duquel soient deux autres parallélogrammes AGFK & CEFH.

1°. Chacun d'eux à un angle commun avec ABCD. Les angles oppozés dans les parallélogrammes sont égaux* : Donc $\angle GAK = \angle ECH = \angle HFE$, & $\angle KAG = \angle FEG$. Ainsi ces trois parallélogrammes ayant deux de leurs angles égaux, les autres le sont aussi ; car leurs côtes étant parallèles, * L. 1. n. 119. * L. 2. n. 17. * S. n. 1. 5 n. 10. ils sont les mêmes angles*. Les triangles ABC, AGF, FEC sont donc équiangles, par conséquent semblables*, comme aussi ADC, AKF, FHC : donc $\angle AGF = \angle FEG$; $AB : AC :: AC : AG$, & $AC : CE :: EC : FC$.



221 *Eléments de Géométrie*

Donc $AB : AD :: AD : DB$, ou $AD^2 = AB \times DB$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

54. Conquer une ligne droite de telle sorte, que le rectangle de la toute & de l'une de ses parties, soit égal au carré de l'autre. Euclid. II. Prop. 11.

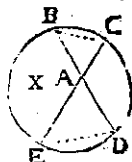
Il n'est agité que de couper la ligne donnée en moyenne & extrême raison, ainsi qu'il a été enseigné*. Le rectangle de la toute & de la petite partie, est égal au carré de la médiane, selon ce Théorème.

THEOREME IV.

55. Si dans un cercle deux lignes droites se coupent, le rectangle compris des deux parties de l'une, est égal au rectangle compris des deux parties de l'autre. Eucl. III. Prop. 35.

Les deux cordes BD & CE du cercle X se coupent au point A. Il faut prouver que $BA \times DA = CA \times EA$.

* S. n. 32. $\angle BAE :: \angle CAD$. Donc $BA \times AD :: CA \times AE$, produit des extrêmes, = $AE \times AC$, produit des moyennes* ; ce qu'il falloit démontrer.



THEOREME V.

56. Si d'un point pris à discretion hors du cercle ; on tire deux lignes droites, dont l'une le touche & l'autre le coupe, & va se terminer à sa circonférence concave, le rectangle compris de

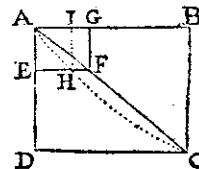
222 *Eléments de Géométrie*

Donc $AB : AD :: AD : DB$, ou $AD^2 = AB \times DB$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME II.

52. Si d'un parallélogramme on retranche un parallélogramme semblable ; semblablement posé au total, & ayant un angle commun avec lui, le parallélogramme retranché sera à l'entour du diamètre du parallélogramme total. Eucl. VI. Prop. 26.

Soit du parallélogramme ABCD retranché le parallélogramme AGFE, ils sont semblables, & ont l'angle EAG commun. Il faut prouver que leurs diamètres sont dans la même ligne. Si on le nie, & qu'on dise que le diamètre AHC coupe EF au point H ; je mène HI, parallèle à AE, les parallélogrammes EI & DB sont semblables*. Donc $AE : EH :: AD : DC$; $AE : EF :: AD : DC$. Donc $EH = EF$. Ainsi la partie est égale à son tout ; ce qui est absurde.



THEOREME III.

53. Lorsqu'une ligne est coupée en moyenne & extrême raison, le rectangle de la toute & de la petite partie est égal au carré de la médiane.

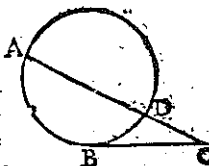
Soit la ligne AB coupée en moyenne & extrême raison. La médiane est AD.

K iij

223 *Eléments de Géométrie*

Donc $AB : AD :: AD : DB$, ou $AD^2 = AB \times DB$; ce qu'il falloit prouver.

De C, un point hors le cercle, soient menées deux lignes droites, CB, qui touche le cercle, & CA qui le coupe. Il faut prouver que $AC \times CD = BC^2$. On a démontré* que $\angle ACB :: \angle BCD$. Donc $AC : BC :: BC : CD$; ce qu'il fa loit prouver.



COROLLAIRE I.

57. Si d'un point pris à discretion hors d'un cercle, on mène tant de lignes droites que l'on voudra, qui coupent le cercle & qui aillent se terminer à sa circonférence concave ; le rectangle compris d'une de ces coupantes telle que l'on voudra, & de sa partie hors du cercle, sera égal au rectangle compris de telle autre coupante que l'on voudra, & de sa partie hors du cercle.

Car chacun de ces rectangles est égal au carré de la touchante, qui seroit mené de ce même point.

COROLLAIRE II.

58. Si d'un point pris à discretion hors d'un cercle, on mène deux lignes droites qui le touchent, elles seront égales entr'elles.

Car le carré de chacune de ces tangentes est égal au rectangle d'une coupante & de sa partie hors du cercle ; & ainsi chacun de ces carrés est égal à l'autre, d'où il suit que les lignes qui en sont les côtes, sont égales.

K iij

THEOREME VI.

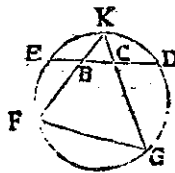
59. Si d'un point pris à discretion hors d'un cercle, on mène deux lignes droites, dont l'une coupe le cercle & va se terminer à sa circonférence concave, & l'autre atteint le cercle; & que le rectangle compris de toute la coupante & de la partie hors du cercle soit égal ou quarré de celle qui atteint le cercle, celle-ci touchera le cercle. Eucl. III. Prop. 37.

Soit la même figure que ci-dessus. Puisque le quarré de cette ligne qui atteint le cercle, est égal au rectangle $AC \times DC$, elle sera égale à la tangente BC , dont le quarré est égal à ce rectangle; ce ne peut donc pas être une ligne différente, elle est donc tangente, ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VII.

60. Si d'un point dans la circonférence d'un cercle on mène deux lignes à la circonférence concave. & par des points également éloignés du point donné, on mène une troisième qui coupe les deux lignes; le rectangle fait de l'une & de sa partie comprise entre le point donné & la troisième ligne, est égal au rectangle fait de l'autre ligne & de sa partie comprise de même entre le point donné & la troisième ligne.

Soit K un point dans la circonférence du cercle, d'où soient menées les lignes KF & KG , & par les points E & D également éloignés de K , la ligne ED . Il faut prouver que $KF \times KE = KG \times KB$.

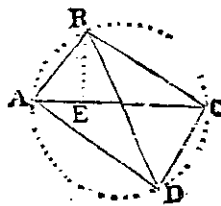


- 226 *Elémens de Géométrie.*
cercle, la ligne KE sera le côté du quarré inscrit dans le cercle*, auquel chacun des rectangles faits desdites lignes tels que $FK \times KB$ ou autres, seront égaux.

THEOREME VIII.

61. Si l'on inscrit un quadrilatère dans un cercle, le rectangle fait des diagonales est égal à la somme des rectangles faits des côtés opposés.

Soit le quadrilatère $ABCD$, dont les diagonales sont AC & BD . Il faut prouver $AC \times BD = BC \times AD + AB \times DC$. Soit menée BE , en sorte que l'angle ABE soit égal à CBD , & qu'ayant retranché l'une & l'autre de l'angle ABC les restans CBE & ABD soient égaux; ainsi comme les angles ADB & ACB appuyez sur le même



- arc sont égaux*. Les triangles BDA & BCE sont équiangles*, & semblables*. Donc $BD : AD :: BC : CE$; ainsi le rectangle des extrêmes est égal à celui des moyennes : & par conséquent $BD \times CE = AD \times BC$.*

- Par les mêmes raisons que dessus, les triangles BDC & BAE sont semblables : car $ABE = DBC$ par la construction, & $BAC = BDC$ étant appuyez sur le même arc BC , ils auront donc aussi leurs côtés homologues proportionnels. Donc $BD : CD :: AB : AE$. Ainsi $BD \times AE = CD \times AB$.* Or $BD \times AE + BD \times CE = BD \times AC$ *, Donc puisque $BD \times AE$

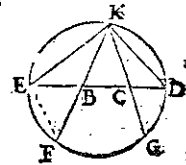
Livre IV. Section IV.

225

Les deux lignes BC & FG sont antiparallèles; car l'angle KBC a pour sa mesure la moitié de l'arc EF , plus celle de KD ou de son égale KE .* Or la moitié de KF est aussi la mesure de KGF *, donc $KBC = KGF$. Par le même raisonnement $KCB = KFG$. Ainsi, selon la Définition des antiparallèles*, FG & BC sont antiparallèles. Donc $KE : KC :: KG : KB$.* Donc $KF \times KB = KG \times KC$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

Les mêmes choses que dessus étant posées, il s'ensuit non-seulement que si du point K on tire des lignes à l'infini, terminées à la circonférence concave, & coupées par la droite ED comme KF ou KG , tous les rectangles qui en seront faits en la manière ci-dessus, seront égaux entre eux, puis que prenant ces lignes deux à deux, ils seront chacun égaux au rectangle $KF \times KB$; mais encore que si du point K on tire la droite KE , le quarré de ladite KE sera égal à chacun de cesdits rectangles; car ayant tiré la droite EF , il se formera toujours deux triangles semblables tels que FKE , EKB dont l'angle K sera commun, & les deux autres angles aussi égaux; savoir EKF à KEB , & FEK à EBK , chacun étant appuyé sur égaux arcs des circonférences du cercle; ainsi ils auront leurs côtés homologues proportionnels; & partant $FK : KE :: KE : KB$; donc le rectangle $FK \times KB$ égal au quarré de KE . Et il s'ensuit aussi, que si la ligne ED est un diamètre du



Livre IV. Section IV.

227

$= CD \times AB$ & $BD \times CE = AD \times BC$, il faut donc que $CD \times AB + AD \times BC = BD \times AC$, deux choses égales à une troisième, étant égales entr'elles. Or c'est ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME IX.

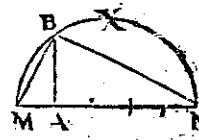
Si on coupe le diamètre d'un cercle, en sorte qu'une partie soit quadruple de l'autre, & que sur ce point de division on élève une perpendiculaire terminée à la circonférence; je dis que le quarré de la corde menée de l'extrémité de ce diamètre à l'extrémité de la perpendiculaire, est égal à cinq fois celui de la petite partie de ce diamètre, dont celui de la perpendiculaire est le quadruple.

Soit le diamètre MN du cercle X partagé en A , en sorte que $AN = 4AM$. Si l'on élève la perpendiculaire AB & qu'on mène les cordes MB , BN formant le triangle rectangle MNB ; je dis que $MB^2 = 5AM^2$. Soit $AM = a$; donc, selon la supposition, $MN = 5a$. Soit $MB = b$; donc $5a \cdot b = a^2$, partant $bb = 5aa$.* Soit maintenant $BA = d$; ainsi $a \cdot d = 4a^2$. Donc par là même raison $4aa = dd$. C'est ce qu'il falloit prouver.

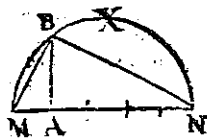
COROLLAIRE I.

Le diamètre MN étant partagé en tant de parties que l'on voudra; le quarré de MB sera égal à autant de fois celui de chacune des parties, qu'il y a de parties.

Si, comme ci-dessus & même figure MN est divisé au point A , de sorte que AM soit la



cinquième partie de MN, ou telle autre qu'on voudra, on aura
 * 5 n. 28. toujours $\frac{aa}{MN}$ $\frac{MA}{MB}$, ou $\frac{5a}{5a}$.
 MB. MN, ou $\frac{5a}{5a}$.
 MB. a : donc aussi le
 carré de MB est égal
 * L. 3. n. 5 aa*.
 17.



COROLLAIRE II.

65. Le carré de BA est égal à autant de fois le carré de chacune de ses parties, qu'il y a de parties moins une.
 Fig. précéd. Car supposant toujours la même division, ou autre à volonté, on aura de même cette proportion $\frac{aa}{AM}$ $\frac{BA}{AN}$, ou $\frac{aa}{a}$.
 * 5 n. 28. BA. 4a* : donc 4aa ou 5aa — aa est égal au
 * L. 3. n. carré de AB*. Ce qu'il falloit prouver, que le
 17. carré de AB est égal à autant de fois le carré, de chacune des parties, qu'il y a de parties moins une.

THEOREME X.

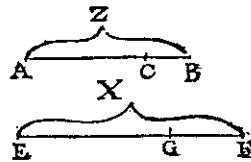
66. Si une ligne est coupée en moyenne & extrême raison ; je dis que le carré fait de la grande partie, jointe à la moitié de la ligne, vaut cinq fois le carré de cette moitié. Eucl. XIII. Prop. 1.
 Soit AB divisé en moyenne & extrême raison au point C, & AB = 2a, & BC = b : donc CA = 2a — b. Il faut démontrer que le carré de a + b (qui est aa + 2ab + bb) est égal 5aa. Otez aa de part & d'autre, il restera B C A seulement à prouver que 2ab + bb est égal à 4aa.
 * 5 n. 14. Par la supposition 2a : b :: b : 2a — b* : donc
 * L. 3. n. bb = 4aa — 2ab*, & ajoutant de part & d'autre
 17.

ere 2ab, viendra bb + 2ab = 4aa* ; ce qu'il * L. 3. n. se doit à prouver. Ainsi remettant aa de part & d'autre qu'on avoit précédemment ôté, viendra aa + bb + 2ab = 5aa ; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XI.

Deux lignes droites coupées en moyenne & extrême raison, sont semblablement coupées. Eucl. XIV. Prop. 2.

Soient ces deux lignes Z & X coupées en moyenne & extrême raison aux points C & G. Ainsi Z. AC :: AC. CB, & X. EG :: EG. GF. Soit AC = a, & CB = c, & EG = m, & GF = n. Il faut



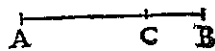
démontrer que AC. CB :: EG. GF, ou que a. c :: m. n. Comme le carré de la moitié de Z jointe avec a est égal à cinq fois le carré de a, de même celui de la moitié de X avec m, est égal à cinq fois celui de m. Ainsi ces quarrés étant proportionnels, leurs côtes le seront aussi*, puisqu'ils sont en * L. 3. n. 34. raisons sous doublées. Partant $\frac{1}{2} Z + a$ $\frac{1}{2} X + m$:: $\frac{1}{2} Z + a$ $\frac{1}{2} X + m$; & en divisant* a. $\frac{1}{2} Z$:: m. * L. 3. n. 51. $\frac{1}{2} X$, & doublant les conséquens & changeant* * L. 3. n. 45. Z. a :: X. m ; mais par la supposition $\frac{a}{c}$ $\frac{m}{n}$: donc ces deux lignes sont

* L. 3. n. coupées proportionnellement* ; ce qu'il falloit
 53. démontrer.

THEOREME XII.

68. Une ligne ayant été coupée en deux parties inégales, si le quintuple du carré de la moitié est égal au carré fait de cette moitié joint la plus grande partie, cette ligne se trouvera coupée en moyenne & extrême raison, dont cette partie sera la médiane. Eucl. XIII. Prop. 2.

Soit AB une ligne coupée en C, en deux parties inégales. Soit AB = 2a, & AC = b ; ainsi CB = 2a — b. Il faut démontrer que si cinq fois le carré de a, moitié de AB, est égal au carré fait de a + b, c'est à dire, au carré de la moitié a avec b ; ce que j'exprime ainsi 5aa = aa + 2ab + bb. La ligne AB aura été divisée en moyenne & extrême raison, & AC ou b en, sera la plus grande partie. Pour le prouver il faut montrer, que si AB est ainsi divisée, 5aa = aa + 2ab + bb.



Supposons donc que $\frac{2a}{b}$ $\frac{2a - b}{b}$: donc 4aa — 2ab = bb ; & ajoutant de part & d'autre + 2ab, on aura 4aa = 2ab + bb*. Ajoutant encore de part & d'autre aa, il vient 5aa = aa + 2ab + bb ; ce qu'il falloit prouver.
 * L. 3. n. 55.

THEOREME XIII.

69. Si une ligne droite est coupée en moyenne & extrême raison ; le carré fait de la plus petite avec la moitié de la plus grande, est quintuple du carré de la moitié de la plus grande partie. Eucl. XIII. Prop. 3.

Soit AB une ligne coupée en moyenne & extrême raison au point C, fig. précéd. Soit AC = 2m, & CB = n. Donc AB = 2m + n. Il faut démontrer que le carré fait de la moitié de AC la plus grande partie, avec BC la plus petite, c'est à dire, fait de m + n, qui est mm + 2mn + nn, est quintuple de celui de la moitié de AC, c'est à dire, de m, lequel est mm. Selon la supposition $\frac{2m}{n}$ $\frac{2m + n}{m}$: donc 2mn + nn = 4mm* ; ajoutant mm de part & d'autre, on * L. 3. n. 57. aura mm + 2mn + nn = 5mm ; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XIV.

Si une ligne droite est coupée en moyenne & extrême raison, le carré de la toute & celui de la plus petite partie joints ensemble, sont triples du carré de la plus grande partie. Eucl. XIII. Prop. 4.

Soit AB coupée en moyenne & extrême raison au point C, fig. précéd. Soit AB = Z, & AC = a, & BC = c. Donc $\frac{Z}{a}$ $\frac{a}{c}$. Il faut démontrer que ZZ + cc = 3aa.

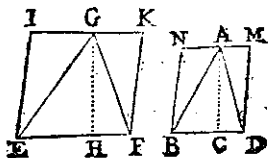
1°. ZZ = aa + 2ac + cc*. Ainsi il faut démontrer que aa + 2ac + cc = 3aa.
 2°. ac + cc = Zc*, & Zc = aa* par * L. 3. n. la supposition. Ainsi ac + cc = aa. On peut donc dans l'équation à prouver, substituer, au lieu de 2ac + cc, leur valeur égale 2aa, & viendra aa + 2aa = 3aa ; ce qu'il falloit prouver.
 * L. 3. n. 57.

THEOREME XV.

Les triangles & parallélogrammes semblables

bles, sont entr'eux en raison doublée de leurs côtés, de même raison, Eucl. VI. Prop. 19.

Soient ABD & EFG deux triangles semblables. Soient abaissées les perpendiculaires AC & GH ; les triangles EGH & BAC sont semblables étant rectangles, & l'angle B étant égal à l'angle E ; donc $BC : AC :: EH : GH$.



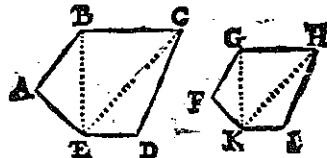
Les deux triangles DAC & IGH étant aussi semblables : donc pareillement $CD : AC :: FH : GH$; ainsi $BC + CD : AC :: EH + FH : GH$. Soit $AC = b$ & $BD = d$, $GH = m$ & $EF = n$; ainsi $b : d :: m : n$: & *alternando*, $b : m :: d : n$. La surface de ABD est la moitié de bd , & celle de GEF est la moitié de mn ; mais la raison de bd à mn est composée des deux raisons de b à m , & de d à n . Or ces deux raisons sont les mêmes : donc, selon la Définition de la raison doublée*, la raison de bd à mn est doublée.

Soient deux parallelogrammes $BDMN$ & $EKIL$ semblables, par les mêmes raisonnemens on prouvera que $b : d :: m : n$, & $b : m :: d : n$; bd est la surface de $BDMN$, & mn celle de $EKIL$. La raison de bd à mn est composée des deux raisons de b à m & de d à n . Ces deux raisons sont égales; cette raison composée est donc doublée.

L E M M E.

Les figures Polygones semblables peuvent chacune être divisées en égales quantités de triangles semblables, chacun au sien.

Soient deux figures semblables $ABCDE$, $FGHIK$; je dis qu'elles peuvent être divisées en une égale quantité de triangles chacun semblable à celui qui lui répond. Car 1°. puisque les figures sont semblables, elles auront un égal nombre de côtes, & les angles qu'ils comprennent



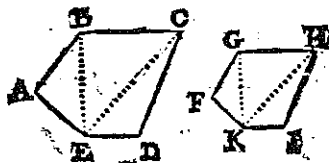
ront seront égaux par la Définition* ; ainsi d'un des angles égaux, comme de E & K , on peut mener des lignes aux autres angles qui divisent ces figures dans une égale quantité de triangles*. 2°. Tous les triangles d'une figure seront semblables à ceux de l'autre, chacun à celui qui lui répond ; ainsi le triangle ABE sera semblable au triangle FGK , qui lui répond : car par la supposition l'angle $EAB = KFG$: & les côtes qui les comprennent sont proportionnels, c'est-à-dire, que $EA : AB :: KF : FG$; & partant ces deux triangles sont semblables*. Il en sera de même des autres triangles, dont les angles compris par les côtes homologues sont égaux soit qu'ils soient formés par les côtes des figures, ou qu'ils soient leurs résidus en ayant ôté les égaux qui les touchent aux points

E & K , tels que BEC & GKH . Donc, &c. ce qu'il faisoit prouver.

THEOREME XVI.

73. Toutes les figures rectilignes semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtes homologues.

Supposant les mêmes choses & la même figure du Lemme précédent. 1°. chacune de ces figures se peut diviser en un égal nombre de triangles semblables entr'eux, chacun au sien par le précédent Lemme. 2°. Chacun des triangles



d'une figure sera à chacun autre, de l'autre figure qui lui répond en raison doublée de leurs côtes homologues par le Theoreme précédent*, c'est-à-dire, en raison doublée de AE à FK , ou AB à FG ; mais le carré de AE est à celui de FK , en raison doublée de AE à FK ; & il en est de même de tous les autres triangles qui composent ces deux figures, dont à cause de leur similitude tous les côtes gardent la même proportion. Partant comme chaque triangle de l'une est à son semblable dans l'autre ; ainsi tous les triangles de l'une à tous les triangles de l'autre*, c'est-à-dire, la première figure à la deuxième, comme le carré du côté AE à celui de FK : Et il en est de même de tout au-

re qu'on voudra choisir. Donc, &c. ce qu'il faisoit conclure.

COROLLAIRE.

Si quatre lignes sont proportionnelles, les figures semblables décrites sur ces lignes sont proportionnelles : & si ces figures semblables sont proportionnelles, ces quatre lignes sont proportionnelles. Eucl. VI. Prop. 22.

Soient quatre lignes proportionnelles $a, b :: c, d$, sur lesquelles soient décrites quatre figures semblables V, X, Y, Z par le Theoreme précédent $V : X :: aa : bb$, & $Y : Z :: cc : dd$; mais $aa : bb :: cc : dd$. Donc $V : X :: Y : Z$. Et si cela est, $a, b :: c, d$. Car les raisons doublées égales sont composées de raisons égales ; ainsi si $aa : bb :: cc : dd$. Il faut que $a, b :: c, d$.

THEOREME XVII.

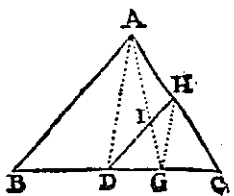
Les triangles & les parallelogrammes de même hauteur, sont entr'eux en même raison que leurs bases.

Soient Z & X , ou deux triangles ou deux parallelogrammes, ayant la même hauteur que je nomme a ; la base de Z est b , & celle de X est d . La surface de Z est ab , si c'est un parallelogramme ; mais seulement la moitié, si c'est un triangle*, ad est aussi la surface de X ; ou si c'est un triangle, seulement la moitié. Or $ab : ad :: b : d$. Donc Z & X sont entr'eux, comme leurs bases.

PROBLEME I.

Un point étant donné dans un des côtes d'un triangle, mener une ligne par ce point qui le divise, selon une raison donnée.

Soit ABC un triangle qu'il faut partager, en menant une ligne droite par le point D , selon une raison donnée. Soit cette raison celle de BG à GC . Si le point D & G étoient un même point, il faudroit mener de D à A une ligne : car BAD & DAC font entr'eux comme BD & DC . Ainsi ce qu'on propose seroit fait. Si G & D sont deux différens points, je mène GH parallèlement à AD & de D à H , où cette parallèle coupe AC , une autre ligne, sçavoir DH ; il faut prouver quel le partage le triangle ABC , selon la raison BG à GC .



Les deux triangles BAG & GAC sont en-
 * 7. 75. tr' eux comme $BG \pm GC$ *. Il n'est donc question
 que de prouver, que $DHC = AGC$, & $DBAH$
 $= BAG$; ainsi que $DHC. AGC :: DBAH.$
 BAG . Les deux triangles GAH & GHD en-
 * L. 3. n. sont égaux *. Donc $GHC + GDH$, ou DHC
 114. $= GHC + GAH$, ou GAC . Reste à prouver
 que $ADH = ABG$; ce qui est facile: car
 par la même raison qui vient d'être dite, le
 triangle ADG est égal à celui de AHD ; ainsi
 les ajoutant chacun au triangle ABD , on aura
 $ABDH = ABG$: & partant $ABDH. DHC$
 $:: ABG. ABC$. On a donc fait ce qu'il falloit
 faire.

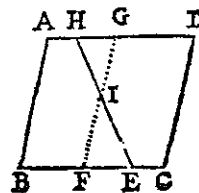
PROBLEME II.

77. Partager un Parallélogramme selon une rai-

son donnée, en menant une ligne par un point donné.

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Il le faut couper selon la raison de BF à FC , menant une ligne par E un point donné.

10. Je mène FG parallèle à AB , ou à CD . Ces deux portions $ABFG$ & $CDGF$ sont entr'elles, comme BF est à FC , selon le dernier Théorème*.



20. Je prends GH égal à FE , & ayant mené de E à H une ligne droite; je dis que $ABEH$ & $ECDH$ sont les portions que l'on cherche: car HGI & EFI sont deux triangles sembla. les; puisqu'ils sont équiangles: car les angles au point I sont égaux, * L. 2. 2. & les autres angles sont pareillement égaux, * L. 2. 1. étant alternes entre les parallèles; * ainsi ces triangles ayant les côtés EF & GH égaux, sont entièrement égaux *. Partant $ABFIH = ABFG$ * L. 2. 3. — HGI ; & ajoutant de part & d'autre la valeur * 26. de HGI égal FIE , on aura $ABFIH + FIE = ABFG$; ce qu'il falloit démontrer. On prouvera de la même manière $CDHE = CDGF$.

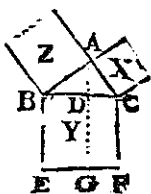
THEOREME XVIII.

Dans un triangle rectangle le carré de l'hypothénuse est égal aux carrés des deux autres côtés. Eucl. I. Prop. 47. 784

*Autre Démonstration que celle qu'on a donnée
au Livre II, p. 142.*

ABC est un triangle rectangle. L'angle droit

est A , & BC l'hypothénuse. Il faut prouver que $BC^2 = AB^2 + AC^2$; & d'une autre manière que



* L. 2, n. nous n'avons fait *.

142. J'abaisse de l'angle droit A , la perpendiculaire AD ;

* 58. 18. qui a été prouvé*, $\div$ BC.

* L. 3. n. B A. B D : donc * $\overline{A B}^L$

27. $= BC \times BD$, ou $BE \times BD$, puisque $BC = BE$
à cause du carré.

De même $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$; donc $AC^2 = BC \times CD$, ou $CF \times CD$ puisque $CF = CB$.

* L. j. n. Or $\overline{BC}^2 = BE \times BD + CF \times CD$ * : donc $\overline{BC}^2$
 18. $= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE I.

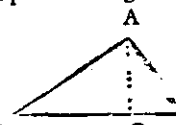
79. Dans les triangles rectangles, quelque figure que ce soit, faite sur l'hypothénuse, est égale aux figures semblables & posées de la même manière sur les deux autres côtes. Euclid. VI. Prop. 31.

Soient sur les côtes BD . DA . AB trois figures X . Y . Z semblables, X soit sur l'hypothénuse. Ces figures sont entr'elles comme BD^2 , AD^2 , AB^2 . Or $BD^2 = AD^2 + AB^2$ par ce Théorème : donc $X = Y + Z$.

COROLLAIRE II.

80. Dans un triangle rectangle ayant mené de l'angle droit une perpendiculaire sur l'hypothénuse, les quarrés faits sur les deux autres côtés sont entr'eux comme les parties de l'hypothénuse.

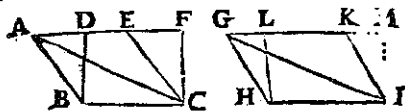
Soit ABD un triangle rectangle, dont DB est l'hypothénuse, sur laquelle de l'angle droit A tombe la perpendiculaire AC . Il faut prouver que $AD^2 = AC \cdot DB$.



$AB^2 :: DC \cdot CB$, puis
 que $AB^2 :: DB \cdot DA$,
 $DC^* :: DB \cdot D$
 $\times DC = DA^* \cdot$. Par la même raison $DB^* \cdot L_3 \cdot$
 $BA \cdot BC$; donc aussi $DB \times CB = DA^*$. Par- 57.
 tant $DB \times DC$, $DB \times BC :: AD^* \cdot AB^2$
 mais $DB \times DC$, $DB \times BC :: DC \cdot CB^*$; ainsi $\cdot L_3 \cdot$
 $AD^* \cdot AB^2 :: DC \cdot CB$; ce qu'il falloit dé- 54.
 montrer.

THEOREME XIX.

Les parallélogrammes qui ont un angle commun ou égal, sont en raison composée des côtés qui le comprennent. Eucl. V 1. Prop. 23. 81.



L'angle ABC est égal à l'angle GHI . Je dis que ces deux parallélogrammes sont en raison composée de AB à GH , & de BC à HI . Ces parallélogrammes $ABCE$ & $GHIK$ sont égaux aux rectangles $BDFC$ & $HLM I$ chacun au sien *, lesquels sont en raison composée de BD à HL & de celle de BC à HI *. Or la raison de DB à HL est la même que celle de AB à GH , les deux triangles ABD & GHI étant semblables. Car, 1°. ils sont rectangles. 2°. Les



angles ABC & GHI étant égaux, si on ôte les angles droits DBC & LHI , les restes ABD & GHL sont égaux ; ainsi ils sont équiangles*, & partant ils ont les côtés proportionnels*.

COROLLAIRE I.

82. Lorsque deux parallélogrammes égaux ont un angle commun ou égal, les côtés qui le comprennent sont en raison réciproque. Eucl. VI. Prop. 14.

Si les parallélogrammes $ABCE$ & $GHIL$ sont égaux entr'eux, fig. ci-dessus : je dis que AB , BC , GH , HI sont en raison réciproque ; c'est-à-dire, que $AB \cdot GH :: HI \cdot BC$.

- * L. 3. n. Puisque $BD \times BC = HL \times HI$. Donc* BD , $HL :: HI \cdot BC$. Or puisque par la supposition les angles ABC & GHI sont égaux ; on conclura* que $AB \cdot GH :: BD \cdot HL :: HI \cdot BC$; & * L. 3. n. partant $AB \cdot GH :: HI \cdot BC$; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE II.

83. Si deux triangles ont une surface égale, & un angle commun ou égal, les côtés qui comprennent cet angle sont en raison réciproque. Eucl. VI. Prop. 15. (même fig.)

Soient deux triangles ABC & GHI dont les surfaces sont égales, & les angles ABC & GHI égaux ; Il faut démontrer que $AB \cdot GH :: HI \cdot BC$. Ces triangles sont moitié des parallélogrammes

grammes $ABCD$ & $GHIL$, dont on vient de prouver que $AB \cdot GH :: HI \cdot BC$; ce qu'il falloit prouver.

PROBLÈME III.

Trouver un carré égal à un rectangle donné 84.

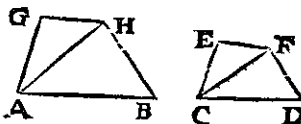
Soit bd le rectangle donné. Il faut chercher une moyenne proportionnelle entre b & d *. Si c'est* 5 n. 492 x , donc $\frac{b}{x} = \frac{x}{d}$ & $bd = xx$. Ainsi on a* L. 3. n. trouvé un carré égal à un rectangle donné. 17.

PROBLÈME IV.

Sur une ligne droite donnée décrire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne donnée, & semblablement posée à la figure rectiligne donnée. Eucl. VI. Prop. 18.

Soit AB une ligne droite, sur laquelle il faut

faire une figure semblable au rectiligne $CDEF$, & semblablement posée.



Je résous $CDEF$ en deux triangles, suivant que le nombre de ses côtés l'exige* sur AB ; je fais* L. 2. n. ABH , triangle semblable au triangle CDE *, & sur AH le triangle AGH semblable à CEF *, & ainsi de suite, s'il y a plus de triangles. Ces triangles semblables ont leurs côtés proportionnels* ; mais comme ils forment ou composent* 5 n. 10, ces deux figures, elles auront donc aussi leurs angles égaux, & leurs côtés homologues proportionnels. Ainsi $AB \cdot AG :: DC \cdot CE$, & conséquemment ces figures seront semblables* ; ce* 5 n. 38, qu'il falloit prouver.

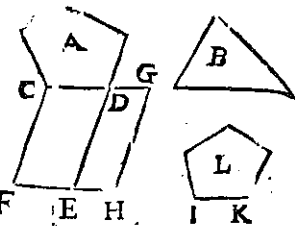
L

PROBLÈME V.

86. Deux figures Rectilignes étant données, en décrire une troisième semblable à l'une & égale à l'autre. Eucl. VI. Prop. 25.

La Rectiligne donnée est A ; il en faire un qui lui soit semblable & égal à B , autre Rectiligne donnée.

Sur CD je fais le Parallélogramme CE égal à A *, & de la même manière sur DE le Parallélogramme DH égal à B ayant l'angle donné D , ensuite je trouve IK moyenne proportionnelle entre CD & DG * sur IK , je fais L semblable à A ; je dis que L est la figure demandée. Il faut prouver que L est égal à B .



* L. 2. n. 539. & 140.

A & L étant semblables par la construction, * 5 n. 73. elles sont l'une à l'autre comme CD^2 à IK^2 *, * L. 3. n. c'est-à-dire, en raison doublée de CD à IK ; mais par l'hypothèse $\frac{CD}{IK} = \frac{DG}{IK}$; ainsi CD est à DG aussi en raison doublée de CD à IK *, & par conséquent $CD \cdot DG :: A \cdot L$; mais aussi $CD \cdot DG :: CE \cdot DH$ *. Et par la * 5 n. 73. construction $CE = A$ & $DH = B$: donc $CD \cdot DG :: A \cdot B$. Partant $B = L$; ce qu'il falloit démontrer.

Remarquez que cette construction se feroit

plus facilement, si au lieu du Parallélogramme CE indifférent, on avoit fait un Rectangle.

THÉOREME XIX.

Un carré de même circuit qu'un parallélogramme rectangle, est plus grand que ce parallélogramme de la valeur du carré de la moitié de la différence, qui est entre les côtés de ce parallélogramme. 87.

X est un carré, & Z un parallélogramme de même circuit. AC est la somme des deux côtés, tant de X que de Z . La moitié de AC , qui est AB , est

le côté du carré X . AE est le grand côté de Z , & EC le petit. Soit AB ou $BC = b$, & $BE = a$ & qu'on prenne $BD = a$: donc $AE = b + a$, & le moindre EC ou AD sera $b - a$; leur différence sera donc $2a$, le carré X sera donc égal à bb , & le rectangle Z égal au produit de $b + a$ par $b - a$, c'est-à-dire, à $bb - aa$ ou $bb - aa$; par conséquent la différence de X & de Z est aa , carré de la moitié de la différence des côtés ; ce qu'il falloit prouver.

le grand côté de Z sera $b + a$, & le moindre EC ou AD sera $b - a$; leur différence sera donc $2a$, le carré X sera donc égal à bb , & le rectangle Z égal au produit de $b + a$ par $b - a$, c'est-à-dire, à $bb - aa$ ou $bb - aa$; par conséquent la différence de X & de Z est aa , carré de la moitié de la différence des côtés ; ce qu'il falloit prouver.

THÉOREME XX.

De deux Polygones réguliers de même circuit, celui qui a plus de côtés a une plus grande surface. 88.

Un polygone est égal à un triangle, qui a pour base son circuit, & pour hauteur son apo-

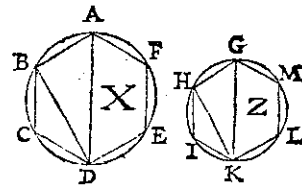
L ij

THEOREME XXII.

Les Polygones réguliers & semblables, sont entr'eux comme les quarez des diametres des cercles où ils sont inscrits. Eucl. XII. Prop. 1.

Soient deux polygones X & Z inscrits dans deux cercles, il faut démontrer qu'ils sont entre eux comme les quarez de leurs diametres AD, & GK.

Puisque X & Z sont polygones semblables, ils seront l'un à l'autre en raison doublée du côté AB



au côté GH, par le Theoreme précédent; mais à cause de cette similitude, les triangles ABD, GHK sont aussi semblables: car tous leurs angles sont égaux étant appuyez sur semblables circonferences*. Donc les côtés homologues seront proportionnels*, & partant AB : GH :: AD : GK; ainsi la raison doublée de AB à GH sera la même que la doublée de AD à GK. Donc le Polygone X. sera au polygone Z en raison doublée du diamètre AD à GK, c'est-à-dire, comme le quarré AD au quarré de GK*; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Donc puisque les Cercles peuvent être pris pour des Polygones, leurs surfaces sont entr'elles comme les quarez de leurs diametres. Eucl. XII. Prop. 2.

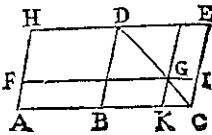
L iij

246 Elements de Geometrie.

THEOREME XXIII.

94. AB=BC; le Parallelogramme ABDH sera plus grand que le Rectangle AFGK, & que quel qu'autre dont le point G sera dans la diagonale DC, Eucl. VI. Prop. 27.

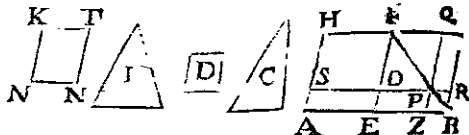
* L. 2. n. BG=GE*: donc BG+GC=GE+GC; c'est-à-dire, que BI=KE. Or BF=BI, puisque AB=BC. Donc BF+BG, ou AG=BG+KE. Or BG+KE est plus petit que BE, ou AD son égal. Donc AG est plus petit que AD.



PROBLEME VI.

95. Appliquer à AB, ligne donnée, un Parallelogramme égal à C, défailant d'un Parallelogramme semblable à D.

C ne doit pas être plus grand qu'un Parallelogramme fait semblable à D. & appliqué à la moitié de AB, c'est-à-dire, plus grand que AF ou EG, Eucl. VI. Prop. 28.



Coupez AB également au point E, sur EB faites le parallelogramme EG semblable à celui D*, lequel sera plus grand que C suivant la requête, que cet excès soit de la figure I, soit fait

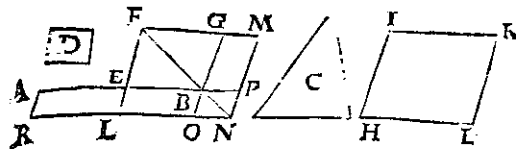
Livre IV. Section IV. 247

le parallelogramme NT égal à I, & semblable à D ou EG par le Problème*, soit menée la diagonale FB, & soit fait FO=KN & FQ=KT, par O & Q soient menées les paralleles SR & QZ le parallelogramme AP est ce qu'on cherche.

Car ces parallelogrammes D, EG, OQ, NT, ZR sont semblables entr'eux, & EG=NT+C=OQ+C; par conséquent C est égal au gnomon OPQ=AO+PG=AO+EP=AP; ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME VII.

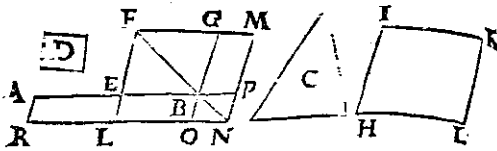
à AB une ligne droite donnée, appliquer un parallelogramme égal à C, qui excède d'un parallelogramme semblable à D. Eucl. VI. Prop. 29.



Soit coupée également AB en E; sur EB soit fait EG semblable à D* ensuite au moyen des Problèmes* soit trouvé HK égal à EG+C & semblable à D ou à EG. Je prolonge FE & FG, de sorte que FL=IH & FM=IK. Je mène par L & M les paralleles RN, MN & AR; je prolonge AB & GB; je mène le diamètre FBN, & AN est le parallelogramme qu'on cherche.

Car ces quatre parallelogrammes D, HK, LM, EG sont semblables par la construction; donc OP est semblable à LM, ou à D*.

L iij



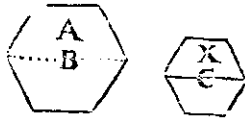
De même $LM = HK$, par la construction ; ainsi $LM = HK = EG + C$: donc $LM = EG + C$: donc $LM - EG = C$. Or $LM - EG$ est égal à $BM + LB + BN$, ou égal à $BL + AL + BN$; car $AE = EB$ par l'hypothèse : donc $C = BL + AL + BN$ ou $C = AN$; ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME VIII.

97. A une figure rectiligne donnée, en trouver une autre semblable en raison donnée.

Soit A une figure donnée. On demande la figure X , à laquelle la surface de A ait une raison donnée, comme par exemple de 5 à 1.

Ces figures, supposées semblables, doivent être entr'elles comme les quarrés de leurs côtes homologues*.



- * § n. 73. c'est-à-dire, en raison doublée desdits côtes*, ou
 * l. 3. n. 80. même de quel qu'autre lignes corde, ou diamètre homologue qui en joint les angles comme B & C . Il faut donc pour cela, entre le diamètre B & une autre ligne D , à laquelle il soit comme 5 à 1 trouver une moyenne proportionnelle C * ; de sorte que $B : C :: C : D$, & sur cette ligne C décrire la figure X semblable à A *,

ces deux figures A & X sont entr'elles comme les quarrés de B & C *, ou en raison doublée de 5 à 25. n. 73. C , c'est-à-dire, comme B à D , ou 5 à 1 ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE I.

Donc il est facile de trouver une figure semblable à une donnée, & moindre qu'une autre d'une certaine figure donnée.

Car il n'y a qu'à la ligne B , côté de la figure donnée, en prendre une autre D qui lui soit dans la proportion requise, & entr'elles trouver, suivant ce qui a été enseigné*, la moyenne proportionnelle C , & sur icelle comme côté décrire une figure semblable à la donnée*, laquelle* § n. 83. sera la cherchée, suivant ce Problème.

COROLLAIRE II.

Il est également facile de trouver une figure semblable à une donnée, & plus grande qu'une autre d'une certaine figure donnée.

C'est une semblable construction que la précédente.

SECTION V.

De la Communurabilité ou Incommunurabilité des Lignes & des Surfaces.

Les grandeurs sont dites Communurables, lorsqu'elles peuvent être mesurées par une troisième, qui est ainsi leur commune mesure.

La commune mesure d'une toise & d'un pié, c'est le pouce qui se trouve exactement douze

L v

fois dans un pié, & soixante-douze fois dans une toise.

DEFINITION II.

101. Les grandeurs Incommunurables, sont celles qui ne peuvent être mesurées par aucune commune mesure.

Une hauteur de sept piés ne peut être mesurée exactement par une toise ; mais elle le peut être par une mesure plus petite, comme par un pié & par un pouce. Ainsi deux grandeurs ne sont incommunurables que lorsqu'on ne peut trouver de mesure, pour petite qu'elle soit, qui les puisse mesurer précisément.

COROLLAIRE.

102. Donc deux grandeurs qui ont un rapport infini, sont incommunurables entr'elles.

Car si elles étoient communurables, leur commune mesure détermineroit leur rapport. Celui du point à la ligne est infini ; car on ne peut point déterminer en quelque ligne que ce soit, combien il y a de points, puisqu'on la peut diviser à l'infini. De même entre une ligne & une surface le rapport est infini ; car dans une surface on y concevra tant de lignes qu'on voudra, comme dans un solide des surfaces.

DEFINITION III.

103. L'on appelle Rationnelle une grandeur connue & déterminée, par rapport à une autre dont la valeur se peut exprimer par nombre.

Grandeur Rationnelle est celle à laquelle on rapporte toutes les autres, & sur laquelle on raisonne ; ainsi on la suppose connue.

DEFINITION IV.

104. Deux grandeurs qui ne sont pas communurables

bles en elles-mêmes, le sont en puissance si leur quarré ou leurs cubes sont communurables.

Si b & c sont incommunurables, mais que leurs quarrés soient communurables, que par exemple bb soit à cc comme 3 à 5, alors b & c incommunurables en eux-mêmes, sont communurables en seconde puissance. Si x & z n'étoient pas communurables ni leurs quarrés xx & zz , mais que leurs cubes xxx & zzz ou x^3 & z^3 le fussent : par exemple, que x^3 fût à z^3 comme 10 à 13, alors x & z incommunurables en eux-mêmes & en seconde puissance, seroient communurables en troisième puissance.

DEFINITION V.

Nombre quarré, c'est le produit d'un nombre multiplié par lui-même.

Ainsi 9 est un nombre quarré, parce que c'est le produit de 3 multiplié par 3, qui en est la racine.

DEFINITION VI.

Nombre cube, c'est le produit d'un nombre quarré multiplié par la racine de ce quarré, c'est-à-dire, par le nombre qui l'a produit.

Ainsi 8 est un nombre cube fait de 4 nombre quarré multiplié par 2 racine de ce quarré, c'est-à-dire, de 2, qui multiplié par lui-même, a fait ce quarré 4.

DEFINITION VII.

Nombre non quarré, c'est celui dont la racine quarrée ne se peut exprimer par aucun nombre.

DEFINITION VIII.

Nombre non cube, c'est celui dont la racine cube ne se peut exprimer par aucun nombre.

L vj

252 *Element de Geometrie.*

2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 sont des nombres qui n'ont point de racine quarrée qui se puisse exprimer par des nombres; car on ne peut point trouver aucun nombre, qui multiplié par lui-même, fasse ou 2, ou 3, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 10, &c. Ces nombres, à la reserve de 8, ne sont point aussi des nombres cubes, car il n'y a aucun nombre, qui multiplié cubiquement, les puisse produire.

DEFINITION IX.

109. Nombres exposans d'une raison, sont les plus petits nombres qui l'expriment.

Ainsi si x est à z comme 6 à 12, les exposans de la raison de x à z seront 1 & 2, qui sont les plus petits nombres qui puissent être entr'eux, comme 6 & 12.

Lorsqu'on joint deux grandeurs qui ne sont pas commensurables, & à qui par conséquent on ne peut pas donner le même nom, ou que l'on est obligé d'exprimer par deux noms differens, cela s'appelle un Binome. Lorsque d'une grandeur on en retranche une autre qui lui est incommensurable, & qu'ainsi on ne les peut exprimer avec un seul signe, c'est bien un Binome; mais pour distinguer cela de ce qui se fait quand on joint deux grandeurs incommensurables, on l'appelle Apotome, ou Résidu, ou Grandeur diminuée. Je n'expliquerai point ici les termes, que j'ai déjà expliqué dans les Elements de Mathematiques.

PROPOSITIONS EVIDENTES.

PROPOSITION I.

110. Deux nombres sont toujours commensurable

Livre IV. Section V. 253

entr'eux, car ils ont au moins l'unité pour leur commune mesure.

Par exemple, dans ces deux nombres 77 & 81, comme dans tous les autres, l'unité s'y trouve précisément tant de fois, ainsi elle en est la mesure commune.

PROPOSITION II.

Lorsque d'un nombre on en retranche un autre, 111 le reste est un nombre.

Car il reste une ou plusieurs unitez.

PROPOSITION II.

Les lignes & les surfaces qui sont comme nom- 112 bre à nombre, sont commensurables; & celles qui sont incommensurables ne sont pas comme nombre à nombre.

C'est une suite des Définitions précédentes.

PROPOSITION IV.

Deux grandeurs commensurables à une troi- 113 sième, sont commensurables entr'elles.

Car si B & Z sont commensurables, on peut exprimer avec des nombres leur rapport. Si C & Z sont pareillement commensurables, on exprimera leur rapport avec des nombres; ainsi toutes ces trois grandeurs se marqueront avec des nombres: partant elles sont commensurables.

PROPOSITION V.

Une ligne, racine ou côté d'un quarré qui n'est 114 pas un nombre quarré, n'est pas rationnelle. Elle le seroit si son quarré étoit égal à un nombre quarré.

La racine d'un nombre qui n'est pas quarré ne se peut point exprimer par aucun nombre;

254 *Elements de Geometrie.*

ainsi toute ligne qui est égale à cette racine, ne se peut point marquer par aucun nombre.

PROPOSITION VI.

115. Si les quarrés de deux lignes ne sont pas entr'eux comme deux nombres quarrés, ces deux lignes ne sont pas commensurables.

Ces lignes sont égales chacune à la racine d'un nombre qui n'est pas quarré, ainsi aucun nombre ne les peut exprimer; elles ne sont donc pas commensurables.

PROPOSITION VII.

116. Un quarré rationnel ne peut être égal à deux quarrés, dont l'un soit rationnel & l'autre ne le soit pas.

117. C'est ce qu'on a dit, Proposition seconde*: Qu'ôtant d'un nombre un autre nombre, le reste est un nombre; Ainsi si d'un quarré rationnel, c'est-à-dire, qui est un nombre, on ôte un quarré rationnel, c'est-à-dire, un nombre, le reste doit être un quarré rationnel ou un nombre.

PROPOSITION VIII.

117. Une ligne commensurable étant divisée en deux parties, si l'une est commensurable, l'autre le sera aussi.

Car cette ligne s'exprimera par un nombre, dont ayant ôté une partie commensurable, c'est-à-dire, un nombre, le reste selon la seconde Proposition, sera un nombre.

PROPOSITION IX.

118. Si à une ligne commensurable on en ajoute une commensurable, le tout sera commensurable.

Cela est évident, un nombre ajouté à un nombre fait un nombre.

Livre IV. Section V. 255

PROPOSITION X.

Si d'une ligne commensurable on retranche une 119 incommensurable, le reste est incommensurable.

Car si l'une étoit commensurable, l'autre le seroit aussi selon la huitième Proposition.

PROPOSITION XI.

Quatre lignes étant en proportion, si la première 120 est commensurable à la seconde, la troisième le sera à la quatrième. Si la première est incommensurable avec la seconde, la troisième le sera à la quatrième.

Cela veut dire, que si la raison de la première à la seconde se peut exprimer par nombre; celle de la troisième à la quatrième, qui est la même, se peut aussi exprimer par nombre. Si la première raison ne se peut pas exprimer, il en est de même de la seconde raison.

PROPOSITION XII.

Le quarré d'une ligne, qui est rationnelle, est un 121 nombre quarré; son cube est aussi un nombre cube.

Cela est évident.

THEOREME I.

Si les raisons simples sont de nombre à nombre, 122 les raisons doublées qui en sont composées auront pour exposans des nombres quarrés, & les raisons triplées auront des nombres cubes.

Soit cette raison simple de b à d : donc la raison de b^2 à d^2 est doublée. Or b & d se pouvant exprimer par nombres, leur quarré le pourront; Ainsi b^2 & d^2 seront égaux à des nombres quarrés; ainsi b^3 & d^3 , seront entr'eux comme des nombres quarrés. Par les mêmes

256 *Elémens de Géométrie.*
raison, b^3 & a^3 , seront entr'eux comme des cubes.

THEOREME II.

123. Une raison simple est sourde, si la raison qui en est doublée ou triplée est sourde.

Car par le Théorème précédent, si cette raison n'étoit pas sourde, la raison doublée auroit pour exposant un nombre quarré, & la raison triplée un nombre cube.

THEOREME III.

124. Une raison simple n'est pas sourde, si les nombres exposans de sa raison doublée sont quarrés, & les exposans de sa raison triplée sont des cubes; & si cela n'est pas, elle est sourde.

Car les quarrés sont en raison doublée de leurs côtes ou racines, & les nombres cubes triplés de leur racine; ainsi les racines des exposans d'une raison doublée ou triplée, seront les exposans de la raison simple; qui par conséquent ne sera pas sourde. Par la même raison si ces nombres ne sont pas quarrés ou cubes; comme leurs racines sont les exposans des raisons simples, ces raisons simples ne le pouvant exprimer par nombre elles sont sourdes.

LEMME.

125. Quatre lignes étant en proportion, le produit des antécédens est à celui des conséquens, comme le quarré du premier terme est au quarré du second terme.

Soient $a, b :: c, d$. Il faut prouver que $ac, bd :: aa, bb$; bc produit des moyens divisé par le premier terme est égal au quatrième

* L. 3. n. me *; ainsi $\frac{bc}{a}$ se peut mettre pour d ; partant 50.

Livre IV. Section V. 257

$\frac{bbc}{a} = bd$. Ainsi il faut démontrer que ac .

$\frac{bbc}{a} :: aa, bb$. Multipliez ac & $\frac{bbc}{a}$ par a , & vous aurez aac & bbc , & divisez ses produits par c , restera aa & bb . La même raison demeure toujours*. donc $ac, bd :: aa, bb$; ce qu'il falloit * L. 3. n. prouver. 54. 55.

THEOREME IV.

Quatre lignes commensurables étant en proportion, le rectangle ou produit des antécédens, est à celui des conséquens comme deux nombres quarrés.

Soient ces quatre lignes commensurables & proportionnelles $a, b :: c, d$; par le Lemme précédent $ac, bd :: aa, bb$. Or a & b sont supposés commensurables; leurs quarrés sont donc un nombre quarré: donc ac & bd sont entr'eux, comme deux nombres quarrés.

LEMME.

Six lignes étant proportionnelles, le produit des antécédens est à celui des conséquens, comme le cube du premier terme est au cube du second terme.

Soient $a, b :: c, d :: e, f$. Il faut prouver que $ace, bdf :: aaa, bbb$; $\frac{bc}{a} = d$, & $\frac{de}{c} = f$: donc * L. 3. n. 60.

$bdf = \frac{b^3ce}{aa}$. Or en multipliant ace & $\frac{b^3ce}{aa}$ par aa , & divisant les produits de cette multiplication a^3ce & b^3ce par ce , après cela vient a^3, b^3 , la même raison demeure toujours; partant $ace, bdf :: a^3, b^3$; ce qu'il falloit prouver. 54. 55.

258 *Elémens de Géométrie.*

THEOREME V.

128. Six lignes commensurables étant en proportion, le produit des antécédens est à celui des conséquens comme deux nombres cubes.

Soient $a, b :: c, d :: e, f$, par le Lemme précédent $ace, bdf :: a^3, b^3$. Or a & b étant commensurables, le pourront ainsi exprimer par * L. 3. n. 101. nombres*, a^3 & b^3 sont deux nombres cubes; par conséquent ace & bdf sont comme deux nombres cubes.

THEOREME VI.

129. Si trois lignes sont en proportion continue, & que la première soit à la troisième comme deux nombres quarrés, ces trois lignes seront commensurables.

Soit cette proportion continuë a, b, c . Si la raison a à c est de nombre quarré; je dis que la raison de a à b sera une raison de nombre à nombre: car la raison de a à c est doublée de celle de a à b , ou comme le quarré de a au quarré de b ; * L. 3. n. 86. & par conséquent par le Théorème troisième*, cette raison doublée étant comme nombres quarrés, la raison simple dont elle est composée n'est pas sourde.

COROLLAIRE.

130. En ce cas le rectangle des extrêmes & ses côtes sont commensurables avec le quarré de la moyenne, & son côté.

Car 1°. puisque par la supposition a, b, c ; * L. 3. n. il s'ensuivra $ac = bb^2$; & ainsi ac commensurable avec bb . 2°. Par le présent Théorème les côtes a, b, c sont commensurables.

THEOREME VII.

131. Si trois lignes sont en proportion, & que la

Livre IV. Section V. 259

première soit à la troisième comme deux nombres, dont le produit n'est pas un nombre quarré (ou qui ait pour exposans deux nombres qui ne sont pas quarrés) la moyenne sera incommensurable en elle-même. & commensurable en puissance avec la première & la troisième.

Soit a, b, c, d : la première b de ces trois lignes est à d la troisième, comme ces nombres 2 & 9, dont le produit 18 n'est pas un nombre quarré. Je dis que la seconde ligne c sera incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance avec la première & la troisième. Son quarré cc est égal à bd , ou à 18*. Or 18 n'étant pas un nombre quarré, sa racine c ne se peut point exprimer par nombre; ainsi c est incommensurable en elle-même avec b & d ; mais sa puissance cc , qui vaut 18, l'est avec b & avec d , c'est-à-dire, avec 2 & avec 9, puisque la raison s'exprime par des nombres, * L. 3. n. 17.

THEOREME VIII.

Si de trois lignes en proportion continuë, la première n'est pas à la troisième comme nombre à nombre, la moyenne est incommensurable avec elles, tant en elle-même qu'en puissance.

Soit cette proportion a, b, c, d , dont la première b n'est pas à d comme nombre à nombre; je dis que c ni sa puissance cc ne sont pas commensurables avec b & d : car la raison de b à d est doublée de celle de b à c , & de c à d *. Cette * L. 3. n. 83. raison doublée étant donc sourde, la raison simple de b à c ou de c à d est donc sourde par le Théorème second*.

Le quarré de b est au quarré de c comme b est à d *. Donc puisque b n'est pas à d comme * L. 3. n. nombre à nombre, bb & cc ne sont pas comme 84.

260 *Elémens de Geometrie.*

nombre à nombre ; ainsi ce sont des incommensurables *.

THEOREME IX.

133. Si de quatre lignes en proportion continuë, la raison de la première à la quatrième est une raison de nombres à nombre, qui ait pour exposans des nombres cubes ; ces quatre grandeurs seront commensurables.

Soit $\frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{f}$; si $b : f :: 1 : 8$, ces quatre lignes b, c, d, f sont commensurables : car la raison de b à f est triplée *. Ces deux nombres 1 & 8 sont cubes ; cette raison les ayant donc pour exposans la raison simple comme celle de cette progression qui est entre chaque terme, ne peut être sourde *, selon le Théorème troisième.

THEOREME X.

134. Si de quatre lignes en proportion continuë la raison de la première à la quatrième a pour exposans des nombres qui ne sont pas cubes, la première & la seconde seront seulement commensurables en puissances ; ainsi de même de la seconde & de la troisième.

Soit $\frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{f}$, & que $b : f :: 1 : 5$. La raison de b à f est triplée de celle de b à c *. Or 1 & 5, les exposans de la raison de b à f ne sont pas cubes ; la raison simple de b à c est donc une raison sourde * : ainsi de même de la raison de c à d , de celle de d à f . Mais puisque $b^3 : c^3 :: b : f$; & par conséquent $b^3 : c^3 :: 1 : 5$; donc b & c sont commensurables en puissance,

THEOREME XI.

135. Si de quatre lignes en proportion continuë, la

Livre IV. Section V. 261

première n'est pas à la quatrième comme nombre à nombre, la raison de la première à la seconde n'est pas de nombre à nombre.

$\frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{f}$; la raison de b à f est triplée ; donc cette raison triplée étant sourde, par le Théorème second, la raison simple de b à c est sourde ; & puisque $b^3 : c^3 :: b : f$, cette raison de b à f étant sourde, celle de b^3 à c^3 est sourde. Ainsi c n'est pas commensurable en puissance avec b .

PROBLEME I.

Trouver une ligne qui soit incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance avec une ligne connue.

Soit b une ligne ; on en cherche une qui lui soit incommensurable. La ligne b étant 2, je prend x une ligne égale à 3 ou à 5, ou à tout autre nombre qui ne soit pas carré. Entre ces deux lignes je cherche une ligne moyenne proportionnelle, que je nomme c : ainsi $\frac{b}{c} = \frac{c}{x}$. Or par le Théorème septième la ligne c sera incommensurable en elle-même avec ces deux premières lignes, & commensurable en puissance *.

PROBLEME II.

Trouver une ligne qui soit incommensurable, tant en elle-même qu'en puissance, avec une ligne connue & donnée.

Soit la ligne donnée & connue B , je lui cherche par le Problème précédent la ligne D , qui lui soit incommensurable en elle-même. Après, entre B & D , ayant trouvé la ligne C moyenne proportionnelle ; cette ligne par le Théorème huitième * sera incommensurable,

262 *Elémens de Geometrie.*

tant en elle-même qu'en puissance avec A ; ce qu'il falloit faire.

THEOREME XII.

138. La diagonale d'un carré est incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance avec chacun des côtés.

Soit le carré $ABCD$. Il faut prouver que AC , sa diagonale, est en elle-même incommensurable avec AB ; mais qu'elle l'est en puissance.

Soit $AB = a$; puisque $BC = AB$: donc $BC = a$: donc

$aa + aa = AC^2$: donc $aa : AC^2 :: 1 : 2$; ainsi voilà la diagonale commensurable en puissance. Or 2 n'est pas un nombre carré * : donc AC , racine de

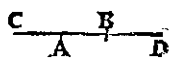
$2aa$, ne peut s'exprimer par nombre * ; ainsi elle

est incommensurable en elle-même * ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XIII.

139. Les deux parties d'une ligne rationnelle coupée en moyenne & extrême raison, ne sont pas rationnelles, Eucl. XIII. Prop. 6.

Soit CB ligne rationnelle coupée en moyenne & extrême raison au point A ; je dis que les parties AC & AB ne sont pas lignes rationnelles ; ou, ce qui est la même chose, qu'elles ne peuvent être exprimées par des nombres. J'ajoute à CB la ligne BD moitié de CB , le carré de la médiane AB



Livre IV. Section V. 263

jointe avec BD , vaut cinq fois le carré de BD ; ainsi ces deux carrés sont comme 5 à 1. Or 5 n'est pas un nombre carré : donc par le Théorème *, la ligne $AB + BD$ n'est pas rationnelle, mais BD moitié de AB ligne rationnelle, est rationnelle ; il faut donc que ce soit la médiane AB qui ne soit pas rationnelle : & partant * la petite partie AC sera incommensurable ; car si elle étoit commensurable, AB le seroit aussi *.

COROLLAIRE.

La médiane est incommensurable avec la somme, tant en elle-même qu'en puissance.

Soit b une ligne coupée en moyenne & extrême raison, x est la médiane, & $b - x$ la petite, $\frac{b}{x} = \frac{x}{b - x}$. Or puisque $b - x$ est une ligne non rationnelle par le Théorème présent, donc par le Théorème huitième *, moyenne entre b & $b - x$ est incommensurable avec b , tant en elle-même qu'en puissance.

SECTION VI.

Des raisons des Cordes avec les rayons du Cercle.

AVERTISSEMENT.

Les Cordes d'un même Cercle ne sont pas entre elles comme les Arcs dont elles sont les Cordes : ces deux Arcs BED & CFD étant égaux, l'Arc BDC est double de B



264 *Elémens de Geometrie.*

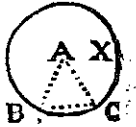
l'un & de l'autre.

Si BC, corde de cet arc, étoit donc le double de la corde BD ou de la corde DC, comme l'arc BDC est le double de l'arc BED; alors BC seroit égal à BD + CD; ce qui ne peut être *. On ne peut donc pas supposer que les cordes d'un même cercle soient entr'elles comme les arcs dont elles sont les cordes.

THEOREME I.

142. Le rayon du cercle est égal à la corde de soixante degrés.

L'angle du centre d'un exagone est de 60 degrés sixième partie de 360 degrés, que valent les quatre angles droits qu'on peut concevoir au tour du centre. Soit donc BAC un angle de 60 degrés; ainsi BC est le côté de l'exagone qu'il faut prouver égal au rayon AB ou AC. Le triangle BAC est isocèle; ainsi les angles sur la base sont égaux; mais celui du sommet est de 60, ainsi tous deux ensemble valent 120, partant chacun 60. Ce triangle est donc équilateral; partant BC = AB, ou BC = AC; ce qu'il falloit prouver.



COROLLAIRE I.

143. Un cercle étant donné faire un exagone. Eucl. IV. Prop. 15.

Le compas ouvert de la grandeur du rayon; je divise le cercle en six parties.

COROLLAIRE

Livre IV. Section VI. 265

COROLLAIRE II.

Il est facile de faire un triangle équilateral dans un cercle. 146

Car deux parties des six de l'exagone, sont la troisième partie du cercle.

COROLLAIRE III.

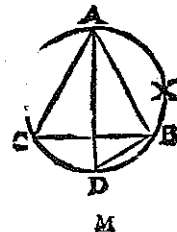
La raison de la circonférence du cercle au rayon, est plus grande que 3 à 1. 148

Chaque côté d'un exagone étant égal au rayon, les six côtés seront égaux à trois fois le diamètre; ainsi la circonférence de ce polygone est au rayon du cercle où il est inscrit, comme 3 à 1. Or la circonférence de ce cercle est plus grande que celle de l'exagone, chaque portion du cercle étant plus grande que le côté de l'exagone qui lui sert de corde.

THEOREME II.

Le carré d'un des côtés du triangle équilateral inscrit dans un cercle, est triple du carré du demi diamètre ou du rayon de ce cercle. Eucl. XIII. Prop. 12. 146

Soit ABC un triangle équilateral inscrit dans le cercle X; soit mené le diamètre AD qui coupe la corde BC perpendiculairement en deux parties égales *. Il faut prouver que le carré de AB est triple de celui du rayon; puisque BC est la corde du tiers du cercle, BD sera la corde de la sixième partie, & partant égale au rayon,

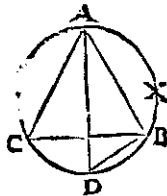


* L. 1. B. 30.

266 *Elémens de Geometrie.*

donc le diamètre AD est

- le double *. Ainsi si BD = b, il faut que AD = 2b, & AD² = 4bb. Soit AB = a; puisque ABD est rectangle: donc aa + bb = AD² *. Ainsi aa + bb = 4bb. Orant bb de part & d'autre, restera aa = 3bb; ce qu'il falloit démontrer.



AVERTISSEMENT.

147. Je ne veux pas grossir ces Elémens de plusieurs Theoremes semblables. Il est évident que la tangente d'un angle de quarante-cinq degrés, est égale au rayon: car elle fait avec ce rayon un triangle rectangle dont la secante est la base, sur laquelle les angles sont égaux, sçavoir chacun de quarante-cinq degrés. Ainsi. 1°. il faut que cette tangente & le rayon soient égaux. 2°. Le carré de la secante * est égal au carré du rayon & de la tangente, ou ce qui est la même chose à deux fois le carré du rayon. Or la corde de nonante est égale à la secante de quarante-cinq degrés: par conséquent la corde de nonante est égale à deux fois le carré du rayon, comme il est évident.

LEMME PREMIER.

148. Dans un triangle isocèle, si les angles de la base sont doubles de celui du sommet, je dis que la ligne qui coupe par la moitié un des angles de la base, coupe le côté opposé AB en moyenne & extrême raison.

Soit BAC ce triangle isocèle, & que la ligne CD coupe par la moitié BCA un des

Livre IV. Section VI. 267

angles de la base, il faut prouver qu'elle coupe AB en moyenne & extrême raison au point D.

1°. Puisqu'on suppose que l'angle BCA est double de BAC; donc la moitié DCA sera égale à l'angle CAD: partant le triangle ADC ayant sur la base AC les angles égaux il sera isocèle*, & aura les côtés AD & DC égaux.

2°. L'angle BDC est égal aux deux opposés DAC & ACD*; par conséquent il est égal à l'angle ACB qui vaut ces deux angles, & à DBC qui est égal par l'hypothèse à ACB; ainsi le triangle DCB ayant les angles sur la base DB égaux, est encore isocèle; ainsi DC = BC.

3°. Les deux triangles isocèles BAC & BDC, qui ont un angle commun au point B*, sont * L. 1. n. équianglés, & partant semblables: donc AB est à BC, ou à AD son égal, comme DC, ou son égal AD est à DB, c'est-à-dire, AB. AD. DB, & par conséquent AB est coupé en moyenne & extrême raison, puisque la partie AD est moyenne entre la toute AB, & l'autre partie DB*.

LEMME II.

Décrire un triangle isocèle, qui ait chacun des angles sur la base double de l'autre. Euclid. IV. Prop. 10. 149

Ayant la ligne AB, il la faut diviser en moyenne & extrême raison au point D*, de B & de D; & de l'intervalle de la médiane AD, je fais deux arcs qui se coupent au point C. Ainsi BC = DC = AD. Les deux triangles ADC & DCB sont donc isocèles. Par la même con-

Mij

268 *Elémens de Géométrie.*

struction $\div AB, AD, DB$.
Mettant en la place des lignes
égales $AB, BC :: BC, BD$;
donc BAC & DBC sont sem-
blables, ou équiangles* & ifo-
celles. Or l'angle BDC est égal
à $DAC + ACD$ les oppoiez
intérieurs qui sont égaux, puis-
que ADC est ifocelle : Donc
 DBC égal à BDC est le double de BAC ; ce qu'il
falloit prouver.



LEMME III.

156. Dans un triangle ifocelle, dont le sommet est
au centre du cercle, & qui a pour base le côté
du décagone, chaque angle de la base est double
de celui du sommet.

Le triangle ifocelle BAC ,
a son sommet au centre de
 X . Sa base BC est le côté
d'un décagone, & par con-
séquent la corde d'un arc de
36 degrés dixième partie de
360 degrés que vaut le cer-
cle. Il faut prouver que
chaque angle de la base CBA & ACB , vaut 72
degrés double de 36 ; ce qui est évident, car les
trois angles valent 180 degrés*. Si on ôte ; 6 de
ce nombre, pour la valeur de l'angle du sommet,
reste 144 pour les angles de la base, qui étant
égaux, chacun sera de 72 double de 36.



* L. 2. n.
75.

THEOREME III.

151. La médiane du rayon coupé en moyenne &
extrême raison est le côté du décagone, ou la corde
de trente-six degrés. Euclid. IV. Prop. 10.
(Fig. ci-dessus.)
Soit AC rayon d'un cercle divisé en D &

Livre IV. Section VI. 269

moyenne & extrême raison*, & qu'on ait fait * 5 n. 34.
la corde BC égale à la médiane AD , alors les
angles sur la base BC seront chacun double de
 BAC * : dont par le Lemme précédent BC est * 5 n. 149.
la corde de la dixième partie du cercle, & par
conséquent le côté du décagone.

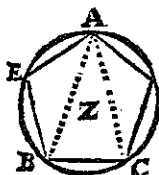
LEMME IV.

Dans un pentagone ayant tiré deux lignes d'un
de ses angles aux extrémités du côté opposé cela
fera un triangle ifocelle. & chaque angle sur la
base sera double de celui du sommet.

Z est un pentagone régulier. De A ayant mené
aux extrémités du côté opposé BC deux li-
gnes, cela fera le triangle BAC , qu'il faut prou-
ver être ifocelle, & que ABC & BCA sont cha-
cun double de BAC .

1°. AB & AC cordes
d'arcs égaux, sont égales :
donc BAC est ifocelle*.

2°. L'angle BAC a pour
mesure la moitié de l'arc
 BC , & l'angle ACB la
moitié de l'arc AEB *. Or
 AEB est double de BC :
donc l'angle ACB est double de l'angle BAC .
On prouvera de même que ABC , est double
de BAC .



* L. 1. n.
31. & L.
1. n. 17.

* L. 2. n.
39.

THEOREME IV.

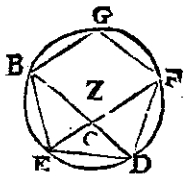
Dans un pentagone, si deux lignes cordes du
double de l'arc que soutient chacun de ses côtés se
coupent, elles sont coupées en moyenne & extrême
raison. & la médiane ou la plus grande partie est
un des côtés du pentagone.

M iij

270 *Elémens de Géométrie.*

Dans le pentagone Z , que je suppose régulier,
inscrit dans un cercle les lignes BD & EF ,
chaque corde du double de l'arc dont chaque
côté du pentagone est la corde, se coupent. Il
faut prouver qu'elles se font en moyenne & ex-
trême raison, & que la médiane ou la plus gran-
de partie, telle que BC , est un des côtés du pen-
tagone.

1°. L'angle BEF a pour
mesure la moitié des deux
arcs BG & GF *, & l'an-
gle BCE , la moitié des
deux arcs BE & FD *. Or
ces deux mesures sont éga-
les : donc ces deux angles
sont égaux ; ainsi EBC est
ifocelle*, & partant $BE = BC$: ainsi BC est
un des côtés du pentagone ; ce qu'il falloit
prouver.



* L. 2. n.
39.
* L. 2. n.
52.

* L. 2. n.
33.

2°. Par la même raison $CF = FD$: & puis-
que $BD = FE$ cordes de mêmes angles, il
faut que $CE = CD$: ainsi ECD est un ifocelle.
Le triangle BED est aussi ifocelle, puisque BE
 $= ED$; car on suppose que Z est un pentagone
régulier : ces deux ifocelles ont un angle com-
mun à D ; donc ils sont équiangles*, partant
comme BD est à BE , ou à son égale BC ; ainsi
* 5 n. 10. ED ou son égale BC sera à CD *, c'est-à-dire,
 $\div BD$. BC, CD & par conséquent, selon la
notion de la moyenne & extrême raison, BD est
coupée comme il a été proposé.

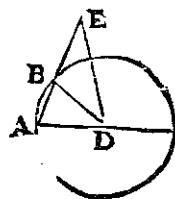
THEOREME V.

154. La ligne droite composée du côté de l'exagone
& du décagone inscrits au même cercle, est coupée
en moyenne & extrême raison. Euclid. XIII.
Prop. 9.

Livre IV. Section VI. 271

Soit AB côté du décagone, & BE côté de l'exa-
gone, c'est-à-dire, une ligne égale au rayon
 BD * ; je dis que AE est coupée en moyenne &
extrême raison au point B .

EBD est ifocelle, puis-
que BE est supposée égale
au rayon BD ; le triangle
 ABD est aussi ifocelle, &
l'angle BAD ou ABD est
double de BDA *. Or
 DBA est aussi double de
 BDE , puisqu'il est égal*
aux deux angles égaux
 BED , & EDB : donc
 BED , & BDA sont égaux entr'eux, & pris en-
semble ils sont égaux à EAD ; ainsi le triangle
 AED est ifocelle ; partant puisque BD coupe
en deux l'angle EDA , il faut que EA soit cou-
pée en moyenne & extrême raison*, ce qu'il * 5 n. 148.
falloit démontrer.



* 5 n. 150.
* L. 2. n.
72.

COROLLAIRE.

Delà il s'ensuit que si AE est coupée en moyenne
& extrême raison, dont AB segment soit côté
d'un décagone, BE sera le côté de l'exagone inscrit
au même cercle.

Puisqu'entre AE & AB il n'y peut avoir
qu'une moyenne proportionnelle, & qu'on vient
de prouver que BE , côté de l'exagone, étoit
cette médiane.

PROBLEME I.

Un cercle étant donné, trouver la corde de
trente six degrés, ou le côté du décagone. Voyez
la Figure de la page 268 num. 150.

Le cercle est X , dont AB est le rayon, que
je divise en moyenne & extrême raison en D *, * 5 n. 34.

M iij

Je prends la corde BC égale à AD , qui sera le côté du décagone*.

PROBLÈME II.

157. Décrire un décagone sur une ligne donnée pour côté.

Je divise le côté donné BC en moyenne & extrême raison, * je lui ajoute la médiane; ce qui me donne une nouvelle ligne AC , aussi divisée en moyenne & extrême raison, dont BC est la médiane*: de cette ligne AC je fais le rayon d'un cercle dont BC est le côté du décagone*; au moyen de quoi j'achève facilement le décagone requis.

PROBLÈME III.

158. Un cercle étant donné, trouver le côté du pentagone, ou inscrire un pentagone dans un cercle. Euclid. IV. Prop. 11.

1°. Ayant trouvé le côté du décagone* on a celui du pentagone, qui est la corde du double de l'arc qui soutient un des côtés du décagone.
2°. On peut trouver encore le côté du pentagone de cette manière. Il faut trouver un triangle isocèle, dont les angles de la base soient chacun double de celui du sommet*, & l'inscrire; ou un qui lui soit semblable dans le cercle donné*; ce qui donnera un côté du pentagone*.

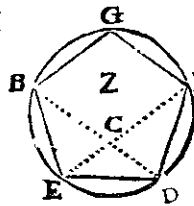
PROBLÈME IV.

159. Décrire un pentagone sur un côté donné.

Soit le côté donné ED . Je suppose le pentagone fait; en donnant le moyen de trouver les lignes BD & EF , on découvre ce qu'il faut faire. Or puisque BD est coupée en moyenne & extrême raison au point C *, que BC égale à BE , & par conséquent à ED , est la médiane, en cou-

pant le côté ED en moyenne & extrême raison, & lui ajoutant la médiane, on aura une ligne égale à BD *, coupée pareillement en moyenne & extrême raison, dont la médiane sera ED , par conséquent égale à BC .

Comme on connoitra donc les trois côtés du triangle DEB , il sera facile de le faire & d'achever tout le pentagone, soit en circonscrivant un cercle au tour de ce triangle*, ou faisant de même le triangle EFD .



PROBLÈME V.

Circoncrire un pentagone régulier à un cercle. 160. Euclid. IV. Prop. 12.

Il faut, 1°. inscrire un pentagone dans le cercle donné: 2°. mener du centre de ce cercle des lignes droites par les cinq angles du pentagone: 3°. mener des tangentes par les points de la circonférence où ces lignes coupent le cercle. Ces tangentes, comme il est évident, formeront le pentagone que l'on cherche.

PROBLÈME VI.

Dans un pentagone régulier, inscrire un cercle. 161. Euclid. IV. Prop. 13.

Il faut sur le milieu de deux côtés de ce pentagone, élever des perpendiculaires dont la section donnera le centre du cercle que l'on cherche, qu'il faut faire de l'intervalle entre ce centre & le milieu d'un des côtés du pentagone, comme il est évident.

M v

PROBLÈME VII.

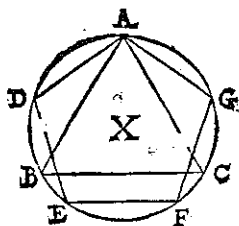
162. Circoncrire un cercle à un pentagone. Euclid. IV. Prop. 14.

Ayant trouvé comme dans le Problème précédent le centre de ce cercle, il faut prendre l'intervalle de ce centre & d'un des angles du pentagone, & ensuite décrire un cercle qui sera celui que l'on cherche.

PROBLÈME VIII.

163. Dans un cercle faire un polygone de quinze côtés. Euclid. IV. Prop. 16.

Le cercle X étant proposé pour y décrire un quindecagone, 1°. je le partage en six arcs égaux; le rayon est la corde de chacun de ces arcs. 2°. Je prends deux de ces arcs, dont le double est la troisième partie; ainsi la corde est un côté du triangle équilatéral ABC . 3°. Je fais le pentagone $ADEFC$, dont chaque côté est la corde de l'arc cinquième partie du cercle. Celle de l'arc troisième partie de celui-ci, est le côté du quindecagone, dont cinq côtés font le tiers du cercle, & par conséquent répondent au côté du triangle équilatéral. Cela étant, BE est le côté du quindecagone qu'on cherche; car à AD répondent trois parties de ce polygone, & autant à DE . Ainsi à AD & DE répondront six côtés. Mais à AB répondent cinq parties; ainsi reste BE , sixième partie de AE , pour le côté du quindecagone.

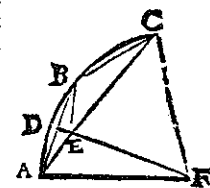


THÉOREME VI.

Le carré d'un des côtés d'un pentagone est égal aux carrés d'un des côtés du décagone & de l'hexagone, inscrits dans le même cercle. Euclid. XIII. Prop. 10.

Soit AC le côté d'un pentagone. Ayant divisé l'arc AC en deux parties égales au point B , & mené les cordes AB , BC , elles seront les côtés du décagone, & AF ou FC rayons du cercle, seront les côtés de l'hexagone. Il faut prouver que $AC^2 = AF^2 + AB^2$.

Soit menée la ligne FD coupant AB en deux parties égales, & du point E soit menée EB ; l'on aura les deux triangles ACF & ECF qui sont semblables; car ils ont l'angle C commun; & l'angle CFE est égal à FAC , parce qu'ils sont tous deux d'un égal nombre de degrés, savoir de 54; car l'arc BC étant de 36 degrés & BD de 18, DC sera de 54, mesure de l'angle CFD , auquel est égale CAF à cause que le triangle AFC est isocèle, & que l'angle du centre est de 72 degrés. Ces triangles donc étant semblables $\therefore AC : AF :: EC : C$; donc $AC \times EC = AF^2$. * L. 3. 10.



Maintenant le triangle isocèle AEB est semblable à ABC aussi isocèle; car ils ont un angle commun, savoir A ; & par conséquent tous les autres égaux. Donc $\therefore AE : AB :: AB : AC$; donc $AE \times AC = AB^2$. * L. 3. 11. $AB^2 = AE \times AC$; donc $AF^2 + AB^2 = AC^2$. * L. 3. 12. $AC^2 = AF^2 + AB^2$. Mais ces deux rectan-

M vj

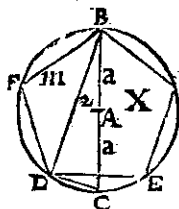
276 *Elémens de Geometrie.*

* L. 3. n. 12. gles sont égaux au carré de AC^2 ; car $AB + EC = AC$. Donc $AC^2 = AF^2 + AB^2$, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

165. Le carré du côté du pentagone inscrit dans un cercle, & le carré de la corde qui soutient l'angle du polygone joints ensemble, valent cinq fois le carré du rayon du cercle.

Soit BF côté du pentagone $= b$, & BC diamètre du cercle $= 2a$, & BD la soutenance de l'angle F du pentagone $= d$. Il faut prouver que $BF^2 + BD^2 = 5a^2$, ou $bb + dd = 5aa$.



Soit mené $DC = c$, qui fera le côté du décagone, & formera le triangle rectangle BDC . Donc * L. 2. n. 4. $dd + cc = 4aa$; mais par le Théorème précédent $bb = aa + cc$; joignant cette égalité avec la première, on aura pour somme $bb + dd + cc = aa + cc + 4aa$; retranchant cc de part & d'autre, $bb + dd = 5aa$; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME IX.

166. Un cercle étant donné, trouver le côté du pentagone & du décagone d'une autre manière que celle qui a été enseignée.

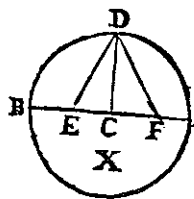
Soit AB diamètre du cercle donné, & son rayon CD perpendiculaire sur AB si l'on prend CE moitié de BC , & que du point E on mène ED , & qu'ensuite l'on prenne $EF = ED$

Livre IV. Section VI.

277

& qu'on tire DF ; je dis que cette ligne sera le côté du pentagone cherché.

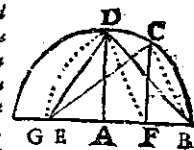
Car * $BF \times FC + EC^2 = EF^2 = ED^2$. Mais $FD^2 = DC^2 + FC^2$, ainsi $BF \times FC + EC^2 = DC^2 + FC^2$; donc



retranchant EC^2 de part & d'autre, $BF \times FC = DC^2 - BC^2$; & remettant cette égalité en proportion*, on aura $\frac{BF}{BC} = \frac{BC}{FC}$; donc * la ligne FB est coupée en moyenne & extrême raison: & puisque BC ou DC est le côté l'hexagone, FC sera celui du décagone*. Mais $FD^2 = DC^2 + FC^2$: donc DF est le côté du pentagone*; ce qu'il falloit trouver.

AVERTISSEMENT.

Cette operation s'abrege de cette manière. On prend BG égale au rayon du cercle BD , égale à la corde de nonante, ou au côté du carré inscrit dans le cercle, & CE égale à BD : la ligne DE sera le côté du pentagone, & AD étant le rayon du cercle, AE sera le côté du décagone.

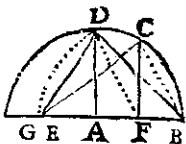


Pour démontrer cette operation, de C s'abaisse une perpendiculaire sur le rayon AB , & de D sur le centre A , la perpendiculaire AD : ainsi

278 *Elémens de Geometrie.*

BD est la corde de nonante, à qui CE est égale.

Soit posé AB , AD ou $BC = 2a$; ainsi $BG = 4a$. Or * $\frac{BG}{BC} = \frac{BC}{BF}$, c'est-à-dire, $\frac{4a}{2a} = \frac{2a}{a}$; donc BF est la moitié du rayon. Mais on a vu dans le présent Théorème, que pour trouver ED côté du pentagone, on a fait $FE = FD$. Si donc dans la présente construction on prouve que cette égalité s'y rencontre, elle en fera la démonstration.



Puisque $FB = a$, FG sera $3a$, le rectangle $GF \times FB$, c'est-à-dire, $3aa = FC^2$. Or AB & AD étant chacun $2a$, leurs carrés seront ensemble $8aa = DE^2 = CE^2$ par la construction, lequel est égal $CF^2 + EF^2$. Si donc de $CE^2 = 8aa$ on ôte $FC^2 = 3aa$, restera $5aa$ pour EF^2 , à quoi est aussi égal FD^2 puisqu'il est égal à $DE^2 + AF^2$, c'est-à-dire, à $4aa + aa$, partant $FD = FE$; c'est ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME VII.

168. Si dans un pentagone équilatéral trois angles pris comme on voudra sont égaux il sera équilatéral. Eucl. XIII. Prop. 7.

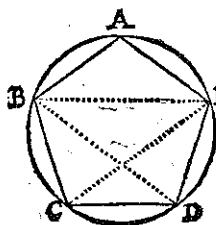
Soit le pentagone équilatéral $ABCDE$, qui a trois de ses angles pris comme on voudra égaux, savoir, A , C , D ; il faut prouver que tous

Livre IV. Section VI.

279

sont égaux, que $C = B = E$.

Les triangles BAE , BCD , CDE étant isocèles, dont les angles A , C , D égaux sont compris par les côtés égaux, ils seront en tout égaux*; & ainsi les bases BE , BD , CE seront égales, comme aussi tous les angles formés par les côtés égaux sur les dites bases seront égaux. De même les deux triangles BEC , EBD isocèles ayant tous leurs côtés égaux auront aussi les angles EBC , ECB , BED , BDE égaux*. Si à chacun des angles EBC , ECB on ajoute les égaux ABE , DCE , le total B sera égal au total C . La même chose est pour les angles E & D , partant tous ces cinq angles seront égaux; ce qu'il falloit prouver.



THEOREME VIII.

Quand le rayon d'un cercle est rationnel, le côté du décagone inscrit dans ce cercle est incommensurable, tant en lui-même qu'en puissance avec ce rayon.

Soit B ligne rationnelle rayon d'un cercle; coupée en moyenne & extrême raison: x que je suppose être la médiane, sera le côté du décagone*. Or la médiane x est incommensurable, tant en elle-même qu'en puissance avec B .*

THEOREME IX.

Lorsque le rayon d'un cercle est rationnel,

180 *Elémens de Geometrie.*

les côtes du pentagone inscrit dans ce cercle sont incommensurables, sans en eux-mêmes qu'en puissance avec ce rayon. Eucl. XIII. Prop. 11.

- Soit b ligne, rationnelle rayon d'un cercle, z le côté d'un pentagone, & x le côté d'un décagone, inscrits dans le cercle dont b est le rayon.
- *S. n. 164. Partant $bb + xx = zz^*$: donc puisque le carré xx n'est pas rationnel, comme nous venons de le démontrer dans le dernier Theorème,
- *S. n. 116. le carré zz ne peut être rationnel*, par conséquent la racine z n'est pas rationnelle, puisque tout carré qui n'est pas égal à un nombre carré, ne peut avoir pour racine une grandeur précisément égale à un nombre, comme nous l'avons prouvé ci-dessus*.
- *S. n. 114. vous prouve ci-dessus*.

De la quadrature du Cercle.

- 178 Nous avons vu* que la surface du cercle est égale à un triangle, qui a pour hauteur le rayon de ce cercle, & pour base la circonférence ; ainsi une moyenne proportionnelle entre le rayon & la circonférence, sera le côté d'un carré égal au cercle. Mais pour trouver cette moyenne proportionnelle, il faudroit, le rayon étant donné, trouver une ligne droite égale à la circonférence, qu'on ne peut trouver, à moins de connaître la raison du rayon à la circonférence, qui n'est point connue exactement, mais à peu près. Le cercle peut être pris pour un polygone à un nombre infini de côtes ; le moyen donc le plus exact & le moins défectueux de trouver l'adite raison, c'est de prendre le plus grand polygone qu'on pourra ; & de voir quelle est la raison de son circuit avec le diamètre du cercle où il est inscrit. Archimede a considéré un polygone de nonante-six côtes, dont le circuit est au dia-

Livre IV. Section VI. 181

metre du cercle comme 223 à 71, laquelle raison est moindre que celle de la circonférence du cercle au diamètre, puisque ce polygone inscrit est plus petit que le cercle*. Archimede comparant un même polygone, mais circonscrit avec le diamètre, il a trouvé que la raison de l'un à l'autre étoit comme 22 à 7, laquelle est plus grande que celle de la circonférence du cercle avec le diamètre, puisque ce polygone circonscrit est plus grand que le cercle. On a donc deux raisons, savoir celles de 223 à 71, & de 22 à 7, dont l'une est plus petite, & l'autre plus grande que la véritable qu'on cherche. Donnons un même conséquent à ces deux raisons, les réduisant à celle-ci, selon ce qu'on a enseigné*.

1561 497
1562

Ayant ainsi supposé le diamètre de 497 parties, la circonférence du cercle sera plus grande que 1561, & plus petite que 1562. Divisons l'unité qui est la différence de ces deux nombres par 497, le quotient ¹ fera voir que la différence, dont l'un & l'autre nombre diffère de la véritable grandeur de la circonférence, est moindre que la ¹ partie du diamètre ; ce qui est peu de chose.

Ceux qui ont pris des polygones plus grands que de nonante-six côtes ont trouvé une raison plus exacte. Jean Pell en considère un de 256 côtes, dont chacun est plus petit que 24545, posé que le rayon du cercle soit de 1000000 ; ainsi la demie circonférence de ce polygone est plus petite que 3141760. Si le diamètre du cer-

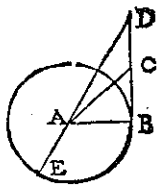
*L. 3. n. 89.

182 *Elémens de Geometrie.*

ele étoit donc 100000, tout le circuit de ce polygone circonscrit au cercle seroit plus petit que 314176. Or ce calcul qu'il fait dans un ouvrage imprimé à Amsterdam l'an 1647, ne suppose aucune extraction de racine. Il est fondé sur le Theorème suivant.

THEOREME.

BC étant la tangente d'un arc moindre qu'un arc de quarante-cinq degrés ; & BD la tangente d'un arc double ; BC est à BD comme le carré du rayon AB, moins le carré de BC, est à deux fois le carré du rayon AB.



Il faut démontrer que $BC : BD :: AB^2 - BC^2 : 2AB^2$. Puisqu'on suppose que l'angle BAD est

- *S. n. 17. double de BAC : donc $AB : AD :: AC : CD^*$ & componendo $AB : AD + AB$ (ou DE) :: $BC : BD^*$. Partant $AB^2 : DE^2 :: BC^2 : BD^2$.

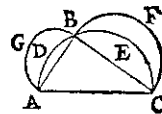
- *L. 3. n. 84. Alternando, $AB^2 : BC^2 :: DE^2 : BD^2$; donc dividendo & componendo $AB^2 - BC^2 : 2AB^2 :: DE^2 - BD^2 : 2DE^2$. Ainsi reste à démontrer que $DE^2 - BD^2 : 2DE^2 :: BC : BD$. Car alors $AB^2 - BC^2 : 2AB^2 :: BC : BD$. Puisque deux raisons égales à une troisième sont égales entr'elles. Or $DE^2 = AE^2 + 2AE \times AD + AD^2$. Mais $AD^2 = AB^2$ (ou $AE^2 + BE^2$). Donc $DE^2 = 2AE^2 + 2AE \times AD + BE^2$. Donc retranchant BD^2 de part & d'autre $DE^2 - BD^2 = 2AE^2 + 2AE \times AD$.

Livre IV. Section VI. 183

Or $2AE^2 + 2AE \times AD = 2AE \times ED^*$: *L. 3. n. Donc $DE^2 - BD^2 : 2AE \times ED$. Ces deux rectangles $2AE \times ED$ & $2ED^2$ ont la même base, savoir ED : ils sont donc entr'eux comme AE ou AB est à ED. Or $AB : ED :: BC : BD$: Donc $DE^2 - BD^2$ égal à $2AE \times ED$ est à $2ED^2$ comme BC à BD ; ce qu'il falloit montrer.

Suivant cette raison qu'Archimede établit de la circonférence du cercle à son diamètre, savoir celle de 22 à 7, ou de 44 à 14, ou de 66 à 21, qui est toujours la même raison, la surface du cercle est au carré de son diamètre comme 11 à 14. Car soit nommée m la circonférence du cercle, & n le diamètre, multipliant mn par n , alors $mn : mn :: m : n$ * Et *L. 3. n. puisque $m : n :: 44 : 14$: donc $mn : nn :: 44 : 14$. Donc le quart de mn sera à nn comme 11 le quart de 44 est à 14. Or le quart de mn est la surface du cercle* : donc cette surface est à nn carré du diamètre, comme 11 est à 14.

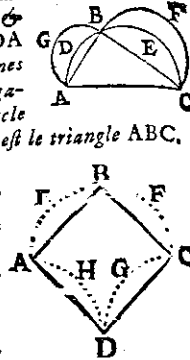
Ainsi on auroit trouvé la quadrature du cercle, si on étoit assuré que la vraie raison de la circonférence du cercle à son diamètre, est comme 22 à 7 ; mais cette raison n'est pas juste, & on ne connoit pas encore quelle est la vraie. On connoit néanmoins en partie cette quadrature, c'est-à-dire, qu'on peut assigner une portion de cercle égale à une figure rectiligne ; car le triangle ABC étant rectangle, le demi cercle ADBE est égal aux deux demi cercles AGB & BFC * *S. n. 79.



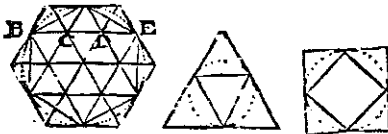
284 *Elémens de Geometrie.*

Orant donc les parties communes, savoir ABD & BCE, il restera AG BDA & CEBF comme deux lunes ou croissans, qui seront égales au reste du demi cercle AD BE C, lequel reste est le triangle ABC.

On voit aussi à l'œil que la figure AEBFCGDH, semblable au coiseau à pié des Cordonniers, est égale au carré ABCD : car par la construction les parties $AHD = AEB = BFC = CGD$.



275. Les seules figures font voir qu'un triangle circonscrit à un cercle est quadruple de l'inscrit, que le carré circonscrit est le double de l'inscrit, que l'exagone circonscrit est à l'inscrit comme 4 à 3. Remarquez ici en passant, que pour couper géométriquement une ligne comme BE en trois parties égales, il faut faire qu'elle soit le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle, après avoir fait l'exagone & coupé les côtés de l'exagone par des perpendiculaires, vous trouverez que les perpendiculaires couperont BE en trois parties égales BC, CD, DE.



Voilà un Theorème général, qui donne une

Livre IV. Section VI. 285

connoissance fort étendue, de ce qu'on peut savoir de cette matière.

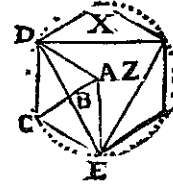
Quand deux polygones inscrits l'un à deux fois plus de côtés que l'autre, le plus grand est au plus petit, comme le rayon du cercle est à l'apothème du plus petit.

Z est un polygone dont l'apothème est AB, & X un polygone qui a deux fois plus de côtés. La surface de Z est égale à autant de fois le triangle DAE, que Z a de côtés : & il est clair, qu'ajoutant à chacun de ces triangles le triangle DCE, on aura la surface de X qui est à celle de Z, comme le romboïde de AECD est au triangle DAE. Or ces deux figures sont l'une à l'autre comme le rayon AC est à AB, qui est l'apothème de Z ; car les surfaces des deux triangles DAE & DCE, qui ont même base, sont comme leur hauteur AB & BC ; ainsi de tous autres polygones, dont l'un aura deux fois plus de côtés que l'autre.

Si on divise le polygone X pour en faire un qui ait deux fois plus de côtés, que je nomme Y ; il en sera de même : & il est bon de remarquer que Z, le premier polygone, sera à ce troisième Y comme le plan de l'apothème du premier & du second est au carré du diamètre ; ce que je démontre ainsi. Soit l'apothème du premier nommé, m ; celui du second, n ; & le rayon k, selon ce qui a été démontré.

$$\begin{aligned} Z : X &:: m : k, \\ X : Y &:: n : k. \end{aligned}$$

En multipliant les Antécédens par les antécéd



286 *Elémens de Geom. Liv. IV. Sect. VI.*

dans, & les conséquens par les conséquens, $ZX : XY :: mn : kk$.

Or $ZX : XY :: ZY$; donc, $Z : Y :: mn : kk$. Le premier polygone Z sera au troisième polygone Y, comme mn plan de l'apothème du premier & du second est à kk carré du rayon.

Par cette méthode on démontre que le premier polygone est au quatrième, comme le solide fait de l'apothème du premier, du second & du troisième est au cube du rayon du cercle ; ainsi de suite à l'infini.

277. L'apothème d'un carré inscrit est la moitié d'un des côtés ; ainsi un carré est à un octogone comme la moitié d'un de ses côtés est au rayon du cercle où il est inscrit ; ou, ce qui est la même chose comme un de ses côtés est au diamètre du cercle. C'est pourquoi on a droit de conclure qu'un carré dans un cercle est à un polygone qu'on a fait d'une infinité de côtés en doublant toujours les côtés, c'est à-dire, d'un carré qui fait un octogone, d'un octogone un polygone de seize côtés, ainsi de suite, lequel polygone peut être considéré comme un cercle. On peut, dis-je, conclure que le carré est au cercle comme une grandeur faite de la multiplication de tous les apothèmes de ces polygones, à la plus haute puissance du rayon du cercle : mais ce n'est presque rien savoir ; car outre qu'on rencontre des raisons fautes & le rayon & le diamètre sont divisibles à l'infini ; ainsi on ne peut point comprendre le nombre de tous ces apothèmes. Il est donc impossible d'arriver par cette voye enfin à un polygone égal à un cercle. Cette figure est ainsi incompréhensible, qu'on ne la voit la plus simple de toutes les figures de Geometrie,



ELEMENS DE GEOMETRIE. OU DE LA MESURE DE L'ÉTENDUE.

LIVRE CINQUIÈME.

De la troisième espèce d'étendue, c'est-à-dire des Solides, comment les Solides se forment & se mesurent.

SECTION PREMIERE.

Des Sections & Rencontres des Plans, dont on peut concevoir qu'un Solide est formé.

AVERTISSEMENT.

On peut concevoir qu'un Solide, quel qu'il soit, est composé de différens plans posés les uns sur les autres ; ou qu'il est fait par le mouvement d'un seul mû d'une certaine manière. Aussi, selon

que deux ou plusieurs plans se coupent ou se rencontrent, ils forment des Solides ; ce qui nous oblige en traitant des Solides, de commencer par la rencontre & section des Plans.

Propositions évidentes touchant les Plans.

PROPOSITION I.

1. Une ligne droite en se mouvant le long d'une autre ligne, qui est droite & immobile, & gardant avec elle une même situation, fait une superficie plane ou un plan.

Cette superficie a toutes ses parties entre ses extrémités également posées ; car elles sont faites uniformément : Et ce qui fait la différence des autres superficies, qui ne sont pas planes ; c'est que selon la manière dont elle est faite, on lui peut appliquer en tous sens une ligne droite, comme on le va dire.

PROPOSITION II.

2. Une ligne droite peut être appliquée en tous sens à une surface plane, & convenir avec elle.

PROPOSITION III.

3. La surface d'un plan est la plus courte qu'on puisse concevoir entre les bornes de ce plan.

Car un plan est composé de lignes droites, qui sont les plus courtes qu'on puisse concevoir entre leurs extrémités. Mais je ne dis pas que toute surface qui est la plus courte entre ses bornes est un plan ; car entre deux lignes qui sont à quelque distance l'une de l'autre, & qui ne sont pas posées de la même manière : si on mène des lignes droites, on fera une superficie la plus courte qui

qui puisse être entre ces deux lignes, mais elle ne sera pas un plan ; ainsi quoiqu'il soit vrai que tout plan est une surface la plus courte qu'on conçoive entre ses bornes, néanmoins toute surface la plus courte entre ses bornes n'est pas un plan.

PROPOSITION IV.

Un plan élevé sur un plan est perpendiculaire sur ce plan, lorsqu'il ne panche pas plus d'un côté que de l'autre. 4.

PROPOSITION V.

Deux plans sont parallèles, lorsque dans toutes leurs parties ils sont à une égale distance l'un de l'autre, & qu'étant prolongés ils ne se rencontrent point. 5.

PROPOSITION VI.

On peut prolonger un plan, ou le concevoir prolongé de tous côtés, autant qu'il sera nécessaire. 6.

PROPOSITION VII.

Une ligne droite ne peut être en partie sur un plan, & en partie en l'air. Eucl. XI. Prop. 1. 7.

Car pour lors cette ligne ne pourroit être appliquée à ce plan, & convenir avec lui ; ainsi selon la seconde Proposition, ce plan ne seroit pas plan. Outre cela on peut concevoir que la partie de cette ligne qui seroit dans le plan étant prolongée demeureroit toujours dans le plan, ce seroit donc une autre ligne que celle qui seroit en l'air ; ces deux lignes néanmoins ayant deux points communs, ne peuvent pas être différentes*.

PROPOSITION VIII.

Deux lignes droites qui se coupent peuvent être conçues dans un même plan, Eucl. XI. Prop. 2. 8.

N

Les lignes DB & EC se coupent : ayant mené entre AB & AC des lignes droites, on aura une superficie, qui est un plan : car on y peut appliquer une ligne droite ; & cette superficie est la plus courte qu'on puisse concevoir entre les lignes AB & AC qui seront sur ce plan ; lequel étant prolongé, si AD & AE, qui sont parties des lignes BD & EC ne se trouvent pas dans ce même plan ; BD & CE seront en partie sur lui, & en partie en l'air : ce qu'on vient de voir être impossible.

PROPOSITION IX.

9. Tout triangle peut être conçu dans un plan. C'est une suite de la Proposition précédente.

PROPOSITION X.

10. La commune section ou rencontre de deux plans est une ligne droite. Eucl. XI. Prop. 3.

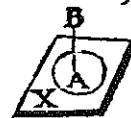
X & Z se coupent. Les extrémités de leur section sont les points E & F, entre lesquels on a mené une ligne sur Z & une sur X. Si ces deux lignes n'étoient pas une même ligne : on pourroit mener entre deux mêmes points plus d'une ligne droite ; ce qui est impossible*.

La section de ces deux plans ne peut donc être qu'une ligne droite.

PROPOSITION XI.

11. Une ligne droite telle que AB élevée sur le plan X, doit être censée perpendiculaire lorsque de A son pied, comme centre ayant fait un cer-

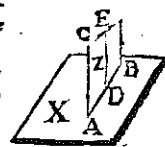
cle, B son sommet est également éloigné de la circonférence de ce cercle ; & si cela n'est pas, elle ne peut être dite perpendiculaire.



Cela est conforme à la notion de la ligne perpendiculaire, qui ne panche pas plus d'un côté que d'autre.

PROPOSITION XII.

Concevant que AC une ligne perpendiculaire sur le plan X, est mue d'un mouvement droit & uniforme selon une ligne droite telle que AB, elle fera le plan Z, qui sera perpendiculaire en toutes ses parties sur le plan X. 12.



PROPOSITION XIII.

Si la ligne ED est perpendiculaire sur AB section de Z & de X est perpendiculaire sur X, tout le plan Z est perpendiculaire sur X. 13.

Car on peut concevoir que le plan Z est fait par le mouvement droit & uniforme de DE sur AB ; ainsi par la Proposition précédente, le plan Z est perpendiculaire sur le plan X.

THEOREME I.

Entre deux lignes parallèles ou non, qui sont dans un même plan ou entre une ligne & un point, on ne peut concevoir qu'un même plan, dans lequel est toute ligne droite menée entre deux lignes. Eucl. XI. Prop. 7. 14.

Car si on veut concevoir deux plans, l'un sera plus grand ou plus petit ; ce qui ne peut être.

N

- 292 *Elémens de Geometrie.*
 S. 2. puisque toute superficie qui n'est pas la plus petite entre ses bornes, n'est pas un plan. Ils seront donc égaux; ce qui étant, ils ne sont pas différens: car si on veut dire qu'ils sont posés l'un sur l'autre, comme ils n'ont point d'épaisseur, ils ne peuvent faire qu'un seul plan.

THEOREME II.

15. Deux plans qui conviennent en trois points qui ne sont pas sur la même ligne, conviennent entièrement.

1°. Entre deux des points donnez, on ne peut concevoir qu'une ligne droite. 2°. Entre cette ligne droite & le troisième point donné, on ne peut concevoir deux différens plans par la proposition précédente: ainsi la partie de ces deux plans entre ces trois points est une même chose; par conséquent si on prolonge cette partie ce ne sera qu'un même plan, ainsi ces deux plans ne seront pas différens.

COROLLAIRE.

16. La position d'un plan ne dépend donc que de trois points, qui ne soient pas sur une même ligne.
 Ou, ce qui est la même chose, trois points qui ne sont pas sur une même ligne étant donnez, le plan est donné.

THEOREME III.

17. Si B sommet de la ligne AB élevée sur le plan X est également éloigné de C, D, E trois points également distans de son pié A, cette ligne est perpendiculaire sur X.

1°. Concevons dans le plan X un cercle également distant de B, qui passe par C, D, E qu'on a supposé en égale distance de A.

- 294 *Elémens de Geometrie.*
 AC sur ce plan, est perpendiculaire sur AC. ou AC est perpendiculaire sur toutes les lignes droites du plan Z qui passent par A.

De A pié de la perpendiculaire AC, je décris un cercle X, & je prolonge la ligne BA de sorte qu'elle coupe X en D & B. Si C, sommet de la perpendiculaire AC n'est pas également distant de D & de B, alors AC ne sera pas perpendiculaire sur AB*; mais aussi AC ne sera pas perpendiculaire sur le plan Z*; ce qui est contre l'hypothèse. AB rencontre donc perpendiculairement AC; ainsi de toute autre ligne du plan Z, qui passe par A.

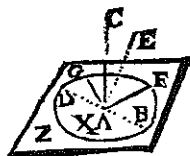
THEOREME VI.

21. Si AC une ligne droite rencontre perpendiculairement dans un même point trois autres lignes droites AB, AF, AG, ces trois lignes seront en un même plan. Eucl. XI. Prop. 5. (même figure.)

Soient AB & AF dans le plan Z, & que AG n'y soit pas, mais sur un autre plan. Concevant un troisième plan Y qui passe par AC & AG, & qui étant prolongé couperait Z; cette ligne AC sera perpendiculaire sur ce plan Z*: donc elle le sera aussi sur la ligne de section de Z & de Y*, & par la supposition elle l'est sur AG; ainsi sur AC & au même point A, il y aura deux perpendiculaires, ce qui ne peut pas être*.

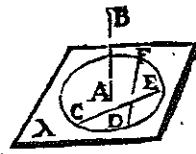
PROBLEME II.

22. Sur le point A dans le plan Z, élever une



Livre V. Section I. 295

20. Concevons un second cercle dont A soit le centre, qui passe par les trois points C, D, E aussi également éloignez de A par l'hypothèse. Ces deux cercles* ne sont qu'un même cercle. Donc* AB* est perpendiculaire sur X; ce qu'il falloit prouver.



PROBLEME I.

D'un point donné en l'air comme est B, abaisser une perpendiculaire sur le point X. Eucl. XI. Prop. 11. (même figure.)

Je tire à discrétion deux lignes droites CE & DF, & appliquant une pointe du compas sur B, avec l'autre je prens les points C, D, E également distans, par lesquels* je fais passer* un cercle, au centre duquel je mène de B une ligne qui sera perpendiculaire par le Theorème précédent.

THEOREME IV.

Si une ligne est perpendiculaire sur le point de la section de deux lignes qui sont sur le plan, elle l'est sur tout ce plan. Eucl. XI. Prop. 4.

Car ayant pris dans ces deux lignes de part & d'autre du point de section des points également éloignez, le sommet de la perpendiculaire sur ces lignes sera également éloigné de quatre points qui sont sur ce plan*; partant cette ligne sera perpendiculaire sur tout le plan*.

THEOREME V.

La ligne droite AB, & toute autre dans le plan Z menée par A pié de la perpendiculaire N iij

Livre V. Section I. 295
 perpendiculaire. Eucl. XI. Prop. 12. (même figure.)

Il faut de A centre faire un cercle; toute ligne qui descendra d'un point également éloigné de ce cercle, sera la perpendiculaire qu'on demande.

Mais pour trouver mécaniquement ce point, il faut se servir de deux Equerres appliquées par un de leurs côtés, sur deux différens lignes tracées sur ce plan, & au point de leur section, faisant convenir ensemble l'autre côté desdites Equerres; ce qui se ferait aussi par le moyen d'une fisselle & d'un plomb, si le plan étoit horizontal ou de niveau; car pour lors chaque point de la fisselle seroit le point cherché.

THEOREME VII.

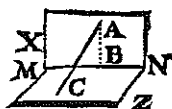
On ne peut d'un point sur un plan élever qu'une perpendiculaire. Eucl. XI. Prop. 13. fig. précéd.

Que cela ne soit, concevons que sur le même point A, on élève les deux lignes AE & AC qu'on suppose perpendiculaires, & que de A comme centre on décrive X un cercle, les points E & C sommets des deux lignes égales AE & AC étant différens ne peuvent être également éloignez de la circonférence du cercle X; partant elles ne sont pas toutes deux perpendiculaires sur le plan Z*.

THEOREME VIII.

D'un point hors d'un plan on ne peut mener qu'une perpendiculaire sur ce plan. 241

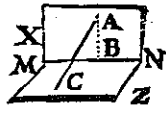
Soit A le point donné au dessus d'un plan d'où on suppose qu'on a mené deux perpendiculaires, savoir AB & AC; je joins leurs



N iij

296 *Elémens de Géométrie.*

piés B & C par la ligne BC. Ces trois points, A, B, C font le triangle ABC qui se peut concevoir dans un même plan*. Les angles $\angle A$, $\angle C$ & $\angle ACB$ que font les perpendiculaires AB & AC, sont droits. Donc ABC auroit plus de deux angles droits; ce qui ne peut être*.



COROLLAIRE.

25. Si le plan X est perpendiculaire sur le plan Z, & que de A point dans le plan X on abaisse une perpendiculaire sur Z, cette ligne tombera sur MN section de X & de Z. Eucl. XI. Prop. 38. (Même figure.)

Que cela ne soit, & qu'une perpendiculaire tombe de A sur C hors de la ligne MN; j'abaisse AB perpendiculairement sur MN; ainsi comme B est dans la section de X & de Z, il y a sur Z deux perpendiculaires AB & AC menées d'un même point A; ce qu'on vient de voir être impossible.

THEOREME IX.

26. La ligne perpendiculaire est la plus courte qu'on puisse mener d'un point hors d'un plan sur ce plan. (Figure ci-dessus.)

Le point donné est A, la ligne AB est perpendiculaire, AC ne l'est pas. Il faut prouver que AB, est plus courte que AC. Pour cela je joins C & B par une ligne droite. Le triangle

ABC se peut concevoir dans un même plan*. Or AB perpendiculaire sur BC, est plus courte que l'oblique AC*; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

27. Donc la mesure de la distance d'un point hors

Livre V. Section I. 297

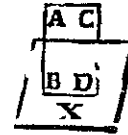
d'un plan, à ce plan, doit être une perpendiculaire.

Puisque cette perpendiculaire est la ligne la plus courte, & qu'on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire.

THEOREME X.

Deux lignes étant perpendiculaires sur un même plan, on les peut concevoir dans un même plan. 281

Concevons qu'on a mené par le pié des deux lignes AB & CD perpendiculaires sur X, une troisième ligne BD, sur laquelle concevons que AB ou CD se meuve uniformément & toujours perpendiculairement, elles seront un plan*; ce qu'il falloit démon-



THEOREME XI.

AB & CD (même figure) perpendiculaires sur le plan X sont parallèles; & si de deux parallèles l'une est perpendiculaire sur le plan X, l'autre le sera. Eucl. XI. Prop. 6. & 8. 29.

1°. Soit menée la ligne BD par le pié de AB & de CD, lesquelles lignes* sont perpendiculaires sur BD: donc ces trois lignes AB, CD, BD peuvent être dans un même plan*. Ainsi AB & CD étant perpendiculaires sur BD, elles sont parallèles*.

2°. Si AB & CD sont parallèles, & que AB soit perpendiculaire; je dis que CD le sera aussi, car ayant mené BD, la ligne AB sera perpendiculaire sur ED*: donc CD parallèle à AB, est aussi perpendiculaire sur BD*; ce qu'il falloit prouver.

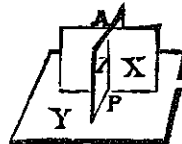
N 7

298 *Elémens de Géométrie.*

THEOREME XII.

30. La section AB de deux plans Z & X, qui sont perpendiculaires sur Y, est une perpendiculaire sur le même plan. Eucl. XI. Prop. 19.

1°. Cette section est une ligne droite*, & puis-que les plans Z & X sont perpendiculaires sur Y, la ligne AP en tant qu'elle est considérée en Z ne peut être conçue penchante de part & d'autre de Z: Et par la même raison, en tant qu'elle est considérée en X, on ne peut pas concevoir qu'elle penche de côté ou d'autre de ce plan; partant on peut concevoir pour le moins trois points dans le plan Y également éloignés de P, qui seront aussi également éloignés de A; ainsi AP est perpendiculaire sur le plan Y*.



THEOREME XIII.

31. La section de X & de Z étant perpendiculaire sur Y, ces deux plans & quelq' autre que ce soit dont AP sera la section, seront perpendiculaires sur Y. Eucl. XI. Prop. 18. (même fig.)

Car tous ces plans peuvent être conçus faits par le mouvement de AP*.

THEOREME XIV.

32. Si trois points dans un même plan, & non sur une même ligne, sont également distans d'un second plan, ces deux plans, ont parallèles.

La position d'un plan ne dépend que de trois points*; par conséquent si trois points d'un plan sont également distans d'un second plan, ce

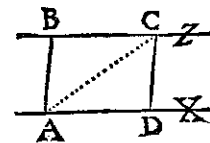
Livre V. Section I. 299

Deux plans sont également distans dans tous leurs autres; ainsi ils sont parallèles.

THEOREME XV.

Les plans X & Z étant parallèles, si la ligne AB est perpendiculaire sur X, elle le sera aussi sur Z. Et si AB est perpendiculaire sur X & sur Z, ces deux plans sont parallèles. Eucl. XI. Prop. 14. 331

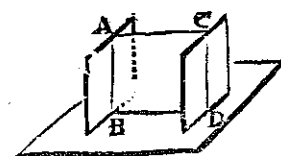
Si on prétend que AB perpendiculaire sur X ne l'est pas sur Z, concevons qu'on ait élevé au point A vers Z une ligne perpendiculaire telle que AC, elle sera plus courte que AB*. De C je conçois une perpendiculaire sur X, qui sera encore plus courte que AC, partant plus que AB; ainsi le point D s'approchera plus de Z que A; ainsi X & Z n'étant pas en égale distance, ils ne sont pas parallèles; ce qui est contre l'hypothèse. Une ligne donc qui est perpendiculaire sur l'un de ces plans, l'est aussi sur l'autre. Le reste est aisé.



THEOREME XVI.

Les sections AB & CD de deux plans parallèles coupés par un troisième plan, sont des lignes parallèles. Eucl. XI. Prop. 16. 341

Ces sections AB & CD sont des lignes droites*, lesquelles sont dans le troisième plan, où étant prolongées



N 7j

gées ; elles se rencontreroient si elles n'étoient pas parallèles ; par conséquent les deux autres plans où elles sont étant prolongez, se rencontreroient aussi, ainsi ils ne seroient pas parallèles, contre la supposition. On ne peut donc pas dire que AB & CD ne sont pas parallèles.

THEOREME XVII.

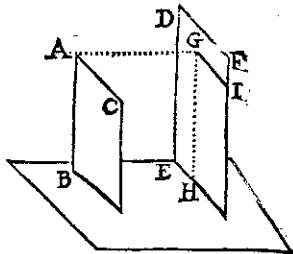
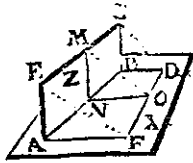
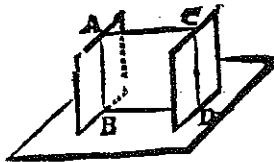
35. Les lignes droites parallèles à une même, quoique sur différens plans, sont parallèles entr'elles, Eucl. XI. Prop. 9.

Soit CE parallèle à AB , à laquelle DF dans un autre plan est aussi parallèle ; je dis que CE & DF sont parallèles entr'elles.

Du point B j'éleve sur AB perpendiculairement BC & BD , occupant CE , DF aux points C & D . On peut concevoir un plan par les trois points BCD ; AB perpendiculaire, tant sur BD , que sur BC , sera perpendiculaire, sur ce plan ; mais CE & DF étant posées parallèles à AB seront aussi perpendiculaires sur ledit plan & parallèles entr'elles ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XVIII.

36. Toutes lignes parallèles dans le plan X , rencontrant d'autres lignes aussi parallèles dans le

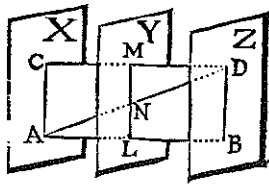


THEOREME XX.

38. Deux lignes droites coupées par des plans parallèles, sont coupées proportionnellement. Eucl. XI. Prop. 17.

Soient deux lignes droites AB , CD coupées par trois plans parallèles X , Y , Z , aux points A , L , B , D , M , C ; je dis qu'elles sont coupées proportionnellement, c'est-à-dire $AL : LB :: CM : MD$.

Car sur cha-



plan Z , font entr'elles les angles égaux. Euclide XI. Prop. 10 (Même figure.)

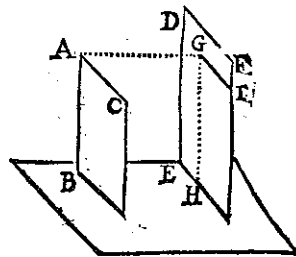
BD & NO sont parallèles entr'elles sur le plan X ; & BC , & MN sur le plan Z : il faut prouver que l'angle CBD est égal à MNO . Pour cela je mene DF & CE parallèles à AB . Puisque les parallèles entre parallèles sont égales, car elles font les mêmes angles* par conséquent égales* ; puisque, dis-je, CE est parallèle à DF par le Theorème précédent : partant $BD = NO$ & $BC = NM$ & $CD = MO$; donc les triangles CBD & MNO sont égaux & semblables, ainsi l'angle CBD est égal à MNO ; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XIX.

Deux lignes AB & AC qui se rencontrent au point A , & sont parallèles à deux autres lignes ED & DF qui se rencontrent en D , si elles ne sont point sur un même plan, les plans BC & EF , sont parallèles, Eucl. XI. Prop. 15.

De A soit menée une perpendiculaire sur le plan EF qu'elle rencontre au point G , duquel je mene GH

parallèle à DE , & GI parallèle à DF : donc par le Theorème 17*, AB & GH sont parallèles ; comme aussi AC & GI : ainsi AG étant perpendiculaire sur GI & sur GH par



que plan des extrémités X & Z , soient joints les points de section par les droites AC & BD , & tirée la diagonale AD rencontrant le plan T au point N , duquel on tirera par les points de section L & M les lignes LN & MN . Le triangle ABD pourra être conçu dans un plan*, * 3 n. 9. comme aussi celui ADC dans un autre, si ce n'est pas le même. Chacun des plans de ces triangles étant coupé par de plans parallèles les lignes de section seront parallèles*, & ces triangles seront ainsi coupés parallèlement à leurs bases, & partant $AL : LB :: AN : ND :: CM : MD$, & conséquemment $AL : LB :: CM : MD$; ce qu'il falloit prouver. La même chose seroit, s'il y avoit plus de trois plans & plus de lignes.

SECTION II.

De la composition des Solides selon leurs surfaces, & selon leur solidité.

DEFINITION I.

Lorsque trois ou plusieurs angles plans, qui sont sur différens plans, ou qui n'ont pas une même base se rencontrent dans leur sommet, l'angle qu'ils comprennent se nomme Solide.

Deux seuls angles plans ne peuvent renfermer un angle solide ; ainsi pour le faire, il faut tout au moins trois angles plans, qui se coupent ou se rencontrent en aboutissant à un point, comme un diamant bien taillé.

DEFINITION II.

Les solides compris entre des surfaces droites, ou plans parallèles, se nomment Parallelipèdes.

DEFINITION III.

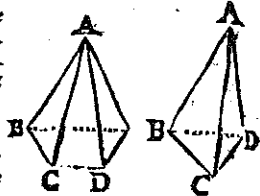
41. Les solides qui sont compris entre des plans tous égaux & semblables, sont nommez Polyèdres. On les nomme Réguliers, lorsque les figures qui les comprennent sont régulières, & que tous les angles sont égaux.

DEFINITION IV.

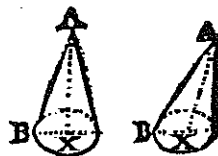
42. Le nombre des faces planes d'un solide régulier, lui donnent un nom particulier.
 1°. Il s'appelle Tetraèdre, lorsqu'il est compris sous quatre triangles équilatéraux & égaux.
 2°. Exaèdre, quand il est compris sous six quarrés égaux; c'est le cube fait comme un dé à jouer.
 3°. Octaèdre, lorsqu'il est compris sous huit triangles égaux & équilatéraux.
 4°. Dodecaèdre, lorsqu'il est compris sous douze pentagone égaux & équilatéraux.
 5°. Icosaèdre, lorsqu'il est composé de 20 triangles équilatéraux & égaux.

DEFINITION V.

43. Une ligne, dont le sommet est immobile, parcourant par le pied une figure;
 1°. Si cette figure est un polygone, cette ligne décrira un solide, qu'on nomme Pyramide, tel que ABCD.



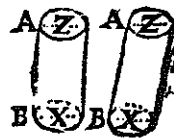
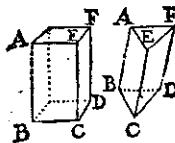
2°. Si cette figure que parcourt le pied de la ligne est un cercle, le solide est un Cône, tel que X.



Dans ces figures la ligne du sommet au centre de la base, s'appelle l'Axe du Solide, qui se nomme Droit ou oblique, si cette ligne fait un angle droit ou oblique sur la base.

3°. Si le sommet de la ligne, qui décrit le solide, n'est pas immobile, & que dans le temps que son pied parcourt la base, son sommet parcourt une figure égale, semblable, & semblablement posée telle qu'ABCDEF; ce sera un Prime.

4°. Si la base est un cercle, ce sera un cylindre, tel que ABXZ.



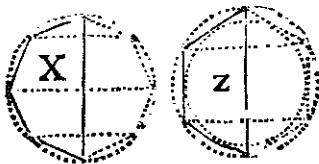
DEFINITION VI.

Si un cercle tourne autour de son diamètre, il décrit une Sphere, dont ce diamètre s'appelle l'Axe, le centre du cercle, dont la révolution a fait la Sphere, est le centre de la Sphere. Les lignes tirées de ce centre à la circonférence en sont les rayons, celles qui passent par le centre, & se terminent à la circonférence, sont les diamètres.

44.

DEFINITION VII.

45. Un polygone régulier en tournant sur une ligne droite qui passe par son centre, décrit ce qu'on appelle un Sphéroïde, c'est-à-dire, une espèce de Sphere, tel qu'est X & Z.



DEFINITION VIII.

46. Un solide A est dit Circonscrit à un autre solide B qu'il contient, s'il est le plus petit de tous les solides semblables qui puissent renfermer B; ou bien, si B est le plus grand de tous les solides semblables que A peut renfermer.

DEFINITION IX.

47. Un solide B est dit Inscrit dans un autre solide A ou il est renfermé, s'il est le plus grand de tous les solides semblables qui puissent être renfermés dans A; ou ce qui est la même chose, si A est le plus petit de tous les solides semblables qui puissent le renfermer.

DEFINITION X.

48. Corps régulier est celui qui est compris entre des figures semblables, régulières & égales, auquel aussi tous les angles solides sont égaux.
 On démontrera dans la suite, qu'il n'y a que cinq corps réguliers.

THEOREME I.

49. Si un angle solide est compris de trois angles plans, deux de ces angles plans pris ensemble comme on voudra, sont plus grands que le troisième, Eucl. XI. Prop. 20.

Les trois angles plans BAD, BAG, CAD font un angle solide, il faut prouver que deux de ces angles plans pris ensemble sont plus grands que le troisième; que par exemple $\angle BAD < \angle BAG + \angle CAD$. Entre les lignes AB & AD, aucun plan n'est plus petit que BAD; partant le plan droit BAD est plus petit que le plan creux ABCD. On démontrera de la même manière, que l'angle plan BAC est plus petit que BAD avec CAD.

COROLLAIRE.

Les côtes des trois angles plans, qui font un angle solide, ayant été pris égaux, les bases de ces trois angles plans, font un triangle. Eucl. XI. Prop. 22. (Même figure.)

50.

Soient faits égaux les trois lignes AB, AC, AD côtes des trois angles plans, qui font l'angle solide A; il faut démontrer que les trois lignes BC, CD, DB, bases des trois angles plans BAC, CAD, DAB font un triangle. Pour cela * il suffit que deux de ces lignes prises ensemble, soient plus grandes que la troisième. Or cela est ainsi, car ces deux angles dont ces lignes sont les bases, seront plus grands que l'angle qui est sur la troisième; & par conséquent cette troisième ligne est plus petite*.

* L. 2. n. 104.

THEOREME II.

Tous les angles plans qui comprennent un angle solide, valent moins que quatre angles droits. Eucl. XI. Prop. 21.

51.

1°. Commençons par l'angle solide A, com-

308 *Elemens de Geometrie.*

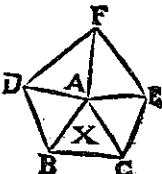
posé de trois plans, par le Theorème précédent les angles $BCA + DCA$ sont plus grands que l'angle BCD , & de même $ADC + ADB$ plus grands que CDB ; comme aussi $ABD + ABC$ plus grands que DBC . Ainsi les six angles des bases des trois triangles qui forment l'angle solide A , sont plus grands que les trois triangles du triangle BCD , c'est-à-dire, plus grands que deux droits*. Or tous les angles des trois triangles qui forment ledit angle solide A , sont ensemble égaux à six droits*. Si donc de cette somme on ôte plus que deux droits, valeur des six angles sur la base, il restera moins de quatre droits pour la valeur de l'angle solide A , ce qu'il falloit prouver.



* L. 2. n. 25. Idem.

1°. Par la même méthode on montrera que les angles solides formez par quatre plans, sont aussi moindre que quatre droits.

3°. Si X est un triangle solide compris par cinq triangles, dont le sommet doit être conçu en l'air, on prouvera aussi que l'angle DBC est plus petit que les deux angles DBA & CBA , par le Theorème précédent, & l'angle BCE est plus petit que les angles ACB & ACE pris ensemble, de même des autres. Mais aussi tous les angles du polygone $BCEDF$, base de l'angle solide, sont égaux à six angles droits*; ainsi tous les angles de la base des cinq triangles qui font l'angle solide X sont plus grands que six droits, puisqu'ils sont plus grands



* L. 2. n. 123.

Livre V. Section II.

309

que les angles du polygone, comme on vient de voir. Tous les angles de ces cinq triangles qui font l'angle solide valent dix droits; donc puisque ceux de leurs bases valent plus de six droits, ceux des sommets valent moins que quatre droits, ce qu'il falloit démontrer.

On peut démontrer ce Theorème en cette manière. Concevons, 1°. que A est un point dans un plan, & le sommet de plusieurs triangles dont les côtés de X sont les bases. Tous ces angles autour de A ne valent que quatre angles droits, 2°. Si on leve le point A , alors les angles du sommet de ces triangles deviendront plus petits, ayant mêmes bases & les côtés plus grands; * L. 2. n. ce qui étant, tous ces angles vaudront moins que 39. quatre angles droits.

PROBLEME I.

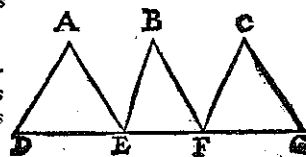
Ayant trois triangles plans, dont deux pris ensemble sont plus grands que le troisième, mais qui tous ensemble sont moindre que quatre angles droits, faire un angle solide. Euclid. XI. Prop. 23.

Soient ces trois triangles plans A, B, C , il n'y a qu'à les joindre en un même point de manière, que les côtés qui les renferment conviennent ensemble, c'est-à-dire, que AE s'unisse avec BE , BF avec CF , & CG avec AD , cela formera l'angle solide demandé, suivant la Définition*.

* L. 2. n. 39.

PROBLEME II.

Sur une ligne droite donnée, & à un point 53.



310 *Elemens de Geometrie.*

donné en cette ligne, faire un angle solide égal à un angle solide donné. Eucl. XI. Prop. 26.

Soit une ligne donnée AD & A un point dans cette ligne, il faut faire au point A un angle solide donné. Soient les trois plans de cet angle donné DAE, EBF, FCG ayant fait trois autres plans égaux, & les joignant au point A en la manière qu'il vient d'être expliqué au précédente Problème; il est évident qu'ils feront l'angle solide requis.

THEOREME III.

54. S'il y a deux angles plans égaux, aux sommets desquels on leve en l'air deux lignes droites, faisant angles égaux avec les lignes des angles premierement posez chacun au sien: & d'un point pris au haut de chacune de ces deux lignes levées, sont menées des lignes perpendiculaires aux plans où sont les angles premierement posez, & des points où tombent ces perpendiculaires, sont tirées des lignes droites vers les sommets des angles premierement posez: les angles que font ces lignes avec les levées en l'air, sont égaux entr'eux. Eucl. XI. Prop. 35.

Euclide fait cette Proposition, pour démontrer d'autres Propositions dans la suite de ses Elemens. Je n'en ai pas besoin; ainsi je la passe.

THEOREME IV.

Il ne peut y avoir plus de cinq differens corps reguliers.

35. C'est-à-dire, cinq differens solides compris sous des figures planes regulieres toutes égales & semblables, & dont tous les angles soient égaux. Dans une Sphere, tout est égal; mais il s'agit

Livre V. Section II.

311

d'un solide compris sous des plans. On a prouvé que tous les angles plans, qui comprennent un angle solide, valent moins que quatre angles droits. Voyons quelles sont les figures planes, semblables, regulieres, égales, qui puissent faire un angle solide.

1°. Trois triangles égaux & équilatéraux peuvent faire un angle solide, car les trois angles de ces triangles qui comprendront un angle solide, ne valent que trois fois soixante degrés, chacun des angles d'un équilatéral étant de soixante. Trois de ses triangles joints ensemble en pourront donc faire un, tel que sont ceux du Tétrèdre.

2°. Quatre de ces triangles peuvent encore faire un angle solide; car les quatre angles qu'ils comprendront ne valent que quatre fois soixante; ce qui est moins que quatre droits. L'Octaèdre est fait de quatre de ces triangles.

3°. Cinq de ces triangles peuvent encore faire un angle solide, car les angles des plans qu'ils comprennent, ne valent que cinq fois soixante degrés; ce qui est moins que quatre angles droits. L'angle de l'Icosaèdre est fait par cinq de ces triangles.

Six triangles équilatéraux ne peuvent faire un angle solide; car les six angles plans qu'ils comprennent, valent quatre angles droits: six fois soixante faisant trois cens soixante valeur de quatre angles droits; ainsi ces six triangles feroient un angle plan, & non un angle solide*.

* L. 2. n. 37.

4°. Trois angles d'un carré peuvent faire un angle solide; car ils valent moins que quatre angles droits. L'angle du cube est composé de trois angles du carré. On ne peut concevoir

312 *Elemens de Geometrie.*

d'autre solide fait de quarré : car quatre ne peuvent faire un angle solide ; à plus forte raison, ni cinq, ni six.

50. Trois pentagones peuvent faire un angle solide ; car leurs angles ne font que 324 degrez, ce qui est moins que quatre angles droits. Chaque angle du Dodecaedre est fait de trois pentagones. Plus de trois pentagones ne peuvent faire un angle solide ; car quatre font 432, ce qui passe la valeur de quatre angle droits.

Trois exagones ne peuvent faire un angle solide ; car chacun étant de 120 degrez, les trois font 360, qui valent quatre droits : ainsi ils ne peuvent pas faire un angle solide*. Plus est grand le nombre des côtez d'un polygone, l'angle de la figure est plus grand ; ainsi si trois exagones ne peuvent faire un angle solide, à plus forte raison trois heptagones ne le peuvent pas ; ainsi il n'y a que le triangle équilatéral, le quarré & le pentagone, qui le puissent ; mais on peut faire un angle solide de trois équilatéraux, de quatre & de cinq ; il ne peut donc y avoir que cinq differens corps reguliers.

PROPOSITIONS EVIDENTES,

PROPOSITION I.

36. Une figure est plus grande que celle autour de laquelle elle est circonscrite. & plus petite que celle dans laquelle elle est inscrite.

PROPOSITION II.

37. De deux Prismes de mêmes hauteur, celui dont la base est moindre, & qui par conséquent peut être comprise en celle de l'autre, est plus petit.

Car il est évident qu'il y est contenu. Or ce qui

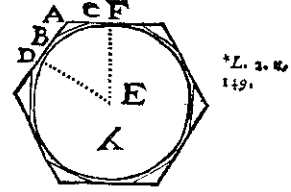
Livre V. Section II. 313

qui contient, est plus grand, que ce qui est contenu.

PROPOSITION III.

De deux Prismes circonscrits à un cylindre, celui-là approche plus du cylindre qui a plus de côtez.

La base du cylindre proposé est X ; celle du prisme qui a moins de côtez, & qui est circonscrit au cylindre soit nommé Y, & Z celle d'un autre prisme qui a plus de côtez, & qui est circonscrit au même cylindre. Le polygone Z* est plus petit que le polygone Y : les prismes dont ces polygones sont les bases, sont de même hauteur, étant circonscrits à un même cylindre, donc* celui qui sera sur Z, & * 3 n. 57. qui a ainsi plus de côtez, est plus petit que celui qui en a moins, & dont Y est la base ; ainsi il approche plus du cylindre ; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION IV.

Donc un prisme d'une infinité de côtez, approche si près du cylindre, qu'il n'y a point de difference ; ainsi on peut supposer que le cylindre est un prisme d'une infinité de côtez.

PROPOSITION V.

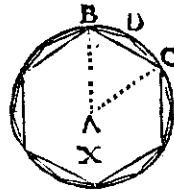
De deux prismes inscrits dans un cylindre celui-là approche plus du cylindre qui a plus de côtez.

La base du cylindre proposé est X, les deux

314 *Elemens de Geometrie.*

polygones Z & Y inscrits dans ce cercle soient les bases de deux prismes inscrits dans ce cylindre dont X est la base.

Le polygone Y qui a plus de côtez est plus grand, & approche plus du cercle que le polygone Z*. Ces deux prismes, dont Z & Y sont les bases, sont de même hauteur, étant inscrits dans un même cylindre ; donc le prisme qui est sur Y est plus grand, que celui qui est sur Z*. Ainsi il approche plus du cylindre ; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION VI.

61. De deux pyramides de même hauteur, celle qui a une grande base est la plus grande.

Car il est évident que si l'on conçoit que l'une soit mise dans l'autre, celle qui a une plus grande base contiendra celle qui en a une plus petite.

PROPOSITION VII.

62. De deux pyramides circonscrites à un cône, celle qui a plus de côtez, approche plus du cône.

PROPOSITION VIII.

63. De deux pyramides inscrites dans un cône, celle qui a plus de côtez, approche plus du cône.

PROPOSITION IX.

64. Donc on peut supposer qu'un cône est une pyramide d'une infinité de côtez.

PROPOSITION X.

65. Plus un polygone a de côtez, le spherôide qu'il

Livre V. Section III. 315

forme approche plus de la sphere autour de laquelle il est circonscrit.

Car plus le polygone, qu'on peut appeler le Generateur du spherôide, aura de côtez, plus il approchera du cercle ; ainsi le spherôide qu'il décrira par sa revolution approchera plus de la sphere à laquelle il est circonscrit ; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

Donc une sphere peut être prise pour un spherôide formé par un polygone d'une infinité de côtez.

SECTION III.

De la surface des Solides.

THEOREME I.

La surface d'un prisme droit est égale à un parallelogramme qui est de même hauteur que ce prisme, & dont la base est égale au circuit de ce prisme.

Les surfaces d'un prisme droit sont des parallelogrammes tous de même hauteur, dont les bases prises ensemble font le circuit de ce prisme : ils sont donc égaux à un parallelogramme de la hauteur du prisme, & dont la base est égale à



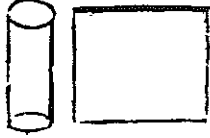
Q ij

son circuit ; ce qui est évident.

On n'y comprend point les surfaces des bases.

COROLLAIRE I.

68. Donc puisqu'un cylindre droit peut être pris pour un prisme*, d'une infinité de côtes, sa surface est égale à un parallélogramme de même hauteur, dont la base est égale à la circonférence du cercle, qui est la base du cylindre.



COROLLAIRE II.

69. Donc tout ce qui a été démontré de la raison qu'ont les parallélogrammes entr'eux, convient aux surfaces des cylindres.

1°. Les surfaces de deux cylindres sont l'une à l'autre en raison composée de leur hauteur, & du circuit de leur base.

2°. Dans deux cylindres, si la hauteur est à la hauteur comme la base à la base, c'est-à-dire, si la raison de leurs surfaces est composée de deux

* L. 4. n. raisons égales, cette raison est doublée*.

71. 3°. Si deux cylindres ont leurs hauteurs ou leurs bases égales, leurs surfaces sont entr'elles

* L. 4. n. comme les inégales*.

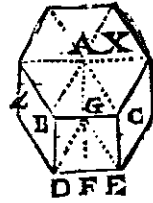
75. THEOREME II.

70. La surface d'un prisme est double de celle du polygone qui est sa base, s'il a pour hauteur l'apothème de ce polygone.

Soit Z un prisme, dont le polygone X est sa base. L'apothème de X est AG, c'est-à-dire, une perpendiculaire tirée de son centre A sur BC un de ses côtes; il faut démontrer que G

FG, hauteur de Z est égale à AG apothème de de X, la surface de Z sera double de X.

Ayant mené de tous les angles du polygone X des lignes au centre A, on fait autant de triangles que Z a de faces, lesquelles faces sont des parallélogrammes. Or ces parallélogrammes, comme est BCED, & ces triangles comme est ABC, ont même hauteur & même base : donc ces parallélogrammes sont doubles de ces triangles*, & par conséquent la surface de Z composée de ce parallélogramme est double de celle de X, égale à tous ces triangles.



COROLLAIRE I.

Donc si la hauteur d'un cylindre qu'on peut regarder comme un prisme est égale au rayon du cercle qui est sa base, sa surface sera double de celle du cercle.

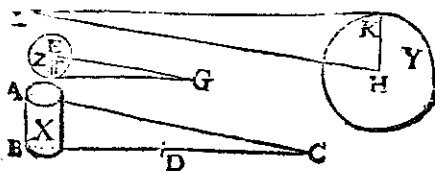
COROLLAIRE II.

Ainsi si un cylindre a pour sa hauteur deux fois le rayon, ou une fois le diamètre du cercle qui est la base, sa surface sera quatre fois plus grande que celle de ce cercle.

THEOREME III.

La surface du contour d'un cylindre est égale à celle d'un cercle, dont le rayon est moyen proportionnel entre la hauteur de ce cylindre & le diamètre du cercle qui est la base. Archimede I. Prop. 16.

O iij



X est un cylindre, dont AB est la hauteur, BD le circuit de sa base, qui est le cercle Z, dont le circuit est FG ou BD, & BC le double de ce circuit. La surface de X est égale au parallélogramme ABD ou au triangle ABC, comme celle du cercle Z au triangle EFG*. Je suppose que HK rayon du cercle Y, est moyen proportionnel entre la hauteur de X, & 2EF diamètre de Z.

Soit KL le circuit de Y, ainsi la surface est égale au triangle HKL : il n'est donc question que de prouver que le triangle HKL est égal au triangle ABC : car dans tous les cercles il y a une même raison entre le rayon & la circonférence.

P. r l'hypothèse $\frac{AB}{HK} :: \frac{2EF}{KL}$. Or $HK : KL :: 2EF : 2FG$ ou BC ; & alternando $HK : 2EF :: KL : BC$: donc puisque $AB : HK :: HK : 2EF :: KL : BC$. Ainsi $AB : HK :: KL : BC$ *, partant $AB \times BC = HK \times KL$ *. Or les triangles ABC & HKL sont les moitiés de ces rectangles ; ils sont donc égaux ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME IV.

74. La surface d'une pyramide est égale à un triangle, dont la hauteur est égale à la hauteur de chacune de ses faces, & dont la base est

égale au circuit de la base de cette pyramide, ou à un parallélogramme de même hauteur, dont la base est la moitié plus petite. Archimede I. Prop. 10. & 11.

Chacune des faces de la pyramide est un triangle, ces faces étant égales, ces triangles sont égaux entr'eux, & à un triangle rectangle de même hauteur, & dont la base est égale à toutes les bases prises ensemble de ces triangles*. Or ce triangle est égal à un parallélogramme de même hauteur, dont la base est moitié plus petite*, qui est ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE I.

Donc puisque les cônes peuvent être considérés comme des pyramides, la surface d'un cône est égale à un triangle rectangle de même hauteur que le côté du cône, & dont la base est égale au circuit de la base du cône, ou à un parallélogramme rectangle de même hauteur, dont la base est égale à la moitié de sa base.

La hauteur de la surface du cône & de la pyramide est une ligne droite la plus courte qu'on puisse concevoir, menée sur la surface depuis le sommet jusqu'à la base.

COROLLAIRE II.

Tout ce qui a donc été démontré des raisons & des proportions entre plusieurs rectangles semblables, convient aux surfaces des cônes.

1°. Les surfaces des cônes sont entr'elles en raison composée de leur hauteur & de leur base.

2°. Si la hauteur est à la hauteur comme la base à la base, ces surfaces seront en raison doublée.

O iij

320 *Elements de Geometrie.*

3°. Si les deux cônes ont leur hauteur ou leur base égale, leurs surfaces seront entr'elles comme les inégales.

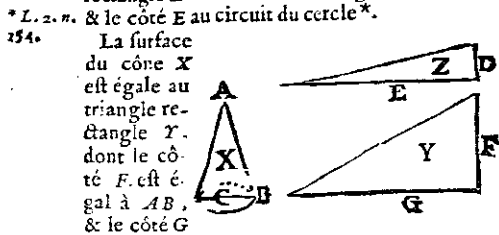
4°. Donc puisqu'il y a les circonférences des cercles font entr'elles comme leurs diamètres, deux cônes ayant même hauteur, leurs surfaces sont entr'elles comme les diamètres de leurs bases.

5°. Un rectangle étant donné, on en peut trouver un ou plusieurs semblables qui aient une telle raison avec lui; aussi un cône étant donné, on peut trouver un ou plusieurs autres cônes aussi semblables, qui soient avec le donné en raison requise.

THEOREME V.

77. La surface du cône X est à celle du cercle BCD, qui est sa base, comme AB hauteur de sa surface est au rayon de cercle. Archimede I, Prop. 18.

La surface de ce cercle est égale au triangle rectangle Z dont le côté D est égal au rayon BC, & le côté E au circuit du cercle*.



* L. 2. n. 154. La surface du cône X est égale au triangle rectangle Y, dont le côté F est égal à AB, & le côté G au circuit de la base*.

G & E étant égaux chacun au circuit du cercle, qui est la base du cône, ils sont égaux entr'eux; partant les surfaces de ces deux triangles rectangles Y & Z, qui ont des bases égales, éga-

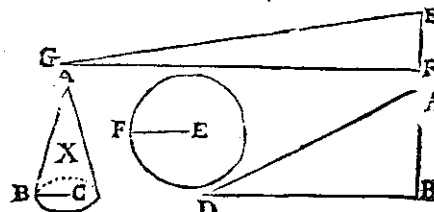
Livre V. Section III. 321

voir G & E, sont entr'elles comme F à D*; * L. 4. n. mais $AB = F$, & $BC = D$: donc X surface 71 du cône, est à celle du cercle de sa base comme AB hauteur de sa surface est à BC rayon du cercle de sa base; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VI.

La surface d'un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre la hauteur du cône, & le rayon de la base de ce cône, est égal à la surface de ce cône. Archimede I. Prop. 17.

Soit X un cône dont AB est la hauteur de sa surface & BD le circuit qui est la base, ainsi sa surface est égale au triangle rectangle ABD. La ligne BC est le rayon de sa base. Je suppose que EF est moyen proportionnel entre AB & BC, & que EF est le rayon d'un cercle dont FG est le circuit, ainsi la surface de ce cercle est égale au triangle EFG, par conséquent il n'est question que de prouver que $ABD = EFG$.



Par l'hypothèse $AB : EF :: EF : BC$ & puisque les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs diamètres $EF : BC :: FG : BD$. Ainsi $AB : EF :: EF : BC :: FG : BD$. * L. 3. n. Donc $AB \cdot EF :: FG \cdot BD$; partant $AB \times BD = EF \times FG$. Or ABD est moitié de $AB \times BD$, & EFG est moitié de $EF \times FG$. * L. 2. n. 133. Q v

322 *Element de Geometrie.*

comme aussi EFG est moitié de $EF \times FG$. Ces triangles sont donc égaux; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VII.

79. Si la hauteur & la base d'un prisme sont égales à la hauteur & à la base d'une pyramide droite, la surface du prisme sera double de celle de la pyramide.

Chaque face du prisme est un parallélogramme, & chaque face de la pyramide est un triangle. Dans le cas proposé ces parallélogrammes & ces triangles sont de même hauteur, & sur même base: donc* ces parallélogrammes sont doubles de ces triangles; ainsi la surface du prisme est double de celle de la pyramide; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

80. Donc les cônes pouvant être considérés comme des pyramides, & les cylindres comme des prismes, on peut dire que la surface du cylindre est double de celle du cône de même hauteur & sur même base.

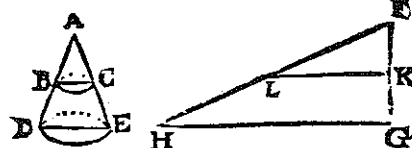
Remarquez qu'il ne faut pas confondre la hauteur absolue de la pyramide avec celle des surfaces planes qui la forment. la première est une ligne menée perpendiculairement de la pointe de la pyramide sur le plan qui lui sert de base, & la deuxième une autre ligne menée aussi perpendiculairement de la pointe, mais sur un côté du polygone qui lui sert de base, laquelle ligne est plus longue que la première. Il en est de même des cônes, dont les hauteurs ou axes sont différentes de celles des côtes.

LEMME I.

81. La surface de BCDE, fragment du cône ADE, est égale à celle du trapèze GHLK.

Livre V. Section III. 323

La surface du cône AED est égale au triangle rectangle FGH dont $FG = AD$, & GH égale à la circonférence du cercle DE*, & cel- * L. 2. n. 74. le du cône ABC au triangle rectangle FKL



dont $FK = AB$ & KL à la circonférence du cercle CB: étant donc FKL de FGH , le reste $GHLK$ sera égal au fragment BCDE, ce qui est évident.

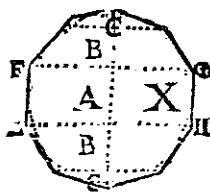
LEMME II.

HC & KL sont les rayons des cercles des deux bases d'un fragment de cône. KC est coupé en M par la moitié, & MN est parallèle à KL & HC: je dis que la surface de ce fragment est égal au rectangle fait de KC hauteur de cette surface, & de la circonférence d'un cercle, dont MN est le rayon.

Cet la figure CKLH = OCKP, à cause de l'égalité des deux triangles HON & NPL, ajoutez ou retranchez; mais la figure CKLH est à celle qui vient d'être prouvée égale au fragment du cône en raison du rayon du cercle à sa circonférence*. Et * L. 4. n. OCKP est aussi en même raison au rectangle fait de KC par la circonférence du cercle dont MN est rayon; partant ce rectangle est égal au fragment*, ce qu'il falloit démontrer. * L. 3. n. 52. Q vj



83. Si l'on joint les angles d'un sphéroïde comme X, par des plans perpendiculaires à son axe qui le divisent en plusieurs parties, ces parties seront ou des cônes comme C, ou des fragmens de cône comme B, ou cylindres comme A.



Cela est évident.

T H E O R E M E VIII.

84. Chaque surface des portions d'un sphéroïde est égale au rectangle fait de la partie de l'axe à laquelle elle répond, & de la circonférence du cercle ou sphère inscrite dans ce sphéroïde.

Pour la partie A.

Quant à la partie A, il n'y a pas de difficulté, puisque c'est un cylindre dont la surface est égale au rectangle de EF par la circonférence d'un cercle dont le diamètre est EH, lequel est égal au diamètre du cercle ou sphère inscrite dans le sphéroïde X; ce qu'il falloit prouver.

Pour la partie B.

Il faut démontrer que la surface de la partie B, qui est un fragment de cône, est égale à un rectangle fait de KL partie de l'axe du sphéroïde à laquelle elle répond, & de la circonférence d'un cercle inscrit audit sphéroïde, dont CN est le diamètre. (Figure suivante.)

Je partage cette hauteur KL par la moitié, menant CM parallèle à FK & à EL: je mène aussi GE parallèle à KL à laquelle elle est égale.

1e. Le triangle EFG & ACD sont rectangles; ainsi GFE & GEF valent un droit, l'angle GFE étant donc égal FCD*,

retranchant de l'angle droit FCA, l'angle FCD, le reste DCA sera égal à GEF, ainsi les deux triangles ACD & EFG sont équiangles: donc GE ou KL EF :: CD. CA*, partant

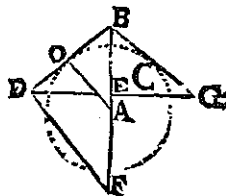
KL est à EF comme le double de CD, qui est GM, est au double de AC qui est CN. Soit CM diamètre d'un cercle dont T, est la circonférence; & CN celui d'un cercle dont Z est la circonférence. Donc CM. CN :: T. Z. Donc KL. EF :: T. Z. Donc KL x Z = EF x T*. Or la surface de B, fragment de cône, est égale à EF x T*. Donc cette surface est égale à EF x Z, est égale à un rectangle fait de KL par Z circonférence d'un cercle dont CN est le diamètre; ce qu'il falloit prouver.

Pour la partie C.

De O moitié de BD côté du cône C, je mène à A, centre du cercle qui est inscrit dans le sphéroïde, la ligne

AO, & par D une parallèle à AO; ainsi comme BG est moitié de BD, AO sera moitié de DF; partant DF sera le diamètre du cercle dont AO est le rayon. La surface du cône C est

égale à un triangle rectangle dont BD est la hauteur, & la base est un cercle dont DG est



* 75. diamètre*, ou à un parallélogramme rectangle de même hauteur BD, & dont la base est la moitié de celle d'un cercle dont DG est le

diamètre*, ou ce qui est la même chose dont la base est égale à un cercle dont DE est le diamètre. Soit nommé Y la circonférence de cercle, & Z celle du cercle dont DF est le diamètre: il faut prouver que BD x Y = BE x Z.

Les deux triangles DEF & DEB sont semblables*: Donc BD. BE :: DF. DE. Or DF. DE :: Z. Y*: donc BD. BE :: Z. Y*: donc BD x Y = BE x Z; ce qu'il falloit prouver.

T H E O R E M E IX.

85. La surface d'un sphéroïde est égale au rectangle fait de son axe, par la circonférence du cercle de la sphère qui lui est inscrite.

Par le Théorème précédent, puisque la surface de chaque partie du sphéroïde est égale au rectangle, faite de chaque partie de son axe à laquelle elle répond, & de la circonférence du cercle de la sphère qui lui est inscrite, toute la surface entière sera égale au rectangle de tout l'axe par la circonférence du cercle de la sphère qui lui est inscrite, puisque le tout & ses parties sont un produit égal quand ils sont multipliés par

une même grandeur*.

T H E O R E M E X.

86. La surface d'une sphère est égale au rectangle

de son axe, & de la circonférence d'un cercle qui a même diamètre que cette sphère.

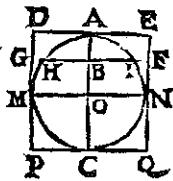
La sphère peut être considérée comme un sphéroïde formé par un polygone régulier d'une infinité de côtes*, dont le diamètre par conséquent peut être pris pour l'axe de la sphère. Ainsi la surface, par le Théorème précédent, est égale au rectangle fait de son axe par la circonférence du cercle ou polygone, par la révolution duquel elle a été formée, dont le diamètre par conséquent est le même que celui de cette sphère; ce qu'il falloit démontrer.

T H E O R E M E XI.

La surface d'une sphère est égale à celle du contour d'un cylindre ou elle est inscrite, qui par conséquent a la même hauteur ou même axe.

La surface de la sphère AMNC est égale à un rectangle fait de son axe, & de la circonférence du cercle qui a un même diamètre MN*. Or la surface du cylindre

où cette sphère est inscrite, dont les côtés DP & EQ sont égaux à AC l'axe de cette sphère, est égale à ce même rectangle; car elle est égale au rectangle fait de PD par la circonférence du cercle de la base qui a pour diamètre PQ égal à MN; puisque le diamètre d'une sphère inscrite dans un cylindre doit être égal à celui de la base du cylindre, selon l'idée que l'on a donnée des figures inscrites*.

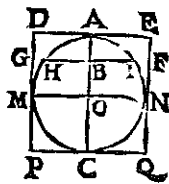


THEOREME XII.

28.

Si on coupe une sphere inscrite dans un cylindre par des plans perpendiculaires à son axe, la surface de chaque partie de la sphere est égale à celle de la partie du cylindre qui lui répond.

AC axe de la sphere est la hauteur du cylindre où la sphere est inscrite, ainsi ce cylindre touche par ses deux bases cette sphere. Je coupe l'axe AC par des plans perpendiculaires sur lui, qui coupent aussi le cylindre. Je dis que la surface de la partie MHIN est égale à celle de la partie MGFN du cylindre, comme aussi la surface de HAI à celle de EFGD.



- Car on peut prendre cette sphere pour un spherode*, ainsi la partie MHIN & HAI pour des portions des spheroides. Ainsi la surface de MHIN est égale au rectangle BO par la circonférence d'un cercle dont MN est le diamètre*, lequel rectangle est égal à la surface FGMN* de même la surface de HAI est égale au rectangle de AB par la circonférence d'un cercle dont GF est le diamètre*, auquel la surface de la partie DEFG est égale*.

PROBLEME I.

29. Couper une sphere par un plan, de sorte que les surfaces des portions de cette section soient en raison donnée. Archimede II. Prop. 4. & 5.

Il faut inscrire la sphere dans un cylindre, ensuite couper les côtes du cylindre selon la raison

Livre V. Section III.

329

donnée, & mener par les points de cette section des lignes ou des plans parallèles qui couperont la sphere selon la raison donnée; car les surfaces des portions de la sphere comprises entre ces parallèles, seront égales à celles des portions du cylindre auxquelles elles répondront, comme on vient de le prouver.

THEOREME XIII.

La surface d'une sphere est égale à quatre fois celle de son plus grand cercle. Archimede I. Prop. 37.

Concevons une sphere dans un cylindre, dont la base par conséquent fera égale au plus grand cercle de la sphere, & sa hauteur sera le diamètre de ce plus grand cercle; par conséquent le contour de ce cylindre sera égal à quatre fois la surface de ce cercle*. Or la surface de la sphere* 5n. 72. est égale à ce contour*: donc elle est égale à 4* 5n. 87. quatre fois son plus grand cercle.

THEOREME XIV.

La surface d'une sphere est égale à celle d'un cercle, dont le rayon est égal au diamètre de son plus grand cercle.

Soit X une sphere & Z un cercle, dont le rayon est égal au diamètre du plus grand cercle de la sphere X. Il faut prouver que la surface de X est égale à celle de ce cercle Z.

Ayant supposé que le diamètre du plus grand cercle est 1; donc selon l'hypothèse, le diamètre de Z est 2. Or les surfaces des cercles étant entr'elles comme les quarrés de leurs diamètres*, puisque le carré de 1 est 1, & que ce* L. 4. n. lui de 2 est 4, selon l'hypothèse, la surface de Z sera quadruple de celle du cercle de la sphere

330 *Eléments de Géométrie.*

X. Or la surface de cette sphere est quadruple de celle de son plus grand cercle par le Theoreme précédent, donc elle sera égale à celle de Z; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XV.

22. La surface entiere d'un cylindre, c'est-à-dire, tant de son contour que de ses deux bases, est à celle d'une sphere à laquelle il est circonscrit, en raison sesquialtere. Archimede I. Prop. 39.

1°. Le seul contour du cylindre est égal à la surface de la sphere*.

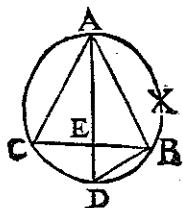
2°. Chaque base de ce cylindre est le plus grand cercle de la sphere, qui est la quatrième partie de sa surface*; ainsi les deux bases du cylindre sont la moitié de la surface de la sphere.

Partant toute la surface du cylindre est égale, 1°. à une fois toute la surface de la sphere: 2°. à la moitié de cette surface; ainsi cette raison est sesquialtere, c'est-à-dire, comme 3 à 2,

THEOREME XVI.

23. Une sphere étant coupée par un plan en deux portions, les surfaces de ces portions sont entr'elles comme celles des cercles qui ont pour rayons les cordes de la moitié de ces portions, & sont égales à ces cercles.

Soit X une sphere coupée par le plan BC; il faut prouver que les surfaces de ces deux portions sont entr'elles comme celles des surfaces des cercles, dont AB & BD cordes de la moitié de ces deux portions sont les rayons, & qu'elles leur sont égales.



Livre V. Section III.

331

1°. Ayant inscrit la sphere X dans un cylindre de même hauteur que cette sphere, la surface de la portion ABC sera égale au contour de la partie du cylindre qui lui répond, comme celle de BCD à l'autre partie du cylindre*. Les contours de ces deux parties sont entr'eux comme AE & ED*. Or les quarrés sur AB & BD* 5n. 69. sont aussi comme AE à ED*: Donc les surfaces des portions de cette sphere seront entr'elles 80. comme ces deux quarrés, ou les cercles dont ils sont rayons*.

2°. Le carré de AD est égal aux quarrés de AB & de BD*; donc la surface du cercle dont AD est le rayon, est égale aux surfaces des deux cercles, dont AB & BD sont les rayons*.

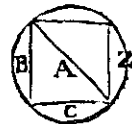
Or le cercle dont AD est le rayon, a sa surface égale à celle de la sphere X*; ainsi cette surface est égale à celle des deux cercles dont AB & BD sont les rayons. Mais il vient d'être dit qu'ils sont aussi entr'eux comme ces portions; donc ils leur seront égaux chacun à celui qui lui répond, puisque le même tout est divisé en même proportion.

THEOREME XVII.

La surface d'une sphere est double de celle du contour du cylindre qui lui est inscrit, & dont la hauteur est égale au diamètre de sa base.

La surface de la sphere Z est quadruple de celle du cercle, dont A est le diamètre*.

La surface du cercle dont A est le diamètre, est égale à la surface des cercles dont C & B sont les diamètres, puisque ces surfaces sont comme les quar-

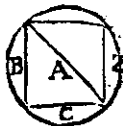


rez de leurs diametres, & que

* L. 4. n. $AA = CC + BB$. Or

78.

$C = B$: ainsi la surface du cercle dont A est le diametre, est égale à deux fois celle du cercle dont C est le diametre ; & par conséquent puisque la surface de A est la quatrième partie de la surface de la sphere Z , celle du cercle dont C est le diametre est la huitième partie de celle de la sphere Z . Or la surface de ce même cercle, dont C est le diametre, est la quatrième partie du contour de ce cylindre inscrit* : donc ce contour est la moitié de la surface de la sphere Z .



SECTION IV.

De la solidité des Solides.

Propositions évidentes touchant cette solidité.

PROPOSITION I.

95. On peut concevoir que tout Parallélipède est fait par le mouvement de son plan, ou de sa base toujours parallèlement à elle-même.

PROPOSITION II.

96. Si le plan dont le mouvement forme le Parallélipède, se fait selon la perpendiculaire de sa hauteur il est droit & ses angles sont droits. Si c'est selon une ligne oblique, il est oblique, & ses angles ne sont pas droits.

PROPOSITION III.

97. On peut aussi concevoir qu'un Parallélipède

est composé d'une infinité de plans tous parallèles, & tous égaux à celui qui en est la base.

COROLLAIRE.

Il en est de même des cylindres, & des prismes. 98.

PROPOSITION IV.

Une pyramide peut être faite par le mouvement de sa base, toujours parallèlement à elle-même, & décroissant à proportion qu'elle monte. Si ce mouvement se fait selon la perpendiculaire de sa hauteur, la pyramide est droite ; si selon une oblique, elle est oblique. 99.

PROPOSITION V.

On peut aussi concevoir qu'une pyramide est composée d'une infinité de plans parallèles, qui diminuent à proportion qu'ils sont élevés. 100.

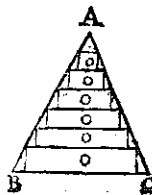
PROPOSITION VI.

Deux solides de même hauteur contiennent un égal nombre de plans, c'est-à-dire, qu'on en peut concevoir autant dans l'un que dans l'autre. 101.

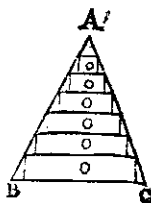
PROPOSITION VII.

Si on suppose qu'un parallélipède oblique, ou prisme oblique, toute pyramide, tout cône, sont composés d'une infinité de plans, leurs surfaces seront unies. 102.

Considérez la pyramide BAC . Si les plans O, O, O, O, O, O , qui la composent sont épais, il est évident que sa surface ne sera pas unie ; mais par degré d'autant plus grands, que les plans O seront plus épais ;



& ils le feront d'autant moins, qu'il y en aura plus. Si on suppose donc qu'ils fussent innombrables en nombre, ils n'auroient plus d'épaisseur ; & alors la surface de BAC seroit sans degré. Ce qui se conçoit de tout parallélipède, de tout prisme, de toute pyramide & de tout cône.



PROPOSITION VIII.

103. On peut concevoir un parallélipède sur une ligne donnée qui soit semblable, & posé de la même manière qu'un autre parallélipède donné. Eucl. XI. Prop. 27.

Euclide propose de faire la chose ; ce qui n'est pas difficile ; mais il suffit qu'on la conçoive faite.

PROPOSITION IX.

104. Deux solides sont égaux, qui sont composés d'un égal nombre de plans également épais, semblables & égaux.

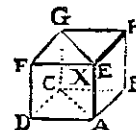
Si par exemple deux solides X & Z étoient composés chacun d'un million de plans également épais & égaux, ils seroient évidemment égaux. J'ajoute semblables, pour marquer qu'en cas que les plans dont X est composé allaient en diminuant, si ceux de Z alloient de même en diminuant chacun étant semblable à celui auquel il répond, c'est-à-dire, le centième de X étant égal & semblable au centième de Z , il faut que X & Z soient nécessairement égaux.

PROPOSITION X.

105. Si on coupe le parallélipède X par un plan ;

selon la diagonale AC ou EG , il sera coupé en deux prismes triangulaires égaux. Eucl. XI. Prop. 28.

Les deux parties de X ont leurs bases égales, elles ont même hauteur : donc par la Proposition précédente, elles sont égales. Selon la Définition des prismes*, elles sont prismes triangulaires.



PROPOSITION XI.

Si les côtés des plans opposés d'un parallélipède sont coupés en deux également, & qu'on mène des plans par les sections ; la ligne de commune section & de ces plans, & le diametre du parallélipède, se couperont en deux également. Eucl. XI. Prop. 39.

Cela est évident, car ce diametre est la base d'un triangle coupé parallèlement à un de ces côtés par le milieu de l'autre ; ce qui divise également & le côté & la base.

PROPOSITION XII.

Si un solide est compris entre des plans parallèles, ceux de ces plans qui sont opposés, sont des parallélogrammes semblables & égaux. Eucl. XI. Prop. 24. (Même figure.) 107.

1°. Les lignes AD & BC seront parallèles*, * 5 n. 34. comme aussi AB & DC . Il en est de même des lignes EF & HG , & de FG & EH . Ainsi les plans $ABCD$ & $EFGH$ sont des parallélogrammes. 2°. Ces parallélogrammes sont semblables ; car l'angle EFG est égal à ADC * : ainsi des autres. 3°. AB & HE parallèle entre les parallèles AE & BH sont égales, obliques ou

336 *Elémens de Géométrie.*
 Z. 2. n. perpendiculaires quelles qu'elles soient : ainsi
 10. on peut démontrer que ces plans opposés sont
 égaux.

THEOREME I.
 108. Toute section d'un parallépipède, d'un prisme, d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cône, qui se fait parallèlement à sa base, est semblable à sa base. Eucl. XI. Prop. 25.

1°. Cela est évident dans le parallépipède, le prisme, & le cylindre, qui se font par le mouvement toujours parallèle de leurs bases.
 2°. Aussi dans la pyramide, dans le cône, qui sont des solides faits par le mouvement de leur base, qui diminue proportionnellement ; ainsi tous les plans parallèles dont on peut concevoir que l'un & l'autre est fait, sont tous semblables. Or ces sections sont quelqu'un de ces plans ; par conséquent elles sont semblables à la base ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME II.
 109. Tous les solides de même nom, qui ont des bases égales & sont de même hauteur sont égaux, soit droits, soit obliques. Eucl. XI. Prop. 29. 30. & 31.

C'est-à-dire, que les solides parallépipèdes étant sur bases égales, & de même hauteur, sont égaux entr'eux, ils ont un égal nombre de plans tous semblables & égaux à leurs bases* ; ainsi ils doivent être égaux.

Il en est de même des prismes, des cylindres, des pyramides, des cônes ; car chaque plan de l'une est semblable & égal à chacun de l'autre pris à la même hauteur.

COROLLAIRE.
 110. Donc pour mesurer les solides, il faut seulement

Libre V. Section IV. - 337
 ont avoir égard à leur hauteur, & à leur base.

Car un parallépipède oblique a bien plus de surface qu'un droit. Cependant s'il est sur une base égale, & de même hauteur, il n'est pas plus grand.

THEOREME III.

Les solides parallépipèdes & les prismes de même hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases ; & s'ils ont même base, ils sont comme leurs hauteurs. Eucl. XI. Prop. 32.

Soient les deux solides Z & X. 1°. Ils ont un égal nombre de plans parallèles*, & semblables à leurs bases. Si leurs bases sont égales, ils sont donc égaux ; si celle de Z est double de celle de X, alors tous les plans de Z étant doubles de ceux de X, il faut que Z soit double de X. 2°. Si ces deux solides ont leurs bases égales, ils seront comme leurs hauteurs ; car tous leurs plans étant égaux, si le solide Z est deux fois plus haut que X, il doit avoir deux fois plus de ces plans. S'il est trois fois plus haut, il en aura trois fois plus.

THEOREME IV.

Deux cylindres de même hauteur sont comme leurs bases ; ou si ils ont une même base, ils sont comme leurs hauteurs. Eucl. XII. Prop. 11. & 14.

Cela vient d'être démontré du prisme, & par conséquent du cylindre.

THEOREME V.

Si un cylindre est coupé par un plan parallèle aux plans opposés de ses bases, les segments du

338 *Elémens de Géométrie.*
 cylindre seront l'un à l'autre comme les segments de l'axe. Eucl. XII. Prop. 13.

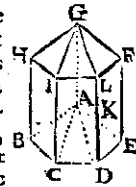
Z. 98. Les plans de ces sections seront égaux. Tous les segments seront donc comme autant de cylindres qui ont leurs bases égales, & partant ils sont entr'eux comme des segments de l'axe, qui sont leur hauteur par le précédent Theorème.

THEOREME VI.
 114. Un parallépipède est double d'un prisme triangulaire de même hauteur, si la base du parallépipède est double du triangulaire. Eucl. XI. Prop. 40.

Cela est évident, puisque ces deux prismes sont comme leurs bases*.

THEOREME VII.
 115. Tout prisme polygone peut être divisé en prismes triangulaires.

Soit K un prisme polygone dont les bases sont ABCDE & GHILF : ces bases polygones se réduisent en triangles. Par la Définition des prismes triangulaires, les solides ABCGH, ACDGIL, ADEGLE sont des prismes triangulaires : donc le prisme K peut être divisé en prismes triangulaires.



THEOREME VIII.
 116. Un prisme est égal à plusieurs prismes de même hauteur, si sa base est égale à celles de tous ces prismes. Il en est de même des pyramides.

Car concevant dans ces solides des plans parallèles à la base*, il y aura un égal nombre de plans dans chacun* ; chaque plan dans le grand

Libre V. Section IV. - 339

prisme sera égal à tous les plans qui seront dans les autres prismes ; car il leur sera comme la base est à toutes les bases de ces prismes. Or elle leur est égale : donc, &c. Il en est de même des pyramides.

COROLLAIRE I.

Un cylindre est égal à un prisme triangulaire de même hauteur, dont la base est égale à la sienne.

Un cylindre est un prisme polygone. Tout prisme polygone peut être divisé en prismes triangulaires*. Ces prismes seront égaux à un seul prisme triangulaire de même hauteur, dont la base est égale à toutes celles de ces prismes*. Partant le cylindre égal à ce prisme polygone, l'est à ce prisme triangulaire qui a même hauteur, & dont la base est égale à la sienne.

COROLLAIRE II.

Donc un cylindre X est égal à plusieurs cylindres A, B, C, &c. de même hauteur, dont toutes les bases prises ensemble sont égales à la sienne.

Car tous ces cylindres seront égaux à autant de prismes triangulaires, qui ont même hauteur & bases égales. Celui auquel X est égal, & partant de même hauteur & sur base égale, est égal à tous ces autres prismes triangulaires, & partant aux cylindres A, B, C, &c. dont toutes les bases sont égales à celle de X ; partant X est égal à A, B, C, &c.

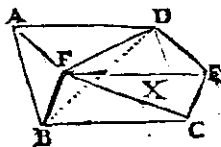
THEOREME IX.

Un prisme triangulaire se divise en trois pyramides triangulaires égales. Euclide XII. Prop. 7.

Pij

§40 Elémens de Geometrie.

Soit X un prisme triangulaire ; je mène sur chacune de ses trois faces des diagonales, qui seront six triangles. Les triangles BAD, BCD sont



- * L. 3. n. égaux *, les pyramides BADF & BDCF qui ont même sommet, & partant même hauteur, sont égales *. Ayant ôté, par la pensée de ce prisme X, ces deux pyramides, il en reste une troisième savoir FCED, laquelle a premierement même sommet D, & partant même hauteur que la pyramide FBCE, elles ont des bases égales, savoir les triangles égaux FBC & FCE *: donc elles sont égales *. Or la pyramide FBCE est la même que BDCF, étant formée par les mêmes triangles : donc les pyramides FCED & BADF seront égales, l'étant à une troisième ; ainsi le prisme X peut être divisé en trois pyramides égales, qui sont BADF, BDCF & FCED.

COROLLAIRE I.

126. Donc toute pyramide est le tiers de tout prisme de même hauteur, qui est sur même base, ou sur base égale.

COROLLAIRE II.

127. Donc pour mesurer une pyramide il faut multiplier la base par le tiers de sa hauteur,

LEMME.

128. Une pyramide polygone se peut diviser en pyramides triangulaires.

La base d'une pyramide polygone est un polygone, qui par conséquent se réduit en triangle.

Livre V. Section IV.

§41

gles, sur lesquels concevant des plans élevez le long des côtes de cette pyramide jusqu'à son sommet, on aura plusieurs pyramides triangulaires, qui seront les parties de la pyramide polygone.

THEOREME X.

Les pyramides qui ont pour base des triangles, & qui sont de même hauteur, sont entre elles comme leurs bases. Il en est de même de celles qui ont des polygones pour leurs bases. Eucl. XII. Prop. 5. & 6.

Les prismes sont triples des pyramides de même base & de même hauteur *. Mais les prismes de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases, ou ceux de même base sont comme leurs hauteurs *: donc aussi les pyramides, qui ne sont que le tiers. Par le Lemme précédent, on peut confondre les pyramides polygones avec les triangulaires, puisqu'elles s'y résolvent,

THEOREME XI.

Toute pyramide ayant base triangulaire peut être divisée en deux pyramides égales, semblables entr'elles, & à la totale, & en deux prismes égaux & plus grands que la moitié de la pyramide de totale. Eucl. XII. Prop. 3.

THEOREME XII.

Deux pyramides de même hauteur ayant des bases triangulaires, soient divisées en deux autres pyramides égales entr'elles & semblables à la totale & en deux prismes égaux ; & que les pyramides provenues de cette division soient toujours divisées de la même façon : comme la base de l'une des pyramides sera à la base de l'autre : ainsi tous les prismes qui sont en l'une des pyramides.

P iii

§42 Elémens de Geometrie

ides, seront à tous les prismes de l'autre égaux en nombre. Eucl. XII. Prop. 4.

Ces deux propositions n'ont rien de fort utile ; mais je n'en rapporte point les démonstrations.

THEOREME XIII.

126. Toute pyramide polygone est le tiers de tout prisme de même hauteur, & qui est sur même base ou sur base égale.

Car ayant réduit en triangles l'une & l'autre base de ces deux solides, la pyramide polygone sera divisée en pyramides triangulaires. Or chacune de ces pyramides triangulaires, sera le tiers de chacun de ces prismes triangulaires *: ainsi toute la pyramide polygone sera le tiers de tout le prisme polygone.

AVERTISSEMENT.

127. On donne cette règle pour trouver la solidité de Z un fragment de pyramide dont les bases sont parallèles ; soit par exemple l'inférieure 36, la supérieure 9, ce nombre 18 est moyen entre ces deux nombres.

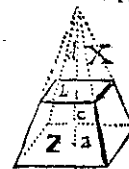
Il les faut ajouter dans une somme, & multiplier cette somme par 2 que je suppose le tiers de la hauteur du fragment, le produit 126 sera la solidité de ce fragment. Examinons cette règle.

Soit a la base inférieure, b la supérieure, c la hauteur de Z fragment, & le reste de l'axe pour achever la pyramide, aac + aad est la solidité d'un prisme qui est le triple de toute la pyramide, dont j'ôte bbd la solidité d'un prisme, dont la pyramide X est le tiers : Ainsi aac + aad - bbd = 3Z. Puisque $\frac{2}{3}$ aa. ab.

Livre V. Section IV.

§43

bb & Donc, selon la règle, en multipliant ces trois termes qui sont les mêmes que 36, 18, 9 par le tiers de c, j'aurai la solidité de Z ; ainsi multipliant par tous c, j'aurai aac + abc + bbc = 3Z, reste à démontrer que aac + aad - bbd = aac + abc + bbc : j'ôte aac de part & d'autre, reste aad - bbd = abc + bbc. Il faut voir si cela est.



a - b :: c, d, multipliant a - b & b par a + b *, aa - bb. ab + bb :: a - b, b. Ainsi * L. 3. n. aa - bb. ab + bb :: c, d *: Donc multipliant les extrêmes & les moyens, on a aad - bbd = abc + bbc *: ce qu'il restoit à prouver. La règle est donc sûre. L. 3. n. 56.

THEOREME XIV.

Un cône est le tiers d'un cylindre de même hauteur sur bases égales. Eucl. XII. Prop. 10.

Un cône est une pyramide d'une infinité de côtes : or une pyramide est le tiers d'un prisme de même hauteur, qui a une base égale *: donc le cône est aussi le tiers d'un cylindre de même hauteur, & sur même base ou base égale, puisqu'un cylindre est un prisme d'un nombre infini de côtes.

COROLLAIRE I.

Un cône est égal à tous les cônes de même hauteur, dont les bases pris ensemble sont égales à la sienne.

Ces cônes sont des pyramides d'un nombre infini de côtes, lesquels font le tiers du cylindre.

P iiij

344 Elements de Geometrie.

dre ou du prisme ; ainsi cette proposition n'est pas différente de celle qu'on a proposée*.

COROLLAIRE II.

130. Deux cônes de même hauteur sont comme leurs bases ; & s'ils ont même base, ils sont comme leurs hauteurs. Eucl. XII. Prop. 11. & 14.

Cela est évident.

THEOREME XV.

131. Les prismes & les parallépipèdes semblables sont en raison composée des raisons de leurs trois dimensions, & cette raison est triplée. Eucl. XI. Prop. 33.

Leur solidité dépend de la multiplication de leurs dimensions*. La raison qu'ils ont entr'eux est composée de celle de leurs trois dimensions*. Etant semblables, cette raison est triplée*.

THEOREME XVI.

132. Les cylindres semblables sont entr'eux en raison composée de leurs dimensions, & cette raison est triplée. Eucl. XII. Prop. 12.

Car ces cylindres étant comme des prismes dont les bases sont d'un nombre infini de côtes, ils seront entr'eux comme ces prismes par le précédent Theorème.

THEOREME XVII.

133. Les pyramides semblables sont en raison composée des raisons de leurs trois dimensions, & cette raison est triplée. Eucl. XII. Prop. 8.

Cela est évident, car elles sont le tiers des prismes qui sont sur leurs bases, & qui ont même hauteur* ; & ainsi en même raison.

Livre V. Section IV.

345

THEOREME XVIII.

Les cônes semblables sont entr'eux en raison composée des raisons de leurs dimensions, & cette raison est triplée. Eucl. XII. Prop. 12.

C'est une suite ; car les cônes sont des pyramides sur des bases d'un nombre infini de côtes.

THEOREME XIX.

Les cylindres semblables sont entr'eux comme les cubes des diamètres de leurs bases.

Ils sont en raison triplée de chacune de celles de leurs trois dimensions, & par conséquent de la raison des diamètres de leurs bases. Or les cubes de leurs diamètres sont en raison triplée de celle de ces mêmes diamètres*. Donc puisque les raisons composées d'égaux raisons sont égales, les cylindres semblables sont entr'eux comme les cubes des diamètres de leurs bases. Il en est de même des cônes semblables, & cela se démontre de la même manière.

THEOREME XX.

Les parallépipèdes égaux ont leurs bases & leurs hauteurs réciproques ; & si elles sont réciproques, ces deux solides sont égaux. Eucl. XI. Prop. 34.

Soient X & Z deux parallépipèdes égaux ; A la hauteur de X, & B celle de Z, M la valeur de la base de X, & N la valeur de la base de Z. Selon qu'on le suppose, $A \times M = B \times N$. Donc $A : B :: N : M$; partant ces quatre grandeurs A, B, N, M sont réciproques*. Or si ces quatre grandeurs sont réciproques, c'est-à-dire, si A, M, B, N peuvent être rangés de sorte que $A : B :: N : M$, il faut que $A \times M = B \times N$.

346 Elements de Geometrie.

THEOREME XXI.

137. Deux cylindres étant égaux, il en est de même des pyramides & cônes, leurs hauteurs & leurs bases sont réciproques ; & si elles sont réciproques, ces deux cylindres sont égaux. Eucl. XII. Prop. 9. & 15.

La démonstration du Theorème précédent sert à celui-ci ; il n'y a qu'à entendre par X & par Z deux cylindres.

THEOREME XXII.

138. Si A, B, C trois lignes droites sont proportionnelles, le solide parallépipède ABC fait de ces trois lignes, est égal au parallépipède BBB fait de la moyenne B, pourvu que ces solides soient équiangles. Eucl. XI. Prop. 36.

Donc A, B, C. Donc $AC = BB$. Donc multipliant AC & BB par B, le produit ACB sera encore égal au produit BBB*. Or ACB est le parallépipède fait des trois lignes A, B, C, égal ainsi à BBB fait de la moyenne B.

THEOREME XXIII.

139. A, B, C, D sont quatre lignes proportionnelles ; Les solides semblables faits sur ces lignes sont en proportion ; & s'ils sont en proportion, ces quatre lignes sont proportionnelles. Eucl. XI. Prop. 37.

Cela a été prouvé*.

THEOREME XXIV.

140. Une sphere est égale à un cône, ou pyramide polygone, qui a pour axe le rayon de cette sphere.

Livre V. Section IV.

347

& pour base un cercle, dont le rayon est le diamètre de cette même sphere.

1°. En concevant une infinité de cônes ou de pyramides polygones, dont le sommet est dans le centre d'une sphere ; & les bases dans la surface de la même sphere ; il est évident qu'on peut dire, que la solidité de cette sphere est égale à tous ces cônes ou pyramides polygones, puisque c'est dire que le tout est égal à toutes les parties prises ensemble.

2°. Tous ces cônes sont égaux à un cône qui a même hauteur, à savoir le rayon de cette sphere, & pour base toute la surface de cette sphere, qui est égale aux bases de ces cônes*.

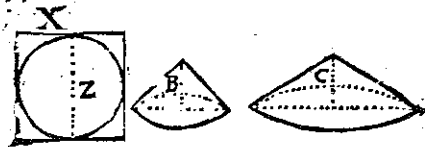
3°. Or la surface de cette sphere est égale à celle d'un cercle, qui a pour rayon le diamètre de cette sphere* ; donc la solidité est égale à celle d'un cône dont la base, &c.

Supposé la raison du diamètre à la circonférence du cercle comme 7 à 22, on peut dire que la solidité de la sphere est au cube de son diamètre comme 11 à 21 : car soit m la circonférence du cercle, & n le diamètre. $m : n :: m : n$. Or m est à n comme 22 à 7, ou 66 à 21. Ainsi la sixième partie de mnn, qui est la solidité de la sphere, suivant ce qui se conclue facilement de ce qui a été précédemment démontré, est à nnn cube de son diamètre, comme la sixième partie de 66, c'est-à-dire, 11 est à 21, &c. qu'il faut prouver.

THEOREME XXV.

La raison de X cylindre à la sphere Z qui lui est inscrite, est sesquialtere.

P vj



- Soient B & C deux cônes qui aient pour axes le rayon de la sphère Z, & que le rayon de la base de B soit celui de la sphère Z, & le rayon de la base de C soit l'axe ou le diamètre de la même sphère X, alors ces deux cônes B & C seront comme leurs bases *. Or celle de C est quadruple de celle de B : donc le cône C est quadruple du cône B ; ainsi B. C :: 1. 4 le plus petit cône B est la sixième partie du cylindre X, qui a pour base le grand cercle de la sphère Z, & pour axe le diamètre ; car ce cône B est le tiers d'un cylindre, qui a même base que lui & même axe * ; par conséquent il est la sixième partie d'un cylindre qui a même base, & un axe deux fois plus grand ; ainsi X. B :: 6. 1. Le cône C est égal à la sphère Z *, on a prouvé que B. C :: 1. 4 ; ainsi B. Z :: 1. 4 : donc puisque le cylindre X vaut six parties, telles que la sphère Z en vaut quatre X. Z :: 6. 4 ; ce qui est une raison sesquialtère.

THEOREME XXVI.

143. Les sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs diamètres, ou en raison triplée de celle de leurs diamètres. Eucl. XII. Prop. 18.

Les sphères sont en raison composée des raisons de leurs trois dimensions, toutes les sphères sont semblables ; ainsi leurs trois dimensions ont même raison : Donc la raison qu'elles com-

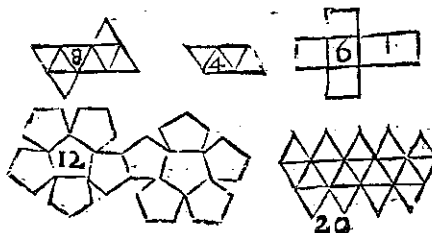
posent est triplée de chacune des raisons de leurs dimensions ; par exemple, de celle de leurs diamètres. Or les cubes de ces diamètres sont en raison triplée de celle de ces diamètres : donc les sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs diamètres.

SECTION V.

De la manière d'inscrire ou circoncrire à une sphère les cinq corps réguliers.

AVERTISSEMENT.

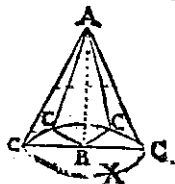
Il faut faire avec du carton les cinq corps réguliers, la seule vue de la figure suivante en apprend le moyen. Après avoir tracé ces figures & coupé le carton, on le plie de manière que les plans qui composent ces corps réguliers se joignent ensemble.



THEOREME I.

Toute section d'une sphère par un plan, est un cercle.

- X est la section d'une sphère dont A est le centre ; il faut prouver que cette section est un cercle : pour cela concevons 1°. que du centre A de la sphère on fait tomber sur le plan de cette section, que je nomme X une perpendiculaire AB. 2°. Que l'on tire du même centre A des lignes telles que AC, à tous les points des extrémités de X : toutes ces lignes qui sont rayons de la sphère, sont égales. Elles sont obliques ; puisqu'on ne peut mener de A plus d'une perpendiculaire sur X. Or les obliques égales ont leur pied également éloigné de la perpendiculaire : donc toutes ces lignes menées des extrémités de X au point B sont égales, & par conséquent ces extrémités sont dans la circonférence d'un cercle ; ainsi X est un cercle, suivant la définition *.



PROBLEME I.

146. Deux cercles inégaux étant concentriques ; inscrire au plus grand un polygone régulier ayant un nombre pair de côtes, de sorte que ce polygone ne touche point le plus petit. Eucl. XII, Prop. 16.

PROBLEME II.

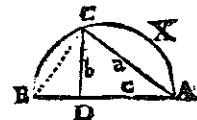
147. Deux sphères inégales ayant un même centre ; inscrire en la plus grande un polyèdre, auquel les plans ne touchent point la surface de la petite sphère. Eucl. XII. Prop. 17.

Ces deux Problèmes ne me paroissent point nécessaires, ainsi je les passe.

LEMME PREMIER.

Si aa carré de AC est triple de bb carré de CD moyen proportionnel entre AD & BD, je dis que DB est la troisième partie du diamètre AB.

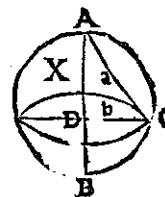
Soit AD nommé c. 1°. $aa = bb + cc$, & * L. 4. n. puisque par la supposition $bb = aa$: donc $3bb = 7^8$. $= bb + cc$: étant de part & d'autre bb , on aura $2bb = cc$. 2°. $\therefore AD. CD. BD$, ou $\therefore c. b. BD$ par l'hypothèse : donc cc ou $2bb. bb$: $AD. DB$ *. Donc AD sera double de * L. 3. BD, & conséquemment DB est un tiers de AB ; ce qu'il falloit prouver.



THEOREME II.

Le carré d'un des côtes du tétraèdre ou pyramide équilatérale, est égal à six fois le carré de la troisième partie du diamètre la sphère où il est inscrit.

Le tétraèdre ou pyramide équilatérale, est fait de quatre triangles égaux & équilatéraux. Concevons que dans la sphère X il y a un tétraèdre inscrit, dont AC ou a est un des côtes, & que CD est le rayon du cercle dans lequel est inscrit un des triangles équilatéraux qui composent ce solide : $AC^2 = 3CD^2$, ou $aa = 3bb$ * par conséquent DB est la troisième partie de AB diamètre de la sphère X par



Elémens de Geometrie.

150. L. 4. n. le Lemme précédent. Soit donc $BD = c$, & par conséquent $AB = 3c$. Puisque $\frac{3c}{c} = 3$, $a. 2c^*$; donc $6cc = aa^*$ ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

150. Le carré du diamètre de la sphere, est en raison sesquialtere avec le carré d'un des côtés du tetraédre qui lui est inscrit. Eucl. XIII. Prop. 13.

On vient de prouver que aa , carré du côté du tetraédre, est égal à six fois le carré de c troisième partie du diamètre de la sphere. Or le carré de $3c$ diamètre de la sphere est $9cc$; ainsi la raison du carré du côté du tetraédre à celui du diamètre de la sphere sera comme $6cc$ à $9cc$, ou 6 à 9, qui est une raison sesquialtere.

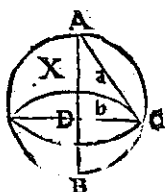
THEOREME III.

151. Le côté du tetraédre est incommensurable en lui-même, & commensurable en puissance avec le diamètre de la sphere où il est inscrit.

Soit comme ci-dessus AC , ou a côté du tetraédre, & AB ou $3c$ diamètre de la sphere, dont DB par ce qui a été démontré dans le Theoreme précédent, est égal à c , & $AD = 2c$; ainsi

L. 4. n. $\frac{3c}{c} = 3$, $a. 2c^$; donc $9cc$.
L. 3. n. $\frac{aa}{cc} = 3$, $a. 2c^$. Or ces nombres 3 & 2 ne sont pas nombres quarez; donc a sera incommensurable en lui-même avec $3c$, & com-

mensurable en puissance*. Nous venons de voir dans le Theoreme précédent que aa est au carré du diamètre de la sphere comme 6 à 9.



Livre V. Section V. 353

PROBLEME III.

Inscrire un tetraédre dans une sphere, ou trouver un cercle capable d'une des faces du tetraédre. Eucl. XIII. Prop. 13.

Il faut couper AB diamètre de la sphere en trois parties égales, de sorte que DB soit double de AD , & sur D élever la perpendiculaire DC , laquelle sera le rayon d'un cercle dans lequel ayant fait un triangle équilatéral dont BC est le côté, vous aurez une des faces du tetraédre, comme il est évident*.

THEOREME IV.

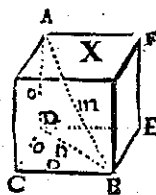
Le carré du diamètre de la sphere est triple du carré de chaque côté du cube, ou de l'exaédre qui lui est inscrit. Eucl. XIII. Prop. 15.

Le cube ou l'exaédre X est inscrit dans une sphere. Soit la diagonale $AB = m$, qui est le diamètre de la sphere, la diagonale d'une des faces du cube soit BD . Je nomme o tous les côtés de ce cube, qui sont tous égaux.

$AB^2 = BD^2 + AD^2$, ou $mm = nn + oo^*$. De même $BD^2 = BC^2 + CD^2$, ou $nn = 2oo$. Substituant donc en place de nn la valeur $2oo$, on aura $mm = 3oo$, qui est ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME IV.

Le diamètre de la sphere étant donné, trouver



Elémens de Geometrie.

154. le côté du cube ou de l'exaédre qui peut y être inscrit, ou trouver un cercle capable d'une des faces du cube. Eucl. XIII. Prop. 15.

Soit A , le diamètre de la sphere où il faut inscrire un cube, je le divise en trois parties, de sorte que BD est double de AD : sur D j'éleve la perpendiculaire CD , & de C je mene une ligne à A , qui sera le côté du cube que je cherche. Car soit $BA = 3c$ & $CA = d$: donc $\frac{3c}{c} = 3$, $a. d^*$. Donc $9cc = dd^*$. Le carré de AB ou de $3c$ est $9cc$; donc le carré de AB est triple de celui de d , qui ne vaut que $3cc$. Partant AC est le côté du cube qu'on cherchoit, par le Theoreme précédent.

Ensuite si on veut avoir le cercle capable d'une face du cube, il faut faire un quarré dont AC soit un des côtés, & lui circoncrire un cercle qui sera celui qu'on demande.

THEOREME V.

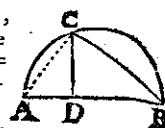
155. Le côté du cube est incommensurable en lui-même, & commensurable en puissance avec le diamètre de la sphere. (Même figure.)

AC ou d , côté du cube, est moyen proportionnel entre tout le diamètre AB ou $3c$, & sa troisième partie c ; ainsi puisque $\frac{3c}{c} = 3$, $a. d^*$; donc $3c : c :: 3 : 1$. Ces deux nombres 3 & 1 ne sont pas deux nombres quarez, partant AC est incommensurable avec AB en lui-même; mais commensurable en puissance, puisque son carré

*L. 4. n. est le tiers de AB^2 .

THEOREME VI.

156. Le quarré de chaque côté d'un octaédre est la



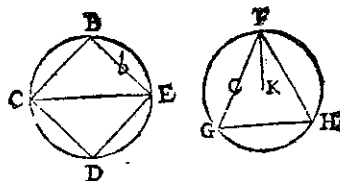
Livre V. Section V. 354

moitié de celui du diamètre de la sphere où il est inscrit. Euclid. XIII. Prop. 14.

Un octaédre est composé de huit triangles équilatéraux tous égaux, dont les côtés sont cordes du quart du cercle ou de nonante degrez. Or il est évident que le quarré de la corde de nonante degrez est la moitié de celui du diamètre: car deux cordes de nonante degrez font un angle droit, dont la base est le diamètre du cercle; ainsi le quarré de ces deux cordes est égal à celui du diamètre, qui est par conséquent le double de celui de chacune de ces deux cordes.

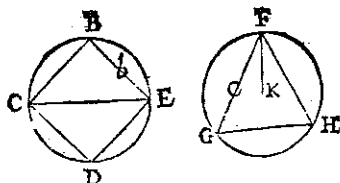
THEOREME VII.

Le même cercle comprend le quarré qui est une des faces du cube, & le triangle qui est une des faces de l'octaédre, l'un & l'autre inscrits dans la même sphere. Eucl. XIV. Prop. 8.



Soit $BCDE$ un quarré face d'un cube, inscrit dans un cercle. FGH est un triangle face d'un octaédre inscrit dans un cercle. Il faut démontrer que si ces deux solides sont inscrits dans une même sphere, ces deux cercles sont égaux.

Soit a le diamètre de la sphere, b le côté du quarré qui est une des faces du cube, & c le côté du triangle qui est une des faces de l'octaédre. Soit nommé y le rayon du cercle capable du



quarré du cube, & x celui du cercle qui est capable du triangle de l'octaèdre. Il faut prouver que $y = x$.

1°. Si on conçoit bb le quarré du cube inscrit dans un cercle dont y est le rayon, il est évident que $2yy = bb^*$. Et puisque $3bb = aa^*$: donc $aa = 6yy$. 2°. $3xx = cc^*$. Or $2cc = aa^*$: donc $6xx = aa$. Ainsi puisque $6yy = aa = 6xx$, donc $6yy = 6xx$; donc $y = x$: ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VII.

258. Le côté d'un octaèdre est incommensurable en lui-même, & commensurable en puissance avec le diamètre de la sphere où il est inscrit.

Le quarré de chaque côté de l'octaèdre est à celui du diamètre de la sphere, comme 1 à 2*. Or 1 & 2 ne sont pas des nombres quarrés ; donc ce côté est incommensurable en lui-même, avec le diamètre de la sphere*, & commensurable en puissance, puisque son quarré est moitié de celui de la sphere.

PROBLEME V.

259. Trouver le côté d'un octaèdre, & un cercle capable d'une des faces de ce solide, Trouvez par le Problème quatrième un cercle

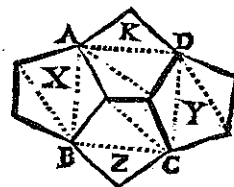
capable d'un des côtés du cube. Par le Theorème septième, ce cercle est capable d'une des faces de l'octaèdre. Il ne s'agit donc que de faire un triangle équilatéral dans ce cercle. Le côté de ce triangle sera celui qu'on cherche.

THEOREME IX.

Ayant mené des diagonales ou cordes sur les douze pentagones qui sont le dodécaèdre, celles de ces diagonales qui se joindront formeront six quarrés qui sont les six faces d'un exhaèdre ou cube inscrit dans la même sphere que le dodécaèdre.

Soient $KXYZ$ quatre pentagones faces d'un dodécaèdre (ayez à la main en lisant ceci un dodécaèdre) concevez sur chacune de ces faces des diagonales, une de A à B , de B à C , de C à D , & de D à A . Ainsi sur toutes les autres faces ; il faut prouver 1°. que ces quatre diagonales sont un quarré, sçavoir $ABCD$. 2°. Que les autres diagonales avec celles-ci, forment six quarrés égaux à $ABCD$, lesquels sont un cube inscrit dans la même sphere que le dodécaèdre ; ainsi chaque côté de ce cube est égal à chaque diagonale des pentagones.

1°. Toutes ces diagonales sont égales, soutenant des angles égaux. 2°. Concevons que des quatre points A, B, C, D qui sont sur la sphere où le dodécaèdre est inscrit, on ait mené des lignes au centre de la sphere, cela fera une pyramide quadrilatère



de, dont le plan qui couperoit la sphere & passeroit par ces quatre points seroit la base.

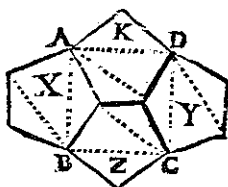
3°. Cette section de la sphere par le plan $ABCD$ sera un cercle*. Or on ne peut inscrire aucune figure de quatre côtés égaux dans un cercle, que le seul quarré ; car ces quatre angles valent quatre droits* : & puisqu'ils sont appuyés sur des arcs égaux, ils sont égaux. Donc la figure $ABCD$, qui a ses côtés égaux, & qui est inscrite dans un cercle, est un quarré.

4°. Tout pentagone se peut réduire en trois triangles ; partant la surface d'un dodécaèdre, composée de douze pentagones, se réduit en trente-six triangles. Or chaque quarré égal à $ABCD$ en soutient six, comme il se voit dans la figure ; donc ces trente-six triangles ne peuvent être soutenus que par six quarrés égaux, qui forment un cube inscrit dans la même sphere ; & partant il est vrai de dire que la diagonale d'un pentagone, qui est une des faces du dodécaèdre inscrit dans une sphere, est égale au côté du cube inscrit dans la même sphere.

PROBLEME VI.

261. Trouver le côté d'un dodécaèdre, & un cercle capable d'une des faces de ce solide. Eucl. XIII. Prop. 17.

Il faut premièrement trouver le côté d'un cube inscrit dans la sphere proposée*. Ce côté est égal à la diagonale de chaque pentagone face du



dodécaèdre*. Il faut couper ce côté en moyenne & extrême raison : la plus grande partie sera le côté du dodécaèdre proposé*. Pour avoir le cercle capable d'une des faces du dodécaèdre, il faut faire le pentagone dont on vient de connoître un des côtés*, ensuite lui circoncrire un cercle, qui sera ce qu'on cherche.

THEOREME X.

Le côté du dodécaèdre est incommensurable avec le diamètre de la sphere, tant en lui-même qu'en seconde puissance. Eucl. XIII. Prop. 17.

Soit diamètre de la sphere b , celui du côté du cube inscrit dans la sphere $c + d$ coupé en moyenne & extrême raison, dont c la plus grande partie est le côté du dodécaèdre*.

2°. c est incommensurable, tant en elle-même qu'en puissance, avec $c + d^*$. 3°. $c + d$ est commensurable en deuxième puissance avec b^* , c'est-à-dire, que $cc + 2cd + dd$ est commensurable avec bb . Il faut donc que cc soit incommensurable avec bb ; car s'il étoit commensurable avec bb , il le seroit avec le quarré de $c + d^*$, avec lequel bb est commensurable, puisque bb est le triple de ce quarré*, par conséquent cc incommensurable en puissance avec bb , est aussi incommensurable en lui-même avec b^* .

LEMME II.

MN est le diamètre d'un cercle, dans lequel les deux cordes AB & CE qui coupent MN à angles droits, sont parallèles entr'elles, & la distance de FG égale à la moitié de chacune ; je dis que MF sera le côté d'un decagone inscrit dans un cercle, dont FA sera le rayon.

360 *Elémens de Geometrie.*

Supposant MF ou $GN = x$ & $AF = z + x$; si MF ou x est le côté d'un decagone, dont AF ou $z + x$ est le rayon ; il faut qu'ayant coupé AF en moyenne & extrême raison, x en soit la mediane*, & que par conséquent $z + x = x^2$.

* L. 4. n. 35.

z ; ainsi si nous démontrons cela, sçavoir que $z + x = x^2$, nous avons fait ce qui est proposé.

Puisque $AF = z + x$; donc $AB = 2z + 2x$, & $BC = z + x$. Le carré de AB , qui est $4zz + 8zx + 4xx$, avec celui de BC qui est $zz + 2zx + xx$ sont égaux à celui de AC ou MN .* Or par l'hypothese $MN = 3x + x$; car MF & GN sont chacun égaux à x , & $FG = z + x$: le carré dis-je de $3x + x$ est $9xx + 6xx + 4xx$: mettant donc les deux

* L. 4. n. 35.

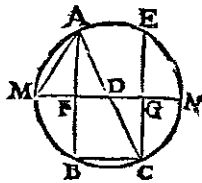
quarrez de AB & de BC en une somme $5xx + 10zx + 5zz$; ôtant de part & d'autre $5xx + 6xx + 4xx$, il restera $4xx = 4zz + 4zx$; divisant l'un & l'autre par 4, il viendra $xx = zz + zx$; donc remettant cette égalité en proportion* on aura $z + x = x^2$, $x = z$, puisque le produit des extrêmes $z + x$ & z , qui est $zz + zx$, est égal à xx carré de la grandeur moyenne x : c'est ce qu'il falloit démontrer.

* L. 3. n. 35.

LEMME III.

La ligne AM est le côté d'un pentagone inscrit dans un cercle, dont AF est le rayon. (Même figure.)

MF est le côté du decagone dans un cercle dont



Livre V. Section V. 361

Sont AF est le rayon*, le carré de AF avec celui de MF sont égaux à celui de AM ; donc AM est le côté du pentagone*.

* L. 4. n. 164.

LEMME IV.

Le carré de la AF , ou de FB , ou de GE , ou de GC lignes égales, est la cinquième partie de celui du diamètre AC ou MN . (Même fig.)

165;

Soit $AF = b$; donc $AB = 2b$, & $BC = b$, le carré de AB est $4bb$, & celui de BC est bb . Or ces deux quarrez qui font $5bb$, sont égaux à celui de AC ou de MN ; ainsi il vaut cinq fois celui de AF .

* L. 4. n. 78.

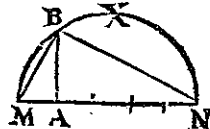
LEMME V.

Trouver une ligne dont le carré soit la cinquième partie de celui de MN , diamètre de X cercle donné.

166;

AM est la cinquième partie de MN , le carré de MN peut cinq fois celui de MB ; ainsi MB sera la ligne que l'on cherchoit, c'est-à-dire, égale à AF de la figure précédente, puisque le carré de AF est la cinquième partie de MN .*

* L. 4. n. 63.



PROBLEME V.

MN diamètre d'une sphere étant donné, faire un icosaèdre. Eucl. XIII. Pro. 16.

167;

1°. Ayant trouvé la valeur de AF , (Voyez la figure du Lemme 2. p. précéd.) & l'ayant coupé par la moitié : du centre D je fais DF & DG égales à cette moitié de sorte qu. $FG = AF$, après je mène AB & CE , qui coupent MN à angles droits.

* L. 4. n. 65.

Q

362 *Elémens de Geometrie.*

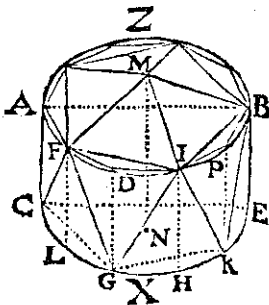
2°. Prenant AB & CE pour diamètres, je fais deux cercles que je nomme Z & X , qui sont parallèles. (Voyez la figure suivante,) étant sur des plans qu'on suppose parallèles.

3°. J'inscris dans chacun de ces deux cercles un pentagone, & de chaque angle je mène des lignes droites à M & à l'extrémité du diamètre de la sphere ; ce qui fait cinq triangles, dont les côtés sont égaux chacun au côté du pentagone inscrit dans ces deux cercles, par le Lemme troisième ; ainsi tous les côtés de ces triangles étant tous égaux aux côtés des pentagones, forment deux angles solides sur les cercles Z & X chacun de cinq triangles équilatéraux, dont le sommet est aux extrémités M & N du diamètre de la sphere, & voilà déjà dix faces trouvées de l'icosaèdre.

On n'a pas jugé à propos de marquer l'angle solide ni ses côtés dont le sommet est N , de peur de rendre la figure confuse ; il y faut suppléer par la pensée.

4°. J'inscris encore dans ces mêmes cercles Z & X un decagone, dont je joins les angles qui se répondent dans X & Z par les lignes BE , PK , IH , DG , FL , &c. qui par l'hypothese seront toutes égales aux rayons de Z & de X .

5°. Je mène les diagonales BK , KI , IG ,



Livre V. Section V. 363

GF , &c. Les quarrez BP , côté du decagone, avec celui de PK , qui est égal au rayon de Z & de X , sont égaux à celui de BK : donc BK est le côté du pentagone inscrit dans X & dans Z .* La même chose se démontre de KI , de IG , de GF , &c. les triangles BKI , KIG , &c. ont pour base les côtés dudit pentagone ; ils sont donc équilatéraux entr'eux : & aux dix qui composent les deux angles solides, dont nous avons parlé ci-dessus : par conséquent il y a entre Z & X dix de ces triangles, dont cinq ont leurs bases sur Z , & les cinq autres sur X , lesquels avec les dix déjà trouvez font les vingt triangles égaux & équilatéraux qui doivent composer l'icosaèdre ; ce qu'il falloit faire.

* L. 4. n. 164.

COROLLAIRE I.

Le carré du diamètre de la sphere est quintuple du carré du rayon du cercle X ou Z , qui est la base d'un angle solide fait de cinq équilatéraux.

168;

Cela a été démontré dans ce Theorème, & ailleurs*.

* L. 4. n. 165;

COROLLAIRE II.

Le diamètre MN est composé du côté de l'hexagone, ou du rayon des cercles Z & X , & de deux côtés du decagone inscrits dans ces cercles.

169;

Cela a été démontré dans ce Theorème, & ci-devant*.

* L. 4. n. 166;

COROLLAIRE III.

Les côtés des triangles de l'icosaèdre sont égaux, aux côtés des pentagones inscrits dans Z ou X .

170;

Q ij

THEOREME XI.

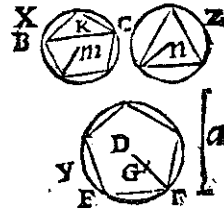
171. Les côtes de l'icosaèdre sont incommensurables, tant en eux-mêmes qu'en puissance, avec le diamètre de la sphere où l'icosaèdre est inscrit, Euclid. XIII. Prop. 16.

Le carré du rayon des cercles qu'on décrit pour faire l'icosaèdre, est la cinquième partie de celui du diamètre de la sphere*. Soit ce carré bb , partant celui du diamètre de la sphere est $5bb$. Ces deux carrés sont donc commensurables, étant comme 1 à 5. Soit x côté des triangles qui font l'icosaèdre, lequel x est un des côtés d'un pentagone inscrit dans un cercle dont b est le rayon*, partant bb & xx carrés du côté du pentagone dont b est le rayon, sont incommensurables, aussi bien que leurs racines x & b *. Et puisque le carré bb du rayon est commensurable avec le carré du diamètre de la sphere, il faut que xx soit incommensurable avec le carré de ce diamètre; car s'il étoit commensurable avec lui, il le seroit* avec celui de b ; & si xx & le carré du diamètre sont incommensurables, x & le diamètre le sont aussi, puisque les raisons des carrés sont doublées de celles de leurs racines, & qu'ainsi si les doublées sont sournes, il faut que les composantes le soient aussi: car le produit de deux nombres est un nombre.

THEOREME XII.

172. Le même cercle comprend le pentagone qui est une des faces du dodécaèdre, & le triangle équilatéral qui est une des faces de l'icosaèdre, Eucl. XIV. Prop. 3.
X & Z soient deux cercles, dans lesquels

supposé que le pentagone de X est une des faces d'un dodécaèdre, & le triangle équilatéral de Z une des faces de l'icosaèdre, ces deux corps inscrits dans une même sphere dont le diamètre est a . Il faut prouver que m , rayon de X, est égal à n rayon de Z.



Je fais le pentagone Y dont chaque côté est égal au côté de l'équilatéral, face de l'icosaèdre. Ce pentagone est ainsi la base de cinq des triangles de l'icosaèdre*. Je coupe DF , rayon de Y, au point G en moyenne & extrême raison. DG la plus grande partie est le côté du decagone*. Soit pareillement coupé BC en moyenne & extrême raison au point K, la plus grande partie BK sera égale au côté de ce pentagone*: donc $BC, DF :: BK, DG$; ainsi $BC^2, DF^2 :: BK^2, DG^2$; & $3BC^2, 5DF^2 :: 3BK^2, 5DG^2$. Or BC est égal au côté de l'exhaèdre*, dont trois carrés sont égaux à aa , carré du diamètre de la sphere dans laquelle il est inscrit*. Et $5DF^2$ est aussi égal à aa : donc $3BC^2 = 5DF^2$. Ainsi dans la proportion ci-dessus, y ayant égalité entre $3BC^2$ & $5DF^2$, il y aura aussi égalité entre $3BK^2$ & $5DG^2$: donc puisque $FE^2 = DF^2 + DG^2$: donc $5FE^2 = 5DF^2 + 5DG^2$: donc aussi $5FE^2 = 3BC^2 + 3BK^2$: car on vient de faire voir $3BC^2 = 5DF^2$, & $3BK^2 = 5DG^2$.

Q iij

Mais $3BC^2 + 3BK^2 = 15mm^2$, & $5FE^2 = 15nn^2$: car FE est supposé égal au côté du triangle équilatéral dont n est le rayon, & par conséquent puisque $15mm^2 = 3BC^2 + 3BK^2 = 5FE^2 = 15nn^2$. Donc $15mm^2 = 15nn^2$ ou $mm^2 = nn^2$, & conséquemment $m = n$; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME VI.

173. Le diamètre d'une sphere étant donné, trouver les côtes des cinq corps réguliers qui y sont inscrits. Eucl. XIII. Prop. 18.

Il faut faire ce qui a été enseigné pour trouver le rapport de chaque côté des corps réguliers avec le diamètre de la sphere où ils sont inscrits.

THEOREME XIII.

174. La surface du dodécaèdre est égale à trente fois le rectangle fait d'un des côtes du pentagone & de l'apothème de ce pentagone, & celle de l'icosaèdre à trente fois le rectangle fait d'un des côtes de l'équilatéral & de l'apothème de ce triangle. Eucl. XIV. Prop. 4.

Ayant mené des lignes du centre du pentagone & de l'équilatéral à leurs angles, X sera partagé en cinq triangles, & Z en trois; ainsi les douze faces du dodécaèdre en soixante trian-

gles, comme les vingt faces de l'icosaèdre en soixante. Or chacun de ces triangles, comme ABC , est égal au rectangle de AD apothème, & de BD moitié de BC , comme aussi GEH au rectangle de EF par GF moitié de GH : Donc, &c.

COROLLAIRE.

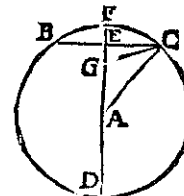
La surface du dodécaèdre est donc à celle de l'icosaèdre, comme $AD \times BD$ est à $EF \times FG$.

LEMME VI.

L'apothème du pentagone est égal à la moitié d'une ligne égale au côté de l'exagone & du decagone inscrits dans le même cercle. Euclid. XIV. Prop. 1.

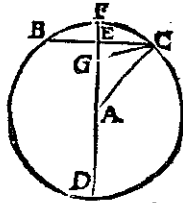
BC est le côté d'un pentagone, par conséquent FC côté de la moitié de l'arc BFC , est le côté du decagone, & AC rayon du cercle côté de l'exagone. AE est l'apothème du pentagone. Il faut prouver que AE est égal à la moitié de $AC + CF$. Je fais GE égale à EF ; & partant $GC = FC$.

FC étant la dixième partie du cercle de l'angle FAC , est de trente-six; & puisque l'arc CD vaut quatre fois cent trente-six degrés, donc l'angle CFD est de soixante-deux double de



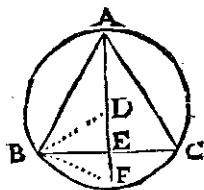
Q iij

* L. 1. n. trente-six *. Puisque $GC = CF$: dont FCG est isocèle, donc l'angle FGC sera aussi de soixante-douze degrés : donc CGA est de cent
 17. trente-six, cela fera cent quarante-quatre que j'ôte de cent quatre-vingt, reste trente-six valeur de ACG , qui est ainsi égal à GAC ; par conséquent $AG = GC = FC$: donc $AG = FC$.
 Ainsi $AG + GE = FC + FE$, ou $AE = FC + FE$: Donc $AE + EF + FC$ est le double de AE : donc AE est la moitié de $AE + EF$ (ou AF rayon) $+ FC$; & par conséquent moitié du côté de l'hexagone, & de FC côté du décagone.



LEMME VII.

177. ABC est un équilatéral. AE une perpendiculaire qui coupe BC : je dis que $DE = EF$.



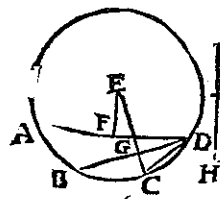
BF est côté de l'hexagone, ainsi égal au rayon BD ; donc $DE = EF$.*

THEOREME XIV.

178. La surface du dodécèdre est à celle de l'icosaèdre, comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre, inscrits en une même sphère. Eucl. XIV. Prop. 5.

AD est le côté du triangle face de l'icosaèdre ; & BD est le côté du triangle face du dodécèdre.

dire qu'un même cercle peut comprendre *. EF * 5n. 172. coupe par la moitié AD , comme EC coupe par la moitié BD ; & par conséquent l'arc BCD * : * L. 1. n. 92.



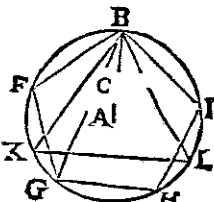
1°. $\therefore EC + CD$. EC . CD *. Or EG est la moitié de $EC + CD$ *, & EF la moitié de EC *, comme aussi $EG - EF$ moitié de CD : car $2EG = EC + CD$ *, & $2EF = EC$ * : donc $2EG = 2EF + CD$. Otant de part & d'autre $2EF$, vient $2EG - 2EF = CD$: donc $EG - EF$ est moitié de CD . On a vu que $\therefore EC + CD$. EC . CD : donc leurs moitiés sont en même raison ; ainsi $\therefore EG$. EF . $EG - EF$. Mais la ligne H étant le côté du cube, si on la coupe en moyenne & extrême raison, BD sera son plus grand segment *. Ainsi $\therefore H$. BD . $H - BD$. Donc H . BD : EG . EF *. 5n. 160. 6. L. 4. n. 153. Donc $H \times EF = BD \times EG$. Or H . AD : $H \times EF$. $AD \times EF$ *. Donc H . AD : $BD \times EG$. * L. 4. n. 67. $AD \times EF$; c'est à dire, comme H côté du cube est à AD côté de l'icosaèdre, de même $BD \times EG$ est à $AD \times EF$; mais ces deux produits sont entr'eux en même proportion que les surfaces du dodécèdre & de l'icosaèdre * : donc &c. Ce qu'il falloit démontrer. 5n. 175.

THEOREME XV.

AB rayon étant coupé en C en moyenne & extrême raison. AC le plus grand segment, le carré de BG côté du cube, sera à celui de QV

BK côté de l'icosaèdre, comme $AB^2 + AC^2$ est à $AB^2 + BC^2$. Eucl. XIV. Prop. 6.

Soit $BFGHI$ un pentagone une des faces du dodécèdre, & BKL un triangle face de l'icosaèdre ; ce qui est possible *. BG est le côté du cube inscrit dans une même sphère * : * L. 4. n. 160. donc $BK^2 = 3AB^2$.*



Or $AB^2 + CB^2 = 3AC^2$ * : donc BK^2 est triple de AB^2 , comme $AB^2 + CB^2$ est triple de AC^2 . Ainsi $BK^2 : AB^2 :: AB^2 + CB^2 : AC^2$. Permutando BK^2 . $AB^2 + CB^2 :: AB^2$. AC^2 . Or BF est le plus grand segment de EG côté du cube coupé en moyenne & extrême raison *. 5n. 160. Donc AB^2 . $AC^2 :: BG^2$. BF^2 *, BK^2 . $AB^2 + CB^2$ *. Permutando BG^2 . $BK^2 :: BF^2$. $AB^2 + CB^2$. Or $BF^2 = AB^2 + AC^2$ *. AB & AC étant côtés de l'hexagone & du décagone *. Mettant $AB^2 + AC^2$ en la place de BF^2 , nous aurons BG^2 . $BK^2 :: AB^2 + AC^2$. $AB^2 + CB^2$; ce qu'il falloit prouver. 67. 53. 164. * L. 4. n. 151.

THEOREME XVI.

180. Comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre ; ainsi le dodécèdre, est à l'icosaèdre inscrits dans une même sphère. Eucl. XIV. Prop. 7.

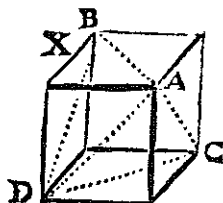
Concevez que de tous les angles d'un dodécèdre, & de même de l'icosaèdre, on ait mené

des lignes au centre de la sphère. Cela fera dans l'un douze pyramides, & dans l'autre vingt qui seront de même hauteur, puisque le même cercle dans la sphère comprend une des faces de l'icosaèdre & du dodécèdre * ; ainsi ces pyramides sont comme leurs bases, * c'est-à-dire, comme les surfaces de ces deux polyèdres. Or ces surfaces sont entr'elles * comme le côté du cube au côté de l'icosaèdre. 5n. 172. 5n. 123. 5n. 198.

PROBLEME VII.

Inscrire un tétraèdre dans un cube, Euclid. 13n. XV. Prop. 1.

De A un des angles du cube X , concevant qu'on ait mené les diagonales AB , AC , AD , & BD , BC , CD , vous apercevrez $ABCD$ un tétraèdre ou pyramide de quatre triangles équilatéraux, car les diagonales sont égales ; ainsi le triangle $ABC = BAD$, &c.



Il faut avoir à la main les corps réguliers dont on parle ; il est facile de les faire selon qu'on l'a enseigné *. Tout ce qu'on va lire sera aisé, faisant sur chaque corps ce qu'on dit ici qu'il y faut faire ; autrement les démonstrations suivantes seront obscures. 5n. 144.

PROBLEME VIII.

Inscrire un octaèdre dans une pyramide ou tétraèdre, Eucl. XV. Prop. 2.

Q vj

372 *Elemens de Geometrie.*

Coupez par la moitié tous les six côtes de la pyramide ou tétraèdre; joignez les points de section par douze lignes qui feront toutes égales, & feront huit triangles équilatéraux.

PROBLEME IX.

183. Dans un cube faire un octaèdre. Eucl. XV. Prop. 3.

Ayant pris le centre de chaque face de cube, il faut joindre ces centres en tirant des lignes autant qu'il en faut; savoir douze, qui étant toutes égales, feront huit triangles égaux, & par conséquent un octaèdre.

PROBLEME X.

184. Dans un octaèdre faire un cube. Eucl. XVI. Prop. 4.

1°. Coupez par la moitié toutes les côtes de l'octaèdre. 2°. Menez des lignes par toutes ces sections sur les faces de ce corps, ces lignes seront toutes égales, & feront deux quarrés opposés, lesquels joignant par quatre autres lignes qui seront égales aux premières, & les opposées étant parallèles elles feront un cube; ce qui est évident.

PROBLEME XI.

185. Faire un dodécaèdre dans un icosaèdre. Eucl. XV. Prop. 5.

Cinq triangles de l'icosaèdre qui font un angle solide ou une pyramide, ont pour base un pentagone. Il faut couper tous les côtes de cette pyramide par la moitié le plan de cette section, fera un pentagone & une des faces du dodécaèdre; car en faisant la même chose à tous

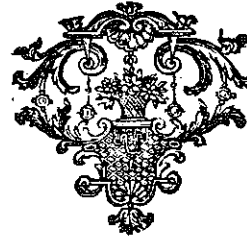
Livre V. Section V. 373

les angles solides ou pyramides de l'icosaèdre qui sont au nombre de douze, on aura douze pentagones égaux, qui feront les douze faces du dodécaèdre.

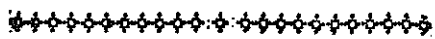
AVERTISSEMENT.

Le diamètre de la sphere étant supposé 1000, les côtes des corps réguliers inscrits dedans, seront à peu près comme les nombres suivans.

Le Tétraèdre	316.
L'Octaèdre	707.
L'Hexaèdre ou Cube	577.
L'Icosaèdre	527.
Le Dodécaèdre	357.



ELEMENS
DE
GEOMETRIE
OU
DE LA MESURE
DE L'ÉTENDUE.



LIVRE SIXIÈME.

De la Methode.

AVERTISSEMENT.



A Methode que nous avons suivie jusqu'à présent, s'a été de considérer l'idée des choses dont nous parlions, & d'en tirer leurs propriétés. Par exemple, quand il s'est agi de démontrer les propriétés du cercle, nous avons considéré quelle étoit la figure à qui on donnoit ce nom: comment elle se faisoit; ce qu'elle étoit: & c'est de l'idée de cette figure, que nous avons déduit ses

Elemens de Geom. Liv. VI. Ch. I. 378 propriétés. Cette methode suppose la chose connue. Ces Elemens m'étoient connus avant que de les écrire; & ce que j'ay fait, s'a été de faire appercevoir dans l'idée des choses, ce qui y est, & ce que j'y avois vu. Il y a une autre methode avec laquelle on trouve ce qu'on ne connoissoit pas, & que j'ay employée moi-même dans ces Elemens en beaucoup d'occasions, pour trouver ce que je ne savois point: c'est pourquoi on l'appelle Methode d'Invention, au lieu que la première se peut nommer Methode de Doctrine. Cette seconde est tres-générale; & proprement elle ne suppose aucune connoissance. J'en ai déjà parlé dans les Elemens des Mathematiques; mais je l'applique ici à la Geometrie, & je la traite d'une maniere particuliere: ainsi ce qu'on va voir n'est point une repetition inutile.

CHAPITRE PREMIER.

De la methode qu'il faut suivre dans l'examen d'une Question, ou Problème. En premier lieu il la faut bien concevoir, & l'exprimer nettement.

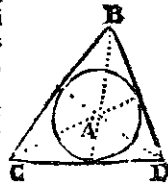
Ce n'est que par l'application de l'esprit; qu'on atteint la vérité: On se distrait facilement. Pour remédier à ce défaut, il faut arrêter son esprit, exprimant par une figure ce qu'il doit considérer; ce qui n'est pas impossible, quoiqu'on ne connoisse pas entierement les choses qui sont en question. Il faut bien qu'on ne les ignore pas entierement; autrement, si elles n'avoient aucune prise, ce seroit en vain qu'on les attaqueroit. Or ce peu de connoissances

ce donne lieu de supposer, que selon qu'on le propose, elles doivent être faites de telle & telle manière. On peut donc tirer certaines lignes conformément à cette supposition. Ces lignes, puisque l'on les tire telles qu'elles doivent être, sont connues; & comme on le va voir, elles peuvent faire connoître celles qu'on cherche. La première chose qu'on doit faire, c'est de bien exprimer ce qui est en question, & qu'on veut connoître. L'importance, c'est que cette expression soit nette, qu'on y voie ce qu'il faut chercher, & qu'elle soit débarassée de ce qui ne serviroit qu'à la rendre obscure. Cela se comprendra mieux dans les exemples suivans, où l'on va voir que la seule expression résout souvent des questions difficiles. J'entens ici les expressions qui se font par des figures, aussi-bien que par des discours.

QUESTION.

- 26 Démontrer que la surface d'un triangle est égale à la moitié de la somme de ses trois cotés, multipliée par le rayon d'un cercle qui lui est inscrit.

La seule vue de cette figure démontre, que cela est véritable. Des angles du triangle BCD ayant mené des lignes au centre A du cercle qui lui est inscrit, on fait les trois triangles BAC , CAD , DAB égaux ensemble au triangle BCD , & qui ont pour hauteur le rayon de ce cercle. Ils sont donc égaux à un triangle, dont la base



est égale aux trois cotés de BCD , & qui a pour hauteur le rayon du cercle inscrit; la surface $\times L. 2. n^o$ de ce triangle est donc égale au produit de la moitié de sa base par sa hauteur; ce qu'il falloit prouver.

Voyons encore par un autre exemple, combien la manière d'exprimer une question par une figure convenable, en facilite la résolution.

QUESTION.

- Démontrer que dans le triangle ABC , si de l'angle CAB on mène une perpendiculaire sur BC , la somme des deux cotés AB & AC est à BC , base de l'angle que ces deux cotés comprennent, comme la différence de CD & BD est à celle de AC & AB .

Pour trouver la démonstration de ce Théorème, & l'exprimer d'une manière qui facilite l'invention, de A comme centre, & de l'intervalle AB le plus petit côté; je fais un cercle: Et puisque AB est égal à AE , la ligne CE est la somme des cotés AC & AB . Les lignes AF & AB sont égales; donc CF est leur différence. Puisqu'aussi $DB = DG$, la ligne GC sera la différence entre CD & DB . Ainsi voilà une expression, ou une figure, qui marque ce que l'on cherche. Après quoi la question se résoud facilement; car $CE \times CF = CB \times CG$: donc $CE. CB :: CG. CF$; ce qu'il falloit démontrer.



CHAPITRE II.

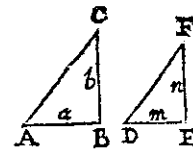
4. On peut exprimer les lignes & toutes les grandeurs, dont il est parlé dans une question, & faire sur elles toutes les opérations de l'Arithmétique, sans les connoître.

Cette méthode, que nous enseignons ici, est fort générale, & fort différente de celle qu'on a suivie jusqu'à présent. Nous recherchons les propriétés de quelque figure; & il s'agissoit de la manière qu'on pouvoit trouver ses propriétés, & le démontrer. Ici on ne considère autre chose dans les Grandeurs qu'on examine, sinon qu'on les peut ajouter à d'autres grandeurs, ou les retrancher si elles sont petites: qu'on les peut multiplier, ou diviser. On a enseigné dans le troisième Livre, comment cela se peut faire de tout ce qui est grand, c'est à dire, capable du plus ou du moins, soit lignes, soit nombres. Ainsi cette méthode est déjà expliquée en partie, & nous en avons fait un usage par tout. Si on a lû les Livres précédens, on ne peut donc ignorer que par $a + b$, on peut entendre deux lignes a & b ajoutées ensemble; par $a - b$ qu'on a retranché b de a ; par ab qu'on a multiplié a par b ou b par a ; qu'ainsi ab est un rectangle, dont les lignes a & b sont les cotés; que aa ou a^2 est un carré, dont la ligne a est un des cotés; que $\frac{ab}{b}$ est un rectangle, ou plan divisé par b , après laquelle division il ne reste que le côté a , c'est à dire, que ce n'est plus qu'une ligne, suivant ce qu'on a enseigné au

commencement du Livre troisième, qu'on peut effacer la lettre qui est au-dessus & au-dessous du signe de la division; qu'ainsi $\frac{ab}{b} = a$.

Les puissances s'expriment de même, aussi-bien par lettres que par lignes; ainsi on marque par lettres les rapports des figures; car si un triangle est rectangle, dont l'hypothénuse est a & les deux cotés b & c , suivant qu'on l'a enseigné, ou $aa = bb + cc$, ou $a^2 = b^2 + c^2$, & $a^2 - b^2 = c^2$, & $a^2 - c^2 = b^2$.

Tous les rapports des triangles semblables se peuvent exprimer de même par lettre; car si ABC & DEF sont semblables, que $AB = a$, & $BC = b$, & $DE = m$, & $EF = n$; alors $a. b :: m. n$: Et puisque, selon ce qui a été dit, multipliant b par m , & divisant le produit bm par le premier terme a , le quotient $\frac{bm}{a}$ est le quatrième: donc $EF = \frac{bm}{a}$, & par



le même raisonnement $\frac{bm}{n} = AB$. Ce qui donne le moyen de marquer les rapports des lignes, aussi-bien que des nombres.

Cette manière générale d'exprimer toute grandeur, & de faire sur elle les opérations qu'on fait sur les nombres, est ce qu'on appelle l'Algebre, comme nous l'avons dit. Elle est difficile à ceux qui n'ont pas coutume de s'en servir; ce qui n'arrivera pas à ceux qui se font servir de nos Elémens. Remarquez que dans la

380 *Elémens de Géométrie.*

multiplication l'on peut réduire un produit à une proportion : par exemple le produit de a par b , à une proportion dont le premier terme soit l'unité ; le second & le troisième soient les deux grandeurs a & b , qui se multiplient ; & le quatrième terme soit ab , qui est le produit de la multiplication, ce qui est évident : car, soit ce quatrième terme nommé x : donc $1. a$

* $1. 3. n. : : b. x$. Or $\frac{ab}{1} = x$. Mais l'unité ne divisant 60.

point, comme ne multipliant point : donc $\frac{ab}{1} = ab$, & partant $ab = x$. Par tout où l'unité n'est point, on la peut supposer, puisqu'elle n'apporte aucun changement. Ainsi le produit de trois lettres, comme abc , peut marquer ces deux proportions :

1. $c : : ab. abc$; & 2. $ab : : c. abc$. Cela fait voir que le produit de quatre lignes $abcd$, marque trois proportions ; le produit de cinq lignes $abcde$, marque quatre proportions ; & dans ces proportions le produit total n'est qu'une ligne, qui résulte de toutes ces proportions, lorsque le premier terme est l'unité ; car puisque

1. $a : : b. ab$; donc 1. $b : : a. ab$;

De même, puisque $1. ab : : c. abc$;

Donc 1. $c : : ab. abc$.

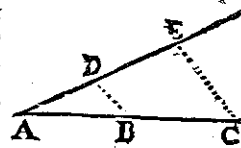
Le quotient d'une division exprime une ligne ; par exemple $\frac{a}{b}$: car cela se peut réduire à cette

proportion $b. a : : 1. x$: car $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a}{b} = x$.

6. Il est facile de faire toutes les opérations de l'Arithmétique, avec le compas & la règle. On

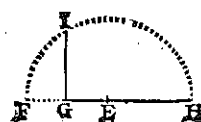
Livre VI. Chapitre II. 381

peut ajouter une ligne à une autre ligne, ou retrancher une plus petite d'une plus grande. Pour la multiplication d'une ligne par une ligne, c'est-à-dire, pour trouver une ligne qui soit égale au produit de deux lignes, voilà ce qu'il faut faire. Soient ces deux lignes AD & AC qu'on veut multiplier l'une par l'autre ; il faut prendre sur AC la ligne AB égale à l'unité, & mener une ligne AD qui fasse un angle à discrétion avec AB . Je tire une ligne par D & B , & une autre par C qui lui soit parallèle ; ce qui étant fait, AE sera la ligne que l'on cherche : car $AB. AD : : AC. AE$: donc $AB \times AE = AD \times AC$. La multiplication n'augmente pas une grandeur, qui n'est multipliée que par l'unité, c'est-à-dire, qui n'est prise qu'une fois ; Ainsi comme AB est l'unité, en multipliant AE , elle ne l'augmente point. Donc AE qui est une quatrième proportionnelle, sera égale au produit de AD par AC ; ce que l'on cherchoit.



Si l'on veut diviser AE par AC , ayant pris AB égale à l'unité, & mené par B une parallèle à CE , on aura AD qui sera la valeur de AE divisée par AC ; car $AB. AD : : AC. AE$, & l'unité est au quotient d'une division, comme le diviseur est à la grandeur divisée.

S'il faut tirer la racine carrée de GH , je lui ajoute une ligne droite FG qui soit l'unité, & divisant FH



382 *Elémens de Géométrie.*

en deux parties égales

au point E : du centre

E je fais le cercle FIH :

élevant ensuite du point

G une ligne droite jus-

qu'à I à angles droits

sur FH , la ligne GI est la racine que l'on cher-

che : car $\frac{GI}{FG} = \frac{GI}{GH}$. Donc le quarré de

GI , est égal au produit de GH . Or FG étant

l'unité, elle n'augmente point la valeur de GH

en la multipliant : ainsi GH est égale au quarré

de GI , qui par conséquent est la racine de GH .

Par ce même moyen on peut trouver une ligne,

qui soit égale à la racine quarrée d'un nombre

qui n'est pas quarré ; par exemple qui soit

égale à la racine d'un quarré qui vaut 18 : car

prenant GH égale à 18, & lui ajoutant FG égale

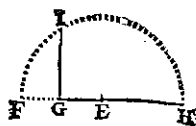
à l'unité, & de E milieu de cette ligne, comme

centre faisant un cercle, la ligne GI sera égale à

la racine quarrée de 18, qui ne peut être expri-

mée par aucun nombre, comme nous l'avons

vu dans le quatrième Livre.



CHAPITRE III.

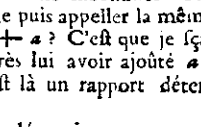
67. Après avoir exprimé une Question ou Problème, & fait la figure qui lui convient, il faut distinguer ce qui y est connu d'avec ce qui ne l'est pas ; & considérer si le Problème est déterminé, ou indéterminé.

A Près qu'on a conçu nettement une Question ou un Problème, & fait la figure qui en exprime les conditions, il faut distinguer ces trois choses. 1°. Les lignes qui sont connues,

Livre VI. Chapitre III. 383

2°. Celles qui ne le sont pas. 3°. Tous les rapports que ces lignes connues & inconnues peuvent avoir entr'elles. Une partie des lignes qu'on tire pour exprimer le Problème sont connues, les autres sont supposées, c'est-à-dire, qu'on suppose qu'elles doivent avoir tel & tels rapports avec les lignes qui sont connues. Or aujourd'hui c'est la coutume de marquer, par les premières lettres de l'Alphabet, les lignes qui sont connues, les nommant ou a , ou b , ou c , ainsi de suite. On marque avec les dernières x , y , z , celles qui sont inconnues : quelquefois il est bon de se servir des premières lettres du nom des grandeurs connues & inconnues ; par exemple marquant un nombre par n , une somme par s , le temps par t , la vitesse par v . Ensuite il faut considérer si de la manière que le Problème est proposé, il dépend de la volonté de choisir certaines grandeurs, tirer certaines lignes, ou si toutes celles que la question renferme, sont déterminées ; de sorte que tout ce que l'on peut faire, soit de leur donner des noms convenables. Il faut donc examiner d'abord si la Question est déterminée, ou indéterminée. Dans une Question indéterminée, on n'y aperçoit point de rapport, qui donne le moyen d'exprimer en deux manières les grandeurs inconnues. Car qu'est-ce qui fait que je puis appeler la même grandeur ou x , ou $y + a$? C'est que je sçai que x est égal à y , après lui avoir ajouté a ; que $x = y + a$. C'est là un rapport déterminé.

Mais quand, sans en déterminer aucun, on propose par exemple de couper le diamètre AB , de sorte que le rectangle des deux parties soit égal à un quarré, ce Problème est indéterminé ;

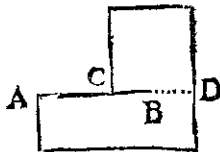


384 Elémens de Geometrie.

& je ne puis trouver une double expression, qu'en supposant un certain rapport; celui-ci par exemple, que AB est coupé en C . Après cela, de l'intervalle A de la moitié de AB ayant fait un cercle, & élevé sur C la perpendiculaire CD , j'aurai ce que je cherche $\frac{AC}{CD} = \frac{AC}{CD}$.
 *L. 4. n. CB^2 : donc $AC \times CB = CD^2$. Un Problème indéterminé peut avoir plusieurs résolutions; car en quelque part du diamètre que soit C , le carré de CD sera égal au rectangle des parties du diamètre coupé comme on avoit proposé de le faire. Je pouvois couper AB ailleurs qu'en C .

13. Un Problème est dit déterminé, lorsqu'on n'y peut satisfaire qu'en observant certaine chose qui le détermine, & qui ne dépend pas du choix de celui à qui il est proposé, c'est-à-dire, que les grandeurs qu'il renferme, ont un certain rapport qui leur est particulier. Par exemple, AB étant divisé en C ;

on propose de prolonger AB jusqu'en D , point inconnu; de sorte que le carré de CD soit égal au rectangle de AD & de BD : alors comme ce prolongement BD est déterminé, c'est-à-dire, qu'il a une certaine longueur précise; ce Problème est déterminé: Et supposé que $AC = a$, & $CB = b$, & $BD = x$, on aura cette double expression, savoir pour le rectangle $ax + bx + xx$, & pour le carré $bb + 2bx + xx$; lesquels



386 Elémens de Geometrie.

la moitié. Soit $AB = y$ & $DE = z$; ainsi DB ou $BE = a$. Il est clair que $AB = DB$, ou $y = a$ ou x , & que $BC + BD$ ou $y + a = DC$ ou z . Ainsi lorsqu'on connoît la différence de deux grandeurs inconnues, on a le moyen de les exprimer de deux manières.

16. Quand il s'agit de Problèmes de Geometrie, les seules figures, sont souvent aperçues par le rapport des lignes, dont il est parlé par le Problème; car si par exemple je sçai que l'inconnue x est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont les deux autres côtés sont d & b , je sçai que
 *L. 4. n. $xx = bb + dd$; ainsi voilà une double expression de x . Un plan est fait de la multiplication de ces deux racines; si on le divise donc par l'une, le quotient de la division sera l'autre. Ainsi si $b : c :: d : x$, puisque $bx = cd$ divisant cd par b , le quotient $\frac{cd}{b} = x$. Si x étoit moyen ne proportionnelle entre c & d , alors $xx = cd$.

Les figures ou leurs propriétés, qu'on découvre aisément quand on sçait les élémens, & ces propriétés connues, donnent les moyens de trouver des Equations.

17. Ce qu'on a vu dans le troisième Livre touchant les Puissances, est aussi une source de différentes Equations: car si je sçai que $a + b = x$, donc $aa + 2ab + bb = xx$. Si x est l'hypothénuse d'un triangle, & que les deux côtés soient a & b , alors $aa + bb = xx$; partant $xx - aa = bb$, ou $xx - bb = aa$.

18. On peut exprimer différemment les mêmes grandeurs, marquant les parties pour le tout,

Livre VI. Chapitre IV. 385

Lesquelles deux grandeurs suivant la supposition doivent être égales; ainsi $ax + bx + xx = bb + 2bx + xx$, au moyen de laquelle on pourra connoître la valeur de x , suivant qu'il sera enseigné.

CHAPITRE IV.

La connoissance des rapports qui sont entre les lignes de la figure d'un Problème, donne le moyen de les élever ou de trouver de doubles expressions; ce qui s'appelle Equation. 14.

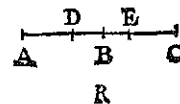
Si on sçait que trois lignes connues, a, b, c sont en proportion, & que x inconnue est le quatrième terme de cette proportion; qu'ainsi $a : b :: c : x$, alors puisque $\frac{bc}{a} = x$ on a cette *L. 3. n. 60.

double expression $\frac{bc}{a}$ & x de la même grandeur,

& c'est ce qu'on appelle Equation. Trouver des Equations, c'est trouver de doubles expressions d'une grandeur inconnue; ce qui se peut, quand on connoît quelqu'un de ses rapports avec les grandeurs connues.

Si on sçait que la somme de a & de b est égale à l'inconnue x , cette expression $a + b = x$ sera une Equation. Il est évident que la moitié de deux lignes inégales moins la moitié de leur différence, est égale à la plus petite ligne; & cette même moitié, plus la moitié de leur différence, est égale à la plus grande ligne.

Soit la ligne $AC = x + z$, $AD = x$, & $DC = z$. Soit DE leur



Livre VI. Chapitre V. 387

ou le tout pour les parties; ou les puissances pour les racines, ou les racines pour les puissances; c'est si $a + b = x$, donc $aa + 2ab + bb = xx$; ou $aa + 2ab = xx - bb$, ou $aa + bb = xx - 2ab$. Il est évident qu'on peut trouver une infinité d'Equations en cette manière:

Si $ab = xx$; donc $Vab = x$.

Ainsi en ajoutant, retranchant, multipliant, divisant on trouve le moyen d'élever des grandeurs, d'en trouver de doubles expressions ou Equations, en quoi consiste principalement l'art de cette méthode que nous enseignons ici, & qui se nomme Analyse, c'est-à-dire, méthode de résolution, parce qu'on taille ou coupe, pour ainsi dire, la grandeur qu'on cherche: on lui ajoute, on lui retranche, on la multiplie, on la divise, on la résout jusqu'à ce qu'elle se trouve précisément égale à une grandeur connue, après quoi elle n'est plus inconnue. 19.

CHAPITRE V.

Il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de lignes inconnues, & réduire toutes ces Equations à une seule. 20.

Ce qu'on cherche dans une Question, dans un Problème, & généralement lorsqu'on veut connoître ce qu'on ne connoît pas encore; c'est de ramener, pour ainsi dire, l'inconnu à ce qui est connu: comparer l'un avec l'autre, & remarquer leur différence, c'est-à-dire, ce qui fait que l'un est plus grand que l'autre; & qu'ainsi on découvre ce qu'il faut leur ajouter, ou en retrancher pour les élever; ce qu'on con-

R ij

moit aussi quand on sçait précisément quelle est leur raison : car si x est le tiers de a , donc

$x = \frac{a}{3}$. Si c'est a qui est le tiers de x , donc

$$3a = x.$$

21. On peut de cette maniere trouver les doubles expressions de toutes les grandeurs, dont il est parlé dans le Problème, c'est-à-dire, trouver des Equations ; & il en faut chercher autant qu'il y a de grandeurs inconnues. Il y a toujours dans un Problème une principale ligne inconnue, qui est celle dont dépend la résolution du Problème : & c'est à cette Equation qu'il faut réduire toutes les autres, de sorte qu'il n'y ait plus qu'une seule lettre inconnue ; car si on sçait que $x + b = z$, ou que $z - b = x$, portant où seront ces deux inconnues je pourrai toujours substituer $x + b$ en la place de z , ou $z - b$ en la place de x , & par conséquent réduire la Question à des termes où il n'y ait qu'une seule inconnue. Il y a différentes methodes. Quand on connoit que l'inconnue est le troisième ou le quatrième terme d'une proportion, on la peut exprimer avec les lettres des grandeurs connues ; car si $\frac{a}{b} :: \frac{c}{x}$, donc

$$\frac{b}{a} :: \frac{x}{c}.$$

60. Les termes d'une progression se peuvent exprimer de maniere, qu'on n'employe que la même lettre. Si j'avois cette progression de quatre termes exprimées par quatre différentes lettres $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}$, je les pourrois réduire d'une maniere qu'il n'y eût qu'une lettre inconnue ; car supposant que b est égal à 1, je pourrois dire que $\frac{a}{1}, 1, \frac{c}{2}, \frac{d}{3}, \frac{e}{4}$. * L. 3. n. 70. * $\frac{a}{1}, 1, \frac{c}{2}, \frac{d}{3}, \frac{e}{4}$. * b ou 1 est à x , comme le carré de b ou 1 est à celui de z ; c'est-à-dire, $b, x :: b, z$, ou $1, x :: 1, z$; ainsi puisque

$zz = x$, je puis substituer zz à la place de x . De même b ou 1 est à y , comme bb ou 1 est à zz . Donc puisque $zz = y$, au lieu de y je place zz ; ainsi je réduis ces quatre grandeurs b, x, y, z à celles ci, 1, x, z, z . Il y a une infinité de manieres semblables. Ce sont des methodes, chacun en peut trouver de plus heureuse ; ce qui lui donne lieu de résoudre facilement des Problèmes, qui sont très-difficiles à ceux qui ne connoissent pas la methode ; car tout le secret consiste à rendre les Equations nettes & simples.

CHAPITRE VI.

Il faut réduire les termes d'une Equation à l'expression la plus simple, & faire en sorte que la grandeur inconnue se trouve seule dans l'un des membres de l'Equation. 22.

Lorsqu'on a fait en sorte que la grandeur inconnue se trouve dans un des membres de l'Equation, c'est-à-dire, d'un côté du signe de l'égalité, & que de l'autre côté il n'y a que des grandeurs connues ; la grandeur inconnue se trouve précisément égale à des grandeurs connues, la Question est entièrement résolue. Si $x = a + b$, l'on ne peut ignorer la valeur de x . Or pour arriver là, il faut faire passer d'un côté ce qui est connu, & le délivrer de ce qui est inconnu. Avant toutes choses, on doit réduire les Equations à des expressions simples. Ces réductions se font par l'Addition, ou par la Soustraction, ou par la Multiplication, ou par la Division, ou enfin par l'Extraction des racines. Le

R iij

principe de tout cela, c'est qu'à ôtant aux deux membres d'une Equation, ou retranchant également, l'Equation où l'égalité demeure ; comme aussi multipliant ou divisant ces deux membres par une même grandeur, ils demeurent égaux. * L. 3. n. 54. & 55. comme on l'a prouvé. Puisque deux puissances égales ont des raisons égales, il est clair qu'en prenant les racines de deux membres, leur égalité doit subsister.

23. On a fait voir l'utilité des réductions dans les Elemens de Mathematiques. Voyons-en ici quelques exemples. Si $x - 5 = 15$, ajoutant 5 de part & d'autre, viendra cette Equation plus simple $x = 20$. Si au contraire $x + 5 = 20$, en retranchant 5 de part & d'autre, on aura $x = 15$. Si $x - a = b - a$, ajoutant a de part & d'autre, vient $x = b$. De même, si $x + a = b + a$, retranchant a de part & d'autre, vient $x = b$. Si on a cette Equation $\frac{x}{3} = b$, multipliant l'un & l'autre membre par 3, vient $x = 3b$. Comme au contraire, si on a $bx = 3b$, divisant l'un & l'autre membre par b , on auroit $x = 3$. Si $xx = 25$, en prenant la racine quarrée, viendra $x = 5$. Au contraire, si on avoit $\sqrt{x} = 5$, c'est-à-dire, si la racine quarrée de x est égale à 5, en élevant ces deux membres à une même puissance, ou en prenant leur carré, on a cette équation $x = 25$. Si on avoit $xx = ab$, on pourroit mettre $x = \sqrt{ab}$.

24. Ce Theorème, que le carré de l'hypothénuse est égal aux quarrés des deux autres côtés, donne le moyen de réduire une équation à une expression plus simple : Car par exemple, ayant cette expression $aa - bb$, & voulant

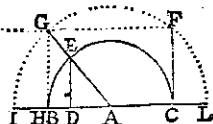
trouver un carré égal à $aa - bb$, je n'ay qu'à prendre la moitié de a , & du milieu où de cette moitié, comme rayon faire un cercle ; ou ayant pris une corde égale à b , menant de son extrémité une ligne à l'autre extrémité de a , qui est le diamètre du cercle, j'ay un triangle rectangle dont a est l'hypothénuse, & b un des côtés ; je nomme c le troisième qui est connu ; donc $aa = cc + bb$: ôtant bb de part & d'autre, vient $aa - bb = cc$; ainsi je puis mettre cc en la place de $aa - bb$, & par conséquent avoir une expression plus simple. Ainsi si j'avois $cc + bb$, joignant ensemble c & b de maniere que ces deux lignes fissent un angle droit ; & achevant le triangle, le troisième côté seroit l'hypothénuse contenue. Cette hypothénuse ayant donc été nommée a , il est évident que $aa = cc + bb$. Au lieu de $cc + bb$, je puis donc substituer aa , expression plus simple.

On peut trouver un carré égal à un plan donné ; pour cela les deux côtés ou racines de ce plan étant b & d , il faut trouver un moyen proportionnel entre b & d . Soit c moyen proportionnel ; alors $bd = cc$. Ainsi je puis transformer le plan bd dans le carré cc . c'est-à-dire, mettre l'un pour l'autre. * L. 4. n. 29. * L. 3. n. 57.

Un carré étant donné, on peut trouver un autre carré qui en soit telle partie qu'on souhaitera, ou la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou le cinquième, &c. Soit le carré aa , il en faut trouver un autre qui soit le quart de aa . Je prens une ligne au hazard, sur laquelle je marque cinq parties égales avec la même ouverture du compas. Soit cette ligne BC , dont BD est une de ces cinq parties ; ainsi DC vaut

R iij

quatre de ces parties. De A milieu de BC , & de l'intervalle de AB ou AC je fais un cercle; & sur D j'éleve la perpendiculaire DE , qui se termine à la circonférence de ce cercle. Alors $\frac{BD}{DE} = \frac{DC}{DE}$.



$L. 4. n.$ $DE \cdot DC = BD^2$. Si BD se nomme b , donc $DC = \frac{b^2}{DE}$; & si $DE = x$, donc $\frac{b^2}{x} = b \cdot x \cdot \frac{1}{4b}$; partant $xx = 4bb$.

Sur C j'éleve CF , une perpendiculaire égale à a racine, ou côté du carré aa dont on cherche la quatrième partie qui soit un carré. Je mène FG une parallèle à BC ; & par le point G , où elle coupe le rayon AE prolongé à l'infini, j'abaisse une perpendiculaire sur BC prolongée de part & d'autre à l'infini. Cette perpendiculaire GH est égale à CF , & par conséquent à a . Je fais un cercle de l'intervalle de AG , dont le diamètre est IL ; il est évident que IH est telle partie de IL que ED est de BC ; par conséquent une cinquième partie: ainsi si IH se nomme m , le reste du diamètre HL sera $4m$.
 $4. n.$ Or $\frac{IH}{HG} = \frac{HL}{HL}$, ou $\frac{m}{a} = \frac{4m}{4m}$; donc
 $3. n.$ $aa = 4mm$. La ligne IH sera par conséquent le côté ou racine d'un carré, quatrième partie du carré a .

7. Ce seul exemple fait comprendre comme on peut trouver un carré qui soit telle partie qu'il sera requis d'un carré donné; ce qui est inutile pour réduire une équation à une expression plus simple; car dans celle-ci $5bx + nn = 5xx$, en divisant ces deux membres par 5; & pour cela trouvant le carré nn cinquième partie de

nn ; je la réduirai à cette expression beaucoup plus simple $bx + nn = xx$. On voit ce qu'il faut faire.

Quand il est question de trouver un carré plus grand ou deux fois, ou trois fois que celui qui est proposé, on voit ce qu'il faut faire.

Il y a une infinité de moyens de réduire les expressions composées à de plus simples & plus nettes: après quoi il ne s'agit plus que de faire évanouir d'une équation certaines grandeurs embarrassantes; & ce qui se peut, ajoutant cette équation avec une autre, dans laquelle se trouvent ces mêmes grandeurs avec un signe contraire, selon ce principe, que plus & moins une grandeur, ce n'est rien. Ainsi, si $x = d - b$ & $x = d + b$; pour faire évanouir b , j'ajoute ces deux équations dans une équation $x + x = 2d$, où b ne paroît plus. Il est facile de faire passer une grandeur d'un des membres d'une équation dans l'autre membre; car dans celle-ci $x - b = d$; ajoutant b de part & d'autre, on aura $x = d + b$ où b se trouve dans le second membre.

Quoiqu'on ne connoisse point les racines d'une équation, c'est-à-dire, les grandeurs de la multiplication desquelles une équation est faite, on peut les augmenter ou les diminuer selon qu'on le juge à propos. Comme si $xx = xd + bb$ dont les racines sont $x + d$, b , x , & qu'on veuille augmenter x de 3, il faut prendre la grandeur y qu'on suppose égale à $x + 3$. Ainsi $y - 3 = x$. Ensuite par tout où sera x mettre $y - 3$; & par tout où se trouvera le carré ou le cube de x , faut mettre le carré ou cube de $y - 3$; après quoi l'équation $xx = xd + bb$ sera transformée en celle-ci,

R v

$yy - 6y + 9 = yd - 3d + bb$ qui est la même. En augmentant ou diminuant une équation, il faut faire en sorte qu'il y ait des signes contraires; & qu'ainsi on puisse faire évanouir les grandeurs dont on veut délivrer une équation. On en verra des exemples

CHAPITRE VII.

30. Les Equations sont d'une ou de plusieurs dimensions ou degrez; & ce sont des degrez qui distinguent les Problèmes.

Selon que la question est proposée, on fait monter les grandeurs inconnues à un degré plus élevé. Lorsque la grandeur inconnue à laquelle on a réduit les autres n'est point multipliée; comme en cette équation $x = d + c$, on dit que cette équation est simple ou d'une dimension. Nous avons vu que lorsqu'il y a plusieurs grandeurs inconnues, on les réduit toutes à une seule. Si par exemple on avoit x & z , & qu'on sût que leur différence fût b ; si x étoit la plus petite, alors $z - b = x$; ainsi au lieu de z on peut mettre $x + b$. Par conséquent si, selon que la question est proposée, on sçavoit que le rectangle de x & de z , ou de x & de $x + b$ est égal au carré de c , on auroit cette équation $xx + xb = cc$, qu'on réduit en ôtant xb de part & d'autre, à celle-ci $xx = cc - xb$, où x est élevé au second degré. S'il y avoit eu trois grandeurs inconnues dans la question, & qu'elles eussent dû être multipliées les unes par les autres; x à laquelle on auroit réduit toutes les autres, seroit montée au troisième degré. Ainsi on voit que les équations sont d'une ou de plu-

sieurs dimensions, ou de plusieurs degrez. Je ne parlerai pas davantage ici des équations qui ont plus de deux degrez, parce qu'on ne les peut pas résoudre avec le compas & la règle, c'est-à-dire, en n'employant que le cercle & la ligne droite.

On réduit les équations de deux dimensions à ces formules $xx = aa - xd$, ou $xx = aa + xd$, & $xx = xd - aa$. Car si $xx = ab - xd$, comme ab est une grandeur connue, en prenant $ab = cc$, $xx = cc - xd$. Si $xx = xd + c$, je puis trouver un carré bb égal à la grandeur c , ainsi que $xx = bb + xd$, je cherche une moyenne proportionnelle entre l'unité, & c , laquelle étant nommée b , il faut que $bb = cc$, ou $bb = c$; puisque une grandeur multipliée par l'unité ne devient pas plus grande après cette multiplication, comme on l'a déjà dit.

C'est une faute considérable en cette matière; de ne pas réduire à un degré inférieur ce qui y peut être réduit. On fait cette faute, lorsqu'entre les grandeurs inconnues d'une question, on ne cherche pas des équations qui conduisent à un degré plus simple.

C'est pour résoudre quelque Problème qu'on cherche des équations, & qu'on tâche de les réduire. La nature de l'équation donne le nom au Problème qu'elle résout.

Quand dans la résolution, l'équation après avoir été réduite, n'a qu'une dimension, comme si $x = b$ ou $x = \frac{ab}{c}$, cette équation est du premier degré, & le Problème est simple.

Lorsqu'on trouve une équation où l'inconnue a deux dimensions, comme $xx = aa + bb$ qui est une équation du second degré, le Problème est nommé *Plan*.

R vj

33. Lorsque l'on trouve une équation élevée au troisième ou quatrième degré, comme $x^3 = aab$ ou $x^4 = a^2b$, qui sont des équations du troisième ou du quatrième degré, le Problème est nommé *Solide*.

Lorsqu'on vient à une équation où l'inconnue est élevée au delà du quatrième degré, le Problème étoit nommé *Lineaire* par les Anciens; mais il est plus naturel de le nommer par le degré auquel l'inconnue est élevée.

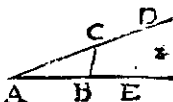
CHAPITRE VIII.

34. De la construction & effectiō Geometrique des Equations, c'est-à-dire, de la maniere d'exprimer avec des Lignes les Quantitez qui s'y rencontrent.

On appelle construction ou effectiō Geometrique d'une équation, les expressions qu'on fait en lignes des grandeurs connues & inconnues d'une équation. La construction des équations d'un degré est facile, puisqu'il ne s'agit que de faire une ligne égale à une grandeur connue. Comme si $x = a$, que a soit d'un pied, il est facile avec la règle & le compas de tirer une ligne d'un pied. Quand le membre connu d'une équation auroit plusieurs grandeurs, comme $a = a + b$, la chose seroit aisée; car on peut réduire l'équation à une expression plus simple, prenant une grandeur égale à ces deux grandeurs. On peut prendre deux différentes lignes, & les joindre. Quelquefois on ne cherche pas la valeur d'une grandeur, mais celle de son quotient, divisée par d'autres grandeurs; par exemple $x = \frac{ab}{c}$; pour exprimer cela Geome-

triquement, c'est-à-dire, construire ou faire une figure qui exprime cette équation, il faut remarquer que ces lettres marquent des grandeurs proportionnelles entr'elles; car si $a : a :: b : x$, la seconde a étant multipliée par la troisième b , & leur produit ab divisé par c la première, le quotient de la division $\frac{ab}{c}$ fera x le quatrième

proportionnelle; ainsi $x = \frac{ab}{c}$. Pour exprimer, cela geometriquement, ayant pris AB égale à c , & AE égal à b , sur B j'éleve BC que je fais égale à a , & de A par C je mene une ligne; ensuite sur E j'éleve une parallèle à BC ou à a , que je nomme x . Ces quatre lignes $AB, BC :: AE, x$ sont proportionnelles; ainsi $\frac{BC \times AE}{AB}$, ou $\frac{ab}{c} = x$.

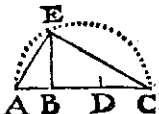


De même pour exprimer geometriquement $\frac{aa + ab}{c + d} = x$, comme ces grandeurs connues se peuvent réduire à cette proportion $c + d : a + b :: a : x$, la même figure exprime cette équation; trois lignes étant données on trouve une quatrième proportionnelle, qui est la valeur de x .

Lorsque les grandeurs connues d'une équation ont un signe radical, on peut de même l'exprimer geometriquement. Si par exemple, fig. suiv. $x = \sqrt{ab}$, en tirant AB une ligne égale

à a , & la prolongeant jusques à C , de sorte que $BC = b$, & du milieu de AC comme centre faisant un cercle, la perpendiculaire BE sera la valeur de x ; car $\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{BC}$, ou $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$; ainsi $ab = xx$; donc $ab = x^2$.

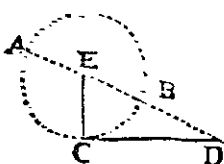
37. On peut aussi faire la construction de cette équation $x = \frac{bb}{a-b}$, & l'exprimer en cette maniere. AD étant pris égal à a , & AB à $a - b$; ainsi BD étant égal à b , j'éleve sur B une perpendiculaire égale à BD ou b , je mene de A à E une ligne droite; & sur AB au point E une perpendiculaire, savoir EC qui coupe le prolongement de AD : Alors l'angle CEA est droit; ainsi ayant décrit un cercle par les trois points A, E, C , il est évident que $\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{BC}$, ou que $\frac{a-b}{x} = \frac{x}{b}$. b, x , j'appelle x la valeur de BC . Donc bb .



*L. 3. n. divisé par $a - b$ est égal à x ; ainsi $\frac{bb}{a-b} = x$.

38. La construction des équations de deux degrés, est pareillement facile. Les équations de deux degrés ou de deux dimensions se réduisent, comme nous l'avons vu à ces formules, $xx = ax + bb$, ou $xx = ax - bb$, ou $xx = bb - ax$.

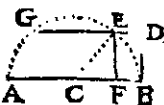
1°. Pour faire la construction de $xx = ax + bb$, ou $xx = bb - ax$. Sur CD une ligne droite, que je suppose égale à b , j'éleve CE une per-



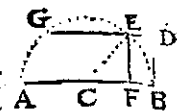
pendiculaire que je suppose égale à la moitié de a , & de l'intervalle de cette moitié, comme rayon, je fais un cercle, & je mene par E son centre la ligne DE . Puisque CE est la moitié de a , donc $AB = a$. Soit $BD = y$, & $AD = x$. donc $a + y = x$; donc $ax + xy = xx$. Or $\frac{L. 3. n.}{L. 4. n.}$ puisque CD ou b est une tangente, donc $\frac{b}{y} = \frac{x}{b}$, b, y , donc $xy = bb$. Ainsi dans cette équation $xx = ax + xy$, substituant bb en la place de xy , qui est la même chose, on aura cette équation $xx = ax + bb$ dont on a fait ainsi la construction.

2°. Pour faire la construction de cette équation $xx = bb - xa$, on fait la même chose. On suppose CD (*même figure*) égale à b , & CE égale à la moitié de a ; mais on suppose que BD est égale à x . Alors $\frac{L. 3. n.}{L. 4. n.}$ AD ou $a + x$. CD ou b . BD ou x : donc $ax + xx = bb$. En ôtant de part & d'autre ax , vientra $xx = bb - ax$, qui est l'équation dont il falloit former la construction.

3°. La construction de cette équation $xx = ax - bb$, se fait ainsi. Soit AB égale à a , de l'intervalle BC moitié de AB je fais un cercle; j'éleve sur B la perpendiculaire BD égale à b ; je mene par D la ligne DG parallèle à AB . Si cette parallèle ne coupe pas le cercle, parce que b est égale ou plus grande que le rayon du cercle égal à la moitié de a , c'est une preuve que xx n'est pas égal à $ax - bb$, puisque b est trop grand au regard de x . Soit donc b plus petit que BC , ainsi DG , coupe le cercle en E , par conséquent EF que je suppose perpendiculaire, est égale



* L. 1. n. à BD*. Je nomme x la ligne AF , & y la ligne FB .
 65. Il est évident* que $\frac{xy}{x+y} = \frac{AF \cdot FB}{AF+FB}$.
 29. ou x , FE ou b , FB ou y .
 * L. 3. n. Ainsi $\frac{xy}{x+y} = \frac{x \cdot b}{x+b}$: donc
 57. $xy = bb$. Or on a supposé AF ou x , plus FB ou y égal à a ; donc $x+y = a$. En multipliant cette équation par x , on a cette équation $xx + xy = ax$; plaçant bb en la place de xy qui est la même chose, comme on vient de voir, on a $xx + bb = ax$; & retranchant bb de part & d'autre, on aura $xx = ax - bb$. Ainsi on a fait la construction de cette équation.



41. Par le moyen de cette construction on trouve en ligne la valeur de la grandeur inconnue ; ce qui se trouve encore plus facilement en réduisant dans une progression de trois termes, les trois formules précédentes. 1°. Cette équation $xx = ax - bb$ se réduit à cette progression $\frac{xx}{x} = \frac{ax - bb}{1}$; car $xx - ax = -bb$, ajoutant ax de part & d'autre, on a l'équation dont il s'agit, $xx = ax - bb$.

42. 2°. Cette équation $xx = ax - bb$ se réduit à cette progression $\frac{xx}{x} = \frac{ax - bb}{1}$. Car $ax - bb = xx$, ajoutant xx de part & d'autre, on a $ax - bb + xx = xx + xx$; ôtant bb de part & d'autre, on a $ax - bb = xx$, qui est l'équation dont il est question.

43. 3°. Cette équation $xx = bb - ax$, se réduit à cette progression $\frac{xx}{x} = \frac{bb - ax}{1}$; car $xx + ax = bb$, ôtant de part & d'autre ax , on a cette équation $xx = bb - ax$ dont il s'agissoit.

Dans ces trois progressions, b le terme moyen est connu ; & dans la première & dans la troi-

sième, on connoit la différence des extrêmes qui est dans la première $-a$, & dans la troisième $+a$. Dans la seconde, on connoit la somme de deux extrêmes. Avec cela, comme on le va voir dans les trois Problèmes suivans, on peut connoître tous les termes de ces progressions.

PROBLÈME I.

Soit cette progression de trois lignes $\frac{z}{x} = \frac{b}{y}$ 44.

On connoit la moyenne b , & que a est égal à la somme de x & de z les extrêmes, connoître les extrêmes.

Je prens AB égal à a , somme des extrêmes. De C , milieu de AB , comme centre, & de l'intervalle AC ou CB je fais un cercle. Sur B j'éleve perpendiculairement BD égale à la moyenne b ; & par le sommet D je mène DG (même figure que ci-dessus) parallèle à AB , & de E où DG coupe le cercle, j'abaisse FE une perpendiculaire sur AB , qui est égale à BD , ainsi $EF = b$; donc puisque $\frac{z}{x} = \frac{b}{y}$, les extrêmes seront AF & FB ; ainsi si z est le grand extrême, FB qui est le petit extrême, sera égal à x .

PROBLÈME II.

Soit cette progression de trois lignes $\frac{z}{x} = \frac{b}{y}$ 45.

x , ou $\frac{z}{x} = \frac{b}{y}$, la moyenne b est connue, & la différence des extrêmes $x + d$ & x , connoître la valeur de x .

Je fais AB égale à d ; & sur B j'éleve perpendiculairement BD égale à b , ensuite de C moitié de AB , & de l'intervalle CD je fais un cercle. Je prolonge AB



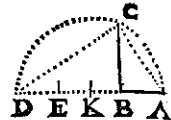
de part & d'autre jusqu'à la circonférence du cercle, après quoi AE ou $BF = x$, car $\frac{z}{x} = \frac{b}{y}$.

Si la progression est $\frac{z}{x} = \frac{b}{y}$, $x = d$, b , x , il faut faire la même chose, mais en ce cas où $x = EB$, le plus petit terme est BF égal à $EB - AB$, ou à $x - d$. Il est évident que la différence de $x - d$, & de x est d . Quand le signe est $+$, la grandeur x est EA à laquelle on ajoute la différence d , pour avoir le plus grand extrême. Quand le signe est $-$, on retranche d de EB ou FA qui est la valeur de x .

PROBLÈME III.

46. Soit cette progression de trois lignes $\frac{z}{x} = \frac{b}{y}$; d , la moyenne b étant connue, connoître la différence des extrêmes $d + x$ & d , laquelle est x .

Sur B extrémité de AB égale à d , j'éleve perpendiculairement BC égale à b , par A & C je mène une ligne droite sur laquelle au point C je fais une perpendiculaire qui est CD ; ainsi l'angle ACD est droit. Je prolonge AB jusqu'à ce qu'elle coupe CD , la ligne BD , après en avoir ôté AB , sera égale à x ; car ayant coupé AD par la moitié au point K , & de l'intervalle AK ou KD fait un cercle, ce cercle passera par C ; ainsi $\frac{AB}{d} = \frac{BC}{b}$ ou $\frac{BC}{b} = \frac{AB}{d}$, partant $BD = d + x$ qui est le troisième terme ; ayant donc retranché de BD la ligne DE égale à AB , le reste sera égal x dont on cherchoit la valeur.



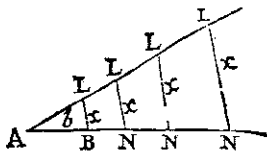
CHAPITRE IX.

De la construction ou effection Geometrique, qui est un Lieu. Qu'est-ce que ce Lieu ? Quand est-ce qu'un Problème est un Lieu ? Définition des Problèmes selon cette considération. 47.

Dans les constructions ou effections Geometriques des Equations on cherche ordinairement une ligne droite ou courbe, ou une superficie, dont tous les points aient un même rapport aux points d'une même ligne droite à l'égard de l'un de ses points. Une ligne droite, une ligne courbe, une superficie ne sont pas distinguées des points, par lesquels elles passent ; au lieu par un lieu Geometrique il faut entendre le passage, ou les points, par le quels passe la grandeur qu'on cherche. Une construction ou effection Geometrique est donc un lieu, si ce n'est pas seulement un point qu'on propose de trouver, mais une suite de plusieurs points, qui comparez avec un certain point & une certaine ligne droite, aient entr'eux les mêmes rapports. Et alors l'équation, qui exprime ces rapports, s'appelle un Lieu ; & le Problème qu'on entreprend de résoudre, est aussi un Lieu. Il y a plusieurs sortes de lignes ; il y a aussi plusieurs sortes de lieux des cercles, des lignes droites & courbes de différentes especes. On dit ainsi d'un Problème, qui est un Lieu, que c'est ou à l. ligne droite, ou au cercle, ou à quelque espece de ligne courbe.

Les Problèmes, qui sont indéterminés, sont des Lieux ; car ils peuvent avoir plusieurs différentes résolutions. Voyons-en des exemples ; & comme toutes les résolutions s'expriment par une

seule Equation, commençons par un lieu qui soit une ligne. La ligne LL en sera un, si l'on peut mener de tous les points les lignes LN , LN par. leles, qui rencontrent une ligne droite AN ; & ayant pris sur la ligne



AN un point A à volonté, chaque ligne LN a un même rapport à la partie AN , qu'elle fait par sa rencontre. Par exemple, si la ligne LL est droite, & qu'elle rencontre la ligne droite AN en A , il est évident que chaque ligne droite LN a un même rapport à chaque partie AN ; ce qui se peut exprimer par cette équation $y = \frac{bx}{a}$. Si je suppose que le rapport proposé est

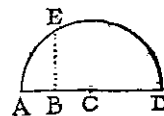
comme de a à b , & que les lignes indéterminées soient $LL = x$, & $NN = y$; car puisque $a : b :: x : y$; donc le produit de b par x , qui est bx divisé par a , fera la valeur de y ; ainsi $y = \frac{bx}{a}$. Cette équation marque que ce lieu est une

ligne; car il n'y a qu'elle qui ait cette propriété, que toutes les lignes qu'on tirera de AL sur AN , seront toutes à AN comme a est à b ; ainsi vous voyez que le Problème où il s'agit de trouver EL est un lieu; qu'ainsi ce Problème est indéterminé, étant capable de différentes résolutions; & ce lieu ne peut être qu'une ligne droite: car il n'y a que celle dont LL occupe la place, qui ait les propriétés de la ligne droite.

49. Un Problème est un lieu à un cercle, & il est indéterminé, quand on propose de trouver une

ligne dont le carré soit égal à un plan; car alors il faut de nécessité supposer des grandeurs connues, comme par exemple que les côtés du plan soient a & b ; que $AB = a$, & $BD = b$. $AD = a + b$, & $AC = CD$.

Sur C comme centre je fais un cercle, & sur B la perpendiculaire BE , alors $\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{BD}$; donc $ab = BE^2$; ainsi si $BE = x$,



donc $ab = xx$ ou $\frac{ab}{x} = x$. Ce Problème est in-

déterminé: car quelque raison que je suppose entre les parties de AD , le carré de la ligne qui tombera perpendiculairement entre les deux points A & D , aura toujours son carré égal au plan des parties de AD , c'est-à-dire, que $ab = xx$, ou $\frac{ab}{x} = x$. Ce Problème peut donc avoir une infinité de résolutions. Voyez que pour trouver une équation, il a fallu supposer des lignes connues AB & BD , autrement on ne l'aurait pu finir.

Il n'y a que le cercle, qui dans toutes ses parties ait toujours cette équation.

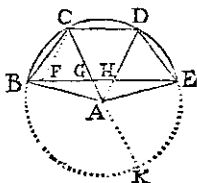
C'est ainsi que par les équations on connoît la nature de toute ligne droite & courbe, pourvu qu'elle se puisse faire par un mouvement régulier & uniforme. C'est à connoître la nature des lignes courbes, que sert la doctrine des lieux; ainsi c'est une matière qui ne nous regarde pas.



CHAPITRE X.

50. On ne peut exprimer Geometriquement avec la règle & le compas, que les équations simples, ou qui ne sont que de deux degrés, on ne peut donc pas avec la connoissance de ces Elémens, résoudre les Problèmes solides.

ON vient de voir comment on peut résoudre avec le compas & la règle, c'est-à-dire, en tirant les lignes droites & faisant des cercles, les équations qui sont d'un ou de deux degrés. Cela ne se peut pas, quand elles en ont davantage. Voyons-le dans un exemple. Le Problème de la trisection de l'angle est fameux. Un arc de cercle étant donné, on propose de le couper en trois parties égales, & par conséquent trouver une troisième partie de l'angle proposé, dont la troisième partie de cet arc soit la mesure. La corde BE de l'arc LC



DE est connue. On propose de couper cet arc en trois égales. Selon les règles de la méthode, je suppose la chose faite, c'est-à-dire, que $BC = CD = DE$; je mène CF parallèle à DH ; ainsi $CF = DH$; & puisque $CG = DH$, partant $CF = CG$; ainsi le triangle FCG est un isocèle. Les angles BCG & BGC sont égaux; car la mesure de BCG est la moitié de l'arc BK , & celle de BGC est la moitié de KE , plus la moitié de BC ou de DE égal à BC . Or

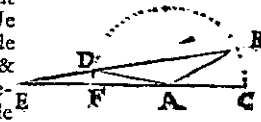
* L. 2. n. 39. & 52.

BK est égal à KD ; donc ces deux angles qui ont même mesure sont égaux: partant le triangle CGK est isocèle. Il a un angle commun avec FCG ; ces deux isocèles sont donc semblables. BAC est aussi isocèle, & il a un angle commun avec BCG , savoir BCG ; ces trois triangles sont donc semblables.

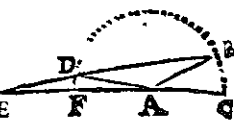
Ces trois triangles BAC , CBG , FCG étant semblables, il faut que $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CG} = \frac{CG}{GF}$, donc si $AB = 1$ & $BC = z$, selon ce qui a été dit ci-dessus*, $\frac{1}{z} = \frac{z}{zz}$, donc $FG = \frac{1}{3}z$, 21. zzz . Je nomme b la ligne connue BE ; or $CD = FH = BC = BG = HE$, donc $BG + FG + GH + HE$ est le triple de BC ; ainsi il ne s'en faut que la valeur de FG que BE , ou b ne soit triple de BC . Or $FG = \frac{1}{3}z$, donc $b + \frac{1}{3}z = 3z$, ou $zzz = 3z - b$.

Voilà jusqu'où nous pouvons pousser ici ce Problème, mais vous voyez que nous n'avons rien dans les Elémens précédens dont on puisse tirer un moyen pour connoître la grandeur inconnue z , sachant seulement que son cube zzz est égal à trois fois elle-même, c'est à dire, à $3z$, après en avoir retranché la grandeur connue b .

Ce Problème se résout aisément par des voyes mécaniques. Soit l'arc BC , mesure de l'angle BAC , qu'il faut couper en trois. Je prolonge vers E le diamètre CF , & appliquant une règle sur B , & sur le prolongement de CF , je cherche le point D dans le cercle tel que la ligne AD soit égale à DE ; l'ayant trouvé



en raisonnant, je dis que l'arc DF sera le tiers de BC, ou que DAF est le tiers de BAC ; ce que je démon-



trre. ADE & DAB sont isocèles : donc DBA = BDA, & DAE = DEA : l'angle BDA extérieur, est égal aux deux intérieurs DEA & DAE ; donc DBA est égal à ces deux mêmes angles, & par conséquent il est double de l'un & de l'autre. L'angle BAC extérieur est aussi égal aux deux intérieurs DEA (ou son égal DAF) & à DBA, partant il est triple de DAF moitié de DBA ; ce qu'il falloit démon-

trer. J'aurois pu ajouter plusieurs choses touchant les Equations ; mais ce que j'ai dit suffit, car pour faire usage de ce qu'on en peut dire de plus, il faut avoir étudié les Elémens des lignes courbes.

CHAPITRE XI.

52. *Essais de la methode sur quelques Problèmes.*

ON peut tenter la resolution d'un Problème par deux voyes ; La premiere n'est qu'une application des Elémens, qui font découvrir quelque moyen particulier au Problème dont il s'agit, & qui ne peut pas servir dans un autre. La seconde voye est l'ordre que prescrit la methode que nous enseignons ici, selon laquelle on trouve ce que l'on cherche d'une maniere d'autant plus excellente, qu'elle s'étend généralement

470 *Elémens de Geometrie*

sur ax , & il vient $aa = dx + ax$; je suppose $c = d + a$, ainsi $cx = dx + ax$; & par conséquent au lieu de $dx + ax$, mettant cx j'ai $aa = cx$; donc $\frac{a}{c} = \frac{x}{a}$; ainsi il ne s'agit que de trouver une troisième proportionnelle aux deux lignes connues c & a ; ce qu'on a enseigné *. Cette seconde maniere analytique est générale, & n'est point particuliere à ce Problème.

PROBLÈME II.

55. Connoître chaque côté du triangle ABC, connoissant la somme de chacun de deux de ses côtés.

Soit $AB = x$, & $AB + BC = a$, & $AB + AC = b$, & $BC + AC = c$; alors $BC = a - x$, & $AC = b - x$. Or $AC + BC = c$; donc $a - x + b - x = c$, ou $a + b - 2x = c$. Donc ajoutant $2x$ de part & d'autre, on aura $a + b = c + 2x$. Orant c de part & d'autre, on aura $a + b - c = 2x$.

Ainsi pour trouver la valeur de x , il faut joindre les deux lignes a & b , retrancher du tout la ligne c ; la moitié de ce qui reste sera la valeur de x .

PROBLÈME III.

56. a est un des côtés d'un triangle rectangle, x est l'autre côté, dont la difference avec l'hypothénuse est b , trouver la valeur de b .

L'hypothénuse est $x + b$; Donc $aa + xx = x + 2bx + bb$ *. Orant xx de part & d'autre ; $aa = 2bx + bb$; retranchant encore bb , on aura $aa - bb = 2bx$; prenant $cc = aa - bb$ *, on aura $cc = 2bx$. Donc $\frac{cc}{2b} = x$; il ne s'agit donc que de trouver une troisième

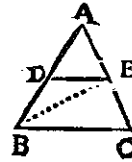
ement à tout Problème. Donnons un exemple de ces deux voyes.

PROBLÈME I.

BAC est un isocèle, on propose de couper les côtés AB, AC par une parallele à la base BC ; de sorte que cette parallele soit égale à ce qui reste des côtés, c'est-à-dire, (je suppose la chose faite) que $DB = DE$.

Premiere maniere.

Je suppose la chose faite, sçavoir que $BD = DE$, donc le triangle BDE est isocèle ; ainsi les angles DBE, & DEB sont égaux. Or les angles CBE & EBD sont aussi égaux * ; partant EBC & EBD sont égaux ; partant la ligne BE coupe par la moitié l'angle DEC. D'où je connois que dans un triangle isocèle, tel que BAC, en divisant en deux l'angle ABC par une ligne droite BE, & menant par E une parallele à BC, elle sera égale à EB ; ainsi par cette propriété du triangle isocèle, je trouve le moyen de résoudre le Problème proposé ; mais, comme vous voyez, ce moyen est particulier & propre à ce seul Problème.



Seconde maniere.

Supposant la chose faite, je nomme a la ligne AB qui est connue, & d la base BC aussi connue, & x la grandeur inconnue AE que l'on cherche ; ainsi comme $EC = a - x$, aussi $DE = a - x$, il est évident que $a : d :: x : a - x$, donc $aa - ax = dx$. J'ajoute de part & d'autre x

Livre VI. Chapitre XI. 410

proportionnelle aux deux grandeurs connues a & c .

PROBLÈME IV.

57. a est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, & b la difference des deux côtés, trouver ces côtés.

Soit nommé x le plus petit côté ; donc le plus grand est $x + b$; ainsi $aa = xx + 2xb + bb$. Je retranche bb de part & d'autre, & j'ai $aa - bb = 2xx + 2xb$, ou $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = xx + xb$. Je mets en la place de $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$, le carré cc que je lui trouve égal *. J'ai donc $cc = xx + xb$, ou $cc - bx = xx$; ainsi $\frac{cc - bx}{x} = x + b$. $c : x$. On trouvera donc la valeur de x *. On trouvera donc la valeur de x *.

PROBLÈME V.

58. a est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, & b la somme des deux côtés, trouver ces côtés.

Soit nommé x un de ces côtés ; donc l'autre sera $b - x$; ainsi $aa = bb - 2bx + xx$. J'ajoute $2bx$, ainsi $2bx + aa = bb + xx$. Je retranche encore bb , & j'ai $2bx + aa - bb = xx$. Je mets dd en la place de $aa - bb$, que j'ai trouvé égal * : donc $2bx + dd = xx$. Je divise le tout par 2, pour cela je cherche cc égal à la moitié de dd ; ainsi $bx + cc = xx$; donc $\frac{cc}{x} = x - b$. Je puis donc trouver la valeur de x *.

PROBLÈME VI.

59. a est l'aire ou superficie d'un parallelogramme

Elémens de Geometrie.

rectangle, x son petit côté, & $x + b$ le plus grand; on cherche ces deux côtés.

Le produit de x par $x + b$ est l'aire de ce parallélogramme; donc $xx + xb = aa$ ainsi $\therefore x. a. x + b$. Ce Problème se résout par conséquent comme le précédent.

PROBLEME VII.

60. x est le plus grand côté d'un triangle rectangle; sa différence avec l'hypothénuse est a , qui est ainsi $x - a$. La différence de cette hypoténuse avec l'autre côté, qui est plus petite qu'elle, est b ; ainsi ce côté est $x + a - b$. On cherche ces trois côtés.

Les quarrés des deux côtés x & $x + a - b$ sont égaux à celui de l'hypoténuse, laquelle est $x - a$; ainsi $xxx + 2ax - 2bx - 2ba + aa + bb = xx + 2ax + aa$. J'ajoute de part & d'autre $2ba$, & j'ay $xxx + 2ax - 2bx + aa + bb = xx + 2ax + aa + 2ba$. Je retranche de part & d'autre $xx + 2ax + aa$; & j'ay $xx - 2bx + bb = 2ba$. Je retranche $+bb$, & j'ay $xx - 2bx = 2ba - bb$, prenant d'égal à $2b$ & cc égal à $2ba - bb$, j'ay $xx - dx = cc$; ainsi $\therefore x. c. x - d$. Ce qui se résout ainsi.

* 5 n. 38. sèment*.

64.

PROBLEME VIII.

61. b est la perpendiculaire tirée de l'angle droit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle; a est la différence des deux parties ou segments de l'hypoténuse, trouver ces segments.

Soit x le plus petit segment; donc le plus grand sera $x + a$. Or $\therefore x + a. b. x$. Donc

Libre VI. Chapitre XI.

Le Problème se résout comme on l'a enseigné*.

PROBLEME IX.

- La ligne AB est coupée dans un de ses points, comme C , on propose de la prolonger jusqu'à D ; de sorte que le rectangle fait de AD & de BD soit égal au quarré de CD .

Je suppose la chose faite. Soit $AC = a$, & $CB = b$, & $BD = x$. Il est question de trouver la valeur de BD , ou de x ; je multiplie AD ou $a + b + x$ par BD , c'est-à-dire, par x , ce qui fait $ax + bx + xx$, lequel produit selon la question est égal au produit de CD ou de $b + x$ multiplié par lui-même; c'est-à-dire, que $ax + bx + xx = bb + 2bx + xx$. J'ôte des deux membres de cette équation $bx + xx$, & il reste $ax = bb + bx$; je fais passer bx de l'autre côté, afin que la grandeur connue bb reste toute seule, & j'ay $ax - bx = bb$. Pour réduire cette equation aux plus simples termes, je la divise par $a - b$, & alors $x = \frac{bb}{a - b}$. La



quelle équation se résout dans cette progression $\therefore a - b. b. x$, dont les deux premiers termes étant connus, le troisième que je cherchois, qui est x , me sera aussi connu; ainsi pour faire le Problème il faut prolonger la ligne AB de la grandeur x qu'on vient de connoître.

La résolution de chaque Problème, donne la connoissance d'un nouveau Theorème: Car selon ce qui vient d'être prouvé, le quarré de BD , prolongement d'une ligne, plus CB partie de

S iij

Elémens de Geometrie.

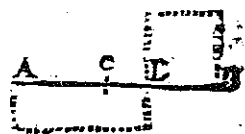
cette ligne, est égal au rectangle fait de AD & de BD , & ce prolongement est le troisième terme d'une progression, dont $AC = BC$ est le premier terme, & BC le second. La plus grande partie des Theorèmes sont les fruits de l'analyse, qui comme vous voyez, est une source seconde de vérités.

PROBLEME X.

63. La ligne AB est coupée en C . On propose de la couper de rechef en D ; de sorte que le rectangle de $AC + DC$ par CD , soit égal au quarré de DB .

Je suppose la chose faite. Il faut trouver la valeur de CD . Soit $AC = a$, & $CB = b$, & $CD = x$; ainsi $DB = b - x$. Le rectangle de ACD par CD est

$ax + xx$, & le quarré de DB est $bb - 2bx + xx$; donc selon la question $ax + xx = bb - 2bx + xx$. Je retranche xx de part & d'autre, & $ax = bb - 2bx$. Je fais passer $2bx$ de l'autre côté, afin que le connu soit seul, $ax + 2bx = bb$; je divise cette équation par $a + 2b$,



il vient $x = \frac{bb}{a + 2b}$, je réduis cette égalité en proportion $\therefore a + 2b. b. x$, les deux premiers termes sont connus, donc x le sera aussi; ainsi en prenant sur CB la ligne CD égale à x , on aura fait ce qui étoit requis.

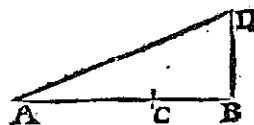
PROBLEME XI.

64. La ligne droite AB est coupée en C , la ligne BD infinie est perpendiculaire sur AB : il faut de

Libre VI. Chapitre XI.

A mener AD une ligne sur BD , de sorte que $AD = BC + BD$.

Je suppose la chose faite, & que $AB = a$ & $BC = b$, & $BD = x$ valeur que l'on cherche. Selon la question $AD = BC + BD$, partant $AD = b + x$. Or puisque l'angle ABD est droit, le quarré de AD ou de $b + x$, lequel quarré est $bb + 2bx + xx$ est égal à ceux de



AB , & de BD , qui sont aa & xx . Ainsi $bb + 2bx + xx = aa + xx$, ôtant de part & d'autre xx , il vient $bb + 2bx = aa$. Afin que l'inconnu soit tout d'un côté, faisant changer de place à bb , nous aurons $2bx = aa - bb$, que je divise par $2b$, & j'ay $x = \frac{aa - bb}{2b}$, laquelle équation se réduit ainsi

dans cette proportion $2b. a + b :: a - b. x$ dont les trois premiers termes étant connus, le quatrième x sera connu: ce que l'on cherchoit;

PROBLEME XII.

- Deux lignes paralleles AB & CD , sont données par position avec CF , comme aussi les points F & E . On propose de mener ED coupant AB & CD prolongées au besoin, de sorte que AB soit à ED , comme AF est à AG .

Soit $AF = a$, $CF = b$, $CE = c$, $AG = d$, & $AB = x$.

S iij

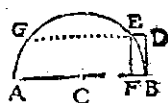
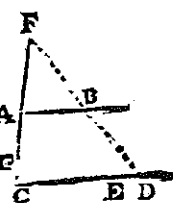
Nous supposons la chose faite : partant, selon l'hypothèse $a, d :: x$. ED . Multipliant donc x par d , & divisant le produit qui est dx par a , le quotient $\frac{dx}{a} = ED$. Les deux triangles AFB & FCD sont semblables ; $a, x :: b, CD$. Or $CD = CE + ED$, & partant $CD = c + \frac{dx}{a}$.

Le produit des extrêmes a & $c + \frac{dx}{a}$, qui est $ac + dx$ est égal à celui des moyens : Donc $ac + dx = bx$. Je transporte $+dx$, & vient $ac = bx - dx$. Je divise cette équation par $b - d$, & j'ay $x = \frac{ac}{b-d}$ laquelle équation se réduit en cette proportion $b - d, c :: a, x$, donc les trois premiers termes sont connus.

PROBLEME XIII.

66. Mesurer une hauteur inaccessible AB , & la distance AC par le moyen de deux bâtons CD , & EF .

Je suppose que $AC = x$, $AB = y$, $CE = b$, $GD = a$, & $FH = c$; alors puisque les triangles BAF & GDF sont semblables, $AB, GD :: FA, FG$; mais $FA, FG :: FI, FK$, à cause des parallèles GD, BA ; donc $AB, GD :: FI, FK$, on leurs égales AE & CE , ainsi $y, a :: x + b, b$, par conséquent $by = ax + ab$.



Les deux triangles BHF & EGD sont semblables ; donc comme BD est à BF , ou IK à IF , ou AC à AE , de même GD est à HF ; ainsi $AC, AE :: GD, FH$, ou $x, x + b :: a, c$, partant $xc = ax + ab$; d'où ax de part & d'autre, il reste $xc - ax = ab$, divisant l'un & l'autre membre par $c - a$, on a $x = \frac{ab}{c-a}$; ainsi $c - ax :: b, x$. On connoît les trois premiers termes de cette proportion ; donc x le quatrième que l'on cherche sera aussi connu.

Puisque l'on a trouvé ci-dessus que $by = ax + ab + xc = ax + ab$; il s'ensuit que $by = cx$; étant égaux à la même grandeur $ax + ab$, partant $b, c :: x, y$. Or x est déjà connu : donc les trois premiers termes étant connus, on connoît le quatrième terme y que l'on cherche.

PROBLEME XIV.

Deux Marchands ont mis en Société 12 livres ; & ont gagné 34 livres ; le premier a pris 7 livres, tant pour mise que pour gain pour deux mois ; le second a pris 39 livres, tant pour mise que pour son gain pour cinq mois. On demande la mise & le gain d'un chacun en particulier.

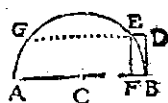
S 7

La mise des deux, 12 = a . La mise du premier soit x ; ainsi celle du second est $a - x$.

La mise & gain du premier est 7 = b : donc $b - x$ sera le gain du premier.

La mise & gain du second est 39 = c : donc $c - a + x$ sera le gain du second.

Or comme la mise du premier multipliée par son temps est à son gain ; ainsi la mise du second multipliée par son temps est à son gain ; c'est-à-dire, $2x, b - x :: 5a - 5x, c - a + x$. Le produit des extrêmes est égal à celui de ceux du milieu ; donc $2xc - 2ax + 2xx = 5ab - 5ax - 5bx + 5xx$; & ajoutant de part & d'autre $2ax$ & retranchant en même-temps $2xx$, on aura $2xc = 5ab - 3ax - 5bx + 3xx$; j'ajoute de part & d'autre $3ax + 5bx$, ce qui me donne $2xc + 3ax + 5bx = 5ab + 3xx$. Je suppose que $d = 2c + 3a + 5b$; ainsi $dx = 5ab + 3xx$; je prens aussi $f = 5ab$, que je retranche de part & d'autre, & j'ay $dx - f = 3xx$. Ensuite pour réduire cette équation dans une formule qui me donne la résolution de la question, je suppose $d = 3g$ & $f = 3h$; ainsi $gx - h = xx$, je trouve un carré égal à h , que je nomme l , partant $gx - l = xx$; laquelle équation se réduit à cette progression $g - x, l, x$, car $gx - xx = l$, & par conséquent $gx = l + xx$, & $gx - l = xx$. Les extrêmes de cette progression sont $g - x$ & x , dont g est la somme. On trouve leur différence si sur $AB = g$ ayant décrit le cercle AGB , on élève perpendiculairement $BD = l$, & l'on tire de EG parallèle à AB , & du point F la perpendiculaire EF qui coupera AB aux



point cherchez. Le grandeur inconnue que l'on cherchoit est x . Or comme dans ce Problème on cherche la valeur de x en nombre, il faut du carré de CE ou CB , moitié de AB , somme des extrêmes connus, ôter le carré $FE = l$ aussi connu, il restera le carré de CF , moitié de la différence des extrêmes, dont la racine ajoutée à CB donnera le plus grand ; & en étant ôté, le plus petit $x = 3$, mise du premier ; après quoi tout le reste est facile.

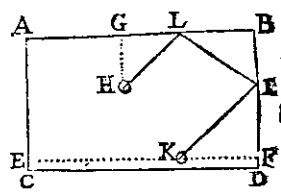
AVERTISSEMENT.

On va voir dans les deux Problèmes suivants l'usage qu'on peut faire de la méthode qu'on vient d'enseigner pour résoudre des Problèmes ; qui sembleroient ne point appartenir à la Géométrie, dont cependant la résolution en dépend.

PROBLEME XV.

Soit le Billard ABCD. Qu'il faille toucher la Bille H par deux bricoles, avec la Bille K.

L'angle incidence & de réflexion sont égaux ; suivant ce principe, on suppose que K poussée au point I doit réfléchir vers L & de L à H . C'est donc ce point I qu'on demande. Ayant mené par K la ligne EF , parallèle au côté CD ; & par l'autre point H , la ligne GH parallèle à BD . Soit $KF = a$, $FB = b$, $EG = d$, $GH = f$, & $FI = x$: donc $BI = b$, $EG = d$, $GH = f$, & $FI = x$: donc $BI = b$ S 7



— x . Les triangles KFI & IBL étant semblables, $a :: b - x$. BL . Donc $BL = \frac{ab - ax}{x}$, & en corrigeant

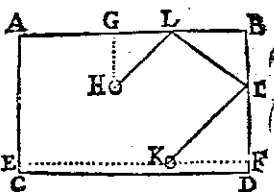
cette expression $BL = \frac{ab}{x} - a$. Or $GB - BL = OL$: étant donc $\frac{ab}{x} - a$ de d , on aura $GL = d + a - \frac{ab}{x}$.

Les triangles KFI & LGH sont semblables : donc $a :: d + a - \frac{ab}{x}$. f : donc $af = dx + ax - ab$: donc ajoutant ab de part & d'autre & divisant par $d + a$, on aura $\frac{af + ab}{d + a} = x$; & remettant cette équation en proportion, on aura $d + a :: f + b :: a :: x$, c'est à dire, que FI est une quatrième proportionnelle à ces trois lignes $BG + KF$, $GH + FB$ & KF ; elles sont connues : partant FI qu'on cherchoit le sera ; ainsi le point I .

Si on voit donc que la Bille K aille par deux bricoles toucher la Bille H , il faut frapper K de manière qu'elle aille à I , d'où elle réfléchira à L & de L à H ; ce qui étoit proposé.

PROBLEME XVI.

69. Deux points ou deux lieux étant donnez avec

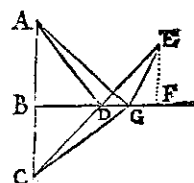


un plan éloigné de ces deux points, l'on demande un point sur ce plan, où il faut aller pour arriver d'un lieu à l'autre par le chemin le plus court.

Or ce qui revient au même :

Un objet lumineux étant donné avec un miroir, & un œil hors de ce miroir, trouver le point de reflexion.

Soient les points A & E donnez ; & soit aussi le plan BF . On demande sur ce plan le point D tel que la ligne AD plus DE soit la plus courte de toutes les autres menées de ce point à ce plan, par exemple plus courte que $AG + GE$:



Première manière.

Soit menée la perpendiculaire AB prolongée jusqu'en C , en sorte que $AB = BC$. Et soit du point E menée la ligne CE ; je dis que le point D est celui qu'on cherche : car les deux triangles ABD & DCB sont égaux, aussi-bien que les deux ABG & CBG : donc $AD + DE = CD + DE$, & $AG + GE = CG + GE$.

Mais $CD + DE$ est une ligne droite : donc elle est plus courte que $CG + GE$. Si le point G étoit entre B & D , ce feroit la même démonstration.

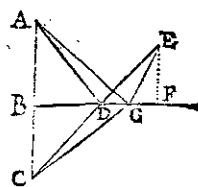
Remarquez que les deux triangles ABD & $CB D$ étant égaux, ils sont semblables : donc les angles ADB & BDC sont égaux ; mais EDF est égal à BDC : donc EDF est égal

§22 *Eléments de Geom. Liv. VI. Ch. XI.*

à ADB ; ainsi comme dans un miroir l'angle de reflexion est égal à celui d'incident, si l'objet est en E , & que le miroir soit BF , le point de reflexion sera D & la lumière réfléchira au point A . Ainsi la lumière est portée par le plus court chemin :

Seconde manière.

71. On suppose que l'angle d'incidence EDF est égal à ADB , celui de reflexion. Il s'agit de trouver le point D où tombera la lumière qui réfléchit de l'objet E à l'œil A , & va par le chemin le plus court. Les grandeurs connues sont $AB = a$, $EF = b$, & $BF = d$. L'inconnue est $BD = x$. Puisqu'on suppose que les angles d'incidence & de reflexion sont égaux, donc les deux triangles rectangles ABD & EFD sont semblables ; donc $a + b :: d :: x$. Donc $\frac{ad}{a + b} = x$: ainsi la valeur de BD est connue.



Fin des Eléments de Géométrie.



INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes Courbes que représentent les différentes Sections du Cône. Leurs noms, & la méthode la plus simple pour connoître leurs principales propriétés.



En'ai parlé dans ces Elémens de Geometrie, que de la Ligne Droite & du Cercle ; mais comme il y a d'autres lignes qu'on nomme des Lignes Courbes, qui font maintenant l'objet principal des plus grands Geometres, à cause des propriétés singulières & merveilleuses qu'ils y découvrent, il seroit à propos de donner leur génération avec quelques-unes de leurs principales propriétés. Je parlerai seulement des plus anciennes & des plus connues, qui sont celles qu'on remarque en coupant le Cône de différentes ma-

224 Introduction

nieres, & auxquelles on a donné le nom de *Sections Coniques*. Je déterminerai quelques-unes des principales propriétés de ces lignes. Voici comme elles s'engendrent dans le Cône.

Soit imaginé un Cône droit.

1°. Si on le coupe par un plan qui passe par son axe, il est clair que cette Section sera un triangle, dont les côtes seront les côtes mêmes du Cône, & la base le diamètre du cercle de la base du Cône.

Je suppose dans la suite, que le plan coupant, de quelque manière qu'il coupe le Cône, est perpendiculaire sur le plan de ce triangle.

2°. Si le plan coupant est parallèle à la base du Cône, la Section est un cercle, comme il est évident.

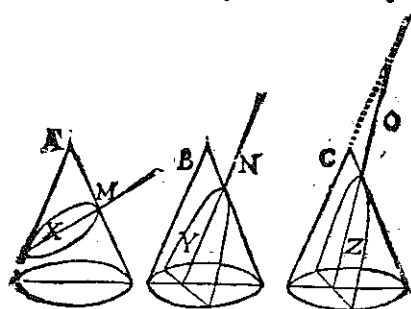
3°. Si le plan coupant n'étant pas parallèle à la base, rencontre l'axe du Cône, & ses deux côtes (je veux dire les deux côtes de ce triangle, qui est la Section du Cône par un plan qui passe par son axe) cette Section, ou le contour de cette Section représentera une ligne courbe, qu'on nomme *Ellipse* ou *Ovale*. Telle est la figure X, formée dans le Cône A par le plan coupant suivant la ligne M.

4°. Si le plan coupant ne coupe qu'un des côtes dudit triangle, & que la Section soit parallèle à l'autre côté, cette Section ou le contour de cette Section sera une autre Courbe, qui s'appelle *Parabole*. Telle est la figure Courbe Y, formée dans le Cône B par le plan qui le coupe, suivant la ligne N, parallèle au côté.

5°. Si le plan coupant ne coupe qu'un seul côté, de manière que ce plan prolongé puisse rencontrer l'autre côté dudit Cône ou Triangle

aux Sections Coniques. Ch. I.

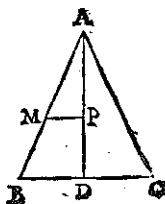
225



aussi prolongé au-dessus du sommet, cette Section ou le contour d'icelle est ce que l'on nomme *Hyperbole*. Telle est la figure Z formée dans le Cône C par le plan coupant, suivant la ligne O.

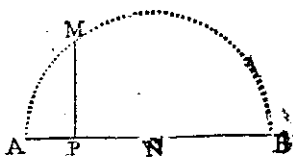
Comme il n'est pas nécessaire de s'imaginer un Cône pour expliquer la nature du cercle qui est une de ses Sections, on peut aussi découvrir les propriétés de toutes les lignes courbes que représentent les Sections du Cône, sans être obligé de penser à ce solide. Or il y a de certains termes dont nous devons nous servir, en parlant de ces Sections qu'il faut expliquer.

Soit le triangle BAC, qui est la Section du Cône par l'axe. Soit AP = x, PM = y, AD = a, BD = b. On aura par tout $x : y :: a : b$; donc $ay = bx$, qui est l'équation qui exprime la nature du triangle.



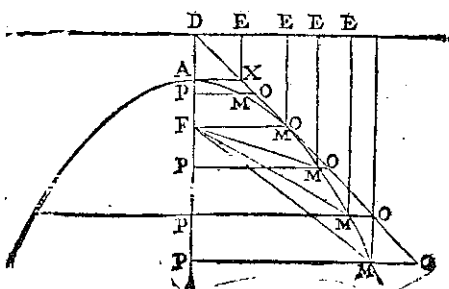
416 Introduction

Soit AMB un demi cercle, dont N est le centre ; & $AN + NB$ ou AB est le diamètre. Soit $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$; ainsi $PB = a - x$. Par tant x ;



ainsi $ax - xx = yy$ est l'équation qui exprime la nature du cercle. Une perpendiculaire telle que MP menée d'un point quelconque M de la circonférence sur le diamètre AB , s'appelle Ordonnée ; & la partie du diamètre prise entre son extrémité & la rencontre de l'Ordonnée, se nomme Abscisse.

Soit DEE une ligne droite donnée, avec F un point hors de cette ligne ; je nomme cette ligne DEE la Directrice. Soit AMN une courbe telle, que toute ligne perpendiculaire sur DE tombant sur M , un des points de la courbe, ait toujours un même rapport avec une seconde li-



Aux Sections Coniques. Ch. I. 417

gne tirée du point M au point donné F . Cette ligne courbe est régulière, & se peut décrire ; c'est-à-dire, qu'on peut trouver tous les points par lesquels elle doit passer. On donne ces noms à ses points, & à ses lignes.

Le point A est le sommet de la courbe. Le point F se nomme le Foyer. La ligne AF prolongée en est l'Axe. Les lignes qui coupent perpendiculairement cet Axe, & qui sont comprises entre la courbe & cet Axe, s'appellent les Ordonnées ; PM est une Ordonnée. La partie de l'Axe prise du sommet A jusques à la rencontre d'une Ordonnée se nomme Abscisse. Ce qui fait la différence essentielle des trois Sections Coniques, la Parabole, l'Ellipse, & l'Hyperbole, c'est une raison qui est particulière à la ligne AD , avec AF . Dans ces trois Sections, je nommerai ce rapport de p à q . Dans la Parabole, c'est toujours une raison d'égalité ; à l'Ellipse, p est toujours plus grand que q ; Et dans l'Hyperbole, p est toujours plus petit que q . A cela près, la manière de construire ces lignes est la même, & cette construction est aisée.

CHAPITRE II.

De la Parabole, ou Ligne Courbe que représente la Section d'un Cône droit, par un plan parallèle à l'un de ses côtes.

DEFINITION PREMIERE

La ligne droite DE est donnée avec le point F , hors de cette ligne. DE est la directrice de la Courbe, dont on parle. La ligne FD est perpendiculaire sur cette directrice DE . Si cette

418 Introduction

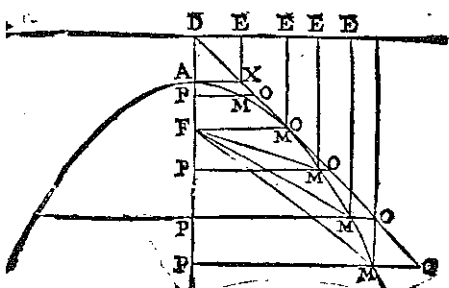
perpendiculaire est coupée au point A , de sorte que $FA = AD$; & que de chaque point de la Courbe comme M ayant mené sur DE une perpendiculaire, & une autre ligne au point F , ces deux lignes soient égales, que $MF = ME$, soit nommée cette Courbe, Parabole.

On démontrera que cette Courbe est la Section Conique qu'on appelle Parabole. J'exprimerai ce rapport d'égalité de EM à MF , par ces deux lettres p & q .

PROBLEME I.

Trouver chaque point de la Courbe, qu'on vient de définir.

DE est la ligne directrice qui est donnée, & F le Foyer. Il faut couper DF en deux parties égales, ainsi A est le sommet de la Courbe. Pour trouver les autres points ; il faut 1°. Par A mener une parallèle à DE , dans laquelle on prend AX égale à FA ; & par D & par X on tire une ligne indéfinie ; 2°. Ayant tiré une parallèle tant de parallèles qu'on voudra à DE ,



Aux Sections Coniques. Ch. II. 419

qui coupent l'Axe DF prolongé, on trouvera aisément les points de ces parallèles par lesquels passe la courbe ; par exemple le point M , dans la ligne PO . De l'intervalle de FO & du Foyer F comme centre, je fais un cercle qui coupe PO en M ; alors $AD : AX :: p : q$, & $AD : AX :: DP : PO$. Or $DP = ME$, & par la construction $PO = FM$: Donc $ME : FM :: p : q$. Ainsi M est un des points de la parabole, selon la Définition précédente.

Remarquez que la ligne indéfinie DX fait avec DF un angle de 45 degrés ; car DAX est droit, & $AD = AX$: Donc ce triangle est isocèle ; ainsi l'angle ADX est égal à AXD . Par conséquent chacun la moitié de l'angle droit ou de 45 degrés.

DEFINITION II.

Une ligne toujours double de FD , ou quadruple de FA , ou de AD s'appelle le Paramètre de la Parabole.

Soit nommé a ce Paramètre ; l'Ordonnée PM soit nommée y , & l'Abscisse PA soit nommée x . Il ne se faut mettre en peine, entendant parler de Paramètre, d'autre chose de ce que dit la Définition, qu'on appelle ainsi, une Ligne Quadruple de FA ou de AD .

REMARQUE.

Comme cette Introduction suppose la connaissance de ces Eléments de Géométrie, on n'aura pas la même rigueur pour citer les propositions dont on tire les preuves, du moins dans les choses les plus faciles où l'esprit doit être versé.

THEOREME I.

Le rectangle fait du Paramètre & de l'Abscisse

430 Introduction

est égal au carré de l'Ordonnée. Ou cette Ordonnée est une moyenne proportionnelle entre le Parametre & l'Abcisse.

FA ou AD fig. preced. soit nommé b . L'Abcisse AP a été nommée x . Donc PD ou $ME = b + x$, & $FP = x - b$ ou $b - x$, selon que le point P se trouve au-dessus ou au-dessous du Foyer F . Le Parametre a est Quadruplé de AD ou de AF , & partant de b ; ainsi $a = 4b$. Il faut démontrer que $\frac{a}{x} = \frac{y}{y}$; ou ce qui est la même chose que $ax = yy$. Selon la première Définition $MF = EM$; mais $EM = PA + AD = b + x$. Donc $MF^2 = bb + 2bx + xx$. Et puisque $FP = b - x$: donc $FP^2 = bb - 2bx$. *L. 4. n. + xx. Or $FM^2 = FP^2 + PM^2 = yy$. Donc $bb + 2bx + xx - bb + 2bx - xx = yy$. Mais $+bb - bb = 0$, & $+xx - xx = 0$; reste donc $4bx = yy$, ou $4b = \frac{yy}{x}$. Or $4b$ est la valeur du Parametre a ; partant $ax = yy$, ou $a : y :: y : x$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

Dans la Parabole les quarrés des Ordonnées sont entr'eux, comme les parties de l'Axe prises entre son sommet & la rencontre de ces mêmes Ordonnées.

Le Parametre a est toujours le même; mais qui est l'Abcisse est plus petite ou plus grande, selon que l'Ordonnée est plus près ou plus éloigné du sommet A . Or puisqu'on a toujours $yy = ax$, en quelque endroit que l'on prenne l'Ordonnée; donc les yy ou les quarrés des Ordonnées sont entr'eux comme les x , ou les Ab-

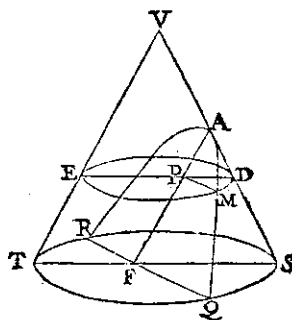
L. 3. n. scissés.
54

aux Sections Coniques. Ch. II. 431

THEOREME II.

Cette Section Conique qu'on nomme Parabole, est la même Courbe que celle qu'on vient de définir & de décrire.

SVT est un Cône droit coupé par un plan selon AF parallèle au côté TV ; il faut prouver que la Section QAR , qui est une Parabole, a les propriétés de la ligne courbe dont on vient de parler. Qu'elle que soit la ligne QAR , concevons que sur la ligne AF , les lignes PM & QF sont des perpendiculaires sur AF , que je nomme l'axe de cette Courbe. PM & QF en sont ainsi les Ordonnées, par conséquent pour prouver que cette Parabole QAR est cette Courbe dont on vient de parler, il s'agit de prouver que les quarrés MP^2 & QF^2

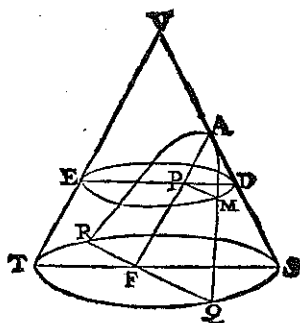


& de toutes les autres Ordonnées, sont entr'eux comme les parties AP , AF de l'Axe qu'elles coupent; car cela étant il faut, selon le Corollaire précédent, que la Courbe QAR soit une telle ligne.

Concevons que le Cône droit SVT est coupé au point M par un plan parallèle à la base

432 Introduction

Cette Section PME est donc un cercle. Soit QRT un autre cercle parallèle à DME . La ligne MP est l'Ordonnée de la Parabole QAR , & du cercle DME , étant perpendiculaire tant sur



ED que sur AF , d'autant qu'elle est la commune Section du plan du cercle & de celui de la Parabole, qui par la construction, coupe celui du triangle à angles droits*. Il en est de même de QF , qui est aussi Ordonnée, tant au cercle qu'à la Parabole. Or $\frac{DP}{MP} = \frac{PE}{QF}$; & de même $\frac{SF}{FQ} = \frac{FT}{MP}$: Donc $DP \times PE = MP^2$, & $SF \times FT = FQ^2$: Donc $DP \times PE = MP^2$, & $SF \times FT = FQ^2$; mais $PE = FT$: Donc $PM^2 = FQ^2$: $DP : SF :: FQ^2 : MP^2$. Or à cause des triangles semblables DPA & SFA , $AP : AF :: DP : SF$: Donc $MP^2 : FQ^2 :: AP : AF$: Donc par le Corollaire précédent QAR est de la nature de cette ligne dont on a parlé dans ce Chapitre, qui est aussi la Section Conique qu'on appelle Parabole.

*L. 3. n. 20. 530.

*L. 4. n. 57.

*L. 3. n. 57.

*L. 4. n. 57.

*L. 4. n. 57.

*L. 4. n. 57.

THEOREME II.

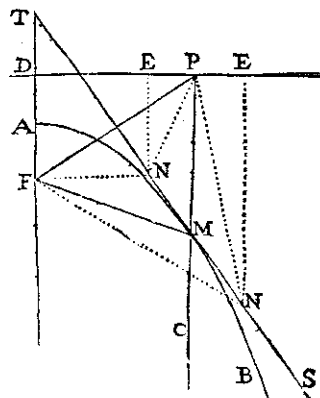
Une Parabole étant donnée, mener sur un point quelconque une ligne touchante en ce point.

Soit

aux Sections Coniques. Ch. II. 433

Soit la demi-Parabole AMB ; on demande que du point M , l'on mene la touchante MT .

Soit menée du Foyer F au point M la ligne FM , & du point M la ligne MP parallèle à l'Axe, & terminée par la directrice DP . Si l'on mene FP , & qu'on la divise en deux parties égales, la ligne MT menée par ce point de division sera la tangente que l'on demande; ce qu'il faut prouver.



Le triangle EMP est isocèle par la génération; donc MT est perpendiculaire sur FP *. *L. 1. n. Une ligne est touchante lorsqu'elle touche en un seul point ce qui arrive ici; car toute autre point qu'on assigne en cette ligne TS , n'est pas dans la Parabole, mais hors d'icelle; que par exemple N pris dans TS au-dessus ou au-dessous de M , n'est point dans la Parabole. Car soient menées les lignes NF , NP , & NE parallèle à l'axe, NP sera toujours plus grande que NE . Or *L. 1. n. par la construction, puisque TN est perpendiculaire sur FP , les lignes NF & NP sont égales*. *L. 1. n.

434 Introduction

NF est donc plus grande que NE ; par conséquent N n'est pas un des points de la Parabole : car s'il l'étoit, FN seroit égale à NE ; selon la Définition de la Parabole. Mais FN étant plus grande, ce point N sera hors d'icelle,

COROLLAIRE.

Il est évident que si la courbe AMB représente la Section d'un miroir Parabolique, & que CM soit un rayon incident parallèle à l'Axe AF , la ligne MF représentera le rayon réfléchi ; l'angle d'incidence CMS étant égal à FMT , l'angle de réflexion : car l'angle CMS est égal à l'angle opposé TMP *. Or par la construction TMP est égal à TMF ; donc TMF est égal à CMS . Partant tous les rayons qui tomberont sur la surface concave de ce miroir parallèlement à l'Axe, se réuniront au point F : & c'est ce qui le fait appeler Foyer. Ainsi pour faire un bon miroir ardent, il faut lui donner la figure d'un Conoïde parabolique creux.

* L. 2. n. 21.

CHAPITRE III.

De l'Ellipse ou de la ligne que représente la Section d'un Cône, par un plan, qui coupe ses deux côtes, & qui ne soit pas parallèle à celui de la base.

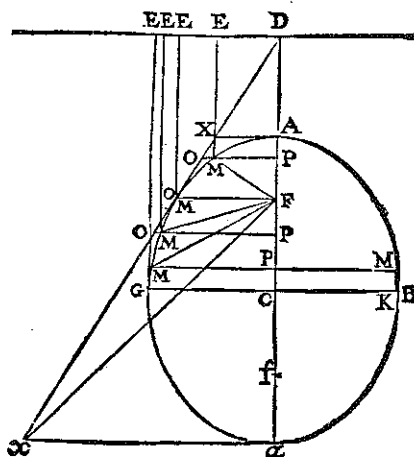
DÉFINITION PREMIÈRE.

Soit donnée pour directrice de la ligne Courbe qu'on va définir, la ligne droite DE avec un point, F , hors de DE . FD est perpendiculaire sur DE . Si cette perpendiculaire est coupée au

aux Sections Coniques. Ch. III. 435
point A , selon la raison de p à q , je suppose que p est plus grand que q ; & que de chacun des points de la Courbe, comme de M , ayant mené une perpendiculaire sur DE & une autre ligne au point F , la ligne EM soit toujours à FM comme p à q ; cette ligne se doit nommer Ellipse, parce qu'on prouvera qu'elle est la même que celle de la Section du Cône qui a ce nom.

PROBLÈME I.

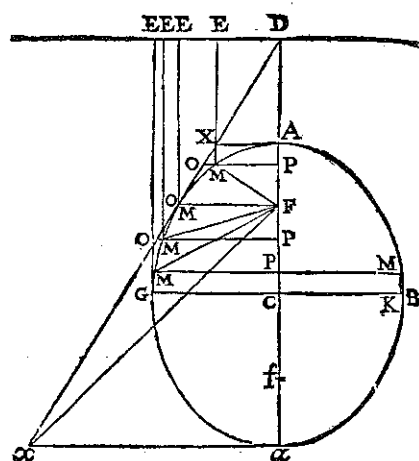
La directrice DE étant donnée avec F , qui est un point hors d'elle, trouver sous les points de cette Courbe qu'on vient de définir.



Il faut 1°. diviser FD en A ; de sorte que $AD : FA :: p. q.$

Tij

436 Introduction



2°. Il faut mener par A une parallèle à la directrice DE , & prendre AX égale à AF . Ainsi $AD : AX :: p. q.$

3°. Il faut tirer par D & X une ligne indéfinie ; après quoi coupant l'axe partant de parallèles qu'on voudra, il sera aisé de trouver dans ces parallèles le point par où passe la courbe. De F comme centre, & de l'intervalle PO , je fais un cercle qui coupe PO en M . A cause des triangles semblables DAX & DPO , la ligne PD ou son égale EM , est à PO ou FM , comme AD est à AX ; partant $EM : FM :: AD : AX :: p. q.$ Le point M est donc un point de la courbe, qu'on vient de définir.

aux Sections Coniques. Ch. III. 437

PROBLÈME II.

Trouver l'Axe de cette Courbe.

La ligne DX soit prolongée à l'infini, & sur le prolongement de AD au point F soit menée une ligne qui fasse un angle de 45 degrés, & continuée jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne indéfinie DX .

Du point x où se fait cette rencontre, soit menée la perpendiculaire xa sur Fa . Donc dans le triangle Fxa , l'angle Fxa est aussi de 45 degrés : donc le triangle Fxa est isocèle. Or $AD : AX :: Da. ax^*$; & puisque Fxa est isocèle, $ax = Fa$: donc $AD : AX :: Da. Fa$. Mais $AD : AX :: p. q.$ Donc $Da. Fa :: p. q.$ Partant a est un des points de Courbe, comme il est évident.

DÉFINITION II.

1°. Aa est le grand Axe de l'Ellipse. Le point C qui divise Aa par la moitié, est le centre. La ligne BG qui coupe à angles droits Aa , est le petit Axe. A , ont pris fa égale à FA , les points F & f sont les Foyers. Nous verrons pourquoi on leur donne ce nom.

2°. Les perpendiculaires menées d'un point quelconque de la Courbe à un des Axes, s'appellent Ordonnées.

Ainsi PM étant une Ordonnée à l'Axe Aa ; la ligne AP est une Abcisse.

3°. La troisième proportionnelle aux deux Axes est appelée Paramètre du premier de la proportion.

Paramètre, c'est un nom dont il suffit de concevoir ce qu'on met dans la Définition.

T iij

THEOREME I.

L'intervalle FF des Foyers F & f, est au grand Axe Aa, comme q est à p. Fig. précéd.

On a démontré que $q. p :: AX. AD :: Fa. Da$: Donc $Fa - AX. Da - AD :: q. p$. Or puisque $fa = FA = AX$: Donc $Fa - AX = Ff$. Mais $Da - AD = Aa$: Donc $Ff. Aa :: q. p$; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME II.

AC moitié du grand Axe Aa, est une moyenne proportionnelle entre FC, moitié de l'intervalle des Foyers, & la ligne CD.

La moitié est à la moitié. Fig. précéd. comme le tout est au tout ; partant $AC. FC :: Aa. Ff$. Mais $Aa. Ff :: AD. AX$, par le Théorème précédent : donc $AC. FC :: AD. AX$; ou $FC. AC :: AX. AD$, & $FC. FC + AX :: AC. AC + AD$. Or par la construction $FA = AX$; ainsi $FC + AX = FC + FA = AC$, & $AC + AD = CD$. Mettant donc AC en la place de $FC + AX$, & CD en la place de $AC + AD$, viendra $FC. AC :: AC. CD$. Partant $FC. AC. CD$; ce qu'il falloit démontrer.

PREPARATION.

Pour les démonstrations des Théorèmes suivans, Même Figure.

Soit $AC = d$, & $CF = g$: donc FA ou $AX = d - g$, & Fa ou $ax = d + g$. Or AC ou d est moyenne proportionnelle entre CF ou g & CD par le Théorème précéd. donc $\frac{d}{g} = \frac{d}{CD}$. Donc multipliant d par d , & divisant le pro-

aux Sections Coniques. Ch. III. 439

duit dd par g , le quotient $\frac{dd}{g}$ sera égal à CD *. ^{* L. 3. n. 60.}

Soit $CP = x$, & $PM = y$: donc $PF = x - g$,

ou $g - x$ & DP , ou $ME = \frac{dd}{g} - x$, lorsque

le point P est au-dessus du centre C. Par la génération de l'Ellipse.

$$d. g :: \frac{dd}{g} - x. MF = d - \frac{gx}{d} \quad * L. 3. n. 60.$$

de laquelle proportion MF est le quatrième terme. Lorsque le point P est au-dessous du centre C, alors $PF = x + g$ & DP , ou $ME = \frac{dd}{g} + x$ donc, comme dessus, $MF = d + \frac{gx}{d}$.

THEOREME III.

Le carré d'une Ordonnée quelconque PM au grand Axe Aa, est au rectangle AP x Pa parties de cet Axe, comme le rectangle AF x Fa aussi parties de cet Axe, est au carré de AC ou C a moitié de ce même Axe, même Fig.

$AC = d$, $CF = g$, $PC = x$: donc $AP = d - x$ & $Pa = d + x$. Ainsi $AP \times Pa = dd - xx$. De même puisque $AF = d - g$, & $Fa = d + g$: donc $AF \times Fa = dd - gg$. Ainsi supposant $PM = y$; voilà ce qu'il faut démontrer.

$$yy. dd - xx :: dd - gg. dd.$$

Et pour cela que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, c'est-à-dire, $yydd = dd - ddxx - ddgg + ggxx$.

Le triangle FMP étant rectangle $FM^2 = PF^2$.
T iij

$PM = yy$. Or $FM = d - \frac{gx}{d}$; ainsi FM^2

$$= dd - 2gx + \frac{g^2xx}{dd}, \text{ \& } PF = g - x : \text{ donc }$$

$$PF^2 = gg - 2gx + xx \text{ Donc } FM^2, \text{ ou } yy$$

$$= dd - 2gx + \frac{g^2xx}{dd} - gg + 2gx - xx. \text{ Or }$$

effaçant les termes qui se détruisent par + & - ,

$$\text{il viendra } yy = dd + \frac{g^2xx}{dd} - gg - xx ; \text{ \& }$$

multipliant tous ces termes de part & d'autre par dd , l'on aura $ddy = d^4 + ggxx - ggdd - ddxx$; Donc, &c.

THEOREME IV.

Soit BC = b le rectangle AF x Fa, ou $dd - gg$ est égal à bb carré de BC moitié du petit Axe BG. même Figure.

Il faut prouver que $bb = dd - gg$. $BC = b$ est une Ordonnée qui se trouve au centre ; ainsi $x = 0$, & $d - x = d$ & $y = b$; ainsi $yy = bb$. Or par le Théorème précédent $yy. dd - xx :: dd - gg. dd$. Donc mettant bb en la place de yy ; & effaçant $-xx$, on aura $bb. dd :: dd - gg. dd$; ou $bb. dd - gg :: dd. dd$; ainsi $bb = dd - gg$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME V.

Le carré de MK Ordonnée au petit Axe BG est au rectangle BK x KG parties de cet Axe, comme le carré du grand axe Aa est au carré du petit BG. même Fig.

Le grand Axe Aa est égal à $AC + Ca$ ou à $2AC$; partant à $2d$. On a nommé b la moitié

aux Sections Coniques. Ch. III. 441

du petit Axe BG ; ainsi $2b = BG$. On a déjà nommé x la ligne CP. Or l'Ordonnée MK lui est égale, qui sera ainsi x . La ligne PM ordonnée au grand Axe a été nommée y . Ainsi CK, qui lui est égale, est aussi y ; partant $b - y = BK$ & $b + y = KG$, & $bb - yy = BK \times KG$ *. ^{* L. 3. n. 21.} Le carré du grand Axe Aa ou $2d$, est $4dd$. Celui du petit Axe BG ou $2b$, est $4bb$. Voilà donc ce qu'il faut démontrer.

$$xx. bb - yy :: 4dd. 4bb.$$

Selon le troisième Théorème.

$$yy. dd - xx :: dd - gg. dd.$$

Par le quatrième $bb = dd - gg$. Mettant donc bb en la place de $dd - gg$, vient

$$yy. dd - xx :: bb. dd.$$

Donc $yy. dd - xx :: 4bb. 4dd$; & multipliant les extrêmes & les moyens, l'on aura $4ddy = 4bbdd - 4bbxx$, ou $4bbxx = 4bbdd - 4ddy$; & remettant cette égalité en proportion, l'on aura enfin $xx. bb - yy :: 4dd. 4bb$ *. ^{* L. 3. n. 21.}

THEOREME VI.

Le Parametre est au diamètre comme le carré de son Ordonnée est au rectangle fait des parties de ce diamètre prises depuis la rencontre de cette Ordonnée. même Figure.

AC moitié du grand diamètre Aa a été nommé d ; & b celle du petit, BC. Ainsi $BG = 2b$. Soit le Parametre nommé a ; il faut, selon la

Définition, que $2d. 2b :: 2b. a$; Donc $\frac{4bb}{2d}$

ou $\frac{2bb}{d} = a$, & multipliant les deux membres de cette équation par d , viendra $2bb = ad$, &c.

T v

442

Introduction

divisant par z , on aura $bb = \frac{1}{2} ad$. On a vu cy-dessus par les Theorèmes trois & quatre, que $yy, dd = xx :: bb, dd$.

Mettant $\frac{1}{2} ad$ en la place de bb , on aura yy, dd

$= xx :: \frac{1}{2} ad, dd$. Divisant chaque terme de

la raison de $\frac{1}{2} ad$ à dd par d , vient $\frac{1}{2} a, d$;

& les multipliant par z vient $a, 2d$; ainsi $yy, dd = xx :: a, 2d$, ou $a, 2d :: yy, dd = xx$, qui est ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VII.

Les quarez des Ordonnées sont entr'eux, comme les rectangles des parties de l'Axe faites par la rencontre de ces mêmes Ordonnées.

y & m sont deux différentes Ordonnées, & n une autre partie que PC . Par le précédent Theorème.

$$yy, dd = xx.$$

$$a, 2d ::$$

$$mm, dd = nn.$$

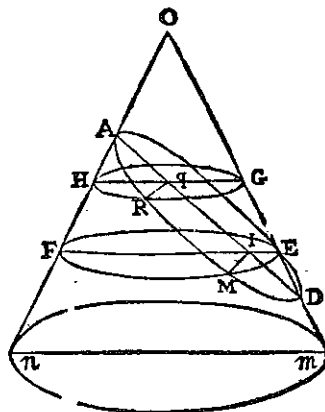
Donc $yy, mm :: dd = xx, dd = nn$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VIII.

La Section Conique qu'on nomme Ellipse, est la même Courbe que celle qu'on vient de définir & de décrire.

Soit coupé le Cône mon par un plan qui fasse un angle oblique avec son Axe, & qui coupe ses deux côtes. La Section $DMA D$, qui est

aux Sections Coniques. Ch. III. 443
une Ellipse, sera la même ligne que celle dont on vient de montrer les propriétés.



Soient imaginez les deux cercles parallèles EMF & GRH , dont les diamètres coupent celui de la courbe $DMA D$, quelle qu'elle soit, en I & en q . Si l'on mene des points M & R , où ces cercles coupent cette courbe, des lignes droites aux points I & q ; il est évident que ces lignes seront des Ordonnées communes aux cercles & à la courbe $DMA D$, d'autant que Rq est perpendiculaire tant sur HG que sur AD , étant la commune Section du plan du cercle & de l'Ellipse, qui par la construction coupent celui du triangle à angles droits. Il en est de même de MI .

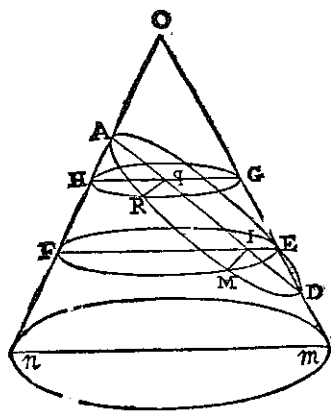
Les triangles AqH . & AIF sont semblables; donc $Aq, FI :: Aq, AI$. Les triangles DEL

T vj

444

Introduction

& DGq sont aussi semblables; donc $Gq, EI :: qD, ID$. Multipliant chaque terme de la première proportion par le terme qui lui ré-



pond dans la seconde, les produits seront en proportion étant composés de raisons égales *.

L. 3. n.

$$Hq, FI :: Aq, AI,$$

$$Gq, EI :: Dq, DI;$$

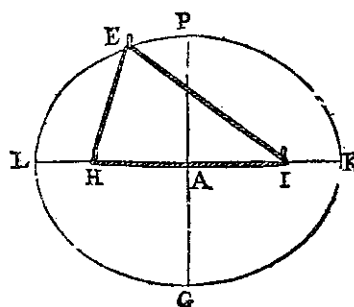
Ainsi $Hq \times Gq, FI \times EI :: Aq \times Dq, AI \times DI$, à cause des cercles EMF & GRH , selon les Elemens $qR^2 = Hq \times qG$, & $IM^2 = FI \times IE$. Donc $qR^2, IM^2 :: Aq \times Dq, AI \times ID$. Donc par le Theorème précédent cette Ellipse $DAMD$ est la même que cette ligne dont nous avons démontré les propriétés, & qui par conséquent est cette Section Conique qu'on nomme l'Ellipse.

aux Sections Coniques. Ch. III. 445

PROBLEME III.

Décrire une Ellipse par un mouvement continu.

Soient donnez ces deux points H & I comme foyers d'une Ellipse, & la ligne LK comme le grand axe ou grand diamètre. Pour décrire



cette ligne, l'on prendra un fil dont la longueur sera égale au grand diamètre de l'Ellipse, & l'attachant fixe par ses extrémités aux deux points H & I , on conduira à la main une pointe mobile qui laisse une trace en tournant au tour de H & de I . Cette trace sera une Ellipse; ce qu'il faut démontrer.

Par la construction de cette courbe quelle qu'elle soit, les deux lignes HE & EI prises ensemble, sont égales au grand axe LK ; ainsi il n'est question que de prouver que l'Ellipse dont nous avons parlé, a cette propriété.

Soit une Ellipse Geometrique, dont Aa est le grand diamètre, F & f sont les foyers. Il faut démontrer que $FM + Mf = Aa$.

Soit prolongé le diamètre Aa de part & d'autre, de sorte que AD , AF , ou $AX :: p, q$, & de même $af :: p, q$, & qu'aini $as = AD$.

Soit menée par t une parallèle à DE . Les rapports de FM à PD sont les mêmes que fM à Pt . Par la Définition.

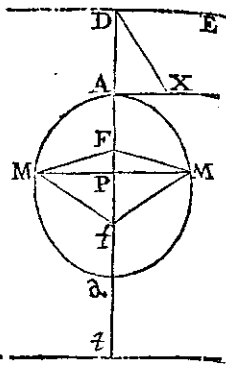
$$\frac{FM}{fM} = \frac{PD}{Pt} :: q, p :: AX, AD.$$

*Théorème. On a prouvé que $Ff, Aa :: AX, AD$:
me 1. Donc $Ff + 2AX, Aa + 2AD :: AX, AD$.
Or $Ff + 2AX = Aa$, & $Aa + 2AD = Dt$.
Donc $Aa, Dt :: AX, AD$.
 $FM + fM, PD + Pt :: AX, AD$.

Aa, Dt .
Donc $FM + fM, PD + Pt :: Aa, Dt$.
Mais $PD + Pt = Dt$; donc $FM + fM = Aa$: ce qu'il falloit prouver.

REMARQUE.

C'est de cette manière que les Jardiniers traacent les Ellipses, aussi nommez pour cela, Ovale du Jardinier. Et lorsqu'on a les deux diamètres

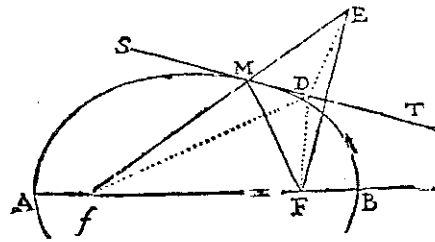


aux Sections Coniques. Ch. III. 447
donnez se coupant à angles droits, il faut pour en trouver les foyers H & I , Fig. de la p. 445. de P ou de G extrémité du petit Diamètre, comme centres & intervalle AL ou AK , décrire une portion de cercle coupant LK en H & I qui soient lesdits foyers, comme il est évident par ce Problème.

PROBLÈME IV.

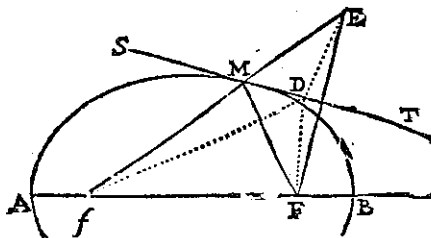
Une Ellipse étant donnée, mener d'un de ses points quelconque M une tangente MT .

Soient menées de ce point M aux deux foyers F, f les deux lignes MF, Mf ; & soit prolongée fM jusques en E , en sorte que $ME = MF$. Soit menée la ligne EF . Si on divise cette ligne EF en deux parties égales par la ligne MT , je dis que MT sera une Touchante.



Soit pris sur cette Touchante un autre point D , d'où l'on menera les lignes DE & DF qui seront égales*, puisque MT est perpendiculaire sur EF ; Il faut aussi du point D mener la ligne Df . Or $fD + DE$ est plus grande que $fM + ME$; par conséquent plus que $fM + MF$: car par la construction $MF = ME$; donc ce

*L. r. n.
58.



point D ne peut être un de ceux de l'Ellipse, qui a cette propriété par le précédent Théorème, que si D étoit un de ces points $fD + DF = fM + MF$. La ligne DT ne rencontre donc l'Ellipse, qu'au point M .

COROLLAIRE.

Il est évident que si AMB représente la Section d'un Miroir Elliptique, & si M soit un rayon incident, il se réfléchira en F .

Car l'angle d'incidence fMS est égal à l'angle de réflexion FMt ; puisque l'angle SMf est égal à EMT *, qui est égal à TMF . Ainsi tous les rayons qui partiront de f , & qui tomberont sur la surface concave de ce Miroir se réuniront au point F , & réciproquement s'ils partent du point F , ils se réuniront au point f : Et c'est pour cette raison qu'on appelle ces points les Foyers.

*L. r. n.
57.

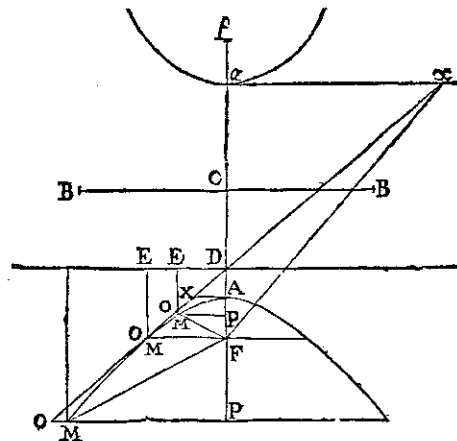


CHAPITRE IV.

De l'Hyperbole, ou de la ligne qui représente la Section d'un Cône coupé par un plan parallèle à son axe, ou même de manière que coupant un seul côté dudit Cône, il puisse aussi couper l'autre étant prolongé au-dessus de son sommet.

DÉFINITION I.

Soit DE une ligne droite prise pour directrice, & F un point hors de cette ligne. La ligne ED est perpendiculaire sur DE . Si on dé-



vise FD au point A , selon la raison de p à q , (on suppose ici que p est plus petit que q) &

Introduction

qu'on trace une courbe de laquelle ayant mené des perpendiculaires à DE comme EM, Et d'autres lignes à F comme FM, telles que EM soit à MF comme p à q, cette ligne se nomme Hyperbole; parce que l'on démontre qu'elle a les mêmes propriétés que la Section Conique de ce nom.

PROBLEME I.

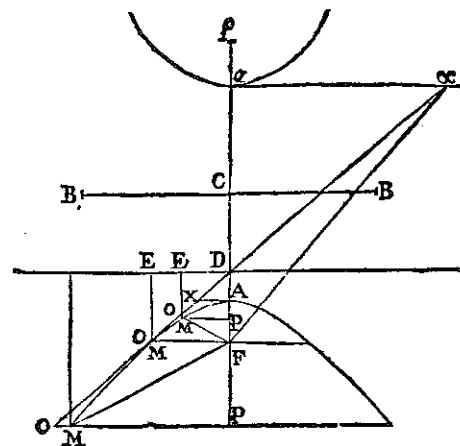
Trouver tous les points par lesquels passe cette Courbe.

Je mène AX parallèle à DE , & égale à FA ; & je tire une ligne indéfinie de part & d'autre par les points D & X . Après quoi menant librement tant de parallèles qu'on voudra à DE , comme PO ; pour trouver le point de cette ligne PO par où passe la Courbe, je fais un cercle de F comme centre, & de l'intervalle PO . Le point M , où ce cercle coupe PO , sera le point que l'on cherche ; car les triangles DAX & DPO étant semblables $PO : PD :: AX : AD :: q. p.$ Or par la construction $PO = FM$. & $PD = EM$: Donc $FM : EM :: q. p.$ Le point M est donc dans l'hyperbole par la Définition précédente.

PROBLEME II.

Trouver le sommet d'une semblable Courbe, qui lui soit opposée.

En considérant les propriétés de cette courbe, on peut la comparer avec une autre courbe opposée toute semblable, dont on trouve le sommet par cette pratique. On fait sur FD l'angle DFx de 45 degrés, & du point x où Fx coupe la ligne indéfinie XD , on mène une per-



la Courbe: car Fax étant isocelle, $ax = af$. Par la construction les triangles xDa & ADx sont semblables; donc $ad . ax$ ou $af :: DA . Ax$ ou AF . Ainsi $ad . af :: DA . AF :: p . q$: Donc $ad . af :: p . q$. Ainsi le point a sera celui d'une Courbe appolée & semblable, ayant pris $fa = FA$; pour avoir le Foyer f , selon la Définition suivante.

DEFINITION II.

La ligne AA' s'appelle *Axe traversant* ou *Axe prolongé*. Le point C qui divise en deux l'Axe traversant, se nomme le *Centre*.

Si l'on mène par C une perpendiculaire BB,

Introduction

4) dont la grandeur est déterminée par un cercle décrit du point A & de l'intervalle CF, cette ligne BB se nomme l'Axe conjugué.

Les points F & f sont les Foyers.

Les perpendiculaires menées d'un des points des Courbes sur un des Axes, sont les Ordonnées.

Les Abscisses sont les parties de ces Axes prises depuis leur origine jusqu'à la rencontre des Ordonnées.

Quelquefois leur origine est au centre, & quelquefois au sommet des Hyperboles.

La troisième proportionnelle aux deux Axes est appelée Paramètre du premier de la proportion.

THEOREM I.

L'Axe traversant Aa est à Ff, intervalle des Foyers, comme p à q.

Dax & *DAX* sont deux triangles semblables figure précéd. Donc $AX. ax :: AD. Da$. Or $AX = AF$ & $ax = aF$: Donc $AF. aF :: AD. Da$. Donc composando $AD + Da. AD :: AF + Fa. AF$. Mais $AD + Fa = Ff$. car $AF = af$ & $AD + Da = Aa$. Donc $Aa. AD :: Ff. AF$ & $Aa. Ff :: AD. AF$. Or $AD. AF$, ou $AX :: p. q$; Donc $Aa. Ff :: p. q$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME II.

CD est une troisième proportionnelle à CA &
CE. figure précédente.

Puisque les Touts sont aux Touts, comme les moitez sont aux Moitez, que CF est la moitié de Ff , & CA est la moitié de Aa :

$\times$ Pa parties de cet axe, comme le rectangle $AF \times Fa$ est au quarré de CA ou Ca .

THEOREM III.

Le carré d'une Ordonnée quelconque PM à l'axe Aa traversant, est au rectangle de AP x P a parties de cet axe, comme le rectangle AF x Fa est au carré de CA ou Ca.

Soit $CA = d$, l'ordonnée $PM = y$, $CP = x$, & $CF = g$; donc figure précéd. lorsque P est au-dessous ou au-dessus du point F , $PF = x - g$, ou $g - x$. L'on aura donc $DP = x - \frac{dy}{dx}$; car par le Théorème précédent $CD =$

$\frac{d}{g}$. Mais par la construction & par le Theorème premier $d, g :: x - \frac{d}{g}, MF$; Donc

$MF = \frac{g^x}{d} - d^*$. Si le point P étoit au-dessus ^{*L. 3. m.} 60.

du point a , alors on trouveroit $MF = \frac{g x}{d}$
 $\pm d$.

Il faut donc prouver que yy ou $\overline{PM^2} \cdot \overline{xx}$
 $\text{---} \overline{dd}$, ou $AP \times Pa :: gg \text{---} \overline{dd}$, ou $AF \times Fa$,
 $\overline{dd}$, ou $\overline{CA^2}$, ou $\overline{Ca^2}$; ce qui est facile: car à
cause du triangle rectangle MPF , $\overline{PM^2} = \overline{FM^2}$
 $\text{---} \overline{PF^2}$ *, c'est-à-dire, en analytiques, yy $\overset{\text{L. 4.}^\circ}{=} \frac{\text{L. 7.}^\circ}{8}$
 $\text{---} \frac{ggxx}{\overline{dd}}$ $\text{---} \overline{xx} \text{---} gg \text{---} \overline{dd}$; ou en multipliant
de part & d'autre par $\overline{dd}$; on aura $yy\overline{dd} = ggxx$

454 Introduction

— $ddxx - ggdd - d^4$, & remettant les termes qui composent cette égalité en proportion, on trouvera $yy, xx - dd :: gg - dd, dd$; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME IV.

Le carré d'une Ordonnée quelconque PM à l'axe Aa est au rectangle des parties de cet axe, savoir à $AP \times Pa$, comme le carré de l'axe conjugué BB est au carré de l'autre axe Aa. Même figure.

Concevons un triangle rectangle ABC, selon la Définition de l'axe conjugué $AB = FC$, on a supposé $FC = g$, & $AC = d$; supposons $BC = b$. Donc ABC étant rectangle, & $AB = g$; * L. 4. n. il faut que $bb = gg - dd$ *. Or par le Theoreme précédent $yy, xx - dd :: gg - dd$, où bb . * L. 3. n. dd . Multipliant bb & dd par 4, ils demeurent en même raison *. Donc $yy, xx - dd :: 4bb, 4dd$. Or $AP \times Pa = xx - dd$. Donc le carré de yy est au rectangle $AP \times Pa$, comme $4bb$, carré de l'axe conjugué BB ou $2b$, est au carré $4dd$ de l'autre axe Aa égal à $2d$.

THEOREME V.

Le Parametre est au diamètre comme le carré d'une Ordonnée quelconque, est au rectangle des parties de cet axe faites par la rencontre de cette Ordonnée,

Soit conservée la même dénomination des parties que ci - devant & même figure, & m soit le Parametre de l'axe Aa, lequel par la Définition est une troisième proportionnelle auxdits axes; ainsi $m, 2b, 2d$. Mais à cause de cette proportion on aura $m, 2d :: 4bb, 4dd$ *. Or par le Theoreme précédent, $4bb$ est à $4dd$ comme le carré yy de l'Ordonnée est à $xx - dd$

* L. 3. n. 86.

aux Sections Coniques. Ch. IV. 455 rectangle des parties de l'axe; donc $m, 2d :: yy, xx - dd$, ce qu'il falloit démontrer.

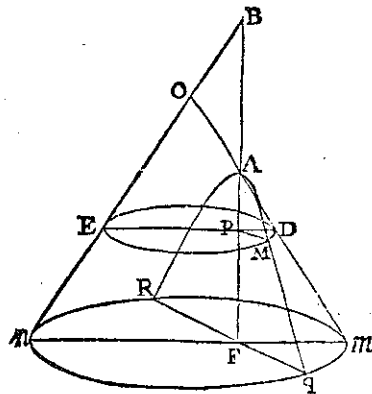
THEOREME VI.

Les quarrés des Ordonnées sont entr'eux comme les rectangles des parties de cet axe, faites par la rencontre de ces mêmes Ordonnées.

Ce qui est évident, puisque dans quelque endroit que se trouve le point P, le parametre m est au diamètre $2d$, comme yy carré de l'Ordonnée est au rectangle $xx - dd$, ou $AP \times Pa$ fait des parties de cet axe déterminées par l'Ordonnée.

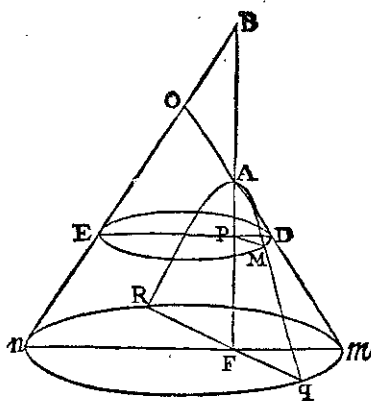
THEOREME VII.

Cette Section Conique qu'on nomme Hyperbole, est la même Courbe, que celle qu'on vient de décrire.



Soit m O n un Cône coupé par un plan, qui

456 Introduction



rencontre aussi en B l'autre côté n O du Cône, prolongé au-dessus du sommet O. Cette Section q A R sera la Courbe dont on vient de parler, où cette Courbe est véritablement cette Section du Cône qui s'appelle Hyperbole.

Soit imaginé un cercle DME parallèle à m n, celui de la base. Leurs diamètres coupent l'axe de l'Hyperbole aux points P & F. Les lignes MP & Fq sont perpendiculaires sur ces diamètres aussi-bien que sur l'axe AF *, d'autant qu'elles sont les communes Sections de deux plans perpendiculaires à celui du triangle; par conséquent elles sont des Ordonnées tant du cercle que de la Courbe DME. Or $MP^2 = DP \times PE$, & $Fq^2 = mF \times nF$. Il faut démontrer que MP^2 , ou $DP \times PE$

* L. 5. n. 10. & 20.

* L. 4. n. 21.

aux Sections Coniques. Ch. IV. 457 $\times PE$ est à Fq^2 , ou à sa valeur $mF \times nF$, comme $AP \times PB$ est à $AF \times FB$.

Les deux triangles DAP & mAF sont semblables. Les deux triangles FBN, & PBE sont semblables. Donc

$$mF, DP :: FA, PA.$$

$$mF, PE :: FB, PB.$$

Multipliant chaque terme de la première proportion par le terme qui lui répond dans la seconde, les produits seront en proportion, étant des rectangles dont les raisons composées des côtés, sont semblables *. * L. 3. n. 77.

Donc puisque $MP^2 = DP \times PE$, & $Fq^2 = mF \times nF$.

$MP^2, Fq^2 :: AP \times PB, AF \times FB$; ce qu'il falloit prouver.

AVERTISSEMENT.

Si l'on prolonge le côté du Cône, en sorte que l'on imagine un autre Cône opposé par le sommet à celui-ci, il est clair que si l'on continue le plan coupant, il formera dans cet autre Cône une Section semblable, qui sera l'Hyperbole opposée.

PROBLEME III.

Décrire l'Hyperbole par un mouvement continu.

Soit AMX une hyperbole, figure suivante: A est son sommet, & F son foyer. B est le sommet de son hyperbole opposée, qui a f pour foyer. On peut concevoir que cette hyperbole a été décrite, ou qu'elle le peut être de cette manière.

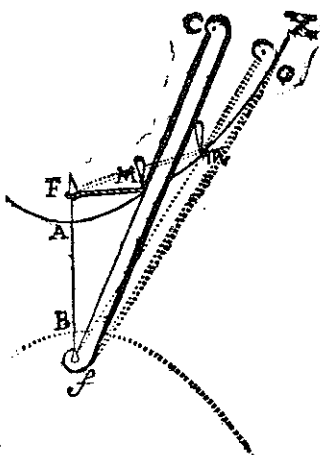
V.

La ligne Cf coupe l'hyperbole AMX au point M . Considérons cette ligne Cf , comme une règle au bout de laquelle est attachée une corde dont l'autre extrémité est attachée au foyer F . Cette règle est fixe par son autre bout au foyer de l'hyperbole opposée, au tour duquel point f elle peut tourner.

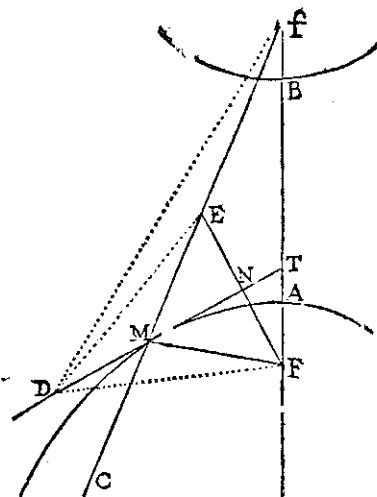
Concevons cette règle dans une première situation, couchée sur AB , & la corde de telle longueur que M convient alors avec A . Mettons le doigt au point A ou M , & laissons-le couler vers X en faisant tourner la règle; mais tenant toujours la corde jointe & comme celée contre la règle. A mesure que la règle tournera, le doigt considéré comme une pointe, décrira l'hyperbole AMX .

COROLLAIRE I.

De cette construction il s'ensuit qu'ayant mené de chaque point de l'Hyperbole deux lignes,



deux parties égales par la ligne MT ; je dis que cette ligne est touchante ou tangente.



Soit pris ME égale à MF . Soient encore d'un point quelconque D dans la tangente MT menées les lignes DF , Df & DE . Les triangles MEN & MEN seront égaux; comme aussi NDf & NDE .

Il s'agit de prouver que le point D qui est dans la tangente MT , n'est point dans l'hyperbole; & qu'ainsi cette tangente ne la touche point, ou ne se la rencontre point en D .

Si D étoit dans l'hyperbole $Df - DF = Mf - MF$, par le Corollaire précédent. Or cela n'est pas; car ME étant pris égale à MF : Donc

aux Sections Coniques. Ch. IV. 459
droites aux deux foyers F & f , la différence de ces deux lignes sera toujours la même.

Dans la première situation où M est sur A , la règle sur AB ou sur Ff ; il est évident que la différence de Mf avec MF , c'est-à-dire, $Mf - MF$ est AB , puisque $FA = fB$; cette différence est toujours la même dans les autres situations. Car à mesure que la règle tourne, & que le doigt coule, la corde MF & la partie de la règle Mf s'allongent également. Ainsi ces deux grandeurs conservent une même différence.

COROLLAIRE II.

Une hyperbole se peut étendre ou être continuée à l'infini.

Car si on prolonge à l'infini la règle Cf , & en même tems la corde MC en faisant tourner la règle, & continuant de presser la corde comme ci-dessus, on prolongera l'hyperbole sans fin. Il est évident que le point M s'éloignera de plus en plus du foyer F à mesure que la règle fC tournera.

AVERTISSEMENT.

L'hyperbole étant prolongée & continuée à l'infini comme on vient de le dire, elle s'approche de plus en plus d'une certaine ligne droite, sans jamais la rencontrer; ce qui fait qu'on nomme cette ligne droite l'asymptote de l'hyperbole. Ce nom qui est grec, marque cette propriété.

PROBLÈME IV.

D'un point quelconque d'une Hyperbole, mener la touchante MT .

Soient A & B deux hyperboles opposées. On a mené du point donné M aux foyers F & f les lignes MF , Mf , & divisé l'angle Fmf en
V ij

aux Sections Coniques. Ch. IV. 461
 $Mf - MF = Ef$. Et puisque DE est égale à DF ; donc $Df = Ef + DF$. Mais dans le triangle Def , les côtés DE & Ef pris ensemble, sont plus grands que le côté Df ; donc DE surpasse DF ; donc le point D n'est point un de ceux de l'hyperbole; ce que l'on peut dire de tout autre point de la ligne MT , autre que M pris au dessus ou au dessous de M ; donc cette ligne MT ne rencontre l'hyperbole qu'en un point, donc elle est touchante.

COROLLAIRE.

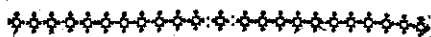
Si la Courbe AM représente la section d'un Miroir Hyperbolique, & que CM soit un rayon incident qui tombe sur la surface concave de ce miroir au point M , partant de C , & tendant vers le foyer f de l'Hyperbole opposée, il se réfléchira en F .

L'angle DMC est égal à l'angle EMN , égal par la construction à NMF ; ainsi DMC est égal à NMF . L'angle d'incidence CMD étant donc égal à l'angle de réflexion FMT , le rayon CM réfléchira en F au foyer de l'hyperbole. Ce que l'on doit entendre de tout autre rayon incident: Et c'est pour cela qu'on a nommé les points F & f , les Foyers.

Ces Courbes ont un grand nombre d'autres propriétés, que l'on peut voir dans l'Excellent Traité des Sections Coniques, de défunt Monsieur le Marquis de l'Hôpital.

F I N.

TABLE DES PROPOSITIONS



TABLE

DES PROPOSITIONS

des Elémens d'Euclide, avec les lieux où elles se trouvent dans cet Ouvrage. Le premier chiffre marque les Propositions d'Euclide. Le second qui est un chiffre Romain indique le Livre de cet Ouvrage où elles se trouvent : Et le troisième, dans quel nombre de ce Livre. Les VII. VIII. & IX. Livres d'Euclide ne regardent que les nombres dont il ne s'agit pas dans la Géométrie. On ne les cite presque jamais, non plus que le X. Livre ; ainsi on n'a pas eu qu'il fût utile de rapporter les Propositions de ces Livres, comme on l'a dit ailleurs.

EUCLIDE LIVRE PREMIER.

1	II.	69	19	II.	89	34	II.	128
2	I.	30	20	II.	66	35	II.	129
3	I.	30	21	I.	17	36	II.	129
4	II.	98	22	II.	67	37	II.	134
5	II.	83	& 68			38	II.	134
6	II.	90	23	II.	29	39	II.	136
7	II.	93	24	II.	104	40	II.	136
8	II.	94	25	II.	104	41	II.	133
9	II.	31	26	II.	95	42	II.	138
10	I.	48	27	II.	26	43	II.	134
11	I.	47	28	II.	28	44	II.	132
12	I.	46	29	II.	25	45	II.	140
13	II.	17	30	I.	73	46	II.	121
14	II.	20	31	I.	72	47	II.	242
15	II.	21	32	II.	79	IV.		78
16	II.	74	71 & 75			48	II.	142
17	II.	79	33	II.	112			
18	II.	89	& 117					

DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

EUCLIDE LIVRE SECOND.

1	III.	17	6	III.	12	11	IV.	54
2	III.	18	7	III.	23	12	III.	27
3	III.	19	8	III.	24	13	III.	28
4	III.	20	9	III.	25	14	IV.	84
5	III.	21	10	III.	26			

EUCLIDE LIVRE TROISIE'ME.

1	I.	87	14	I.	94	27	II.	43
2	I.	83	15	I.	95	28	I.	32
3	I.	91		&	96	29	I.	32
	&	92	16	I.	106	30	I.	85
4	I.	93		&	109	31	II.	44
	II.	48		II.	32			45
5	I.	17	17	I.	113		&	46
6	I.	78	18	I.	106	32	II.	37
7	I.	102	19	I.	108	33	II.	49
8	I.	99	20	II.	41	34	II.	48
9	I.	102	21	II.	40	35	IV.	55
	&	104	22	II.	114	36	IV.	56
10	I.	89	23	I.	98	37	IV.	59
11	I.	81	24	I.	31			
12	I.	82	25	I.	80			
13	I.	80	26	II.	42			

EUCLIDE LIVRE QUATRIE'ME.

1	I.	30	7	II.	126	12	IV.	160
2	II.	100	8	II.	125	13	IV.	161
3	II.	101	9	II.	127	14	IV.	162
4	II.	102	10	IV.	149	15	IV.	163
5	II.	70	& 151			16	IV.	163
6	II.	124	11	IV.	158			

EUCLIDE LIVRE CINQUIE'ME.

1	III.	64	8	III.	91	15	III.	64
2	III.	65	9	III.	52	16	III.	46
3	III.	66	10	III.	92	& 56		
4	III.	67	11	III.	53	17	III.	51
5	III.	68	12	III.	50	& 57		
6	III.	69	13	III.	93	18	III.	49
7	III.	70	14	III.	94	19	III.	48

TABLE DES PROPOSITIONS

20	III.	95	22	III.	62	24	III.	63
21	III.	96	23	III.	88	25	III.	97

EUCLIDE LIVRE SIXIE'ME.

1	III.	99	13	IV.	29	24	IV.	51
2	IV.	16	14	IV.	82	25	IV.	86
3	IV.	17	15	IV.	83	26	IV.	82
4	IV.	10	16	III.	56	27	IV.	94
5	IV.	12	17	III.	57	28	IV.	95
6	IV.	13	18	IV.	26	29	IV.	96
7	IV.	14	& 85			30	IV.	34
8	IV.	27	19	IV.	71	31	IV.	79
9	IV.	22	20	IV.	50	32	IV.	15
10	IV.	20	21	IV.	11	33	IV.	46
11	IV.	83	22	IV.	74			
12	IV.	24	23	IV.	81			

EUCLIDE LIVRE ONZIE'ME.

1	V.	7	15	V.	37	29		
2	V.	8	16	V.	34	30	V.	109
3	V.	10	17	V.	38	31		
4	V.	19	18	V.	31	32	V.	117
5	V.	21	19	V.	30	33	V.	131
6	V.	29	20	V.	49	34	V.	136
7	V.	14	21	V.	51	35	V.	54
8	V.	29	22	V.	50	36	V.	138
9	V.	35	23	V.	52	37	V.	139
10	V.	36	24	V.	107	38	V.	25
11	V.	18	25	V.	108	39	V.	506
12	V.	22	26	V.	53	40	V.	114
13	V.	23	27	V.	103			
14	V.	33	28	V.	105			

EUCLIDE LIVRE DOUZIÈME.

1	IV.	92	8	V.	133	14	V.	112
2	IV.	93	9	V.	137	& 130		
3	V.	124	10	V.	128	15	V.	137
4	V.	125	11	V.	112	16	V.	146
5	V.	23	& 130			17	V.	147
6	V.	119	12	V.	134	18	V.	141
7	V.	119	13	V.	135			

DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

EUCLIDE LIVRE TREIZIE'ME.

1	IV.	66	9	IV.	154		&	154
2	IV.	68	10	IV.	164	16	V.	171
3	IV.	69	11	IV.	170		&	167
4	IV.	70	12	IV.	146	17	V.	161
5	IV.	35	13	V.	150		&	162
6	IV.	132		&	152	18	V.	173
7	IV.	168	14	V.	156			
8	IV.	169	15	V.	153			

EUCLIDE LIVRE QUATORZIÈME.

1	V.	176	4	V.	174	7	V.	180
2	IV.	67	5	V.	178	8	V.	157
3	V.	172	6	V.	179			

EUCLIDE LIVRE QUINZIÈME.

1	V.	181	3	V.	181	5	V.	185
2	V.	182	4	V.	184			

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roy de France & de Navarre, à nos amez & feaux Conscilliers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, Salut. Notre bien amé DENIS MARVILLE Libraire à Paris; nous ayant fait remontrer qu'il lui avoit été mis en main les *Elémens des Mathématiques, Elémens de Geometrie, & l'Art de parler*; ou la *Rhetorique* du Pere LAMY, qu'il souhaiteroit de faire imprimer & donner au Public, s'il nous plaisoit de lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce nécessaires: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter ledit Expofant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer lesdits Livres, en tels volumes, formes, marges, caractères, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de dix années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes; faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance, comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Livres en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changements de titre, ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Expofant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de quinze-cent livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Expofant, & de tous dépens, dommages & intérêts, à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, & ce dans trois mois de la date d'icelle; que l'impression desdits Livres sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & en beaux caractères, conformément aux Reglemens de la Librairie; & qu'avant que de les expoſer en vente, le manuscrit ou imprimé qui aura servi de copie à l'impression dudit Livre sera nûs dans le même état ou l'Aprobation y aura été donnée es mains de notre

très-cher & feal Chevalier Garde des Sceaux de France le ſieur FLEURIAU D'ARMENONVILLE, Commandeur de nos Ordres; & qu'il en fera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & feal Chevalier Chancelier de France le ſieur FLEURIAU D'ARMENONVILLE: Commandeur de nos Ordres; le tout à peine de nullité des Présentes, du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joûir l'Expofant ou ſes ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la copie desdites Présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre, soit tenue pour dûement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conscillers & Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'original: Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires sans demander autre permission, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: C A R tel est notre plaisir. DONNE' à Paris le ving-troisième jour du mois d'Août l'an de grace mil sept cent vingt-quatre, & de notre Règne le neuvième Par le Roy en ſon Conseil, Signé, C A R D O T.

Registré sur le Registre VI. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n^o. 55. fol. 48. conformément aux anciens Reglemens, confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris le 29 Août, 1724.

BRUNET, Syndic.

De l'Imprimerie de G. F. QUILLAU, à l'Annonciation.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

<http://www.irem-paris7.fr.st/>

- Demander notre catalogue en écrivant à

**IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05**

TITRE :

Géométrie ou de la mesure de l'étendue

AUTEUR :

Lamy Bernard

RESUME :

“ Quoique les Nouveaux Elémens de Géométrie se multiplient chaque jour, nous avons cru que ceux du R. P. Lamy, de l'Oratoire, méritaient une nouvelle édition. La marche méthodique et raisonnée qu'il suit dans l'enchaînement des vérités géométriques, la clarté et la précision qu'il emploie dans leur expositions, le firent accueillir autrefois et sont capables encore de soutenir l'empressement du Public ”. Tel est l'Avis des libraires pour justifier les rééditions de l'ouvrage reproduit dans cette brochure.

MOTS CLES :

Géométrie-éléments d'Euclide-sections coniques

Editeur : IREM

Université PARIS 7-Denis Diderot

Directeur responsable de la

publication : M. ARTIGUE

Case 7018 - 2 Place Jussieu

75251 PARIS Cedex 05

Dépôt légal : 1997

ISBN : 2-86612-137-6