

M : A.T.H.



ΜΝΕΜΟΣΥΝΗ

UNIVERSITE DENIS DIDEROT
PARIS VII

Cette brochure est réalisée par l'IREM PARIS 7 DENIS DIDEROT avec le concours de la
D.L.C., des MAFPEN de Paris, Créteil et Versailles.

Mnémosyne

personnification de la mémoire.

Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite;
de cette union naquirent les neuf Muses.

(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture: « **La mémoire** »
gravure allégorique d'après Gravelot (XVII^{ème} siècle)

MEMOSYNE

M: *Mathématiques*

A. *Approche par les*

T. *textes*

H. *historiques*



SOMMAIRE

<i>Editorial</i>	<i>p. 5</i>
<i>Présentation du texte de Leibniz</i>	<i>p. 7</i>
<i>Histoire et origine du calcul différentiel</i>	<i>p. 13</i>
<i>Chronologie</i>	<i>p. 39</i>
<i>Bibliographie</i>	<i>p. 43</i>
<i>Dans nos classes « Lettre à La Roque »</i>	<i>p. 49</i>
<i>Dans nos classes « Différences finies »</i>	<i>p. 59</i>
<i>Note d'écoute</i>	<i>p. 64</i>



Copie d'un portait de G W Leibniz par Andreas Scheits (1711).
Musée de Hanovre

EDITORIAL

Nous avons publié dans les numéros 6 et 8 de Mnémosyne une étude sur le calcul différentiel tel qu'il fut inventé par Leibniz et par Newton respectivement. Certains textes importants en ce domaine n'étaient jusqu'à présent que peu ou pas disponibles. C'est pourquoi nous vous présentons dans ce numéro l' *Histoire et Origine du Calcul Différentiel* de Leibniz. Un numéro suivant présentera des textes de Newton¹.

Leibniz écrit en 1714 son *Histoire et Origine du Calcul Différentiel* pour "contribuer au développement de l'art d'inventer, en faisant connaître les méthodes sur des exemples remarquables", mais aussi pour répondre aux accusations de plagiat portées par certains mathématiciens britanniques, qui l'accusent d'avoir eu connaissance des travaux de Newton et de s'en être inspiré pour inventer sa méthode de calcul différentiel.

Une **chronologie** permet de situer les publications et les faits connus par les nombreux échanges épistolaires concernant le calcul différentiel, ainsi que quelques étapes de la controverse qui fit rage au XVIIIème siècle et laissa des marques durables dans les écoles de mathématiques britanniques et continentales. Nous avons aussi rédigé quelques **notes biographiques** sur les personnages cités par Leibniz.

Ce texte nous a inspiré deux activités pour les élèves: l'une autour d'une *Lettre à La Roque* détaille une méthode de calcul de l'aire du cercle, l'autre inspirée par l' *Histoire et Origine du Calcul Différentiel* donne une méthode de sommation de séries.

¹Nous avons repris pour *Histoire et Origine du Calcul Différentiel* le texte latin publié par Gerhardt en nous aidant de la traduction française de Régine Szeftel-Zylberbaum publiée dans Les Cahiers de Fontenay N°1 (décembre 1975), p. 58-98 et de la traduction anglaise de J. M. CHILD *The Early manuscripts of Leibniz* (1920) publiée dans The Open Court publishing company, Chapitre III, p. 22-58.

PRESENTATION DU TEXTE DE LEIBNIZ

Anne Michel-Pajus

Si nous avons choisi de présenter ce texte, ce n'est pas tant pour instruire la controverse de priorité entre deux immenses créateurs que pour éclairer la gestation d'une théorie majeure pour l'histoire des mathématiques suivant ainsi les motivations mêmes que Leibniz expose dans son introduction.

Il y précise le fond du débat : Leibniz ne prétend pas avoir inventé la méthode qui utilise les développements en série (bien qu'il lui ait apporté des améliorations substantielles - voir fin du texte), mais le **calcul différentiel**, qui lui semble beaucoup plus fondamental, par sa portée universelle, alors que la méthode des séries n'est qu'un outil (local, à l'intérieur du calcul analytique) pour l'approximation. Il s'agit d'affranchir par un **symbolisme** approprié l'imagination de l'attention aux figures (du point de vue différentiel) analogue à l'invention de DESCARTES (pour la géométrie non différentielle) ou de VIETE (pour l'étude des équations).

Il entreprend donc le récit de la genèse de ses travaux, que l'on peut découper en deux phases:

1) L'apprentissage et l'amélioration de la tradition

a) **Le jeune Leibniz** : une formation classique (scolastique) et un regard curieux sur les nombres et leurs combinaisons.

b) **la rencontre avec Huygens** : les progrès en géométrie (dans la tradition des indivisibles), la lecture de Pascal et le théorème d'Archimède, la méthode des métamorphoses et la quadrature du cercle, le retour des séries.

c) **les contacts avec la Royal Society** : l'extraction des racines par des séries (la méthode de Newton), les recherches de développements des fonctions classiques.

2) le retour en Allemagne : la véritable création : le calcul différentiel

a) **retour aux travaux de jeunesse**, à la combinatoire et aux différences. Le succès de la série de Huygens ; le triangle arithmétique et le triangle harmonique montrent l'efficacité de l'idée des différences pour la sommation des séries.

b) **Théorisation et extension**, aux séries polynomiales, puis rationnelles, puis géométriques.

c) **Généralisation au continu** et application à la géométrie; le rôle du symbolisme et la supériorité du nouveau calcul : universalité et facilité.

L'objectif polémique du récit brouille certes un peu l'aspect historique, mais plus encore le fait qu'il s'agit d'un regard porté "après coup" sur les tâtonnements qui ont conduit à l'élaboration d'un système symbolique qui permet de rendre compte de certaines intuitions. Toutes proportions gardées, Leibniz est confronté à la même difficulté que nous rencontrons quand nous voulons exprimer dans notre langage moderne des notions plus anciennes. Le symbolisme postérieurement mis au point est beaucoup plus agréable à manipuler, mais introduit une distorsion d'autant plus forte qu'il est indissociable des concepts qu'il traduit, véhicule et qui se sont formés simultanément.

D'un point de vue moderne nous pouvons distinguer deux types de résultats dans ce texte: les uns portent sur les séries et le calcul des différences finies, les autres sur la géométrie différentielle, tangentes et quadratures. Plus que dans la découverte (discutable et discutée) de chacun de ces résultats, l'invention de Leibniz réside dans la conjonction et l'interaction de ces deux champs, unifiés justement par un symbolisme révolutionnaire. Le récit présente ainsi un double balancement conceptuel et chronologique entre les aspects discret et continu, d'une part, et entre l'avant et l'après de l'élaboration de ce Calcul. Dans la phase "avant le calcul", l'auteur se borne à des observations sans justifications, dont certaines seront élucidées plus loin, et d'autres pas. Il est important de les lire en se laissant porter par la disposition des nombres, mais nous essayons cependant de donner ci-dessous des indications pour une justification en termes modernes de ces résultats non prouvés.

Les différences finies et les sommes

Avec le symbolisme moderne, proche de celui que Leibniz introduit plus loin, à partir d'une suite (x) de terme général x_n , on peut définir une suite (dx) de terme général $(dx)_n = x_n - x_{n+1}$, nommée suite des différences premières, puis par réitération, la suite (ddx) , suite des différences premières de (dx) , nommée suite des différences secondes de (x) , puis $d^3x = (d(ddx))$, etc... Inversement, on peut construire une suite $(\int x)$ dont le n -ième terme est la somme partielle de rang n des termes de (x) , et par réitération, $(\iint x)$, $(\int^3 x)$, etc...

En notant $a = x_0$, le premier terme et $w = x_N$ le dernier terme, on a donc

$$(E_0) \quad \sum_{k=0}^{N-1} dx_k = x_0 - x_N$$

$$(E_q) \quad \forall q \geq 0 \quad \sum_{k=q}^{N-1} dx_k = x_q - x_N$$

$$\int x_n = \sum_{k=0}^n x_k$$

Un cas particulier intéressant est celui où $x_n = P(n)$, P étant un polynôme de degré p . La suite $(d^{p+1}x)$ est alors nulle et la suite $(d^p x)$ est constante et vaut $p!$.

Le cas particulier des suites qui tendent vers 0

Un autre cas stimule l'imagination de Leibniz: celui du triangle "de Pascal". L'Art combinatoire le fascine depuis toujours (c'était son sujet de thèse) et il retrouve les combinaisons dans des formules qu'il obtient en supposant que la suite tend vers 0 (ce qu'il exprime par "décroissant à l'infini"). Tout se passe comme si le "terme dernier" ω était nul, quand on effectue la sommation jusqu'à l'infini. Les équations (E_0) et (E_q)

deviennent alors respectivement: $\sum_{k=0}^{\infty} dx_k = x_0 = a$ et $\sum_{k=q}^{\infty} dx_k = x_q$

Examinons en détail les formules du texte (que nous avons repérées par un [])

[1] Le fait de négliger "le dernier terme" permet à Leibniz d'exprimer a en fonction d'abord des différences secondes puisque l'on a de même $(dx)_k = \sum_{p \geq k} (d^2x)_p$ et plus généralement $(d^n x)_k = \sum_{p \geq k} (d^{n+1}x)_p$,

et donc $a = \sum_{k=0}^{\infty} (dx)_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p \geq k} (d^2x)_p \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(d^2x)_n$

(Cette dernière égalité s'obtient en réordonnant les termes et en remarquant que pour n fixé, $(d^2x)_n$ intervient une fois tant que k est inférieur ou égal à n , ce qui fait $n+1$ fois).

Ceci correspond à : $a - \omega = 1 l + 2 m + 3 n + 4 o + 5 p + \text{etc.}$

En réitérant avec les différences troisièmes : $a = \sum_{k \geq 0} (k+1)(d^2x)_k = \sum_{k \geq 0} C_{k+1}^1 \left(\sum_{p \geq k} (d^3x)_p \right) = \sum_{n \geq 0} C_{n+2}^2 (d^3x)_n$

(En effet, chaque $(d^3x)_n$ intervient avec le coefficient C_{k+1}^1 tant que k est inférieur ou égal à n , ce qui fait C_{n+1}^2 au total).

La formule générale $x_0 = \sum_{k \geq 0} C_{n+p}^p (d^{p+1}x)_k$ peut se démontrer par récurrence, en utilisant la formule

$C_p^p + C_{p+1}^p + \dots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$, qui se "lit" bien sur le triangle de Pascal, en sommant les termes sur une ligne horizontale (cf. tableau p. 19).

[2] On peut retrouver ce résultat en sommant les termes des diagonales ascendantes. Chaque somme diagonale vaut dx_k , en utilisant les relations classiques du calcul aux différences finies:

$$\begin{aligned} dx_0 &= dx_0 & f &= a - b \\ dx_1 &= dx_0 - d^2x_0 & g &= f - l \\ dx_2 &= dx_1 - d^2x_1 = (dx_0 - d^2x_0) - (d^2x_0 - d^3x_0) = dx_0 - 2d^2x_0 + d^3x_0 & h &= f - 2l + q \\ dx_k &= dx_0 - C_k^1 d^2x_0 + C_k^2 d^3x_0 + \dots + (-1)^k d^{k+1}x_0 \end{aligned}$$

[3] Il suffit alors de sommer les formules du triangle [2] le long des colonnes, et d'adopter la nouvelle notation. Cette nouvelle formule appliquée à la suite $\int y$ au lieu de y donne immédiatement [4]

Mathématiques et métaphysique

Le passage de l'observation à la mise en relief du concept de différences est provoqué ou tout au moins catalysé par la préoccupation logique de tout ramener à la vérité identique, qui peut nous sembler incongrue dans ce contexte, mais que Leibniz expose au début, comme point de départ (fondement ?) de sa réflexion.

Cette observation est très active: l'observation du tableau des combinaisons, issu d'une suite particulière, celle des 1, conduit au concept des suites-différences successives pour une suite quelconque. L'observation des tableaux de formules ainsi obtenus conduit à l'introduction d'une nouvelle suite, x , qui

engendre les coefficients du tableau. Les lectures opérées de différents points de vue, en lignes, colonnes ou diagonales, font surgir des formules dont l'harmonie cachée est révélée par un symbolisme approprié.

La même diversification des points de vue opère en géométrie. En jouant sur trois couples différents de triangles semblables au triangle "caractéristique", Leibniz obtient trois théorèmes de géométrie. Ainsi se révèle l'universalité de la méthode "de la quadratrice": " nous réduisons le calcul des superficies des solides de révolution aux problèmes de quadratures planes et de rectification de courbes, et en même temps nous réduisons le problème des quadratures au problème inverse des tangentes."

L'introduction du symbolisme ne se contente pas de faciliter les calculs, mais il modifie aussi les points de vue sur le calcul proprement dit, en faisant apparaître les différences finies et sommations comme des opérateurs, et les suites comme les valeurs prises sur les entiers par des fonctions. De là découle naturellement l'application de l'opérateur différence aux fonctions qui mesurent les objets géométriques, et l'extension de l'usage de ce calcul "étonnamment facile".

On ne peut séparer les recherches mathématiques de Leibniz de ses recherches métaphysiques. Citons un passage de la *Monadologie*:

"57. Et comme une même ville regardée de différents côtés paraît toute autre, et comme multipliée perspectivement , il arrive de même que par la multitude infinie des substances simples, il y a comme autant de différents univers, qui ne sont pourtant que les perspectives d'un seul selon les différents points de vue de chaque Monade.

58. Et c'est le moyen d'obtenir autant de variété qu'il est possible, mais avec le plus grand ordre, qui se puisse, c'est-à-dire, c'est le moyen d'obtenir autant de perfection qu'il se peut."³

Cette multiplication des points de vue n'est pas seulement pour Leibniz un moteur puissant de l'invention; sur le plan métaphysique, elle lui permet de concilier la conception classique du Vrai, liée à l'unité, puisque la vérité est Une, et l'acceptation de la pluralité, que Spinoza, par exemple, rattache à l'erreur, les différentes perspectives étant validées par ce que chacune exprime à sa façon l'unité du Monde.

³*La Monadologie*, 1714, Livre de Poche, 1991, p.156-157

ACTA ERUDITORUM

ANNO MDC LXXXIV

publicata,

ac

SERENISSIMO FRATRUM PARI,

DN. JOHANNI
GEORGIO IV,

Electoatus Saxonici Hæredi,

&

DN. FRIDERICO
AUGUSTO,

Ducibus Saxoniae &c.&c.&c.

PRINCIPIBUS JUVENTUTIS
dicata.

*Cum S. Caesarea Majestatis & Potentissimi Ele-
ctoris Saxoniae Privilegiis.*

L I P S I Æ.

Prostant apud J. GROSSIUM & J. F. GLETITSCHIUM.

Typis CHRISTOPHORI GÜNTHERI.

Anno MDC LXXXIV.

Frontispice des Acta Eruditorum :

Journal dans lequel Leibniz a publié l'essentiel de ses écrits mathématiques

HISTOIRE ET ORIGINE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

Il est très utile de connaître les véritables origines des inventions mémorables, surtout de celles dont la découverte n'est pas due au hasard, mais au pouvoir de la pensée³. En effet, cela permet non seulement à l'Histoire de reconnaître la part qui revient à chaque inventeur et invite d'autres esprits à rechercher les mêmes titres de gloire, mais contribue de plus au développement de l'art d'inventer, en faisant connaître la méthode sur des exemples remarquables.

Parmi les découvertes très célèbres de ce temps se trouve un nouveau genre d'analyse mathématique, connu sous le nom de "Calcul différentiel" ; or, bien qu'on ait déjà suffisamment exposé sa structure, son origine en revanche, ainsi que le procédé employé pour le découvrir, ne sont pas encore publics. Ce calcul a été inventé il y a environ quarante ans⁴ par l'Auteur, et une version concise en a été publiée neuf ans plus tard⁵, il y a environ trente ans; à la suite de cette parution, il a non seulement été reconnu par des mémoires, mais surtout par son usage, puisque de nombreuses découvertes remarquables sont dues à son aide, et sont mises en lumière en particulier dans les *Acta Eruditorum*⁶, puis dans les *Commentaires* publiés de l'Académie Royale des Sciences : la Mathématique semble ainsi prendre un nouveau visage.

Or, personne n'a eu de doute sur le véritable inventeur jusqu'à ce que, récemment, en 1712, certains nouveaux venus, par ignorance de la production scientifique des temps antérieurs, ou par envie, ou dans l'espoir

³ *Historia et Origo Calculi Differentialis*, in *Mathematische Schriften*, ed. C.I.Gerhardt, 1849, réed. Olms, 1962. La traduction et les notes ci-dessus ont été établies par Anne MICHEL-PAJUS, à partir du texte latin, de la traduction de Régine SZEFTTEL-ZYLBERBAUM parue dans *Les cahiers de Fontenay*, N° 1, novembre 1975, Ed. ENS de Fontenay-aux-Roses, et de J.M.CHILD, *The early manuscripts of Leibniz*, 1920, The Open Court publishing company, Chapitre III.

⁴ Sans doute en 1675.

⁵ probablement le *Nova methodus pro maximis et minimis*, traduit par Marc Parmentier in *Naissance du calcul différentiel*, 1989, Vrin, p 107-117.

⁶ *Acta Eruditorum* est le titre d'un journal fondé en 1682 par Leibniz et un groupe de ses amis à Leipzig. Les "Commentaires" sont ceux de l'Académie Royale des Sciences de Londres.

de se rendre célèbres grâce à une querelle, ou enfin par basse flatterie, ont dressé un rival contre l'Auteur ; et les louanges adressées à ce rival ont causé beaucoup de tort à l'Auteur, car ce premier semblait ainsi avoir détenu plus de vérités qu'il n'en a été découvert depuis sur le sujet en question. Ces nouveaux venus ont usé de ruse en retardant le déchaînement de la querelle jusqu'à la disparition de ceux qui étaient au courant de ces faits : Huygens, Wallis, Tschirnhaus⁸, et d'autres dont le témoignage aurait pu les réfuter. Telle est bien l'une des raisons pour lesquelles les prescriptions fondées sur le temps ont été introduites en justice : car, en raison de la culpabilité de l'accusateur, ou de sa ruse, les requêtes peuvent être différées jusqu'à ce que disparaissent les arguments favorables à l'adversaire et susceptibles de le protéger.

Ils ont même changé le fond du débat ; en effet, dans leur écrit, publié en 1712 dans le dessein d'inspirer le doute sur Leibniz, sous le titre de *Correspondance*⁹ de John Collins, à peine trouve-t-on quelque chose sur le calcul différentiel : il n'y en a que pour les séries qu'ils appellent infinies. C'est Nicolas Mercator, originaire du Holstein, qui, le premier, rendit publiques des séries de ce genre, obtenues par division¹⁰, mais leur généralisation, par extraction de racines, est due à Isaac Newton¹¹. C'est une découverte utile, qui introduit les méthodes d'approximation arithmétiques dans le Calcul Analytique, mais pas dans le calcul différentiel.

C'est de manière trompeuse aussi que, lorsque ce rival obtient une quadrature quelconque en additionnant des quantités qui épuisent progressivement la surface de la figure, ils proclament aussitôt que l'on a fait usage du Calcul Différentiel (par exemple : p. 15 de la *Correspondance*). Mais dans ces conditions, depuis un certain temps, Kepler (dans le *Dolio Austriaco*), Cavalieri, Fermat, Huygens et Wallis auraient connu le Calcul différentiel, et qui donc n'utilise pas ces indivisibles¹² ou infiniment petits ? Huygens en revanche, qui, sans nul doute, n'ignorait pas les méthodes des fluxions, tout autant que ces adversaires les connaissent et les utilisent, eut l'équité de reconnaître que ce Calcul allumait une clarté nouvelle en géométrie

⁸Quand commencent les attaques de Fatio, en 1699, Wallis et Tschirnaus sont encore en vie. Mais en 1712, date du rapport défavorable remis par la Royal Society, les trois hommes sont morts.

⁹ *Commercium epistolicum*, en latin

¹⁰Mercator divise en puissances croissantes 1 par $1 + x$. En portant en ordonnée $\frac{1}{1+x}$ on obtient une hyperbole équilatère. L'intégration terme à terme de la série obtenue donne l'aire d'un espace hyperbolique, dont on sait depuis Grégoire de Saint Vincent qu'il permet de calculer les logarithmes.

¹¹ Cette méthode est développée dans l'*Epistola Prior* (1676), qui sera traduite dans un prochain numéro. Comme l'explique son auteur, elle lui a été inspirée à la fois par la formule du binôme et par les techniques médiévales d'extraction de racines sous forme de tableaux. On n'y trouve en effet aucune trace de la "méthode des fluxions", publiée pour la première fois en 1687.

¹²La méthode des indivisibles est théorisée par Cavalieri en 1653. Cf. *Mnemosyne*, Numéro spécial, Histoires de pyramides, ch 4.

et en reculait désormais les limites de façon étonnante. Et vraiment, il n'est venu à l'idée de personne, avant Leibniz, de constituer un Algorithme propre au nouveau calcul, qui permet d'affranchir l'imagination d'une attention continuelle aux figures, ce que Viète et Descartes avaient réalisé en géométrie ordinaire (ou géométrie d'Apollonius) ; mais Descartes avait clairement exclu de son calcul les domaines plus élevés touchant à la géométrie d'Archimède et les lignes que, pour cette raison, il appelait mécaniques¹³. Mais en réalité, déjà la géométrie entière, dans toute son extension, a été soumise au calcul nouveau de Leibniz, le calcul Analytique, et les lignes mécaniques de Descartes, les transcendentes elles-mêmes, ont aussi été réduites à des équations spécifiques, en considérant les différences dx , ddx , etc.- ainsi que les sommes qui sont les inverses de ces différences - comme des fonctions de x , et en les introduisant ainsi dans le calcul alors qu'auparavant on n'avait pas employé d'autres fonctions que x , xx , x^3 , $\sqrt{x}$, etc. c'est-à-dire des puissances et des racines. Par conséquent, on peut comprendre que ceux qui ont exprimé ces quantités [différentielles] par zéro, comme Fermat, Descartes¹⁴ et ce rival en personne, dans ses *Principia* publiés en 16**., sont restés par ce fait très éloignés du calcul différentiel car, dans ces conditions, on ne peut distinguer ni les ordres de différences, ni les fonctions différentielles des diverses quantités.

Eh bien, que de telles méthodes aient été mis en oeuvre par quelqu'un avant Leibniz, il n'en reste pas la moindre trace nulle part. Et l'on pourrait, avec autant de droit que la partie adverse revendique pour Newton la découverte de méthodes de ce genre, revendiquer aussi bien celle de l'analyse cartésienne pour Apollonius, qui détenait l'idée essentielle, à défaut du calcul lui-même.

En conséquence, les nouvelles inventions dues au calcul différentiel n'ont pas été connues des disciples de Newton, qui n'ont pu ni produire de découverte d'une quelconque importance, ni même éviter les paralogismes, jusqu'à ce qu'ils aient appris le calcul de Leibniz, comme on peut le voir dans la recherche du problème de la chaînette par David Gregory.

Or ces chercheurs de querelle ont eu l'audace d'abuser du nom de la Société Royale d'Angleterre, qui plus tard a pris soin de faire savoir qu'elle n'avait rien publié de définitif à ce sujet (ce qui est digne de son équité), alors que les deux parties n'avaient pas été entendues, et que notre ami en personne ne savait même pas que la Société avait entrepris une enquête sur ce sujet : du reste, on aurait dû lui communiquer les noms de ceux

¹³ Descartes accepte comme "géométriques" les courbes du second degré comme les coniques, étudiées par Apollonius, mais rejette, sous le nom de "mécaniques", celles de degré supérieur ou de nature transcendante, comme la spirale d'Archimède.

¹⁴cf. "La querelle entre Descartes et Fermat à propos des tangentes", *Mnemosyne* n°2.

à qui la Société allait confier la tâche de faire un rapport¹⁵ pour qu'ils puissent être soit récusés, soit instruits de l'affaire. Quant à l'auteur même, surpris que sa bonne foi fût attaquée non par des arguments, mais par des fictions, il a considéré que des accusateurs de ce genre ne méritaient pas de réponse : il tenait pour certain que, devant ceux qui ne sont pas versés en cette matière (c'est-à-dire la majorité des lecteurs), il plaiderait sa cause en vain et qu'en revanche, ceux qui s'y entendaient reconnaîtraient aisément l'injustice des accusations.

Il était par hasard absent de chez lui quand ses adversaires ont répandu ces calomnies ; de retour après un intervalle de deux ans, absorbé par ses affaires, il n'a pas pu retrouver et examiner ce qui lui restait de son ancienne correspondance, de manière à se remettre en mémoire des événements aussi lointains, c'est-à-dire datant de plus de quarante ans auparavant ; en effet, il n'avait pas conservé de copies de la plupart des lettres qu'il avait écrites autrefois, et celles que Wallis a reçues en Angleterre et publiées (avec le consentement de l'auteur) au troisième tome de ses *Oeuvres*¹⁶, Leibniz lui-même, pour la plupart, ne les possédait pas.

Cependant, les amis n'ont pas manqué, qui avaient le souci de sa renommée : surtout un Mathématicien contemporain de premier rang¹⁷, très versé dans cette théorie, qui n'était engagé envers aucun des deux camps, et dont la partie adverse avait, en vain, tenté de gagner par ruse la bienveillance, a proclamé en toute bonne foi, en donnant les raisons de son jugement - et il a rapporté que cela n'était pas équitablement porté à la connaissance publique - qu'il lui semblait que ce rival n'avait non seulement pas découvert le calcul différentiel mais encore ne l'avait même pas suffisamment compris. Un autre ami¹⁸ de l'inventeur a mis en lumière ces critiques et d'autres encore dans un court pamphlet pour rabattre de vaines vantardises.

Mais il vaut surtout la peine de connaître la voie même et la méthode par lesquelles l'inventeur est parvenu à ce nouveau genre de calcul : en effet, elles sont restées jusqu'à présent ignorées du public, peut-être même de ceux qui voudraient être pour une part dans son invention ; aussi s'était-il résolu à exposer et transmettre l'évolution de ses recherches en analyse, en partie de mémoire, en partie d'après ce qui demeure consigné dans les restes de quelques vieux manuscrits, et ainsi à éclairer, dans un petit Traité en règle. l'Histoire de cette haute Mathématique et l'art d'inventer lui-même. Mais comme ce projet ne pouvait alors se

¹⁵ Il faudra attendre une enquête de de Morgan en 1852 pour connaître la liste complète des membres de la commission !

¹⁶ Il s'agit des lettres de 1676, publiées en 1699 dans l'*Algèbre*.

¹⁷ Il s'agit de Jean Bernoulli, qui relève une erreur dans la Proposition X du Livre II des *Principia*.

¹⁸ Probablement Leibniz lui-même, dans un pamphlet anonyme, publié en 1713.

réaliser à cause d'occupations urgentes, l'auteur laissa dans l'intervalle un ami bien informé éclairer brièvement une partie de ce qu'il fallait dire et satisfaire un peu de la curiosité du public.

L'auteur de cette nouvelle Analyse, dans la fleur de sa jeunesse, avait joint aux études d'histoire et de jurisprudence des réflexions plus élevées pour lesquelles il avait un goût inné et, entre autres, il prenait plaisir aux propriétés et combinaisons des nombres : il avait même publié un opuscule sur l'*Art Combinatoire* en 1666 - plus tard réimprimé sans l'avis de l'auteur. Et encore tout jeune, alors tourné vers la logique, il avait remarqué que l'analyse ultime des vérités qui dépendent de la raison se réduit à deux choses : les définitions et les vérités identiques, les seules parmi les vérités nécessaires, à être vraiment primitives et indémontrables ; comme on lui objectait que les vérités identiques ne sont que des bagatelles inutiles, il donnait la preuve du contraire sur des exemples : entre autres, il indiquait déjà alors que ce grand Axiome : "Le Tout est plus grand que la partie", se démontrait par un syllogisme, dont la majeure était une définition et la mineure une proposition identique¹⁹. En effet, si de deux choses, l'une est égale à une partie de l'autre, on appelle la première "la plus petite", et la deuxième "la plus grande" : ce qui est la définition. Par conséquent, si l'on ajoute à cette définition l'axiome identique et indémontrable suivant : "tout ce qui est doué de grandeur est égal à soi-même", ou " $A = A$ ", on obtient le syllogisme :

- "Toute chose égale à une partie d'une autre est plus petite que cette autre" (par définition).
- Une partie est égale à une partie du tout (c'est-à-dire à elle-même par vérité identique).
- Donc "la partie est plus petite que le tout" C.Q.F.D.

Par la suite, il observait que, à partir de ceci : " $A = A$ " ou à partir de son équivalent : " $A - A = 0$ " (comme on peut le voir au premier abord, sans aller plus loin), on tire une très belle propriété des différences à savoir :

$$A \underbrace{-A+B}_{+L} \underbrace{-B+C}_{+M} \underbrace{-C+D}_{+N} \underbrace{-D+E}_{+P} - E = 0$$

¹⁹ Cette démonstration du fait que "le tout est plus grand que la partie" figure dans plusieurs fragments de manuscrits, le plus ancien datant de 1679 . D'après Louis Couturat (*La logique de Leibniz*, Félix Alcan, 1901), Leibniz s'oppose à Descartes dans sa théorie de la vérité: "pour savoir si l'on peut et si l'on doit démontrer une proposition, il ne faut pas se demander si elle est évidente ou indubitable, ni même si on la conçoit clairement et distinctement, mais si elle est *identique*, c'est-à-dire réductible au principe d'identité". Un échange au sujet de cet axiome particulier a lieu en 1696 avec Jean Bernoulli. Cet axiome est proposé par Euclide et déjà discuté par Hobbes.

Si maintenant, on pose que A, B, C, D, E sont des quantités croissantes et que les différences des deux quantités consécutives B-A, C-B, D-C, E-D, sont appelées L, M, N, P, il s'ensuit alors que :

$$A + L + M + N + P - E = 0, \quad \text{ou :} \quad L + M + N + P = E - A,$$

c'est-à-dire que la somme des différences entre termes consécutifs (quel que soit le nombre) est égale à la différence entre les deux termes extrêmes.

Si, par exemple, à la place de : A, B, C, D, E, F, on prend des nombres carrés : 0, 1, 4, 9, 16, 25, on découvrira, en fait de différences, les nombres impairs : 1, 3, 5, 7, 9.

0	1	4	9	16	25
	1	3	5	7	9

De manière évidente, on aura :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 - 0 = 25,$$

$$\text{et : } 3 + 5 + 7 + 9 = 25 - 1 = 24,$$

et l'on obtiendra le même résultat, quel que soit le nombre de termes ou de différences et quels que soient les termes choisis comme extrémités.

Prenant plaisir à une découverte aussi facile et agréable, notre jeune homme s'essayait à différentes séries numériques, et parvenait même à des différences secondes (ou différences de différences) et à des différences troisièmes (ou différences entre différences de différences) et ainsi de suite.

De cette manière, il observait que s'annulent les différences secondes des nombres entiers naturels (c'est-à-dire des nombres pris dans l'ordre à partir de zéro), que s'annulent les différences tierces des carrés obtenus à partir des nombres naturels, que s'annulent les différences quatrièmes des cubes, les différences cinquièmes des bicarrés, les différences sixièmes des nombres élevés à la puissance 5 et ainsi de suite ; et il observait que la différence première des nombres entiers naturels était constante et égale à 1, que la différence seconde des carrés était égale à $1.2 = 2$, que la différence troisième des cubes était égale à $1.2.3 = 6$, la différence quatrième des bicarrés à $1.2.3.4 = 24$, la différence cinquième des nombres élevés à la puissance 5 égale à $1.2.3.4.5 = 120$, et ainsi de suite; observations que d'autres pouvaient faire depuis quelque temps, mais, pour l'auteur, elles étaient neuves et invitaient à continuer par leur agréable facilité .

Cependant, il réfléchissait surtout à des nombres qu'il appelait "combinatoires", dont on connaît cette table :

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462

Tout suite horizontale ou verticale contient toujours les différences premières de la suite immédiatement consécutive, les différences secondes de la suite qui lui succède en second lieu, et les différences troisièmes de la suite qui lui succède en troisième lieu, etc...; et n'importe quelle suite horizontale ou verticale contient les sommes de la suite qui la précède immédiatement, les sommes des sommes (ou sommes secondes), de la suite qui la précède en second lieu, les sommes troisièmes de la suite qui la précède en troisième lieu.²⁰

Pour ajouter quelque chose qui n'est peut-être pas banal, il découvrirait aussi des théorèmes à propos des différences et des sommes qui sont les suivantes²¹ :

La suite a, b, c, d, e, etc ... décroissant à l'infini, soient :

les termes	a	b	c	d	e		etc ...
les différences 1ères	f	g	h	i	k		etc ...
les différences 2èmes		l	m	n	o	p	etc ...
les différences 3èmes			q	r	s	t	etc ...
les différences 4èmes				β	γ	δ	etc ...
etc ...				λ	μ	ν	etc ...

On pose "a" comme terme premier et " ω " comme terme dernier. L'auteur trouvait alors :

$$\begin{aligned}
 a - \omega &= 1 f + 1 g + 1 h + 1 i + 1 k + \text{etc} \\
 a - \omega &= 1 l + 2 m + 3 n + 4 o + 5 p + \text{etc} \\
 [1] \quad a - \omega &= 1 q + 3 r + 6 s + 10 t + 15 u + \text{etc} \\
 a - \omega &= 1 \beta + 4 \gamma + 10 \delta + 20 \varepsilon + 35 \theta + \text{etc, etc.}
 \end{aligned}$$

²⁰Ces propriétés se retrouvent aisément en notant C_{i+j}^i l'élément du tableau situé sur la ième ligne et jème colonne (numérotées à partir de l'indice 0).

²¹Les chiffres entre [] renvoient à la présentation du texte p. 9 et 10. pour quelques compléments mathématiques

et en sens inverse :

$$\begin{array}{rcl}
 & + 1 f & \\
 & - 1 l & \\
 + 1 f & & + 1 q \\
 & - 2 l & - 1 \beta \\
 + 1 f & & + 3 q & + 1 \lambda \\
 [2] \quad a - \omega = & - 3 l & - 4 \beta & \\
 & + 1 f & + 6 q & \text{etc.} \\
 & - 4 l & & \text{etc.} \\
 & + 1 f & & \text{etc.} \\
 & & & \text{etc.}
 \end{array}$$

Par conséquent, en adoptant la terminologie introduite plus tard par l'auteur, et en appelant y n'importe quel terme d'une suite (et dans ce cas même $a = y$), on pourra appeler la différence première dy , la différence seconde ddy , la différence troisième d^3y , la différence quatrième d^4y , et en appelant x n'importe quel terme d'une deuxième suite, on pourra appeler la somme de ces termes $\int x$, la somme des sommes (ou somme seconde) $\iint x$, la somme troisième $\iiint x$, et la somme quatrième $\iiint x$.

Si l'on pose ensuite que : $1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc}$, sont égaux à x , c'est-à-dire que x représente les nombres naturels, dont la différence première $dx = 1$, alors :

$$\begin{array}{ll}
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \text{etc} & \text{font } \int x \\
 \text{et} & 1 + 3 + 6 + 10 + \text{etc} \text{ font } \iint x \\
 & 1 + 4 + 10 + 20 + \text{etc} \text{ font } \iiint x \\
 & 1 + 5 + 15 + 35 + \text{etc} \text{ font } \iiint x
 \end{array}$$

et ainsi de suite.

D'où finalement, il résulte :

$$[3] \quad y - \omega = dy \cdot x - ddy \cdot \int x + d^3y \cdot \iint x - d^4y \cdot \iiint x + \text{etc},$$

ce qui est égal à y , si l'on convient de continuer à l'infini c'est-à-dire de rendre $\omega = 0$.

D'où il s'ensuit la somme de la suite y elle-même, soit

$$[4] \quad \int y = yx - dy \cdot \int x + ddy \cdot \iint x - d^3y \cdot \iiint x + \text{etc.}^{22}$$

²² Ce résultat est généralement attribué à Jean Bernoulli qui le donne dans les *Acta Eruditorum* en 1694, ou à Brook Taylor qui l'obtient comme cas particulier de son théorème général (publié en 1715).

Or, ces deux théorèmes ont pour propriété remarquable d'être également valides dans les deux calculs différentiels, aussi bien le Calcul différentiel numérique que le Calcul différentiel infinitésimal : nous parlerons plus bas de la distinction à établir entre eux.

Or, l'application des vérités numériques à la Géométrie, et la considération des suites infinies étaient alors complètement inconnues de notre jeune homme, qui se contentait, non sans plaisir, de l'observation des propriétés de ce genre dans les suites des nombres. Et, en dehors des règles pratiques les plus banales, il ne connaissait rien en Géométrie, à peine avait-il lu Euclide avec assez d'attention, absorbé comme il l'était par des études totalement différentes. Par hasard toutefois, il tomba sur la *Contemplation pleine d'agrément des Courbes* de Vincent Léotaud, où cet auteur traitait des différentes quadratures des lunules et sur la *Géométrie des Indivisibles* de Cavalieri : il les regarda un peu, et la facilité des méthodes lui plaisait, mais il n'avait pas du tout le courage alors de se plonger dans cette Haute Mathématique, bien qu'il se consacraît juste après à l'étude de la Physique et de la Mécanique pratique comme on peut le voir d'après l'opuscule édité sous le titre de *l'Hypothèse de la Physique*.

Il était alors admis parmi le Conseil de Révision du très Noble Electeur de Mayence ; après avoir obtenu du très gracieux et très puissant Prince (qui avait pris le jeune homme à son service, au moment où celui-ci devait entreprendre un assez long voyage) la permission de continuer sa route, il partit pour Paris en 1672. Là, il vint à connaître un homme supérieur : Christian Huygens ; l'auteur a toujours reconnu que c'est à l'exemple et aux conseils de Huygens qu'il doit son initiation à la haute Mathématique. Huygens publiait justement à cette époque son ouvrage *Sur les Pendules*. Comme il en avait apporté un exemplaire en cadeau au jeune homme, et que, pendant la conversation il avait remarqué que ce dernier ne connaissait pas suffisamment la nature du Centre de gravité, il lui exposa en peu de mots ce que c'était, et comment il pouvait être déterminé. Cela réveilla de sa léthargie notre jeune homme qui se jugeait indigne d'ignorer des notions de ce genre. Mais, à ce moment-là du moins, l'auteur ne put s'adonner à ces études et bientôt, vers la fin de l'année, il fit la traversée vers l'Angleterre, en compagnie de l'Ambassadeur de Mayence, avec qui il se fixa là-bas pendant quelques semaines ; c'est Henri Oldenbourg, alors secrétaire de la Société Royale qui l'a introduit auprès de cette illustre Association, mais il ne s'est entretenu avec personne de Géométrie (matière où lui-même avait alors une connaissance ordinaire) ; mais comme il ne négligeait pas la chimie, il rencontra à plusieurs reprises l'illustre Robert Boyle, et comme il s'était trouvé, par hasard, en présence de Pell et lui avait exposé certaines de ses remarques sur les nombres, Pell répondit que ce n'étaient pas des nouveautés et que, récemment, Nicolas

Mercator, dans sa *Quadrature de l'Hyperbole*, avait montré que les différences (si elles sont prises de façon répétée) des puissances des nombres naturels finissaient par s'annuler. Ce fut l'occasion pour notre jeune homme de chercher le livre de Mercator.

L'auteur ne connaissait pas alors Collins ; avec Oldenbourg, il discutait seulement de littérature, de physique et de mécanique, mais pas un seul mot ne fut échangé sur la haute Géométrie, et à plus forte raison sur les séries de Newton. En effet, il était complètement étranger à ces matières, excepté les propriétés des nombres (et encore s'en était-il bien peu occupé) : c'est ce qu'il a suffisamment montré dans les lettres, échangées avec Oldenbourg, qui ont été récemment publiées par ses adversaires ; la même constatation apparaîtra sans aucun doute dans les lettres qui, selon les adversaires, ont été conservées en Angleterre jusqu'à présent ; mais, ils les ont passées sous silence parce que - je le crois fermement - elles laisseraient assez voir qu'il n'y a eu aucune correspondance, jusqu'alors, entre Oldenbourg et l'auteur au sujet de la géométrie : pourtant, les adversaires veulent faire croire (et sans même produire la moindre preuve !), que déjà à cette époque, Oldenbourg a communiqué à l'auteur tous les résultats de Collins, Gregory et Newton, en sa possession.

Il fut de retour d'Angleterre en France en 1673 et comme le très noble Electeur de Mayence, grâce auquel il avait été attaché au service de Mayence, avait entre-temps achevé sa vie, l'auteur, désormais plus libre, se mit, sur le conseil de Huygens, à étudier l'Analyse cartésienne (autrefois hors de sa portée), et comme introduction à la géométrie des quadratures, il consulta la *Vue d'Ensemble de la Géométrie* de l'estimable Fabri, Grégoire de St-Vincent et un petit livre de Dettonville (c'est-à-dire de Pascal)²³.

A la suite d'un exemple de Dettonville, l'auteur fut illuminé par une idée que Pascal lui-même - ce qui est étonnant - n'avait pas aperçue. En effet, lorsque celui-ci démontre le théorème d'Archimède sur la superficie de la sphère ou la mesure de ses parties, il se sert d'une méthode, selon laquelle la superficie de tout solide de révolution peut se ramener à celle d'une figure plane qui lui est proportionnelle²⁴. De là, notre jeune homme élaborait le théorème général suivant : les portions de droites perpendiculaires à la courbe comprises entre l'axe

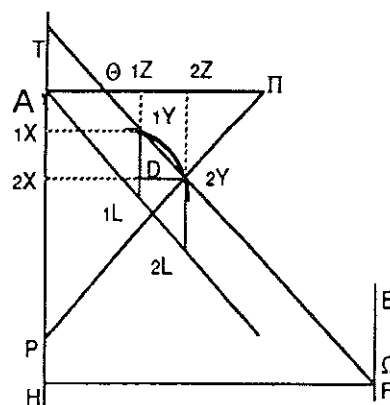
²³Nous n'avons pas retrouvé ce texte. Il s'agit peut-être du travail sur la cycloïde.

²⁴En termes modernes, si A désigne l'aire du solide de révolution autour de Oz engendré par la courbe (G) d'équation $y = r(z)$ et si l'abscisse curviligne de (G), on a : $A = 2\pi \int_G r \, ds$, ce qui revient à calculer la surface en additionnant celles des anneaux (courbes) de rayon $r(z)$. Mais l'aire de chaque anneau peut être calculée grâce à l'aire d'une figure plane définie dans le "théorème général" qui suit.

et la courbe, ordonnées par rapport à l'axe et prises normales à celui-ci, donnent une figure proportionnelle au moment de la courbe autour de l'axe²⁵.

Comme il avait montré ce théorème à Huygens, ce dernier fut entièrement d'accord et reconnu que, grâce à ce théorème, l'auteur avait découvert la superficie du cône parabolique, et d'autres superficies du même genre, que Huygens avaient posées sans démonstration dans son ouvrage *Sur l'oscillation des Pendules*, de nombreuses années auparavant.

Notre jeune homme, stimulé par ces découvertes, après avoir constaté la fécondité de ses réflexions, et comme il n'avait d'abord considéré que les infiniment petits du type des intervalles entre les ordonnées, conformément à la méthode de Cavalieri, imagina un Triangle²⁶ qu'il appela "caractéristique", ${}_1YD{}_2Y$, dont les côtés $D{}_1Y$ et $D{}_2Y$, égaux à ${}_1X{}_2X$ et ${}_1Z{}_2Z$ respectivement, étaient des portions des coordonnées ou des coabscisses AX et AZ et le troisième côté ${}_1Y{}_2Y$ étaient la portion de tangente $T\Omega$ (que l'on trace si nécessaire).



Il semblait toujours possible d'assigner des triangles semblables à ce triangle caractéristique, bien qu'inassignable ou infiniment petit. Soient en effet : $A{}_1X{}_2X$ et $A{}_1Z{}_2Z$, tracées perpendiculairement l'une par rapport à l'autre, les coabscisses AX et AZ , les coordonnées YX , YZ , la tangente $T\Theta Y$, la normale $PY\Pi$, les sous-tangentes XT et $Z\Theta$, les sous-normales XP et $Z\Pi$; enfin, on mène EF parallèlement à l'axe AX et la tangente TY rencontre EF au point Ω , à partir duquel on mène la perpendiculaire ΩH à l'axe ; il en résulte les triangles semblables ${}_1YD{}_2Y$, TXY , $YZ\Theta$, $TA\Theta$, YXP , ΠZY , ΠAP , $TH\Omega$ et d'autres de ce genre, en plus grand nombre si l'on veut.

²⁵ Ce résultat est démontré trois paragraphes plus loin (cf. note 24). La propriété se trouve déjà dans les *Lectioes Geometricas* de Barrow, Lect XII, Prop 1,2,3, publiées en 1670. Notons que Leibniz affirme dans ce texte avoir découvert Barrow ultérieurement.

²⁶ Nous avons conservé la notation de Leibniz, qui place l'indice à gauche de la lettre

Par exemple²⁷, à cause des triangles semblables $1YD2Y$ et $2Y2XP$, il résulte que :

$P2Y \times 1YD = 2Y2X \times 2Y1Y$, c'est-à-dire que la normale $P2Y$ multipliée par $1YD$ (ou par le segment d'axe $1X2X$) est égale à l'ordonnée $2Y2X$ multipliée par le segment de courbe $2Y1Y$, c'est-à-dire qu'elle est égale au moment du segment de courbe autour de l'axe. Par conséquent, on obtient la totalité du moment de la courbe en faisant la somme des normales multipliées par les portions d'axe.

Et à cause des triangles semblables $1YD2Y$ et $TH\Omega$, il résulte :

$1Y2Y : 2YD = T\Omega : \Omega H$, soit $\Omega H \cdot 1Y2Y = T\Omega \cdot 2YD$, c'est-à-dire que la longueur constante ΩH multipliée par le segment de courbe $1Y2Y$, est égale à $T\Omega$ multipliée par $2YD$, (ou par le segment de coabscisse $1Z2Z$). Par conséquent, la figure plane formée par les droites $T\Omega$ portées orthogonalement sur l'ordonnée AZ en ZZ est égale à la courbe rectifiée multipliée par la longueur constante $H\Omega$.

De la même façon, à cause des triangles semblables $1YD2Y$ et $2Y2XP$, il résulte que

$1YD : D2Y = 2Y2X : 2XP$ et surtout : $2XP \cdot 1YD = 2Y2X \cdot D2Y$; c'est-à-dire que les sous-normales $2XP$ multipliées par les [portions] d'axe $1YD$ ou $1X2X$ sont égales aux ordonnées $2Y2X$ multipliées par leurs éléments $D2Y$.

Cependant, des droites qui croissent à partir de zéro, multipliées par leurs éléments [d'accroissement], forment un triangle. En effet, soit toujours $AZ = ZL$, on obtient le triangle rectangle AZL qui est la moitié du carré de côté AZ . C'est pourquoi la figure formée par les sous-normales multipliées par les éléments d'axe est toujours égale à la moitié du carré ayant pour côté l'ordonnée correspondante.

Par conséquent, pour trouver la superficie d'une figure donnée, on cherche une autre figure dont les sous-normales soient égales aux ordonnées de la figure donnée : cette autre figure sera la quadratrice de la figure donnée.

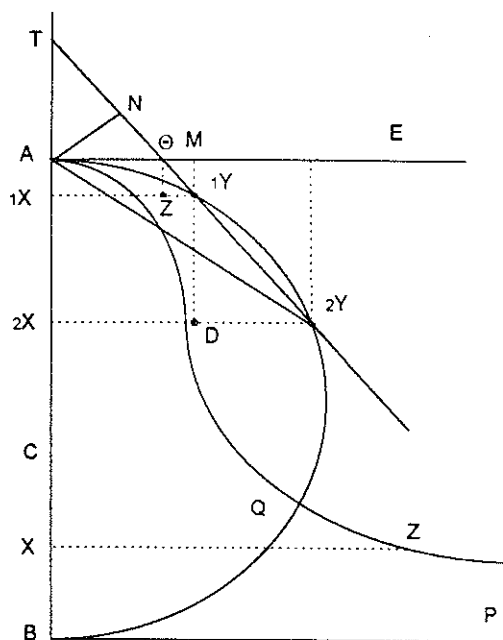
Ainsi, grâce à ce raisonnement très aisé, nous réduisons le calcul des superficies de solides de révolution aux problèmes de quadratures planes et de rectifications de courbes ; en même temps, nous réduisons

²⁷ cet exemple prouve le théorème énoncé plus haut (cf. note 22). Le moment de la courbe autour de l'axe AT est $\int z \, ds$ (en notant par z les ordonnées). Leibniz calcule la longueur n de la portion de normale comprise entre le point Y de coordonnées $(x, z(x))$ et l'axe. En reportant cette longueur normalement à l'axe, on obtient une autre courbe définie par $Z = n$. Alors $z \, ds = n \, dx$ est la portion d'aire délimitée par l'axe, deux normales à l'axe

le problème des quadratures au problème inverse des tangentes. Après ces découvertes, notre jeune homme consigna un grand nombre de théorèmes (dont beaucoup ne manquaient pas d'élégance) dans un livre divisé en deux parties : en effet, une partie se limitait aux quantités assignables, selon la méthode de Cavalieri, Fermat et Fabri, mais aussi de Gregory, de St Vincent, des traités de Guldin et de Dettonville; quant à l'autre partie, elle concernait les quantités inassignables et faisait progresser la Géométrie beaucoup plus loin. Plus tard, cependant, notre jeune homme négligea de poursuivre, après s'être aperçu que Huygens, Wallis, Wren, Van Huraet et Neil, et même Jacques Gregory ainsi que Barrow avaient employé la même méthode et l'avaient perfectionnée. Toutefois, il n'a pas semblé inutile d'exposer en ce lieu (comme ce discours le montre clairement), par quels degrés on est parvenu à la haute Géométrie afin de diriger, comme par la main, ceux qui, novices encore dans les domaines les plus cachés de la Géométrie, souhaitent s'élever plus haut.

En 1673, et pendant une partie de 1674, Leibniz se rendit à Paris. Mais en 1674 (pour autant qu'il puisse s'en souvenir) il tomba en Arithmétique sur cette célèbre Quadrature²⁸ qui mérite bien que l'on expose selon quelle méthode elle a été réalisée. D'habitude, les Géomètres décomposaient les figures en rectangles, en traçant des droites parallèles aux ordonnées. Lui-même eut l'occasion par hasard de résoudre une figure en triangles, formés par des droites concourantes en un seul point : il examina comment on pouvait obtenir quelque chose de neuf, donc de commode.

Soit la courbe AYB, on trace autant de droites AY que l'on veut, on trace aussi un axe quelconque AC, et une droite AE perpendiculaire à AC, ou "co-axe" ; la tangente à la courbe en y coupe l'axe et le co-axe en T et Θ . A partir de A, on mène sur la tangente TY la perpendiculaire AN ; il est manifeste que le triangle élémentaire A_1Y_2Y est égal à la moitié du rectangle ayant pour côtés l'élément de courbe $_1Y_2Y$ et la normale AN.



distantes de dx et cette courbe auxiliaire. Ce genre de courbe auxiliaire s'appelle une "quadratrice".

²⁸ Il s'agit de l'expression de l'aire du cercle unité sous forme de série. Le procédé est détaillé dans le texte de problème inspiré de la "lettre à La Roque", p. 49 de ce même numéro.

On trace alors le triangle caractéristique mentionné ci-dessus ${}_1YD_2Y$, dont l'hypoténuse est la portion de tangente ou l'élément d'arc, et les côtés sont parallèles à l'axe et au co-axe ; de manière évidente, à cause des triangles semblables $AN\Theta$ et ${}_1YD_2Y$, il y aura :

${}_1Y_2Y : {}_1YD = A\Theta : AN$, soit : $A\Theta \cdot {}_1YD$ ou $A\Theta \cdot {}_1X_2X = AN \cdot {}_1Y_2Y =$ (d'après ce qui a été dit ci-dessus) au double du triangle $A{}_1Y_2Y$.

C'est pourquoi, si l'on imagine que toute longueur $A\Theta$ est translatée sur XY (on effectue le tracé, si nécessaire) de telle façon que $A\Theta$ soit reportée sur XY en XZ , on obtiendra alors le triangle mixtiligne $AXZA$ qui est égal au double de la surface AYA , comprise entre le segment de droite AY et le segment de courbe YA . On obtient ainsi ce que Leibniz avait appelé des figures de segments ou des figures proportionnelles à des segments.

La même méthode donne un bon résultat lorsqu'on prend le point A hors de la courbe ; on a alors des triangles mixtilignes, proportionnels aux secteurs délimités par des lignes concourantes en ce point. Bien plus, dans le cas où celles-ci n'ont pas leur extrémité sur une ligne droite mais sur une courbe (qu'elles touchent l'une après l'autre), elles n'en permettaient pas moins, pour cela, des théorèmes utiles ; mais ce n'est pas ici le lieu de poursuivre des développements de ce genre.

Il suffit, pour notre but, de ne considérer la "figure de segments" que dans le cas du cercle. Si le point A est placé au début du quadrant AYQ (cf. fig), la courbe $AZQZ$ coupera le cercle à l'extrémité du quadrant en Q et, décroissant à partir de ce point, sera asymptotique à la base BP (perpendiculaire au diamètre en son autre extrémité B). Cependant, toute la figure de dimension infinie, comprise entre le diamètre AB , la base BP , etc..., et la courbe asymptote par rapport à la base $AZQZ$, etc..., sera égale au cercle de diamètre AB .

Pour en venir au point qui nous intéresse, le rayon du cercle étant pris comme unité, AX ou ΘZ étant désigné par x , et $A\Theta$ ou XZ par z , il en résultera que $x = \frac{2zz}{1+zz}$

Or, la somme des x sur $A\Theta$, soit, comme nous le disons aujourd'hui : $\int x \, dz$, est le triangle mixtiligne $A\Theta ZA$ complémentaire du triangle mixtiligne $AXZA$ ²⁹, qui nous l'avons montré, est égal au double du segment circulaire [délimité par l'arc $A{}_1Y$ et la droite $A{}_1Y$].

²⁹ Θ , Z , et X doivent correspondre au même point. Sur la figure, prendre par exemple $A\Theta ZA$ et $A{}_1XZA$. Notons que le passage d'une aire à l'autre correspond à une intégration par parties, comme Leibniz l'explique plus loin (voir note 35)

L'auteur a obtenu de même par la méthode des métamorphoses³⁰ le résultat qu'il a envoyé en Angleterre. Il s'agit de faire la somme de tous les $\sqrt{1 - xx} = y$. Soit $y = \pm 1 \mp xz$. D'où $x = \frac{2zz}{1 + zz}$, et

$$y = \frac{\pm zz \mp 1}{zz + 1}.$$

Ainsi, de nouveau, il est seulement nécessaire de sommer des nombres rationnels³¹.

Cette méthode a paru nouvelle et élégante, même aux yeux de Newton; mais il faut reconnaître qu'elle n'est pas universelle. En réalité, il est évident que, par cette méthode, on obtient l'arc à partir du sinus et d'autres résultats de ce genre, mais indirectement. C'est pourquoi, après avoir entendu dire que Newton avait déduit ces résultats directement, grâce à sa méthode d'extraction des racines, notre jeune homme désira en prendre connaissance.

Alors, immédiatement, il apparut que la méthode suivie par Nicolas Mercator pour la Quadrature de l'Hyperbole, en employant une série infinie, permettrait aussi de réaliser celle du cercle, malgré l'asymétrie, en divisant par $1 + zz$ tout comme Mercator avait divisé par $1 + z$. Bientôt, l'auteur découvrit un théorème général pour calculer l'aire d'une figure conique pourvue d'un centre. En effet, le secteur délimité par l'arc de section conique qui part du sommet et par les droites joignant le centre aux extrémités de l'arc est égal au rectangle ayant pour côtés le demi-axe horizontal et une droite de longueur :

$$t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7 \text{ etc}$$

en posant que "t" est la portion de tangente au sommet (comprise entre ce sommet et la tangente à l'autre extrémité de l'arc) et que l'unité est le carré ayant pour côté le demi-axe ou bien le rectangle ayant pour côtés le demi-axe vertical et le demi-axe horizontal et que la notation $\pm$ signifie + dans le cas de l'hyperbole, mais – dans le cas du cercle et de l'ellipse. Par conséquent, en prenant le carré du diamètre comme unité, il en résultait l'aire du cercle :

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc...}$$

³⁰ Ou " méthode des transmutations"

³¹ cela revient à effectuer un changement de variable pour se débarrasser du radical

Comme notre auteur avait montré à Huygens cette découverte avec sa démonstration, ce dernier lui en fit beaucoup de louanges : lorsqu'il renvoya à Leibniz la dissertation, il ajouta, dans une lettre, que cette découverte resterait toujours dans la mémoire des Géomètres et qu'elle suscitait l'espoir de parvenir peut-être, un jour à la solution générale, en mettant en évidence la véritable valeur de l'aire du cercle ou bien en démontrant qu'il est impossible de l'exprimer en quantités admises. Sans nul doute, ni Huygens, ni l'inventeur, ni personne d'autre à Paris (c'est un fait reconnu) n'avait rien entendu dire au sujet d'une série rationnelle infinie donnant l'aire du cercle (ce qui, comme on l'a constaté plus tard, a été inventé par Newton et Gregory). Assurément, Huygens n'en savait rien, comme il est évident d'après sa lettre, ci-jointe ; c'est pourquoi Huygens crut que c'était la première fois qu'une démonstration avait été donnée de l'expression exacte de l'aire du cercle par une série de quantités rationnelles. Ce fut aussi l'opinion de l'inventeur (confiant dans l'avis de Huygens, qui était très habile en ces matières) et, pour cette raison, il écrivit, en 1674, ces deux lettres à Oldenbourg que ses adversaires ont publiées et où il annonce sa méthode comme une nouvelle invention : "il a, le premier de tous, sans aucun doute, découvert la surface du cercle exprimée par une série de nombres rationnels, ce qui avait déjà été démontré (c'était bien établi) dans le cas de l'hyperbole". Or, si à Londres, l'année précédente, Oldenbourg lui avait communiqué les séries de Gregory et de Newton, l'impudence de Leibniz devait être extrême pour oser écrire en ces termes, - et surprenants l'absence de mémoire ou la complicité d'Oldenbourg, puisqu'il ne condamna pas l'hypocrisie de Leibniz ! - En effet, les adversaires produisent la réponse où Oldenbourg révèle simplement ("je ne voudrais pas que vous l'ignoriez", dit-il) que des séries semblables étaient connues également de Gregory et de Newton ; il les lui communiqua l'année suivante exactement, dans une lettre (que les adversaires publient) écrite au mois d'avril.

Par conséquent, on peut s'apercevoir comme ils ont été aveuglés par l'envie ou armés de malveillance, ceux qui osent maintenant inventer de toutes pièces qu'Oldenbourg avait communiqué à Leibniz des nouvelles de ce genre déjà l'année précédente ; pourtant, un peu d'aveuglement se mêle à la malveillance, car ils n'ont pas vu qu'ils produisaient les preuves qui détruisent leurs mensonges (au lieu de supprimer complètement ou en partie ces lettres et celles d'Oldenbourg, comme ils l'ont fait pour d'autres missives).

D'ailleurs, l'auteur commença bien entendu à correspondre avec Oldenbourg sur de la Géométrie seulement à partir du moment où il jugea qu'il avait découvert quelque chose digne d'être communiqué, car il

était auparavant novice dans ces études. En revanche, les premières lettres de Paris, datées des 30 mars, 26 avril, 24 mai, 8 juin 1673 que les adversaires ont, disent-ils, en leur possession, mais qu'ils suppriment avec les réponses d'Oldenbourg, ces lettres ont sans aucun doute traité de sujets différents et ne leur ont rien montré qui puisse rendre plus crédibles ces prétendues communications de la part d'Oldenbourg.

Par ailleurs, lorsque notre auteur entendit dire que Newton et Gregory étaient parvenus à des séries en employant l'extraction des racines, il admit que c'était nouveau pour lui ; au début, il ne comprit pas bien et le reconnut avec franchise ; il chercha l'explication de quelques points, surtout du cas des séries réciproques où il s'agit, à partir d'une série infinie donnée, d'extraire une racine au moyen d'une autre série infinie. Par conséquent, ce que ses adversaires ont imaginé est évidemment faux - à savoir la communication par Oldenbourg des écrits de Newton ; en effet, dans ces conditions, il n'aurait pas eu besoin de demander une explication ; mais plus tard, lorsqu'il se mit à développer le calcul différentiel, il imagina un nouvel art, de loin le plus universel, de trouver des séries infinies sans recourir aux extractions, art approprié aux quantités ordinaires aussi bien qu'aux transcendentes, en supposant que la série cherchée était donnée ; c'est cette méthode qu'il utilisa pour achever son petit ouvrage sur la Quadrature Arithmétique où il insérait aussi des découvertes qui ne lui étaient pas propres : des séries exprimant l'arc en termes de sinus, ou de sinus de l'arc complémentaire ; et inversement il démontrait aussi grâce à cette nouvelle Méthode comment, l'arc étant donné, trouver le sinus, ou le sinus de l'arc complémentaire. C'est pourquoi, plus tard, il n'a pas eu besoin des méthodes des autres. Finalement, il publia sa nouvelle méthode d'obtention des séries dans les *Acta Eruditorum*. Dans le temps où il publiait ce petit ouvrage de Quadrature Arithmétique à Paris, il fut rappelé en Allemagne et comme il avait perfectionné la technique du nouveau calcul, il s'occupa moins des premières méthodes.

D'autre part, il faut exposer comment, peu à peu, notre auteur est parvenu à un nouveau genre de notation, qu'il a appelé "calcul différentiel".

Déjà, en 1672, Huygens lui avait proposé, alors qu'ils s'entretenaient des propriétés des nombres, le problème suivant : trouver la somme d'une série décroissante de fractions dont les numérateurs sont égaux à 1,

et dont les dénominateurs sont les nombres triangulaires³² : somme que Huygens avait trouvée dans des travaux de Hudde sur l'estimation de la probabilité. Notre auteur trouva que la somme était 2, ce qui était en accord avec la proposition de Huygens. Du même coup, il découvrit les sommes des séries de nombres du même genre, où les dénominateurs sont des nombres combinatoires quelconques, et en fit part à Oldenbourg en février 1673, dans une lettre publiée par les adversaires. Quand l'auteur eut vu, plus tard, le triangle arithmétique de Pascal, il créa, sur cet exemple, le triangle Harmonique.

Triangle Arithmétique, où la suite fondamentale est constituée par une progression

Arithmétique : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
 \end{array}$$

Triangle Harmonique, où la suite fondamentale est la progression Harmonique $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \frac{1}{1} & & \\
 & & & & \frac{1}{1} & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} \\
 \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} \\
 \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} \\
 \frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
 \end{array}$$

Dans le triangle harmonique, si l'on divise les dénominateurs de n'importe quelle suite oblique descendant à l'infini et, de même, de n'importe quelle suite parallèle finie, par le dénominateur du terme correspondant dans la suite première, on obtient les nombres combinatoires figurant dans le triangle arithmétique.

³² Le terme général de la série est $\frac{2}{x(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$, ce qui permet à la "propriété des différences" de manifester toute son efficacité !

Par ailleurs, ce qui est commun aux deux triangles, c'est que les suites obliques sont déduites les unes des autres par somme ou par différence. Dans le triangle arithmétique, une suite donnée est obtenue en faisant la somme de la suite précédente la plus proche, ou en faisant la différence de la suite immédiatement consécutive ; mais, dans le triangle harmonique au contraire, une suite donnée est obtenue en faisant la somme de la suite immédiatement consécutive.

D'où il s'ensuit³³ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{etc} &= \frac{1}{0} \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \text{etc} &= \frac{2}{1} \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \frac{1}{56} + \frac{1}{84} + \text{etc} &= \frac{3}{2} \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \frac{1}{126} + \frac{1}{210} + \text{etc} &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Et certes il possédait ces résultats, alors qu'il n'était pas encore versé dans l'Analyse Cartésienne ; après s'y être adonné, il considéra que n'importe quel terme d'une suite pouvait, la plupart du temps, être désigné par une notation générale, par laquelle on peut se référer à une suite simple. Par exemple, si le terme général de la suite des naturels 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. est appelé x , on appellera le terme général de la suite des carrés $x.x$ ou de celle des cubes x^3 etc.; le terme général de la suite des nombres triangulaires³⁴, c'est-à-dire que 0, 1, 3,

6, 10, etc. s'écrira $\frac{x(x+1)}{1.2}$, ou $\frac{xx+x}{2}$.

N'importe lequel des nombres pyramidaux : 0, 1, 4, 10, 20, etc ... s'écrira $\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}$. soit

$\frac{x^3 + 3xx + 2x}{6}$, et ainsi de suite. Et de cette façon, au moyen d'un calcul général, on peut trouver la suite

obtenue par différence d'une suite donnée, et quelquefois aussi la suite obtenue par somme [d'une suite donnée].

lorsqu'elle est exprimée numériquement.

³³ En sommant les termes d'une oblique, on obtient le premier terme de l'oblique précédente: ici tous les termes sont de plus multipliés par l'inverse du premier terme de l'oblique.

³⁴ On a vu précédemment que si x est la suite des naturels, $\int x$ est la suite des nombres triangulaires, $\iint x$ est la suite des nombres pyramidaux, etc..

Par exemple, xx est un nombre carré, le carré qui lui est immédiatement supérieur est $xx + 2x + 1$, la différence des deux est $2x + 1$, c'est à dire que la suite des nombres impairs est la "suite-différence" des nombres carrés. En effet, si x désigne 0, 1, 2, 3, 4, etc., $2x + 1$ désigne 1, 3, 5, 7, 9. De la même manière, la différence entre x^3 et $x^3 + 3xx + 3x + 1$ est $3xx + 3x + 1$, c'est pourquoi tel est le terme général de la suite-différence de la suite des cubes. Par conséquent, si la valeur du terme général d'une suite donnée peut s'exprimer à l'aide d'une variable x , qui ne figure ni au dénominateur, ni en exposant, il semblait que l'on pût toujours trouver la suite-somme d'une suite donnée. Par exemple, si l'on cherche la somme des nombres carrés, comme il était certain que la variable x ne pouvait être supérieure à la puissance cubique, l'auteur supposait que son terme général était $z = lx^3 + mxx + nx$ où dz doit être xx . Il en résultera $dz = l d(x^3) + md(xx) + n$ (en posant que $dx = 1$). Mais $d(xx) = 2x + 1$ et $d(x^3) = 3xx + 3x + 1$ (d'après ce qui a été déjà trouvé). Donc :

$$\begin{aligned} dz &= 3 lxx + 3 lx + l \\ &\quad + 2 mx + m \\ &\quad + n \cong xx \end{aligned}$$

donc $l = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + n = 0$ ou $n = \frac{1}{6}$, c'est-à-dire que le terme général de la suite-somme des

carrés est : $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$, soit $\frac{2x^3 - 3xx + x}{6}$.

Par exemple, si l'on veut la somme des 9 ou 10 premiers carrés à partir de 1 jusqu'à 81, ou de 1 jusqu'à 100, on prend pour x la valeur 10 ou 11, (nombre immédiatement supérieur à la racine du dernier carré), et

$$\frac{2x^3 - 3xx + x}{6} \text{ sera } \frac{2000 - 300 + 10}{6} = 285, \text{ ou } \frac{2.1331 - 3.121 + 11}{6} = 385.$$

Il n'est pas beaucoup plus difficile de faire la somme de 100 ou 1000 nombres carrés grâce à cette formule abrégée.

La même méthode donne de bons résultats dans le cas de n'importe quelle puissance des nombres naturels ou des formules composées de puissances de ce genre, si bien que l'on peut toujours, grâce à cette abréviation, effectuer la somme des termes (peu importe leur nombre) d'une suite de ce genre.

Mais notre auteur voyait aisément qu'on ne réussissait pas toujours, lorsque la variable x figure au dénominateur, à trouver effectivement la suite-somme ; cependant, comme il devait poursuivre l'Analyse, il fit la découverte générale et même il publia dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig, que l'on peut toujours trouver une suite-somme, c'est-à-dire que le problème peut être ramené à la sommation d'un nombre de termes

fractionnaires simples comme $\frac{1}{x}$ ou $\frac{1}{x^2}$ ou $\frac{1}{x^3}$, etc ..., qui peuvent s'additionner, si le nombre de termes donnés est fini, mais pas d'une façon assez condensée. Cependant, s'il s'agit d'un nombre infini de termes, les termes tels que $\frac{1}{x}$ ne peuvent s'additionner en totalité, puisque la somme totale d'un nombre infini de tels termes est une quantité infinie; mais des termes en nombre infini tels que $\frac{1}{x^2}$ ou $\frac{1}{x^3}$, bien qu'ils forment par composition une quantité finie, ne peuvent cependant jusqu'aujourd'hui être sommés, à moins d'y substituer des quadratures.

C'est pourquoi, en 1682 déjà, dans le second mois des Actes de Leipzig. Leibniz observa que, si l'on prend les nombres :

1.3, 3.5, 5.7, 7.9, 9.11, etc..., soit : 3, 15, 35, 63, 99, etc..., et si, à partir de là, on forme une série de fractions :³⁵ $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \text{etc ...}$, cette série décroissante à l'infini n'est autre que $\frac{1}{2}$; mais, si l'on saute un nombre sur deux, la série : $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \text{etc ...}$ exprime l'aire du demi-cercle, dont le carré du diamètre est 1.

Effectivement, soit $x = 1$, ou 2, ou 3, etc...; le terme général de la série $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \text{etc...}$ est $\frac{1}{4x^2 + 8x + 3}$; on cherche le terme général de la série-somme; on examine par la méthode la plus simple si

l'on peut l'obtenir sous la forme suivante : $\frac{e}{bx + c}$; on aura :

$$\frac{e}{bx + c} - \frac{e}{bx + b + c} = \frac{eb}{b^2x^2 + b^2x + bc + 2bex + c^2} = \frac{1}{4x^2 + 8x + 3}$$

En identifiant ces deux formules on obtient :

$b = 2$, $eb = 1$, donc : $e = \frac{1}{2}$, $b^2 + 2bc = 8$, soit : $4 + 4c = 8$ ou $c = 1$, et enfin : $bc + c^2 = 3$, ce qui en découle.

³⁵ Cette série a pour terme général $\frac{1}{(2x+1)(2x+3)} = \frac{1}{4x^2 + 8x + 3}$ que Leibniz écrit ensuite

$$\frac{1}{4x+2} - \frac{1}{4(x+1)+2}. \text{ On a alors } \sum \frac{1}{4x^2 + 8x + 3} = \frac{1}{2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x+2} = \frac{1}{2}$$

La suite des différences est ici définie par $(dx)_n = x_n - x_{n+1}$.

Donc le terme général de la série-somme est : $\frac{1}{2x+1}$, soit $\frac{1}{4x+2}$; or $4x+2$ est le double d'un nombre impair.

En dernier lieu, il vit aussi une manière d'appliquer le calcul différentiel aux suites de nombres quand la variable entre dans l'exposant, comme dans le cas d'une progression géométrique, où, si l'on pose b comme base, le terme général est b^x , en désignant par x les nombres naturels. Donc le terme général de la suite-différence sera :

$$b^{x+1} - b^x = b^x (b - 1)$$

Par conséquent, il est manifeste que la suite-différence d'une progression géométrique donnée est aussi une progression géométrique proportionnelle à la progression donnée. De là, on obtient la somme d'une progression géométrique.

Or, notre auteur remarqua aisément que le calcul différentiel, dans le cas des Figures géométriques, était étonnamment facile pour celui qui s'est exercé à manier les nombres, puisque, dans les figures, les différences et ce qui diffère sont des incomparables ; toutes les fois que sont rapprochées, dans une addition ou une soustraction, des grandeurs incomparables, les petites sont négligeables par rapport aux grandes ; aussi, les quantités irrationnelles ne sont-elles pas moins faciles à différencier que les sourdes³⁶, ou que les quantités exponentielles, à l'aide de logarithmes.

D'autre part, il observait que les lignes infiniment petites qui se présentent dans les figures ne sont que les différences relatives aux moments des lignes variables. Et, de la même façon que les quantités considérées jusqu'ici par les analystes avaient des fonctions telles que, par exemple, les puissances et les racines, de même, désormais, des quantités considérées comme des variables admettent de nouvelles fonctions, comme par exemple les différences. Tout comme nous avons eu jusqu'ici les fonctions x , xx , x^3 , etc.... y , yy , y^3 , etc.... de même, nous pouvons employer dx , $dd x$, d^3x , etc... Ainsi, même les Courbes que Descartes a exclues de sa Géométrie, en tant que "mécaniques", peuvent être exprimées par des équations appropriées et traitées par le calcul, ce qui libère l'esprit de l'attention continuelle qu'il porte aux figures.

³⁶ Parmi les quantités que nous appelons irrationnelles, Leibniz distingue les sourdes qui peuvent s'exprimer à l'aide de radicaux, et les autres qu'il nomme irrationnelles.

Lorsqu'on applique le calcul différentiel à la Géométrie, les différences de premier ordre correspondent exactement aux tangentes, les différences de second ordre aux cercles osculateurs³⁷ (dont notre jeune homme a introduit lui-même l'usage), et on peut procéder ainsi de suite. Or, ces procédés ne s'appliquent pas seulement aux tangentes et aux quadratures, mais à toutes sortes de problèmes et de théorèmes, où sont diversement mêlées différences et intégrales (selon la terminologie de l'ingénieur Bernoulli), comme cela se produit d'ordinaire dans les problèmes physico-mécaniques.

Aussi Leibniz établit-il que, en général, si une suite de nombres ou de lignes dans une figure possède une propriété qui dépend de deux, trois, ou quatre, etc..., termes très proches, elle peut être exprimée par une équation contenant des différences de premier, second ou troisième ordre. Bien plus, il inventa des théorèmes généraux pour un ordre de différenciation quelconque, de même que nous avons des théorèmes de degré quelconque et découvrit un rapport remarquable entre les puissances et les différences, publié dans les *Mélanges de Berlin*.

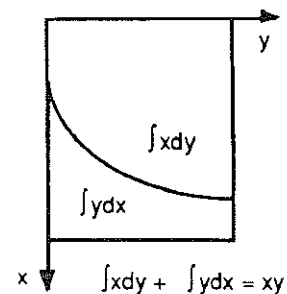
Si notre adversaire avait eu connaissance de ce rapport, il n'aurait pas utilisé, pour indiquer les différences d'ordres divers, des points, qui ne sont pas appropriés à la désignation du degré général d'une différence, mais il aurait conservé la notation "d" que notre jeune homme avait imposée ou une notation similaire, car ainsi "d^e" peut exprimer une différence de degré indéterminée.

Dès lors, tout ce qui, autrefois, était donné dans des figures, pouvait être exprimé par le calcul. En effet, $\sqrt{dx dx + dy dy}$ exprimait un élément de courbe, $y dx$ une portion de son aire : du fait que $\int y dx$ et $\int x dy$ sont complémentaires, il ressort aussitôt avec évidence que : $d(xy) = x dy + y dx$, soit, si l'on préfère : $xy = \int x dy + \int y dx$, bien que ces signes varient parfois, et du fait que : $xyz = \int x y dz + \int x z dy + \int y z dx$, on met en évidence trois solides qui sont complémentaires les uns par rapport aux autres.³⁸

Et ce n'est pas la peine de connaître les théorèmes que nous avons déduits plus haut du triangle caractéristique ; par exemple, le moment de la courbe autour de l'axe peut être suffisamment exprimé par $\int x \sqrt{dx dx + dy dy}$.

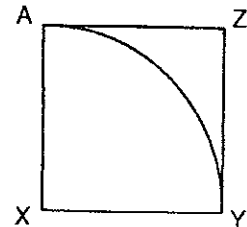
³⁷ Le rayon du cercle osculateur est le rayon de courbure, qui dépend de la dérivée seconde.

³⁸ La différentielle d'un produit est obtenue ici sous une forme équivalente à l'intégration par parties, obtenue elle-même comme le résultat de la partition d'un rectangle:



Les résultats que possède Grégoire de St-Vincent sur la méthode du *Ductus*³⁹, et ceux que lui ou Pascal possèdent sur les Onglets ou les Coins, toutes ces inventions proviennent d'un calcul de ce genre. Aussi, Leibniz avait-il vu avec plaisir qu'il avait découvert ce que d'autres avaient auparavant inventé sous les applaudissements ; il cessa désormais de s'en préoccuper beaucoup, parce que tout résultat était déjà contenu dans un calcul de ce genre.

Par exemple, le moment de la figure AXY surtout de l'axe XA est : $\frac{1}{2} \int y y dx$; le moment de la tangente au sommet est $\int x y dx$; le moment du triangle mixtiligne complémentaire AZYA autour de la tangente au sommet est $\int x x dx$; mais les deux derniers moments pris ensemble forment le moment du rectangle circonscrit AXYZ autour de la tangente au sommet (et, pour cette raison, sont complémentaires entre eux) à savoir : $\frac{1}{2} x x y$.



Mais, sans considérer la figure, ce résultat se démontre aussi par le calcul, en effet : $\frac{1}{2} d(xxy) = xy dx + \frac{1}{2} x x dy$; aussi n'a-t-on plus besoin, désormais, de tant de théorèmes remarquables, faits par des hommes illustres, en Géométrie archimédienne, excepté ceux qui sont exposés par Euclide au livre II, et excepté la plupart des théorèmes de Géométrie commune donnés ailleurs.

Par merveille, il arriva un jour que le Calcul des Transcendantes se réduisit aux courbes ordinaires, ce qui donnait surtout satisfaction à Huygens. Par exemple, si l'on trouve : $2 \int \frac{dy}{y} = 3 \int \frac{dx}{x}$ il en résulte : $yy = x^3$, selon l'essence des Logarithmes, combinée avec le calcul différentiel (le calcul des Logarithmes est lui-même dérivé du calcul différentiel). En effet, soit $x^m = y$, il s'ensuit : $m x^{m-1} dx = dy$, donc, en divisant des deux côtés par des quantités égales, on aura : $m \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$. Réciproquement, d'après l'équation $m \log x = \log y$, on aura :

$$\frac{\log x}{\log y} = \frac{\int \frac{dx}{x}}{\int \frac{dy}{y}}$$

³⁹ la méthode de ductus plani in planum est exposée par Grégoire de Saint-Vincent dans l'*Opus geometricum* (1649)

Par conséquent, on peut aussi manier le calcul des exponentielles, en effet, soit : $y^x = z$, il résulte que

$$x \log y = \log z, \text{ donc : } dx \log y + x \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Ainsi, nous débarrassons les exposants de la variable ou, inversement, nous transférons utilement la variable dans l'exposant, selon les circonstances. Enfin, de cette façon, ce qui, autrefois, suscitait l'admiration, est devenu un jeu.

En revanche, aucune trace de tout ce calcul ne se retrouve dans les écrits de notre adversaire, avant notre publication des principes du calcul, ni absolument rien, que Huygens ou Barrow n'auraient pu prouver de la même façon s'ils avaient traité des mêmes questions. Mais Huygens ne savait simplement pas combien ce calcul offrait de secours, ce que les adversaires passent sous silence autant que possible : ils passent à des questions absolument différentes, ils ne touchent pas, dans leur rapport, à ce qui caractérise le calcul différentiel et s'attachent seulement aux suites infinies, dont notre rival, personne ne le nie, a fait progresser la méthode avant les autres. En effet, ils parlent de ce dont notre rival avait fait mystère, et qu'il avait finalement mis au clair, c'est-à-dire des Fluxions et Fluents, en d'autres termes, des quantités finies et de leurs éléments infiniment petits ; en revanche, sur la manière de dériver une quantité de l'autre, ils n'offrent pas le moindre secours.

Notre rival, en considérant les raisons naissantes ou évanouissantes, s'est complètement détourné du calcul différentiel au profit de la méthode d'exhaustion, qui en est très éloignée (bien qu'elle ait aussi son utilité) et il ne met pas en oeuvre des quantités infiniment petites, mais des quantités ordinaires, qui, toutefois, deviennent finalement infiniment petites.

Donc, comme nos adversaires n'ont révélé, ni dans la *Correspondance* qu'ils ont publiée, ni ailleurs, la plus petite preuve établissant que notre rival a employé un calcul de ce genre avant que notre jeune homme ne l'ait édité, tout ce qu'ils ont allégué peut être repoussé comme hors du sujet. Ils se conduisent en avocats médiocres : ils détournent l'attention des juges du sujet dont il est question vers d'autres points, comme par exemple les suites infinies. Mais en cette matière, ils n'ont rien pu alléguer susceptible d'accabler la franchise de l'auteur; celui-ci a toujours reconnu à qui il devait ses progrès dans ce domaine; sur ce sujet aussi, pourtant, il est finalement parvenu à quelque chose de plus élevé et de plus général.

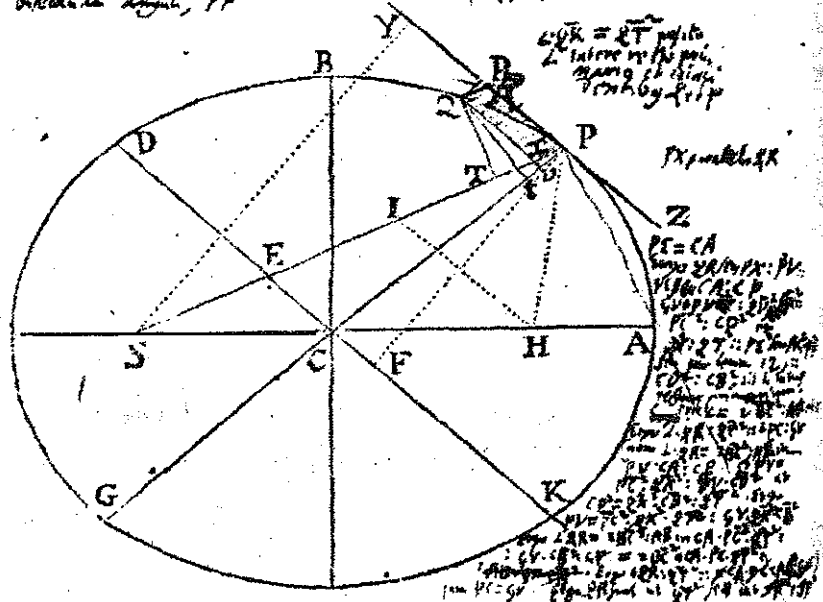
S E C T. III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

Prop. XI. Prob. VI.

Revolvatur corpus in Ellipsi: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.

Est Ellipseos superioris umbilicus S. Agatur SP secans Ellipseos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum QxPR. Patet EP æqualem esse semi-axi majori AC, eo quod acta ab altero Ellipseos umbilico H linea HI ipsi EC parallela, (ob æquales CS, CH) æquantur ES, EI, adeo ut EP semi-summa sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas HI, PR & angulos æquales IPR, HPZ). ipsorum PS, PH, quæ conjunctim axem totum 2 AC adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & Ellipseos latere recto principali (seu 2 BC quad.) dicto L, erit $LxQR$ ad $LxPv$ ut QR ad Pv ; id est ut PE (seu AC) ad PC: & $LxPv$ ad GvP ut L ad Gv ;



Un exemple des annotations de Leibniz sur une copie des Principia de Newton.
(probablement Rome, 1689)

CHRONOLOGIE

Cette chronologie³⁹ est inspirée de celle de Derek Gjertsen.

Pour les explications mathématiques, nous conseillons de vous

reporter aux numéros 6 et 8 de Mnemosyne.

1666 : En octobre, Newton jette les premières bases d'un traité. Il affirmera plus tard "je suis tombé, dans les années 1665-1666, sur la méthode des fluxions dont je ferai usage dans la quadrature des courbes"

1669 : Le *De Analysi per Aequationem Numero terminorum Infinitas* est rédigé et montré à Barrow et Collins.

1671 : Composition du *Methodus fluxionu et Seriarum Infinitorum*.

1672 : Le 10 décembre, Newton révèle à Collins qu'il possède une méthode générale pour « tracer les tangentes à toutes les lignes courbes ».

1673 : De janvier à mars, Leibniz visite Londres et rencontre Oldenburg

Le 6 avril, Oldenburg envoie à Leibniz un rapport préparé par Collins sur l'avancement des mathématiques britanniques. Il fait allusion à la méthode des séries infinies de Newton, sans révéler aucun détail.

1675 : Pendant l'automne, Leibniz développe les idées de base de son calcul différentiel.

1676 : Le 13 Juin, Newton envoie l'*Epistola prior*⁴⁰, que Leibniz reçoit le 16 Août

En juillet, Oldenburg envoie à Leibniz un abrégé de l'*Historiola*

En octobre, Leibniz passe dix jours à Londres. Il y rencontre Collins, qui lui montre son exemplaire du de *Analysi* et de l'*Historiola*.

Le 24 octobre, Newton envoie l'*Epistola posterior* à Leibniz. Celui-ci la reçoit en juin 1677.

1682 : Leibniz publie son *De vera proportione circuli*, l'étude de la quadrature du cercle au moyen des séries infinies.

³⁹ Cette chronologie est traduite de *The Newton handbook*, Derek Gjertsen, Routledge et Kegan, Londres et New York, 1986, p. 502-506.

⁴⁰ cette lettre sera traduite dans un prochain numéro de Mnemosyne

1684 : Leibniz publie sa *Nova methodus pro maximis et minimis*, sa première publication sur le calcul différentiel, limitée à la différentiation, et présentée de façon si elliptique que les frères Bernoulli la décrivent comme " une énigme, plus qu'une explication "

1685 : John Wallis résume dans son *Algebra* le contenu de l'*Epistola prior* de 1676, sans faire aucune référence aux fluxions ni à la différentiation.

1686 : Leibniz publie son *De geometria recondita* , aussi elliptique que le *Nova*, contenant les premiers résultats sur l'intégration.

1687 : Publication des *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* par Newton. La première section du premier livre contient des détails sur la "méthode des premières et dernières raisons ".

1691 : Newton montre le *Methodus fluxionum* (composé en 1671) à Halley et à Raphson. Il compose le *De Quadratura Curvarum*.

1693 : Wallis rend brièvement compte de la méthode des fluxions dans son *Algebra*, volume II ; on y trouve aussi la première description publique de la notation " par points " de Newton.

1696 : Bernoulli lance le défi de la brachystochrone. Le marquis de L'Hospital publie le premier « manuel » sur le calcul différentiel : *l'Analyse des infiniment petits, Pour l'intelligence des lignes courbes*.

1697 : Le 30 janvier, Newton communique sa solution au problème de Bernoulli à Montague, et publie anonymement sa solution dans les *Philosophical Transactions* de février.

1699 : Wallis inclut dans le volume III de son *Algebra* l'intégralité des deux *Epistola* de 1676.

C'est alors que Fatio du Duillier, disciple et ami de Newton, envenime la rivalité scientifique par quelques phrases sybillines, publiées dans son *Lineae brevissimi* :

" Que Leibniz, le second inventeur, lui ait emprunté quelque chose, je préfère ne pas porter ce jugement moi-même, mais le laisser à ceux qui ont vu les lettres de Newton et ses autres manuscrits. Les efforts énergiques que déploie Leibniz pour s'attribuer l'invention du calcul différentiel ne convaincront pas davantage quiconque a examiné ces papiers comme je l'ai fait ".

1700 : dans sa recension pour les *Acta Eruditorum* de l'ouvrage de Fatio, Leibniz insiste sur la priorité de son *Nova* (1684), mais concède que Newton est allé beaucoup plus loin dans les *Principia*.

1704 : Newton publie en appendice à son *Optique* le *De Quadratura*. Il note dans l'Avertissement : " Dans une lettre écrite à Monsieur Leibniz en ... 1679 ..., j'ai mentionné une Méthode par laquelle j'ai trouvé quelques théorèmes généraux sur la quadrature des figures curvilignes. "

1705 : dans sa recension anonyme des articles mathématiques de l'*Optique* pour les *Acta Eruditorum*, Leibniz fait une comparaison plutôt obscure entre Newton et Fabri . Les deux auraient utilisé des méthodes mathématiques de rechange : Newton les fluxions au lieu des différentielles, Fabri la progression des mouvements au lieu des indivisibles de Cavalieri.

1710 : John Keill publie Les lois de la force centripète , où il affirme la priorité de Newton et va jusqu'à accuser Leibniz d'avoir publié « l'arithmétique des fluxions de Newton... en changeant le nom et le symbolisme »

1711 : Les *De Analysis* et *De Quadratura* de Newton sont publiés dans *Analysis per quantitatum series*. Le 21 Février, Leibniz se plaint à Hans Sloane, Secrétaire de la Royal Society, des accusations portées contre lui par Fatio (1699) et Keill (1710). Le 3 Avril, Keill attire l'attention de Newton sur le commentaire dans les *Acta Eruditorum* (1700). En mai, Keill écrit une lettre apparemment conciliante à Leibniz, en insistant toutefois sur le fait que Newton a été le « premier inventeur » du Calcul différentiel et qu'Oldenburg a envoyé les détails à Leibniz en 1676. En décembre : deuxième plainte de Leibniz à Sloane au sujets des « braiments injustes » de Keill.

1712 : constitution le 6 mars d'une Commission de la Royal Society pour examiner les plaintes de Keill et Leibniz. Le 24 avril, la Commission remet un rapport en faveur de Newton.⁴¹

1713 : Le 29 Janvier, publication du rapport et des annexes sous le titre de *Commercium epistolicum*. Bernoulli attire l'attention de Leibniz sur cette publication le 27 mai. En février-mars, Bernoulli, persuadé que Newton ne maîtrise pas complètement la méthode de différentiation, publie les détails d'une erreur dans la proposition X du Livre II des *Principia*. En mai-juin, Keill publie une anonyme *Lettre de Londres*, aux termes relativement modérés. Dans la même publication se trouve une traduction française du Rapport du 24 avril 1712. Le 29 Juillet, Leibniz publie sa réponse anonyme au rapport (*Charta volans*). Elle se présente comme un pamphlet séparé. Il fait référence « au jugement d'un mathématicien de premier plan » qui affirme « que la vraie méthode pour différencier les différentielles ne fut connue de Newton que bien après qu'elle eût été familière à d'autres ». En Novembre-décembre, Leibniz adopte une position plus dure dans différentes Remarques : comme le montre l'erreur identifiée par Bernoulli, Newton ne connaissait pas le calcul différentiel en 1687, ce qui a été publié par Wallis (1693 et 1699) n'était que le propre travail de Leibniz recyclé.

⁴¹ une copie de ce Rapport, telle qu'elle figure dans les Archives de la Royal Society est reproduite dans ce numéro en page 48.

1714 : John Chamberlayne multiplie en vain les tentatives de conciliation, de février à août Newton fait un brouillon de réponse, qu'il ne publie pas, à *Charta volans*. Il revendique la maîtrise des différentiations d'ordres successifs dès 1672 : les résultats de Leibniz dériveraient finalement des travaux de Gregory et des siens. Keill publie sa *Réponse aux Remarques de Leibniz*, son texte est revu et corrigé par Newton. Leibniz rédige de son côté *Historia et Origo Calculi differentialis*, mais ce texte ne sera publié qu'en 1886 par Gerhardt.

1715 : tentatives de réconciliation par l'Abbé Conti, tout aussi infructueuses que les précédentes. En février, Newton publie anonymement un Rapport, le compte-rendu le plus complet sur le développement de ses idées mathématiques et leur relation avec le travail de Leibniz. Joseph Raphson publie son *Histoire des Fluxions*, dans laquelle il prétend à tort que Newton aurait révélé la méthode des fluxions à Leibniz en 1676.

1716 : quelques ambassadeurs étrangers, dont le Ministre de Hanovre et le mari de la maîtresse de George I, le baron Kilmansegge, sont appelés par la Royal Society à consulter les documents relatifs à la querelle. Peu convaincus par ces documents, ils recommandent un échange direct entre Newton et Leibniz.

Leibniz meurt le 14 Novembre, mais Newton durcit sa position, prétend avoir inventé "la méthode des séries et des fluxions en 1665". La querelle reprend entre Newton et Bernoulli, suite à des erreurs volontaires ou non de Bernoulli, qui cite certaine formule comme sienne (meam en latin) et prétend ensuite qu'il s'agit d'une coquille (il fallait lire eam= celle-là) ; cette querelle se poursuit, alimentée par des publications anonymes, des réconciliations négociées (Newton s'occupe de faire réintégrer Bernoulli dans la liste des membres étrangers de la Royal Society en 1720), et de nouvelles fâcheries qui ne prendront fin qu'avec la mort de Bernoulli en 1723. C'est en 1761 que l'on saura que Newton était bien l'auteur du Rapport de 1713 de la Commission de la Royal Society chargée de faire le point, en toute objectivité, sur les travaux respectifs de Newton et Leibniz...

Cette querelle, en divisant les mathématiciens du continent et celle de l'Angleterre, va enfoncer ces derniers dans le refus de la notation leibnizienne et les priver pendant près d'un siècle d'un outil indispensable.

NOTES BIOGRAPHIQUES

Jean-Luc Verley

APOLLONIUS de Perge (III^{ème}-II^{ème} siècle avant J.C.)

Mathématicien et astronome grec (Perge était une petite ville grecque d'Asie Mineure). Son *Traité des Sections Coniques*, dont l'influence fut considérable, est, avec les *Eléments* d'Euclide, un sommet des mathématiques de l'Antiquité.

BARROW Isaac (1630-1677)

Mathématicien anglais et pasteur anglican. Son ouvrage mathématique le plus important, les *Lectiones Geometricae* (1670), a été rédigé avec la collaboration de NEWTON qui fut son élève et successeur dans sa chaire à Cambridge. Ce livre est fondamental dans le développement du calcul infinitésimal. Les historiens y reconnaissent, sous forme géométrique, le théorème fondamental de ce calcul (réciprocité entre détermination de tangentes et calcul d'aires), appelé parfois Théorème de Barrow.

BOYLE Robert (1627-1691)

L'oeuvre de ce physicien et chimiste anglais est fondamentale dans ces disciplines. Les historiens modernes ont mis en évidence son influence sur Newton dans l'élaboration d'une nouvelle science, la physique (appelée à l'époque philosophie naturelle).

CAVALIERI Bonaventura (1598-1647)

Mathématicien italien, jésuite, disciple de Galilée dont l'ouvrage *Geometria Indivisibilis...* (Bologne 1635 ; 2^{ème} éd. 1653) a joué un rôle charnière dans le développement du calcul intégral. Sa méthode et le Principe dit de Cavalieri sont généraux et libèrent le calcul des aires et des volumes de la lourdeur du double raisonnement par l'absurde des anciens (méthode apagogique) ; ils fournissent de nombreuses quadratures nouvelles. La rigueur des raisonnements par les indivisibles a été un sujet de polémiques extrêmement fructueuses.

COLLINS John (1625-1683)

Ce mathématicien anglais n'était pas un grand créateur et ses ouvrages publiés sont relatifs aux mathématiques pratiques (commerce, marine), mais il a joué un rôle important de "boîte à lettres" dans la communauté mathématique de son temps (BARROW l'a surnommé le "MERSENNE anglais"). Il a été en contact avec NEWTON dès 1669 et leur correspondance a été un argument de poids dans l'attaque de priorité des partisans de ce dernier, contre LEIBNIZ, relativement au calcul infinitésimal.

DESCARTES René (1596-1650)

Mathématicien et philosophe français dont l'œuvre représente une mutation profonde des pratiques scientifiques et philosophiques. Le cartésianisme, souvent grossièrement assimilé au déterminisme ou au mécanisme, a été accepté avec enthousiasme ou réfuté avec véhémence (en particulier par les anglais). C'est l'un des courants dominants de l'épistémologie depuis le XVII^{ème} siècle.

DESCARTES est né en Touraine à La Haye (dénommée de nos jours Descartes). Après des études au collège Jésuite de La Flèche, il étudie le droit à l'Université de Poitiers. En 1618, il s'engage dans l'armée de Maurice de Nassau puis voyage en Europe. Survient une nuit d'enthousiasme - « le rêve de Descartes » - où il a la révélation des fondements de sa Méthode. De retour en France en 1625, il rencontre MYDORGE, et le Père MERSENNE, par l'intermédiaire duquel il entretiendra une correspondance philosophique et scientifique avec l'Europe entière ; l'échange de lettres entre DESCARTES et FERMAT est un témoignage exceptionnel de la vie intellectuelle pendant la première moitié du XVII^{ème} siècle (cf. Mnémosyne n°2).

En nous limitant ici aux mathématiques, l'ouvrage fondamental de DESCARTES est sa *Géométrie*, publiée en Appendice de son *Discours de la Méthode* (1637). Fixant (arbitrairement) un « segment unité », DESCARTES réalise la numérisation de la géométrie. Utilisant systématiquement les lettres pour désigner les longueurs des segments, tant inconnus que connus, qui interviennent dans un problème de géométrie, il le réduit à des problèmes purement algébriques, ce qui lui fournit l'occasion, dans la troisième partie de son ouvrage, de développer une théorie générale des équations. L'introduction des coordonnées cartésiennes n'est qu'un aspect de cette démarche. La géométrie analytique est née, et elle va profondément bouleverser le champ de la géométrie, au point, pour un temps, d'étouffer la géométrie pure.

DETTONVILLE voir PASCAL

FABRI Honoré (1607-1688)

Mathématicien et jésuite français. Son ouvrage principal, *l'Opusculum geometricum...* (Rome 1659), contient une réinterprétation des indivisibles de CAVALIERI qui eut une profonde influence sur LEIBNIZ, comme ce dernier le souligne.

FERMAT Pierre de (1601-1665)

Il est évidemment frustrant de ne consacrer que quelques lignes à ce mathématicien-phare qui illumine les mathématiques de XVII^{ème} siècle.

Mathématicien amateur (il a passé la majorité de sa carrière comme conseiller au Parlement de Toulouse), il laisse une oeuvre fragmentaire mais considérable dont presque rien ne fut publié de son vivant.

Sa correspondance avec DESCARTES pose les bases du calcul différentiel (cf. Mnémosyne n°2) tandis que son échange épistolaire avec PASCAL (cf. Mnémosyne n°6) crée une science nouvelle, le calcul des probabilités. Et puis, bien entendu, ses recherches en théorie des nombres redonnent à cette discipline - stagnante depuis DIOPHANTE et BACHET - un élan, et surtout des méthodes complètement nouvelles (cf. Mnémosyne n°7 sur l'histoire de sa fameuse conjecture)

GREGOIRE DE SAINT-VINCENT (1584-1667)

Mathématicien flamand né à Bruges, on le rencontre à Rome, Prague, Vienne avant son retour définitif à Gand en 1632. Son ouvrage majeur est *l'Opus geometricum quadraturae circuli et sectionae con* (1647)(cf. Mnémosyne n°2). S'il échoue dans son projet ambitieux de quadrature du cercle, l'ouvrage fourmille d'idées et de résultats nouveaux : sa lecture sera décisive dans la formation du jeune LEIBNIZ à son arrivée à Paris. Il est surtout célèbre de nos jours par le lien entre l'aire sous l'hyperbole et les systèmes des logarithmes qu'il permettra à son disciple Alfons de SARASA de nouer, lors d'une controverse avec Mersenne, en 1649. Mentionnons aussi une méthode remarquable de quadrature, inspirée des indivisibles, que GREGOIRE nomme *ductus plani in planum*.

GREGORY David (1661-1708)

Neveu de James GREGORY, David fit ses études à Edimbourg, où il obtint la Chaire de Mathématiques en 1683. Si, au contraire de son oncle, il n'est pas un grand mathématicien créateur, il nous a laissé d'importants comptes-rendus sur NEWTON, qu'il considérait comme son maître et à qui il vouait une admiration sans bornes. Sa mort prématurée en 1708 l'a empêché de réaliser son rêve : être le maître d'œuvre de la deuxième édition des *Principia*. Signalons son ouvrage *Astronomiae physicae et geometricae elementa* (1702) où il vulgarise les théories newtoniennes.

GREGORY James (1638-1675)

D'origine écossaise, ce mathématicien de tout premier plan était très apprécié par NEWTON, mais sa mort prématurée a empêché l'éclosion de son œuvre. En plus de son abondante *Correspondance* avec John COLLINS, qui n'a été éditée qu'en 1939, mentionnons les titres *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1667) et *Geometriae pars universalis* (1668)

HUYGENS Christian (1629-1695)

Physicien, astronome et mathématicien hollandais. Ayant pris connaissance, lors d'un séjour à Paris en 1655/56, de la correspondance entre PASCAL et FERMAT sur le calcul des probabilités, il publie le premier traité consacré à ce sujet (*Tractatus de ratiociniis in aleae ludo*, 1657). A propos de ses travaux sur le pendule isochrone, il élabore sa théorie des développées et développantes, qu'il expose dans *Horologium oscillatorium* (1673).

HUYGENS a passé une grande partie de sa vie en France, où il fut l'un des premiers membres de l'Académie des Sciences créée par Colbert en 1666. Sa théorie ondulatoire de la lumière s'oppose à celle, corpusculaire, de Newton.

KEPLER Johannes (1571-1630)

Astronome et théoricien de l'astronomie, d'origine allemande. A partir des observations de TYCHO BRAHE et des siennes propres, principalement sur Mars, il a énoncé les trois lois qui portent son nom sur le mouvement des planètes du système solaire (les deux premières sont dans son *Astronomia Nova*.... 1609, et la

troisième dans son *Harmonices mundi*, 1619). En mathématiques proprement dites, on lui doit une contribution importante au calcul des volumes par la méthode des indivisibles (*Nova Stereometria Doliorum Vinariorum*..., 1615), ainsi qu'une théorie originale d'un système de logarithmes (*Chiliades Logarithmorum*, 1624).

MERCATOR Nicolaus (1619-1687)

De son vrai nom KAUFFMAN, MERCATOR est né en Holstein (danois à l'époque). En 1653, il gagne Londres où il latinise son nom et réside près de trente ans. A l'invitation de COLBERT, il part pour Paris où il meurt peu de temps après son arrivée.

Dans son ouvrage le plus connu, *Logarithmotechnia* (1668), il donne une construction nouvelle des logarithmes à partir de la fonction exponentielle et écrit le développement en série de $\ln(1+x)$.

OLDENBURG Henry (1618-1677)

Originaire de Brême, il parcourt l'Europe pendant des années en apprenant diverses langues, puis s'installe définitivement à Londres en 1660. Sa vie est transformée lorsqu'il est nommé en 1663 Secrétaire de la Royal Society qui vient d'être créée, poste qu'il gardera jusqu'à sa mort. Il va jouer un rôle fondamental à l'intérieur de cette illustre Société en éditant en particulier à partir de 1665 les *Philosophical Transactions*, premier périodique entièrement scientifique. Si OLDENBURG n'est pas un savant original, il apparaît comme le premier administrateur scientifique. Sa correspondance s'étend à toute l'Europe, dans différentes langues. et il sert de véritable « boîte aux lettres » (rôle joué par Mersenne en France dans la première moitié du XVIIème siècle.)

Intermédiaire pour les *Epistola prior* et *posterior* que NEWTON adresse à LEIBNIZ en réponse aux questions de ce dernier, il est au cœur des polémiques entre les mathématiciens anglais et continentaux.

OUGHTRED William (1575-1660)

Mathématicien anglais dont l'ouvrage le plus célèbre, *Clavis mathematicae* (1631) eut une importance considérable dans le développement de l'algèbre et des notations arithmétiques et algébriques. Parmi ses élèves, mentionnons Wallis, qui lui a dédié son *Arithmetica Infinitorum* de 1655. Oughtred est également considéré comme l'inventeur du cercle à calculs et de la règle à calculs, dès 1621, ce qui suppose une bonne maîtrise des logarithmes.

PASCAL Blaise (1623-1662)

Il est le correspondant de FERMAT dans l'échange de lettres en 1654-1655 qui constituent la naissance du calcul des probabilités. Par ailleurs, à la suite du défi proposé aux mathématiciens sur la cycloïde, il développe des méthodes qui préfigurent le calcul infinitésimal. Sa maîtrise du triangle différentiel aura une importance décisive sur les idées de Leibniz sur le calcul différentiel.

PELL John (1611-1655)

Mathématicien anglais, dont le nom est resté attaché à l'équation diophantienne dite de Pell-Fermat $x^2 = 1 + A y^2$ et à des innovations dans le domaine du symbolisme algébrique.

SLUSE René-François de (1622-1685)

Mathématicien belge, il fut archevêque à Liège. Il a entretenu une importante correspondance avec les ténors mathématiques de son temps, en particulier avec PASCAL (qui appréciait ses travaux sur la cycloïde), HUYGENS, OLDENBURG, WALLIS. Dans son ouvrage principal, le *Mesolabum* (1659 ; 2^{ème} éd. 1668), il a développé une méthode générale de construction des tangentes aux courbes algébriques qui en fait l'un des précurseurs du calcul infinitésimal.

TSCHIRNAUS Ehrenfried (1651-1708)

Mathématicien et philosophe allemand, il propagea avec enthousiasme les méthodes cartésiennes. Il a suivi l'enseignement de SPINOZA et, sur ses conseils, se rend à Londres en 1675, où il rencontre OLDENBURG, WALLIS et COLLINS. Muni d'une recommandation d'OLDENBURG, nous le retrouvons à la fin de cette même année à Paris, où il rencontre HUYGENS et surtout LEIBNIZ dont il devient très proche. Il ne fut pas conscient de l'importance du calcul différentiel ; ses diverses publications furent parfois taxées de plagiat et présentent des erreurs, ce qui a nui à sa réputation scientifique.

VIETE François (1540-1603)

Mathématicien français souvent cité comme l'inventeur de l'algèbre moderne. La vie de VIETE se partage entre de hautes responsabilités politiques (il fut conseiller privé d'HENRI IV, pour lequel il effectua des recherches en cryptographie), et une œuvre de science pure. Avec son *Canon mathematicus* (1579), qui est le premier formulaire de trigonométrie, on notera bien sûr l'ensemble de ses publications sur *l'Art Analytique*, ou « logistique spécieuse », qui consiste à étendre aux espèces c'est-à-dire aux lettres, les règles de calcul de l'arithmétique. C'est dans les *Zététiques* qu'il étudie de manière générale, « en lettre », divers problèmes considérés par DIOPHANTE, et qui ont fait sa réputation.

WALLIS John (1616-1703)

Mathématicien anglais, il influença profondément l'école mathématique de son pays ; il est l'un des fondateurs de la Royal Society. Après des études sur les langues anciennes, la théologie et la médecine, il est nommé en 1649 à la Chaire de Géométrie d'Oxford, poste qu'il occupera jusqu'à sa mort.

Son ouvrage le plus fameux est *l'Arithmetica Infinitorum* (1656), où, dans un subtil cocktail d'analyse cartésienne et de méthodes d'indivisibles de TORRICELLI, il apparaît comme un précurseur du calcul intégral. Son influence sur NEWTON fut décisive. C'est d'ailleurs WALLIS qui, dans son volumineux *Treatise of Algebra* (1676), imprimera pour la première fois certains résultats de NEWTON, comme ses travaux sur l'approximation et un exposé du contenu de *l'Epistola prior et posterior*

The Report of the Committee of the
Royall Society for Inspecting the
Books and Papers of the Society in
relation to the Dispute between Mr.
Leibnitz and Mr. Keiles.

4. ^{thly} That the Differentiall Method is one and the same
with the Method of fluxions excepting the mode of notation,
Mr. Leibnitz calling those quantities Differences which Mr.
Newton calls Moments or Fluxions and marking them with the
Letter d a mark not used by Mr. Newton, and therefore we
take the proper Question to be not Who Invented this or that me-
thod, but, Who was the first Inventor of the Method, and we
believe that those who have reputed Mr. Leibnitz the first
Inventor knew little or nothing of his Correspondence with
Mr. Collins & Mr. Oldenburg long before, nor of Mr. Newton's
having that Method above 15 Years before Mr. Leibnitz began to
Publish it in the Acta Eruditorum of Leipzick, For
which reasons We reckon Mr. Newton the first Inventor, &
are of opinion that Mr. Keil in Ascribing the same has been in
no ways Injurious to Mr. Leibnitz, and we Submit to the Judgment
of the Society whether the Extract of Letters & papers now
presented together with what is extant for the same purpose in
Dr. Wallis's 3^d Volume may not deserve to be made
Publick

DANS NOS CLASSES

Lettre de Leibniz à La Roque : la quadrature arithmétique du cercle

Groupe M. : A. T. H.

Dans le texte du *De Origo*, Leibniz mentionne la méthode des métamorphoses sans en développer les détails. Cette méthode est explicitée pour la première fois dans une lettre adressée à La Roque, directeur du *Journal des Savants*, qu'on date de 1673. Dans cette lettre, Leibniz explique qu'il a obtenu une quadrature exacte et non plus approchée du cercle, en utilisant la méthode des métamorphoses; cette méthode consiste à remplacer la courbe irrationnelle qu'est le cercle par une courbe rationnelle (dont l'équation met en jeu une fraction rationnelle). Il en déduit alors une valeur de $\frac{\pi}{4}$ sous forme d'une série infinie de rationnels : $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$. La procédure infinie n'est pas un obstacle pour Leibniz : il explique que la simplicité de la loi de progression de cette série permet à l'esprit d'embrasser d'un seul regard la totalité de la série, qu'il identifie à la valeur exacte de $\frac{\pi}{4}$. Il est extrêmement fier de ce résultat, qu'il obtient vers 1672, alors qu'il n'est encore qu'un mathématicien novice, pendant son séjour à Paris, où il a été envoyé pour une mission diplomatique. Il y a rencontré Huygens, lui-même en séjour temporaire à Paris, qui décèle chez le jeune Leibniz des qualités de mathématicien, mais qui est désolé de sa formation très hétéroclite, et décide de l'initier plus sérieusement à la discipline. Leibniz gardera toujours une certaine nostalgie de ce premier résultat mathématique important.

Leibniz déclare que sa méthode peut s'appliquer à toute courbe "transcendante", ce qui signifie pour lui à toute courbe dont l'équation ne s'exprime pas à l'aide de fonctions puissances. Il ne donnera cependant pas d'autre application de la méthode des métamorphoses.

La lettre à La Roque étant très concise et difficile à lire, nous proposons au lecteur ce problème, de niveau post-bac mais dont certaines parties peuvent être proposées à des élèves de terminale scientifique, afin d'en faciliter ensuite la lecture.

Problème : Quadrature du cercle à la manière de ... Leibniz

Les deux parties, bien que liées, sont indépendantes en grande partie. On peut toujours utiliser les résultats des diverses questions dans la suite du problème. Le but du problème est de trouver une expression de π sous forme de limite d'une suite de nombres rationnels.

Partie A. Etude d'une fonction et approximation d'une aire

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$ par : $f: z \mapsto f(z) = \frac{2z^2}{1+z^2}$

1°) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 8 cm) (on étudiera la position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{3}}$).

2°) Donner une interprétation géométrique du nombre $A = \int_0^1 f(z) dz$

Le but des questions suivantes est de déterminer une suite convergeant vers A .

3°) a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout z de $\mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots + (-1)^n z^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+2}}{1+z^2}$$

b) En déduire une expression de A sous forme de la somme d'un nombre rationnel et d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer (tous deux dépendant de n).

c) On pose $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{z^{2n+4}}{1+z^2} dz$ et $u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+3}$

Montrer que : $|R_n| < \frac{1}{2n+5}$ et en déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

d) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de u_5 ; u_{50} ; u_{500} .

Partie B : Métamorphose d'un cercle

1°) Lire le texte suivant, extrait d'une lettre de Leibniz, écrite à La Roque, directeur du *Journal des Savants*.

Pour cet effect je me suis servi de ce lemme :
Trois paralleles BC, GE, HF (fig. 1), passant par les trois angles d'un triangle BEF et un des costez EF estant prolongé jusqu'à la rencontre d'une des paralleles en C, le rectangle sous l'intervalle BC entre le point de rencontre C et l'angle B, par lequel passe cette parallele, et sous GH, la distance des deux autres paralleles GE, HF, c'est à dire le rectangle PGH (en supposant BGH normale à BC, et CP égale et parallele à BG) sera le double du Triangle BEF. De même, si HQ égale à BM, le rectangle QHN sera égal au double Triangle BFL.

Les points C , E et F sont alignés; les droites (BC) , (GE) et (HF) sont parallèles. Le rectangle $GPP'H$ a une aire double de celle du triangle BEF . Les questions a) et b) sont destinées à vous aider à démontrer cette assertion.

a) On projette orthogonalement B en C' sur (EF) et E en F' sur (HF) . Montrer que les triangles BCC' et EFF' sont semblables.

b) En déduire $BC' \times EF = BC \times EF'$ et démontrer l'assertion de Leibniz.

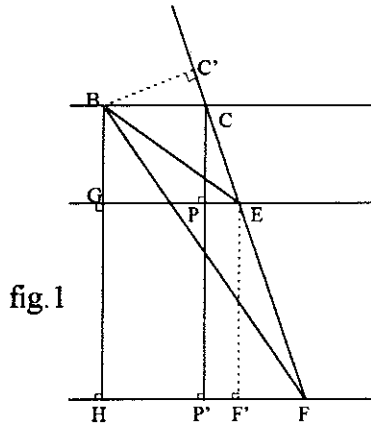


fig.1

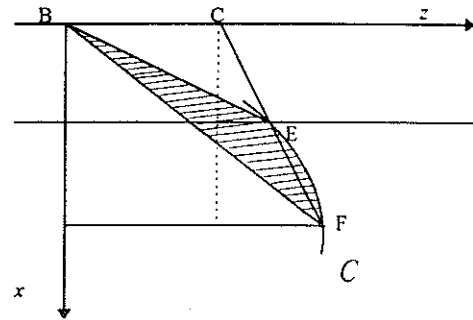


fig.2

2°) Voici ce qu'explique Leibniz dans la suite de sa lettre.

Soit B un point donné, qui sera pris pour origine du repère formé par les axes (Bz) et (Bx) , et E et F deux points d'une courbe C . Si E et F sont très proches, la droite (EF) peut être considérée comme la tangente à C en E et le triangle BEF est le triangle curviligne infinitésimal limité par l'arc EF de la courbe C et les droites (BE) et (BF) .

On a montré à la question 1°) que l'aire grisée est double de l'aire hachurée.

Imaginons qu'on répète la construction en chaque point E de la courbe C : on trace en E la tangente à C , qui coupe (Bz) en C et on projette C orthogonalement en E' sur la parallèle à (Bz) passant par E . E' décrit une courbe C' lorsque E décrit C . On obtient alors le résultat suivant :

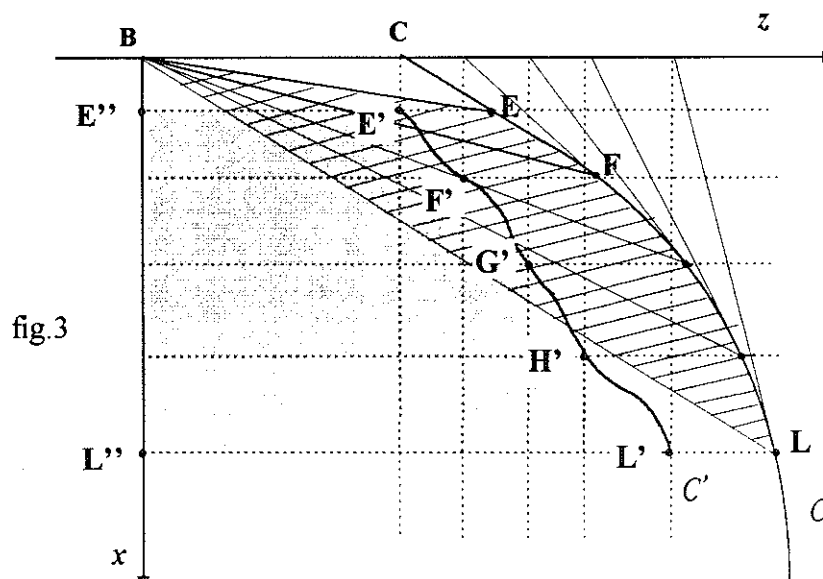


fig.3

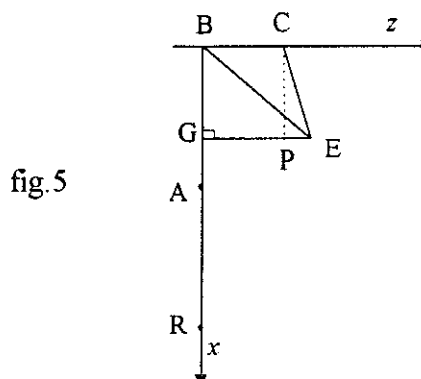
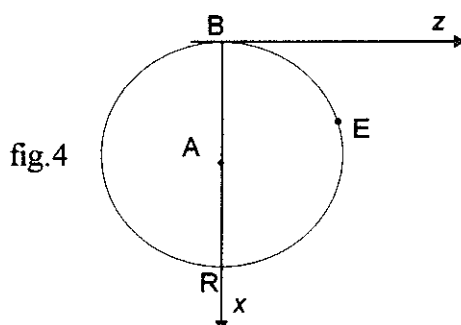
L'aire grisée (assimilable à l'aire du domaine limité par (Bx), (E'E''), (L'L''), C') est le double de l'aire hachurée (du domaine limité par C, (BE), (BL)).

Remarquons qu'on a remplacé une quadrature par une autre .

Quelle égalité d'aires obtient-on si on fixe L sur C, qu'on place E en B et qu'on fait tendre vers l'infini le nombre de points comme F, G, H,... qui subdivisent l'arc BL?

3°) Leibniz utilise alors ce résultat pour déterminer l'aire d'un cercle de rayon 1.

a) Reproduire la figure 4 et tracer le point E' de la courbe C' correspondant à un cercle de centre A et de rayon 1.



b) Nous allons chercher l'équation de C' dans le repère formé (B, (Bx), (Bz)). On note G le projeté orthogonal de E sur (Bx). On pose $BC = z$ et $BG = x$. Montrer que les triangles BCA et GBE sont semblables. En déduire : $EB^2 = CA^2 \times \frac{GB^2}{BC^2}$ et montrer que : $\frac{BR}{GB} = \frac{CA^2}{BC^2}$

En déduire l'équation de C' (c'est-à-dire l'expression de x en fonction de z).

4°) Lire l'extrait suivant de la lettre de Leibniz :

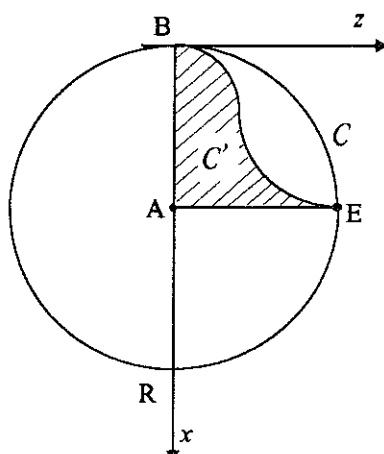
Car la courbe E(E)((E)) étant un arc de cercle, la courbe des interceptées, sçavoir BP(E)((P)), se pourra rapporter à l'angle droit RBC par cette equation $\frac{2az^2}{a^2+z^2} \propto x$, appellant BG ou CP, x et BC ou GP, z, c'est à dire RB sera à BG en raison doublée de AC à BC, comme il est aisé de démonstrer.

Remarquer la notation de Leibniz, qui désigne différents points de la courbe par E, (E), ((E)), de manière analogue à nos E, E', E''. La courbe E(E) ((E)) est la courbe C, la courbe BP(E)((P)) est la courbe C' ; a est le rayon de C (a = 1).

Que signifie l'expression : " RB sera à BG en raison doublée de AC à BC " ?

5°)

fig. 6



a) Donner une expression de l'aire du domaine limité par C' , (Bz) et la droite d'équation $z = 1$ à l'aide d'une intégrale.

b) En déduire une expression de l'aire hachurée (domaine limité par C' , (Bx) , la droite d'équation $x = 1$).

c) On a vu au 2°), que l'aire hachurée est le double de l'aire du domaine limité par la corde (BE) et l'arc BE du cercle. Déduire de ce qui précède une expression de l'aire $\tilde{A}$ du quart de cercle ABE à l'aide d'une intégrale.

d) En utilisant la partie A, exprimer $\tilde{A}$ comme limite d'une suite de nombres rationnels.

Quelle est la valeur exacte de $\tilde{A}$? Qu'en conclure pour π ?

Lire le texte de Leibniz (nous avons travaillé dans le cas particulier où BAE est un angle droit ce qui correspond à $b = 1$).

Et pour y arriver il faut se servir de la belle methode de Nicolaus Mercator, selon laquelle, puisque x estant l'unité et $\frac{x}{2}$

égal à $\frac{z^2}{1+z^2}$, la même x sera égale à $z^2 - z^4 + z^6 - z^8$ etc. à l'infini, et la somme de toutes les x égale à la somme de toutes les $z^2 - z^4$ etc. Or la première de toutes les z estant infiniment petite, et la dernière estant d'une certaine grandeur, comme BC somme de toutes z^4 sera $\frac{b^5}{5}$ etc. (par la quadrature des paraboles).

donc la somme de toutes les x ou l'espace $BCPB$, ou la différence du rectangle CBG et du double segment du cercle BEB sera $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. donc (par une suite assez aisée de la Geo-

metrie ordinaire) l'arc BDE sera $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc. le rayon estant 1 et BC , touchante de la moitié de l'arc, estant appelée b . Ce qu'il falloit demonstrier.

Retour sur le calcul de l'aire du secteur circulaire BAE de mesure α inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$.

Le secteur circulaire BAE a pour angle au centre α ; $\tan(\frac{\alpha}{2}) = BC$. On pose $BC = b$.

L'aire curviligne $\tilde{A}_1$ limitée par (BR), (GE) et C' (gris foncé) est le double de l'aire $\tilde{A}_2$ du segment (hachuré) de cercle BE (limité par C et [BE]).

Première étape : on calcule l'aire $\tilde{A}_3$ (hachurée) limitée par (BC), (CP) et C' .

$$\frac{x}{2} = \frac{z^2}{1+z^2} = z^2 - z^4 + z^6 - z^8 \dots, \text{ (cf. A 3° a)}$$

"La somme de tous les x ", si $x = f(z)$, est égale, en termes modernes, à :

$$\int_0^b f(z) dz ; \quad \text{c'est donc :} \quad 2 \int_0^b (z^2 - z^4 + \dots) dz = 2 \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} \dots \right)$$

"La première de toutes les z étant infiniment petite ... la somme de toutes les z^2 sera $\frac{b^3}{3}$, " correspond à

$$\text{ce que nous écrivons } \int_0^b z^2 dz = \frac{b^3}{3} .$$

Or $\tilde{A}_3$ (gris clair) est la différence entre l'aire du rectangle BCPG et $\tilde{A}_1$, elle-même double de $\tilde{A}_2$ qui est "la différence entre le rectangle CBG et le double du segment du cercle".

Deuxième étape :

L'aire $\tilde{A}$ du secteur ABE est égale à l'aire $\tilde{A}_2$ du segment de cercle ajoutée à l'aire du triangle BAE qui vaut $\frac{1}{2} (AB \times GE)$; or $AB = 1$; $GE^2 = AE^2 - AG^2$ donc :

$$GE^2 = 1 - \left(1 - \frac{2b^2}{1+b^2} \right)^2 = \frac{4b^2}{1+b^2} \left(1 - \frac{b^2}{1+b^2} \right) = \frac{4b^2}{(1+b^2)^2} \quad \text{et} \quad GE = \frac{2b}{1+b^2}$$

l'aire $\tilde{A}$ du secteur BAE vaut donc :

$$\tilde{A} = \underbrace{\frac{b}{1+b^2}}_{\text{triangle BAE}} + \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{2b^3}{1+b^2}}_{\text{rectangle BCPG}} - \underbrace{2 \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} \dots \right)}_{\text{aire } \tilde{A}_3} \right)$$

$$\tilde{A} = b \left(\frac{1}{1+b^2} + \frac{b^2}{1+b^2} \right) - \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} \dots \right)$$

$$\tilde{A} = b - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} \dots$$

Ce qui termine la démonstration.

Si on prend $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $b=1$ et on retrouve la série

rencontrée plus haut.

On remarque, comme toujours à cette époque, qu'on ne voit apparaître aucune préoccupation explicite de convergence.

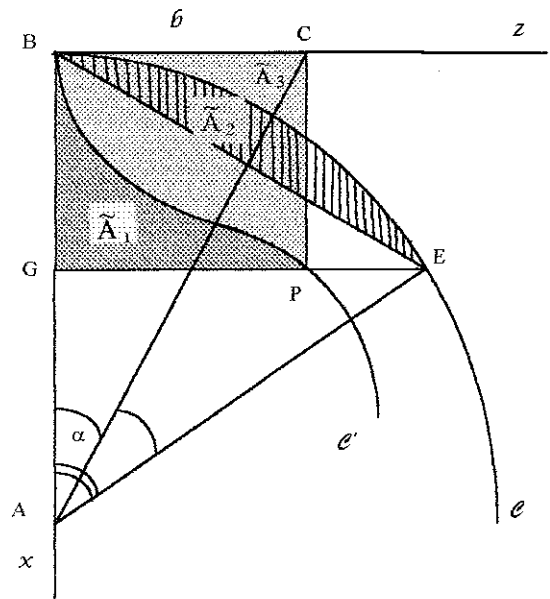


Fig. 7

Monsieur

La quadrature Arithmétique du Cercle et de ses segments ou secteurs, que j'ay trouvée et communiquée à plusieurs excellens Geometres il y a déjà quelques années, leur a paru assez extraordinaire, et ils m'ont exhorté d'en faire part au public. Mais comme je n'aime pas d'écrire un volume farci d'un grand nombre de propositions repassées pour donner une seule qui soit nouvelle et considerable, j'ay recours à Vostre Journal qui nous donne le moyen de publier un theoreme sans faire un livre.

Quadrature Arithmétique est, qui exprime la grandeur de la figure proposée par un rang infini de nombres rationaux ou commensurables à une grandeur donnée, ce qui suffit pour l'Arithmétique lorsqu'on ne le sçauroit faire par un nombre rationel fini, car l'arithmétique ne connoist les nombres irrationaux qu'autant qu'elle les peut exprimer par les rationels soit finis soit infinis. Et il n'est pas difficile de donner même un rang infini de nombres rationaux égal à une racine sourdo, ce que je croy d'avoir fait le premier, en.....*) la division dans une extraction continuée.

La quadrature Arithmétique du Cercle et de ses parties peut estre comprise dans ce theoreme: Le rayon du Cercle estant l'unité, et la tangente BC de la moitié BD d'un arc donné BDE estant appelée b , la grandeur de l'arc sera: $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc. Or les arcs estant trouvez, il est aisé de trouver les espaces, et le corollaire de ce theoreme est que le Diametre et son quarré estant 1. le Cercle est $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12}$ etc. L'usage de cette quadrature est qu'outre la beauté d'un theoreme aussi simple et aussi surprenant que celui-ci. vous avons un moyen de trouver les angles par les costez et à rebours; item les espaces ou portions des Cercles, Ellipses, Cones, Spheres, Spheroides et de leur sur-

faces, le tout par une simple addition de nombres rationaux ou graceux commensurables au defaut même de tables toutes calculées, et sans polygones, dont le calcul demande une extraction perpetuelle de racines, outre qu'ainsi on approchera bien viste; car si b par exemple ou BC estoit $\frac{1}{10}$ du rayon, b^{11} seroit $\frac{1}{10^{11}}$ et par consequent toutes les puissances plus hautes pourront negligées hardiment. Ce qui serviroit à continuer les tables, et à les rendre plus exactes sans beaucoup de peine.

Or comme il n'y a rien de si importants que de voir les origines des inventions qui valent mieux à mon avis que les inventions mêmes, à cause de leur fécondité et par ce qu'elles contiennent en elles la source d'une infinité d'autres qu'on en pourra tirer par une certaine combinaison (comme j'ay coutume de l'appeller)

ou application à d'autres sujets lors qu'on s'avisera de la faire comme il faut; j'ay crû estre obligé de faire part au public de l'origine de celle-cy. J'ay donc considéré, que les quadratures que nous avons trouvées jusqu'icy par l'analyse ordinaire, dependent des regles Arithmetiques de trouver les sommes des rangs réglés, ou des progressions de nombres rationaux. Mais les ordonnées du cercle estant irrationnelles, j'ay taché de transformer le cercle en une autre figure, du nombre de celles que j'appelle rationnelles, c'est à dire dont les ordonnées sont commensurables à leurs abscisses. Pour cet effect j'ay fait le dénombrement de quantité de Metamorphoses, et les ayant essayées par une combinaison tres aisée (car je pourrois par ce moyen écrire en une heure de temps une liste de plus de 50 figures planes ou solides, différentes, et neantmoins dependentes de la circulaire) j'ay trouvé bientôt le moyen que je m'en vays expliquer. J'ay crû cependant à propos de remarquer cecy en passant pour justifier ce que j'avois dit autrefois de l'utilité des combinaisons pour trouver des choses que l'algebre et si vous voulez, l'analyse même telle que nous l'avons ne scauroit donner. Or le moyen que les combinaisons m'ont offert sert à trouver un nombre infini de figures commensurables à une figure donnée. Pour cet effect je me suis servi de ce lemme: Trois paralleles BC, GE, HF (fig. 1), passant par les trois angles d'un triangle BEF et un des costez EF estant prolongé jusqu'à la rencontre d'une des paralleles en C, le rectangle sous l'intervalle BC entre le point de rencontre C et l'angle B, par lequel passe cette parallele, et sous GH, la distance des deux autres paralleles

GE, HF, c'est à dire le rectangle PGH (en supposant BGH normale à BC, et CP égale et parallele à BG) sera le double du Triangle BEF. De même, si HQ égale à BM, le rectangle QHN sera égal au double Triangle BFL. Et si ces bases EF, FL etc. sont infiniment petites, et continuées pour remplir*) tout l'Espace $EB((E))LFE$ à la courbe $EFL((E))$, et de même si GH, HN etc. sont infiniment petites afin que les rectangles PGH, QHN etc. remplissent tout l'espace $PG((G))((P))QP$ à la courbe $PQ((P))$, tout cet espace sera le double de l'autre espace. Et puisque FEC, LFM, $((E))((C))$ seront les touchantes de la premiere courbe, le theoreme se pourra enoncer generalement ainsi: Si d'une courbe $E((E))$ on mene à un costé AB d'un angle droit ABC les ordonnées EG, $((E))((G))$, à l'autre costé BC les touchantes EC, $((E))((C))$, alors la somme des interceptées BC, $((B))((C))$ entre le point de l'angle B et le point de la rencontre des touchantes C ou $((C))$ appliquées normalement à l'axe AB ou GP, $((G))((P))$, c'est à dire la figure $PG((G))((P))QP$ sera le double de l'espace $EB((E))E$ compris entre une portion de la premiere courbe et les droites qui joignent les extremités de cette portion au point B.

Le troisieme Corollaire est la quadrature Arithmetique du Cercle. Car la courbe E(E)((E)) estant un arc de cercle, la courbe des interceptées, sçavoir BP(E)((P)), se pourra rapporter a l'angle droit RBC par cette equation $\frac{2az^2}{a^2+z^2} \sqcap x$, appellant BG ou CP, x

et BC ou GP, z, c'est à dire RB sera à BG en raison doublée de AC à BC, comme il est aisé de demonstrier. D'ou il s'ensuit premierement que celui qui trouvera une regle de donner par abrégé la somme d'un tel rang, quoyque fini, de nombres rationaux:

$\frac{2,1}{1+1}$ ou $\frac{2}{2}$, $\frac{2,4}{1+4}$ ou $\frac{8}{5}$, $\frac{2,9}{1+9}$ ou $\frac{18}{10}$, $\frac{2,16}{1+16}$ ou $\frac{32}{17}$ etc. sans

estre obligé de les ajouter ensemble l'un apres l'autre, aura achevé la quadrature du cercle, parceque c'est la progression des ordonnées CP de la figure BCPB, dont la quadrature donneroit celle du Cercle. Mais à present ce n'est pas encor la quadrature Arithmetique. Et pour y arriver il faut se servir de la belle methode de

Nicolaus Mercator, selon laquelle, puisque a estant l'unité et $\frac{x}{2}$

égal à $\frac{z^2}{1+z^2}$, la même x sera égale à $z^2 - z^4 + z^6 - z^8$ etc. à

l'infini, et la somme de toutes les x égale à la somme de toutes les $z^2 - z^4$ etc. Or la premiere de toutes les z estant infiniment petite, et la derniere estant d'une certaine grandeur, comme BC

que nous appellerons b, la somme de toutes les z^2 sera $\frac{b^3}{3}$, et la

somme de toutes z^4 sera $\frac{b^5}{5}$ etc. (par la quadrature des paraboles).

donc la somme de toutes les x ou l'espace BCPB, ou la difference du rectangle CBG et du double segment du cercle BEB sera $\frac{b^3}{3}$

$-\frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. donc (par une suite assez aisée de la Geo-

metrie ordinaire) l'arc BDE sera $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc. le

rayon estant 1 et BC, touchante de la moitié de l'arc, estant appelée b. Ce qu'il falloit demonstrier. J'avoue que cette demonstration ne pourra pas estre entendue de tout le monde, parcequ'elle suppose bien des choses qui ne sont connues qu'à ceux qui sont versez dans les nouvelles decouvertes et qui sçavent manier les caracteres ou symboles. Mais il n'y en a que trop pour ceux-cy: et il faudroit un volume pour satisfaire aux autres. On pourroit prouver aussi le rapport qu'il y a entre la figure des interceptées B((G))((P))PB et le cercle, en supposant la quadrature

de la Cissoeide trouvée par Mons. Hugens, comme il m'a fait remarquer. Mais la demonstration que je viens de donner m'a servi de principe d'invention et est seconde en theoremes nouveaux. S'il y a lieu d'esperer qu'on pourra jamais arriver à une raison analytique, exprimée en termes finis, du Diametre à la circonference, je croy que ce sera par cette voye, car quoyque les expressions soyent infinies, nous ne laissons pas quelques fois d'en trouver les sommes: et pour cet effect je donneray pour conclusion l'observation suivante, qui me paroist tres curieuse:

$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{16} \frac{1}{32} \frac{1}{64} \frac{1}{128} \frac{1}{256} \frac{1}{512} \frac{1}{1024} \frac{1}{2048} \frac{1}{4096} \frac{1}{8192} \frac{1}{16384} \frac{1}{32768} \frac{1}{65536} \frac{1}{131072} \frac{1}{262144} \frac{1}{524288} \frac{1}{1048576} \frac{1}{2097152} \frac{1}{4194304} \frac{1}{8388608} \frac{1}{16777216} \frac{1}{33554432} \frac{1}{67108864} \frac{1}{134217728} \frac{1}{268435456} \frac{1}{536870912} \frac{1}{1073741824} \frac{1}{2147483648} \frac{1}{4294967296} \frac{1}{8589934592} \frac{1}{17179869184} \frac{1}{34359738368} \frac{1}{68719476736} \frac{1}{137438953472} \frac{1}{274877906944} \frac{1}{549755813888} \frac{1}{1099511627776} \frac{1}{2199023255552} \frac{1}{4398046511104} \frac{1}{8796093022208} \frac{1}{17592186044416} \frac{1}{35184372088832} \frac{1}{70368744177664} \frac{1}{140737488355328} \frac{1}{281474976710656} \frac{1}{562949953421312} \frac{1}{1125899906842624} \frac{1}{2251799813685248} \frac{1}{4503599627370496} \frac{1}{9007199254740992} \frac{1}{18014398509481984} \frac{1}{36028797018963968} \frac{1}{72057594037927936} \frac{1}{144115188075855872} \frac{1}{288230376151711744} \frac{1}{576460752303423488} \frac{1}{1152921504606846976} \frac{1}{2305843009213693952} \frac{1}{4611686018427387904} \frac{1}{9223372036854775808} \frac{1}{18446744073709551616} \frac{1}{36893488147419103232} \frac{1}{73786976294838206464} \frac{1}{147573952589676412928} \frac{1}{295147905179352825856} \frac{1}{590295810358705651712} \frac{1}{1180591620717411303424} \frac{1}{2361183241434822606848} \frac{1}{4722366482869645213696} \frac{1}{9444732965739290427392} \frac{1}{18889465931478580854784} \frac{1}{37778931862957161709568} \frac{1}{75557863725914323419136} \frac{1}{151115727451828646838272} \frac{1}{302231454903657293676544} \frac{1}{604462909807314587353088} \frac{1}{1208925819614629174706176} \frac{1}{2417851639229258349412352} \frac{1}{4835703278458516698824704} \frac{1}{9671406556917033397649408} \frac{1}{19342813113834066795298816} \frac{1}{38685626227668133590597632} \frac{1}{77371252455336267181195264} \frac{1}{154742504910672534362390528} \frac{1}{309485009821345068724781056} \frac{1}{618970019642690137449562112} \frac{1}{1237940039285380274899124224} \frac{1}{2475880078570760549798248448} \frac{1}{4951760157141521099596496896} \frac{1}{9903520314283042199192993792} \frac{1}{19807040628566084398385987584} \frac{1}{39614081257132168796771975168} \frac{1}{79228162514264337593543950336} \frac{1}{158456325028528675187087900672} \frac{1}{316912650057057350374175801344} \frac{1}{633825300114114700748351602688} \frac{1}{1267650600228229401496703205376} \frac{1}{2535301200456458802993406410752} \frac{1}{5070602400912917605986812821504} \frac{1}{10141204801825835211973625643008} \frac{1}{20282409603651670423947251286016} \frac{1}{40564819207303340847894502572032} \frac{1}{81129638414606681695789005144064} \frac{1}{162259276829213363391578010288128} \frac{1}{324518553658426726783156020576256} \frac{1}{649037107316853453566312041152512} \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696} \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392} \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784} \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568} \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136} \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272} \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544} \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088} \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176} \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352} \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704} \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408} \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816} \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632} \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264} \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528} \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056} \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112} \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224} \frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448} \frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896} \frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792} \frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584} \frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168} \frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336} \frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672} \frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344} \frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688} \frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376} \frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752} \frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504} \frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008} \frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016} \frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032} \frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064} \frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128} \frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256} \frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512} \frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024} \frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048} \frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096} \frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192} \frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384} \frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768} \frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536} \frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072} \frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144} \frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288} \frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576} \frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152} \frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304} \frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608} \frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216} \frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432} \frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864} \frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728} \frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456} \frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912} \frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824} \frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648} \frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296} \frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592} \frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184} \frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368} \frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736} \frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472} \frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944} \frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888} \frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776} \frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552} \frac{1}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104} \frac{1}{14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208} \frac{1}{28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416} \frac{1}{56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832} \frac{1}{113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664} \frac{1}{226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328} \frac{1}{452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656} \frac{1}{904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312} \frac{1}{1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624} \frac{1}{3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248} \frac{1}{7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496} \frac{1}{14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992} \frac{1}{28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984} \frac{1}{57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968} \frac{1}{115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936} \frac{1}{231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279872} \frac{1}{463168356949264781694283940034751631413079938662562256157830336031652518559744} \frac{1}{926336713898529563388567880069503262826159877325124512315660672063305037119488} \frac{1}{1852673427797059126777135760139006525652319754650249024631321344126610074238976} \frac{1}{3705346855594118253554271520278013051304639509300498049262642688253220148477952} \frac{1}{7410693711188236507108543040556026102609279018600996098525285376506440296955904} \frac{1}{14821387422376473014217086081112052205218558037201992197050570753012880593911808} \frac{1}{29642774$

DANS NOS CLASSES

Différences finies et Sommation de séries par une méthode de Leibniz

ou

la naissance d'une vocation mathématique

Martine Bühler, Anne Michel-Pajus

En 1672, Gottfried Wilhelm Leibniz, arrive à Paris. Agé de 26 ans, il est chargé par le prince de Hanovre d'une mission diplomatique. Bachelier à seize ans, il a déjà beaucoup étudié (en Allemagne), mais il s'intéresse plus à la logique et à l'invention d'une machine à calculer qu'aux mathématiques. Il rencontre à Paris Huygens, la gloire scientifique de l'époque, et lui parle d'une découverte, fondée sur des réflexions logiques, qui lui semble intéressante pour calculer les sommes de séries (avec une notation différente, sans indices, il s'agit du résultat de la question 3a).

Il observait que, à partir de ceci : " $A = A$ " ou à partir de son équivalent : " $A - A = 0$ " (comme on peut le voir au premier abord, sans aller plus loin), on tire une très belle propriété des différences à savoir :

$$A \quad \underbrace{-A+B}_{+L} \quad \underbrace{-B+C}_{+M} \quad \underbrace{-C+D}_{+N} \quad \underbrace{-D+E}_{+P} - E = 0$$

Si maintenant, on pose que A, B, C, D, E sont des quantités croissantes et que les différences des deux quantités consécutives B-A, C-B, D-C, E-D, sont appelées L, M, N, P, il s'ensuit alors que :

$$A + L + M + N + P - E = 0, \quad \text{ou :} \quad L + M + N + P = E - A,$$

c'est-à-dire que la somme des différences entre termes consécutifs (quel que soit le nombre) est égale à la différence entre les deux termes extrêmes.

Huygens décide alors de tester le jeune homme, et lui demande de calculer la somme de la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \text{etc (série du 2 e).}$$

Leibniz réussit brillamment, généralise la méthode et encouragé par ce succès, décide de se mettre sérieusement aux mathématiques!

C'est cette méthode que nous vous présentons ici.

A partir d'une suite u , de terme général u_n , on peut définir une suite du par :

$$(du)_n = u_{n+1} - u_n, \text{ nommée suite des différences premières associées à } u$$

1) A partir d'une suite u , de terme général u_n , on peut définir une suite du par :

$du_n = u_{n+1} - u_n$, nommée suite des différences premières associées à u

Déterminer du dans les cas suivants :

a) $u_n = n$

b) $u_n = n^2$

c) $u_n = n^3$

d) $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$

e) $u_n = \frac{1}{n}$

2) A partir d'une suite u , de terme général u_n , on peut définir une suite Su par :

$Su_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, nommée suite-somme associée à u .

Déterminer Su dans les cas suivants :

a) $u_n = a$ (où a est une constante réelle)

b) $u_n = 2n + 1$

c) $u_n = q^n$ si $q \neq 1$

d) $u_n = n$

e) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n > 0$ et $u_0 = 0$ (On peut utiliser la question 1.e). Reprendre cette question après avoir traité la question 3. a).

3) Montrer que :

a) $(S(du))_n = u_{n+1} - u_0$. Sous quelle forme ce résultat apparaît-il dans l'encadré de l'introduction?

b) $(d(Su))_n = u_{n+1}$

4) Lire le texte suivant :

Il [Leibniz] considéra que n'importe quel terme d'une suite pouvait, la plupart du temps, être désigné par une notation générale, par laquelle on peut se référer à une suite simple. Par exemple, si le terme général de la suite des naturels 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. est appelé x , on appellera le terme général de la suite des carrés $x.x$ ou de celle des cubes x^3 etc. ; le terme général de la suite des nombres triangulaires, c'est-à-dire que 0, 1, 3, 6, 10, etc. s'écrira $\frac{x(x+1)}{1.2}$, ou $\frac{xx+x}{2}$. ♥

N'importe lequel des nombres pyramidaux : 0, 1, 4, 10, 20, etc. ... s'écrira $\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}$, soit $\frac{x^3 + 3xx + 2x}{6}$, et ainsi de suite. Et de cette façon, au moyen d'un calcul général, on peut trouver la suite

♥ Note : si x est la suite des naturels, sa suite-somme est la suite des nombres triangulaires, la suite-somme de celle-ci est la suite des nombres pyramidaux, etc.. Leibniz note ainsi x ce que nous désignerions plutôt par n .

obtenue par différence d'une suite donnée, et quelquefois aussi la suite obtenue par somme [d'une suite donnée], lorsqu'elle est exprimée numériquement,

Par exemple, xx est un nombre carré, le carré qui lui est immédiatement supérieur est $xx + 2x + 1$, la différence des deux est $2x + 1$, c'est à dire que la suite des nombres impairs est la " suite-différence " des nombres carrés. En effet, si x désigne 0, 1, 2, 3, 4, etc., $2x + 1$ désigne 1, 3, 5, 7, 9. De la même manière, la différence entre x^3 et $x^3 + 3xx + 3x + 1$ est $3xx + 3x + 1$, c'est pourquoi tel est le terme général de la suite-différence de la suite des cubes.

5) Montrer que :

Si u et v sont deux suites : $d(u + v) = du + dv$

Si u est une suite et k un réel quelconque : $d(ku) = k du$

6) Soit u la suite numérique réelle définie par $u_n = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes réelles.

a) Déterminer du_n .

b) Soit v définie par $v_n = n^2$. Comment faut-il choisir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que $du = v$?

Ceci implique-t-il que $Sv_n = u_{n+1}$? (on peut utiliser 3.a))

Déterminer δ pour que $Sv_n = u_{n+1}$. En déduire une expression rationnelle de $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ en fonction de n .

Lire la suite du texte :

Par conséquent, si la valeur du terme général d'une suite donnée peut s'exprimer à l'aide d'une variable x , qui ne figure ni au dénominateur, ni en exposant, il semblait que l'on pût toujours trouver la suite-somme d'une suite donnée. Par exemple, si l'on cherche la somme des nombres carrés, comme il était certain que la variable x ne pouvait être supérieure à la puissance cubique, l'auteur supposait que son terme général était $z = \ell x^3 + mxx + nx$ où dz doit être xx . Il en résultera $dz = \ell d(x^3) + md(xx) + n$ (en posant que $dx = 1$). Mais $d(xx) = 2x + 1$ et $d(x^3) = 3xx + 3x + 1$ (d'après ce qui a été déjà trouvé). Donc :

$$dz = 3 \ell xx + 3 \ell x + \ell$$

$$+ 2 mx + m$$

$$+ n = xx$$

$$\text{donc } 1 = \frac{1}{3}, \quad m = -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + n = 0 \quad \text{ou} \quad n = \frac{1}{6}, \quad \text{c'est-à-dire que le terme général de la suite-}$$

$$\text{somme des carrés est : } \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x, \text{ soit } \frac{2x^3 - 3xx + x}{6}.$$

Par exemple, si l'on veut la somme des 9 ou 10 premiers carrés à partir de 1 jusqu'à 81, ou de 1 jusqu'à 100, on prend pour x la valeur 10 ou 11, (nombre immédiatement supérieur à la racine du dernier carré), et $\frac{2x^3 - 3xx + x}{6}$ sera $\frac{2000 - 300 + 10}{6} = 285$, ou $\frac{2 \times 1331 - 3 \times 121 + 11}{6} = 385$.

Il n'est pas beaucoup plus difficile de faire la somme de 100 ou 1000 nombres carrés grâce à cette formule abrégée.

7) Leibniz affirme plus loin:

En dernier lieu, il vit aussi une manière d'appliquer le calcul différentiel aux suites de nombres quand la variable entre dans l'exposant, comme dans le cas d'une progression géométrique, où, si l'on pose b comme base, le terme général est b^x , en désignant par x les nombres naturels. Donc le terme général de la suite-différence sera :

$$b^{x+1} - b^x = b^x (b - 1)$$

Par conséquent, il est manifeste que la suite-différence d'une progression géométrique donnée est aussi une progression géométrique proportionnelle à la progression donnée. De là, on obtient la somme d'une progression géométrique.

Soit u une suite géométrique de raison b ($b \neq 1$)

- Ecrire la relation liant u_n et du_n indiquée dans l'encadré précédent.
- Quelle est l'opération permettant de passer de u à du
- Quelle est la nature de la suite du ? La suite Su est-elle de même nature ?
- Déterminer, en utilisant ce qui précède, une expression de Su_n à l'aide de u_{n+1} et u_0 .

8) Dans l'extrait suivant, Leibniz donne une méthode permettant de calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, puis $\lim$

S_n quand n tend vers $+\infty$. Pour les calculs, il utilise une suite auxiliaire u définie a priori par

$$u_n = \frac{e}{bn+c}, \text{ ainsi que la suite } du.$$

Lire le texte suivant, puis expliciter les calculs nécessaires à la démonstration incomplète du résultat sur la limite de S_n et déterminer cette limite.

Effectivement, soit $x = 1$, ou 2, ou 3, etc⁴²..; le terme général de la série $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \text{etc...}$ est $\frac{1}{4x^2 + 8x + 3}$; on cherche le terme général de la série-somme; on examine par la méthode la plus simple si on peut l'obtenir sous la forme suivante : $\frac{e}{bx+c}$; on aura :

$$\frac{e}{bx+c} - \frac{e}{bx+b+c} = \frac{eb}{b^2x^2 + b^2x + bc + 2bcx + c^2} = \frac{1}{4x^2 + 8x + 3}$$

En identifiant ces deux formules on obtient :

$b = 2$, $eb = 1$, donc : $e = \frac{1}{2}$, $b^2 + 2bc = 8$, soit : $4 + 4c = 8$ ou $c = 1$, et enfin : $bc + c^2 = 3$, ce qui en découle.

Donc le terme général de la série-somme est : $\frac{\frac{1}{2}}{2x+1}$, soit $\frac{1}{4x+2}$; or $4x+2$ est le double d'un nombre impair.

⁴² On remarquera que Leibniz a omis l'étape $x = 0$

NOTE D'ÉCOUTE

Commémoration de Gottfried Wilhelm Leibniz dans la Grande Salle des séances de l'Académie des Sciences par Michel FICHANT

(Séance publique du 21 Octobre 1996)

Compte-rendu de conférence par
Anne Michel-Pajus

Une émouvante occasion de découvrir cette impressionnante salle entièrement lambrissée, ornée des bustes et portraits de toutes les gloires de notre passé, où siègent les gloires mathématiques de ma jeunesse, discrètement entourées de simples mortels de mon genre.

Michel Fichant nous a rappelé que Leibniz est né il y a 350 ans à Leipzig, cinquante ans après Descartes, beaucoup plus largement commémoré en France. Il voit pourtant au moins trois raisons d'honorer sa mémoire:

c'est lors de son séjour à Paris (de à) que Leibniz, formé aux humanités antiques et à la philosophie scolastique, a découvert l'univers intellectuel de la modernité et la culture scientifique;

c'est dans la langue française, magistralement assimilée durant ce bref séjour, qu'il a écrit 40% de son œuvre, dont les importants ouvrages *La monadologie* et *les Nouveaux essais sur l'entendement humain*

il a enfin été élu en 1700 membre de cette Académie des Sciences, le premier membre étranger officiellement admis, après avoir failli l'être en 1675 (les lenteurs des travaux d'approche ayant abouti au départ de Leibniz pour Hanovre, plus prompte à lui offrir des moyens de subsister!)

Les relations de Leibniz avec l'Académie des Sciences de Paris et la Royal Society de Londres font partie de sa stratégie de reconnaissance

Leibniz adresse dès leur publication ses premiers travaux scientifique (comme le *Theoria Motu*) aux deux Académies. Mais alors que la Royal Society de Londres l'élit en son sein dès 1673, l'Académie des Sciences de Paris l'invite seulement à présenter sa machine à calculer et une horloge portative. Il est vrai que le titre de membre apporte une pension... et c'est seulement à la mort de Roberval en 1675 qu'une place est vacante. Les tractations durent si longtemps que Leibniz, qui n'avait pas d'autres moyen d'existence choisit

l'offre de Hanovre, mais les pourparlers étaient allés si loin que beaucoup d'académiciens ont cru qu'il avait été élu. Une tentative maladroite de Huygens se solda en 1680 par un autre échec. Mais Leibniz entretient une correspondance continue avec les membres les plus éminents.

Il n'a pas que des amis. L'abbé Galois pousse Rolle à une campagne contre le calcul de l'infini, accusé de renouveler les paralogismes et antiques paradoxes sur la divisibilité à l'infini. Dans ses lettres à son défenseur Varignon, Leibniz s'en explique: il n'est pas besoin de métaphysique pour faire de l'analyse mathématique. Celle-ci tient sa légitimité de l'obtention de méthodes générales et unificatrices. Il faut distinguer «l'exercice de la pensée aveugle» (qui se traduit par des lois, des enchaînements), de la connaissance intuitive (qui nous renseigne sur les propriétés de la matière). Il faut signaler que Leibniz n'a jamais publié ni apparemment réellement entrepris l'ouvrage exhaustif et fondamental justifiant ses méthodes, considérant sans doute que l'ouvrage du Marquis de l'Hospital, *l'Analyse des infiniment petits* faisait l'affaire.

Ces relations avec les académiciens lui permettaient de tester ses idées, et d'assurer l'accréditation et la diffusion de ses travaux. Pour nous ces démêlés ont du moins le mérite de nous offrir, au travers de son énorme correspondance, des précisions sur sa pensée.

Malgré ses débuts prometteurs, les relations avec la Royal Society vont devenir beaucoup plus venimeuses. La lutte entre la prestigieuse et britannique Royal Society et cet homme isolé en Allemagne était très inégale. Les recherches actuelles concluent, au vu des manuscrits et travaux d'élaboration des deux hommes, à une antériorité de Newton pour l'invention du Calcul Infinitésimal (probablement en 1669), mais Leibniz a publié le premier (en 1684) dans la Revue Savante de Leipzig.

De toutes façons, les méthodes comme l'esprit de la recherche étaient très différents et la découverte s'est faite de façon indépendante. Il s'agit de deux manières de résoudre une situation problématique dont se préoccupaient tous les mathématiciens de l'époque, et on ne peut isoler ces travaux du réseau intellectuel ainsi constitué.

[Michel FICHANT a ensuite évoqué le cas de la «dynamique», pour conclure sur le regard que nous portons aujourd'hui sur la contribution de Leibniz]

Ce regard n'est pas seulement modifié par le changement de perspective dû au développement ultérieur, mais aussi par le fait que nous avons accès à une énorme masse de documents inédits. Cette masse de papier se trouve dans la Bibliothèque de Hanovre, et le projet d'édition décidé en coopération franco-allemande au début de notre siècle, interrompu en 1914, verra peut-être son achèvement au milieu du siècle prochain, si le financement suit... Sur les sept séries prévues, la troisième regroupe la Correspondance mathématique, physique et «technique» jusqu'en 1690 et la septième regroupe les écrits divers sur les mêmes thèmes jusqu'en 1674 seulement!

Des études et publications locales ont été faites par de nombreux chercheurs (Parmentier sur le calcul Différentiel, Knobloch pour la combinatoire et les déterminants, Parmentier et Etcheverria sur le calcul géométrique, par exemple)

Ce qui explique la difficulté à appréhender cette œuvre. Il faut considérer tous les jugements hâtifs, excessifs, anachroniques, comme un symptôme de la fertilité d'une œuvre ouverte, qui permet l'enrichissement de la science vivante; il faut utiliser le droit à la réinvention, à la libre expression, dont Leibniz lui-même a usé avec ses prédécesseurs (s'inspirant par exemple d'Aristote et de Lulle pour sa logique)

Un grand apport de Leibniz est d'avoir concentré l'aspiration commune aux Académiciens à promouvoir un idéal scientifique.

Un autre réside dans son refus de sacrifier le passé, qui s'accompagne du refus de prétendre trouver des solutions définitives par ses propres travaux. C'est une leçon de tolérance.



J. Krieger pinx.

G. F. Schmidt Sculp. Paris.

A Lausanne et Geneve, chez MARC-MICHEL BOUSQUET et Comp. 1743.

Portrait de Jean Bernoulli.

Les frères Jacques et Jean Bernoulli ont joué un rôle fondamental dans la diffusion du calcul leibnizien sur le continent.

Comité de rédaction:

Philippe BRIN

*Lycée Technique E.Branly Créteil
Animateur à l'IREM Paris VII*

Martine BÜHLER

*Lycée Flora Tristan Noisy le Grand
Animatrice à l'IREM Paris VII*

Michèle GREGOIRE

*Lycée Lavoisier Paris
Animatrice à l'IREM Paris VII*

Maryvonne HALLEZ

*Collège Paul Bert Paris
Animatrice à l'IREM Paris VII*

Marie-Françoise JOZEAU

*Lycée G. de Nerval Luzarches
Animatrice à l'IREM Paris VII*

Odile KOUTEYNIKOFF

*Lycée Lakanal Seaux
Animatrice à l'IREM Paris VII*

Anne MICHEL-PAJUS

*Lycée Claude Bernard Paris
Animatrice à l'IREM Paris VII*

Jean-Luc VERLEY

*Université Paris VII
IREM Paris VII*

Courrier à adresser à : Groupe M.: A.T.H.

IREM de l'Université Denis DIDEROT
Paris VII

Tour 55-56 - 3^{ème} étage, Case 7018
2, place Jussieu
75 251 PARIS CEDEX 05

*Pour échanger expériences et réflexions à propos de
l'histoire et l'enseignement des mathématiques*

M.: *Mathématiques*
A. *Approche par les*
T. *Textes*
H. *Historiques*

SOMMAIRE

Editorial

Présentation du texte de Leibniz

Histoire et origine du calcul différentiel

Chronologie

Notes biographiques

Dans nos classes : « Lettre à La Roque »

Dans nos classes : « Différences finies »

Note d'écoute

En vente au prix de 5,00 Euros

Editeur : IREM

Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE

Dépôt légal : Juin 1997

ISBN : 2-86612-132-5

IREM Université Paris VII Denis Diderot

Case 7018

2, place Jussieu

75 251 Paris Cedex 05

Tel : 01 44 27 53 83