

C A H I E R D E D I D I R E M

DEA DE DIDACTIQUE DES DISCIPLINES DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

**L'ENTRÉE DANS LE MONDE DE PENSÉE FONCTIONNEL EN
CLASSE DE SECONDE**

**Par D. PIHOUE
JUIN 96**

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT

**DEA DE DIDACTIQUE DES DISCIPLINES
DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**

**L'ENTRÉE DANS LE MONDE DE PENSÉE FONCTIONNEL EN
CLASSE DE SECONDE**

**Par D. PIHOUE
JUIN 96**

REMERCIEMENTS

L'auteur voudrait avant tout remercier :

Michèle ARTIGUE, sa directrice de recherche, pour ses conseils théoriques et méthodologiques, ses remarques, ses encouragements et sa patience ;

Denise PRANVILLE, Bernard GOVIGNON, Maxime LOCCI et Michel WAVRESKY, ses collègues au Lycée Jean VILAR durant l'année scolaire 95/96, pour leur participation active aux expérimentations et plus particulièrement Michel et Bernard pour la fourniture de matériel d'enregistrement performant ;

les élèves de la classe de seconde 1 du Lycée Jean VILAR de Meaux pour leur spontanéité et leur investissement dans les problèmes proposés.

PLAN DU MEMOIRE

Introduction et références théoriques	3
Programme et manuels	11
Lecture du programme de mathématiques de la classe de seconde	11
Analyse des principaux manuels en usage	12
Expérimentations	28
Présentation de la partie expérimentale	28
Première expérience	30
Analyse a priori du problème	31
Analyse des travaux des élèves	35
Deuxième expérience	47
Analyse a priori du problème	48
Analyse des travaux des élèves	54
Conclusion	76
Bibliographie	78
Annexes	79

INTRODUCTION

La problématique et les références théoriques

La recherche porte sur l'enseignement du concept de fonction en classe de seconde, un enseignement qui intègre les dimensions objet et outil de ce concept (DOUADY, 1986). Dans cette introduction, nous présenterons tout d'abord les références théoriques sur lesquelles nous nous sommes appuyé en ce qui concerne la dimension objet du concept et les hypothèses faites sur la construction de cet objet. Nous évoquerons d'autre part le concept de modélisation intra ou extra mathématique qui nous permettra d'intégrer l'aspect outil du concept de fonction. Mais nous insisterons aussi sur l'importance et le rôle des divers registres sémiotiques dans l'appréhension de l'objet et de l'outil fonctionnel. Nous en viendrons ensuite à notre problématique qui porte plus spécifiquement sur l'entrée dans la pensée fonctionnelle et ceci nous amènera à situer cette pensée par rapport aux modes de pensée arithmétique et algébrique et à pointer les articulations et ruptures pouvant exister entre ces différents modes. Enfin, dans un dernier paragraphe, nous présenterons brièvement la méthodologie utilisée dans ce travail.

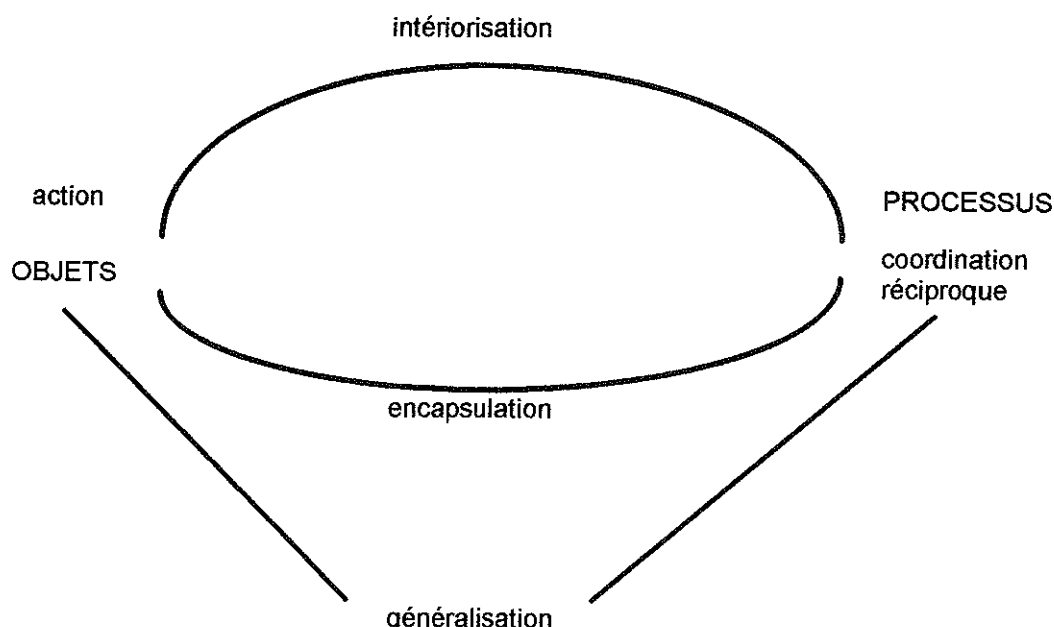
L'objet fonction

Dans cette partie, nous évoquons la théorie d'Anna SFARD à partir de (SFARD, 1991) puis celle d'Ed DUBINSKY décrite dans (BREIDENBACH et al, 1992) à propos de la conceptualisation de l'objet fonction.

Prenant appui sur des considérations à la fois historiques et cognitives, Anna SFARD a introduit la distinction entre un statut « procédural » et un statut « structural » des concepts mathématiques de fonction et de nombre. D'un point de vue historique, elle remarque que les conceptions procédurales précèdent les conceptions structurales, ces dernières pouvant être considérées comme le stade le plus avancé du développement d'un concept. Ceci constitue une première approche. A SFARD, considérant les mathématiques dans leur ensemble, mentionne l'existence d'une sorte de hiérarchie des concepts dans laquelle ce qui est considéré comme procédural à un certain niveau peut être conçu structurellement à un niveau plus élevé. Cela institue une dialectique entre les deux statuts, la distinction relevant plus d'une dualité que d'une dichotomie. Adoptant un point de vue cognitif, elle transpose cette antériorité des conceptions procédurales sur les conceptions structurales en la considérant comme un invariant dans le processus d'apprentissage. Pour cela, elle distingue trois étapes, correspondant à trois degrés de structuration, dans le processus de formation d'un concept : intériorisation / condensation / réification. Lors du stade d'intériorisation, l'apprenant fait la connaissance des nouveaux processus qui, à la fin, conduiront au nouveau concept. Ils sont constitués d'opérations exécutées sur des objets mathématiques de niveau inférieur. Un processus est intériorisé lorsqu'il peut être exprimé au travers de représentations mentales. Dans le cas de la notion de fonction, ce sera lorsque l'idée de variable sera acquise ainsi que la capacité à utiliser une formule pour déterminer des valeurs de la variable dépendante. La phase de condensation est une période de « réduction » des séquences de calcul en des entités plus aisément manipulables ; à ce stade, l'apprenant peut se référer au processus en termes d'entrée-sortie plutôt qu'en indiquant une suite d'opérations. Un nom peut être donné au processus. Dans le cas de la notion de fonction, l'apprenant peut étudier des fonctions, tracer leurs graphes, combiner des couples de fonctions et même déterminer une fonction réciproque. La réification n'a lieu que lorsqu'un individu devient capable de concevoir la notion comme un objet à part entière. La nouvelle entité est dégagée du processus qui l'a produite et prend son sens du fait qu'elle fasse partie d'une certaine catégorie. On peut alors étudier les propriétés de cette catégorie, déterminer les relations entre ses différents représentants ou effectuer des processus pour lesquels le nouvel objet est en entrée. Une phase d'intériorisation de concepts de niveau supérieur commence. Dans le cas de la notion de fonction, la réification peut être mise en évidence lors de la résolution d'équations dont l'inconnue est une fonction : équations différentielles, équations fonctionnelles ou équations avec paramètre ; ou par la manifestation de la capacité à étudier des propriétés générales de différents processus agissant sur des fonctions et aussi par la reconnaissance qu'une phase de calcul liant des éléments de deux ensembles n'est pas nécessaire pour qu'une relation entre ces deux ensembles soit considérée comme une fonction.

La phase de réification est particulièrement difficile, les origines de cette difficulté provenant en partie du fait qu'elle soit accompagnée d'alternances entre gain de signification et développement de nouvelles applications mais aussi du fait que la réification d'un certain processus a lieu simultanément avec l'intériorisation d'un processus de niveau supérieur.

Ed DUBINSKY développe une épistémologie des fonctions proche de celle-ci ; son objectif est de déterminer la nature des objets et des processus spécifiques qui sont construits et comment ils s'organisent lorsque l'on étudie des mathématiques. Il nomme sa modélisation « abstraction réflexive », l'adjectif réflexive étant à prendre au sens des lentilles de l'optique.



Il désigne par action n'importe quelle manipulation physique ou mentale réitérable qui transforme des objets pour obtenir d'autres objets. Lorsque l'action peut prendre place entièrement dans l'esprit du sujet ou peut être imaginée comme prenant place sans nécessairement rappeler chaque pas, il dit que l'action a été intériorisée pour devenir un processus. Enfin, quand il devient possible pour un processus d'être transformé par une action, il dit qu'il a été encapsulé pour devenir un objet.

S'il y a différentes façons de construire des processus : par intériorisation d'actions, par réciprocité d'un processus ou par combinaison d'autres processus ; il n'y a qu'une seule façon de construire un objet mathématique dans cette théorie : par encapsulation. Ed DUBINSKY fait remarquer que souvent, dans une situation mathématique, il est essentiel d'être capable de faire marche arrière de l'objet au processus. D'après sa théorie, cela ne peut se faire que par dé-encapsulation. La présence de la généralisation est justifiée par le fait que dans quelques cas, même lorsque la situation est nouvelle, les objets et processus existants sont suffisants pour l'analyser ; le seul apprentissage qui en résulte est que les outils que l'on possédait déjà peuvent être utilisés dans cette nouvelle situation. Il s'agit d'une extension du domaine de validité des objets et processus connus.

On peut faire des rapprochements évidents entre ces deux théories, notamment en identifiant les phases de réification et d'encapsulation. Le stade de condensation d'A SFARD est présent chez E DUBINSKY sans être explicitement noté, en effet sa phase d'intériorisation le recouvre en partie et il désigne les diverses manières de produire des processus sans isoler cet ensemble pour le considérer comme une étape de structuration des connaissances dans la construction du concept de fonction. De plus l'encapsulation et la dé-encapsulation expriment les processus permettant de passer du statut « procédural » au statut « structural » de cette notion mathématique illustrant ainsi la dualité des deux statuts signalée par A SFARD.

L'outil fonction

Nous nous appuyons, dans ce paragraphe, sur les travaux d'Yves CHEVALLARD concernant la notion de modélisation, (CHEVALLARD, 1989). Celle-ci nous paraît, en effet, adaptée lorsque l'on envisage le concept de fonction engagé comme outil dans la résolution d'un problème.

En ce qui concerne la notion de modélisation, nous nous référons ici à l'approche développée par Yves CHEVALLARD. Cette approche repose sur un schéma général de modélisation intramathématique et extramathématique. Celui-ci suppose deux registres, un système, mathématique ou non mathématique et un modèle mathématique de ce système. Dans le cas d'une modélisation intramathématique le registre du système sera considéré comme celui du mathématisé et celui du modèle comme celui de la mathématique. Le système fait fonction d'objet d'étude et le modèle d'outil d'étude. Il décompose le processus de modélisation en trois étapes :

1. Définition du système en précisant les « aspects » pertinents par rapport à l'étude envisagée, c'est à dire l'ensemble des variables par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît.
2. Construction du modèle en établissant un certain nombre de relations entre les variables prises en compte, le modèle du système est l'ensemble de ces relations.
3. « Travail » sur le modèle pour produire des connaissances relatives au système étudié, ces connaissances prenant la forme de nouvelles relations entre les variables du système.

La troisième étape est une phase proprement mathématique, tandis que les étapes antérieures sont du ressort du domaine de réalité dont est censé relever le système.

Y CHEVALLARD a introduit ce concept dans le cadre du passage de l'arithmétique à l'algébrique dans le but de provoquer le développement d'une algèbre plus fonctionnelle chez les élèves. Il l'emploie notamment pour restaurer la dialectique entre l'arithmétique et l'algébrique. On peut, nous semble-t-il, étendre son usage à la traduction dans le cadre fonctionnel de problèmes relevant d'un autre registre, mathématique ou non mathématique.

Cette modélisation possède deux caractéristiques principales. La première est la réversibilité du rapport du système au modèle ; en effet le système peut apparaître comme un modèle de son modèle.

Autrement dit, une connaissance portant sur le modèle peut être transférée au système, on parle ici d'interprétation. La seconde caractéristique est la récurrence du processus de modélisation. Cela provient du fait que tout objet mathématique peut être pris pour mathématisé dans une étude de niveau supérieur appelant d'autres outils d'étude. On aboutit ainsi à une succession de modélisations et à une suite de modèles.

Dans l'étude des rapports entre modélisation et connaissance, Y Chevallard introduit une distinction entre modèles régionaux et modèles locaux ; un modèle régional est une théorie, par exemple le modèle algébrique de la géométrie introduit par Descartes, un modèle local s'inscrit en référence à une théorie. Mais la construction d'un modèle régional suppose au moins l'existence d'une théorie partielle préalable du système étudié, ce nouveau modèle devant permettre d'étendre le corps des connaissances que l'on détient sur le système.

Cette perspective permet de distinguer différents modes de fonctionnement des connaissances. En effet les registres du mathématisé et de la mathématique relèvent chacun d'un mode de fonctionnement propre mais la mise en rapport de ces deux plans nécessite un troisième type de connaissance.

Le produit d'un travail de modélisation peut se naturaliser au point que l'on ne distingue plus le système modélisé de son modèle. Ce phénomène de naturalisation est constitutif de la manière dont tout savoir s'élabore à partir des connaissances produites, l'oubli de la production des connaissances étant une condition de la constitution du savoir. Si l'ancienne conceptualisation doit être reprise, pour cause de non adéquation, une nouvelle modélisation conduira à une reconceptualisation.

Registres de représentation sémiotique

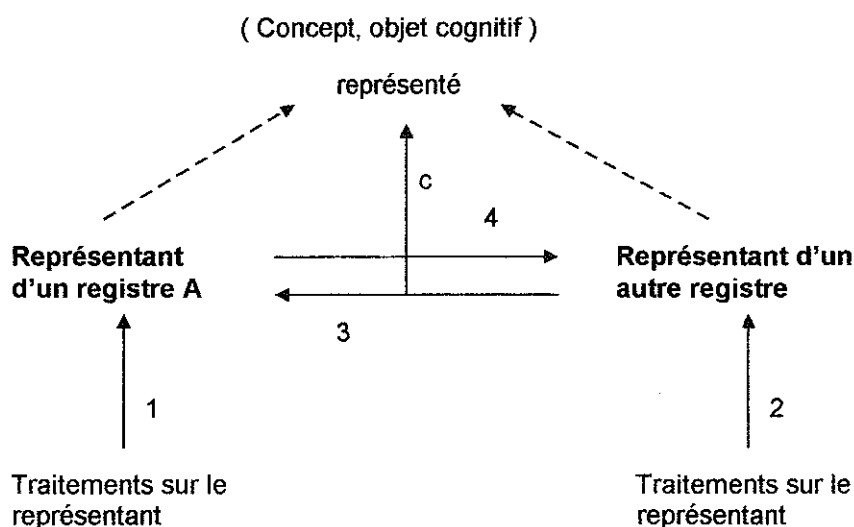
Nous abordons maintenant les registres de représentation sémiotique tels qu'ils sont introduits par Raymond DUVAL dans (DUVAL, 1993). Ceux-ci jouent un rôle important dans l'appréhension du concept de fonction, qu'il soit mobilisé en tant qu'objet ou d'outil.

Partant du constat que l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle mais que c'est seulement par le moyen des représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible, Raymond DUVAL introduit les notions de sémosis et de noésis pour désigner respectivement l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique et l'appréhension conceptuelle d'un objet. Il s'ensuit que le paradoxe cognitif de la pensée mathématique et les difficultés qui en résultent pour son apprentissage tiennent au fait qu'il n'y a pas de noésis sans sémosis.

Tout système sémiotique n'est pas un registre de représentation, pour qu'il en soit ainsi, il doit permettre les trois activités cognitives fondamentales liées à la sémosis :

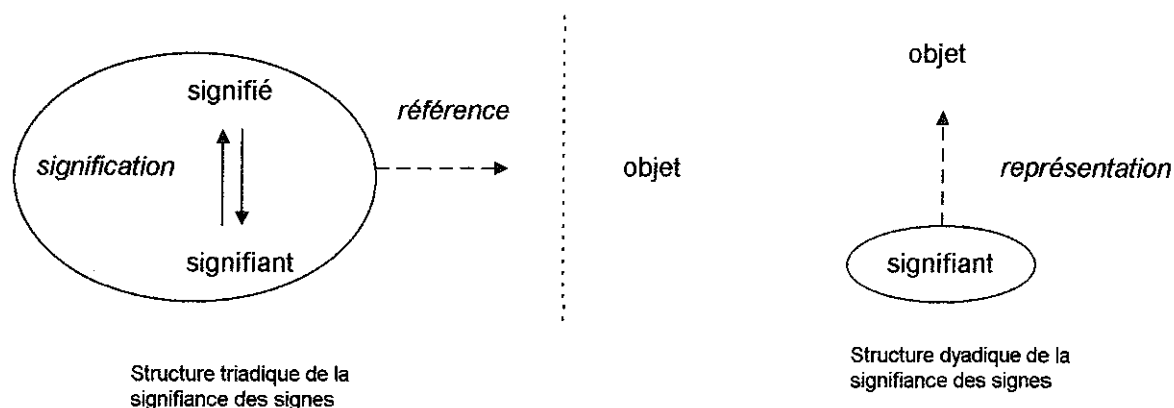
- 1) La formation d'une représentation identifiable comme une représentation d'un registre donné. Elle se fait en fonction des unités et des règles de formation propres au registre. Cette formation est équivalente à l'accomplissement d'une tâche de description. Les règles sont des règles de conformité ; la connaissance de ces règles implique les compétences pour reconnaître des représentations, pas pour les former.
- 2) Le traitement d'une représentation qui est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée. C'est une transformation interne au registre. Il existe des règles de traitement propres à chaque registre.
- 3) La conversion d'une représentation qui est la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre. C'est une transformation externe au registre de départ, une activité cognitive différente et indépendante de celle de traitement. Elle requiert que l'on ait perçu la différence entre le sens et la référence des symboles ou des signes. Elle ne peut être confondue avec le codage ou l'interprétation. L'interprétation requiert un changement de cadre théorique ou un changement de contexte ; elle n'implique pas de changement de registre mais mobilise souvent des analogies. Le codage est la transcription d'une représentation dans un autre système sémiotique effectué au moyen d'une série de substitutions directement sur les signifiants composant la représentation, sans prendre en compte l'organisation de la représentation ni ce qu'elle représente. La conversion, elle, ne peut être régie par un pur système de règles. En phase d'apprentissage, la conversion joue un rôle essentiel dans la conceptualisation.

Pour R DUVAL, la compréhension intégrative d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation ; cette coordination se manifestant par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion.



Structure de la représentation en fonction de conceptualisation

Sur le schéma précédent, les flèches 1 et 2 correspondent aux transformations internes à chaque registre et les flèches 3 et 4 aux transformations externes. La flèche c correspond à la compréhension intégrative d'une représentation. Les flèches en pointillés rappellent les relations entre représentants et représenté. Dans ces relations de signifiante des signes, R DUVAL distingue deux structures, une structure triadique et une structure dyadique. Pour les signes de structure triadique, la relation de référence présente deux caractéristiques : d'une part, la relation à un objet dépend d'une relation de signification et d'autre part, la relation à l'objet est une possibilité qui n'est assurée qu'au plan de l'interprétation. Les signes de structure dyadique n'ont pas de signification et sont constitués par une relation instituée à un objet.



Par exemple, dans (DUVAL, 1994), où il étudie le fonctionnement d'une figure géométrique, R DUVAL, dit que « les appréhensions discursive et séquentielle [...] impliquent un fonctionnement selon la structure dyadique » et que « l'appréhension opératoire [...] implique un fonctionnement triadique ». Dans le premier cas, les significations perceptives de la figure sont subordonnées à la représentation, alors que dans le second, elles conservent « leur autonomie par rapport à ce qu'elles représentent » ainsi qu'une « certaine ouverture par rapport aux possibilités de représentation ».

La dialectique outil / objet et les jeux de cadres

Nous terminons la présentation de nos références théoriques par la dialectique outil / objet et les jeux de cadres proposés par Régine DOUADY, dans (DOUADY, 1986).

Elle appelle cadre l'ensemble constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Il s'agit d'une notion dynamique. D'autre part, elle introduit une distinction entre outils implicites et outils explicites. Elle parle d'outils implicites ou de théorèmes en acte lorsque les conceptions d'un élève lui permettent d'engager une procédure dont la justification fait référence à des notions qu'il ne sait pas formuler ou qu'il exprime seulement en termes d'action dans un contexte particulier ; et elle désigne par outils explicites, les notions qu'un élève met en œuvre, qu'il peut formuler et dont il peut justifier l'emploi. Un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement. La dialectique outil / objet peut s'engager sur des problèmes répondant à certaines conditions : l'énoncé, contexte et questions, a du sens pour les élèves ; compte tenu de leurs connaissances, les élèves peuvent engager une procédure de résolution mais ils ne peuvent pas résoudre complètement le problème ; les connaissances visées par l'apprentissage, contenu ou méthode, sont des outils adaptés au problème ; le problème peut se formuler dans au moins deux cadres différents. Elle se décompose en six phases s'articulant autour de la dialectique ancien / nouveau et des jeux de cadres. Ceux-ci sont provoqués notamment pour élaborer une filiation de questions pertinentes par rapport au problème posé. R DOUADY distingue trois phases dans ces jeux de cadres :

- 1) Transfert et interprétation : les élèves mettent en œuvre des correspondances entre des cadres différents, entre objets et entre relations.
- 2) Correspondances imparfaites : cela a lieu soit pour des raisons mathématiques, soit à cause des connaissances insuffisantes des élèves. La situation est alors source de déséquilibre.
- 3) Amélioration des connaissances et progrès de la connaissance : la communication entre cadres et en particulier la communication avec un cadre auxiliaire de représentation est un facteur de rééquilibration. Les interactions entre cadres permettent de faire progresser la connaissance de chaque élève.

R DOUADY remarque cependant qu'il y a des conditions au déroulement de cette dialectique et du jeu de cadres, elle signale ainsi qu'il existe une masse critique de connaissances anciennes et d'habitudes dans chacun des cadres concernés et aussi un seuil critique d'interrogation au-dessous duquel la réflexion ne s'enclenche pas.

Mise en perspective

Ces différents points de vue théoriques soutiennent des profils d'analyse distincts mais entre lesquels des articulations sont sans doute possible. Pour rendre plus évidente la cohérence de notre approche, nous essaierons d'en proposer quelques unes dans ce paragraphe.

La construction de l'objet chez E DUBINSKY et A SFARD résulte de la transition d'actions à des processus, puis de la condensation, réification voire encapsulation de ces derniers. Ceci n'est sans doute pas sans rapport avec les transitions qui permettent chez R DOUADY le passage d'outils implicites engagés dans l'action à des outils explicites, puis avec la transformation de statut des connaissances associées à l'utilisation de ces outils explicites en objets de savoir, via le processus d'institutionnalisation. De même on peut voir un rapport entre le réinvestissement permis par ces transformations dans des situations plus complexes et l'engagement chez A SFARD et E DUBINSKY des objets construits dans des processus de niveau supérieur. Mais il faut cependant rester vigilant, nous semble-t-il, face à des amalgames trop rapides. Les deux analyses ne s'attachent pas aux mêmes catégories. La dimension outil de R DOUADY fait nécessairement intervenir les objets et processus dans des organisations complexes. L'objet est un objet culturel et social avant d'être un objet au sens cognitif.

Comme R DOUADY qui, dans la dialectique outil / objet et les jeux de cadres, se base sur le travail du chercheur en mathématique, Y CHEVALLARD, au travers du concept de modélisation, cherche à rendre compte de l'activité mathématique en général. Il se place donc dans une perspective curriculaire et pose le problème du statut des systèmes étudiés par modélisation, statut scolaire et statut social, étant données la spécificité des connaissances requises pour mettre en rapport les deux registres du système et du modèle ainsi que la connaissance du système nécessaire au maniement de l'outil mathématique. Pour lui, tout objet de savoir est le fruit d'une modélisation productrice de connaissances et de l'oubli de cette modélisation. De plus, seules les connaissances institutionnalisées deviennent des objets de savoir. En cela, il se rapproche de la dialectique outil / objet en centrant la construction de connaissance sur un changement de registre système - modèle tout en la dépassant puisqu'il ne se situe pas uniquement au niveau d'un changement de cadre mathématique.

Il aborde aussi le rôle des registres sémiotiques de représentation en posant comme principe que toute activité emprunte sa forme et sa substance concrète à une pluralité coordonnée de registres sémiotiques, ce qu'il nomme épaisseur sémiotique. L'activité mathématique resserre l'épaisseur sémiotique autour de codes spécifiques. Tout en reconnaissant que les pratiques sémiotiques permettent l'émergence de concepts par leur stabilisation et leur articulation, il ne cherche pas à déterminer plus précisément comment. D'un autre côté, R DOUADY souligne le rôle particulier de la communication avec un cadre auxiliaire de représentation comme facteur de rééquilibration dans la phase « recherche nouveau implicite ». Cela nous rapproche de l'hypothèse de R DUVAL concernant la coordination d'au moins deux registres de représentation sur laquelle repose la compréhension intégrative d'un contenu conceptuel. Pour finir, remarquons avec A SFARD que, dans le cas du concept de fonction, certains registres peuvent renforcer le statut « procédural » de cette notion comme une procédure informatique ou une suite d'actions et d'autres le statut « structural » comme une représentation graphique, une table de valeur ou un tableau de variation. Notons enfin le cas particulier de l'expression algébrique d'une fonction : considérée comme la description d'un programme de calcul elle s'accorde avec le statut « procédural », vue comme une relation statique entre deux « magnitudes » elle convient au statut

« structural ». Ces deux appréhensions de l'écriture algébrique impliquent un fonctionnement des signes selon la structure dyadique.

Différents modes de pensée

Notre problématique porte sur l'entrée dans la pensée fonctionnelle, posée dans ses rapports dialectiques avec les modes de pensée antérieurs. Dans cette perspective, nous accordons une grande attention au fonctionnement des cadres et des registres qui supportent ces rapports. Nous proposons, dans ce qui suit, une présentation des modes de pensée que nous avons retenus en identifiant les cadres et registres dans et par lesquels ils s'expriment mais aussi en soulignant les transitions possibles entre ces différents modes. Nous revenons, à la fin de cette partie, sur les modes de pensée en précisant ce que nous entendons par cette dénomination.

Lors de la résolution d'un problème d'origine extramathématique ou intramathématique, différents modes de pensée peuvent opérer. Vu notre thème d'étude, nous en distinguerons trois : un mode de pensée arithmétique, un mode de pensée algébrique et un mode de pensée fonctionnel. Pour chacun des trois, on peut repérer un certain nombre de registres sémiotiques privilégiés ainsi que certaines stratégies dominantes. Ainsi le mode de pensée arithmétique relèvera essentiellement du domaine des nombres avec leurs différentes représentations, il s'exprimera par l'exploitation de tables de valeurs, le recours à un étalonnage discret et aussi par l'utilisation du produit en croix ou des variations proportionnelles dans des situations respectivement linéaires ou affines. Le mode de pensée algébrique est relié au domaine des lettres, à l'usage du calcul littéral. Il se particularise par l'établissement d'équations, d'inéquations et de formules mais aussi par la détermination d'inconnues. Le mode de pensée fonctionnel est caractéristique du domaine des fonctions, de la détermination de variables et de variations continues ou non. Attardons nous brièvement sur les relations existant entre ces trois modes de pensée. Par exemple, le passage d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique au cours de la résolution d'un problème se traduit par une modélisation utilisant des lettres ; c'est à dire un changement de modèle associé à un changement de registre sémiotique. Cependant, les relations contenues dans ce modèle seront des équations, inéquations ou formules ; l'introduction de paramètres permettant un degré de généralité plus ou moins important. Yves CHEVALLARD propose de relancer la dialectique arithmétique / algébrique par une alternance outil d'étude / objet d'étude, basée sur l'extension des systèmes de nombres pour « faciliter » le calcul algébrique et sur l'utilisation du calcul algébrique pour étudier les propriétés des nombres. Le passage du mode de pensée algébrique au mode de pensée fonctionnel intervient lorsqu'au delà de la formule on doit penser en termes de variations. Cela se traduit par l'intégration de nouveaux registres sémiotiques de représentation pour illustrer ces variations : graphique ou tableau de variation. Il exige donc de reconsidérer les lettres pour leur donner de nouveaux statuts mais aussi une autre mobilisation du calcul algébrique notamment pour établir des propriétés de fonctions. On peut aussi envisager un passage du mode de pensée arithmétique au mode de pensée fonctionnel, celui-ci étant uniquement exact dans le cas des fonctions affines ou linéaires. Dans les autres cas, il ne permettra qu'une représentation partielle des variations en jeu et sa portée restera limitée par l'inadéquation du cadre numérique au « travail » spécifique requis par les fonctions.

En conclusion, nous noterons que les moments de rupture entre ces trois modes de pensée lors de la résolution d'un problème se manifesteront vraisemblablement par des changements de registres sémiotiques associés ou non à un changement de modèle ou un changement de cadre. Nous soulignons l'existence plausible de phases de transition se traduisant, par exemple par la mobilisation partielle du mode de pensée algébrique au service d'une pensée arithmétique dominante.

De notre point de vue, les modes de pensée recourent des caractéristiques individuelles, ils sont le produit d'expériences cognitives antérieures et permettent une classification en idéaux types de ces différents produits. Ils constituent donc une modélisation, introduite par le chercheur, d'un état d'esprit des élèves à propos d'un problème traité en classe de mathématique. Pour lui, ces modes de pensée jouent sur les parties des cadres qui sont sélectionnées et sur les changements de cadres éventuels ; ils déterminent l'exploitation qui est faite des cadres et des registres en orientant la lecture des données de l'exercice, le choix de stratégies de recherche effectué et donc, la construction d'un modèle lorsqu'il s'agit d'un problème extramathématique ou la mobilisation d'un ou plusieurs cadres ; le tout évoluant avec le temps.

Présentation de l'ensemble du travail de recherche

La méthodologie mise en œuvre dans ce travail repose sur trois approches complémentaires :

- l'analyse des programmes de mathématiques de la classe de seconde pour voir comment y est organisée, pensée, l'entrée dans la pensée fonctionnelle et ses articulations avec les autres formes de pensées.
- l'analyse des manuels en usage dans cette classe en nous centrant sur l'objet « situation fonctionnelle » qui nous semble fondamental au vu de notre problématique et pour l'étude duquel, nous mettrons en place une grille spécifique.
- l'expérimentation de deux situations choisies de façon contrastée, la première reposant sur la résolution d'un problème intramathématique dont l'énoncé est fermé et la seconde sur la recherche d'un problème extramathématique dont l'énoncé ne comporte qu'une question assez générale laissant aux élèves de l'autonomie pour y répondre.

Les deux premières approches sont regroupées dans la première partie du mémoire intitulée « Programmes et manuels », la seconde partie, sous le titre « Expérimentations », est consacrée à la troisième approche. Les deux expérimentations se sont déroulées dans une classe de seconde durant l'année scolaire 95/96.

PROGRAMMES ET MANUELS

Lecture du programme de mathématiques de la classe de seconde

Ce programme a été publié au bulletin officiel de l'Education Nationale N°20 du 17 mai 1990. Il remplace le précédent publié au BOEN du 5 février 1987 pour tenir compte des nouveaux programmes de collège « *qui font davantage appel à l'activité des élèves et sont plus tournés vers la résolution de problèmes et les applications* ». Il est décomposé en trois parties principales : exposé des motifs, organisation de l'enseignement et programme.

Les intentions majeures sont précisées dans la première partie, parmi celles-ci, les auteurs signalent : leur volonté d'« *entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement* » et « *le rôle formateur des activités de résolution de problèmes* ». Concernant les théories mathématiques en jeu dans cette classe, ils stipulent qu'on s'en tiendra « *à un cadre et un vocabulaire théoriques modestes, mais suffisamment efficaces pour l'étude des situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation mathématique solide* ». Elles donnent ainsi des indications sur les parts respectives des aspects outil et objet des notions mathématiques. On notera l'insistance des auteurs à propos des résolutions de problèmes et des applications, sans toutefois préciser ce qu'ils entendent par problème, renforçant le rôle d'outil des concepts et limitant le cadre et le vocabulaire théoriques. D'ailleurs, en donnant quelques lignes directrices pour les contenus, ils commencent par affirmer que « *dans tous les domaines, la résolution de problèmes constitue, comme au collège, l'objectif essentiel* ».

C'est dans la seconde partie, en fixant les objectifs et fonctions des différents types d'activités, qu'ils détaillent le rôle de ces problèmes : « *..., la résolution de problèmes et l'étude de situations occupent une part importante du temps de travail, ..., il convient d'articuler la mise en place de contenus nouveaux avec l'étude de situations assez riches, qui peuvent, selon les questions étudiées, servir de motivation, fournir des secteurs d'intervention, ou constituer le support même pour cette mise en place* ». A cette occasion, ils indiquent une articulation outil / objet possible en listant le contenu du cours : « *la synthèse, qui constitue le cours proprement dit, doit être brève ; elle porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître et savoir utiliser, mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu* ». Enfin, à propos de l'organisation du travail personnel des élèves, les auteurs spécifient le rôle et la difficulté des différentes tâches qui leur seront proposées. Ainsi : « *la résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, permet aux élèves d'affermir leurs connaissances de base et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples* » tandis que « *l'étude de situations plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux élèves d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances dans des secteurs variés* ». Voilà la dialectique outil / objet mise en place, les problèmes servent à la fois de mode d'introduction et de moyen de sensibilisation aux nouveaux concepts et d'outil de contrôle de la disponibilité des notions anciennes ; les exercices d'entraînement permettent une familiarisation avec les nouveaux concepts. Le statut scolaire de ces champs d'intervention des notions mathématiques peut être assuré par l'ajout des méthodes de résolution de problèmes au cours et l'articulation étude de situations / synthèse / exercices. Voyons maintenant, dans la troisième partie, comment les auteurs concilient cette perspective avec l'énoncé du programme en nous limitant aux sections relatives aux calculs numériques et algébriques et aux fonctions. Tout d'abord, pour contribuer à l'unité de la formation, ils mentionnent l'importance du fait « *que de nombreux travaux fassent intervenir simultanément des parties diverses du programme... (activités géométriques et algébriques relatives aux fonctions)* » et que « *l'enseignement des mathématiques est aussi à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : étude de situations issues de ces disciplines ; organisation concertée des activités d'enseignement* ». Cet objectif est repris dans le paragraphe problèmes numériques et algébriques. Les travaux concernés ont notamment pour but de « *consolider la pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique, en relation étroite avec l'étude des fonctions* » et « *d'amener les élèves à une meilleure maîtrise de l'emploi de variables, à travers l'étude d'exemples où elles expriment des quantités dont la signification est clairement perçue ; les travaux se développeront dans les directions suivantes : substitution de nombres à*

des variables (utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques, tableaux de valeurs de fonctions,...), mise en équation de problèmes et description de phénomènes continus à l'aide de fonctions ». Ce point est à nouveau retenu dans le paragraphe fonctions, il en constitue même l'un des objectifs principaux. Ainsi, dans la section génération et description des fonctions, les auteurs proposent d'exploiter « des situations variées : tracés graphiques, touches de la calculatrice, algorithmes de calcul, relations de dépendance issues de la géométrie, de la mécanique, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale ». Ils apportent aussi des précisions sur les liens entre fonctions et expressions algébriques : « dans la plupart des situations étudiées en seconde, les fonctions sont définies par des formules algébriques simples. Pour que les élèves se forment une idée assez large de la notion de fonction, on donnera quelques exemples de situations menant à des fonctions définies différemment ». Enfin, dans la partie travaux pratiques de ce paragraphe, ils placent l'« étude de situations décrites au moyen de fonctions » avec ce commentaire : « on s'attachera à mettre en évidence, à travers les exemples étudiés, la signification des propriétés des fonctions concernées ...on pourra exploiter quelques exemples simples de problèmes d'optimisation... » rappelant ainsi les différentes fonctions de ces activités.

Analyse des principaux manuels

Les manuels et les variables retenues

Notre choix s'est porté sur six ouvrages correspondant aux programmes actuels et en usage dans les classes de seconde ; il s'agit du FRACTALE chez Bordas, du manuel de seconde de la collection TERRACHER chez Hachette, de Math 2^e chez Belin, du manuel de seconde dans la collection TRANSMATH chez Nathan, de mathématiques seconde de la collection DECLIC chez Hachette et du DIMATHEME 2^e chez Didier. Cette liste n'est pas exhaustive mais couvre les livres principalement usités dans les lycées. Nous les avons parcourus à la recherche de ce que nous avons appelé des situations fonctionnelles. Dans un premier temps, les caractéristiques retenues pour repérer une telle situation étaient les suivantes :

1. L'énoncé est posé dans un cadre non fonctionnel, c'est à dire qu'aucune fonction n'est donnée a priori. Ceci n'exclut pas les cas où une fonction est proposée dans l'enchaînement des questions.
2. Une modélisation du problème conduit à l'introduction d'une fonction.
3. L'étude de propriétés de cette fonction permet de résoudre le problème.

Nous n'avons donc pas retenu les « exercices » dont l'énoncé comportait des formules parmi les hypothèses, non pas qu'ils soient dénués d'intérêt, mais ce n'est pas cet aspect de l'introduction d'une fonction pour résoudre un problème qui nous intéressait. La troisième condition supposait que la fonction était un outil permettant de répondre à des questions relatives à un « problème » d'origine mathématique ou pas. De ce fait, nous excluons les situations génératrices de fonctions sans autre objectif. Il nous a semblé que la prise en compte de celles-ci enrichirait notre étude, du point de vue quantitatif en la rendant plus significative, et du point de vue qualitatif en nous orientant vers la recherche des éléments qui favorisent la présence de cette condition dans un énoncé. Nous avons donc choisi d'étendre notre sélection et de rechercher les cas où : la situation est exposée dans un ou plusieurs cadres sans recours à des fonctions et sans proposer de formule dans les hypothèses, il y a une modélisation du système de départ par une fonction.

Nous proposons, dans l'annexe 1, des exemples de tâches extraites des manuels ainsi que certaines de leurs caractéristiques référant aux variables définies ci-dessous.

Nous avons établi une série de variables permettant le codage de ces énoncés, variables principales et sous-variables. Nous allons maintenant les détailler.

- 1) **Titre du chapitre et position du chapitre par rapport à l'ensemble de l'ouvrage** : ces deux indications fournissent des repères sur la disposition des situations dans le manuel ; se situent-elles dans les chapitres faisant référence aux fonctions ? Sont-elles réparties dans tout le manuel ? Poursuivent-elles les mêmes objectifs suivant cette place ?

- 2) **Place dans le chapitre, divisée en cinq sous-variables : activités, corrigés (exercices ou travaux pratiques, quelle que soit la position dans le chapitre), travaux pratiques, exercices et problèmes.** Cette division appelle des commentaires, nous entendons : par activités ce qui est généralement appelé « activité » dans les ouvrages, soit des énoncés situés avant le « cours » dont le but doit être de « sensibiliser » les élèves aux notions qui seront introduites ; par corrigés tout énoncé comportant une correction rédigée et généralement accompagné d'un « point méthode » ; par travaux pratiques des énoncés contenus dans la section du même nom correspondant au paragraphe du programme intitulé « travaux pratiques » ; par exercices les énoncés classés sous la rubrique « exercices » pour certains ouvrages mais aussi « pour savoir-faire » ou « applications directes du cours » et par problèmes ceux situés dans la partie « problèmes » ou « pour chercher » ou « exercices » lorsqu'elle est précédée d'une série « d'applications directes du cours ». Dans ce cas, il y a pour certains manuels, deux catégories regroupées dans la variable problèmes.
- 3) **Origine de la situation, divisée en trois sous-variables : réalité, géométrique, physique.** Nous aurions pu en ajouter d'autres comme biologie ou sciences économiques et sociales mais leur absence ou leur très faible présence dans les manuels nous a encouragé à ne pas leur consacrer une variable. Les situations relevant des sciences économiques et sociales seront attribuées à la sous-variable réalité. La distinction entre réalité et physique se justifie par une différence de statut ; les situations provenant des sciences physiques ont en effet un statut scolaire et relèvent d'un formalisme particulier alors que celles extraites de la réalité peuvent se rapprocher des pratiques sociales des élèves. Enfin, les phénomènes d'origine mathématique proviennent de la géométrie.
- 4) **Données, divisée en deux sous-variables : dessin et texte.** Elles constituent un indicateur de richesse de l'énoncé et potentiellement de la situation. Marquant aussi l'intention de modélisation et le modèle proposé, elles donnent des renseignements sur l'ouverture du problème. En effet, la présence simultanée d'un texte et de dessins, et donc de deux registres sémiotiques de représentation dans l'énoncé, implique, de la part de l'élève, la construction de connaissances dans la mise en rapport de ces deux registres et peut ainsi privilégier et faciliter une entrée dans le phénomène. Alors qu'un texte ou un dessin seul peut laisser davantage d'initiative à l'élève augmentant dans le même temps le risque d'échec.
- 5) **Outillage, divisée en trois sous-variables : formule algébrique, tableau de valeurs et représentation graphique.** Par leur intermédiaire, on fait référence à certains registres sémiotiques de représentation d'une fonction. Nous n'avons pas retenu le tableau de variation, car il n'intervient que marginalement dans les situations que nous avons recensées. Ces trois variables ne s'excluent pas, la seconde pouvant même figurer parmi les données du problème.
- 6) **Thème, divisée en trois sous-variables : extremum, partage et variations.** La première dénombre les énoncés comportant au moins une question à propos d'un maximum ou d'un minimum d'une fonction ; la seconde permet d'inventorier les situations dans lesquelles on est amené à résoudre une ou des équations de la forme $f(x) = \lambda$ provoquant ainsi un partage de l'intervalle de définition de la fonction ; la troisième a été introduite pour tenir compte des situations dont l'objectif est l'étude des variations d'une fonction. Ces trois variables ne constituent pas des ensembles disjoints, l'étude d'une situation pouvant relever de deux d'entre elles voire des trois. Nous avons choisi le nom de « partage » en référence à la forme qu'une question de ce type prend lorsqu'elle est posée directement dans le cadre initial (voir, l'exemple d'exercice résolu en annexe 1).
- 7) **Degré de liberté, divisée en deux sous-variables : variable et variable indépendante.** On a voulu, au travers de cette variable, repérer les situations où le choix des variables est laissé à l'initiative de l'élève. On a distingué entre variable indépendante et variable dépendante principale ; en effet, on peut envisager des phénomènes dans lesquels la variable dépendante est donnée pour formuler le thème de la situation à étudier sans pour autant préciser la variable indépendante.
- 8) **Nombre de variables :** c'est un indicateur de la difficulté et de la richesse de la situation. En liaison avec la variable précédente, on aurait pu repérer si l'ensemble des variables dépendantes est fourni

par l'énoncé. On ne l'a pas fait, car, en général, lorsque la variable dépendante est donnée, les variables dépendantes secondaires le sont aussi et lorsque le choix en est laissé à l'élève, c'est pour l'ensemble de ces variables. Cependant, il existe des situations où des variables dépendantes secondaires ne sont pas données alors que la variable dépendante principale est fournie par l'énoncé.

- 9) **Nature de la variable indépendante, divisée en trois sous-variables : discrète, continu géométrique et continu physique.** Nous avons introduit la première car il y a des situations dans lesquelles la variable indépendante est discrète mais supposée continue pour ces différentes représentations sémiotiques. Nous avons séparé le continu géométrique du continu physique, car ils n'ont pas la même nature et n'évoquent pas les mêmes choses. Le continu géométrique est souvent symbolisé par un point se déplaçant sur un segment, la variable étant alors la longueur d'un segment. Le continu physique est relié à la matière ou à un concept des sciences physiques : distance, temps, vitesse, quantité d'un liquide...
- 10) **Titre :** les situations dont l'énoncé est précédé d'un titre se distinguent, en général, par leur « originalité » mais surtout, par le fait que cette présence peut faciliter la mémorisation et favoriser des situations de rappel par le repérage de situations analogues. Cela peut aussi avoir pour conséquence une contextualisation forte de la méthode de résolution.
- 11) **Retour sur la situation :** le changement de registre système / modèle étant « automatique » dans les situations recensées dans cette recherche, cette variable permet de séparer celles dans lesquelles la fonction est l'objet d'étude et la situation un prétexte à son introduction, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de retour sur le phénomène initial, de celles dans lesquelles la fonction est un outil pour répondre à des questions relatives à cette situation de départ, il y a alors retour sur le phénomène initial. On aurait pu aussi noter si ces questions sont posées avant ou après l'introduction de la fonction mais, le lien avec le degré de liberté et la nature du thème d'étude s'il y en a un, permettent de compenser cette absence.

Présentation globale des données

Nous fournissons, dans l'annexe 2, les grilles de lecture des ouvrages ainsi que les bilans par manuel et par place dans le chapitre.

Nous allons exposer tout d'abord le bilan de l'ensemble des ouvrages. Il ne permet pas une analyse approfondie mais donne une idée de la répartition et de la nature des 173 situations fonctionnelles relevées. Les résultats sont donnés en pourcentage de l'ensemble des situations. Concernant la place dans le chapitre, 7% se situent parmi les activités, 3% parmi les corrigés, 10% en travaux pratiques, 25% en exercices et 55% sous forme de problèmes ; 45% des énoncés portent un titre ; seules 3% des situations laissent le choix des variables à l'élève et si 100% des énoncés ont la forme d'un texte, 63% sont accompagnés d'au moins un dessin. Nous pouvons déjà constater la prédominance des problèmes et la fermeture des énoncés pour la détermination des variables principales, mais aussi la combinaison dessin + texte dans la plupart de ceux-ci. Si l'on regarde le type des situations fonctionnelles, on constate que 62% sont d'origine géométrique, 33% prennent leur source dans la réalité et 5% s'inspirent des sciences physiques. La nature de la variable indépendante dans chacune des situations suit à peu près la même répartition : dans 4% des cas elle est discrète, dans 65% réfère au continu géométrique et pour 31% au continu physique. Les thèmes se répartissent de la façon suivante : 26% d'extrema, 37% de partages et 24% d'études de variations. Notons aussi qu'il y a un retour sur la situation initiale dans 71% des cas. Pour l'essentiel, elles entraînent donc une modélisation intramathématique et plus particulièrement un passage du cadre géométrique dans un autre. De plus, ce changement de cadre ou de registre ne se fait quelquefois que dans un sens : il n'y a pas de retour sur le phénomène de départ et donc pas de construction de connaissances à propos de celui-ci. Même si les thèmes ne sont pas disjoints, leur total ne représente que 87%, ce qui nous conduit à remarquer qu'il existe des situations sans thème. Le nombre moyen de variables par situation est de 3,3. Il cache de fortes disparités par manuel et par chapitre mais étant supérieur à 3, il marque la présence d'une variable dépendante secondaire en plus des deux variables principales. Remarquons enfin que l'outillage mathématique associé à ces situations

fonctionnelles est dans 89% des cas une expression algébrique de la fonction, dans 17% un tableau de valeurs et pour 78% une représentation graphique de la fonction. On note ainsi la prégnance de deux registres sémiotiques de représentation privilégiés.

Considérons plus précisément la répartition par manuel à l'aide du tableau suivant :

	nombre situations	nombre chapitres	chapitres fonctions	activités	corrigés	travaux pratiques	exercices	problèmes
Fractale	21	4	2	5%	9,5%	9,5%	0%	76%
Terracher	43	5	3	12%	9%	9%	35%	35%
Belin	21	5	4	19%	0%	14%	0%	67%
Transmath	34	9	3	3%	0%	21%	38%	38%
Déclic	32	5	2	0%	0%	0%	34%	66%
Dimathème	22	4	4	4%	0%	9%	14%	73%
Total	173	32	18	7%	3%	10%	25%	55%

Les auteurs de ces ouvrages ont opéré des choix différents, dans le nombre de situations fonctionnelles, dans le nombre et le type de chapitres où elles interviennent. Ainsi trois des livres en contiennent une vingtaine, deux une trentaine et un une quarantaine. Ce n'est pas le seul trait caractéristique du « Terracher » puisqu'il est aussi l'unique ouvrage dans lequel les situations fonctionnelles concernent l'ensemble des tâches proposées aux élèves : à hauteur de 10% pour les activités, corrigés et travaux pratiques et de 35% pour les exercices et problèmes. On note la structure particulière de chaque ouvrage : le « Belin » consacre une part importante de ces situations aux activités, en place quelques-unes en travaux pratiques, l'essentiel se trouvant en problèmes ; le « Transmath » les répartit en travaux pratiques, exercices et problèmes ; le « Fractale » n'en met aucune en exercices et les concentre sous la rubrique problèmes ; « Déclic » ignore les activités, travaux pratiques et corrigés ; « Dimathème » n'en place pas en corrigés et se concentre sur les « problèmes ». Si « Belin » se distingue par les activités, « Transmath » s'illustre par l'importance des situations en travaux pratiques et par leur répartition sur 9 chapitres de l'ouvrage dont 3 sont consacrés explicitement aux fonctions.

Attardons-nous sur les situations fonctionnelles ne se situant pas dans un chapitre explicitement dédié aux fonctions. Elles représentent 12% de l'ensemble, réparties pour 19% en travaux pratiques, 5% en exercices et 76% en problèmes. Leur origine est dans 81% des cas géométrique, c'est à dire mathématique. Il y a retour sur le phénomène initial pour 86% d'entre elles, soit un taux assez supérieur à celui du cas général. Autre caractéristique, l'énoncé est constitué d'un texte accompagné d'au moins un dessin dans 90% des cas.

Ces traits les distinguant assez nettement du cas général, nous mènerons l'analyse par ouvrage en séparant les deux types de chapitres. Cette analyse permettra d'exhiber les choix généraux et locaux des auteurs, généraux pour l'apprentissage de la notion de fonction vue depuis l'étude de situations fonctionnelles et locaux pour la présentation et le contenu de ces situations suivant le chapitre où elles se trouvent. Puis nous chercherons, en considérant l'ensemble des situations, c'est à dire en négligeant a priori les décisions des auteurs, à en déterminer des éléments discriminants suivant leur place dans un chapitre.

Remarquons enfin, qu'il n'y a de lien direct, ni entre l'origine de la situation et un retour sur celle-ci, ni entre la présence d'un thème et un retour sur le phénomène initial ; celui-ci relève d'un autre principe ou d'une combinaison de facteurs de ce type.

Analyse par ouvrage

Nous la mènerons en recherchant d'abord les particularités marquantes du manuel, puis les caractéristiques générales des chapitres quand elles ressortent. Ensuite, nous privilégierons une entrée par les thèmes puis l'outillage pour chaque chapitre explicitement dédié aux fonctions. Ce point de vue

nous conduira à la mise en évidence de conceptions d'auteurs à propos des situations fonctionnelles et de leur rôle dans l'apprentissage de la notion de fonction.

• **Fractale**

Nous avons déjà signalé la répartition particulière des situations fonctionnelles dans cet ouvrage. Il comporte d'autres spécificités :

- * la prédominance des situations d'origine géométrique 81% et aussi d'une variable indépendante référant au continu géométrique 86%
- * une plus faible proportion d'énoncés associant texte et dessin(s) 43%
- * la présence systématique d'une formule algébrique 100%
- * une forte part consacrée au thème variations 43%
- * un nombre moyen de variables élevé 4,2
- * une quantité d'énoncés portant un titre assez faible 29%
- * peu de retours sur la situation de départ 38%.

En considérant les deux chapitres « fonctions », on remarque que les trois situations qui ne sont pas d'origine géométrique se situent dans le chapitre « fonctions généralités » ainsi que la plupart des énoncés de la forme texte + dessin(s). D'autre part, les situations présentes dans le chapitre « fonctions usuelles » ont toutes pour thème, seul ou accompagné, l'étude des variations d'une fonction. Autre particularité, le nombre moyen de variables par phénomène ; il est de 3,3 pour le chapitre « fonctions généralités » et supérieur ou égal à 5 pour les autres chapitres. Regardons plus précisément les deux chapitres « fonctions » de ce manuel en nous focalisant sur les thèmes et l'outillage associé.

* Chapitre « fonctions généralités »

Il y a 5 situations sans thème dont : 1 à un registre (formule), 3 à deux registres (1 formule+tableau et 2 formule+graphique), 1 à trois registres.

Il y a 5 situations à un thème, 4 partages à deux registres (formule+graphique) et 1 extremum à trois registres.

* Chapitre « fonctions usuelles »

Il y a 6 situations à un thème, variations, et à deux registres (formule+graphique).

Il y a 3 situations à deux thèmes, 1 partage+variations à deux registres (formule+graphique) et 2 extrema+variations à deux registres (formule+graphique).

La proportion de situations sans thème est de 26% et il n'y a pas de lien entre l'absence de thème et la richesse en termes de registres sémiotiques de représentation d'une fonction ; d'ailleurs, il n'y a qu'une situation dont l'outillage se réduit à une seule représentation. La concentration des situations sans thème dans le chapitre « fonctions généralités » peut faire penser que le but des auteurs de ce manuel est d'y familiariser les élèves avec les différents registres sémiotiques de représentation d'une fonction, avant de passer, dans le chapitre « fonctions usuelles », à l'étude des variations de fonctions. Le tableau de valeurs y joue un rôle marginal par rapport aux deux registres privilégiés formule et graphique qui sont, le plus souvent, associés (15 cas sur 21). Cette hypothèse est renforcée par le faible nombre de situations faisant intervenir simultanément les trois registres et la distribution chaotique des énoncés proposant un retour sur la situation de départ. Cette disposition ne semble pas relever d'une stratégie particulière des auteurs et le retour paraît dépendre du contexte du problème.

• **Terracher**

Mise à part la distribution singulière des situations fonctionnelles sur l'ensemble des tâches proposées aux élèves, cet ouvrage se particularise aussi par :

- * une proportion importante de phénomènes d'origine non mathématique 44%

- * une part plus faible des recours à une formule algébrique 77% ou à une représentation graphique 51%
- * un nombre moyen de variables par situation assez faible 2,8
- * des titres plus fréquents 58%
- * la quantité de situations ouvertes 9%, au nombre de 4 sur un total de 5 pour l'ensemble des ouvrages
- * une proportion modeste de retour sur la situation initiale 58%.

Dans un premier temps, nous allons considérer les quatre situations dans lesquelles le choix des variables est laissé à l'élève. Le nombre de variables présentes y est réduit : 3, 3, 2 et 3. Sur les quatre, une figure sous la rubrique corrigés, deux en problèmes et la dernière en travaux pratiques. Trois d'entre elles se situent dans le chapitre « généralités sur les fonctions » et prennent leur source dans la réalité, la quatrième, dans le chapitre « trigonométrie et fonctions circulaires » se base sur une situation géométrique. Il y a à chaque fois retour sur le phénomène de départ. A propos des trois premières, la variable indépendante fait référence au continu physique ; l'énoncé de celle qui est corrigée porte un titre et se compose d'un dessin et d'un texte, il s'agit d'un problème d'extremum et de variations ; les deux autres sont répertoriées sous la rubrique problèmes et ont pour thème le partage, leurs énoncés sont constitués d'un texte seul, l'un d'eux portant un titre. La quatrième situation « ouverte », placée sous la rubrique travaux pratiques, se présente sous la forme d'un dessin accompagnant le texte, ne porte pas de titre et a pour thème le partage. Nous n'avons pas codé l'outillage mathématique intervenant dans l'étude de ces phénomènes, car, même si un corrigé est proposé, il n'est pas évident que les élèves aient recours aux registres présents dans celui-ci. Dans la suite de l'analyse, nous ne tenons plus compte de ces quatre situations. Le livre comporte trois chapitres « fonctions ».

* Chapitre « généralités sur les fonctions »

Il y a 8 situations sans thème dont : 6 à un registre (4 formule et 2 graphique), 2 à deux registres (formule+graphique).

Il y a 4 situations à un thème, 1 extremum à un registre (formule) et 3 partages dont 1 à un registre (graphique) et 2 à deux registres (formule+graphique).

Il y a 4 situations à deux thèmes, 3 extrema+variations à un registre (formule) et 1 partage+variations à un registre (formule).

Notons le nombre important de situations à un seul registre de représentation (11 sur 16), la part du registre des écritures algébriques parmi elles (8 sur 11) et l'absence du tableau de valeurs d'une fonction. Il n'y a de retour sur la situation que dans 47% des cas et il n'y en a jamais lorsque l'étude ne possède pas de thème.

Ce chapitre a pour objectif la familiarisation avec deux des registres de représentation d'une fonction ; la situation permet l'introduction d'une fonction, elle n'est pas l'objet d'étude.

L'origine de la situation a peu d'influence sur cela puisqu'il n'y a retour sur la problématique initiale que pour 25% des énoncés ne prenant pas leur source dans les mathématiques.

* Chapitre « fonctions usuelles »

Il y a 10 situations sans thème dont : 3 à un registre (2 formule et 1 graphique), 6 à deux registres (3 tableau+graphique et 3 formule+graphique) et 1 à trois registres.

Il y a 4 situations à un thème, 2 extrema à deux registres (1 formule+graphique et 1 formule+tableau), 1 partage à deux registres (formule+graphique) et 1 variations à trois registres.

L'utilisation des registres est plus variée, tant dans leur choix que dans leurs combinaisons. On peut dire qu'il n'y a pas de registre privilégié dans ce chapitre. Il y a retour sur le phénomène initial pour la moitié des situations sans thème et dans trois cas sur quatre pour les situations à un thème. Cependant, si les situations proposées sont plus riches, en termes de registres de représentation d'une fonction, souvent, elles ne possèdent pas de thème d'étude. Enfin, pour celles qui ne prennent pas leur source dans les mathématiques, il y a retour sur la situation initiale dans 87,5% des cas..

- * Chapitre « trigonométrie et fonctions circulaires »

Il y a 6 situations à un thème, 2 extrema à un registre (formule), 3 partages dont 1 à un registre (formule) et 2 à deux registres (formule+graphique) et 1 variations à 1 registre (formule).

Il y a 1 situation à deux thèmes, extremum+variations à un registre (formule).

Dans ce chapitre, 6 textes d'énoncés sur 7 sont associés à un ou des dessins. Toutes les situations sont d'origine géométrique, ont un thème d'étude et il y a retour sur le phénomène de départ pour 75% d'entre elles. De nouveau, le nombre de situations à un seul registre est conséquent (5 sur 7) et le tableau de valeurs n'intervient plus.

La proportion des situations sans thème est de 49% et elles se répartissent dans les deux premiers chapitres. On remarque aussi la part importante des situations dont l'outillage se réduit à un seul registre sémiotique de représentation 51% ; le plus souvent, il s'agit d'une formule algébrique (15 sur 19). Le tableau de valeurs intervient uniquement dans le chapitre « fonctions usuelles ». Etant donné que les deux autres chapitres sont consacrés, soit à une introduction à la notion de fonction, soit à la découverte de nouvelles fonctions, on peut y voir l'importance accordée par les auteurs au registre des écritures algébriques pour représenter les fonctions dans un premier temps. Ce choix semble aussi supposer une incompatibilité entre richesse en termes de registres de représentation et richesse en termes de thème d'étude : soit les situations comportent un ou des thèmes d'étude mais alors le nombre de registres proposé par l'énoncé est faible, soit c'est le contraire.

La part conséquente des retours dans le troisième chapitre, tient peut-être au fait qu'il n'est pas exclusivement dédié aux fonctions. Remarquons aussi que la croissance de la proportion des situations avec retour dans la progression de l'ouvrage peut traduire une évolution du statut des situations fonctionnelles.

- **Belin**

Outre la distribution spécifique des situations fonctionnelles dont une part conséquente en activité, ce livre possède comme autres particularités :

- * un nombre important de chapitres consacrés au concept de fonction
- * il y a retour sur le phénomène de départ dans la quasi totalité des situations (20 sur 21), soit un pourcentage de 95%
- * le tableau de valeurs d'une fonction et la représentation graphique sont souvent mobilisés, respectivement 43% et 86%, le recours à une formule algébrique est systématique 100%
- * la répartition des thèmes d'étude : 48% d'extrema et de partage et 10% de variations
- * le nombre moyen de variables par tâche est de 3,2 et la quantité de variables est, le plus souvent, proche de cette valeur
- * les énoncés portant un titre ne constituent que 33% du total.

Si l'origine des situations est très majoritairement géométrique dans le premier chapitre, « notion de fonction... », elle est ensuite beaucoup plus variée, se répartissant équitablement, dans les autres. Considérons chacun des chapitres « fonctions ».

- * Chapitre « notion de fonction. Calculs numériques et littéraux »

Il y a 1 situation sans thème à trois registres.

Il y a 4 situations à un thème, 1 extremum à trois registres et 3 partages dont 1 à deux registres (formule+graphique) et 2 à trois registres.

Il y a 2 situations à deux thèmes, 1 extremum+partage à deux registres (formule+graphique) et 1 extremum+variations à trois registres.

On remarque le nombre important de situations faisant intervenir les trois registres sémiotiques de représentation d'une fonction (5 sur 7) ainsi qu'une unique étude sans thème.

L'origine essentiellement géométrique des situations, ajoutée aux remarques précédentes, nous conduit à l'hypothèse suivante : les auteurs de ce manuel souhaitent prendre appui sur le « connu » mathématique pour introduire une nouvelle notion au travers de ses registres sémiotiques de représentation et de ses possibles utilisations.

* Chapitre « fonctions affines et linéaires. Equations »

Il y a 1 situation sans thème à deux registres (formule+tableau).

Il y a 5 situations à un thème, 2 extrema dont 1 à deux registres (formule+graphique) et 1 à trois registres et 3 partages dont 1 à un registre (formule) et 2 à deux registres (formule+graphique).

Dans ce chapitre, les situations fonctionnelles sont très majoritairement d'origine non mathématique. Nous pouvons rapprocher ce fait de la relative ancienneté de ces fonctions pour les élèves. Il s'agirait de pallier l'obsolescence des situations mathématiques traditionnelles en élargissant le domaine d'intervention de la notion.

* Chapitre « fonctions carré et cube. Variations et parité »

Il y a 3 situations à un thème, 2 extrema à deux registres (1 formule+graphique et 1 formule+tableau) et 1 partage à deux registres (formule+graphique).

Il y a 1 situation à deux thèmes, extremum+partage, à trois registres.

* Chapitre « trois fonctions de référence »

Il y a 1 situation sans thème à deux registres (formule+graphique).

Il y a 1 situation à un thème, partage, à deux registres (formule+graphique).

Il y a 1 situation à deux thèmes, extremum+variations, à deux registres (formule+graphique).

La proportion des situations sans thème d'étude est de 14% (3 sur 21) et elles se répartissent sur trois chapitres distincts. D'un point de vue similaire, il n'y a qu'une situation exploitant un seul registre ; il s'agit alors d'une formule algébrique. Notons aussi la part conséquente des situations à trois registres, 33%, concentrées dans le premier chapitre. Ces observations et celles exposées en préambule, permettent de suggérer une volonté manifeste des auteurs de ce manuel : de varier les registres sans les isoler, de proposer un thème d'étude le plus souvent possible, de diversifier les sources des situations en systématisant un retour sur le phénomène de départ et en limitant le nombre de variables.

• **Transmath**

Une caractéristique marquante de ce manuel est la répartition des situations fonctionnelles sur l'ensemble du manuel puisqu'environ 33% d'entre elles ne se situent pas dans un chapitre « fonctions ». Les autres spécificités de cet ouvrage sont :

- * une origine essentiellement géométrique des situations fonctionnelles 76%
- * un nombre d'énoncés portant un titre important 76%
- * il y a souvent un dessin qui accompagne le texte de l'énoncé, 74%, c'est même systématique lorsque la situation ne se trouve pas dans un chapitre « fonctions »
- * le choix des thèmes d'étude se démarque de celui du bilan global par une quantité conséquente de problèmes de partage, 59% et de variations, 32%.

Nous allons d'abord considérer les chapitres non « fonctions ». Les situations fonctionnelles présentes dans ces chapitres comportent toutes un titre et au moins un thème d'étude. Dans 10 cas sur 11 il y a retour sur le phénomène initial. De même, dans dix cas sur onze l'origine de la situation est géométrique. 2 ont recours à un seul registre (formule), 8 à deux registres (formule+graphique) et 1 à trois registres. Le nombre de variables intervenant dans ces situations varie de 2 à 5, la moyenne est légèrement supérieure à celle du bilan global, se situant autour de 3,5.

Ces situations fonctionnelles se distinguent donc par leur richesse en termes de thème d'étude et de combinaison des registres sémiotiques de représentation d'une fonction, très majoritairement formule

algébrique et représentation graphique. Cette richesse se retrouve dans la présentation des énoncés et elle est renforcée par un retour presque systématique sur le phénomène de départ. Analysons maintenant les chapitres « fonctions ».

* Chapitre « notions sur les fonctions »

Il y a 2 situations sans thème à deux registres (formule+graphique).

Il y a 9 situations à un thème, 8 partages à deux registres (formule+graphique) et 1 variations à un registre (formule).

Ce chapitre se distingue des autres par le faible nombre d'énoncés portant un titre (4 sur 11), 36% et la part assez faible des situations sur lesquelles un retour est proposé (7 sur 11), soit 64%. De plus, le thème du partage est omniprésent (8 sur 11) et l'association des deux registres formule+graphique est nettement privilégiée par rapport à d'autres recours possibles (10 sur 11), ainsi, le tableau de valeurs n'est pas du tout exploité. Enfin, le nombre de variables par étude est constant, égal à 3. Il est alors possible de dresser le profil général d'une situation fonctionnelle dans ce chapitre : elle a pour thème le partage, exploite les deux registres formule algébrique et représentation graphique et a une origine géométrique. Parmi les situations qui ont ce profil général figurent les 7 pour lesquelles un retour est proposé.

* Chapitre « fonctions usuelles »

Il y a 1 situation sans thème à un registre (formule).

Il y a 4 situations à un thème, 2 partages dont 1 à deux registres (formule+graphique) et 1 à trois registres et 2 variations à deux registres (formule+graphique).

Il y a 5 situations à deux thèmes, 3 extrema+variations dont 2 à deux registres (formule+graphique) et 1 à trois registres et 2 partage+variations à deux registres (formule+graphique).

La combinaison des deux registres formule+graphique est toujours très présente et le tableau de valeurs n'intervient qu'associé aux deux autres. Le thème de prédilection est celui de l'étude des variations d'une fonction (7 sur 10), les deux autres interviennent dans des proportions semblables. Le retour sur le phénomène initial et la présence d'un titre en début d'énoncé sont presque systématiques (9 sur 10).

Le profil général des situations est moins net mais, les registres sémiotiques de représentation d'une fonction privilégiés ne changent pas et il y a substitution du thème du partage par celui de l'étude des variations, souvent en association avec l'un des deux autres. Cela permet d'avoir des situations plus riches des deux points de vue, registres avec l'utilisation du tableau de valeurs et thème d'étude.

* Chapitre « angles de vecteurs. Fonctions circulaires »

Il y a 1 situation sans thème à un registre (formule).

Il y a 1 situation à deux thèmes, extremum+variations, à un registre (formule).

Pour ces deux situations, l'énoncé comporte un titre et se présente sous la forme d'une combinaison d'un texte et d'un dessin. Il propose, à chaque fois, un retour sur le phénomène de départ.

Dans ces chapitres, la proportion des situations sans thème est de 18% ; l'utilisation des registres sémiotiques de représentation d'une fonction est principalement limitée à l'association formule+graphique : dans 16 cas sur 24 seuls et dans 3 autres cas combinés avec un tableau de valeurs. Celui-ci est particulièrement marginal.

La variation de la proportion des énoncés comportant un retour sur la situation initiale est la même que celle du « Terracher ». Ce changement de statut s'accompagne d'une évolution des thèmes d'étude qui provoque une complexification des situations proposées.

• **Déclic**

La répartition des situations fonctionnelles dans cet ouvrage est assez remarquable puisqu'elles se présentent toutes, soit sous la forme d'exercices, soit sous la forme de problèmes. Les exercices se situent uniquement dans le chapitre « fonctions usuelles ». Ce manuel présente, en outre, les traits suivants :

- * il n'y a qu'une situation dont l'énoncé porte un titre, soit 3% de l'ensemble
- * près de la moitié des situations ne sont pas d'origine mathématique 44%, cette proportion se retrouve à propos de la nature de la variable indépendante, elle ne relève pas du continu géométrique dans 44% des cas
- * les énoncés des problèmes sont, le plus souvent, formés d'un texte accompagné d'au moins un dessin (17 sur 21) ; ceux des exercices sont plus « pauvres »
- * les problèmes de partage sont peu nombreux 13%
- * le recours à une représentation graphique est important, 91%, au tableau de valeurs rare, 6%, à une formule algébrique régulier, 94%
- * le nombre moyen de variables est de 3, c'est aussi le mode (17 sur 32).

Considérons d'abord les situations fonctionnelles qui ne se trouvent pas dans un chapitre « fonctions » ; elles sont au nombre de cinq, représentant environ 16% de l'ensemble. Dans quatre cas sur cinq il y a : retour sur le phénomène initial, une origine géométrique, trois variables et un dessin avec le texte de l'énoncé. 1 situation n'a pas de thème et fait appel à deux registres (tableau+graphique) ; 3 ont pour thème l'étude des variations d'une fonction dont 2 avec un seul registre (formule) et 1 avec deux registres (formule+graphique) ; 1 combine deux thèmes, extremum+partage, avec deux registres (formule+graphique). Elles n'ont donc pas de thème d'étude privilégié, et, si le recours à une formule algébrique est important, il l'est autant que dans les autres situations de l'ouvrage.

Examinons les deux chapitres « fonctions ».

- * Chapitre « fonctions : lectures graphiques »

Il y a 4 situations sans thème à deux registres (3 formule+graphique et 1 tableau+graphique).
Il y a 1 situation à un thème, extremum, à deux registres (formule+graphique).

Ces cinq situations se situent sous la rubrique problèmes, quatre d'entre elles prennent leur source en géométrie et il y a retour sur le phénomène initial dans trois des cas.

Le registre graphique, omniprésent dans ce chapitre, est toujours associé à l'un des deux autres, le registre des écritures algébriques étant le plus fréquent (4 sur 5).

La plupart des problèmes n'ont pas de thème d'étude, l'objectif en est de représenter une fonction décrivant un phénomène qui prend sa source dans du « connu » géométrique. Cette absence de thème d'étude implique une exploitation assez réduite du registre graphique alors qu'il s'agit de l'objectif annoncé du chapitre.

- * Chapitre « fonctions usuelles »

Il y a 10 situations sans thème dont : 1 à un registre (formule) et 9 à deux registres (formule+graphique).

Il y a 9 situations à un thème, 4 extrema à deux registres (formule+graphique), 2 partages à deux registres (formule+graphique) et 3 variations à deux registres (formule+graphique).

Il y a 3 situations à deux thèmes, 2 extrema+variations à deux registres (formule+graphique) et 1 partage+variations à deux registres (formule+graphique).

Dans tous les problèmes figurant dans ce chapitre, l'énoncé propose un retour sur le phénomène initial. Les situations sans thème d'étude représentent la moitié du contingent et dans plus de 50% des cas, l'origine n'est pas mathématique. C'est essentiellement ce chapitre qui contribue à cette particularité du manuel. Mis à part un cas où l'outillage est réduit à une formule algébrique, l'énoncé propose toujours une combinaison des deux registres formule algébrique et représentation graphique.

La proportion des situations sans thème est de 52%. Le tableau de valeurs n'est exploité qu'une fois, et en étant associé à une représentation graphique ; l'association formule+graphique est presque systématique (25 sur 27).

En termes de retour sur la situation initiale, il n'y a pas de profil perceptible mais on peut remarquer des similitudes en nombre de variables ou absence de thème, entre les situations proposées sous la rubrique problèmes du premier chapitre et celles figurant en exercices dans le second. La distinction tient à un appauvrissement de l'énoncé et à une plus large place de la réalité dans le choix de l'origine des situations.

On peut ainsi isoler un point de vue des auteurs de cet ouvrage à propos de l'usage des situations fonctionnelles : le but est la description de phénomènes comportant peu de variables et extraits de la réalité à l'aide d'une fonction, ceci en privilégiant l'usage de deux registres de représentation.

• Dimathème

Les particularités les plus marquantes de cet ouvrage sont :

- * la majorité des situations fonctionnelles ne sont pas d'origine mathématique 54,5%
- * la proportion d'énoncés comportant au moins un dessin est importante 73%
- * le thème du partage est privilégié 64% au détriment des deux autres (extrema 14% et variations 9%)
- * le retour sur la situation initiale est fréquent, 82%, ainsi que la présence d'un titre 59%
- * le faible recours à une formule algébrique, 68%, et l'usage important d'une représentation graphique 91%
- * le nombre moyen de variables est élevé 3,8 ; il l'est pour la grande majorité des chapitres
- * il y a une situation « ouverte ».

Étudions d'abord cette situation dans laquelle l'énoncé laisse l'initiative à l'élève. Elle figure sous la rubrique problèmes du chapitre intitulé « vers la notion de fonction », l'énoncé qui se présente sous la forme d'un texte accompagné d'un dessin, porte un titre et propose un retour sur le phénomène à étudier. L'origine de cette situation est géométrique, le thème combine recherche d'extremum et étude de variations. Elle comporte trois variables. Comme nous l'avons déjà fait pour un autre manuel, nous ne tiendrons plus compte de cette situation dans la suite de l'analyse de l'ouvrage.

* Chapitre « vers la notion de fonction »

Il y a 2 situations sans thème dont : 1 à un registre (graphique) et 1 à trois registres.

Il y a 5 situations à un thème, 1 extremum à deux registres (tableau+graphique) et 4 partages à deux registres (formule+graphique).

Il y a 1 situation à deux thèmes, partage+variations à un registre (graphique).

La plupart des situations sont d'origine géométrique (6 sur 8) et les énoncés associent texte et dessin (7 sur 8). Trois des huit situations ne supposent pas le recours à une formule algébrique mais toutes proposent l'utilisation d'une représentation graphique.

Dans ce chapitre, il s'agit de se baser sur le « connu » géométrique pour introduire la notion de fonction à l'aide de situations riches en termes de thème d'étude, de registres sémiotiques de représentation et de retour sur la problématique de départ.

* Chapitre « fonctions affines »

Il y a 2 situations sans thème à deux registres (formule+graphique).

Il y a 7 situations à un thème, le partage, dont : 3 à un registre (1 formule et 2 graphiques) et 4 à deux registres (formule+graphique).

Les faits marquants sont : l'unicité du thème du partage dans les situations qui en comportent un, le retour sur le problème initial dans 90% des cas, la prédominance de l'association formule+graphique (6 sur 9) et l'origine des situations qui est, pour l'essentiel, la réalité (7 sur 9). La plus grande partie des situations fonctionnelles contenues dans ce chapitre le sont sous la rubrique problèmes (7 sur 9).

- * Chapitre « fonctions classiques »

Il y a 1 situation sans thème à trois registres.

Il y a 2 situations à un thème, 1 extremum à deux registres (formule+graphique) et 1 partage à deux registres (formule+graphique).

- * Chapitre « fonctions trigonométriques »

Il y a 1 situation à un thème, le partage, à deux registres (tableau+graphique).

La proportion des situations sans thème est d'environ 24% ; il n'y a qu'un énoncé proposant l'étude de plusieurs thèmes, c'est celui de la situation qui contient une étude des variations d'une fonction. Les situations dans lesquelles n'intervient qu'un registre de représentation sont au nombre de cinq, soit 24%. Pour quatre d'entre elles il s'agit d'une représentation graphique et pour la cinquième d'une formule algébrique. Lorsque deux registres sont proposés, il s'agit souvent du couple formule+graphique (12 sur 21), soit 57% de l'ensemble mais 75% de ces situations.

Le faible nombre de situations fonctionnelles figurant dans le chapitre « fonctions classiques » met en lumière l'utilisation de ces situations par les auteurs de ce manuel. Ils y ont recours, soit pour introduire la notion de fonction, soit pour étendre le domaine d'utilisation des fonctions connues palliant ainsi à l'obsolescence de la notion.

Analyse par place dans le chapitre

L'objectif de cette partie est de rechercher, par delà les particularismes des ouvrages et donc des représentations des auteurs de ces manuels, des invariants propres à la position d'une situation fonctionnelle dans un chapitre. Nous avons pour cela, regroupé l'ensemble des situations recensées par catégories. Dans cette analyse, nous ne prenons pas en considération les situations « ouvertes ».

- **Activités**

Au nombre de 12, elles représentent 7% de l'ensemble. Leurs caractéristiques les plus flagrantes sont :

- * la variété dans l'origine de la situation, 50% de non mathématique ; cette variété ne se retrouve pas dans la nature de la variable indépendante qui réfère, pour 2/3, au continu géométrique
- * la présentation de l'énoncé qui, le plus souvent, combine texte et dessin (10 sur 12), soit 83%
- * le nombre moyen de variables modéré, 2,6 ; nombre égal à 2 ou 3
- * des retours sur la situation initiale peu fréquents (5 sur 12), soit 42%
- * le recours systématique à une formule algébrique, les autres registres intervenant pour 1/3 dans le cas du tableau de valeurs et 2/3 dans celui d'une représentation graphique
- * le nombre important de situations sans thème (7 sur 12), soit 58%.

Examinons plus précisément les liens entre thème et outillage :

Il y a 7 situations sans thème dont : 4 à un registre (formule), 2 à deux registres (formule+graphique) et 1 à trois registres.

Il y a 5 situations à un thème, 2 extrema à trois registres et 3 partages dont 2 à deux registres (formule+graphique) et 1 à trois registres.

Ainsi, les situations faisant intervenir : un seul registre, et c'est alors une formule algébrique ; deux registres, et il s'agit de l'association formule+graphique ou trois registres, représentent, pour chaque cas, 1/3 du total. Les problèmes de partage sont toujours associés à la présence d'une représentation graphique. Autre fait remarquable, lorsque la situation possède un thème d'étude, il y a retour sur le phénomène initial. Par contre, il n'existe pas de relation entre une origine non mathématique et un retour sur le problème de départ.

On note donc la richesse en termes de registres de représentation des activités dont l'étude porte sur un thème donné. On remarque enfin qu'il n'y a pas de situations fonctionnelles amenant à l'étude des variations d'une fonction sous la rubrique activités.

- **Corrigés**

Ils ne proviennent que de deux ouvrages, ce qui limite leur nombre et la portée des remarques que nous pourrions formuler. Leurs particularités sont les suivantes :

- * un nombre moyen de variables proche de celui des activités 2,7 ; nombre égal à 2 ou 3
- * l'origine des situations est essentiellement géométrique (4 sur 5)
- * la plupart des énoncés comportent un dessin (4 sur 5)
- * les retours sur le phénomène de départ sont à peine majoritaires (3 sur 5).

Plus précisément, ils se composent de :

- 1 situation sans thème à deux registres (tableau+graphique).
- 3 situations à un thème, le partage, à deux registres (formule+graphique).
- 1 situation à deux thèmes, partage+variations, à deux registres (formule+graphique).

La combinaison des deux registres formule+graphique est omniprésente (4 sur 5) et on ne trouve jamais de registre isolé. Il n'y a pas de problème d'extremum, le thème principal de ces corrigés étant celui du partage (4 sur 5). Ce thème est, dans les cinq situations, relié à la construction de la représentation graphique d'une fonction. La présence d'un thème d'étude n'entraîne pas forcément un retour sur le phénomène de départ, mais celle de deux thèmes oui.

- **Travaux pratiques**

Ils constituent 10% de l'ensemble des situations fonctionnelles.

- * L'origine des situations proposées sous cette rubrique est variée, 6 sur 17 sont de source non mathématique.
- * Le nombre moyen de variables est plus élevé que dans les sections précédentes 3,4.
- * les retours sur le phénomène initial et les titres donnés aux énoncés sont très présents, respectivement 88% et 94%.
- * les dessins accompagnant le texte de l'énoncé sont plus rares mais demeurent nombreux 65%.

En considérant les thèmes des situations et l'outillage proposé par l'énoncé, nous obtenons les résultats qui suivent.

- Il y a 2 situations sans thème à deux registres (1 formule+tableau et 1 tableau+graphique).
- Il y a 10 situations à un thème, 5 extrema dont 3 à un registre (formule) et 2 à deux registres (1 formule+graphique et 1 tableau+graphique) et 5 partages à deux registres (formule+graphique).
- Il y a 5 situations à deux thèmes, 1 extremum+partage à deux registres (formule+graphique), 2 extrema+variations dont 1 à deux registres (formule+graphique) et 1 à trois registres et 2 partage+variations dont 1 à deux registres (formule+graphique) et 1 à trois registres.

La proportion des situations sans thème est donc assez faible, de l'ordre de 12%. Les situations ne nécessitant qu'un registre, une formule algébrique, sont peu nombreuses, 3 soit environ 18% tout comme celles exploitant les trois registres, 2 soit 12%. La plupart des tâches proposées sous la rubrique travaux pratiques utilisent donc une combinaison de deux registres de représentation : dans 82% de ces énoncés, il s'agit de l'association formule+graphique, les 18% restants se partagent équitablement entre les deux autres combinaisons. Les thèmes exploités dans cette section sont : pour 47% des situations, une recherche d'extremum, dans la même proportion, l'élaboration d'un partage et dans 24% des tâches, l'étude des variations d'une fonction.

On peut donc en conclure que, d'une part, la plupart des situations possèdent un thème d'étude et que, d'autre part, ce thème varie raisonnablement.

Nous constatons de nouveau la présence simultanée du thème du partage et de la construction de la représentation graphique d'une fonction. De plus, dans la presque totalité des situations possédant un thème d'étude, il y a retour sur le phénomène de départ, 13 sur 14 soit 93%. Lorsque l'étude d'une situation porte sur deux thèmes, il y a toujours retour sur le phénomène initial.

Cette rubrique contient donc des situations fonctionnelles riches à la fois en termes de thèmes d'étude, de registres de représentation et de retour sur le problème initial.

• Exercices

Ils rassemblent 25% des situations fonctionnelles et leurs principales propriétés sont :

- * l'origine des situations, constituée pour 50% de problèmes prenant leur source en dehors des mathématiques ; cette répartition se répercutant sur celle de la nature de la variable indépendante
- * la faible part des énoncés comportant au moins un dessin 29%
- * le nombre moyen de variables est de 2,9 le mode étant 3 avec un effectif de 24 sur 42
- * un très faible recours au tableau de valeurs d'une fonction 10%
- * la proportion assez faible des situations dans lesquelles il y a retour sur le phénomène initial, 55% et le petit nombre d'énoncés portant un titre, 36%.

En regardant de plus près, nous constatons que :

Il y a 18 situations sans thème dont : 7 à un registre (4 formules et 3 graphiques), 10 à deux registres (9 formule+graphique et 1 tableau+graphique) et 1 à trois registres.

Il y a 21 situations à un thème, 2 extrema à un registre (formule), 12 partages dont 1 à un registre (graphique), 10 à deux registres (formule+graphique) et 1 à trois registres et 7 variations dont, 2 à un registre (formule), 4 à deux registres (formule+graphique) et 1 à trois registres.

Il y a 3 situations à deux thèmes, 2 extrema+variations à un registre (formule) et 1 partage+variations à 2 registres (formule+graphique).

La proportion des situations sans thème d'étude est de 43%. On peut rapprocher ce résultat du faible nombre d'exercices proposant un retour sur le phénomène de départ. Parmi les situations sans thème, 14 sont sans retour soit 78%. Parmi les situations à un thème, s'il s'agit de la recherche d'un extremum il y a retour mais le faible nombre de ce type de situations, 2, fragilise cette constatation ; s'il s'agit de l'obtention d'un partage, il y a retour dans 10 cas sur 12, soit 83% et s'il s'agit de l'étude des variations d'une fonction, alors il n'y a retour sur la situation initiale que dans 4 cas sur 7, soit 57%. Enfin, lorsque l'étude de la situation porte sur deux thèmes, un retour sur le phénomène de départ est toujours proposé. Nous pouvons aussi remarquer l'absence d'implication entre une origine non mathématique et un retour potentiel, 9 cas sur 21 soit 43%.

L'utilisation des registres sémiotiques de représentation d'une fonction est distribuée ainsi : 14 situations à un registre (10 formules et 4 graphiques) soit 33%, 25 situations à deux registres (24 formule+graphique et 1 tableau+graphique) soit 60% et 3 situations à trois registres soit 7%. Le tableau de valeurs d'une fonction est très peu exploité, on y a recours dans environ 10% des exercices. D'autre part, les situations ayant pour thème d'étude le partage, comportent toujours la construction de la représentation graphique d'une fonction.

En conclusion, sous la rubrique exercices, nous trouvons un nombre important de situations fonctionnelles dont l'objectif est la manipulation des deux registres de représentation qui sont, une formule algébrique et une représentation graphique. Pour ces tâches, le système de départ, quelle que soit son origine, est un prétexte à l'introduction d'une fonction mais n'est pas l'objet de l'exercice. Cependant, lorsque l'étude de la fonction conduit à la recherche d'un extremum ou à l'obtention d'un partage, l'énoncé propose de confronter les résultats obtenus au phénomène initial. Il semble donc que ce ne soit pas l'origine du phénomène qui conditionne le retour sur la situation de départ mais la nature du thème d'étude ou l'association de deux thèmes d'étude.

• Problèmes

Sous cette rubrique, nous trouvons la majorité des situations fonctionnelles, 55%. Outre leur grand nombre, ces problèmes se particularisent par :

- * leur origine principalement géométrique, 70%, qui coïncide avec la présence d'au moins un dessin avec le texte de l'énoncé et la nature de la variable indépendante
- * le nombre moyen de variables est assez élevé, proche de celui des travaux pratiques 3,6
- * la proportion des énoncés portant un titre est plutôt faible, 36% alors que celle des retours sur le phénomène de départ est conséquente, 76%
- * la répartition des thèmes d'étude fait sensiblement part égale entre recherche d'extremum et élaboration d'un partage : 32% d'extrema, 36% de partages et 26% d'études de variations.

En analysant plus précisément ces situations, nous pouvons voir que :

Il y a 23 situations sans thème dont : 3 à un registre (2 formules et 1 graphique), 16 à deux registres (13 formule+graphique, 2 tableau+graphique et 1 formule+tableau) et 4 à trois registres. Il y a 52 situations à un thème, 14 extrema dont 2 à un registre (formule), 11 à deux registres (9 formule+graphique et 2 formule+tableau) et 1 à trois registres ; 27 partages dont 6 à un registre (4 formules et 2 graphiques), 20 à deux registres (19 formule+graphique et 1 tableau+graphique) et 1 à trois registres ; 11 variations dont 2 à un registre (formule) et 9 à deux registres (formule+graphique). Il y a 17 situations à deux thèmes, 4 extrema+partage dont 2 à deux registres (formule+graphique) et 2 à trois registres ; 11 extrema+variations dont 3 à un registre (formule), 7 à deux registres (formule+graphique) et 1 à trois registres ; 2 partage+variations à un registre (1 formule et 1 graphique).

La proportion des situations sans thème d'étude est de 25%. La recherche des relations entre la présence d'un ou de deux thèmes d'étude et le retour sur la situation initiale nous mène aux résultats suivants. Parmi les tâches sans thème d'étude, il y a retour dans 14 cas sur 23 soit 61%. Parmi les problèmes ne comportant qu'un thème d'étude, si celui-ci est la recherche d'un extremum, il y a retour dans 13 cas sur 14 soit 93% ; s'il s'agit d'une tâche de partage, il y a retour dans 23 cas sur 27 soit 85% ; s'il porte sur l'exploration des variations d'une fonction, il y a retour dans 4 cas sur 11 soit 36%. Parmi les énoncés comportant deux thèmes d'étude, 16 sur 17 proposent un retour sur le phénomène de départ soit 94%. Les liens entre origine du problème et retour sur la situation initiale sont contrastés puisque : si cette origine n'est pas mathématique, il y a retour dans 25 cas sur 28 soit 89%, mais si la situation prend sa source dans l'univers mathématique, alors il n'y a de retour que dans 42 cas sur 64 soit 66%.

L'exploitation des registres sémiotiques de représentation d'une fonction s'effectue ainsi : 18 situations ont recours à un unique registre (14 formules et 4 graphiques) soit 19,5% ; 65 problèmes combinent deux registres (59 formule+graphique, 3 formule+tableau et 3 tableau+graphique) soit 70,5% ; 9 énoncés proposent l'utilisation des trois registres soit 10%. Remarquons l'usage plus régulier, dans cette section, du tableau de valeurs d'une fonction. Associé à l'un des autres registres ou aux deux, il figure dans 15 énoncés sur 92 soit 16%.

Le lien entre problème de partage et construction de la représentation graphique d'une fonction demeure fort, il existe dans 28 cas sur 33 soit 85%.

En conclusion, deux facteurs s'élèvent en obstacle à la proposition d'un retour sur la situation initiale par l'énoncé d'un problème : l'absence de thème d'étude et la présence isolée de l'étude des variations d'une fonction. On remarque aussi la combinaison fréquente de plusieurs registres de représentation pour l'étude des propriétés de la fonction. Rapprochant cette observation du fait que le nombre moyen de variables par problème et la proportion des situations possédant un thème d'étude sont élevés, nous pouvons affirmer, qu'en général, les situations fonctionnelles figurant sous la rubrique problèmes sont particulièrement riches.

Conclusion

Nous retrouvons dans les manuels étudiés la répartition des problèmes et des études de situations suggérées par les programmes. La distribution des situations fonctionnelles sous les différentes rubriques des chapitres répond aux fonctions dévolues à la résolution des problèmes : mise en place de contenus nouveaux pour les activités, familiarisation pour les exercices, complexification pour les problèmes. Cependant, l'un des objectifs est de développer la maîtrise de la notion de variable. L'absence ou la rareté des situations fonctionnelles laissant le choix des variables à l'élève peut compromettre cet objectif. En effet, avant de maîtriser la notion de variable, il peut être bénéfique de découvrir ces variables et d'en développer l'organisation en termes de dépendance.

Nous avons aussi constaté la multitude de formes que peut prendre une situation fonctionnelle et les nombreux usages qui peuvent lui être dévolus. Ces variations dépendent de différents paramètres et nous en avons isolé trois : le manuel, le chapitre, la place dans le chapitre.

Le premier joue sur la quantité des situations fonctionnelles proposées, leur origine, leur répartition ou la présence systématique ou non d'un retour sur la problématique initiale dans l'énoncé. Il révèle certaines conceptions des auteurs à propos de la notion de fonction et de l'aspect outil des concepts mathématiques.

Le second a une influence sur l'existence ou non d'un thème d'étude, la richesse et la nature des registres sémiotiques de représentation. Il met en lumière les différents statuts de la notion de fonction par ses spécificités par rapport aux autres chapitres.

Le dernier paramètre permet d'opérer des rapprochements ou des distinctions entre situations fonctionnelles en fonction de leur position dans un chapitre. On peut ainsi rapprocher les activités, corrigés et exercices d'un côté et les travaux pratiques et les problèmes de l'autre, en termes de nombre moyen de variables par situation. Les distinctions s'effectuent alors avec les autres variables de l'analyse, en termes de richesse de l'énoncé par exemple. De même la part ou la présence du tableau de valeurs d'une fonction parmi les registres sémiotiques de représentation utilisés permet de regrouper activités, travaux pratiques et problèmes et d'isoler les exercices.

Une grille de lecture des ouvrages prenant en compte la structure de l'énoncé, le nombre de questions consacrées à chaque partie de la situation, modélisation / étude de la fonction / nouvelles connaissances sur le système, et la longueur de ces questions permettrait certainement d'affiner et d'enrichir l'analyse des ouvrages. Nous pourrions alors peut-être en déduire des comportements possibles des élèves lors de la résolution de ce type de problèmes et proposer des hypothèses sur le statut de ces problèmes parmi les connaissances des élèves.

EXPERIMENTATIONS

Présentation des expériences

Suite à la lecture des programmes de mathématiques de la classe de seconde et à l'analyse de six manuels en usage dans cette classe, nous sommes parvenus à déceler un certain nombre de caractéristiques des situations fonctionnelles présentes dans ces ouvrages et à les mettre en rapport avec les recommandations du programme.

La motivation principale des expérimentations est, à partir d'observations effectuées lors de la résolution de problèmes fonctionnels par des élèves, de tenter d'établir des liens entre ces caractéristiques et le fonctionnement des élèves. Notre objectif est triple : éclairer l'influence de la modélisation par une fonction d'une situation qui ne relève pas de ce cadre sur le comportement des élèves, comprendre leurs attitudes face à la fonction résultante, analyser le fonctionnement du changement de registre. Au delà, nous nous intéressons à l'entrée dans le mode de pensée fonctionnel et à sa cohabitation avec les deux modes de pensée dominants du collège, les pensées arithmétique et algébrique.

Pour ce faire, nous avons organisé deux séances expérimentales, l'une portant sur une situation fonctionnelle d'origine mathématique et extraite intégralement d'un ouvrage, l'autre centrée sur la résolution d'un problème fonctionnel d'origine non mathématique, extrait d'un manuel mais dont l'énoncé a été modifié. La première tâche proposée aux élèves repose sur des questions enchaînées et la seconde sur une question plus globale.

Nos observations ont eu lieu dans une classe de seconde de 32 élèves assez contrastée. Elle était composée de 25% de redoublants. Tous les élèves pratiquaient l'allemand en première langue vivante et l'anglais en seconde. Vingt d'entre eux étudiaient le latin ou le grec, cinq l'italien en troisième langue vivante et dix sept les sciences économiques et sociales. Lors du conseil de classe du troisième trimestre, 11 élèves se sont orientés vers une première S, 3 vers une première ES, 3 vers une première L, 3 vers une première GC et 2 vers une première STT. Nous avons proposé 7 redoublements et 1 réorientation en BEP.

Ces élèves ont pris l'habitude de travailler en petits groupes, que ce soit en séance de module ou de travaux dirigés. Ils ont régulièrement cherché des problèmes « assez ouverts » en classe ou à la maison, comme préparation ou comme devoir à la maison.

L'apprentissage de la notion de fonction a débuté dès le mois de septembre et s'est poursuivi durant toute l'année. Il était, en partie, basé sur l'étude de situations fonctionnelles d'origine mathématique ou non mathématique. A l'époque où se situaient les expérimentations, les 07 et 14 mai 96, le cours sur les fonctions usuelles et leurs variations était terminé mais peu d'exercices avaient été faits sur l'étude des variations d'une fonction.

Nous avons été amené à effectuer certains choix méthodologiques.

Le premier était de faire travailler les élèves en petits groupes de quatre. Ses motivations relèvent de contraintes expérimentales et du contrat didactique. Lorsqu'ils travaillent en groupes, les élèves s'investissent dans le travail proposé, échangent des opinions ou confrontent leurs idées. Cela leur permet en général, de trouver des pistes de recherche ou d'en éliminer. Ainsi, nous pensons, par ce biais, obtenir des observations assez riches, reflétant à la fois, le travail personnel de l'élève et la progression collective. De plus, au cours de cette année scolaire, pour chaque tâche d'approfondissement ou de découverte, l'enseignant a organisé des groupes de travail.

Le second était de placer ces expériences en séances de module. La position, dans l'horaire hebdomadaire de la classe, de cette séance donnait la possibilité de cumuler deux heures de mathématiques consécutives. Elle a permis d'apporter la souplesse nécessaire à la constitution des groupes, les élèves ayant l'habitude d'être brassés lors des cycles de modules. La répartition de la classe a été faite en tenant compte de l'orientation probable, des caractéristiques personnelles connues des élèves, des amitiés et des méthodes de travail. En particulier, on a veillé à distribuer les élèves étiquetés « S » dans tous les groupes.

Le dernier choix portait sur les moyens d'observation. Nous avons mobilisé quatre collègues, professeurs de mathématiques, titulaires, en poste provisoire ou en remplacement dans l'établissement. Ils ont joué le rôle, nouveau pour eux, d'observateur. Chacun était muni de feuilles d'observation que nous avons

élaborées et était chargé de noter les événements se déroulant dans le groupe dont il avait la charge. Chaque assemblage de tables possédait un moyen d'enregistrement audio. Nous avons aussi collecté les comptes-rendus de chaque groupe ainsi que les brouillons de tous les élèves.

L'ensemble de ces conditions avait, auparavant, été exposé à la classe, de même que les raisons pour lesquelles nous les soumettions à celles-ci. Bien entendu nous n'avions exposé ni le but ni l'objet de l'expérience.

Les feuilles d'observation, dont nous fournissons en annexe 3 un exemplaire vierge ainsi que les notes d'un observateur, se découpent en lignes, la première permet de noter le temps de la séance, les quatre suivantes sont destinées à recevoir les actions de chaque élève, puis deux autres recueillent les propos de l'enseignant s'adressant au groupe ou à la classe. Certains observateurs auraient préféré prendre des notes en colonnes, une pour le temps et l'autre pour les observations. Le modèle que nous avons proposé permet de relater les échanges entre élèves tout en les situant dans le temps de la classe et dans celui de chaque élève. Cela n'aurait pas été possible avec une grille de type « colonne ».

Énoncé du problème carré

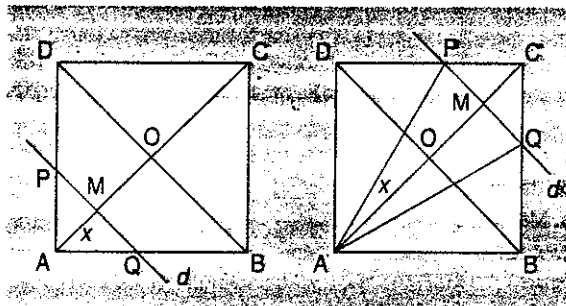
THÈME : Fonction $x \mapsto x^2$ et fonctions « voisines ».
Calculs d'aires. Lectures graphiques.

ABCD est un carré de centre O et de côté 2. M est un point quelconque du segment [AC], distinct de A et de C, et d est la parallèle à (BD) passant par M. [PQ] est le segment de la droite d contenu dans le carré ABCD.

Lorsque M est un point de [AO], P est sur [AD] et Q sur [AB].

Lorsque M est un point de [OC], P est sur [DC] et Q sur [BC].

On pose $x = AM$ et on note $f(x)$ l'aire du triangle APQ.



A. Calcul de $f(x)$.

1. Expliquez pourquoi la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; 2\sqrt{2}[$.
2. Montrez que si $x \in]0; \sqrt{2}[$, alors $f(x) = x^2$.
3. Montrez que si $x \in [\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[$, alors $f(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}x$.

B. Étude de la fonction f .

1. Montrez de deux façons différentes que la fonction f est strictement croissante sur $]0; \sqrt{2}[$:

- a) en utilisant l'expression de $f(x)$ et le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$;
- b) géométriquement, en utilisant le fait que $f(x)$ est l'aire du triangle APQ.

2. a. Montrez que si x appartient à l'intervalle $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[$, alors $f(x) = -(x - \sqrt{2})^2 + 2$.

b. a et b sont deux réels quelconques de l'intervalle $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[$ tels que $a < b$.

Complétez avec l'un des signes " $<$ " ou " $>$ " :

$$a - \sqrt{2} \square b - \sqrt{2}; \quad (a - \sqrt{2})^2 \square (b - \sqrt{2})^2;$$

$$-(a - \sqrt{2})^2 + 2 \square -(b - \sqrt{2})^2 + 2.$$

c. Déduez de ce qui précède que f est strictement décroissante sur $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[$.

d. Tracez la courbe $\mathcal{C}$ représentant f sur l'intervalle $]0; 2\sqrt{2}[$.

INDICATION : Tracer la portion de $\mathcal{C}$ représentant f sur $]0; \sqrt{2}[$, puis celle qui représente f sur $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[$.

C. Lectures graphiques.

1. a. En utilisant le graphique, expliquez pourquoi la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $]0; 2\sqrt{2}[$.
- b. Pour quelle position du point M l'aire $f(x)$ est-elle la plus grande ?

2. a. Montrez qu'il existe deux positions, M_1 et M_2 de M sur [AC] pour lesquelles l'aire du triangle APQ est égale à 1.

b. Les points M_1 et M_2 sont de part et d'autre du point O. Pourquoi ?

c. Désignons par M_1 le point du segment [AO] et par M_2 le point du segment [OC].

En utilisant le graphique, expliquez pourquoi $OM_1 < OM_2$.

ANALYSE A PRIORI DU PROBLEME CARRE

Cette situation fonctionnelle est extraite de l'ouvrage « MATH 2^{de} » de la collection TRANSMATH chez Nathan, elle correspond au problème n°68 page 142.

Solution de l'exercice

A. Calcul de $f(x)$.

1. La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; 2\sqrt{2}[$, car, ABCD étant un carré de côté 2, ses diagonales ont pour longueur $2\sqrt{2}$. D'autre part, M est un point du segment [AC] distinct de A et de C et comme $x=AM$, on en déduit que $x \in]0; 2\sqrt{2}[$.

2. $x \in]0; \sqrt{2}] \Leftrightarrow M \in [AO]$ privé de A. ABCD est un carré donc $OA=OB$ et AOB est un triangle isocèle en O d'où l'égalité des angles de base. De plus, d est parallèle à (BD) donc, par égalité angulaire, le triangle AMQ est isocèle en M et on en déduit $MQ=AM=x$.

Par un raisonnement similaire avec les triangles AOD et AMP, on obtient que $PM=AM=x$, et finalement $PQ=2x$.

D'autre part, le triangle AOB est rectangle en O car ABCD est un carré ; le triangle AMQ est donc lui aussi rectangle en M par parallélisme de d et (BD). On calcule alors l'aire du triangle PAQ, en prenant pour base PQ et pour hauteur AM et il vient :

$$f(x) = \frac{2x * x}{2} \Leftrightarrow f(x) = x^2$$

3. $x \in [\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[\Leftrightarrow M \in [OC]$ privé de C. En raisonnant dans le triangle PCQ comme on l'a fait dans PAQ mais avec $MC=2\sqrt{2}-x$ d'où $PQ=2(2\sqrt{2}-x)$; on calcule l'aire du triangle AQP en prenant PQ pour base et AM pour hauteur et il vient que :

$$f(x) = \frac{2(2\sqrt{2}-x) * x}{2} \Leftrightarrow f(x) = (2\sqrt{2}-x) * x \Leftrightarrow f(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}x$$

B. Etude de la fonction f .

1. Montrons que f est strictement croissante sur $]0; \sqrt{2}]$:

a. sur $]0; \sqrt{2}]$ la fonction carré est strictement croissante donc f aussi

b. lorsque M se déplace « strictement » vers O sur [AO], la hauteur du triangle PAQ augmente strictement, et donc la base aussi puisqu'elle en est le double et par conséquent l'aire augmente strictement aussi.

2.

a.

si $x \in [\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[$ alors $f(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}x$

$$\Leftrightarrow f(x) = -(x^2 - 2\sqrt{2}x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -[(x - \sqrt{2})^2 - 2]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -(x - \sqrt{2})^2 + 2$$

b. a et b étant deux réels de l'intervalle $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[$ tels que $a < b$, on a successivement :

$$\begin{aligned}
a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2} &\Rightarrow (a - \sqrt{2})^2 < (b - \sqrt{2})^2 \text{ car } a - \sqrt{2} > 0 \\
&\Rightarrow -(a - \sqrt{2})^2 > -(b - \sqrt{2})^2 \\
&\Rightarrow -(a - \sqrt{2})^2 + 2 > -(b - \sqrt{2})^2 + 2
\end{aligned}$$

c. On a établi au dessus que pour a et b dans l'intervalle $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$ c'est à dire que f est strictement décroissante sur cet intervalle.

d. Courbe représentative de f

C. Lectures graphiques.

1. Etant donné l'intitulé de cette partie, nous emploierons des formulations faisant référence à la courbe représentative de la fonction pour respecter le contrat « lectures graphiques ».

a. Quand x croît sur l'intervalle $]0; \sqrt{2}]$, la courbe monte et lorsque x croît sur l'intervalle $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[$, la courbe descend. La fonction f admet donc un maximum sur l'intervalle $]0; 2\sqrt{2}[$.

b. f atteint son maximum pour $x = \sqrt{2}$ soit $AM = \sqrt{2}$ et donc $M = O$.

2.

a. On trace sur le graphique la droite d'équation $y=1$ et on constate qu'elle possède deux points d'intersection avec la courbe représentative de f. On en déduit qu'il existe deux positions du point M sur [AC] pour lesquelles l'aire du triangle APQ est égale à 1.

On peut aussi raisonner sur les valeurs de l'aire du triangle, celle-ci croît de 0 non compris à 2 puis décroît de 2 à 0 non compris. Elle prend donc deux fois la valeur 1. La continuité de la fonction est supposée, mais la question ne se pose pas en classe de seconde.

b. Les points M_1 et M_2 sont de part et d'autre du point O car, en considérant les abscisses des points d'intersection des deux courbes, on constate qu'elles sont de part et d'autre de $\sqrt{2} = AO$.

En poursuivant le raisonnement de la question précédente, étant donné que la valeur 1 est de part et d'autre de 2 et que 2 est atteinte lorsque M est en O, on en déduit que les points M_1 et M_2 sont de part et d'autre de O.

c. En considérant les abscisses des points sur le graphique, et en les identifiant respectivement à A, M_1 , O et M_2 , on obtient $OM_1 = \sqrt{2} - 1$ et $OM_2 = 1$; par conséquent, $OM_1 < OM_2$.

Analyse de l'énoncé

Le texte de l'énoncé place le problème dans le cadre géométrique. L'expression « *M est un point quelconque du segment [AC], distinct de A et de C [...]* » ne signifie pas, dans ce cadre, que M est un point variable de ce segment, elle exprime simplement le fait qu'il ne s'agit pas d'un point particulier, et notamment de O. Ce fait peut être renforcé par les deux dessins qui accompagnent le texte.

Le thème général du problème n'est pas écrit. Nous supposons que ce problème porte sur l'étude des valeurs de l'aire du triangle APQ en fonction de la position du point M sur le segment [AC].

L'introduction des notations « x » et « f(x) » compense en partie cette absence, mais seulement en partie car elle suppose que la notion de fonction est maîtrisée par l'ensemble des élèves. Il n'est pas exclu que certains abordent ce problème dans le mode de pensée algébrique.

Celui-ci peut constituer un obstacle à la résolution de la partie A. En effet, si « x » est considéré comme une inconnue, on ne connaît pas précisément la position de M car c'est un point quelconque, alors, il n'y a pas de raison de chercher à exprimer les grandeurs pertinentes en fonction de x. Il est tout de même possible de répondre à la première question de cette partie puisqu'il suffit, pour cela, de considérer le carré, d'appliquer le théorème de Pythagore puis d'exclure deux points particuliers.

Par contre, en traitant cette partie dans le mode de pensée fonctionnel, la deuxième question ne doit pas présenter de difficultés majeures. Il est cependant nécessaire que l'élève associe la partition de l'intervalle de définition de la fonction à la dichotomie des dessins de l'énoncé.

La troisième question posera plus de problèmes. Elle exige, dans le triangle CPQ, un raisonnement du même type que celui mené dans le triangle APQ lors de la question précédente, en ne cherchant que l'élément pertinent, soit la longueur PQ en fonction de x . Ensuite, le calcul algébrique est court mais peut se compliquer si l'on ne simplifie pas l'expression avant de développer.

Nous remarquons donc que malgré la courte longueur de son énoncé, cette partie recèle des difficultés importantes qui peuvent se révéler des obstacles malaisément surmontables lorsqu'on aborde ce problème dans le mode de pensée algébrique.

La partie B porte sur l'étude de la fonction. C'est la seule qui comporte une indication et elle concerne la dernière question. La première question est assez simple mais il est intéressant de noter que, pour la première fois, il est fait référence aux variations de l'aire du triangle. Cet aspect géométrique peut être difficile à gérer car il y a trois variables dans le triangle APQ : la hauteur, la base et l'aire du triangle ; c'est dans l'organisation de ces variables, variable indépendante, variables dépendantes secondaire et principale, que réside la solution de la question.

La deuxième question est un « classique » de la classe de seconde : mise sous forme canonique de l'expression algébrique et détermination du sens de variation de la fonction sur l'intervalle considéré. Signalons toutefois qu'il manque une inégalité « à trou » dans le b), en effet, la composition des fonctions n'est pas au programme de mathématique de la classe. Le tracé de la courbe représentative de la fonction s'obtient en recollant deux morceaux de paraboles.

La partie C s'intitule lectures graphiques et, effectivement, la première question propose d'expliquer graphiquement l'existence d'un maximum pour la fonction puis de déterminer la position du point M correspondante. Cette question n'est pas compliquée mais elle nous amène à nous interroger sur la pertinence de la partie précédente. En effet, d'une part les expressions algébriques de f sont celles de fonctions usuelles dont on « connaît » les variations et, d'autre part, si la démonstration proposée dans la partie B rassure l'enseignant quant à la rigueur de la lecture graphique, qu'en est-il de l'élève ? On peut légitimement se demander ce qu'il serait advenu si cette question d'aire maximum avait été posée au début de l'exercice et sans suggérer l'introduction d'une fonction.

On peut d'ailleurs répondre aux deux premières sections de la deuxième question en suivant un raisonnement essentiellement géométrique et numérique. Le texte de ces questions ne permet pas de savoir si c'était la réponse attendue. Par contre, on ne peut démontrer l'inégalité $OM_1 < OM_2$ en se cantonnant au cadre géométrique et l'utilisation du graphique est une façon élégante de le faire. En répondant à cette question, les élèves doivent achever, si cela n'a pas déjà été effectué, la conversion du registre figuratif de la géométrie au registre de la représentation graphique d'une fonction en identifiant les positions des points et le segment [AC] privé des points A et C du premier avec la portion $]0; 2\sqrt{2}[$ de l'axe des abscisses du second.

Conclusion

Des exercices de ce type avaient déjà été résolus en classe mais sans étude de variations. Les élèves avaient aussi rencontré des fonctions, affines ou non, définies par intervalles.

La seule considération de la taille des questions posées dans l'énoncé de ce problème pose un certain nombre d'interrogations. La première concerne la faible part accordée au travail de modélisation. En particulier, il n'est jamais question de chercher ce qui varie mais seulement de savoir comment cela varie. Cette partie du travail est donc à la seule charge de l'élève. La seconde interrogation porte sur l'adaptation de l'outil fonction à la recherche d'une aire maximum et des triangles d'aire égale à l'unité. On peut démontrer que l'aire est maximale pour M confondu avec O en comparant l'aire du triangle ABQ à celle du trapèze rectangle OBQM lorsque M appartient au segment [OC]. Cette démonstration n'est pas simple mais elle prend appui sur le cadre géométrique et, de par sa difficulté, justifie la recherche d'une expression de la variable aire en fonction de la variable position de M. La détermination et la comparaison de OM_1 et OM_2 sont très abordables à partir du cadre géométrique. Par contre, la question de savoir si le résultat obtenu reste valable quelle que soit la valeur de l'aire dans l'intervalle $]0; 2]$ mène à l'introduction d'une ou plusieurs fonctions qui se révèlent plus ou moins bien adaptées à sa résolution. Il en est de même de la recherche d'une démonstration géométrique des variations de l'aire sur l'intervalle

$[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[$. Ainsi, la fonction f est un outil adapté au problème puisqu'elle permet de répondre à l'ensemble des questions sans chercher une autre modélisation. Mais, pour chaque thème considéré individuellement, la réponse est moins évidente. De plus, cette adaptation est claire pour l'enseignant car il a conscience de l'ensemble des questions qui se posent à propos de la situation géométrique initiale mais, l'est-elle aussi pour un élève découvrant le phénomène ?

Ces remarques nous conduisent à notre troisième interrogation qui touche au véritable objet de ce problème. Le nombre important des questions contenues dans la partie B et la présence de la seule indication de l'énoncé nous font penser qu'il s'agit de l'étude des variations d'une fonction assez complexe car définie par intervalles. Un autre argument en faveur de cette hypothèse est le non réinvestissement des résultats établis dans cette partie, comme nous l'avons fait remarquer précédemment. De plus, s'il ne manquait la construction du tableau de variations de la fonction, cette partie aurait la structure habituelle, dans les classes supérieures, d'une étude de fonction.

En conclusion, nous pouvons affirmer que ce problème relève de l'application plutôt que de la modélisation. Son objet, et cela même s'il y a retour sur la situation initiale, est l'étude d'une fonction et l'utilisation des résultats établis pour répondre à des questions à propos d'une situation géométrique.

PREMIERE EXPERIMENTATION

Le contexte

Cette expérience s'est déroulée le mardi 07 mai 1996. Elle concernait seize élèves de la classe répartie en quatre groupes de quatre. Il y avait cinq redoublants et les élèves se sont orientés de la manière suivante : 6 en première S, 2 en première ES, 1 en première L, 2 en première GC, 1 en première STT ; 3 se sont vus proposé un redoublement et 1 une réorientation vers un BEP. Elle a duré deux heures consécutivement sans pause, les élèves n'en ayant pas réclamé.

L'enregistrement n'a pas été parfait, seul celui d'un groupe a pu être exploité.

En annexe 4, nous proposons : des extraits des brouillons d'Anne et Muriel du groupe N°1, le compte-rendu du groupe N°2 et une partie du brouillon de Mickaël, un extrait du brouillon de Sébastien du groupe N°3, une partie du compte-rendu du groupe N°4 et du brouillon de Lauriane.

Nous présentons l'analyse de cette séance en deux parties : dans la première, nous faisons un bref récit du travail de chaque groupe, et, dans la seconde nous abordons des questions transversales au travers du fonctionnement d'un modèle de représentation des productions des élèves conforme à nos références théoriques.

Les extraits des brouillons, des comptes-rendus et des échanges verbaux permettent, d'abord d'accompagner le récit en illustrant les faits marquants, puis d'appuyer notre argumentation dans l'analyse des démarches des élèves.

Le cheminement de chaque groupe

Groupe N°1

Ces élèves ont passé la plus grande part de la séance à répondre aux questions de la partie A. Ils ont à peine abordé l'étude des variations de la fonction dans le premier des deux cas.

L'enregistrement de ce groupe, réalisé à l'aide d'un baladeur, est peu audible en raison d'un bruit de fond trop important, du en partie au vent qui soufflait ce jour-là.

La production de ce groupe est le résultat d'un travail collectif.

La détermination de l'intervalle et la justification de l'exclusion des bornes ont été traitées correctement. Le lien entre les points A, O et C et les valeurs 0, $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ est établi. Ils ont perçu la nature des triangles dans le premier cas.

Anne : « comment calcules-tu l'aire d'un triangle rectangle »

Muriel : « c'est un triangle rectangle isocèle »

[...]

Renaud : « PMA est-il isocèle ? »

Anne : « oui »

Ils recherchent ensuite l'aire d'un triangle rectangle ($AP \cdot AQ / 2$) et testent la formule sur des exemples numériques pour voir si elle coïncide avec celle de l'énoncé. Il y a un succès avec $x = \sqrt{2}$ et un échec avec $x = 1$.

Muriel : « tu ne peux pas calculer l'aire, tu n'as pas de valeurs »

[...]

Anne : « ah non, ça ne va pas avec 1, ça ne marche pas »

Et elle note sur son brouillon, à côté de la formule $AP \cdot AQ / 2$, « ça ne marche que pour les extrêmes ».

Le groupe se lance alors à la recherche d'autres pistes : géométriques avec des vecteurs, le théorème de Thalès, le théorème des milieux en plaçant M au milieu de [AO] ou algébrique en cherchant

$$x = \sqrt{\frac{AP * AQ}{2}}.$$

Au bout d'une heure, Anne trouve en changeant de base et de hauteur pour le calcul de l'aire et en montrant que $PQ = 2 AM$.

La résolution de la troisième question passe par une analogie entre APQ et CPQ.

Muriel : « CPQ et APQ, ce n'est pas la même chose ? »

Anne : « tu as un trapèze en plus »

Ils éliminent le trapèze...

Renaud : « Ce n'est pas le trapèze PQBD. Ce trapèze ne vous sert à rien. Maintenant tu ne peux te baser sur rien du tout. »

...et poursuivent l'analogie...

Muriel : « quelque chose comme $f(x) = \frac{AM * PQ}{2} = \frac{x * 2x}{2}$ »

Anne : « on n'a plus $PQ = 2x$ »

Muriel : « ah oui ».

Puis Anne obtient le résultat par $PQ = 2 CM$ et $CM = AC - x$.

La séance se termine par l'étude des variations de la fonction carré en utilisant deux valeurs numériques pour a et b.

Groupe N°2

Les élèves de ce groupe se sont donnés pour contrat d'avancer dans les questions de l'énoncé sans forcément détailler leurs réponses. Celui-ci n'a pas empêché la prise d'informations, par un membre du groupe, auprès des autres élèves. Le fait que l'enseignant récupère les brouillons individuels sur lesquels devaient figurer le nom de chacun semble avoir joué un rôle dans ce comportement.

Durant environ une heure, chaque membre du groupe s'est lancé dans une recherche individuelle sur son brouillon. A la suite d'interventions de l'enseignant réclamant la rédaction d'un compte-rendu, le travail est devenu plus collectif autour de cette rédaction à partir des résultats formulés sur leurs brouillons.

Pendant le travail individuel, les élèves progressent jusqu'à la fin de la partie B suivant deux modes de fonctionnement distincts. Dans un premier temps, ils utilisent, implicitement, le fait que $x = AM$ pour déterminer l'intervalle mais fournissent de mauvais arguments à propos de l'exclusion des bornes. Dans un second temps, ils prennent $AP = AQ = x$ pour déterminer la première formule.

La seconde formule est « justifiée » ainsi : (*brouillon de Sandrine*)

« on prend la longueur $2\sqrt{2}$ du triangle que l'on multiplie par x, donc on obtient $2\sqrt{2} x$. Mais on ne veut pas de l'intervalle $] 0 ; \sqrt{2}]$ donc on ôte x^2 et on obtient : $f(x) = 2\sqrt{2} x - x^2$ pour l'intervalle $[\sqrt{2} ; 2\sqrt{2} [$ ».

En abordant la rédaction du compte-rendu, ils s'aperçoivent qu'ils n'ont pas vraiment résolu la partie A. Ils reprennent $AM = x$ pour déterminer la première expression de $f(x)$ et considèrent séparément les deux triangles AMP et AMQ pour obtenir AP et AQ et calculer l'aire du triangle rectangle par la formule $AP * AQ / 2$.

Groupe N°3

L'enregistrement de ce groupe est en partie exploitable, notamment les échanges avec l'enseignant. Le reste du temps, les élèves chuchotaient, rendant l'écoute difficile voire impossible.

Le début de la séance, environ $\frac{3}{4}$ d'heure, a vu s'élaborer un travail à quatre qui s'est ensuite réduit à deux éléments, un troisième se chargeant de la rédaction du compte-rendu.

L'obtention de la longueur de la diagonale du carré s'est faite facilement mais la justification de l'exclusion des bornes est mauvaise. Il y a, en particulier, confusion entre les variables x longueur de [AM] et $f(x)$ aire du triangle APQ, et aussi des erreurs de calcul.

La première formule est justifiée par les propriétés démontrées des triangles AMP, AMQ et APQ et leur conséquence : $PQ = 2 AM$. Cependant, cette relation n'est pas écrite explicitement mais simplement utilisée comme pas d'un algorithme de calcul de l'aire du triangle APQ. La formule exploitée pour ce calcul est $AM \cdot PQ / 2$. La justification de la formule fournie par l'énoncé s'appuie sur la coïncidence des deux sur un exemple numérique générique. Ainsi Sébastien écrit sur son brouillon :

$$\text{« exemple si } x = 0,5 \text{ alors base} = 1 ; A = \frac{1 * 0,5}{2} = 0,25 ; x = 0,5^2 = 0,25 \text{ »}.$$

La stratégie générale, pour le deuxième cas, est identique mais ils n'utilisent pas de propriétés géométriques pour le triangle APQ. Ils recherchent la coïncidence des deux formules pour les bornes de l'intervalle : pour $x = \sqrt{2}$, en calculant $AB \cdot AD / 2$; pour $x = 2\sqrt{2}$ ils rencontrent un problème du à des erreurs de calcul puis à la valeur 0.

Arnaud : ça fait $(2\sqrt{2})^2$ (il a substitué dans la deuxième expression de l'énoncé)

Sébastien : tu barres ça et ça

[...]

Sébastien : $2 \cdot 2$ ça fait 4 [...] (il parle de AB et AD)

Arnaud : on fait pareil pour $2\sqrt{2}$

Sébastien : c'est plus compliqué

Arnaud : non c'est pas plus compliqué

[...]

Sébastien : j'ai trouvé 0 c'est pas logique [...] ça c'est x ; [...]

Arnaud : et en calculant l'aire, tu trouves combien ?

Sébastien : je sais pas ce qui faut mettre en tant que base

Arnaud : c'est ce que j'étais en train de faire

Sébastien : et qu'est-ce que tu mets comme base ?

Suite à une intervention de l'enseignant, ils corrigent leur stratégie puis obtiennent les deux expressions de l'énoncé. La séance s'achève sur ces résultats.

Groupe N°4

L'enregistrement de ce groupe est totalement inaudible, pour cause de matériel, magnétophone et micro, manquant de puissance.

Les élèves ont fourni un travail collectif durant toute la séance. Ils ont traité la seule partie A. La longueur de la diagonale du carré est obtenue facilement mais les justifications de l'exclusion des bornes de l'intervalle sont incomplètes. Par exemple, sur le brouillon d'Olivier :

« la droite (d) est contenue dans la carré ABCD. Par conséquent, elle ne peut dépasser la longueur $2\sqrt{2}$ de la diagonale »

ou sur celui de Nanou :

« (d) est contenue dans ABCD. La diagonale de ABCD = $2\sqrt{2}$. La fonction évolue sur un intervalle de 0 (A) à $2\sqrt{2}$ (AC) ».

Ils répondent à la deuxième question en comparant les résultats fournis dans le cas $x = \sqrt{2}$, d'un côté par l'expression de l'énoncé, de l'autre en calculant l'aire du triangle ABD par la formule $AB \cdot AD / 2$. Ils concluent en constatant l'égalité et écrivent sur le compte-rendu :

« donc si $x \in]0; \sqrt{2}]$ alors $f(x) = (\sqrt{2})^2 = 2$ ».

Pour la question suivante, ils recherchent d'abord des explications à la présence de $2\sqrt{2}x$ et de $-x^2$. Ils montrent que PQC est isocèle et obtiennent alors une explication géométrique au $-x^2$: c'est le triangle PQC que l'on retire en faisant une analogie avec le cas précédent. Finalement, ils parviennent à l'expression de l'énoncé en calculant $PM \cdot x$ avec $PM = MC = 2\sqrt{2} - x$. Le groupe est d'accord sur ce calcul, il est recopié sur le compte-rendu, mais Lauriane, qui a obtenu ce résultat, a aussi écrit sur son brouillon :

« $PQ = 2 MC$; $PQ = 2 (2\sqrt{2} - x)$; $AM = x$ ».

Le groupe termine la séance par la recherche, dans le cours, de la définition du sens de variation d'une fonction.

Questions transversales

Dans cette partie, nous proposons un modèle théorique permettant d'interpréter le fonctionnement des élèves au cours de la recherche de la solution du problème. Puis nous l'exploitons avec l'objectif de regrouper les différentes démarches dans des catégories intégrantes et explicatives. Ce modèle, inspiré des références théoriques exposées dans l'introduction, repose sur le découpage du champ mathématique en cadres, et sur le repérage de registres sémiotiques de représentation. Il intègre à la fois des changements de cadres et des conversions entre registres. D'autre part, il fonctionne sous l'influence d'un mode de pensée dominant qui oriente les conversions entre registres ainsi que les changements de cadres. Nous présentons d'abord notre modèle puis nous analysons les productions des élèves dans l'optique des modes de pensée.

Présentation du modèle

Nous nous limitons au travail des élèves sur les expressions algébriques de la fonction.

Nous n'avons représenté dans ce modèle (figure 1) que les cadres mathématiques et les registres sémiotiques de représentation qui jouent un rôle dans la résolution de l'exercice par les élèves. La distinction entre changement de cadre « explicatif » et changement de cadre « constructif » permet d'identifier un sens privilégié entre cadres géométrique et algébrique lors du passage de l'un à l'autre. Ainsi, un changement de cadre « explicatif » s'effectuera essentiellement du cadre algébrique vers le cadre géométrique à la recherche d'explications pour comprendre les expressions algébriques de l'énoncé ; le travail dans les cadres algébrique et géométrique est alors accompli dans ce but.

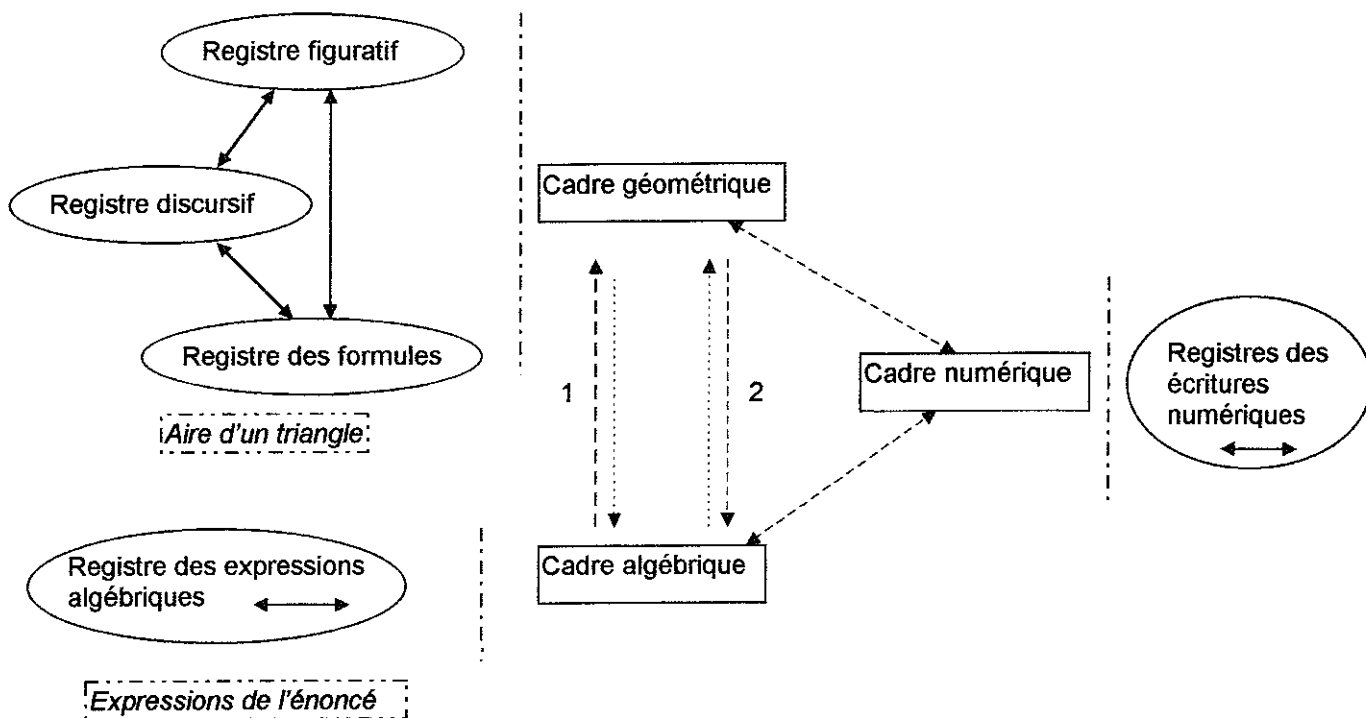


Figure 1: Les flèches en trait plein symbolisent les conversions entre registres sémiotiques de représentation. Les flèches en trait discontinu représentent les changements de cadres. Nous distinguons par les numérotations 1 et 2, un changement de cadre « explicatif » qui part de l'expression algébrique de l'énoncé et un changement de cadre « constructif » qui a pour objectif d'établir cette relation. Les traits non continus entre un cadre et des registres relient un cadre mathématique à certains registres utilisés pour représenter les objets de ce cadre.

Un mode de pensée arithmétique

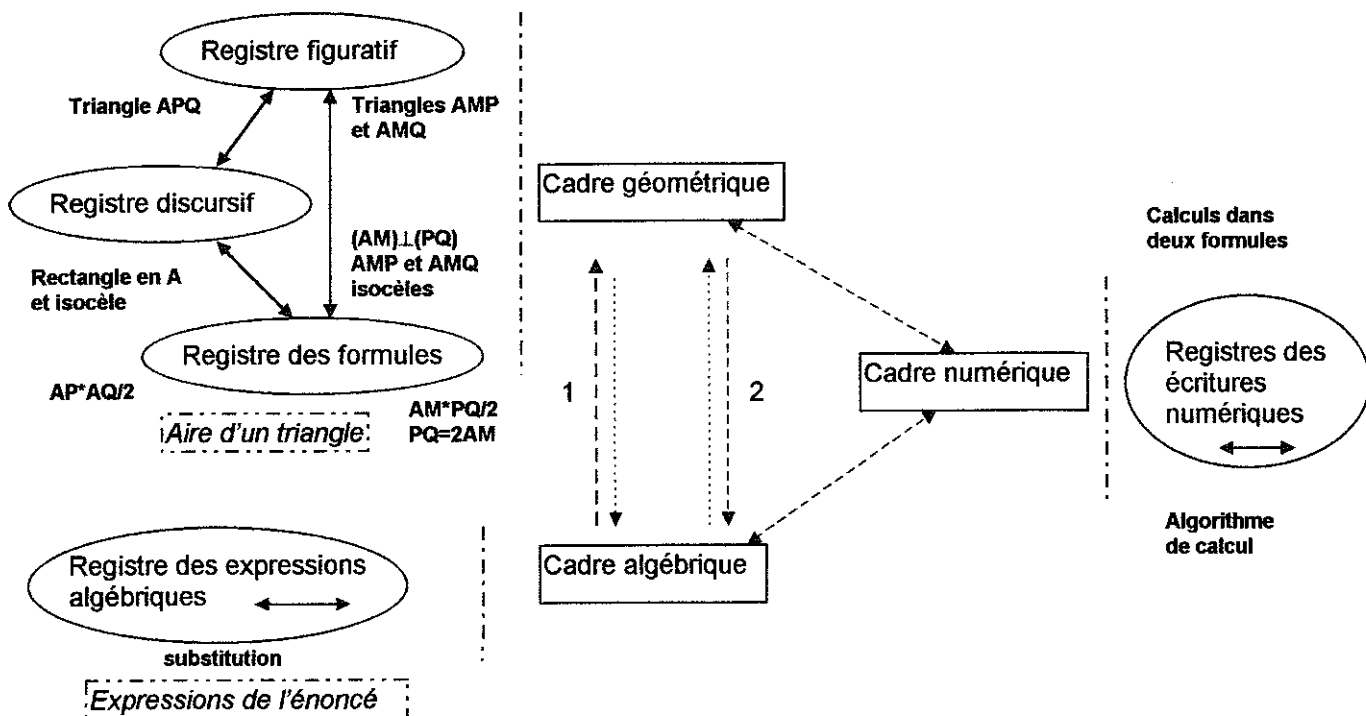


Figure 2 : Nous avons représenté en caractères gras les actions, formules et propriétés mises en œuvre par les élèves dans le mode de pensée arithmétique. La partie gauche du schéma se subdivise en deux sous-parties correspondant à deux fonctionnements dans le cadre géométrique

Nous avons identifié comme relevant d'un mode de pensée arithmétique, la stratégie consistant à démontrer la coïncidence entre la formule classique du calcul de l'aire d'un triangle et les expressions algébriques de l'aire de APQ fournies par l'énoncé à l'aide d'un ou plusieurs exemples numériques.

Cette stratégie apparaît sous trois comportements différents : soit les élèves établissent l'égalité sur un exemple numérique, soit ils construisent un algorithme de calcul, soit ils recherchent la coïncidence des formules pour les valeurs extrêmes de l'intervalle de définition. Nous considérerons que le premier comportement traduit un fonctionnement « explicatif » et que les deux autres relèvent d'un fonctionnement « constructif ». En effet, lorsque les élèves concluent à partir d'un seul exemple numérique, il s'agit d'un cas très particulier, M est confondu avec O, et il n'y a pas de lien clair entre ce cas et le cas général, notamment dans l'identification des variables. Pour les autres cas, le premier est nettement constructif, et le second, qui, par l'utilisation de deux valeurs numériques, marque un souci de généralité peut être vu comme intermédiaire, résultant d'un compromis.

Fonctionnement « explicatif »

Ce mode de fonctionnement est illustré sur la partie gauche de la figure 2 ; il s'exprime lors de la recherche de la première expression algébrique de la fonction. Il y a coexistence de deux formules et les rapports entre les deux ne sont établis que dans le cas particulier où M est confondu avec O. Ainsi, dans le compte-rendu du groupe 4, il est écrit :

$$ABD = \frac{AB * 2}{2} = \frac{2 * 2}{2} = 2 \text{ cm}^2 \text{ (Aire de ABD)}$$

$$2 * AO = AC ; 2 * \sqrt{2} = 2\sqrt{2} ; f(x) = x^2 ; \text{ si } x = \sqrt{2} \text{ } f(x) = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

On retrouve ce type de démarche sur les brouillons des élèves des groupes 1 et 2.

Fonctionnement « constructif »

Le premier des deux comportements associés à ce mode de fonctionnement conduit à la production d'un algorithme de calcul. Il se base sur d'autres propriétés géométriques du triangle APQ et sur une deuxième formule de l'aire de ce triangle. De plus, les élèves établissent que les triangles AMP et AMQ sont isocèles, ils peuvent en déduire l'algorithme de calcul général. Cette généralité est clairement établie sur le brouillon de Sébastien du groupe 3 :

$$\text{si } x \in] 0 ; \sqrt{2}] \rightarrow f(x) = x^2$$

$$\text{exemple si } x = 0,5 \text{ alors base} = 1 ; A = \frac{1 * 0,5}{2} = 0,25 ; x = 0,5^2 = 0,25.$$

La détermination des propriétés du triangle AMQ est décisive pour l'obtention de l'algorithme :

Sébastien : il est isocèle [...] 45° [...] on a trouvé le 2.

Le second comportement surgit, pour ce même groupe d'élèves, lors de la recherche de la seconde expression algébrique de la fonction. Ils ont établi la coïncidence des deux formules pour $x = \sqrt{2}$ et butent sur le calcul de l'aire lorsque $x = 2\sqrt{2}$. En effet, la substitution dans l'expression algébrique de la fonction donne 0 et ils ne savent pas quoi prendre comme base pour le triangle APQ.

Sébastien : zéro

Prof : pourquoi vous cherchez 0 ?

Arnaud : non, c'est ce qu'on a trouvé 0 !

Prof : vous avez trouvé 0 à quoi ?

Arnaud : quand $x = \sqrt{2}$

Prof : ça veut dire quoi ?

Arnaud : ça veut dire que $2\sqrt{2}$ c'est pas dedans, c'est marqué là

Prof : hé oui, il est où le point M quand $x = 2\sqrt{2}$?

Arnaud : il est là (*Arnaud désigne le point C sur la figure*)

Prof : vous êtes sûrs ?

Sébastien : oui puisque c'est égal à $\sqrt{8}$

Prof : et c'est quoi le triangle alors ?

Arnaud : il n'y a pas de triangle

Sébastien : ah oui !

Arnaud : ouais, c'est ce que je disais

Prof : ce que vous êtes en train de faire... ; est-ce que vous êtes en train de démontrer la formule ?

Arnaud : ben, si on prouve que c'est identique, c'est comme si on a démontré

Prof : tu aura démontré que c'est identique, pour quoi ?

Arnaud : parce que la formule elle marche

Prof : elle marche pour quoi la formule ?

Arnaud : je m'embrouille

Prof : elle marche pour $\sqrt{2}$

Sébastien : c'est pour ça qu'on essaie de prendre deux nombres

Prof : et deux nombres, ça suffira ?

Arnaud : non, mais si on prend le plus petit...

Sébastien : ...et le plus gros...

Arnaud : ben voilà

Prof : on peut mettre n'importe quoi entre les deux ; qu'est-ce qui me dit que au milieu, là, la formule elle marche encore ?

Sébastien : on essaye...

Arnaud : c'est la logique...c'est la logique que ça marche puisque ça, ça n'arrête pas de diminuer progressivement

Prof : ça pourrait diminuer autrement... ; ça pourrait diminuer avec une autre formule

Arnaud : heu là...

Cet échange avec l'enseignant permet d'exhiber le fait que l'algorithme de calcul n'est pas explicite pour ces élèves. En effet, la remarque de Sébastien : « on essaye... », s'appuie sur la certitude de pouvoir déterminer, pour chaque position de M, la base et la hauteur du triangle APQ. Mais la nécessité d'explicitier cet algorithme de calcul dans le registre des expressions algébriques n'apparaît pas. La question qui se pose alors est : qu'en serait-il si l'expression algébrique de la fonction n'était pas donnée ?

Un mode de pensée algébrique

Dans un mode de pensée algébrique, x est implicitement considéré comme une inconnue : on ne connaît pas la position de M. Comme le dit Muriel du groupe 1 :

« tu ne peux pas calculer l'aire, tu n'as pas de valeurs ».

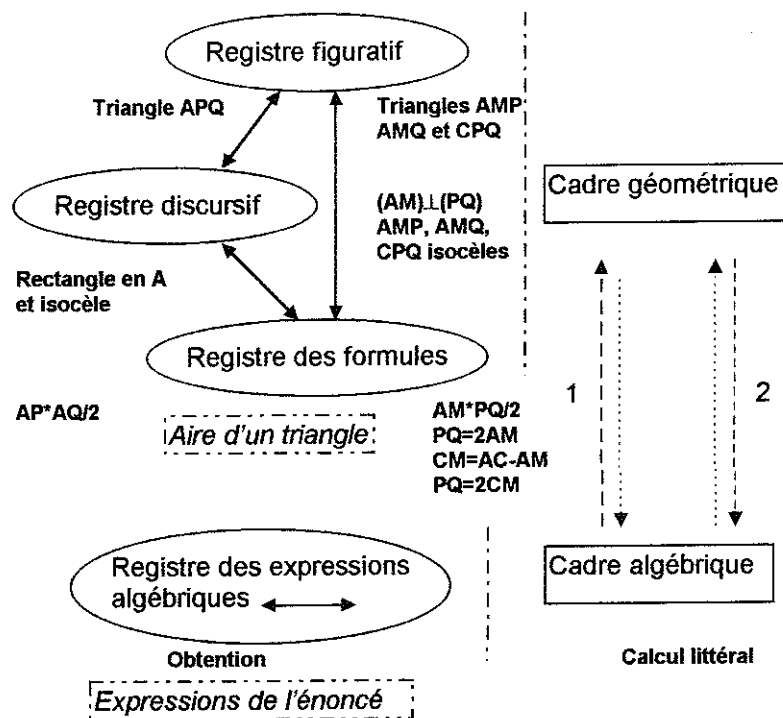


Figure 3 : Nous avons ajouté en caractères gras les propriétés géométriques, les formules et les actions des élèves fonctionnant dans le mode de pensée algébrique. La partie gauche du schéma est organisée de la même manière que celle de la figure 2.

Les élèves sont alors conduits à rechercher ce qu'ils peuvent connaître à partir de x . Ils effectuent des substitutions, comme lors de la résolution d'un système d'équations à plusieurs inconnues. De la même manière que pour le mode de pensée arithmétique, nous avons identifié deux fonctionnements, « explicatif » et « constructif », dans les comportements des élèves. Un fonctionnement « explicatif » s'appuie sur l'expression algébrique de la fonction fournie par l'énoncé et l'élève opère de façon à l'obtenir, alors qu'un fonctionnement « constructif » se base sur des considérations géométriques et, par un changement de cadre approprié, permet à l'élève d'aboutir à l'expression algébrique souhaitée. Notre modèle théorique se présente, sans le cadre numérique, sous la forme proposée dans la figure 3.

Fonctionnement « explicatif »

Le groupe 2 développe un tel comportement lors de la recherche de la première expression algébrique de la fonction. Dans un premier temps, les élèves considèrent que $AP = AQ = x$ et proposent sur leurs brouillons, par exemple Mickaël :

« sachant que les 2 coté AQ et AP sont égaux on en déduit que $x*x$; $f(x) = x^2$ ».

Celui de Sandrine est plus complexe puisqu'elle y note :

« $x = AM$ soit la hauteur du triangle puisque dans un carré les diagonales sont $\perp$ et $DB//PQ$; $f(x) = x^2$; $\frac{PA * AQ}{2} = (\sqrt{2})^2 = x^2$ (elle barre le $(\sqrt{2})^2$) ; $\sqrt{2} = AO$ donc $\Rightarrow$ les deux côtés du triangle étant égaux et < 2 alors $f(x) = x*x = x^2$ ».

Cela nous permet de mieux comprendre ce mode de fonctionnement. Sandrine recherche une expression algébrique, x est une quantité inconnue mais elle peut la déterminer dans un cas particulier, lorsque M est confondu avec O . Elle étend ensuite les propriétés de la figure géométrique, spécifiques de ce cas particulier, au cas général avec l'objectif d'obtenir la formule proposée par l'énoncé. Dans leur compte-rendu, les élèves exploitent le même genre de généralisation et appliquent le théorème de Pythagore dans le triangle AMP rectangle en M , pour déterminer AP . En effet, ils n'utilisent qu'une seule expression de la formule de l'aire du triangle APQ . Ils n'aboutissent pas pour cause d'erreurs dans le calcul littéral, erreurs provenant peut-être de « l'obsession » du x^2 .

Cette attitude est plus générale, prenant des formes différentes, lorsque les élèves recherchent la deuxième expression algébrique de la fonction. Considérons par exemple le groupe 4, ils ont déjà fonctionné de cette manière lors de la détermination de la première formule, et pour la seconde, développent un mode de fonctionnement « explicatif » encore plus explicite.

Dans un premier temps, ils constatent que le triangle PQC joue, dans la seconde configuration, le même rôle que le triangle APQ dans la première. Arnaud écrit sur son brouillon :

$$\text{« } CM = 2\sqrt{2} - x ; f(x) = PCQ = x^2 \text{ »,}$$

puis explique aux autres l'origine du $-x^2$: c'est le triangle PCQ que l'on retire. Cette explication est finalement rejetée par le groupe. Ils remarquent que le triangle PCQ est isocèle, déterminent MC , écrivent que $PQ = 2 MC$ mais obtiennent la formule de l'énoncé par le calcul de $MP \cdot x$.

Ainsi, la détermination des inconnues ne suffit pas à l'élaboration d'une démarche correcte lorsque les élèves fonctionnent de manière « explicative ».

On trouve le même type de comportement sur les brouillons des élèves du groupe 2, par exemple sur celui de Mélanie :

$$\begin{aligned} \text{« si } x \in [\sqrt{2} ; 2\sqrt{2}] ; x \in [AC] ; [AC] = 2\sqrt{2} ; \text{ donc } AC \cdot x = 2\sqrt{2} \cdot x = 2\sqrt{2}x ; x \text{ n'appartient pas à} \\ \text{l'intervalle }]0 ; \sqrt{2}[\text{ donc on soustrait : } 2\sqrt{2}x - x^2 ; \text{ donc si } x \in [\sqrt{2} ; 2\sqrt{2}] \\ f(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}x \text{ »}. \end{aligned}$$

Il n'y a pas d'arguments d'origine géométrique, le raisonnement porte uniquement sur des écritures algébriques et a pour objet la justification d'une formule.

Ce fonctionnement n'est pas étranger aux élèves des deux groupes qui sont parvenus correctement à la solution. On trouve sur le brouillon de Muriel du groupe 1 :

$$\text{« } \frac{PQ \cdot AM}{2} = \frac{2x \cdot (\sqrt{2} + x)}{2} = \frac{2\sqrt{2}x + 2x^2}{2} \text{ »,}$$

calculs qu'elle barre en entourant le signe $+$ de la dernière expression. De même, et pour achever ce paragraphe, nous citerons cette remarque d'Amaud du groupe 3, à propos de la même expression algébrique :

« le moins, il peut venir que l'aire se réduit ; ah non, c'est vrai, faut pas raisonner par rapport à cela ».

Fonctionnement « constructif »

On le trouve dans les productions des groupes 1 et 3, groupes qui ont abouti dans la résolution de la partie A. Dans le groupe 1, c'est Anne qui résout les questions deux et trois en une quinzaine de minutes après que le groupe ait épuisé un certain nombre de pistes. L'enregistrement de ce groupe étant inaudible, on ne peut analyser que la seule production écrite de cette élève et elle a noté sur son brouillon le même contenu que sur le compte-rendu. Il semble qu'elle ait cherché à déterminer PQ dans chacun des deux cas après avoir exclu la formule de calcul d'aire $AP \cdot AQ / 2$. Nous faisons l'hypothèse

que ce groupe a travaillé avec un mode de pensée algébrique dominant car, lorsqu'il aborde l'étude des variations de la fonction, il le fait par l'intermédiaire de valeurs numériques et ne trouve pas la démonstration géométrique.

Dans le cas du groupe 3, il fonctionne d'abord dans un mode de pensée arithmétique et c'est lorsque cette pratique échoue sur la deuxième expression algébrique de la fonction qu'il passe à un mode de pensée algébrique. Pour l'obtention de la première expression, les événements se déroulent assez rapidement :

Prof : ça pourrait diminuer autrement... ; ça pourrait diminuer avec une autre formule

Arnaud : heu là...

Prof : ce que l'on veut que vous démontriez, c'est que...vous trouviez la formule. C'est-à-dire : voilà, on prend M là, ça nous fait x, et à ce moment là l'aire du triangle est égale à cette formule là. On ne vous demande pas de remplacer x dans la formule et de vérifier que ça marche.

[...]

Arnaud : en fait, il faut passer de l'un à l'autre... ; depuis tout à l'heure on se cassait la tête à remplacer avec des nombres

[...]

Arnaud : ...ça on remplace par l'égalité qu'on a trouvé là, la base, puisqu'on a trouvé la base...(*il raisonne sur le premier triangle*)

Prof : après, vous vous arrangez ; déjà vous arrêtez de vérifier avec deux nombres

Arnaud : oh oui...

[...]

Sébastien : attends, qu'est-ce que tu fais là ? Tu remplaces par quoi b et h ?

Arnaud : ben, h tu le remplaces par x

Sébastien : oui, et pourquoi tu mets 2x ?

Arnaud : eh ben, puisqu'on a dit que...

Sébastien : oh oui !

La transition entre les deux modes de pensée, pour cette expression algébrique, est facilitée par l'existence d'un algorithme de calcul élaboré auparavant. Ils substituent à la valeur numérique générique la lettre x dans les pas de l'algorithme. La seconde formule est obtenue peu de temps après, environ 15 minutes plus tard :

Prof : est-ce que vous savez exactement ce que vous cherchez ?

Sébastien : non, chercher le rapport entre ça et ça ?

Arnaud : oui, mais...

Prof : tu connais un des deux...

Sébastien : aucun des deux

Prof : est-ce que vous avez décidé d'une méthode pour calculer l'aire du triangle APQ ?

Arnaud : Quand il est plus grand...

Prof : oui, quand il est au delà de O

[...]

Prof : Décidez d'une méthode, puis cherchez les éléments pour calculer avec cette méthode

Arnaud : Là, PQ faut...

Sébastien : ça, on peut le savoir...(*il désigne le segment [CM]*)

Arnaud : C'est $\sqrt{8} - x$

[...]

Arnaud : ça c'est $2*(\sqrt{8} - x)$, ah oui...ça on doit dire que $APQ = x*(\sqrt{8} - x) / 2$

Sébastien : non

Arnaud : si c'est ça

[...]

Sébastien : x^2 faut le diviser par 2 après

[...]

Sébastien : la base c'est...

Arnaud : c'est 2 fois.... ; là c'est la hauteur, tu fais comme pour le premier

Sébastien : la hauteur c'est...

Arnaud : ben, c'est x tout le temps

Ils identifient à nouveau la base et la hauteur et recherchent leurs expressions en fonction de x. Ils procèdent toujours par substitution.

Un mode de pensée fonctionnel ?

Lors de la résolution du problème avec un fonctionnement de ce type, l'utilisation du cadre géométrique est soumise à la contrainte de la détermination des variables dépendantes à partir de la variable indépendante. On recherche alors les propriétés des figures pertinentes par rapport à cet objectif. Le passage au registre algébrique se traduit par l'écriture des relations de dépendance, on est alors dans le registre des expressions algébriques du cadre fonctionnel, puis par la détermination de l'expression algébrique du lien fonctionnel existant entre la variable indépendante et la variable dépendante principale.

Nous avons isolé, dans les productions des élèves, trois indices pouvant indiquer l'existence d'une phase de transition vers un mode de pensée fonctionnel.

Le premier réside dans la perception, même vague, de variations. Celle-ci peut conduire à la recherche d'invariants dans les propriétés des figures géométriques. Par exemple, Olivier du groupe 4 écrit sur son brouillon :

« $PM = MC$ car PCM sera toujours isocèle »

et Sébastien du groupe 3, lors de la recherche de l'expression algébrique de la fonction dans le deuxième cas, se dit :

« moi j'ai ça égale ça... ; c'est pas bon, parce que ça change..., ça change tout le temps ; [...] faut trouver un autre truc ».

Ou encore, toujours le groupe 3, alors que le professeur les questionne sur la nature du triangle APQ :

Prof : comment avez-vous trouvé cela ?

Sébastien : on a démontré que ça faisait 90° , tout le temps, donc ça c'était 45° ..., là c'était forcément 90° , donc là c'était 45° et comme les deux angles à la base, ils sont égaux, c'est un triangle isocèle. Donc ça égale ça égale ça

Arnaud : donc ça + ça c'est égal à 2 fois ça

Sébastien : oui.

L'élément invariant, dans ces dialogues ou ces écrits, est le recours aux expressions « toujours » et « tout le temps » qui traduit, à notre sens, une perception globale des variations et sa prise en compte dans l'élaboration des raisonnements.

Le second indice se trouve dans l'isolement de la variable indépendante, même si elle n'a pas officiellement ce statut, et la subordination des autres variables à celle-ci. Nous pensons que c'est ce comportement qui a conduit Anne, du groupe 1, à échanger la formule, $AP \cdot AQ / 2$, du calcul de l'aire du triangle APQ par $PQ \cdot AM / 2$ et à rechercher, dans chacun des deux cas, l'expression de PQ en fonction de x. De même, la recherche des élèves du groupe 3 est orientée autour de la formule $AM \cdot PQ / 2$ et leurs modes de fonctionnement prennent appui sur la position du point M et la valeur de x associée. Dans le cas du groupe 4, nous supposons qu'ils ont isolé la variable indépendante, mais pas de manière suffisamment explicite pour organiser les autres variables.

Le dernier indice, et il fait directement référence à la théorie d'Anna SFARD, repose sur l'intériorisation d'un algorithme de calcul de l'aire du triangle APQ et son exploitation en termes d'entrée-sortie. Nous nous appuyons sur le brouillon de Sébastien, du groupe 3, déjà cité, et sur sa réflexion lors d'un échange à trois avec Arnaud et l'enseignant : « on essaye... ». Nous distinguons deux phases dans ce phénomène, la première s'appuie sur la certitude de l'existence d'une suite d'opérations menant au

résultat final, la seconde consiste en l'explicitation des différents pas de l'algorithme. Au cours de la deuxième phase, l'élève est amené à organiser hiérarchiquement les variables, la variable indépendante et la variable dépendante apparaissant en entrée et en sortie. Nous avons observé, dans le travail d'Arnaud et Sébastien, que l'existence de ce processus a permis une transition rapide lors de l'élaboration de l'expression algébrique de la fonction correspondant au premier cas.

Conclusion

Le modèle de représentation des démarches des groupes que nous avons introduit, a permis une décomposition du travail des élèves prenant en compte le fonctionnement des registres sémiotiques de représentation au sein des cadres mathématiques. Par la distinction, dans le modèle, entre deux types de fonctionnements, « explicatif » et « constructif », nous avons pu, en regroupant les productions des élèves dans des catégories intégrant les différents modes de pensée, remarquer que les cadres mathématiques et les registres sémiotiques en jeux dans la résolution du problème sont les mêmes ; ce sont les informations extraites, les propriétés utilisées et les formules produites qui diffèrent.

D'autre part, nous avons constaté, lors de cette expérimentation, l'importance du temps passé par les élèves sur la partie A de ce problème et la variété des stratégies mises en œuvre pour la résoudre. Deux heures de travail pour une partie pas terminée par tout le monde, et, surtout, des méthodes de recherche qui n'ont pas toutes à voir avec les fonctions. Cela nous ramène à la question posée dans l'analyse a priori : la fonction est-elle, pour l'élève, un outil adapté à la situation ? A notre avis, cette interrogation est liée à la place que l'on souhaite accorder à ce type de problème et au rôle qu'on lui attribue. En effet, comment un tel exercice se déroule-t-il au cours d'une séance « normale » ? La modélisation est le plus souvent à la charge de l'enseignant pour permettre à la classe d'avoir du temps à consacrer à l'étude de la fonction. Etant donné la non organisation des variables en termes de dépendance et la perception globale des variations pour la plupart des élèves, on est conduit à se demander, en particulier, quelle est la légitimité de l'étude des variations de la fonction pour un élève qui est dans ces conditions de compréhension.

D'autre part, le passage direct à l'expression algébrique de la fonction ne semble pas toujours être la meilleure voie pour la modélisation de variations. L'élaboration d'un algorithme de calcul peut en constituer une étape signifiante.

Le problème de l'abreuvoir

Un abreuvoir a la forme d'un prisme droit de longueur 4 m dont les extrémités intérieures sont deux trapèzes isocèles isométriques de petite base 6 dm, de grande base 8 dm et de hauteur 4 dm.

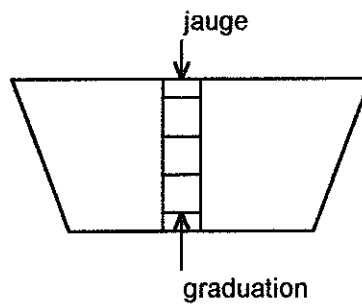
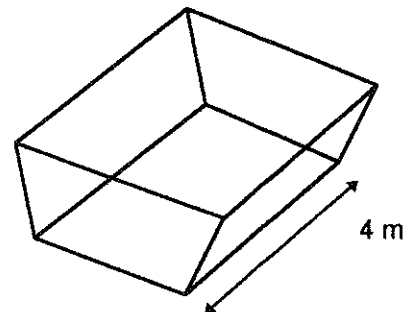
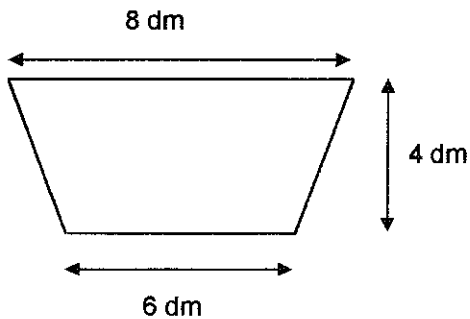
Une jauge est placée verticalement contre l'un des trapèzes.

On se propose de la graduer, c'est à dire de préciser le niveau de liquide correspondant à 100, 200, 300, ...etc litres (par exemple).

QUESTION :

Etablir à l'échelle $\frac{1}{2}$ la graduation à tracer sur la jauge de l'abreuvoir.

SCHEMAS :



Analyse a priori du problème de l'abreuvoir

Construction de la situation

Cette situation fonctionnelle provient du manuel « Math 2^{de} » de l'éditeur Belin. Elle y figure, au numéro 46 de la page 203, sous la rubrique problèmes du chapitre intitulé : « Fonctions carré et cube. Variations et parité ». Nous en avons modifié la formulation. Les phrases de notre énoncé sont toutes extraites du texte original et les schémas que nous insérons sont inspirés de ceux du livre de seconde. La mention « par exemple », qui clôt la graduation de notre énoncé, a été ajoutée par nos soins pour suggérer la recherche d'une solution générale au problème.

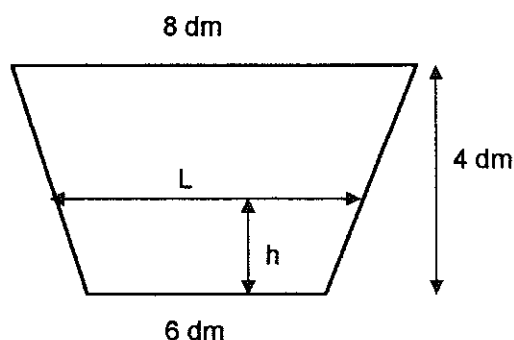
Sous la forme que nous proposons, il s'agit d'une situation fonctionnelle telle que nous l'avons définie lors de l'analyse des principaux manuels en usage dans les classes de seconde des lycées. Elle comporte des variations, deux variables principales prégnantes et il s'agit d'un problème, a priori, non fonctionnel. Elle répond à des conditions favorisant la dialectique outil / objet : l'énoncé a du sens pour les élèves, il fait référence à une réalité palpable car on peut imaginer une baignoire à la place de l'abreuvoir ; il n'y a pas de référence à une fonction dans l'énoncé et les élèves peuvent entrer dans le problème sans son intermédiaire ; l'introduction d'une fonction est un outil adapté à la résolution du problème. Enfin, l'énoncé est ouvert au sens qui nous intéresse, c'est-à-dire celui de la modélisation d'une situation par une fonction.

Nos objectifs sont d'observer les comportements des élèves en autonomie face à un problème « ouvert » et comportant des variations, puis de les décrire en termes de mode de pensée. Nous pensons parvenir ainsi à mieux les comprendre et à isoler des phases de transition avec des changements de cadres et de registres associés.

Analyse mathématique de la situation

Nous présentons, en premier lieu, une solution du problème dans le mode de pensée fonctionnel. C'est dans cette optique que nous proposerons une modélisation du système « abreuvoir ». Cette modélisation, sous une forme un peu différente, convient aussi pour les autres modes de pensée. Le choix de la variable indépendante et de la variable dépendante principale est assez évident.

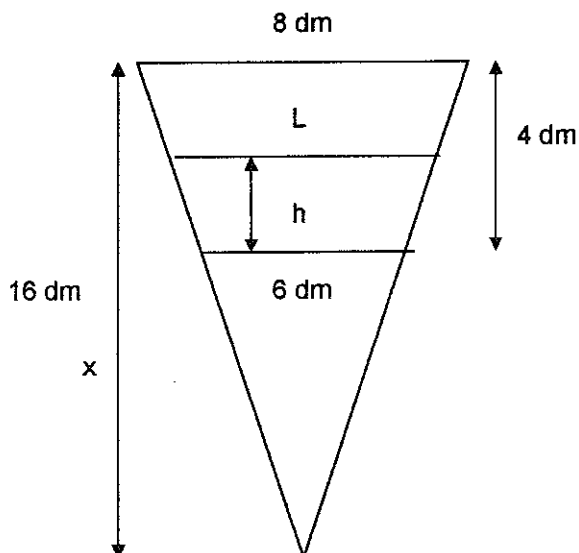
On prend la hauteur h comme variable indépendante et le volume V comme variable dépendante principale et on recherche l'expression algébrique de la fonction f telle que $V = f(h)$. La longueur de l'abreuvoir étant constante, on va bâtir notre modélisation à partir d'une extrémité intérieure. Une variable secondaire apparaît à cette occasion, la largeur L . Dans une perspective fonctionnelle, nous décidons d'exprimer ses variations en fonction de celles de la hauteur h .



Modélisation d'une extrémité
intérieure de l'abreuvoir

Ce travail s'appuie essentiellement sur le théorème de Thalès. Nous proposons trois variantes : la première consiste à compléter la figure pour obtenir un triangle, déterminer sa hauteur puis conclure ; dans la seconde, on découpe la figure pour raisonner sur les deux triangles latéraux ; pour la troisième, on remarque qu'il s'agit d'une fonction affine en retournant l'arête latérale dans un repère orthogonal et on exprime la proportionnalité des variations.

Première méthode :



Pour déterminer la hauteur du triangle, on peut appliquer le théorème de Thalès dans le demi triangle rectangle et on

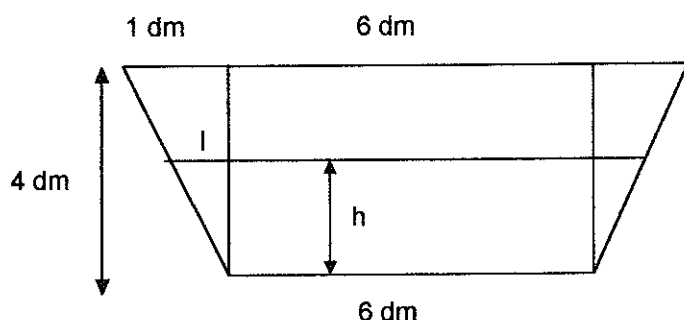
obtient : $\frac{x-4}{x} = \frac{3}{4}$ puis $x = 16$.

Après avoir déterminé la hauteur du triangle, on applique le théorème de Thalès dans le

demi triangle pour obtenir : $\frac{4}{\frac{1}{2}L} = \frac{16}{12+h}$

puis : $L(h) = 6 + \frac{1}{2}h$

Deuxième méthode :

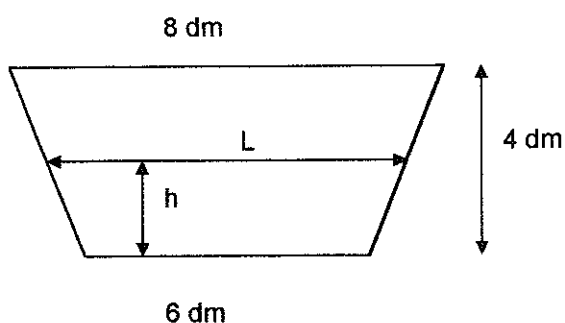


En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle latéral, on obtient :

$\frac{4}{h} = \frac{1}{l}$ d'où $l(h) = \frac{1}{4}h$ et comme $L = 6 + 2l$

on en déduit que $L(h) = 6 + \frac{1}{2}h$

Troisième méthode :



largeur	6	L	8
hauteur	0	h	4

La largeur varie de +2 pendant que la hauteur varie de +4, on en déduit le coefficient de

proportionnalité : $\frac{1}{2}$ puis $L(h) = 6 + \frac{1}{2}h$

Quelle que soit la méthode retenue, on en déduit l'expression algébrique de l'aire du trapèze en fonction de la hauteur, ce qui constitue de fait une deuxième variable secondaire. On a :

$$A(h) = \frac{\left(6 + \left(6 + \frac{1}{2}h\right)\right) * h}{2} \quad \text{soit finalement} \quad A(h) = 6h + \frac{1}{4}h^2, \text{ puis on conclut par la formule liant}$$

le volume et la hauteur, c'est à dire :

$$V(h) = \left(6h + \frac{1}{4}h^2\right) * 40 \quad \text{et en développant} \quad V(h) = 240h + 10h^2$$

On peut alors résoudre le problème de deux manières. Une résolution directe qui se base sur la fonction g dont l'expression est de la forme $h=g(V)$ et se poursuit en dressant un tableau de valeurs pour construire facilement la graduation demandée. Une autre voie qui consiste à construire la représentation graphique de la fonction obtenue précédemment dans un repère orthogonal bien choisi, c'est-à-dire tel que l'échelle de l'axe des abscisses permette l'élaboration directe de la graduation.

La première solution nécessite la mise sous forme canonique d'un trinôme comportant un paramètre, ainsi :

$$h^2 + 24h - \frac{V}{10} = 0$$

$$\Leftrightarrow h^2 + 24h + 144 - \left(\frac{V}{10} + 144\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (h + 12)^2 = \frac{V}{10} + 144$$

$$\Rightarrow h(V) = -12 + \sqrt{144 + \frac{V}{10}} \quad \text{car } h \geq 0$$

Il s'agit du modèle fonctionnel juste ; il existe aussi un modèle fonctionnel erroné. Dans celui-ci, on suppose que la hauteur et le volume sont proportionnels. Le volume total de l'abreuvoir étant 1120 dm^3 , on obtient l'expression algébrique des variations du volume en fonction de celles de la hauteur :

$V(h) = 280h$. Nous avons à nouveau deux possibilités pour conclure, la construction de la représentation graphique de la fonction dans un bon repère ou la détermination de l'expression algébrique de la fonction réciproque et la constitution d'un tableau de valeurs.

Dans les résultats qui suivent, le volume est donné en litres et la hauteur en centimètres, arrondie au millimètre près :

V	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100
h juste	4,1	8,1	11,9	15,6	19,3	22,8	26,3	29,7	33	36,2	39,4
h faux	3,6	7,1	10,7	14,3	17,9	21,4	25	28,6	32,1	35,7	39,3
erreur	-0,5	-1	-1,2	-1,3	-1,4	-1,4	-1,3	-1,1	-0,9	-0,5	-0,1

Il est possible de résoudre ce problème dans le mode de pensée algébrique. Dans un modèle de ce type, la formule est considérée comme une équation à deux inconnues, L et h , et à un paramètre V auquel on substituera des valeurs numériques pour résoudre des équations. L'équation de départ est

$$V = \frac{(6 + L) * h}{2} * 40, \text{ et il faut rechercher une seconde équation comportant les mêmes inconnues pour}$$

effectuer une substitution dans la première. On peut le faire à l'aide de la modélisation d'une extrémité intérieure du trapèze comme dans le cas fonctionnel. Dans le mode de pensée algébrique, l'aire du

trapèze n'apparaît pas comme une inconnue. La solution du problème se dessine après la résolution de onze équations du second degré à écrire sous forme canonique. Dans le cas du modèle erroné, la résolution algébrique est, du point de vue des méthodes, peu différente de la résolution fonctionnelle avec détermination de la fonction réciproque. C'est le statut des expressions algébriques qui diffère.

Ces deux modes de pensée qui permettent de résoudre le problème ne sont pas étanches, il existe des points de passage de l'algébrique vers le fonctionnel. Par exemple, lors de la résolution des équations du second degré, la répétition des opérations peut amener à la construction d'un algorithme de calcul, cela pour des raisons d'économie de traitement. La considération de cet algorithme comme un processus à part entière constitue un levier pour une transition vers le mode de pensée fonctionnel.

Comportements attendus des élèves

Entrée dans le problème

L'entrée dans le problème peut être facilitée par le rappel des formules de l'aire d'un trapèze et celle du volume d'un prisme droit. On peut aussi donner les relations existantes entre les différentes unités : mètre, décimètre et litre. Les élèves chercheront peut-être alors à déterminer le volume maximum et le nombre de graduations à placer sur la jauge ou inversement. On peut aussi proposer de faire un dessin à l'échelle 1/10 ème de la base trapézoïdale de l'abreuvoir pour contrôler les résultats intermédiaires par mesure de grandeurs. Si un élève est totalement bloqué, on pourra lui proposer de rechercher la hauteur correspondant au demi-volume, sachant qu'on l'oriente vers une démarche algébrique.

Modèle de base

Il repose sur une proportionnalité supposée entre le volume de l'abreuvoir et sa hauteur. Ce modèle est envisageable, car, ce sont les deux grandeurs prégnantes dans l'énoncé, et, la proportionnalité, connaissance disponible des élèves, s'accorde avec une représentation de la réalité par une loi simple.

Il s'exprime dans les modes de pensée algébrique et fonctionnelle comme nous l'avons présenté ci-dessus, mais aussi dans le mode de pensée arithmétique par l'outil produit en croix.

Il pourra être disqualifié, soit directement, car l'abreuvoir n'a pas la forme d'un parallélépipède rectangle, soit indirectement, en cherchant par une autre méthode, le volume correspondant à la hauteur ainsi trouvée et en comparant ce résultat avec le volume de départ. Cette disqualification indirecte est permise par la situation, car, si l'erreur commise sur la hauteur n'est pas trop importante, celle résultante sur le volume l'est suffisamment pour persister au delà du cumul des arrondis des calculs intermédiaires et des mesures potentielles.

Les élèves lui substitueront peut-être un modèle proportionnel rectifié basé sur les variations proportionnelles. Il pourra être disqualifié indirectement par la même méthode.

Modèle corrigé

Il s'appuie totalement ou partiellement sur la modélisation que nous avons proposée dans l'analyse mathématique de la situation.

Elaboré dans le mode de pensée arithmétique, il conduit à l'organisation d'une suite d'opérations numériques permettant de calculer le volume pour une hauteur donnée.

Dans le mode de pensée algébrique, il permet d'obtenir une seconde équation à deux inconnues L et h . Les élèves peuvent alors exprimer L en fonction de h puis, par substitution dans la formule du volume, V en fonction de h .

Un élève opérant dans le mode de pensée arithmétique est appelé à mobiliser le cadre algébrique pour déterminer la largeur, inconnue, correspondant à la valeur numérique de la hauteur qu'il s'est fixée. Cette démarche peut faciliter une transition vers le mode de pensée algébrique. D'autre part, une réorganisation hiérarchisante de la suite d'opérations en termes d'entrée-sortie la structurant en un

algorithme, peut, d'un côté appuyer la transition vers le mode de pensée algébrique en formalisant ce qui ne relevait que du calcul numérique et d'un autre côté favoriser le passage au mode de pensée fonctionnel par la reconnaissance d'un processus général.

Pour un élève fonctionnant dans le mode de pensée algébrique, la transition vers le mode de pensée fonctionnel passe par une lecture des équations en termes de variations.

Ces changements de mode de pensée réclament une prise de distance par rapport au travail qui est accompli et il n'est pas évident qu'ils puissent s'effectuer au cours de cette phase de la recherche.

Solution du problème

En restant dans le mode de pensée arithmétique, un élève se retrouve dans l'alternative suivante : soit il n'obtient pas la formule liant le volume et la hauteur, soit il l'obtient. Dans les deux cas, il procède par approximations successives pour déterminer les graduations. S'il n'a pas abouti à l'expression algébrique, la tâche paraît insurmontable ; sinon, le recours à la calculatrice permet d'obtenir des valeurs numériques satisfaisantes.

Pour construire le tableau de valeurs suivant, nous avons procédé par encadrements et approximations à partir des valeurs du volume obtenues pour certaines valeurs de la hauteur.

La hauteur est exprimée en décimètre et le volume en décimètre cube.

h	0,4	0,41	0,8	0,9	0,81	1,1	1,2	1,19
V	97,6	100,081	198,4	224,1	200,961	276,1	302,4	299,761
h	1,6	1,56	1,57	1,9	1,95	1,93	1,92	2,3
V	409,6	398,736	401,43	492,1	506,025	500,449	497,664	604,9
h	2,29	2,28	2,6	2,7	2,62	2,63	2,9	2,96
V	602,041	599,184	691,6	720,9	697,444	700,369	780,1	798,016
h	2,97	3,2	3,3	3,29	3,6	3,7	3,62	3,63
V	801,009	870,4	900,9	897,841	993,6	1024,9	999,844	1002,969
h	3,9	3,93	3,94					
V	1088,1	1097,649	1100,836					

En raisonnant dans le mode de pensée algébrique, un élève doit : écrire un trinôme sous forme canonique, résoudre l'équation puis choisir la bonne solution et cela onze fois de suite. Outre la difficulté technique de cette tâche, sa répétition peut être dissuasive.

Dans le mode de pensée fonctionnel, la solution attendue des élèves provient de la construction, dans un repère bien choisi de la courbe représentative de la fonction qui modélise les variations du volume en fonction de celles de la hauteur. Cela exige, de la part de l'élève, l'identification du processus et la conversion du registre des expressions algébriques dans le registre graphique via, peut-être, un tableau de valeurs.

Les points de passage d'un mode de pensée à un autre sont multiples. Un élève travaillant dans le mode de pensée arithmétique et n'ayant pas obtenu la formule peut cependant identifier un processus dans sa suite d'opérations, reporter ses résultats numériques dans un tableau de valeurs et choisir une représentation graphique pour obtenir la solution du problème. Cette démarche peut constituer un levier vers le mode de pensée fonctionnel. Il peut aussi déterminer l'expression algébrique du volume en fonction de la hauteur et s'orienter vers le mode de pensée algébrique par la mobilisation du cadre algébrique pour la résolution d'équations du second degré.

Un élève qui recherche la solution dans le mode de pensée algébrique, peut identifier un processus dans l'algorithme de résolution de l'équation du second degré. Cette identification peut d'ailleurs l'encourager à s'engager dans la voie algébrique en repérant le rôle particulier du paramètre V. L'intériorisation du processus constitue un point d'appui pour une transition vers le mode de pensée fonctionnel. Ici, il s'agit de la fonction g telle que $h = g(V)$.

Conclusion

Si l'on intègre le contrat didactique dans l'analyse, il faut souligner qu'il s'agit d'un problème contractuel. Les élèves ont déjà résolu des problèmes assez ouverts de manière autonome et permettant l'usage de plusieurs registres de représentation ; par exemple des problèmes de dépassement de véhicules, de croisement, de rencontre, etc... Dans le cours de mathématiques, le chapitre « fonctions affines et linéaires » a fait l'objet d'un apprentissage intégrant l'aspect exploitation numérique des variations proportionnelles et l'aspect modélisation par une fonction affine. A l'occasion de ce chapitre, les élèves ont résolu des exercices et étudié des situations d'origine extra mathématique : correspondance °C et °F, allongement d'un ressort, variations de la température de l'eau en fonction de la profondeur, etc... .

Une spécificité forte de ce problème résulte du thème d'étude qui est celui du partage. On éprouve la nécessité de chercher à obtenir la hauteur en fonction du volume or la situation ne permet, dans un premier temps, que de déterminer le volume en fonction de la hauteur. De plus, la nature de la formule liant le volume et la hauteur fait que la détermination des graduations de la jauge ne passe pas forcément par une résolution algébrique. Ainsi, pour un individu raisonnant avec le mode de pensée arithmétique le problème est extrêmement difficile, un élève qui fonctionne dans le mode de pensée algébrique doit maîtriser la mise sous forme canonique d'un trinôme, tâche complexe pour un élève de seconde. Enfin, en travaillant dans le mode de pensée fonctionnel, la détermination de l'expression algébrique de la fonction réciproque est rendue difficile par la présence d'une expression polynomiale du second degré mais elle assure l'obtention des valeurs exactes des graduations alors que la résolution par la construction de la représentation graphique de la fonction mène à des valeurs approchées ou à l'élaboration de la jauge par des tracés nécessairement approximatifs. Donc, lorsque ce n'est pas la difficulté conceptuelle ou technique qui fait obstacle, c'est le statut de la réponse.

Cette situation répond cependant aux objectifs que nous nous sommes fixés. En effet, l'énoncé comporte des données numériques, ce qui peut motiver une entrée par le mode de pensée arithmétique ; il suggère la détermination d'inconnues, ce qui peut orienter vers le mode de pensée algébrique ; la situation comporte des variations et permet une entrée par le mode de pensée fonctionnel. Par son intermédiaire, nous pouvons raisonnablement penser observer la mise en œuvre des différents modes de pensée, les modélisations qui en résultent, les transitions de l'un à l'autre et les leviers sur lesquels s'appuient ces transitions. De plus, l'utilisation et l'articulation des différents registres sémiotiques de représentation d'une fonction peuvent nous fournir des repères sur l'état de conceptualisation de la notion de fonction chez des élèves en fin de seconde.

DEUXIEME EXPERIMENTATION

Le contexte

Cette séance s'est déroulée le mardi 14 mai 1996. Quinze élèves étaient présents, répartis en trois groupes de quatre et un groupe de trois, le groupe n°1. Trois redoublantes faisaient initialement partie de cette moitié de la classe mais l'une d'elles était absente. L'orientation de ces élèves est la suivante : l'élève absente ainsi qu'une autre sont passées en première L, 5 élèves en première S, 1 en première ES, 1 en première STT, 1 en première GC et 6 se sont vus proposé un redoublement. L'expérience a duré deux heures consécutivement, les élèves n'ayant pas demandé de pause. Les enregistrements sont de meilleure qualité que lors de la première session puisque deux d'entre eux sont de bonne qualité, presque totalement exploitables, un troisième permet la récupération des échanges avec l'enseignant ainsi que quelques échanges entre élèves et le quatrième est inaudible. Nous fournissons dans l'annexe 5 : le compte-rendu du groupe N°1, des extraits des brouillons de Kelly et Julie du groupe N°2 et le compte-rendu du groupe N°4. Nous proposons une analyse des productions des élèves en trois temps : au cours du premier, nous faisons un bref récit du travail de chaque groupe, en second, nous effectuons une analyse du fonctionnement de chaque groupe et nous terminons par l'examen de questions transversales.

Le cheminement de chaque groupe

Dans cette partie, les extraits écrits et oraux permettent d'illustrer nos propos. Pour chaque groupe, le récit est présenté en respectant les hiérarchies proposées dans l'analyse a priori ainsi que la chronologie du travail des élèves.

Groupe N°1

Ce groupe ne comprenait que trois élèves et l'enregistrement de son travail est de bonne qualité. Ces élèves ont mis 30 minutes pour calculer le volume total de l'abreuvoir ; les problèmes rencontrés étant de plusieurs ordres : perception d'un dessin d'un objet de l'espace, confusion entre dénomination mathématique et dénomination usuelle, choix des formules et dimension des grandeurs intervenant dans celles-ci.

Elles se sont ensuite engagées dans le modèle erroné par deux entrées, la première s'appuyait sur le nombre total de graduations et la seconde sur une proportionnalité supposée entre hauteur et volume. Le contrôle, dans le cadre numérique et en supposant la largeur égale à 8 dm, par la formule du volume permet de rejeter la première hauteur obtenue 1/3.

M : on a...en fait, on va avoir à mettre une graduation tous les 0,33 dm

Pr : attends, il faut voir ; tu décides par exemple de mettre ta graduation à cette hauteur là, si tu mets ta première graduation à ça, tu penses que tu as 100 l. Tu n'as qu'à vérifier.

M : quoi ?

Pr : tu n'as qu'à le vérifier

M : mais comment ?

Pr : et bien, calculer le volume qui correspond à cette hauteur là ; voir si effectivement il fait 100 l...comme ça, tu sauras si c'est bien ça

ML : tu calcules quoi là ?

M : le volume comme il m'a dit...0,33...forcément ça tombe pas juste alors...attends...34 non ça tombe pas juste, ah, ça m'énerve

ML : tu trouve pas 100, donc c'est...

La seconde entrée est plus longue à disqualifier, car les élèves supposent que l'enseignant demande une vérification numérique. Elles reprennent d'abord leur produit en croix, s'entendent sur l'approximation

incontournable des résultats. Devant l'insistance de l'enseignant elles retournent à leur formule géométrique de l'abreuvoir, en conservant la valeur 8 pour la largeur, pour calculer le volume correspondant à leur hauteur 0,357 dm. Elles constatent ensuite que la largeur change de valeur. Après avoir buté sur un obstacle algébrique, elles s'engagent dans la réalisation d'un dessin à l'échelle 1/10 de la face trapézoïdale de l'abreuvoir, mesurent la largeur puis calculent le volume.

M : non, mais on ne peut pas la trouver ; ça sert à rien en fait parce que quand tu as...on va faire 6 plus x divisé par 2 multiplié par 0,357

A : parce que c'est ça qui change, le 6 il est toujours pareil

M : on peut pas dire à quoi c'est égal

A : et puis 6 il va toujours rester

ML : oui, tu as raison, si tu marques l'opération tu peux pas dire à quoi c'est égal

M : donc tu peux pas retirer...tu vois ce que je veux dire

[....]

M : 6,2 à peu près

ML : combien ?

M : moi je trouve 6,2 ; on essaye avec 6,2

ML : ce sera à peu près égal

M : alors maintenant pour vérifier, ça va donner 6,2 plus 6 divisé par 2 multiplié par 0,357

A : oh, là là

M : ouais ben ça nous dit qu'en fait on est vachement loin

A : tu trouves combien ?

M : 87,1

A : comment tu as fait ?

M : 6,2 plus 6 divisé par 2 multiplié par 0,357

A : mais qu'est-ce que j'ai fait moi !

M : tu trouves combien toi ?

A : 87,1

M : ouais à peu près

A : on est à l'ouest

M : donc en fait on est loin ; donc c'est faux...c'est faux

Cette partie leur prend 1 heure. Le groupe consacre le dernier quart d'heure de la séance à identifier ce qui est faux puis à repérer les variations de la hauteur et de la largeur. Elles finissent par proposer un modèle numérique de ces variations.

Groupe N°2

L'enregistrement de ce groupe étant inaudible et les élèves n'ayant pas rédigé de compte-rendu, nous ne disposons que de leurs brouillons et des feuilles de notes de l'observateur.

Les quatre élèves constituant ce groupe ont consacré environ 20 minutes au calcul du volume de l'abreuvoir.

Au cours des 40 minutes suivantes, ils se lancent dans le modèle erroné en déterminant le volume correspondant aux quatre hauteurs suivantes : 1dm, 2dm, 3dm et 4dm, puis en représentant les résultats obtenus sur une graduation. La hauteur d'eau nécessaire pour avoir un volume de 100 l est déduite par un produit en croix. Le groupe émet un préjugé négatif sur ce résultat, en effet, auparavant Romain avait déjà signalé :

« mais non, c'est pas possible, c'est pas régulier »

et Kelly avait renchéri :

« ça ne marche pas si c'est proportionnel ».

D'ailleurs, lorsqu'elle communique son résultat au reste du groupe, c'est sous la forme :

« j'ai trouvé que 280 l correspond à 1 dm mais ça ne doit pas marcher ».

L'enseignant les aidera à conforter cette impression et à y apporter une explication mathématique en désignant la largeur comme cause de l'erreur.

Ils obtiennent ensuite 4 valeurs justes en découpant le trapèze en un rectangle et deux triangles et en appliquant le théorème de Thalès dans un triangle pour déterminer chaque largeur inconnue. Cependant, la représentation choisie ne leur permet pas de résoudre le problème. Ce travail leur prend une demi-heure.

Durant le dernier quart d'heure, chacun choisit une voie, Kelly recherche une expression algébrique du volume en fonction de la hauteur, Julie entame le calcul les écarts de volume entre chacune des quatre hauteurs pendant que Romain repose le problème dans un cadre algébrique.

Groupe N°3

Les dix premières minutes de la séance sont consacrées à la lecture de l'énoncé et au calcul du volume de l'abreuvoir. Les élèves se rendent assez rapidement compte que les variations de la largeur dépendent de celles de la hauteur :

AC : tu fais quoi là ?

F : je suis en train de chercher pour 100 l

L : le problème c'est que la grande base elle change de dimension aussi, à chaque fois

F : hein ?

AC : la grande base ?

L : ben si, parce que quand la hauteur elle est là, c'est plus égal à 8

Ils posent alors le problème dans le cadre algébrique en introduisant deux inconnues :

L : 6 plus x fois...ça aussi ça change...fois y divisé par 2 fois 40 égale 100 ; on peut pas trouver comme ça

puis ils recherchent l'expression algébrique de la grande base en fonction de la hauteur :

F : il faudrait qu'une seule inconnue...faut trouver ça en fonction de ça

AC : c'est ce que je crois

L : on va faire un graphique

AC : en fait faut trouver quand la hauteur augmente de tant, la grande base augmente.

Le graphique leur rappelle des problèmes antérieurs et c'est sur la base de leurs souvenirs qu'ils vont aboutir à la solution :

L : mais ça on l'a fait...c'était au début de l'année, au tout début de l'année quand, tu sais, c'est pas proportionnel mais c'est... ; quand on a fait la proportionnalité des espaces, quand ça augmente de ça, ça augmente de ça, il y avait des formules...tu te souviens pas quand on a fait le ressort avec un poids, si le poids augmente de tant le ressort s'allonge de tant

F : ah, oui

AC : c'était la même chose que ça

ML : je ne m'en rappelle plus

L : c'est pas ça qu'est proportionnel, c'est l'augmentation qu'est proportionnelle ; c'est ça ?

AC : donc là

L : ça augmenterait...après tu peux faire une proportionnalité mais en ajoutant toujours 6, 6 dm parce qu'il y a une base au départ

ML : ah oui, entre les °F et les °C c'était ça

[...]

L : regarde là, la hauteur elle augmente de 4 et ça ça augmente de 2 ; on l'avait sur le graphique !

AC : quoi ?

L : la hauteur de l'eau augmente de 4 et la largeur augmente de 2
 F : ben oui
 L : donc on l'avait déjà ; donc , forcément, si ça augmente de 2 ça augmente de 1
 ML : ça augmente ?
 L : si la hauteur augmente de 2 ça augmente seulement de 1 cm
 ML : ah, j'ai compris autre chose
 L : la grande base augmente de 2 donc pour 2...1 et 1...0,5 donc...je me demande à quoi ça sert qu'on ait trouvé cela
 F : pour trouver le volume...h plus
 AC : là tu remplaces y par x

Ainsi, 25 minutes plus tard, ils aboutissent à l'équation $12h + \frac{1}{2}h^2 = 5$. Ils se heurtent alors, dans le cadre algébrique, à un obstacle technique ; la mise sous forme canonique d'un trinôme pour résoudre une équation du second degré ne faisant pas partie des outils disponibles à ce moment-là. Le groupe s'engage alors dans la recherche de la hauteur en fonction du volume dans le cadre numérique, c'est-à-dire par l'usage du produit en croix. Ce modèle proportionnel sera disqualifié directement, dès le début, par Franck puis indirectement en substituant à h, dans la formule, la valeur 0,357 par Lauren. Ceci leur prend ½ heure.

Au cours des dernières quarante minutes, ils établissent la formule générale $12h + \frac{1}{2}h^2 = \frac{V}{20}$ en remplaçant 100 par V dans leurs calculs précédents. Ils ne parviennent pas à exprimer h en fonction de V mais rejettent cette fois la forme canonique.

L : une forme canonique ? c'est comme ça qu'on enlève les carrés
 F : oui, c'est comme ça
 L : non mais c'est pas ça
 AC : racine de...
 F : après tu vas trouver avec des racines, ça revient au même
 AC : comment on fait pour vérifier ?
 L : ben, tu mets au carré
 F : tu trouves heu...

L'enseignant les oriente finalement vers la représentation graphique de la fonction mais les élèves manqueront de temps pour terminer le tracé sur papier alors qu'ils l'ont obtenu sur machine.

Groupe N°4

Le groupe se scinde en deux binômes, Mikaël et Ludovic repèrent les deux quantités variables hauteur et largeur et se lancent dans une recherche algébrique tandis que Fanny et Emilie calculent le volume total de l'abreuvoir. Au bout d'une demi-heure, les élèves font le point :

E : hé, Mikaël, t'as trouvé le volume ?
 [inaudible]
 L : vous avez trouvé quoi là parce que [inaudible]
 E : 112 dm^3
 L : 112 dm^3 ?
 F : oui
 L : c'est beaucoup plus grand que ça ; fais voir tes calculs
 F : c'est peut-être mes calculs
 L : non, là c'est 4 m c'est pas 4 dm
 E : il fallait le transformer
 L : ça fait 40
 M : dm

L : 40 fois 28...1120
 E : j'ai fait [inaudible]
 L : ça en fait 40, donc 28 fois 40
 E : ah oui, j'ai oublié un zéro, je me suis trompée
 F : oui
 E : vous avez trouvé quoi ?
 M : [inaudible]
 L : je dirai que pour trouver le volume d'eau faudrait...la base, il y a une certaine hauteur d'eau, ce qui donne une certaine...heu... ; donc il faut calculer l'aire, pour avoir la surface fois la longueur ça fait le volume. On connaît pas la hauteur d'eau et on connaît pas le volume. C'est ça le problème.
 M : mais avec une équation ?
 F : si
 E : en supposant qu'il est plein
 L : [inaudible] qu'il y a un rapport entre la hauteur et...cette longueur là
 F : on ne sait pas s'il est plein ou pas
 L : oui mais justement, x c'est la hauteur et puis y heu...la grande base du trapèze

Au cours de la demi-heure suivante, le groupe se lance dans le calcul algébrique à partir de la complétion du trapèze en rectangle. Ludovic obtient alors la solution et l'expose au reste du groupe :

L : on a calculé le volume total
 F : oui
 L : bon, j'ai fait le volume d'eau plus le volume de vide qui donne le volume total. Le volume d'eau, j'ai fait l'aire de ça donc ça faisait x fois h le rectangle ; et après j'ai retiré les petits morceaux là qu'il y avait là et ces petits morceaux ça faisait ensemble x moins 6 donc ça faisait x moins 6 si on les ajoute. Ça fait un truc comme ça ; ça ça fait x - 6 et ça ça fait h. Donc les petits morceaux ça faisait x - 6 fois h sur 2. Donc je prenais le grand rectangle xh moins les petits morceaux ça donne h fois, en développant, et ça donne h fois x sur 2 plus 3 donc ça donne l'aire de ça. Puis je multiplie par 40 parce que j'ai tout fait en dm pour avoir le volume d'eau. Après je fais pareil avec ça et je calcule le grand rectangle et je retire les petits bouts et pareil par 40 pour avoir le volume. Donc ça donne le volume d'eau...avec deux inconnues, le volume d'eau et le volume de vide et...donc le volume d'eau plus le volume de vide ça fait obligatoirement le volume total. Donc ça me faisait une formule. Ça faisait le volume d'eau plus le volume de vide ça faisait 1120 dm^3 donc, en transposant ça me donnait x égal 6 plus $\frac{1}{2}$ de h et je reprends le volume d'eau et je remplace x par la valeur en...un certain nombre de h et je termine sur volume d'eau égal $240h$ plus 10 h carrés.
 E : c'est dur [inaudible]
 F : oh, la vache
 L : non, simplement j'ai calculé le volume d'eau avec x et h, le volume de vide avec x et h et donc ça faisait, cette hauteur là ça faisait $4 - h$; ensuite je fais le volume de vide plus le volume d'eau égal le volume total donc, en transposant, je trouve x égal un certain nombre de h et ensuite je remplace x par un certain nombre de h pour avoir que des h ; donc pour pas avoir deux inconnues, j'ai plus qu'une seule inconnue ce qui fait que je peux tracer l'échelle.

La recherche des graduations s'effectue par la résolution d'équations du second degré. Emilie et Fanny échouent, l'enseignant leur propose de rechercher une autre méthode mais elles n'y parviendront pas. Ludovic passe par la forme canonique et aboutit en résolvant la première équation puis en généralisant à partir de la seconde. Ce travail prend trente minutes.

Au cours des dix dernières minutes, après que l'enseignant lui ait suggéré de trouver une seconde solution et qu'il ait entendu parlé de graphique à la table d'à côté, Ludovic déterminera l'expression algébrique de la largeur en fonction de la hauteur à partir de la reproduction de l'arête oblique de l'abreuvoir dans un repère orthogonal.

Analyse des travaux des élèves

Ajouts à l'analyse a priori

Dans cette analyse, nous avons décomposé les comportements attendus des élèves en trois phases : le modèle erroné, le modèle corrigé et la recherche de la solution. Le travail du 3^{ème} groupe nous amène à compléter cette description. En effet, l'obtention d'un partage, lorsque l'on ne possède pas la représentation graphique de la fonction, peut passer par la détermination de la fonction réciproque si elle existe. Cette tâche est particulièrement difficile pour un élève de classe de seconde. Cela a conduit les élèves de ce groupe à proposer un modèle erroné de la fonction réciproque :

- L : quand la hauteur augmente de 4 dm le volume augmente de 1120 donc si le volume est égal à 100 ; si h augmente de 4 V augmente de 1120 donc ça ça augmente de 100, 4 fois 100 divisé par 1120, 0,357....dm
F : c'est quoi ça ?
L : et bien je crois que quand ça ça augmente de 100 l la hauteur augmente de ça...à mon avis [...]
L : pour 100 l ça augmenterait de 0,357, j'ai trouvé le contraire, j'ai trouvé le volume.

D'autre part, les attitudes et les productions des élèves nous permettent de préciser nos hypothèses sur les modes de pensée.

Nous considérerons comme relevant du mode de pensée arithmétique, les fonctionnements qui conduisent à la construction d'un étalonnage discret de la variable indépendante et à l'utilisation d'un produit en croix. Nous avons aussi remarqué que ce mode de pensée s'appuie sur la présence de deux variables prégnantes impliquant une modélisation partielle du système abreuvoir. Les registres associés sont ceux des écritures numériques, celui des échelles graduées, celui des formules géométriques. Le mode de pensée algébrique se manifeste par : l'introduction d'inconnues et la recherche d'équations, la substitution d'une inconnue par une expression algébrique dépendant d'une autre et par un découpage du continu. Il peut s'appuyer sur la prise en compte de trois variables et conduire à la modélisation quasi complète du système. Les registres privilégiés sont ceux des formules géométriques et des expressions algébriques.

Le mode de pensée fonctionnel se traduit par un comportement assimilant les variations, intégrant la continuité de la variable indépendante et présentant des variables organisées. Il peut permettre la considération des quatre variables du problème et mener à la modélisation complète du système. Le registre graphique et celui des expressions algébriques sont des supports évidents mais on admettra aussi les représentations de variations et de processus en termes d'entrée-sortie.

Les variables retenues pour décrire les évolutions des groupes sont : les modes de pensée dominants, les modèles proposés et les cadres mathématiques choisis ainsi que les jeux de cadres exprimés.

Retour sur les groupes

Dans cette partie, nous avons décomposé le travail de chaque groupes en épisodes significatifs. Nous avons représenté chacun d'eux par un modèle dans lequel figurent les registres sémiotiques de représentations exploités par les élèves au sein des cadres mathématiques. En conformité avec nos références théoriques, nous avons placé le système au même niveau que les cadres mathématiques. De plus, lorsque cela était possible, nous avons restitué la chronologie du travail du groupe en utilisant différents types de traits dans la représentation, sinon, nous avons employé le même trait pour l'ensemble du schéma. Les extraits des écrits des élèves et des échanges verbaux ont pour objet d'appuyer ces représentations et nos propositions.

Groupe N°1

Ce groupe est entré dans le problème dans le mode de pensée arithmétique. L'expression des résultats dans le seul cadre numérique ainsi que l'usage du produit en croix appuient cette hypothèse.

Le premier modèle des élèves, représenté par la figure 4, est construit lors du calcul du volume de l'abreuvoir.

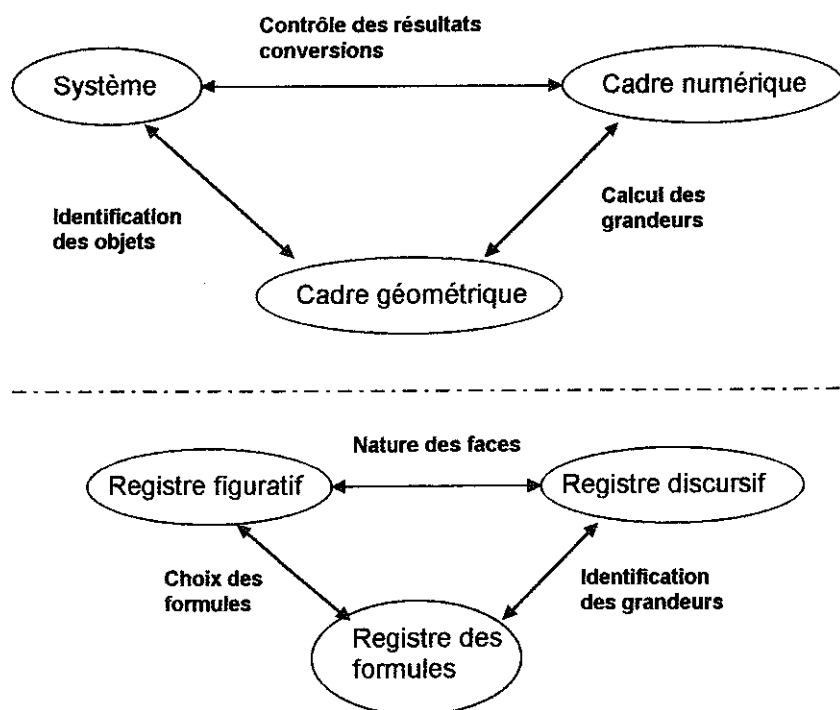


Figure 4 : Nous avons noté en caractères gras les différentes actions des élèves. Nous n'avons pas introduit la chronologie dans ce schéma.

Dans un premier temps, toutes les conversions entre registres ne sont pas opérationnelles et le passage du cadre géométrique au cadre numérique en est affecté. Le point de départ est la formule du volume d'un prisme mais le choix ne résulte pas de la considération de la figure. Le changement de cadre s'effectue à partir de cette conversion partielle et conduit à la production de plusieurs résultats faux.

A : la base..., donc on a dit que c'était un rectangle, c'est ça qu'on a dit

M : non, c'est pas un rectangle ça

A : c'est un...

M : c'est un parallélogramme...vas-y, explique, c'est quoi ?

[coupure]

M : si tu regarde le dessin, c'est pas un rectangle

ML : on s'en fout à la limite

M : là, la base c'est 4 (*longueur de l'abreuvoir*)

A : ça la base...et la hauteur c'est quoi ?

M : et bien ça doit être 4 la hauteur (*hauteur du trapèze*)

[coupure]

ML : il y a quelque chose qui me paraît bizarre (*elles trouvent $1,6 \text{ m}^3$*)

A : quoi ?

[coupure]

A : c'est le 4 qu'on aurait du convertir en dm

M : 40 fois 4, vous êtes d'accord...donc la base ce sera 40 multiplié par 4...on trouve 160 ; on l'a en dm^3

ML : t'es sûre ?

M : ben oui

ML : on a des dm par des dm

[coupure]

A : 160 litres, c'est déjà plus...
M : plus quoi ?
A : je sais pas, plus...plausible

La rectification de la démarche, représentée par la figure 5, qui s'appuie sur le registre discursif et sur la réorientation du prisme dans le registre figuratif, passe par l'établissement d'une conversion complète entre le registre figuratif et celui des formules. Ce travail permet aussi de préciser le sens du mot base en géométrie.

La production et le rejet du modèle erroné s'établissent en plusieurs épisodes et conduisent à un enrichissement en termes de cadres mathématiques et de liens entre registres de représentation du cadre géométrique.

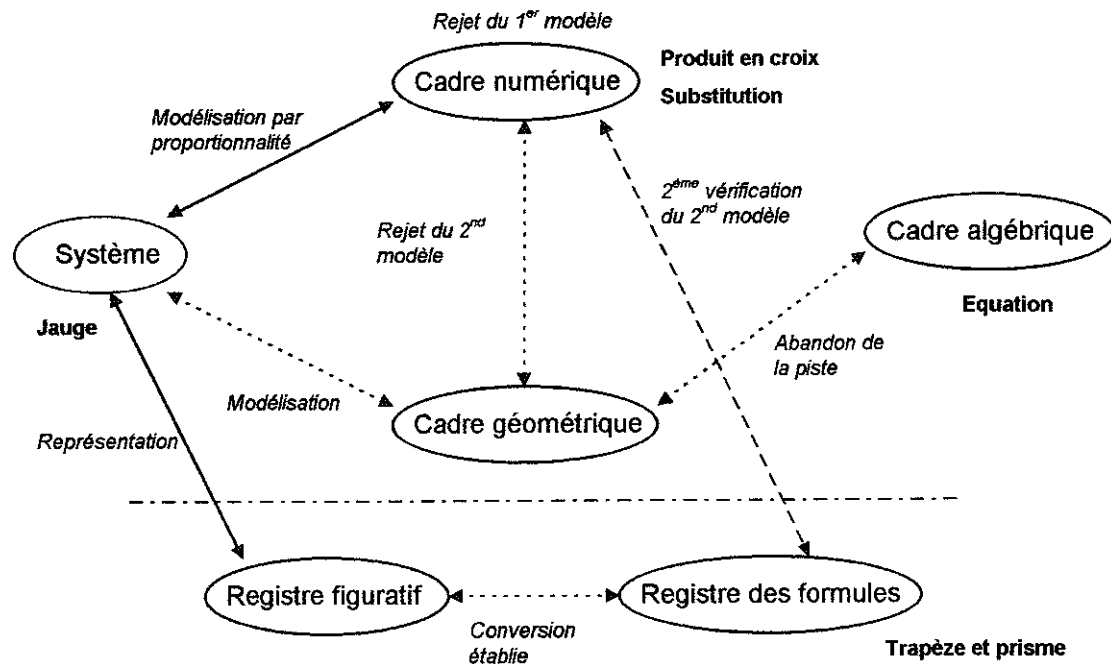


Figure 5 : Dans cette représentation, nous avons symbolisé par les flèches en trait plein la construction du modèle erroné, par la flèche en trait discontinu la deuxième vérification de sa seconde version et par les flèches en pointillés le rejet définitif du modèle proportionnel.

Le modèle erroné provient d'une représentation partielle du système dans le registre figuratif puis de la mobilisation du seul cadre numérique. En effet, le repérage de la hauteur s'effectue sur le dessin de l'abreuvoir :

M : mais non, ça on a dit que c'était la base et que c'était ça la hauteur
A : oui, mais dans un prisme ;...mais quand on a...en fait dans le prisme c'est ça, ça va être là en fait ;
de toutes façons c'est sur cette hauteur là qu'il faut les mettre donc on part sur cette hauteur là
M : je sais pas
ML : je pense que si moi, c'est sur cette hauteur

Dans sa première version, les élèves proposent une proportionnalité basée sur le nombre de graduations ; elle ne sera rejetée que par des considérations numériques sans remise en cause du modèle. La seconde version repose sur la proportionnalité du volume et de la hauteur, elle conduit à trois types de vérifications. La première, dans le cadre numérique, consiste à reprendre le produit en croix pour contrôler les approximations des calculs. La seconde, à l'initiative de l'enseignant, amène les élèves à reprendre la formule du volume du prisme et donc à mobiliser, du moins partiellement, le cadre géométrique.

Pr : donc tu dis, voilà à cette hauteur là je calcule le volume qui correspond à la hauteur que j'ai trouvée ; et je vérifie si ce volume c'est bien 100 l.

A : oh oui

Pr : d'accord, mais sans faire un produit en croix sinon je tourne en rond et je ne vérifie rien

M : oui, c'est ce que je faisais

A : c'est combien donc ta valeur exacte ?

M : donc ça va être 28, une fois qu'on a ça... attends, j'ai pas compris ce qu'il a dit en fait... il a dit qu'il fallait prendre...

A : pour 100, en fait tu calcules le volume de ça pour savoir si tu tombes sur ça

ML : oui, je crois que c'est ça

[...]

M : en fait ça fait 2,499 quand tu calcules ça, donc en fait tu arrondis à 2,5 et tu multiplies par 40 ça va te donner 100 pile ; mais si tu calcules vraiment ça fait ça mais bon... Donc c'est bien 0,357 dm tous les 100 l

C'est à nouveau sur une remarque de l'enseignant concernant la largeur, que le groupe remet en cause sa vérification. Cette dernière voie, l'amènera à rétablir les conversions entre registre figuratif et registre des formules et par là à construire une modélisation idoine du système dans le cadre géométrique. Le cadre algébrique sera envisagé, la largeur est une grandeur inconnue, puis abandonné, car, les élèves ne parviendront pas à obtenir une équation. Finalement, le rejet du second modèle proportionnel sera issu du passage du cadre géométrique, dans lequel les élèves auront construit un dessin du trapèze à l'échelle 1/10, au cadre numérique dans lequel s'effectueront les calculs et le contrôle du résultat.

La dernière partie du travail de ce groupe, représentée par la figure 6, s'effectue dans le mode de pensée fonctionnel. Notre hypothèse se base sur l'identification des variables hauteur et grande base par les élèves ainsi que sur leur organisation. De plus, la représentation utilisée est à la fois numérique et algébrique et traduit l'idée d'un processus entre les deux variables.

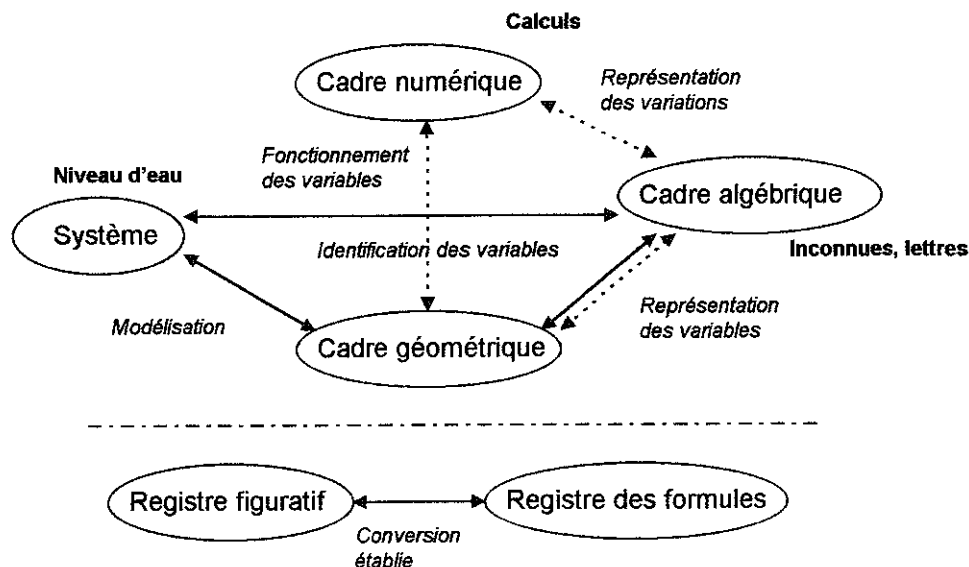


Figure 6 : La modélisation du système par une fonction résulte d'un double mouvement, les jeux de cadres entre système, cadre géométrique et cadre algébrique qui permettent d'identifier et de représenter les variables du système et les jeux de cadres entre cadres géométrique, algébrique et numérique qui permettent une représentation des variations.

Tout d'abord, les élèves repèrent l'origine de leur erreur et dans le même temps identifient les quantités variables :

A : on trouve 87,1 on est vachement loin

ML : ouais, encore...

A : non, non on est trop loin là, donc c'est notre volume qui cloche, non, c'est notre hauteur

M : mais non, mais oui c'est notre hauteur parce que notre volume

ML : sur notre dessin on trouve combien à peu près de hauteur ?

M : sur le dessin, attends...

ML : il reste plus beaucoup de temps maintenant ; on devrait faire le dessin sur le compte-rendu pour dire qu'on a trouvé

A : la base est pas bonne parce qu'on n'a pas la bonne hauteur

M : ben si, la base est forcément bonne, c'est la hauteur qu'est pas bonne ; mais si, la base est bonne

A : mais non, si la hauteur est pas bonne, la base va pas rester

M : non, mais tu as raison

ML : oui, oui

[...]

M : tu as raison parce que la base elle va augmenter en fonction de la hauteur

A : obligatoirement ça va pas être proportionnel, si c'était un parallélogramme, un rectangle

M : ouais. Parce que nous, le 1120 on l'a obtenu avec une base...

A : en fait, il faudrait calculer une base qui se trouve comme ça

M : moi, je suis partie sur des produits en croix ; donc en fait ça x va être sur la ..., c'est ça en fait entre 6 et 8 mais...

[coupure]

M : faut trouver l'aire tu crois ?

A : l'aire de ça, non ça m'étonnerait

ML : ça augmente au fur et à mesure qu'on monte

Les quatre variables sont isolées et hiérarchisées, d'abord en reconsidérant le système puis en changeant de point de vue sur la représentation géométrique, deux d'entre elles, la hauteur et la grande base, sont représentées par des lettres et la recherche des variations est lancée. Les élèves poursuivent ainsi, évoluant dans les cadres géométrique, algébrique et numérique. La représentation des variations conjointes de ces deux variables se fait dans le cadre numérique :

A : en fait ça monte de 2

M : entre 0 et 4 ! la hauteur elle monte de 0 à 4, en fait ce sera plus grand que 0 et plus petit que 4, la hauteur elle sera forcément comme ça

A : oui

M : et la base, elle va varier entre 6 et 8

A : en fait sur 4 ça va augmenter de 2, là en fait par rapport à ça tu rajoutes 2...

Enfin, le groupe s'engage dans la recherche d'une représentation des variations de la grande base en fonction de celles de la hauteur en s'appuyant sur les trois cadres déjà mentionnés. Les élèves identifient alors, numériquement, le processus en jeu :

M : alors, comment ça va varier ? S'il avait dit de déterminer la hauteur par exemple...par exemple pour $x=1$ y va être égal à 6,5 ; pour $x=1$ $y=6,5$; $x=2$ $y=7$; ah oui, regarde

A : ah, ça augmente de 0,5 tous les cm

M : ça augmente de 0,5 tous les 1 cm

A : ouais, parce que sur 4 ça t'en prend 2

M : pour $x=2$ tu auras $y=7$; pour $x=3$ tu auras $y=7,5$; pour $x=4$ tu auras $y=8$; tu comprends, donc à chaque fois que x augmente de 1 cm y il prendra 0,5

A : ça j'ai compris

M : pour $x=2$, tu auras $y=6+1$; 0,5 fois 2 ; donc en fait il y a une proportion.

Les cadres en jeu dans les deux dernières phases du travail du groupe, rejet de la seconde version du modèle erroné et recherche des variations de la grande base en fonction de celles de la hauteur sont les mêmes ; c'est leur fonctionnement qui est différent. Mais nous formons l'hypothèse que la mise en place de ces jeux de cadres, lors du premier épisode, a permis la production, dans le mode de pensée fonctionnel, d'une nouvelle modélisation du système prenant appui sur ces cadres.

Groupe N°2

La plus grande part du travail de ce groupe, s'est déroulée dans le mode de pensée arithmétique. L'utilisation des écritures numériques sous la forme d'une échelle pour représenter les résultats obtenus ainsi que l'usage d'un échantillonnage discret de la hauteur pour déterminer les volumes correspondants nous ont conduit à faire cette hypothèse.

Dans un premier temps, les élèves produisent le modèle erroné (figure 7). Cette phase débute par une modélisation correcte de la situation abreuvoir plein dans le cadre géométrique, l'exploitation de celle-ci mène au calcul juste du volume total de l'abreuvoir. Les élèves recherchent les volumes associés aux hauteurs 1, 2 et 3 dm en se basant sur la même modélisation, c'est à dire en conservant la grande base. Ils aboutissent à une représentation fausse des variations du volume et de la hauteur. Cette proportionnalité supposée les conduit à une graduation fausse.

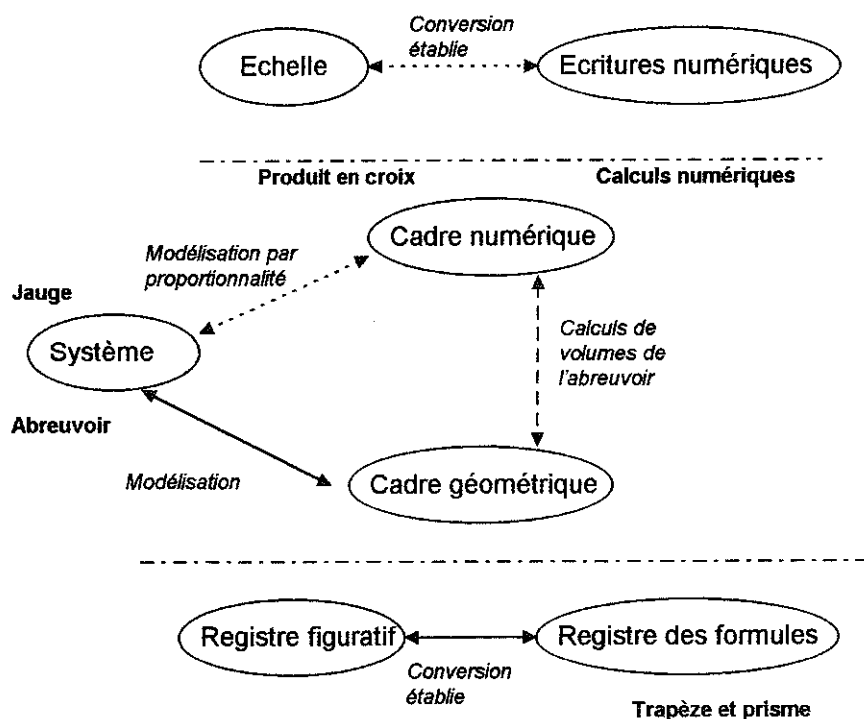


Figure 7 : Nous avons représenté : par les flèches en traits pleins la modélisation de l'abreuvoir plein, par celles en traits discontinus l'extension de cette modélisation aux autres valeurs entières de la hauteur et par celles en pointillés l'élaboration du modèle proportionnel dans le cadre numérique (cf. le brouillon de Kelly en annexe 5)

Ils corrigent ce premier modèle en découpant le trapèze en un rectangle central et deux triangles rectangles latéraux (figure 8). Ils construisent toujours leur échelle mais en déterminant la grande base du trapèze, considérée comme une inconnue, par l'application du théorème de Thalès dans l'un des triangles.

Leur modèle corrigé aboutit à l'établissement juste d'un échantillon de valeurs du volume de l'abreuvoir pour quatre hauteurs d'eau entières. La représentation des résultats par une échelle leur permet de contrôler le fait que les variations du volume ne sont pas proportionnelles à celles de la hauteur mais elle ne les aide pas à imaginer leur nature. Cette situation déstabilise le groupe.

Au cours de ce travail, les élèves n'ont considéré que deux variables, le volume de l'abreuvoir et la hauteur de l'eau. La grande base du trapèze n'a pas ce statut, elle est une inconnue à déterminer pour pouvoir calculer le volume. Ce statut s'élèvera en obstacle lorsque Kelly recherchera une expression

algébrique des variations du volume en fonction de celles de la hauteur ou lorsque Romain tentera de reposer le problème dans le cadre algébrique.

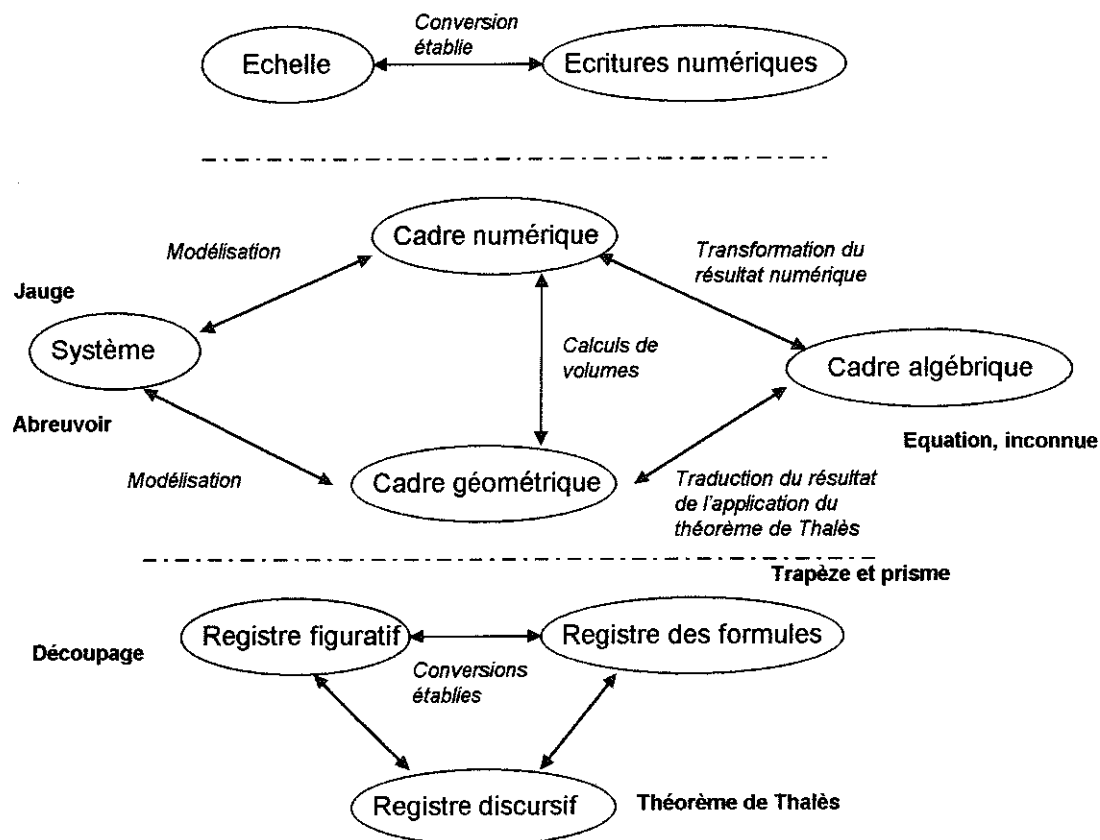


Figure 8 : Nous avons introduit le registre discursif du cadre géométrique et le cadre algébrique pour représenter l'application du théorème de Thalès. Il n'y a pas de chronologie car le schéma est appliqué trois fois mais il est clair que la modélisation produite dans le cadre numérique est la résultante de ce travail.

Groupe N°3

Nous supposons que ces élèves ont fonctionné dans le mode de pensée fonctionnel. Nous nous appuyons, pour cela, sur le fait qu'ils ont repéré les quantités variables du problème et qu'ils ont cherché à modéliser les variations. De plus, et même s'ils ont engagé la résolution d'une équation dans le cas où le volume est de 100 l, ils ont, le plus souvent, utilisé le langage des fonctions pour décrire le phénomène. D'autre part, le recours au cadre graphique et son exploitation en termes de variations, pour découvrir la nature du lien entre hauteur et grande base, renforcent notre hypothèse.

Ce mode de pensée fonctionnel et le rappel de situations antérieures analogues leur ont permis de construire un modèle correct du système abreuvoir (figure 9).

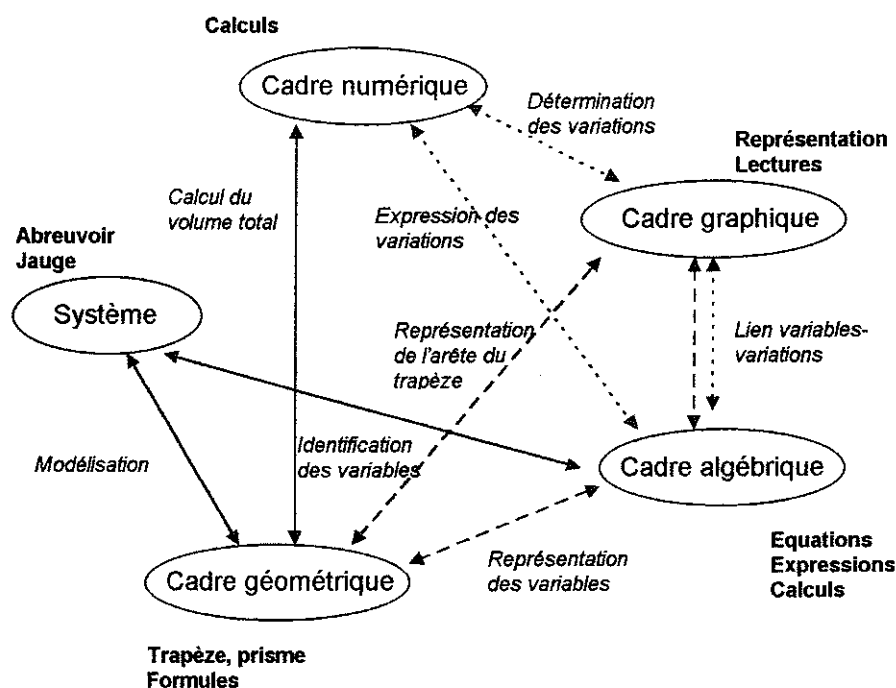


Figure 9 : Nous n'avons pas explicitement inclus les registres dans ce schéma pour ne pas le surcharger mais nous y sommes revenu dans les questions transversales. Nous représentons par les flèches en trait plein la modélisation géométrique qui conduit au calcul exact du volume total, par les flèches en traits discontinus le repérage des variables et la représentation des variations dans le cadre graphique et par les flèches en pointillés la détermination de ces variations.

La représentation correcte du système dans le cadre géométrique entraîne le calcul exact du volume total de l'abreuvoir dans le cadre numérique. La traduction de la problématique dans le cadre algébrique, par une équation, et sa mise en rapport avec la modélisation géométrique du système favorisent l'identification des variables et notamment celle de la grande base du trapèze. Les élèves se retrouvent bloqués devant une équation à deux inconnues et choisissent de représenter graphiquement l'arête oblique de la base trapézoïdale de l'abreuvoir dans un repère orthonormal.

L : pour 0 c'est égal à 6 et pour 4 c'est égal à 8, c'est joli
[...]

AC : tu vas faire quoi, un graphique ?

L : [inaudible] quelque chose à faire

AC : avec deux points ça va être pratique

L : pour $x=0$ $y=6$

F : ça s'arrête à 8

L : ah oui, ça s'arrête à 8, n'importe quoi ; entre les deux ça passe par là ; quand c'est égal à 2 c'est égal à 7, c'est fantastique ; mais on n'a pas le droit de le mettre parce qu'on voit pas du tout comment il faut faire et puis ça on peut pas le mettre, c'est une mesure graphique et c'est...

Ils travaillent dans les trois cadres géométrique, algébrique et graphique. Le groupe détermine ensuite la nature des variations en passant du cadre graphique au cadre numérique et les exprime en retournant dans le cadre algébrique. A l'issue de cette phase, la modélisation de la situation se présente, pour ce qui est de l'écrit, sous la forme d'une équation du second degré à une inconnue, la hauteur de l'eau.

En fait, les élèves semblent être conscients d'avoir traité un cas général, et, ils cherchent une méthode générale pour obtenir la hauteur d'eau connaissant le volume contenu dans l'abreuvoir. La réduction du nombre de variables de trois à deux associée au fait de n'envisager les variations que dans le cadre numérique, les mène à un modèle erroné de la fonction réciproque (figure 10).

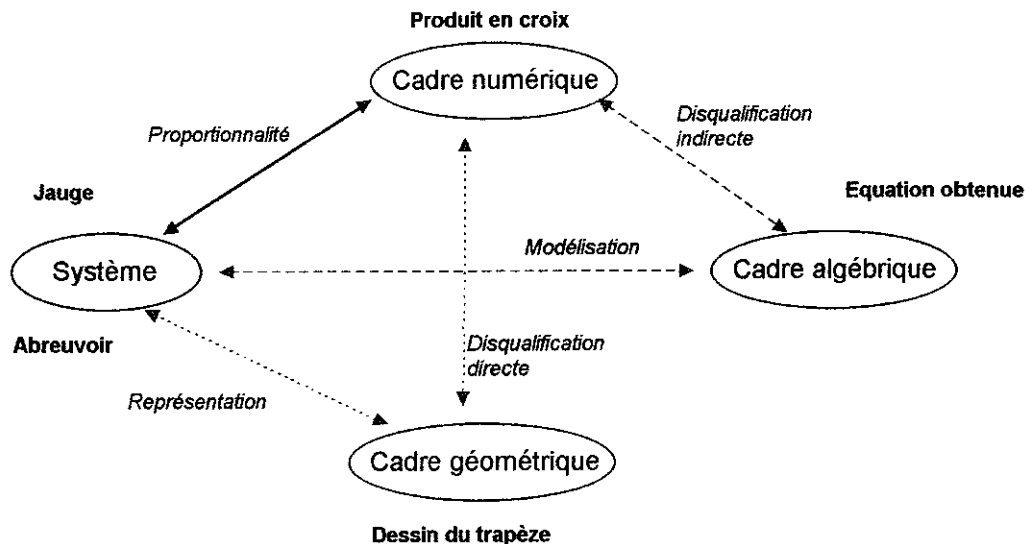


Figure 10 : Nous avons représenté par la flèche en trait plein le modèle proportionnel de la fonction réciproque, par les flèches en pointillés sa disqualification directe et par les flèches en traits discontinus son rejet par l'utilisation du modèle algébrique.

Franck propose une disqualification directe de ce modèle en s'appuyant sur la représentation géométrique du système alors que Lauren obtient une disqualification indirecte en substituant, dans l'équation obtenue auparavant, à h la valeur supposée exacte.

Pr : alors, comment vous avez fait ?

L : on a remplacé les h par ça en espérant que ça nous donne 5 ; 5 ça doit être l'équivalent pour 100

Pr : d'accord, et alors est-ce que ça donne 5 ?

L : 4 virgule quelque chose ; 4,42 non 4,31 quand j'ai fait

Pr : oui, et ça signifie quoi alors ?

F : c'est pas bon

Pr : quoi, c'est pas bon ?

F : il y a un chiffre qu'est pas bon

L : non, c'est ça qu'est pas bon.

Ils finissent par la recherche d'une solution graphique au problème, dans un premier temps en utilisant une machine graphique puis en traçant, à la main, la courbe représentative de la fonction dans un repère orthogonal (figure 11).

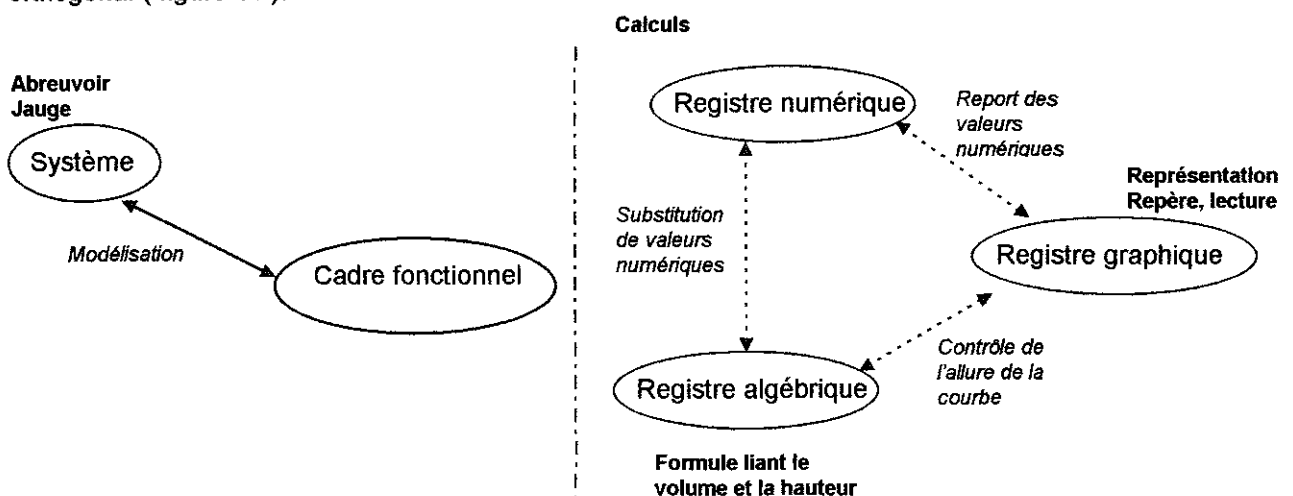


Figure 11 : Nous avons représenté par une flèche en trait plein la modélisation fonctionnelle et par des flèches en pointillés l'élaboration de la courbe représentative de la fonction.

Le système est modélisé par une expression algébrique, la substitution de valeurs numériques à h permet de calculer le volume correspondant puis de construire la courbe représentative de la fonction en plaçant suffisamment de points dans le repère orthogonal. Un travail dans le registre graphique du cadre fonctionnel devait permettre de conclure.

Groupe N°4

Les élèves constituant ce groupe ont résolu le problème dans le mode de pensée algébrique. Cette affirmation repose sur le récit de la modélisation par Ludovic, récit au cours duquel il interprète la situation en termes d'inconnues, de nombre d'inconnues à réduire et d'équation à résoudre. D'autre part, son découpage de la figure géométrique semble traduire une vision statique du phénomène, la hauteur et la largeur représentées ayant valeur de cas général.

L'ensemble du travail est schématisé par la figure 12.

Dans la première partie, les élèves établissent une représentation du système dans le cadre géométrique pour calculer le volume total de l'abreuvoir dans le cadre numérique. Dans un deuxième temps, cette représentation et l'assimilation du phénomène remplissage de l'abreuvoir conduisent les élèves à l'identification de trois inconnues : la hauteur, la largeur et le volume.

Pr : alors, vous avez trouvé ?

M : le volume

Pr : qu'est-ce qu'on en fait du volume ?

L : et bien, moi j'avais proposé quelque chose mais il y a deux inconnues

Pr : ah, bien, il y a deux inconnues

L : et même trois avec le volume

Pr : oui

L : faut que je trouve un rapport...avec cette longueur là et cette hauteur là

F : et on peut faire un rectangle

Pr : peut-être oui qu'on peut faire avec un rectangle

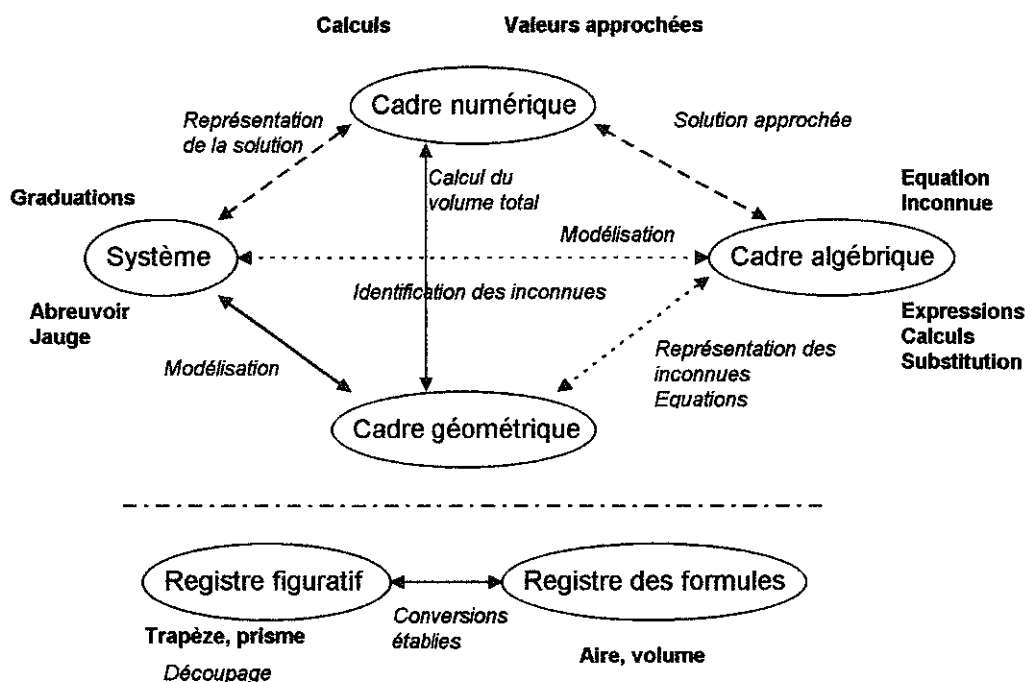


Figure 12 : Par les flèches en trait plein, nous avons représenté la modélisation géométrique du système et le calcul du volume total, par celles en pointillés, la modélisation algébrique et par celles en trait discontinu l'élaboration de la solution.

Le découpage du dessin représentant une coupe de l'abreuvoir associé à une astucieuse décomposition du volume total, l'ensemble s'exprimant dans le cadre algébrique, permet au groupe d'aboutir à une modélisation algébrique du système.

Au cours de la dernière phase, les élèves recherchent, dans le cadre algébrique, la solution au problème en résolvant une première équation du second degré. Ils s'engagent dans cette démarche en ayant perçu la généralité :

- E : quand tu fais le volume égal à 100 c'est heu...tu peux le faire égal à 200 ça fera la même chose
 L : non ça fait quelque chose d'un peu plus grand
 E : oui, si tu parles du résultat mais faut...ça revient au même
 L : oui, ça [inaudible].

Sur son brouillon, Ludovic détaille la résolution de l'équation dans le cas où $V=100$ puis pose l'équation, sous forme canonique, dans le cas où $V=200$ et écrit directement les résultats exacts dans les autres cas. Le travail s'achève par la détermination des valeurs numériques approchées et par leur représentation en une graduation à l'échelle $\frac{1}{2}$.

Questions transversales

Dans cette dernière partie, nous revenons, à partir de l'analyse des travaux des différents groupes, sur la notion de modélisation et sur les phases de transition entre modes de pensée. Nous fournissons en annexe 6, un montage des brouillons des élèves que nous avons exploités dans la seconde partie de ce paragraphe.

A propos de la notion de modélisation

La première phase de la modélisation consiste en le repérage des aspects pertinents du système. Il semble, dans cette expérimentation, que celui-ci dépende du mode de pensée dans lequel s'effectue l'analyse de la situation. Ainsi, on a vu les élèves abordant le problème dans le mode de pensée arithmétique, produire une modélisation géométrique du système abreuvoir ne prenant en compte que deux grandeurs variables, la hauteur et le volume. Cette modélisation mène ensuite à l'élaboration d'un modèle numérique erroné. La détermination des autres aspects pertinents du système proviendra de la correction de ce modèle proportionnel et conduira à une modélisation, arithmétique, algébrique ou fonctionnelle, juste.

La situation de l'abreuvoir nous permet de revenir sur la propriété de récurrence du concept de modélisation. En effet, le système abreuvoir est, dans un premier temps, modélisé dans le cadre géométrique. Ce premier modèle, dans le rôle d'un nouveau système, est à son tour modélisé et ce, dans cette expérience, de trois manières différentes. Il peut s'agir d'une fonction représentée dans différents registres sémiotiques, d'une modélisation algébrique par une équation du second degré comportant un paramètre ou d'un modèle arithmétique articulant algorithme de calcul et représentation des résultats numériques.

La réversibilité est la seconde propriété importante de la notion de modélisation. Dans notre cas, elle peut s'illustrer soit entre le second modèle et le système abreuvoir, soit entre le second modèle et le premier modèle géométrique jouant alors le rôle de système (ce que nous noterons alors système géométrique) soit encore, entre le modèle géométrique et le système initial.

La première constatation que nous pouvons faire concerne les trois groupes d'élèves N°s 2, 3 et 4, qui ont achevé la seconde modélisation. Nous remarquons, dans ces trois cas, que le dernier modèle est directement mis en rapport avec le système abreuvoir. Dans le groupe N°2, la modélisation arithmétique, rapportée au système abreuvoir, ne peut être exploitée pour produire la graduation de la jauge ; dans le groupe N°3, le modèle fonctionnel est utilisé directement pour résoudre le problème et le lien avec le système géométrique s'évanouit ; dans le groupe N°4, une fois la modélisation algébrique obtenue, le

système géométrique est oublié au profit du système abreuvoir et de l'obtention de la graduation de la jauge.

Par contre, lorsque le second modèle est remis en cause, il y a, dans un premier temps, repli sur le système géométrique dont il est issu.

Nous l'avons observé, lors de la réfutation de la première version du modèle erroné et lors des trois vérifications portant sur sa seconde version, dans le travail du groupe N°1 ; elles reprennent soit leurs calculs numériques, contrôlant ainsi leur travail dans le modèle erroné, soit l'application de leur formule du volume, retournant alors sur leur seconde modélisation, soit finalement leur système géométrique ce qui les conduira à rectifier leur première modélisation du système abreuvoir. De même, le rejet du modèle erroné de la fonction réciproque, dans le cas du groupe N°3, s'effectue par substitution dans la formule, seconde modélisation du système abreuvoir, liant le volume de l'abreuvoir et la hauteur d'eau. La mise en échec du modèle proportionnel par le groupe N°2 mène ces élèves à une reprise de leur modélisation du système géométrique ; il en est de même pour Kelly, lorsqu'elle abandonne son modèle arithmétique, c'est le système géométrique qu'elle cherche à modéliser autrement.

Nous reviendrons sur ce jeu complexe entre modèle et système dans la conclusion.

A propos des phases de transition entre modes de pensée

Au cours de cette séance, nous avons observé deux transitions du mode de pensée arithmétique au mode de pensée fonctionnel et une transition du mode de pensée algébrique au mode de pensée fonctionnel. Les deux premières ont eut lieu dans le fonctionnement des élèves du groupe N°1 et sur la fin du travail de Kelly du groupe N°2. La troisième s'est déroulée au cours de la phase de détermination de la solution par Ludovic du groupe N°4, puis dans un travail complémentaire.

Nous supposons que les leviers sur lesquels elles prennent appui sont de trois types : une modélisation géométrique du système abreuvoir qui intègre les variations de la grande base et celles de la hauteur, la coordination de plusieurs cadres mathématiques pour les représenter et identifier leur fonctionnement et le repérage d'un processus dans la répétition d'une suite d'opérations. Ils jouent sur un changement de statut des grandeurs géométriques ou algébriques qui s'observe dans le choix des lettres, le langage employé et les formes d'écriture et de représentations utilisées.

Dans les exemples de transitions entre mode de pensée arithmétique et mode de pensée fonctionnel, celui du groupe N°1 semble constituer un succès alors que Kelly échoue dans sa tentative.

Dans le premier cas, les élèves s'appuient sur une modélisation géométrique dynamique du système abreuvoir dans laquelle les quatre variables, hauteur, grande base, aire du trapèze et volume sont identifiées et hiérarchisées. Le choix des lettres pour représenter la hauteur et la grande base procède d'un double langage :

Pr : il y a un y, il y a un x, c'est quoi le x ? (*arête oblique du trapèze*)

M : x c'est la hauteur, ce qu'on cherche en fait

[...]

Pr : voilà donc c'est ça x

M : et ça ça va varier entre 6 et 8

Pr : il faut voir comment

M : ben, en fonction de x

[...]

ML : tu as appelé y...

M : y c'est la base qu'on recherche quand x c'est la hauteur, c'est ce qu'on veut.

Ainsi, la lettre x symbolise à la fois une inconnue, le but final du problème n'est pas oublié, et une variable. De même, la lettre y possède cette double personnalité, elle symbolise une variable dépendante de la variable x mais aussi une inconnue à déterminer lorsque l'on connaît la hauteur. Les élèves effectuent donc plutôt un passage du cadre géométrique dans le cadre algébrique.

Elles traduisent les termes « varier entre » par les inégalités « $0 < x < 4$ » et « $6 < y < 8$ ». Ces écritures semblent d'une part renforcer le statut de variable des deux grandeurs et d'autre part intégrer la continuité des variables. Il est clair pour nous que cette continuité s'entend au sens propre du terme et traduit la continuité physique du phénomène de remplissage.

La détermination des variations passe par une présentation de données numériques issues du cadre géométrique sous une forme qui évoque à la fois un tableau de valeurs et un processus permettant d'obtenir la valeur de y à partir de celle de x . La première écriture de ce genre se trouve sur le brouillon de Magali, elle écrit :

« $x=4$ qd $y=8$; pour $x=1$ $y=6,5$; $x=2 \rightarrow y=7$; $x=3 \rightarrow y=7,5$ ».

Elle marque une évolution, par le choix des termes et des symboles ; le « quand » utilisé au début inverse la dépendance des variables puis elle est rétablie par l'emploi de « pour » pour le second couple de valeurs et des flèches qui, pour les deux derniers couples de valeurs remplacent les mots, matérialisant ainsi le processus en jeu.

Le choix d'un échantillonnage discret de la hauteur, outre son efficacité pour extraire des valeurs numériques du dessin du trapèze, rappelle le fonctionnement initial des élèves dans le mode de pensée arithmétique.

Pour identifier la nature du processus, elles reprennent les écritures précédentes qu'elles transforment dans le cadre numérique pour isoler, dans les variations de la grande base, la valeur constante 6 de la partie variable. Toujours sur le brouillon de Magali, il est écrit :

« pour $x=1$ cm $y=6+0,5$; pour $x=2$ $y=6+1$ »

et dans le même temps, elle explique à ses camarades :

M : pour $x=2$, tu auras $y=6+1$; 0,5 fois 2 ; donc en fait il y a une proportion.

La séance s'achevant sur ce résultat, elles écrivent sur leur compte-rendu une solution hybride :

« pour $x=1$ $y=6,5$; pour $x=2$ $y=6,5+0,5=7$; pour $x=3$ $y=7+0,5=7,5$ ».

La seconde transition du mode de pensée arithmétique au mode de pensée fonctionnel est moins explicite et elle est le fait d'une seule élève du groupe N°2.

Seules, les deux variables hauteur d'eau et volume de l'abreuvoir ont été identifiées, la grande base du trapèze étant assimilée à une inconnue qu'il fallait déterminer pour pouvoir calculer le volume. Le registre de représentation des valeurs numériques des volumes correspondant aux valeurs discrètes de la hauteur est constitué d'une échelle graduée sur laquelle Kelly calcule l'ampleur des variations associées au parallépipède rectangle central et aux prismes à base triangulaire latéraux de son modèle géométrique. Elle constate alors la proportionnalité dans le cas du parallépipède rectangle central :

« je fais la même chose qu'avant mais j'ai coupé le trapèze en trois. Ca va toujours être proportionnel au rectangle ».

Puis elle fait la distinction entre proportionnel et non proportionnel et recherche l'expression algébrique du volume en fonction de la hauteur en mobilisant le registre graphique.

Kelly symbolise par la lettre x la hauteur de l'eau mais elle l'écrit en légende d'un trait joignant les deux bases de la face trapézoïdale de l'abreuvoir. Cette disposition nous fait penser qu'elle représente alors la hauteur en tant qu'inconnue. Il nous semble aussi qu'elle envisage une hauteur variable, car, la lettre x apparaît comme en représentant une lorsque Kelly imagine la représentation graphique de la fonction. Ainsi, comme pour le groupe N°1, cette lettre aurait un double statut.

Le volume est symbolisé soit par la lettre y soit par la lettre V , les deux symboles semblant coexister, Kelly s'adresse ainsi aux autres membres du groupe et à l'enseignant :

« j'ai trouvé $y=24x$, c'est pour tracer la droite mais il y a plus quelque chose que j'arrive pas à trouver ».

Elle désigne, en disant cela, une expression algébrique incomplète du volume en fonction de la hauteur qui s'écrit sous la forme suivante : « $V = \frac{(+6)x}{2} * 40$ ». La lettre y paraît être attribuée à la symbolisation du volume lorsque Kelly évoque la représentation graphique de la fonction et la lettre V joue ce rôle dans l'élaboration de l'expression algébrique.

Dans les traces d'écritures exécutées au crayon mine puis effacées, on décèle une expression algébrique de la fonction linéaire du modèle erroné ; elle est écrite sous la forme $V=$, mais le V est précédé d'un y raturé. Cela renforce notre hypothèse sur les rôles respectifs de ces deux lettres.

On trouve aussi la lettre y gommée, à la place du trou, dans l'expression algébrique incomplète du volume en fonction de la hauteur. Nous supposons que Kelly l'avait introduite pour symboliser ce « plus quelque chose » qu'elle ne parvenait pas à découvrir.

Ces deux échecs, celui-ci et celui du modèle arithmétique ont des origines à la fois communes et différentes. Leur point commun réside dans le fait de n'envisager que deux grandeurs variables dans le système abreuvoir. Mais, dans le modèle arithmétique, cette situation aurait pu évoluer favorablement en choisissant de représenter graphiquement les résultats obtenus. Ce registre aurait peut-être orienté les membres de ce groupe vers la construction complète de la représentation et donc le calcul d'autres valeurs. La répétition de la suite d'opérations associée à la représentation graphique d'une courbe aurait pu alors faciliter la transition vers le mode de pensée fonctionnel. Alors que la seconde voie semble être sans issue car elle impose la remise en cause du modèle géométrique du système abreuvoir pour introduire la variable manquante.

L'exemple de transition du mode de pensée algébrique vers le mode de pensée fonctionnel est celui du travail de Ludovic du groupe N°4 dans deux situations : dans la première, il résout les onze équations du second degré permettant d'obtenir la solution au problème en intériorisant le processus de résolution, dans la seconde il cherche une autre solution au problème.

Dans le premier cas, Ludovic travaille sur son modèle algébrique du système abreuvoir qui est représenté par une équation du second degré à une inconnue, la hauteur d'eau, et un paramètre, le volume d'eau contenu dans l'abreuvoir. Dans un premier temps, il obtient la solution du cas $V=100$ l en transposant, en factorisant par 10 et en écrivant le trinôme en facteur sous la forme canonique. La résolution de l'équation occupe alors douze lignes de calculs algébriques.

Puis il reprend cette résolution du début, en conservant la valeur du volume du côté droit de l'égalité, en divisant par 10 puis en écrivant sous la forme canonique le trinôme situé à gauche du signe égal.

L'écriture de la solution ne prend plus que quatre lignes de calculs algébriques.

Il répète ces quatre lignes dans le cas $V=200$; cela lui permet de repérer définitivement ce qui varie dans le processus de résolution et comment cela varie. Pour déterminer les autres valeurs de la hauteur, Ludovic applique ces variations.

Nous formons l'hypothèse qu'un tel travail suppose une transition vers le mode de pensée fonctionnel, car, la réduction du nombre de pas de calcul et la détermination de l'influence du changement de la valeur du paramètre sur la résolution de l'équation relèvent de la recherche, de la structuration et de l'identification d'un processus général comportant une entrée et une sortie clairement distinguées. La présentation des valeurs numériques des résultats sous la forme d'un tableau renforce cette hypothèse.

Dans le second cas, Ludovic, après avoir entendu que la table voisine recherchait une solution graphique, choisit de représenter l'arête oblique de la base trapézoïdale de l'abreuvoir dans un repère orthonormal.

L : sur le graphique tu mets x en abscisse [inaudible] ça te fait cette forme là

M : [inaudible]

L : dans l'autre sens ce serait peut-être mieux ; oui dans l'autre sens ce sera plus pratique

Depuis le début de la séance, il désigne par la lettre h la hauteur de l'eau, par la lettre V le volume d'eau contenu dans l'abreuvoir et par la lettre x la grande base du trapèze. Le choix des lettres traduit l'identification et la représentation dans le cadre algébrique des deux inconnues principales qui sont la hauteur et le volume et d'une inconnue secondaire dont il faut s'affranchir par substitution.

Ce choix de la lettre x pour symboliser la grande base du trapèze peut l'avoir conduit, par association avec la dénomination des abscisses, à représenter l'arête « à l'envers » dans le repère orthonormal. Ludovic corrige alors sa représentation graphique et en déduit l'expression algébrique des variations de la grande base en fonction de celles de la hauteur. Pour ce faire, il change de lettres pour désigner les variables. Il désigne par x la hauteur, figurant en abscisse sur la représentation graphique et par y la grande base du trapèze, figurant elle en ordonnée. Il écrit donc d'abord l'équation réduite de la droite. Dans un second temps, Ludovic reprend ses lettres d'origine pour désigner la hauteur et la longueur de la grande base.

L : monsieur, on trouvait en cinq minutes avec ça

Pr : pardon ?

L : on trouvait en cinq minutes avec ça, cette longueur là en fonction [inaudible] du graphique on trouvait directement x égal à ...

Pr : oui

Il a alors recours à l'expression « en fonction de » pour désigner la relation obtenue.

Nous pensons que le jeu des lettres lors du passage du registre graphique, dans lequel est tracée la courbe représentative de la fonction qui modélise les variations de la grande base du trapèze en fonction de celles de la hauteur, au registre des expressions algébriques marque effectivement une conversion entre ces deux registres sémiotiques de représentation d'une fonction. Cette conversion et l'emploi de l'expression « en fonction de » pour décrire le résultat obtenu, alors que jusqu'à présent Ludovic parlait de « rapport entre ça et ça », nous amène à former l'hypothèse qu'il a explicitement identifié la fonction en question.

Cependant, l'usage du cadre graphique résultant d'une « fuite », nous ne pouvons pas être assuré du rôle de l'élaboration d'un processus lors de la résolution des équations sur ce passage au mode de pensée fonctionnel.

Nous avons observé un phénomène similaire dans la première partie du travail du groupe N°3. Sur le brouillon de Lauren, l'écriture des formules géométriques montre l'usage des lettres b, B et h pour symboliser les petite base, grande base et hauteur du trapèze. La longueur de l'abreuvoir figure sous la forme numérique, 40 dm, pour marquer la conversion :

L : je pense que c'est ça, donc c'est petite base plus grande base fois hauteur divisé par deux multiplié par 40 parce que c'est des dm, c'est pas ça ?

Le problème est ensuite modélisé par une équation à deux inconnues, dénommées x et y, les lettres sont introduites dans l'ordre où les grandeurs se présentent dans l'écriture de l'équation :

$\frac{(6+x)y}{2} * 40 = 100$, et l'expression algébrique est décrite dans le même ordre sous la forme verbale :

L : 6 plus x fois...ça aussi ça change...fois y divisé par 2 fois 40 égale 100 ; on peut pas trouver comme ça.

La lettre x représente alors la grande base inconnue du trapèze et la lettre y la hauteur, elle aussi inconnue. Cette démarche est rapidement abandonnée au profit d'une voie fonctionnelle s'appuyant sur le repérage des variations de la grande base :

L : de toutes façons ça peut pas être plus petit que 6

AC : pourquoi ?

L : ben, plus petit que 6

F : la base est comprise entre 6 et 8.

Les deux variables sont désignées dans leur rapport de dépendance :

« Soit x la hauteur soit y la longueur de la base »

et les couples de valeurs extrêmes de la fonction écrits sous une forme qui traduit ce rapport :

« si $x=0 \rightarrow y=6$; si $x=4 \rightarrow y=8$ ».

Cette présentation des données couplée à l'introduction de la représentation graphique de l'arête oblique de la base trapézoïdale de l'abreuvoir dans un repère orthonormal pour identifier la nature des variations, détermine, à notre avis, la recherche d'un processus.

Elle aboutit grâce à une conversion établie entre le registre graphique et celui des écritures numériques. Les variations sont analysées à partir de la représentation graphique :

L : regarde là, la hauteur elle augmente de 4 et ça ça augmente de 2 ; on l'avait sur le graphique !

puis énoncées verbalement et écrites sous forme numérique :

« $\rightarrow$ pour 2 $\rightarrow$ 1 ; pour 1 $\rightarrow$ 0,5 »

L : la grande base augmente de 2 donc pour 2...1 et 1...0,5 donc...je me demande à quoi ça sert qu'on ait trouvé cela.

La conversion s'achève par le dessin d'une flèche symbolisant cette variation et partant du point « ordonnée à l'origine » sur la représentation graphique. La fonction affine est entièrement déterminée et son expression algébrique n'est pas écrite sur le brouillon, il y a directement substitution dans l'équation avec un changement de lettres pour désigner la variable indépendante par un h :

L : attends, moi j'aime bien avec les x y mais là on va prendre h la hauteur donc 6 plus 6 plus $\frac{1}{2}$ de h fois h divisé par 2 fois 40 égal 100.

L'expression algébrique obtenue après développement et réduction est, pour Lauren, celle d'une fonction et la suite du problème repose sur la recherche de la fonction réciproque :

L : là tu cherches juste comment exprimer la hauteur en fonction du volume en fait

Elle conservera ce point de vue lorsque le groupe obtiendra la formule générale sous la forme :

$$12h + \frac{1}{2}h^2 = \frac{V}{20}.$$

Au dessus de cette expression, alors précédée de « ou » et sur son brouillon, Franck a noté :

$10h^2 + 240h = V$. Il s'agit donc de la première forme qu'il ait déterminée. C'est peut-être cette double écriture qui lui permet d'affirmer que la formule donne le volume en fonction de la hauteur :

Pr : qu'est-ce qu'elle nous dit la formule par rapport au problème ?

L : elle nous dit que...

F : elle nous dit que le volume , il varie en fonction de la hauteur.

Ainsi, la lecture de cette expression s'effectuerait de la manière suivante : à gauche du signe égal, j'ai une expression contenant du h , je calcule et j'obtiens à droite un volume. Elle exprimerait le mode de fonctionnement arithmétique. Alors que si nous reprenons le raisonnement de Lauren sur la première expression :

L : logiquement on doit pouvoir remplacer le V là par 100 et que ça nous donne la hauteur

nous pouvons interpréter la position de la lettre V à droite du signe égal comme l'expression du rôle de paramètre du volume. Le positionnement à gauche du signe égal de l'expression en h signifierait alors que cette formule a le statut d'équation.

Conclusion

Les outils d'analyse développés à l'occasion de cette recherche, en particulier la représentation des épisodes du travail des groupes par un schéma intégrant le système, les cadres mathématiques et les registres sémiotiques de représentation au sein de ceux-ci, nous ont notamment permis : de repérer le rôle du travail de conversion entre les registres figuratif, discursif et celui des formules dans le cadre géométrique lors de la détermination du volume total de l'abreuvoir ou de la modélisation géométrique du système abreuvoir, de distinguer la conversion du registre graphique au registre des expressions algébriques du changement de cadre correspondant et aussi d'observer le jeu système-modèle au travers des cadres mobilisés.

Nous avons ainsi noté que la résolution du problème suppose plusieurs modélisations consécutives et que l'identification des systèmes et modèles successifs n'est pas évidente pour les élèves, particulièrement au cours de la phase de validation du modèle.

Nous avons aussi remarqué que le cadre graphique a été plus facilement utilisé, dans cette expérience, pour représenter la situation et en déduire l'expression algébrique de la fonction alors que le recours à la représentation graphique de la fonction pour obtenir les graduations de la jauge n'a pas semblé convaincant aux élèves.

CONCLUSION DU MEMOIRE

Notre thème d'étude portait sur l'enseignement de la notion de fonction en classe de seconde et, plus précisément, sur un enseignement intégrant l'aspect outil de cette notion. Nous nous sommes donc intéressé à ce que nous avons appelé des situations fonctionnelles, d'un point de vue théorique en recherchant leurs caractéristiques dans les ouvrages de mathématiques de seconde et d'un point de vue expérimental en observant deux groupes d'élèves lors de la résolution de deux problèmes fonctionnels.

L'étude des manuels, basée sur le repérage et le codage de certaines caractéristiques des situations fonctionnelles, a mis en valeur plusieurs faits. Tout d'abord, la fermeture des énoncés, puisque le choix des variables indépendante et dépendante principale est déjà effectué dans 97% des cas. Le retour sur la situation initiale dépend de la présence d'un ou plusieurs thèmes d'étude et de la nature de ceux-ci plutôt que de l'origine extra ou intra mathématique du problème. La prédominance de l'expression algébrique et de la représentation graphique, isolées ou associées, comme registres sémiotiques de représentation de la fonction. Les thèmes d'étude portent majoritairement sur le partage, et alors la situation comporte une représentation graphique, et établissent ainsi le lien avec l'algèbre du collège par la résolution d'équations et d'inéquations. Les autres thèmes d'étude retenus dans notre recherche, détermination d'un extremum et étude des variations de la fonction, un peu en retrait dans les manuels de seconde, deviendront certainement l'objet essentiel des situations fonctionnelles en classe de première.

Ainsi, nous pouvons en conclure que le mode de pensée fonctionnel est imposé et demeure lié à la résolution d'équations.

Dans la partie expérimentale, notre analyse s'appuyait sur différents cadres théoriques : la dialectique outil / objet et les jeux de cadres, le concept de modélisation, le rôle des registres sémiotiques de représentation et la distinction entre les statuts « procédural » et « structural » de la notion de fonction. Ceux-ci nous ont conduit à développer des outils d'analyse intégrant des moyens existants, changements de cadre et conversions entre registres, dans des graphes synthétisant des épisodes du travail des groupes d'élèves. Ces schémas soulignent ainsi les rôles différents des cadres mathématiques et des registres sémiotiques de représentation dans l'activité des élèves et permettent d'exhiber les modélisations successivement produites. Notons d'ailleurs que les différents modèles sont produits dans différents cadres, liés au mode de pensée dominant, et ne sont pas toujours directement de nature fonctionnelle. De plus, ces graphes nous fournissent des moyens d'analyse de la construction de modèles erronés par les élèves dans deux situations assez différentes. Nous pensons donc qu'ils pourront être réexploités lors de l'analyse d'autres expérimentations.

Dans la mise en rapport des deux expériences, apparaît comme résultat la similarité des modes de pensée arithmétique, algébrique et fonctionnel en œuvre dans la résolution des deux problèmes, malgré la suggestion du mode de pensée fonctionnel dans le premier. C'est pourtant durant le travail sur la seconde situation que des phases de transition vers le mode de pensée fonctionnel s'expriment le plus nettement. L'autonomie des élèves dans le choix de l'outillage mathématique a peut-être favorisé l'émergence de ce type de comportement. Il y a aussi un changement de contrat entre les deux situations fonctionnelles : dans la première, les élèves se donnent pour contrat de « faire de l'algèbre » alors que dans la seconde, même en rendant le problème difficile, la question globale a permis l'instauration d'un jeu complexe entre système et modèle. Dans le premier cas, le mode de pensée fonctionnel émerge peu et pas facilement ; la question directe de la recherche de l'expression algébrique de la fonction sans envisager les variations de la figure géométrique, a peut-être favorisé ce fonctionnement dans le mode de pensée algébrique. Dans le second cas, le mode de pensée fonctionnel semble s'imposer, directement ou au cours de la recherche, pour une partie des élèves ; la transition résulte du travail de modélisation de la situation. Le problème de la validation ou de la réfutation du modèle demeure cependant à la charge de l'enseignant. Il paraît alors nécessaire, pour accroître l'autonomie et l'efficacité des élèves dans la résolution de problèmes, de trouver un langage qui permette de prendre en compte le lien système-modèle résultant de l'activité de modélisation. On a pu aussi constater le rôle important du vécu dans le mécanisme de transition, il permet le raccrochage de la situation à du connu facilitant ainsi la mobilisation de connaissances antérieures.

Dans les deux expériences, les transitions prennent du temps, l'évolution est lente. Elles s'effectuent par des jeux sur les lettres et sur les différentes représentations des objets en rapport avec les cadres mathématiques sur lesquels s'appuie l'activité de modélisation ; les symboles utilisés par les élèves lors des phases de transition vers le mode de pensée fonctionnel soutiennent cette activité. En paraphrasant Y CHEVALLARD, (CHEVALLARD, 1989), nous disons qu'il y a un développement de l'épaisseur sémiotique, la production du modèle fonctionnel conduisant ensuite au resserrement de cette épaisseur autour de l'expression algébrique de la fonction.

BIBLIOGRAPHIE

- BREINDENBACH D, DUBINSKY E, HAWKS J, NICHOLS D : (1992) « Development of the process conception of function », *Educationnal studies in mathematics*, N°23, P247-285, Kluwer academic publishers
- CHEVALLARD Y : (1984) « Le passage de l'arithmétique à l'algébrique. L'évolution de la transposition didactique », *Petit x*, N°5, P51-95, IREM de Grenoble
- CHEVALLARD Y : (1989) « Le passage de l'arithmétique à l'algébrique. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation », *Petit x*, N°19, P43-72, IREM de Grenoble
- CHEVALLARD Y : (1990) « Le passage de l'arithmétique à l'algébrique. Voies d'attaques et problèmes didactiques », *Petit x*, N°23, P5-38, IREM de Grenoble
- DOUADY R : (1986) « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 7 N°2, P5-31, Grenoble
- DUVAL R : (1993) « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée », *Annales de didactique et de sciences cognitives*, N°5, P37-65, IREM de Strasbourg
- DUVAL R : (1994) « Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique », *Repères-IREM*, N°17, P121-138, Topiques éditions
- ROBERT A : (1988) « Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels », *Cahier de didactique des mathématiques*, N°51, Université Paris VII
- ROBERT A et ROBINET J : (1989) « Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels », *Cahier de DIDIREM didactique des mathématiques*, N°4, Université Paris VII
- SFARD A : (1991) « On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin », *Educationnal studies in mathematics*, N°22, P1-36, Kluwer academic publishers

ANNEXES

Annexe N°1 : Exemples de tâches extraites des ouvrages

Annexe N°2 : Grilles de lecture des manuels et grilles bilans

Annexe N°3 : Feuille d'observation et un exemple de notes d'observateur

Annexe N°4 : Productions d'élèves de la première expérimentation

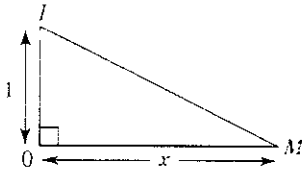
Annexe N°5 : Travaux d'élèves de la seconde expérience

Annexe N°6 : Montage de brouillons d'élèves de la seconde séance

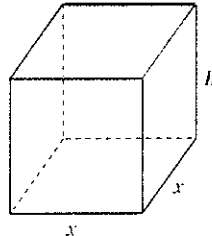
Annexe N°1

3 activités empruntées au manuel "Ténacher 2^{nde}"

- 1 Exprimer, en fonction de $x = OM$, l'aire $A(x)$ et le périmètre $p(x)$ du triangle OMI .



- 3 Une boîte sans couvercle, de contenance $\frac{1}{2}$ litre, a la forme du pavé droit ci-contre (x et h sont exprimés en centimètre).



Exprimer en fonction de x la hauteur h et l'aire extérieure $A(x)$ (fond plus parois latérales).

- 2 Qu'importe le flacon...

Un flacon a la forme d'un pavé droit (hauteur : 12 cm ; section carrée de 9 cm de côté) surmonté d'un goulot (hauteur : 12 cm ; section carrée de 3 cm de côté).

Lorsqu'on remplit le flacon jusqu'à la hauteur x , on note $f(x)$ le volume obtenu (en cL).

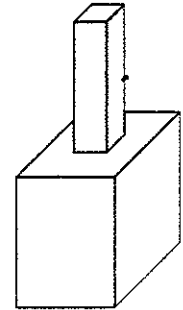
- a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

b) Distinguer :

$$0 \leq x \leq 12$$

$$\text{et } 12 \leq x \leq 24.$$

- b) Représenter graphiquement f .



1 exercice résolu du même ouvrage suivi d'un exemple de trousseau pratique.

Exercice résolu Déterminer la position des points M_1 et M_2 sur le pourtour du rectangle $ABCD$ de manière à obtenir trois domaines de même aire (le point O est donné).

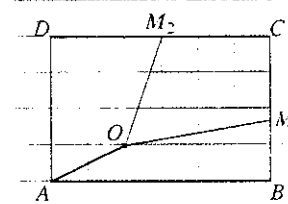


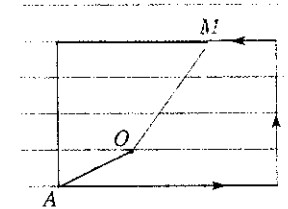
Fig. 13

Méthode suggérée

Étant donné un point M sur le pourtour du rectangle $ABCD$, on désigne par :

- x la longueur du trajet d'origine A et d'extrémité M (en vert sur la figure ci-contre) ;
- $f(x)$ l'aire du domaine correspondant.

Expliciter $f(x)$ en fonction de x et utiliser la représentation graphique de f pour résoudre le problème posé.



(Unité de longueur : le côté d'un carreau du quadrillage.)

Fig. 14

1. Explicitons $f(x)$

Les schémas ci-après font comprendre que quatre cas sont à l'étude et comment est conduit le calcul de l'aire dans chacun d'eux (les nombres 3, 11 et 20 sont les aires des parties sablées) :

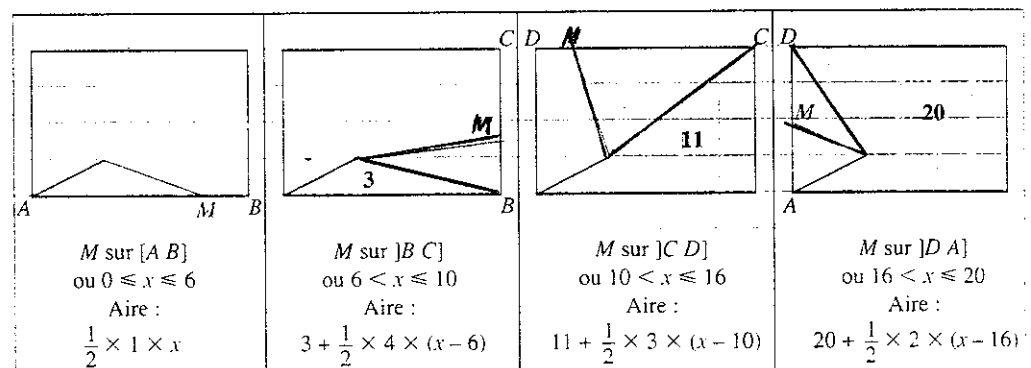


Fig. 15

Situation
ouverte.
+
partage

En résumé, et après avoir réduit et simplifié, la fonction f est définie sur $[0, 20]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pour } 0 < x \leq 6 \\ 2x - 9 & \text{pour } 6 < x \leq 10 \\ \frac{3}{2}x - 4 & \text{pour } 10 < x \leq 16 \\ x + 4 & \text{pour } 16 < x \leq 20. \end{cases}$$

La fonction f est une fonction *affine par morceaux* dont la représentation graphique (cf. figure 16) nous fait voir, sans nous surprendre, une fonction croissante et « bien raccordée ».

2. Venons-en au problème initial

L'aire du rectangle étant égale à 24, les points M_1 et M_2 , qui partagent ce rectangle en trois domaines de même aire, sont donc les points associés aux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = 8$ (un tiers de l'aire) et $f(x_2) = 16$ (deux-tiers, bien sûr).

La résolution graphique (cf. T.P. A) révèle les solutions, donne des valeurs approchées si l'on veut, mais surtout les « bonnes » équations à résoudre.

■ Le graphique localise sans équivoque x_1 entre 6 et 10, ce qui montre que x_1 est solution de l'équation $2x - 9 = 8$.

D'où $x_1 = 8,5^{(1)}$.

■ La même démarche livre x_2 comme solution de l'équation $-\frac{3}{2}x - 4 = 16$.

Soit $x_2 = \frac{40}{3}$ (13,33 environ).

Placer les points correspondants sur le rectangle est enfantin : nous le laissons à faire.

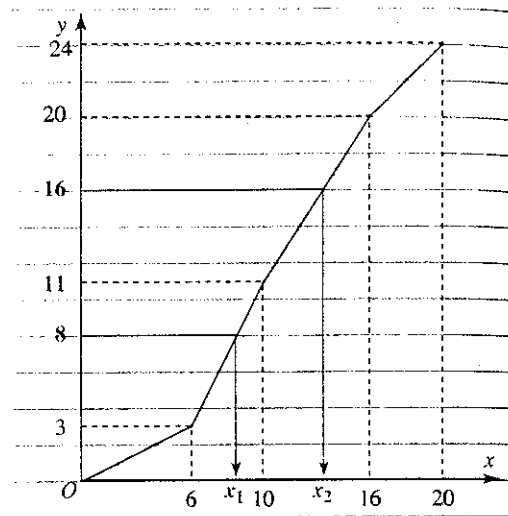


Fig. 16

(1) On a bien $6 < 8,5 < 10$. Cette vérification, *a priori* inutile, permet de rectifier les erreurs que l'on aurait commises lors de la représentation graphique.

TP 3

partage

L'unité de longueur étant le côté d'un carreau du quadrillage, pour $0 \leq x \leq 9$, on désigne par $f(x)$ l'aire du domaine coloré :

1° Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(7)$ et $f(9)$.

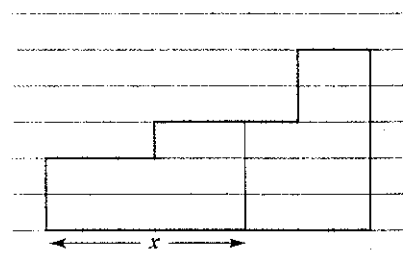
2° Donner l'expression de $f(x)$ sur chacun des intervalles $[0, 3]$, $[3, 7]$ et $[7, 9]$.

3° Représenter graphiquement la fonction f .

4° Résoudre graphiquement les équations :

a) $f(x) = 10$; b) $f(x) = 20$.

Contrôler à l'aide du calcul.



une situation ouverte ma corrigée du manuel "Dima thème 2nde"

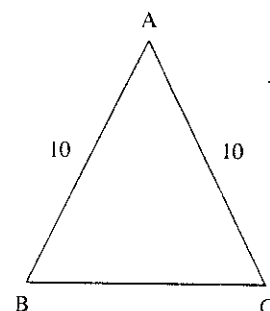
variations
+
extremum

37 L'aire la plus grande

ABC est un triangle isocèle dans lequel $AB = AC = 10$ cm.

Comment varie l'aire de ce triangle quand on modifie la longueur de la base $[BC]$? Cette aire passe-t-elle par un maximum ?

Consignes : Effectuer un travail de recherche personnel, utiliser tous les outils disponibles (calculatrice, graphiques, théorème de géométrie...) et donner une solution la plus complète, la plus rigoureuse, et la plus précise possible.



un problème ne proposant pas l'emploi d'une expression algébrique (Dimanche 2^{nde})

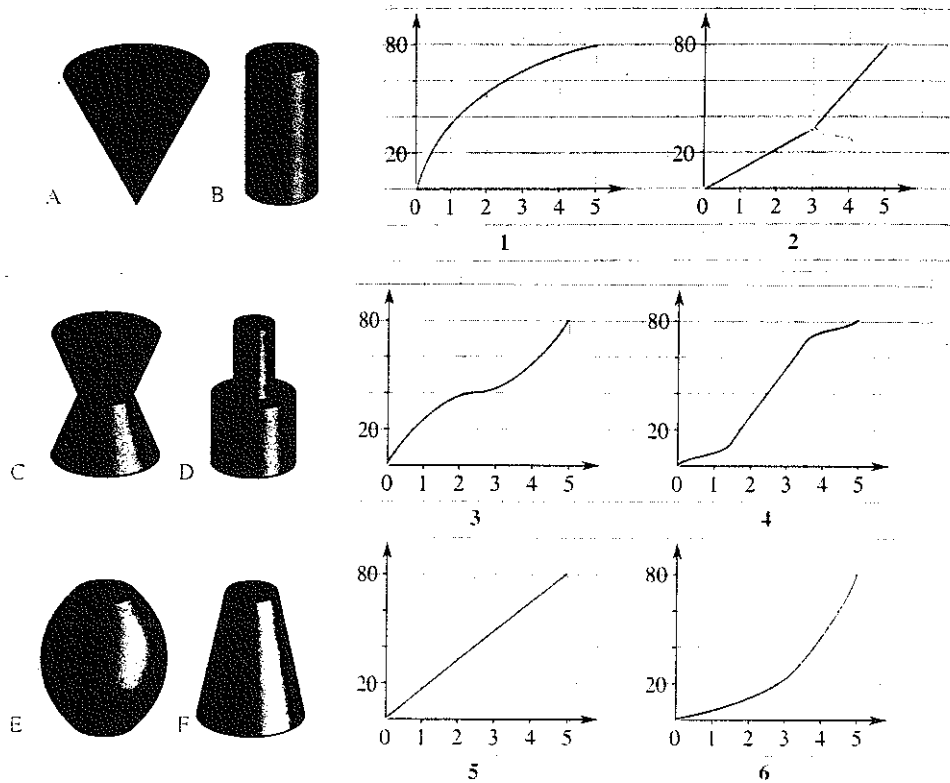
38 Problèmes de robinets

Les six récipients ci-dessous ont la même hauteur : 80 cm. et la même capacité : 100 litres.

On les remplit successivement, en utilisant un robinet à débit constant de $\frac{1}{3}$ litre par seconde.

Les graphiques représentent, pour chacun des récipients, la hauteur de la colonne d'eau dans le récipient en fonction du temps écoulé depuis le début du remplissage.

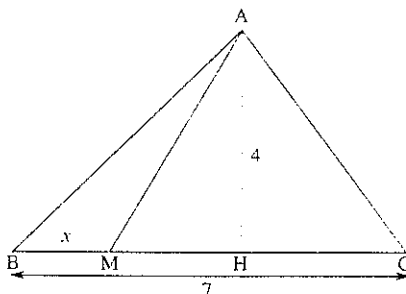
Retrouver la courbe correspondant à chaque récipient.



Source : PLOT, 1981

Deux problèmes de partage d'origine géométrique
 "Dimanche 2^{nde}"

- 17 On considère un triangle ABC et H le pied de la hauteur issue de A. M est un point du segment [BC]. On donne $AH = 4$. $BC = 7$ et $BM = x$.



1° On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle ABM. Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x et représenter graphiquement la fonction $\mathcal{A}$.

2° On note $\mathcal{B}(x)$ l'aire du triangle ACM. Exprimer $\mathcal{B}(x)$ en fonction de x et représenter la fonction $\mathcal{B}$ sur le même graphique que A.

3° Résoudre l'équation $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$.

- Graphiquement.
- Par le calcul.
- Géométriquement.

"Belin 2^{nde}"

44. Un cône droit de sommet A a pour hauteur 15 cm et pour base un disque de rayon 6 cm et de centre O. Soit M un point du segment [AO] tel que :

$AM = x$. Le plan parallèle à la base du cône contenant M coupe le cône suivant un cercle de centre M et de rayon r .

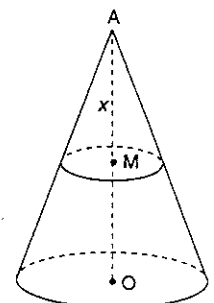
a. Calculer l'aire S du disque de base.

b. Exprimer le rayon r , puis l'aire $f(x)$ du disque de centre M et de rayon r , en fonction de x .

c. Représenter graphiquement la fonction f pour x variant sur l'intervalle $[0; 15]$.

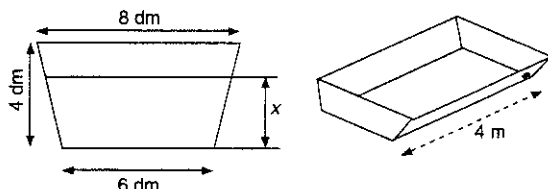
Déterminer graphiquement une valeur approchée du nombre réel x vérifiant : $f(x) = \frac{1}{2}S$.

Calculer sa valeur exacte.



Problème d'origine mathématique :
Partage + extremum
"Belin 2^{ème}"

46. a. Un abreuvoir a la forme d'un prisme droit de longueur 4 m dont les extrémités intérieures sont deux trapèzes isocèles isométriques de petite base 6 dm, de grande base 8 dm et de hauteur 4 dm.
On désigne par x la hauteur de l'eau dans l'abreuvoir.
 x varie de 0 à 4 ; 4 dm étant la hauteur de l'abreuvoir.



α . En utilisant la propriété de Thalès, calculer en fonction de x l'aire hachurée.

β . Si x est la hauteur, exprimée en décimètres, de l'eau dans l'abreuvoir, calculer le volume d'eau exprimé en litres, noté $v(x)$. Vérifier que l'on obtient $v(x) = 240x + 10x^2$.

b. Une jauge est placée verticalement contre l'un des trapèzes.

On se propose de la graduer, c'est-à-dire, de préciser les niveaux de liquide correspondant à 100, 200, 300, ... litres.

Pour graduer la jauge de l'abreuvoir, on veut tracer la représentation graphique de la fonction v définie sur $[0; 4]$ par $v(x) = 240x + 10x^2$.

α . Programmer la calculatrice et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$v(x)$	0								1120

Représenter les points de coordonnées $(x; v(x))$ dans un repère orthogonal convenablement choisi.

Relier les points obtenus par une courbe régulière (on affinera éventuellement le tracé en calculant des valeurs intermédiaires).

On a ainsi représenté la fonction v sur l'intervalle $[0; 4]$.

β . Utiliser la courbe pour lire des valeurs approchées du nombre x correspondant aux valeurs suivantes de $v(x)$: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1 000, 1 100. Établir à l'échelle 1/2, la graduation à tracer sur la jauge de l'abreuvoir.

c. Un utilisateur, peu mathématicien, a constitué la jauge de la manière suivante :



puis il a gradué régulièrement le segment $[VP]$.

α . Quel est le nombre $w(x)$ marqué à la distance x (en dm) du point V ?

Représenter, sur le graphique de la question **b.** de l'activité, la fonction $x \mapsto w(x)$.

Prouver que l'erreur $e(x) = w(x) - v(x)$ commise pour chaque valeur de x est $e(x) = 10x(4 - x)$.

Indiquer comment il est possible de la lire graphiquement.

β . Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto e(x)$ sur le même graphique que celui utilisé pour les fonctions v et w . Lire graphiquement la valeur de x pour laquelle l'erreur est maximale. Justifier ensuite par le calcul le résultat obtenu graphiquement.

Problème d'origine géométrique :
Variations + partage

"Flammarion 2^{ème}"

69 THÈMES : Plans parallèles. Prismes droits. Volumes **Étude de fonctions. Lectures graphiques.**

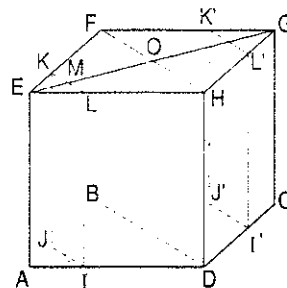
ABCDEFGH est un cube de côté 1 et M est un point quelconque du segment $[EG]$, distinct de E et de G.

On désigne par P le plan parallèle au plan $(BDHF)$ et qui passe par M. On pose $EM = x$.

Lorsque M est un point du segment $[EO]$, le plan P coupe $[AD]$ en I, $[AB]$ en J, $[EH]$ en L, et $[EF]$ en K.

Lorsque M est un point du segment $[OG]$, le plan P coupe $[DC]$ en I', $[BC]$ en J', $[HG]$ en L', et $[FG]$ en K'.

On note $\mathcal{V}(x)$ le volume du prisme droit $AJELK$ lorsque M est un point de $[EO]$, du prisme droit $ADI'J'BEHL'K'$ lorsque M est un point de $[OG]$.



A. Calcul de $\mathcal{V}(x)$

1. On suppose que x est un nombre de l'intervalle $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

a. Montrez que la droite (FH) est parallèle à la droite (KL) .

b. Déduisez-en que le triangle ELK est isocèle.

c. Montrez que $\mathcal{V}(x) = x^2$.

2. On suppose que x est un nombre de l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right]$. Montrez que $\mathcal{V}(x) = 1 - (x - \sqrt{2})^2$.

B. Étude de la fonction $\mathcal{V}$

$\mathcal{V}(x)$ a des expressions différentes sur $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right]$.

On étudie donc $\mathcal{V}$ sur chacun de ces intervalles.

1. Tracez, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction $\mathcal{V}$ sur $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

2. a. a et b sont des nombres de $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right]$ tels que $a < b$.

Complétez par l'un des signes " $<$ " ou " $>$ " :

$a - \sqrt{2} \square b - \sqrt{2}$; $(a - \sqrt{2})^2 \square (b - \sqrt{2})^2$;

$-(a - \sqrt{2})^2 \square -(b - \sqrt{2})^2$; $1 - (a - \sqrt{2})^2 \square 1 - (b - \sqrt{2})^2$.

b. Déduisez de la question précédente que la fonction $\mathcal{V}$ est strictement croissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right]$.

c. Tracez la courbe représentative de la fonction $\mathcal{V}$ sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right]$, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3. D'après le graphique, existe-t-il M tel que $\mathcal{V}(x) = 1,2$? Expliquez géométriquement ce résultat.

Annexe N°2

Tableau de synthèse des 6 manuels étudiés

Tableau de synthèse des 6 manuels étudiés																									
manuel	chapitre	place dans le chapitre					origine situation			données		outillage			thème		degré de liberté		nb var	nature de la variable indépendante		titre	retour situation		
		act	corr	tp	ex	pb	real	geom	phys	dess	text	form	tab	grap	ext	par	var	var ind		discrète	continu geom			continu phys	
Fractale	fonctions généralités	1	1	1	0	7	2	7	1	6	10	10	3	8	1	4	0	0	33	0	7	3	4		
	valeurs absolues	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	50	0	1	0	1		
	fonctions usuelles	0	1	0	0	8	0	9	0	1	9	9	0	9	2	1	9	0	51	0	9	0	1		
	orthogonalité espace	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	50	0	1	0	0		
Bilan du manuel :		1	2	2	0	16	3	17	1	9	21	21	4	18	4	5	9	0	42	0	18	3	6		
Terracher	ordre et valeur absolue	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	30	0	1	0	1		
	fonctions généralités	3	2	1	9	4	10	9	0	12	19	13	0	7	5	6	5	3	27	0	11	8	10		
	fonctions usuelles	2	1	1	4	6	6	6	2	7	14	10	6	11	2	1	1	0	26	0	6	8	9		
	trigonométrie	0	1	2	1	4	0	8	0	7	8	7	0	2	3	4	2	1	34	0	8	0	5		
Belin	configurations espace	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	40	0	1	0	0		
	Bilan du manuel :		5	4	4	15	15	17	24	2	27	43	32	6	20	12	11	8	4	28	0	27	18	25	
	notion de fonction	3	0	2	0	2	1	6	0	5	7	7	5	7	3	4	1	0	31	1	6	0	5		
	fonctions affines	1	0	0	0	5	3	2	1	4	6	6	2	4	2	3	0	0	32	0	2	4	1		
Belin	fonctions carré et cube	0	0	1	0	3	1	3	0	2	4	4	2	3	3	2	0	0	33	0	3	1	1		
	fonctions de référence	0	0	0	0	3	2	1	0	0	3	3	0	3	1	1	1	0	33	0	1	2	0		
	orthogonalité espace	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	30	0	1	0	0		
	Bilan du manuel :		4	0	3	0	14	7	13	1	12	21	21	9	18	10	10	2	0	32	1	13	7	7	
Transmath	départ numérique	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	20	0	0	1	1		
	inégalités inéquations	0	0	0	0	2	0	2	0	2	2	2	0	1	0	2	0	0	35	0	2	0	2		
	notions fonctions	1	0	1	8	1	3	8	0	6	11	11	0	10	0	8	1	0	30	0	9	2	4		
	fonctions usuelles	0	0	3	5	2	2	7	1	6	10	10	3	9	3	4	7	0	32	1	7	2	9		
Transmath	angles de vecteurs	0	0	0	0	2	1	1	0	2	2	2	0	0	1	0	1	0	35	0	1	1	2		
	droites plans espace	0	0	1	0	2	0	3	0	3	3	3	0	3	1	1	2	0	30	0	3	0	3		
	départ géométrique	0	0	1	0	1	0	2	0	2	2	2	0	2	1	2	0	0	40	0	2	0	2		
	l'outil vectoriel	0	0	0	0	2	0	2	0	2	2	2	1	2	1	2	0	0	45	0	2	0	2		
Bilan du manuel :	symétries translation	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	40	0	1	0	1		
	Bilan du manuel :		1	0	7	13	13	7	26	1	25	34	34	4	28	8	20	11	0	33	1	27	6	26	
	fonctions graphiques	0	0	0	0	5	1	4	0	4	5	4	1	5	1	0	0	0	30	0	4	1	0		
	fonctions usuelles	0	0	0	11	11	11	10	1	12	22	22	0	21	6	3	6	0	30	3	10	9	0		
Déclic	équations inéquations	0	0	0	0	2	0	2	0	2	2	2	0	2	1	1	1	0	30	0	2	0	0		
	dans un repère	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	20	0	0	1	1		
	angles orientés	0	0	0	0	2	0	2	0	2	2	2	0	0	0	0	2	0	30	0	2	0	0		
	Bilan du manuel :		0	0	0	11	21	13	18	1	20	32	30	2	29	8	4	9	0	30	3	18	11	1	
Dimathème	notion de fonction	0	0	1	3	5	2	7	0	8	9	5	2	8	2	5	2	1	39	1	7	1	4		
	fonctions affines	1	0	1	0	7	7	2	0	4	9	7	0	8	0	7	0	0	37	0	2	7	6		
	fonctions classiques	0	0	0	0	3	1	1	1	3	3	3	1	3	1	1	0	0	43	1	1	1	2		
	fonctions trigo	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	30	0	0	1	1		
Bilan du manuel :		1	0	2	3	18	10	10	2	16	22	15	4	20	3	14	2	1	38	2	10	10	13		
Bilan global des manuels :		12	6	18	42	95	58	108	8	109	173	153	29	133	45	94	41	5	33	7	113	53	78		

grille de lecture d'un ouvrage

Nom du manuel : FRACTALE SECONDE																										
chapitre	place dans le chapitre				origine situation			données		outillage			thème			degré de liberté		nb var	nature de la variable indépendante			titre	retour situation			
	act	corr	tp	ex pb	real	géom	phys	dess	text	form	tab	grap	ext	par	var	var ind	discrète		continu géom	continu phys						
Fonctions Généralités 5 sur 15	1					1		1	1	1	1	1	1			non	non	3		1		oui	oui			
			1				1	1	1	1	1	1				non	non	2			1	oui	non			
		1				1		1	1	1	1	1	1			non	non	3		1		oui	non			
				1	1				1	1	1	1	1	1		non	non	3			1	oui	oui			
				1	1		1		1	1	1	1	1	1		non	non	3			1	non	oui			
Bilan chapitre : Valeurs absolues 6 sur 15					1	1		1	1	1	1	1	1	1		non	non	3		1		non	non			
					1	1	2	7	1	6	10	3	8	1	4	0	0	0	33	0	7	3	4	4		
			1						1	1	1			1		non	non	5				oui	oui			
			1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	50	1	0	1	1	1		
Fonctions usuelles 8 sur 15																										
Bilan chapitre : Orthogonalité dans l'espace 15 sur 15	0	1	0	0	8	0	9	0	1	9	9	0	9	2	1	9	0	0	51	0	9	0	1	3		
Bilan chapitre :	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	50	0	1	0	0	0			
Bilan du manuel :	1	2	2	0	16	3	17	1	9	21	4	18	4	5	9	0	0	42	0	18	3	6	8			

Nom du manuel : Math Seconde (collection Terracher)																								
chapitre	place dans le chapitre			origine situation		données		outillage		thème		degré de liberté		nature de la variable indépendante		titre	retour situation							
	act	corr	tp	ex	pb	réal	geom	phys	dess	text	form	tab	grap	ext	part	var	var ind	nb var	discrete	continu geom	continu phys			
Ordre et valeur absolue 3 sur 14				1		1				1	1	1					non	non	3			oui	oui	
Bilan chapitre :	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	3	0	1	0	1	
Généralités	1					1		1	1	1	1	1					non	non	3			non	non	
sur les	1					1		1	1	1	1	1					non	non	3			non	non	
fonctions	1					1		1	1	1	1	1					non	non	2			oui	non	
6 sur 14			1			1		1	1	1	1	1					non	non	2			non	non	
				1		1		1	1	1	1	1					non	non	3			non	non	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	2			non	non	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	3			non	non	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	2			non	non	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	3			non	non	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	2			non	non	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	3			non	non	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	2			non	non	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	3			non	non	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	2			non	non	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	3			non	non	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	2			non	non	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	4			oui	oui	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	3			oui	oui	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	2			oui	oui	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	3			oui	oui	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non	2			oui	oui	
					1	1		1	1	1	1	1					non	non						

Nom du manuel : Math Seconde (Belin)																										
chapitre	place dans le chapitre				origine situation			données		outillage			thème		degré de liberté		nb var	nature de la variable indépendante		titre	retour situation					
	act	corr	tp	ex	pb	réal	géom	phys	dess	text	form	tab	grap	ext	part	var		var ind	discrète			continu géom	continu phys			
Notion de fonction. calculs numériques et littéraux 1 sur 15	1						1	1	1	1	1	1	1			non	non	2			oui	non				
	1						1	1	1	1	1	1	1	1		non	non	3	1		oui	oui				
	1					1			1	1	1	1	1	1	1	non	non	2	1		oui	oui				
			1				1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	4	1		oui	oui				
			1				1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	4	1		oui	oui				
Bilan chapitre : Fonctions affines et linéaires. Equations 3 sur 15	3	0	2	0	2	1	6	0	5	7	7	5	7	3	4	1	0	31	1	6	0	5	6			
	1						1	1	1	1	1	1	1		1	non	non	3			oui	oui				
					1		1	1	1	1	1			1		non	non	4	1		non	oui				
					1	1			1	1	1	1				non	non	2		1	non	oui				
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	3	1		non	oui				
Bilan chapitre : Fonctions carré et cube Variations et parité 9 sur 15	1	0	0	0	5	3	2	1	4	6	6	2	4	2	3	0	0	32	0	2	4	1	6			
					1		1		1	1	1	1	1	1		non	non	3	1		oui	oui				
					1		1		1	1	1	1	1	1		non	non	4	1		non	oui				
					1		1		1	1	1	1	1	1	1	non	non	3		1	non	oui				
					1	1			1	1	1	1	1	1	1	non	non	3			1	non	oui			
Bilan chapitre : Trois fonctions de référence 13 sur 15	0	0	1	0	3	1	3	0	2	4	4	2	3	3	2	0	0	33	0	3	1	1	4			
					1	1			1	1	1	1	1	1	1	non	non	3			1	non	oui			
					1	1			1	1	1	1	1	1		non	non	2		1	non	oui				
					1		1		1	1	1	1	1	1	1	non	non	5	1		non	oui				
Bilan chapitre : Orthogonalité dans l'espace 15 sur 15	0	0	0	0	3	2	1	0	0	3	3	0	3	1	1	1	0	33	0	1	2	0	3			
					1		1		1	1	1	1	1	1		non	non	3	1		non	oui				
Bilan chapitre :	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	30	0	1	0	0	1			
Bilan du manuel :	4	0	3	0	14	7	13	1	12	21	21	9	18	10	10	2	0	32	1	13	7	7	20			

[illegible]

Nom du manuel : Mathématiques seconde (collection Délicat)																							
chapitre	place dans le chapitre				origine situation	données			outillage			thème			degré de liberté		nb var	nature de la variable indépendante			titre	retour situation	
	act	corr	tp	ex		pb	réal	géom	phys	dess	text	form	tab	grap	ext	part		var	var ind	discrete			continu géom
Fonctions :						1		1	1	1	1	1	1	1			non	non	3			non	oui
lectures graphiques					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	3			non	oui
4 sur 11						1	1		1	1	1	1	1	1			non	non	3		1	non	non
					1		1	1	1	1	1	1	1	1			non	non	2			non	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1			non	non	4			non	non
Bilan chapitre :	0	0	0	0	5	1	4	0	4	5	4	1	5	1	0	0	0	30	0	4	1	0	3
Fonctions usuelles					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	3			1	non
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	4			1	non
					1		1	1		1	1	1	1	1			non	non	2			1	non
5 sur 11					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	3		1	non	non
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	2			1	non
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	2			non	oui
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	2			non	non
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	4		1	non	oui
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	4			non	oui
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	5		1	non	oui
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	3			1	non
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	3			1	non
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	3		1	non	oui
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	3			non	oui
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	3			non	oui
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	4			non	oui
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	4			non	oui
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	5			non	oui
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	3			1	non
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	3			1	non
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	3		1	non	oui
					1		1		1	1	1	1	1	1			non	non	3			non	oui

Nom du manuel : Mathématiques seconde (Collection Dimathème)																				
chapitre	place dans le chapitre			origine situation			données			outillage			thème			degré de liberté			nb var	titre
	act	corr	tp	ex	pb	réal	géom	phys	dess	text	form	tab	grap	ext	part	var	var ind	var ind		
Vers la notion de fonction 1 sur 14			1				1	1	1	1	1	1	1	1		non	non	non	2	oui
				1		1			1	1	1	1	1	1		non	non	non	2	oui
				1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	4	non
				1			1	1	1	1	1	1	1	1		non	non	non	5	non
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	5	non
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	3	non
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	4	non
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	oui	oui	oui	3	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1		non	non	non	7	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1		non	non	non	3	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1		non	non	non	3	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1		non	non	non	3	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1		non	non	non	3	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1		non	non	non	3	oui
Bilan chapitre :	0	0	1	3	5	2	7	0	8	9	5	2	8	2	5	2	1	1	39	4
Fonctions affines 4 sur 14	1					1			1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	3	oui
			1			1			1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	4	oui
				1		1			1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	4	oui
				1		1			1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	4	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	3	non
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	4	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	3	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	4	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	3	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	5	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	3	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	3	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	3	oui
					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	3	oui
Bilan chapitre :	1	0	1	0	7	7	2	0	4	9	7	0	8	0	7	0	0	0	37	8
Fonctions classiques 6 sur 14					1	1			1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	5	oui
					1				1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	4	non
					1				1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	4	non
					1				1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	4	oui
Bilan chapitre :	0	0	0	0	3	1	1	1	3	3	3	1	3	1	1	0	0	0	43	2
Fonctions trigonométriques 7 sur 14					1			1	1	1	1	1	1	1	1	non	non	non	3	oui
					1															
Bilan chapitre :	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	30	1
Bilan du manuel :	1	0	2	3	16	10	10	2	16	22	15	4	20	3	14	2	1	1	38	18

tableau de synthèse par place dans le chapitre

place	origine situation		données		outillage		thème		degré de liberté		nb var	nature de la variable		titre	retour situation
	real	géom	phys	dess	text	form	tab	grap	ext	par	var	discrete	continu géom	continu phys	
activités		1		1	1	1	1	1	1		non		1		oui
		1		1	1	1	1				non		1		non
	1			1	1	1	1				non		1		non
	1			1	1	1	1	1			non		1		non
		1		1	1	1	1				non		1		non
	1			1	1	1	1				non		1		non
	1			1	1	1	1	1			non		1		non
		1		1	1	1	1	1	1		non		1		non
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
Bilan	5	6	1	10	12	12	1	9	2	3	0	1	3	3	3
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		non
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
	1			1	1	1			1	1	oui		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1		non		1		oui
	1			1	1	1	1	1	1		non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		non
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
Bilan	2	4	0	3	6	12	1	5	1	4	2	0	4	2	4
		1		1	1	1	1	1			non		1		non
	1			1	1	1	1	1	1		non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		non
	1			1	1	1	1	1	1		non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
TP		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
Bilan	5	12	1	11	12	18	16	3	4	8	2	1	17	3	18
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui
		1		1	1	1	1	1	1	1	non		1		oui

tableau de synthèse par place dans le chapitre

[illegible]

analyse des manuels de seconde

Annexe N°3

temps

élève 1

élève 2

élève 3

élève 4

professeur
s'adressant
au groupe

professeur
s'adressant
à la classe

Groupe 1. temps 13h40

P. 1

élève 1

② ③ Muriel.
① ④

13h45
(calcul de AC et AO)

avec Muriel.
diag. d'un carré = $\sqrt{2}$?
(besontres: je ne sais pas)

13h50

13h55
(Aire du Δ APQ)

14h05

Tu ne peux pas calculer l'aire: tu n'as pas de valeurs.

élève 2

Anne

à Muriel
O' est le point médian de AB
SE $OC=0$ $M=A$.
à Muriel: diag. de ABCD
Pythagore: $\text{diag. de ABCD} = 2\sqrt{2}$

à Cristina
 $2\sqrt{2}$ d'axes
car $M \neq A$ et $M \neq C$.
à Muriel
 $\sqrt{2}$ que s'arrête en O.
 $AO=OC=\sqrt{2}$

Questions au prof.

à Muriel
Comment calculer l'aire d'un Δ rectangle inscrit dans un Δ rectangle isocèle?

(Sur 2 axes on a $f(x)=x'$
(avec $x=1$ et $x=\sqrt{2}$)
"Ah non, ça ne va pas avec"
"Ça ne marche pas"
Aire = $\frac{PA \cdot AQ}{2}$.

élève 3 Je fais le (p'tendu).

Cristina

(enthousiaste)

élève 4

Renaud

à Anne
Je ne comprends pas qu'on prenne $2\sqrt{2}$
Anne: "on ne prend pas"

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$?
Muriel: apparemment.
C'est plus facile avec DB
Non c'est pareil.

$\sqrt{2}$ c'est la moitié de $2\sqrt{2}$

DS la 2^e fig.
Il y a des choses à
PMA est-il isocèle?
Anne: "oui".

Y'a pas une histoire de vect?
 $\vec{AP} + \vec{AQ} =$
un truc comme ça
Anne: $\vec{AP} + \vec{AQ} \neq \vec{AH}$

professeur s'adressant au groupe

Le brouillon individuel est un brouillon commun mais le prof. rendu doit être rédigé (réponse à Renaud)

Pour le calcul de l'aire d'un Δ c'est typiquement ça.

Vous ne passez pas de question mais tant pis si vous ne faites pas tout.

professeur s'adressant à la classe

1 cpte rendu par gpe + 1 brouillon / gpe sans effacer.
5 mn de pose sans sortir.
Distribution.

14h50	14h53	14h54	15h00	15h05	15h10
élève 1 Muriel	A refait les 2 figures en une seule	Enfin! mais pas de justification de HA = MP = HQ (on ne pense pas au th. de la médiane)	A-3	à Anne: qqch comme: $f(x) = \frac{AM \cdot PQ}{2}$ $= x \cdot 2x$ Anne: on va plus $PQ = 2x$	à Anne: qqch comme: 15h12: recapie le travail d'Anne
élève 2 Anne	J'ai trouvé!	$f(x) = \frac{PQ \cdot AH}{2}$ or $PQ = 2AH$ (car AHQ est AMP soit isocèles) Donc $f(x) = \frac{2x \cdot 2x}{2} = x^2$	la gde base c'est [DB]	Muriel: Ah oui J'ai trouvé! $f(x) = \frac{AM \cdot PQ}{2}$ $PQ = 2CM$ $CM = AC - x$ $\frac{2(AC-x) \cdot x}{2} = \frac{2(2\sqrt{2}-x)x}{2} = -x^2 + 2x\sqrt{2}$	
élève 3 Cristina	Semblait pas de problème			Regarde Anne (rire) Au prof: Arrêtez de demander qui a trouvé	
élève 4 Perrine	Beur mais le A-3 semble plus dur		ce n'est pas le triangle PABD ce triangle ne vous sert à rien maintenant tu peux le biser car rien du tout	Ne chéris pas	
professeur s'adressant au groupe		Faire un dessin qui correspond au ph Attention!			Plus autres que Anne. Anne: vous comprenez Anne? Cristina: oui mais en fait, on devrait qqch de trop compliqué.
professeur s'adressant à la classe					

P. 4.

15h15

15h20

élève
Nurid

Plus x augmente
Plus $f(x)$ augmente
aussi.

élève 2
Anne

Anne sort le cahier
de cours
Elle lit les 2 explications
(not 2) pour pond
que $f > sur Jo, Va]$
(aie!)

Au prof:
Est-ce que ce sont
2 méthodes f .

élève 3
Cristina
A Anne
Pour B1-a.
"Est-ce que tu te sens
des exceptions?"
Anne: oui

Renaud: attention
O n'est pas compris

élève 4
Renaud

Savoir-mais re
qu'est un sens
de variation.
(d'une f et).

Lisez bien l'énoncé
qui précise quelles
sont les 2 façons.

professeur
s'adressant
au groupe

professeur
s'adressant
à la classe

Annexe N°4

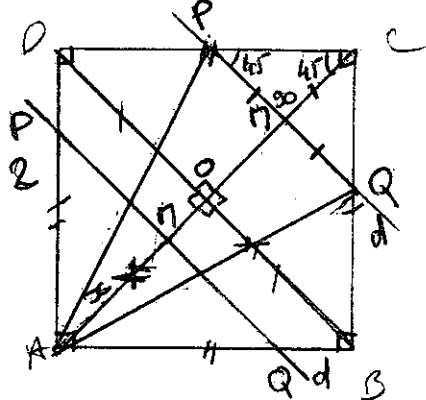
Borahin

1. 0 est mon compres car 0 n'est pas en A
et $2\sqrt{2} = AC$ pas compris car n'appartient ni à A ni à C

2. $f(x) = \frac{AP \times AG}{2} \cdot \frac{PA \times AG}{2}$

ça ne marche que pour les extrêmes

$\sqrt{2} AP = PQ$



$f(x) = \frac{PQ \times AH}{2} = \frac{PQ \times x}{2} = \frac{2x \times x}{2} = x^2$

~~$f(x) = \frac{(8+b)}{2} \times h$~~
 ~~$DB \times PG \times AH$~~
 ~~$2 \times (\sqrt{2} - 2x) \times x$~~
 ~~$\frac{2\sqrt{2}x + 2x^2}{2}$~~
 ~~$\sqrt{2}x +$~~

3. $f(x) = \frac{b \times h}{2} = \frac{PG \times AH}{2} = \frac{PG \times x}{2} = \frac{2(\sqrt{2} - x) \times x}{2} = (\sqrt{2} - 2x)x = \sqrt{2}x - 2x^2$

$f(x) = 2\sqrt{2}x - x^2$

3. $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $I =]0; \sqrt{2}]$ $f(x) = x^2$

~~$a < b$~~ $a = 2$ $b = 1$

$a > b$

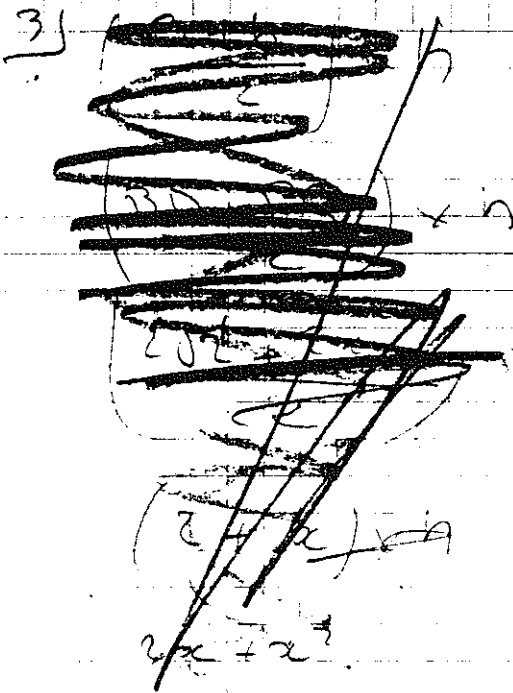
$f(x) = x^2$

$f(a) > f(b)$

donc elle est strictement croissante

✓





$$\frac{B \times h}{2}$$

~~$$\frac{PQ \times AM}{2}$$~~
~~$$\frac{2x \times (\sqrt{2} + x)}{2}$$~~

~~$$\frac{2\sqrt{2}x + 2x^2}{2}$$~~

~~$$\frac{PQ \times AM}{2}$$~~

~~$$\frac{PQ \times AM}{2}$$~~

~~$$\frac{PQ \times (\sqrt{2} + x)}{2}$$~~

~~$$\frac{(x - \sqrt{2}) \times (\sqrt{2} + x)}{2}$$~~

$$\frac{PQ \times AM}{2}$$

$$\frac{PQ \times x}{2}$$

~~$$\frac{PQ \times x}{2}$$~~

$$\frac{2(\sqrt{2}x) \times x}{2}$$

$$\frac{(4\sqrt{2} - 2x) \times x}{2}$$

$$\frac{4\sqrt{2}x - 2x^2}{2}$$

$$f(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}x$$

B) $\frac{1}{2}x^2$ = fonction ? sur $I]0;2]$ $f(x) = x^2$
 $2 > 0$ $f(2) > f(0)$
 $f(x) = x^2$ $2 \ln x$ $f \pi$

Prunet Mélanie

Math 07/05/96

Verbaeghe Sandrine

Gastine Bruce

groupe 1°2

Golebiewski Mickaël

Maths.

① A D'après Pythagore:

$$DB^2 = AD^2 + AB^2$$

$$DB^2 = 2^2 + 2^2$$

$$DB^2 = 4 + 4$$

$$DB^2 = 8$$

$$DB = \sqrt{8}$$

$$DB = 2\sqrt{2}$$

Dans un carré, les diagonales sont égales donc DB est égal à AC

Une aire ne peut jamais être négative donc $f(x) > 0$.

On sait que l'aire de APQ ne peut être $>$ à DB donc l'aire est inférieure à $2\sqrt{2}$. soit x appartient à l'intervalle $]0, 2\sqrt{2}]$

② Dans un carré, les diagonales se coupent en leur milieu.

Soit O le point d'intersection des diagonales

$$OD = OB = OC = OA$$

Si on remplace O par P (P varie sur (AC))

$$PD = PB = PC = PA$$

$$\text{donc } PD = PC = PA$$

$$AP^2 = PD^2 + PA^2$$

$$AP^2 = PD^2 + PA^2$$

$$AP^2 = x^2 + x^2$$

$$AP^2 = x^4$$

$$AP = \sqrt{x^4}$$

$$AP = x^2$$

D'après l'énoncé P et Q sont 2 pts de (d) qui est la parallèle de (BD)

$$\text{donc } DP = BQ \text{ et } PA = QA$$

$$\text{On sait que } PA = x^2$$

$$f(x)^2 = PA^2 + QA^2$$

$$f(x)^2 = x^2 + x^2$$

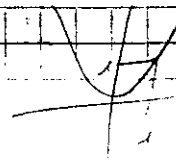
$$f(x)^2 = x^4$$

$$f(x) = \sqrt{x^4}$$

$$f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} AB &= 2 \\ BC &= 2 \\ CD &= 2 \\ DA &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CA^2 &= CB^2 + BA^2 \\ CA^2 &= 2^2 + 2^2 \\ CA^2 &= 8 \\ CA &= \sqrt{8} \\ CA &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$



Colebrook's
Theorem.

$$\begin{aligned} BA - QA &= DA - PA \\ 2 - QA &= 2 - PA \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} = 1,41$$

$$\frac{2 \times \sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{AB}{AQ} = \frac{AD}{AP} \Rightarrow]0; 2\sqrt{2}[\rightarrow CA$$

si $x \in]0; 2\sqrt{2}[$ alors $f(x) = x^2$
on en déduit que $f' > 0$

$$2\sqrt{2} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{2}$$

$$2\sqrt{2} = AC \text{ donc } \sqrt{2} = AO$$

$$AC = AO$$

Sachant que les 2 cotés AQ et AP sont égaux
on en déduit que : $x = x$
 $f(x) = x^2$

si $x \in [\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[$ alors $f(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}x$

Si $x \in AC$ ($\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$) l'intervalle $]0; \sqrt{2}[$
est inutile nous obtenons alors

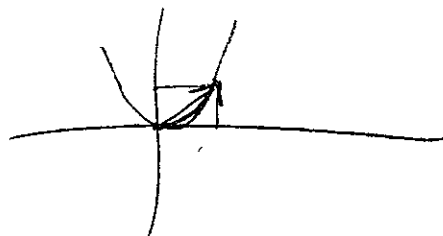
$$-x^2 + 2\sqrt{2}x - x^2$$

et nous met x par x on obtient $-x^2 + 2\sqrt{2}x$

B)

Comme la longueur ne peut
être négative, f ne peut être que
croissante

$$x^2 =$$



(2) (14)



$$\sqrt{4}$$

$$\frac{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{4}$$

Consigne A]

$$\sqrt{2}^2 = 2\sqrt{4}$$

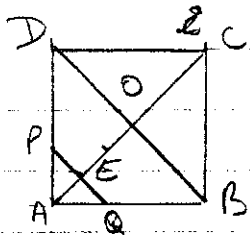
une fonction
que l'on

1) f est définie sur l'intervalle $[0; 2\sqrt{2}]$ parce qu'il est distinct de 0 (centre des diagonales $[DB]$ et $[EA]$)

2) si $x \in [0; \sqrt{2}] \rightarrow f(x) = x^2$

exemple si $x = 0,5$ alors base = 1
car $[AE] = [PE] = EQ$

$$A = \frac{b \times h}{2} \rightarrow \frac{2 \times 1}{2} = 1$$



$$A = \frac{1 \times 0,5^2}{2} = 0,25$$

$$D = 0,5^2 = 0,25$$

Pythagore : $DA^2 + AB^2 = DB^2$

$$2^2 + 2^2 = DB^2$$

$$4 + 4 = DB^2$$

$$\sqrt{8} = DB$$

$$\text{Aire ADB} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{4}}{2} = \frac{2\sqrt{8}}{2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Mardi 7 Mai 96

groupe n° 4

Module
de Math

A)

1)

ABCD est un carré de 2cm de côté

$$x = AM$$

$$F(x) = \text{aire de APQ}$$

(d) // [BD]

(d) est contenu dans ABCD

des diagonales de ABCD valent $2\sqrt{2}$ chacune

→ la fonction évolue donc sur l'intervalle $]0, 2\sqrt{2}[$

$$2) ABD = \frac{AB \times 2}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ cm}^2 \quad (\text{Aire de ABD})$$

$$2 \times AO = AC$$

$$2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$F(x) = x^2$$

$$\text{si } x = \sqrt{2}$$

$$F(x) = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\text{Donc si } x \in]0, \sqrt{2}] \text{ alors } F(x) = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$3) Fx = PM \times x$$

$$MC = 2\sqrt{2} - x$$

$f(x)$ aire de APD

$$OC = AM$$

carrel carré

2nd

A 1) $FED = \text{aire}$

(d) est contenu de $ABCD$ - la diagonale de $ACD = 2\sqrt{2}$

→ la fonction évolue ^{donc} sur l'intervalle $]0, 2\sqrt{2}[$

$$2) ABD = \frac{AB \times 2}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ cm}^2$$

$$2 \times PO = AC$$

$$2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$f(x) = x^2$$

$$\text{si } x = \sqrt{2}$$

$$f(x) = (\sqrt{2})^2 = 2$$

donc si $x \in]0, \sqrt{2}]$ alors $f(x) =$

$$3) -x^2 + 2\sqrt{2}x$$

$$2\sqrt{2} \times \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2$$

$$4 - 2 = 2$$

$$PO = 2 \times HC$$

$$PO = 2 \times (2\sqrt{2} - x)$$

$$PO \times AC =$$

$$(PO \times AC) = CPO \quad \frac{2\sqrt{2} (2 \times (2\sqrt{2} - x))}{2}$$

$$2\sqrt{2} [2 \times (2\sqrt{2} - x)] - \frac{2\sqrt{2} (2 \times 2\sqrt{2} - 2x)}{2}$$

$$2\sqrt{2} (4\sqrt{2} - 2x)$$

$$CH^2 = (2\sqrt{2} - x)^2$$

$$2\sqrt{2} (4\sqrt{2} - 2x)$$

$$PO = 2 \times (2\sqrt{2} - x)$$

$$8\sqrt{2} - 2x$$

$$AM = x$$

$$AC = 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} = 2x \times \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}x + (\frac{2\sqrt{2} - 2x}{2})$$

$$(8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}x) - (\sqrt{2} - x)$$

$$8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}x - \sqrt{2} + x$$

$$7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}x + x$$

$$Px = PM \times x$$

$$HC = 2\sqrt{2} - x$$

$$PM = HC$$

$$(2\sqrt{2} - x) \times x$$

$$2\sqrt{2}x - x^2$$

Annexe N°5

Pourel Magali

Grabin Marie-Laure

Mulot Adeline

page 1

Le problème de l'abreuvoir.

$$\text{aire trapèze} = \frac{B+b}{2} \times h$$

$$= \frac{8+6}{2} \times 4$$

$$= 7 \times 4$$

$$= 28 \text{ dm}^2$$

$$V = B \times h$$

$$= 28 \times 40$$

$$= 1120 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ P} = 1 \text{ dm}^3 \text{ donc } 1120 \text{ dm}^3 = 1120 \text{ P.}$$

$$0 < x < 4 \quad \text{et} \quad 6 < y < 8$$

$$\text{Pour } x = 1 \quad y = 6,5$$

Soit x la hauteur recherchée et y la base variant en fonction de la hauteur

$$\text{Pour } x = 2 \quad y = 6,5 + 0,5 = 7$$

$$\text{Pour } x = 3 \quad y = 7 + 0,5 = 7,5$$

Group 2.

Boucaud
Kelly

2nd

4 dm

Aire du trapèze

$$\frac{(8+6) \times 4}{2} = 28$$

Volume maximal
de l'abrevoir :

$$28 \times 40 = 1120 \text{ dm}^3 = 1120 \text{ l}$$

$$\frac{1120 \text{ l}}{100 \text{ l}} \rightarrow 4 \text{ dm} = 40 \text{ cm}$$

$$* \frac{(8+6) \times 3}{2} = 21$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ l}$$

3 dm

$$21 \times 40 = 840 \text{ dm}^3$$

$$* \frac{(8+6) \times 2}{2} = 14$$

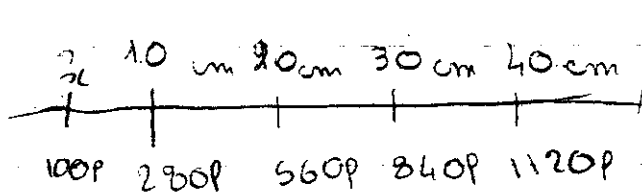
$$14 \times 40 = 560 \text{ dm}^3$$

2 dm

$$* \frac{(8+6) \times 1}{2} = 7$$

1 dm

$$7 \times 40 = 280 \text{ l}$$



$$a = \frac{280}{10}$$

$$a = 28$$

$$280 = 10a$$

$$10 = \frac{280}{a}$$

$$x = \frac{100}{28}$$

Calculons pour 1 dm

Enroulons x avec le Th. de Thalès

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{4}$$

$$1 = 4x$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$= 0,25$$

$$A = \frac{(6 + 6,50) \times 1}{2} = 6,25 \text{ dm}^2$$

$$V = 6,25 \times 40 = 250 \text{ l}$$

Powr 2dm : $\frac{x}{1} = \frac{2}{4}$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{2}{4} = 0,5$$

$$\Rightarrow 7 \text{ dm}$$

$$\frac{(6+7) \times 2}{2} = 13 \text{ dm}$$

$$N = 15 \times 40 = 600 \text{ P}$$

Powr 3dm : $\frac{x}{1} = \frac{3}{4}$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{(7,5+6) \times 3}{2} = 20,25$$

$$N = 20,25 \times 40 = 810 \text{ P}$$

$$250 \rightarrow 600 \rightarrow 810$$



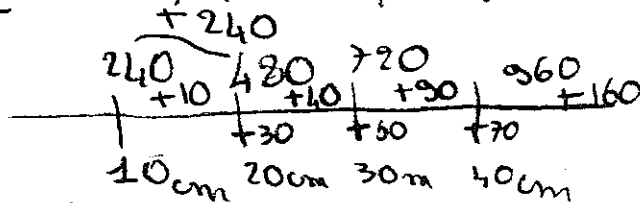
$$N_1 = 6 \times 4 \times 40 = 960$$

$$N_2 = 6 \times 1 \times 40 = 240 \text{ P}$$

$$N_3 = 6 \times 2 \times 40 = 480 \text{ P}$$

$$250 \text{ P} - 240$$

$$= 10 \text{ P}$$



$$N_3 = 6 \times 3 \times 40 = 720 \text{ P}$$

$$y = 24x + (10 - 24 - x)$$

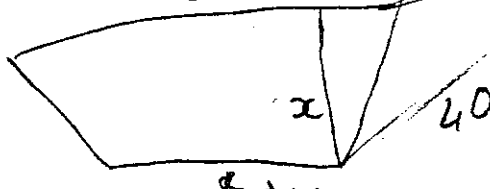
$$100 = 24x + \dots$$

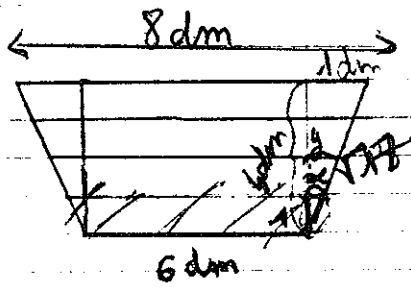
$$100$$

$$100 \text{ P}$$

$$8 \text{ dm}$$

$$y = 24x$$





- D'après Thalès: $\frac{1}{4} = \frac{x}{1}$
 $x = \frac{1 \times 1}{4}$
 $= \frac{1}{4}$
 $= 0,25 \text{ dm}$

et du petit $P = \frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 0,25}{2} = 0,125 \text{ dm}^2$

$V = ct \times h = 0,125 \times 40 = 5 \text{ dm}^3$

pour les 2: $5 \times 2 = 10 \text{ dm}^3$

$V \text{ du } \square = 6 \times 1 \times 40 = 240 \text{ L}$

$V \text{ de } \square = 250 \text{ L}$

- D'après Thalès: $\frac{2}{4} = \frac{y}{1} \rightarrow y = \frac{2 \times 1}{4} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ dm}$

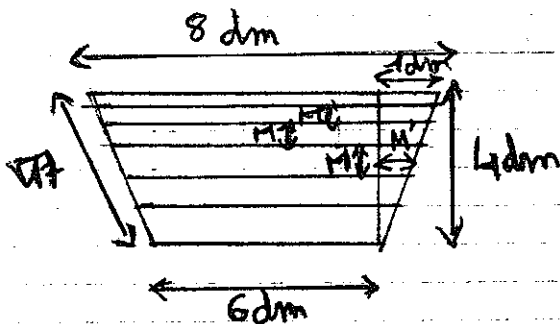
et du 2^e $P = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times 0,5}{2} = 0,5 \text{ dm}^2$

$V = ct \times h = 0,5 \times 40 = 20 \text{ dm}^3$

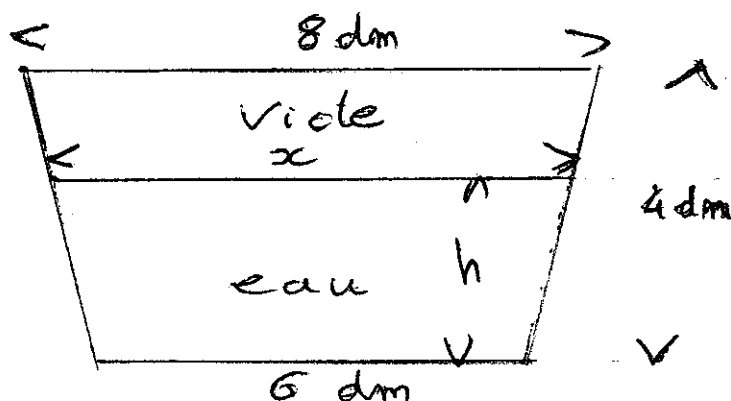
$V \text{ de } \square = 20 - 5 = 15 \text{ dm}^3$

pour les 2: $15 \times 2 = 30 \text{ dm}^3$

M' varie



DEBURY
CAVAZZA
BERTOME
PICARD



$$V_{\text{eau}} = \left(xh - \frac{(x-6) \cdot h}{2} \right) \times 40$$

Tous les volumes
sont en dm^3

$$V_{\text{eau}} = \left(xh - \frac{xh - 6h}{2} \right) \times 40$$

$$V_{\text{eau}} = \left(\frac{xh}{2} + 3h \right) \times 40$$

$$V_{\text{eau}} = h (20x + 120)$$

$$V_{\text{vide}} = \left(8(4-h) - \frac{(8-x)(4-h)}{2} \right) \times 40$$

$$V_{\text{vide}} = \left(32 - 8h - \frac{32 - 8h - 4x + xh}{2} \right) \times 40$$

$$V_{\text{vide}} = \left(16 - 4h + 2x - \frac{xh}{2} \right) \times 40$$

$$V_{\text{vide}} = 640 - 160h + 80x - 20xh$$

$$V_{\text{eau}} + V_{\text{vide}} = V_{\text{total}}$$

$$h (20x + 120) + (640 - 160h + 80x - 20xh) = V_{\text{total}}$$

$$20xh + 120h + 640 - 160h + 80x - 20xh = 1120$$

$$-40h + 640 + 80x = 1120$$

$$80x = 1120 - 640 + 40h$$

$$x = 14 - 6 + \frac{h}{2}$$

$$x = 6 + \frac{h}{2}$$

$$V_{\text{eau}} = h \times (20x + 120)$$

je remplace x par $6 + \frac{h}{2}$

$$V_{\text{eau}} = h \times \left(20 \left(6 + \frac{h}{2} \right) + 120 \right)$$

$$V_{\text{eau}} = h \times (120 + 10h + 120)$$

$$V_{\text{eau}} = 240h + 10h^2$$

Je détermine la hauteur h
pour $V_{\text{eau}} = 1000 \text{ l}$

$$240h + 10h^2 = 1000$$

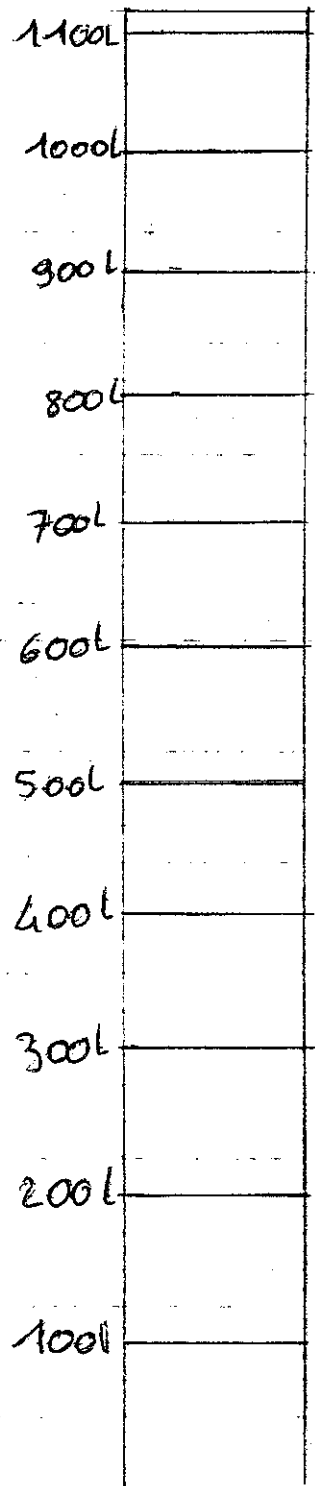
$$h^2 + 24h = 10$$

$$(h + 12)^2 - 144 = 10$$

$$(h + 12)^2 = 154$$

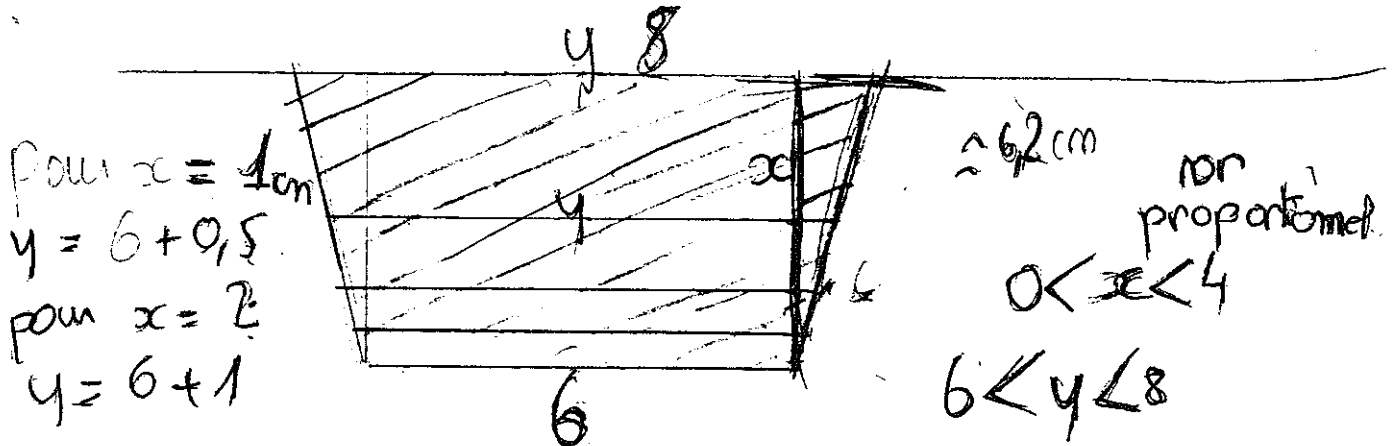
$$h + 12 = \sqrt{154}$$

$$h = \sqrt{154} - 12$$



Annexe N°6

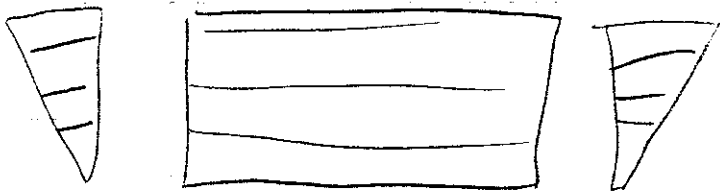
Extraits du brouillon de Puyalé du groupe 1



$x = 4$ qd $y = 8$
 pour $x = 1$, $y = 6,5$

$x = 2 \Rightarrow y = 7$
 $x = 3 \Rightarrow y = 7,5$

Extraits du Brouillon de Kelly du groupe 2



$N_1 = 6 \times 4 \times 40 = 960$
 $N_2 = 6 \times 1 \times 40 = 240$ P
 $N_3 = 6 \times 2 \times 40 = 480$ P

250 P - 240
 $= 10$ P

240
 $+10$
 480
 $+10$
 720
 $+10$
 960
 $+160$
 1120

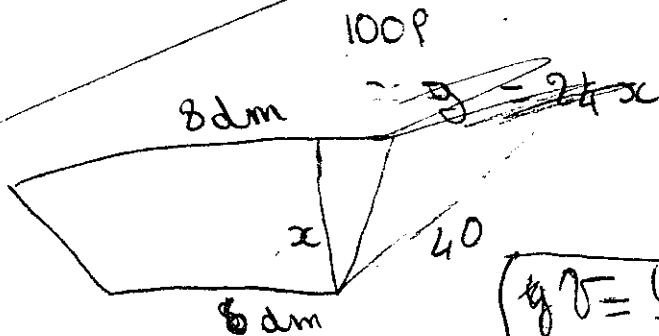
10 cm 20 cm 30 cm 40 cm

$y = 24x + (15 - 24x)$

$N_3 = 6 \times 3 \times 40 = 720$ P

$100 = 24x + \dots$

100



$y = \frac{(2+6)x}{2} \times 40 = \frac{4x}{2} \times 40 = 2x \times 40 = 80x$

$N = \frac{(y+6)x}{2} \times 40$

gommé sur le brouillon original et restitué par l'auteur.

$$240h + 10h^2 = 100$$

Extrait du
Brouillon de Ludovic
du groupe 4

$$240h + 10h^2 - 100 = 0$$

$$10h^2 + 240h - 100 = 0$$

$$10(h^2 + 24h - 10) = 0$$

$$\frac{10}{10} (h^2 + 12 \times 2 \times h - 10) = 0$$

$$\frac{10}{10} (h^2 + 24h + 12^2 - 154) = 0$$

$$10(h + 12)^2 - 1540 = 0$$

$$10(h + 12)^2 = 1540$$

$$(h + 12)^2 = 154$$

$$h + 12 = \sqrt{154}$$

$$h = \sqrt{154} - 12$$

$$h = 12\sqrt{10} - 12$$

~~$$240h + 10h^2 = 100$$~~

~~$$24h + h^2 = 10$$~~

~~$$h^2 + 24h - 10 = 0$$~~

~~$$(h + 12)^2 - 154 = 0$$~~

~~$$(h + 12)^2 = 154$$~~

~~$$h + 12 = \sqrt{154}$$~~

~~$$h = \sqrt{154} - 12$$~~

$$h = \sqrt{154} - 12$$

$$240h + 10h^2 = 200$$

$$h^2 + 24h = 20$$

$$(h^2 + 12h) - 144 = 20$$

$$h = \sqrt{164} - 12 \quad 200$$

$$h = \sqrt{164} - 12 \quad 300 \quad 11,9$$

$$h = \sqrt{184} - 12 \quad 400 \quad 15,65$$

$$\sqrt{196} - 12 \quad 500 \quad 19,28$$

$$\sqrt{204} - 12 \quad 600 \quad 22,83$$

$$\sqrt{214} - 12 \quad 700 \quad 26,29$$

$$\sqrt{224} - 12 \quad 800 \quad 29,67$$

$$\sqrt{234} - 12 \quad 900 \quad 32,97$$

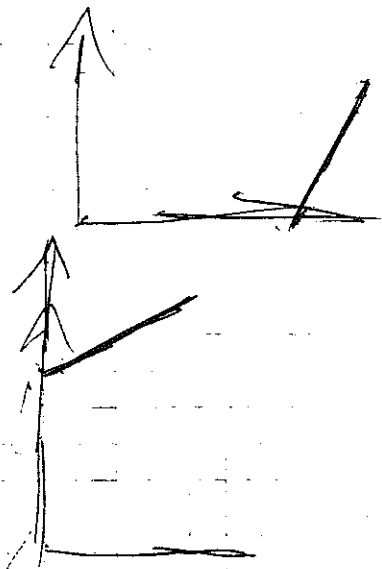
$$1000 \quad 36,2$$

$$240h + 10h^2 = 100$$

$$h^2 + 24h = 10$$

$$(h^2 + 12h) - 144 = 90$$

$$h = \sqrt{154} - 12$$



$$y = \frac{1x}{2} + 6$$

$$x = \frac{1h}{2} + 6$$

SIGLER
lauren
2nde-1

aire
trapèze $\frac{(b+B) \times h}{2}$

volume $\frac{(b+B) \times h}{2} \times 40 \text{ dm}$

$$\frac{(8+6) \times 4}{2} = 28 \times 4 = 1120 \text{ dm}^3 = l$$

$$\frac{(6+x) \times y}{2} \times 40 = 100$$

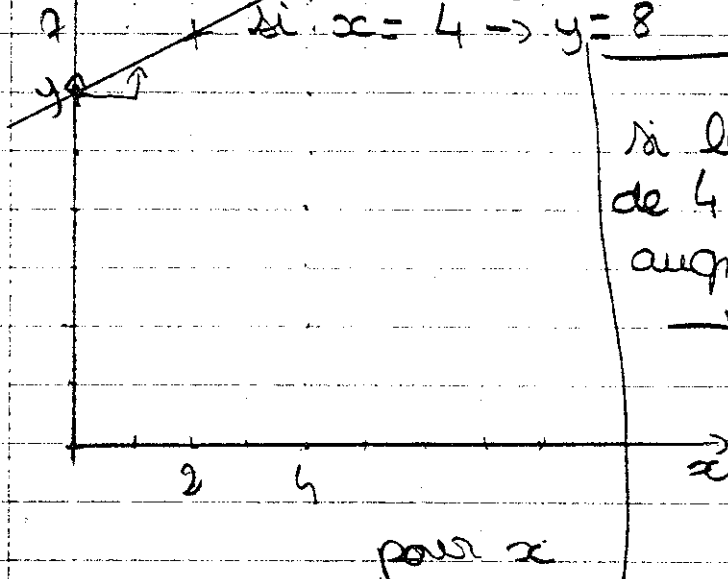
$$\frac{6y + xy}{2} \times 40 = 100$$

$$3y + \frac{xy}{2} \times 40 = 100$$

Soit x la hauteur. Soit y la longueur
de la base

$$\text{si } x = 0 \rightarrow y = 6$$

$$\text{si } x = 4 \rightarrow y = 8$$



si la hauteur augmente
de 4 dm la grande base
augmente de 2

→ pour 2 → 1
pour 1 → 0,5

Distance en fonction de l'âge?

$$\frac{(6 + 6 + \frac{1}{2}h) \times h}{2} \times 40 = \text{~~1000~~}$$

$$\text{~~12h + \frac{1}{2}h^2~~} \times \text{~~20~~} = \text{~~1000~~}$$

$$12h + \frac{1}{2}h^2 = 5$$

$$5 - 0$$

$$\Delta \rightarrow 4$$

$$0 \rightarrow 120$$

$$L \rightarrow 1120$$

$$100$$

$$0,3571428571 \text{ km}$$

$$\text{~~240h~~}$$

$$12h + \frac{1}{2}h^2 = \frac{5}{20}$$

$$12 + \frac{1}{2}h^2 = 5$$

Frank

$$\frac{(5 + 5 + \frac{1}{2}h)}{2} \times h \times 40 = 100$$

$$\frac{(6 + 6 + \frac{1}{2}h)}{2} \times h \times 40 = 100$$

$$\frac{12h + \frac{1}{2}h^2}{2} \times 40 = 100$$

$$2 \cdot 12h + \frac{1}{2}h^2 \cdot 20 = 100$$

$$10h^2 + 240h = 100$$

$$\text{or } \frac{1}{2}h^2 + 12h = \frac{1}{10}$$

$$2 + 56 =$$

$$10h^2 + 240h = 100$$

Wah

$$100 = \frac{(6 + 6 + \frac{1}{2}h)}{2} \times h \times 40$$

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

<http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html>

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7

Case 7018

2 place Jussieu

75251 Paris cedex 05

TITRE :

L'entrée dans le monde de pensée fonctionnel en classe de seconde
DEA de Didactique des Disciplines. Didactique des Mathématiques

AUTEUR :

PIHOUE D

RESUME :

Ce cahier reprend un mémoire de DEA en didactique des mathématiques consacré à l'entrée dans la pensée fonctionnelle en classe de seconde. L'auteur précise d'abord sa problématique et les travaux antérieurs sur lesquels il s'appuie (Dubinsky, Sfard pour la distinction entre processus et objet, Chevallard pour la modélisation, Duval pour les registres sémiotiques, Douady pour la distinction outil / objet et la notion de cadre). Il analyse ensuite le rapport institutionnel à la notion de fonction en seconde, via les programmes et les principaux manuels en usage. Il en vient ensuite à la partie expérimentale du travail, basée sur l'observation fine du fonctionnement d'élèves, en fin de seconde, sur deux tâches spécifiques, l'une relativement scolaire, l'autre élaborée par l'auteur pour laisser réellement aux élèves la responsabilité du choix d'un modèle fonctionnel

MOTS CLES :

Didactique-mathématiques-lycée-seconde-fonctions-algèbre-processus/objet-outil/objet- cadres- registres sémiotiques-modélisation fonctionnelle-analyse de manuels-observation d'élèves -

Editeur : IREM

Université PARIS 7-Denis Diderot

**Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE**

Case 7018 - 2 Place Jussieu

75251 PARIS Cedex 05

Dépôt légal : 1997

ISBN : 2-86612-130-9