

CAHIER DIDIREM

**PRATIQUES DES ÉLÈVES ET DES ENSEIGNANTS EN
CLASSE DE MATHÉMATIQUES.**

RAPPORT DE RECHERCHE.

**RÔLE DES GESTES DE CLÔTURE DANS L'ENSEIGNEMENT DES
MATHÉMATIQUES**

par Annie et Robert Noirfalise

**INSTITUTIONNALISATION EN CLASSE DE SECONDE : VALEUR
ABSOLUE, INTERVALLES, ENCADREMENTS, APPROXIMATIONS
PREMIÈRE PARTIE : choix globaux des enseignants et résultats
des élèves**

par Marie-Jeanne Perrin-Glorian

**DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS 7 DENIS DIDEROT**

**PRATIQUES DES ÉLÈVES ET DES ENSEIGNANTS EN
CLASSE DE MATHÉMATIQUES.**

RAPPORT DE RECHERCHE.

**RÔLE DES GESTES DE CLÔTURE DANS L'ENSEIGNEMENT DES
MATHÉMATIQUES**

par Annie et Robert Noirfalise

**INSTITUTIONNALISATION EN CLASSE DE SECONDE : VALEUR
ABSOLUE, INTERVALLES, ENCADREMENTS, APPROXIMATIONS
PREMIÈRE PARTIE : choix globaux des enseignants et résultats
des élèves**

par Marie-Jeanne Perrin-Glorian

PRATIQUES DES ÉLÈVES ET DES ENSEIGNANTS EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES.

RAPPORT DE RECHERCHE.

Introduction.

Les deux textes proposés dans ce cahier correspondent à des recherches menées dans le cadre d'un projet élaboré en réponse à un appel d'offres de recherche de la DRED en 1993 et qui a permis la collaboration de chercheurs de Clermont Ferrand et de l'équipe DIDIREM à Paris 7.

Le texte d'Annie et Robert Noirfalise s'intresse aux pratiques des enseignants pour clore une question ouverte avec les élèves d'une part dans le cadre d'une relation duelle d'entretien, d'autre part à travers l'analyse d'un protocole enregistré en classe de 6ème sur les fractions.

Le texte de Marie-Jeanne Perrin concerne l'enseignement en classe de seconde des notions de valeur absolue, intervalles, approximations. L'objectif de la recherche était d'étudier les pratiques d'institutionnalisation des enseignants et de tenter de les mettre en relation avec les pratiques mathématiques des élèves. Le texte présenté ici concerne plutôt les choix des enseignants au niveau de la transposition didactique et les résultats des élèves. Il devrait être complété par une deuxième partie concernant plus précisément les pratiques pédagogiques en relation avec ces choix et l'analyse détaillée de quelques séquences.

Des ateliers des Ecoles d'été de 1993 et 1995 ont aussi été alimentés par ces deux recherches : on en trouvera trace dans les Actes de ces Ecoles d'été.

Le groupe de travail comprenait également deux autres sous-groupes : l'un sur l'utilisation des calculatrices, l'autre sur les liens entre résolution de problèmes et pratique du calcul mental. Ces travaux ont déjà donné lieu à des publications séparées.

RÔLE DES GESTES DE CLÔTURE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Par A. et R. Noirfalise : IREM de Clermont-Fd
Université B. Pascal

I) Introduction:

Nous présentons ci-dessous l'analyse de deux protocoles.

Le premier correspond à l'enregistrement d'un dialogue, à propos d'une situation mathématique, entre un chercheur en didactique et une jeune élève de CM2. La relation familiale (oncle, nièce) existant entre les deux personnages du dialogue autorise une reprise, dans un deuxième temps, de celui-ci: c'est alors pour l'élève l'occasion de manifester un rapport privé aux objets de savoir qu'elle avait masqué dans la première partie de l'entretien. La contrainte du temps conduit l'interviewer à clore rapidement des champs de rapports à des objets de savoir ouverts par ses questions à l'élève. Cette clôture rapide est possible car le jeu des questions réponses conduit l'adulte à penser que l'interviewé a des rapports idoines, d'une part à des objets de savoir supposés anciens, d'autre part à de nouveaux objets introduits au cours du dialogue. L'expression dans un deuxième temps d'un rapport resté privé de l'élève à ces mêmes objets montre que la situation est bien différente de ce que l'interviewer, dans le feu de l'action, pouvait imaginer. Toutefois, et c'est cela qui véritablement nous intéresse dans cette étude visant à contribuer à la modélisation du travail de l'enseignant, il apparaît que la façon de faire de l'interviewer est fonctionnelle, adaptée à la contrainte temporelle. Pour qu'il puisse avancer, il était ainsi intéressant qu'il puisse clore rapidement les champs ouverts par les questions. Le fait est que les réponses provoquées l'autorisaient, fictivement, à penser que la jeune élève avait un rapport idoine aux objets de savoirs. Alors, il pouvait clore une question, passer à une autre et de questions en réponses avancer pour réaliser l'enjeu de l'interview.

Le second protocole résulte, lui, de l'enregistrement d'une séquence en classe de sixième. Il convenait, en effet, d'examiner la portée d'une analyse faite dans une situation de dialogue et de voir si elle pouvait s'appliquer à des situations plus scolaires. L'enregistrement proposé montre que cela est possible.

Il s'agit d'une séquence didactique durant laquelle l'enseignant enregistré se refuse à clore le champ ouvert par ses questions sans s'être assuré que tous les élèves ont un rapport idoine à l'objet de savoir évoqué. Il en résulte un effet de glissement, que certes, grâce à son expérience l'enseignante maîtrisera, mais les débats ainsi ouverts successivement s'enlisent, ajoutant à la question initiale de nouveaux objets de savoirs hétéroclites. Bref, il s'agit, faute de l'usage par l'enseignant de gestes de clôture durant les cinquante-cinq premières minutes de la séquence et dans le but d'une meilleure appropriation du savoir par les élèves, d'une heure dont le gain didactique est incertain, car elle ne semble en rien avoir fait progresser le rapport au savoir des élèves.

II Analyse d'un dialogue "interviewer-interviewé"

II.1 La communauté des didacticiens a souvent utilisé des situations classiques d'interviews pour mettre en évidence "l'état des conceptions" des élèves interviewés relativement à un projet de savoir. Cependant, aujourd'hui l'intérêt se déplace et comme le disent Schubauer-Leoni et Trognon (article non publié) "*l'intérêt n'est plus de rapporter les performances constatées à une norme préétablie, mais de chercher à rendre compte de la constitution même des conduites en les considérant comme des réponses résultant de l'interprétation de situations cognitives précises par rapport auxquelles les sujets en jeu dans l'interview, entretiennent des buts et des enjeux variés*". Ainsi, les réponses apportées par un sujet dans un interview, ne sauraient résulter seulement d'un état de son rapport aux objets mis en scène

dans la situation, antérieur à celle-ci, mais sont fonction des interactions qui agissent et se construisent dans l'entretien.

Par ailleurs, beaucoup de travaux ont été faits pour analyser avec cette perspective les comportements cognitifs des élèves ou des sujets placés en situation d'interviewés. Ici nous ne nous intéresserons pas de façon prioritaire à l'élève mais de façon à contribuer à l'étude du comportement du maître, nous centrerons l'analyse sur le sujet interviewer: c'est ainsi que nous tenterons de montrer l'influence sur sa conduite de contraintes situationnelles. En particulier, ce type de séquences très contraintes par le temps nous semble pertinente pour faire apparaître la présence d'une première contrainte que nous appellerons "**construction d'une mémoire commune**" au début de l'interview et d'une seconde qui opère pour clore une phase de l'entretien, contrainte que nous pouvons appeler "**contrainte de clôture**". Ces deux contraintes opèrent sur la gestion des savoirs et des connaissances mises en jeu: c'est ainsi que la première provoque des identifications qui dichotomisent la relation au savoir en terme de "savoir ou ne pas savoir", la seconde entraîne des moments de validation par l'interviewer qui occulte le réel rapport au savoir du sujet interviewé.

II.2 Situation expérimentale :

Il s'agit d'un entretien entre un adulte et un enfant, membre de sa famille (nièce) ayant comme support la page d'un manuel de sixième consacrée à la géométrie. L'enfant, que nous appelons Anne, est élève de CM2 (classe du primaire qui précède la classe de sixième).

II. 2.1: Les conditions de l'entretien.

L'entretien étudié s'est passé en relation duelle, chez l'adulte interviewer. Il est professeur de mathématiques et fait des recherches en didactique. Les membres de sa famille qu'il interviewe, savent qu'il est professeur de maths, son travail de recherche est beaucoup moins clairement identifié.

L'enjeu pour l'adulte, était d'étudier le rapport que des sujets interviewés pouvaient manifester relativement à l'énoncé d'un résultat géométrique et ses usages, ceci dans le cadre plus général d'une étude didactique sur la démonstration. En cela, sa position, dans "l'institution-expérimentation" est différente de celle d'un enseignant: il n'y a pas pour lui d'enjeux didactiques. Son but n'est pas de provoquer des apprentissages chez les interviewés. Il y a cependant une similitude, entre la position de l'interviewer et celle de l'enseignant que l'on retrouve avec la dissymétrie "adulte-enfant", dans leurs positions institutionnelles respectives: c'est l'interviewer qui est le "maître de l'enjeu initial", le sujet de l'expérimentation est dans une position, au départ du moins, différente: il ne sait pas quels sont les enjeux de la situation (un élève en revanche, sait qu'il y a des enjeux d'apprentissage dans une situation didactique, quand bien même, il ne sait pas a priori ce qui va être objet d'apprentissage). On le voit, l'analyse des positions des deux "inter-actants" dans une situation expérimentale, loin de conférer un statut de neutralité à l'expérimentateur, lui donne au contraire une position "maîtresse" a priori: il est le détenteur de l'enjeu. Cependant, paradoxalement peut-être, l'enjeu fixé au départ va contraindre son comportement: il est maître de l'enjeu, mais l'enjeu posé ou institué, *l'interviewer est asservi par l'enjeu*: il est au service de la réalisation de celui-ci. C'est l'institution-expérimentale qui commande, qui fait des deux interactants des sujets. Nous présentons l'interview assorti de commentaires, en le découpant en phases.

II.3 Analyse du protocole.

II. 3.1 : Phase 1: Entrée dans la situation.

I: "*Merci, Anne, de m'aider.*"

Cette phrase est la première à avoir été enregistrée, mais elle a été précédée d'une courte négociation entre I (l'interviewer) et Anne, I ayant obtenu l'accord de Anne, pour se livrer à une courte activité en étant enregistrée au magnétophone.

I, avec la formulation employée, manifeste un élément de l'enjeu expérimental: Anne lui rend service en acceptant la situation; cela ne délivre pas à Anne, cependant, d'informations sur ce

dont il va être question. Malgré tout, Anne connaît l'interviewer, elle sait qu'il est professeur de mathématiques et qu'il lui arrive de solliciter des membres de sa famille pour leur poser des problèmes empruntés à sa discipline. Ceci délimite déjà le cadre de ce qui a des chances d'être proposé par I.

II.3.2: Phase 2: recherche d'une mémoire commune par I et mise en place d'un décor situationnel.

I: Alors tu vois cette figure,¹ cela te dit quelque chose?

A:oui.

I: Tu as déjà vu des choses comme ça ?

A:oui.

Très vite, la désignation, sûrement avec un geste de la main, de la figure du manuel, accompagnée de l'expression "tu vois cette figure" précise le cadre pour A.

Nous entrons dans la première phase de l'interview (la phase précédente est celle qui vise à obtenir l'accord d'un sujet pour entrer dans l'interview) : I va tenter de s'assurer d'une culture requise chez Anne: "*tu as déjà vu...*"

On peut pointer ici un phénomène d'hypostasiation culturelle (Y. Chevallard 1990/91) c'est à dire un écrasement d'univers de connaissances en un point. En effet, le geste de vision de la figure peut renvoyer à des praxèmes bien différents, à des expériences vécues par Anne variées. I se contente, mais cela correspond à une économie de la communication, de la réponse "oui" apportée par Anne à sa question. Il n'y a pas entre I et Anne de mémoire commune de situations où la figure montrée a été objet d'activités.

La phrase d'entrée dans le jeu, contraint I à rechercher chez Anne, un référent disponible, ce qui se passe par un jeu de questionnement appelant des réponses "oui" ou "non". L'hypostasiation culturelle est poussée à l'extrême puisqu'elle conduit à une "dichotomisation du savoir": Savoir ou ne pas savoir. Anne sait ou ne sait pas.

I: Alors, voilà ce qu'il demande dans ce livre là.

L'accord sur un passé vécu par Anne est supposé réalisé par I et il enchaîne, avec la marque linguistique "alors" sur le premier exercice du manuel.

I: Alors, observer ces dessins... et complétez avec les signes.

Tu les reconnais ces signes ? Tu les as déjà vus ?

A : Non... ça je crois que c'est "secteur angulaire droit" (elle montre le signe $\perp$)

I : Perpendiculaire, cela veut dire.

Là aussi, il y a de la part de I, recherche d'un passé vécu par Anne relativement aux signes $\perp$ et $//$. Mais ici, elle répond qu'elle ne les connaît pas. Elle réfère cependant à la notion de secteur angulaire droit.

Pour assurer une mémoire minimale commune, I en disant "*perpendiculaire cela veut dire*", signifie à Anne ce que désigne le symbole $\perp$ par une expression lexicale "perpendiculaire". Rien n'est dit sur la nature de la relation, en particulier sur le fait que la relation de perpendicularité implique deux arguments, deux droites (la référence à un secteur angulaire droit, bien que voisine est une relation unaire). Le simple étiquetage réalisé, en conjonction avec ce qui est supposé connu déjà, suffit à I. On peut même supposer que la référence faite par Anne au secteur angulaire droit est pour I un indice d'une culture chez Anne, idoine pour le déroulement de son projet.

On peut se demander si I n'aurait pas pu, à partir de cet indice, faire un autre choix, par exemple reprendre l'expression secteur angulaire droit, et montrer les liens entre cette notion et celle de perpendicularité. On pourrait dire que, ici, I n'est pas programmé pour cela, et qu'il a adopté une conduite peu coûteuse en temps pour aller dans le sens de son projet. Ceci est

¹ I montre à Anne une figure se trouvant dans un manuel de mathématiques: on en trouvera une reproduction en annexe.

certainement à rapprocher de ce qui se passe en situation didactique. Comme le disent Brousseau et Centeno (1991) "les difficultés de la gestion de la mémoire sont telles que les enseignants tendent inconsciemment à évoluer vers des méthodes les plus économiques à ce sujet". En particulier, dans des systèmes sans mémoire commune comme c'est le cas dans l'entretien réalisé ici, mais qui imposent pour la réalisation d'un projet (finalisation de la situation) la référence à une mémoire commune. Sa construction, dans l'action, contrainte par le temps qui doit être réduit, va utiliser des modalités peu coûteuses en temps du type: l'élève sait ou ne sait pas. Ceci va se faire pour l'acteur du système qui a en "charge" la vérification et l'édification de cette mémoire commune, par le repérage d'indices. Dans le cas présent, on peut noter l'usage d'indices linguistiques conduisant I et A à des conclusions du type "A sait" conforme au projet de I.

Il semble bien que I "ne pouvait pas" faire autrement: la situation, dans laquelle, en terme de description, nous devons incorporer son projet expérimental, le contraint à se conduire comme il le fait.

A : Non, moi je n'ai pas appris ça.

L'institution expérimentale est bien référée par Anne, à l'institution scolaire. "*Je n'ai pas appris ça*". La mémoire commune est à rechercher pour Anne dans l'institution scolaire. Dans le jeu mené par I, de vérification d'une mémoire commune, ici, Anne refuse que les symboles $\perp$ et $//$ puissent être représentatifs d'un champ de connaissances que I puisse lui attribuer. Voyons comment réagit I à cette dénégation qui a priori, contrarie le bon déroulement de son projet.

I : Tu n'as pas appris ça... et l'autre là (I montre le signe $//$).

A : Non plus.

I : D'accord. Alors tu vois le premier veut dire...

I : Tu sais ce que sont des droites perpendiculaires ?

A : Oui. Qui se rencontreront jamais.

I : Non. Perpendiculaires.

A : Hein,... perpendiculaires... c'est... là... l'horizontale et la verticale.

I : Par exemple.

A : Oui.

I : Par exemple. D'accord ? Et là, c'est parallèle... qui ne se rencontreront jamais.

A : Oui.

I : Alors, premier exercice; il faut compléter avec les signes, le premier qui veut dire perpendiculaire et le second parallèle.

Ce passage illustre la façon de I de réduire la difficulté. Anne refuse un élément de mémoire commune. I l'admet et retrouve avec les mots "perpendiculaires" et "parallèles" l'occasion, de façon économique, d'instaurer la mémoire commune dont il a besoin: Anne ne "connait" pas les signes (signifiants) dont ils vont avoir besoin, I passe aux signifiés: les réponses d'Anne, bien qu'incertaines, lui fournissent des indices suffisants pour admettre qu'Anne a une mémoire commune sur le sujet. On peut noter le processus d'hypostasiation entre signifiants et signifiés réalisé par I. Il règle la question en associant signifiés et signifiants dans une phrase. Pour lui, cette association est sans problème: il l'a donnée à Anne après avoir démarré l'interrogation sur le premier exercice.

Pour Anne, cette association ne va pas de soi (elle n'a peut-être pas le temps de prendre en charge totalement ce que I suppose d'elle). C'est ainsi que, plus loin, dans l'interview on rencontre l'échange suivant:

- Anne: Et ça. Tu m'as pas dit ce que cela voulait dire. (elle montre le signe $//$.)

- I : Parallèle !... Tu m'as dit ce que cela voulait dire !

Notons l'étonnement de I, alors que Anne n'a jamais dit ce que désignait le signe $//$ (et pour cause).

On peut donc noter que nous avons, après la phase de négociation de l'entrée de Anne comme sujet dans la situation expérimentale, une seconde phase que l'on peut appeler "**recherche d'une mémoire commune**". Celle-ci, pour que puisse se réaliser le projet, c'est-à-dire le but de l'interview, doit être courte. La contrainte temporelle est forte. En conséquence, le jeu de recherche d'une mémoire commune, à la charge de I, s'accompagne de questions appelant des réponses "oui" ou "non" dichotomisant le savoir. Le sujet sait ou ne sait pas. La contrainte temporelle est sûrement une des causes de ce processus de dichotomisation: en effet, le comportement de I, sa réaction lorsque Anne répond qu'elle ne sait pas quelque chose, montre qu'il cherche à s'assurer d'une mémoire suffisante pour pouvoir entrer dans le jeu qui correspond au but de l'institution expérimentale. Notons que la dichotomisation est une forme particulière, ultime d'un processus d'hypostasiation culturelle. C'est ainsi que I confond rapidement usage de signifiants et signifiés.

Si I mène le jeu en posant des questions, Anne quant à elle, ne peut que "répondre" à ces questions. Contrairement à une situation didactique, il n'y a pas pour elle enjeu d'apprentissage (absence de contrainte d'évaluabilité²), mais il y a une "contrainte de réactivité fonctionnelle"². Ayant accepté le jeu de l'expérience, elle doit répondre aux questions.

Pour Anne, la phase de mémoire commune, plante un "décor situationnel"³ avec la figure, les termes de perpendiculaires, de parallèles et les signes correspondants. Si la mise en mémoire est intentionnelle pour I (pilote par le but), elle ne l'est pas pour Anne. Elle voit le décor se mettre en place; un milieu lui est donné à voir: elle y participe aussi en répondant à des questions, mais elle ne sait pas encore quel jeu elle va être amenée à jouer dans ce décor. En particulier, la situation bien que cadrée par le décor, à défaut des intentions de I, lui délivre des "pièces" du jeu.

II. 3-3: Troisième phase: 1er exercice.

I : Alors, premier exercice, il faut compléter avec les signes. Le premier qui veut dire perpendiculaire et le second parallèle.

A : Ah ! petit d et grand D.

I : Alors, petit d regarde: c'est la droite qui est ici (il montre du doigt).

A : Oui.

I : Grand D.

A : C'est la droite qui est là.

I : C'est la droite qui est là. Tu l'as mis et d prime c'est celle-là. Hein. Alors, est-ce que tu pourrais compléter? Tu le fais sur la feuille. d est quoi alors ?

-Silence-

A : Celle-là et celle là ?.

I : Hm.

A : Cette figure et cette ligne (elle montre d et d').

I : Non, d c'est celle-là, alors regarde d c'est celle-là et D c'est celle-là. Alors qu'est ce qu'elles sont toutes les deux ?

A : Perpendiculaires.

I : Perpendiculaires, OK!

A : Et ça, tu m'as pas dit ce que cela voulait dire? (elle montre //).

I : Parallèle... Tu m'as dit que tu savais ce que cela voulait dire.

A :Oui, oui.

I : Alors, ensuite d' et D. Alors tu les vois d' et D ?

- Silence -.

I : Alors qu'est ce qu'elles sont ?

A : Perpendiculaires.

I : Ensuite d et d'. Elles sont ?

A : Parallèles.

I : Parallèles. Et bien voilà. Tu as fait le premier exercice.

² Termes empruntés à un texte non publié de Teresa Assude (IREM Marseille)

³ Paraphrase du terme "décor didactique" de Centeno et Brousseau (article sur la mémoire in RDM n°11/2.3, 1991)

Malgré quelques hésitations, Anne semble manifester un rapport aux objets "perpendiculaires" et "parallèles" conforme à ce qu'attendait I. Par des questions comme "*d et d', elles sont ?*" I marque le caractère binaire des relations en jeu. Anne, dans le décor situationnel a le choix entre deux mots "perpendiculaire" et "parallèle" qu'elle doit associer aux éléments de la ligne. Ici, apparaît en reprenant la terminologie de Brousseau G. et Centeno J. l'usage de connaissances formulées (CF). Il existe un langage pour en parler, ce qui permet au maître d'identifier l'objet et de le rendre explicite: c'est une connaissance paramathématique pas encore analysée. (RDM vol 11 2/3 p191). La mise en codage symbolique ne procure pas en effet d'analyse des connaissances en jeu. C'est ainsi que cet exercice d'énonciation et d'écriture, en tant que tel ne contribue pas à assurer des liens entre les propriétés de perpendicularité et de parallélisme.

La suite de l'entretien va nous montrer qu'effectivement Anne n'a pas compris ce qui est en jeu dans la page du manuel étudiée, à savoir le fait que le parallélisme de *d* et *d'* découle de la perpendicularité de ces mêmes droites à *D*. La simple juxtaposition typographique du codage symbolique des trois propriétés ($d \perp D$; $d' \perp D$ et $d // d'$) ne saurait en rien garantir l'apparition des liens de nécessité existant entre ces propriétés.

II.3.4: Quatrième phase. Deuxième exercice:

I : Alors, attends. Deuxième exercice. Compléter avec les mots perpendiculaire(s).

A :Et parallèle(s).

I :Et parallèles, en regardant le dessin. Alors, tu sais, c'est des phrases incomplètes, et il faut mettre un mot à la place du blanc... là ! Tu sais faire ça ?

A :Oui, oui.

I : Alors regarde. La phrase c'est: "Deux droites..." et il faudra mettre un mot, "à une même troisième droite sont..." et ils te disent en regardant le dessin... Alors qu'est ce qu'on peut mettre.

A : (Tout doucement) deux droites...

I : deux droites.

A : Perpendiculaires.

I : Alors perpendiculaires.

Ici, sans s'en rendre compte, I donne un indice fort d'évaluation à Anne. Nous reviendrons sur cette question d'évaluation plus loin.

A : J'y marque ?

I : Oui. vas-y. Marque -le.

A : (elle écrit)... Je marque toute la phrase ?

I : Euh. Oui, oui... à une même troisième droite, sont ? Alors attention, tu as un autre vide, là ! Sont quoi ?

A : Hm, hm... Attends, il faut que je regarde (elle soupire)

A : Sont parallèles, non ?... deux droites à une même droite, elles sont parallèles.

I : Oui, bien voilà. Bien, elles sont parallèles, d'accord ?

I "évalue"⁴ la réponse de Anne. Sa question "d'accord" peut laisser imaginer une adresse à Anne pour qu'elle "valide"⁴ elle-même sa réponse, mais l'évaluation faite par I, couplée à sa position "dominante" dans le jeu pouvait couper court toute phase de validation par Anne, du moins dans une composante publique. On va voir que la relation de familiarité entre I et Anne, va autoriser l'expression de la part de Anne d'un rapport privé à la situation, qu'on peut inclure dans une recherche de validation. Notons auparavant que l'évaluation faite par I, l'est

⁴ Nous utilisons ce terme comme le fait C.Margolinas (in R.D.M n°12/1) qui l'oppose dans les phases de conclusion, à celui de validation.

sûrement parce qu'il pense que Anne a compris l'exercice. Evaluer est alors une manière de clore l'exercice.

II.3.5: Phase 5: Expression d'un rapport privé.

I : *Alors, tu t'es aidée du dessin ou pas ?*

I pose cette question en cohérence avec son projet d'expérience. Il cherche à savoir de quelle manière Anne perçoit la nécessité liant perpendicularité et parallélisme.

A : *Ben ! il n'y a pas de troisième droite ! si, il y a celle là (elle montre D) mais...*

I :mais comment.

I est surpris. Il ne s'attendait pas à cela: la réponse de A est non conforme à son projet.

A : *Mais, ils disent "à une même troisième droite".*

IOui.

Notons ici que la marque linguistique "oui" qui était auparavant surtout employée par Anne, lorsque I menait le jeu, est à son tour employée par I: c'est l'indice que c'est Anne qui, à ce moment précis, mène le jeu. I ne sait pas où cela va l'amener: il est désarçonné, il a perdu un instant, les rênes du jeu.

A : *.. Deux droites à une même troisième droite. il faut que la même troisième droite, elle soit dans le même sens ?*

I : *.. Et alors ! Comment tu as fait pour compléter, alors ? pour trouver perpendiculaire et parallèle ?*

I reprend les rênes du jeu.

A : *Ah, ben, parce que... perperpendiculaire à une droite... parce que celle-ci et celle-là, elles sont perpendiculaires.*

I : *Lesquelles ? pardon. Tu les nommes.*

A : *Petit d, je sais pas quoi là (elle montre d')*

I : *Oui*

A : *Et grand D*

I :*Et grand D, elles sont perpendiculaires... et à une troisième droite sont parallèles. Alors, je n'ai pas bien compris, comment tu as fait pour compléter là ! Alors, tu m'expliques... Alors là d' et D sont perpendiculaires.*

A : *oui... C'est un peu du hasard, aussi, hein (elle rit).*

I : *C'est un peu du hasard ?*

A : *C'est un peu du hasard ! (elle continue à rire).*

I : *C'est un peu du hasard.*

A : *Non, mais c'est parce que celle-là, regarde, perpendiculaires,... deux droites perpendiculaires. Deux droites et une même troisième droite. Ben moi, j'ai pris, d machin truc et grand D.*

I :*et grand D, oui ?*

A : *Oui, et puis après pour sont parallèles... c'est que moi, j'ai juste pris, d et d machin chose.*

I : *d machin chose? Ah oui: d prime. (d')*

A : *Oui.*

I : *Ah ! Donc au début, tu as pris comme droites perpendiculaires...*

A :*Oui, et après j'ai changé.*

I : *d et D, et après tu as changé... et cela te permet de répondre comme cela.*

A : *Je sais pas. Moi, je pense...*

Cette phase appelle les commentaires suivants:

Tout d'abord, elle éclaire le jeu effectivement joué par Anne, dans la phase précédente, lorsqu'elle complète la phrase: elle se doit de répondre (contrainte de réactivité fonctionnelle)

avec les éléments du jeu mis en scène publiquement par I et par le texte du manuel. Elle a, à sa disposition, deux termes: elle choisit un premier terme, "perpendiculaire" en l'associant à une partie de la figure. Ici, le jeu ne laisse que deux choix possibles. Anne répond au hasard. Or, il se trouve que c'est le mot attendu (à défaut d'être véritablement la réponse attendue) et I réagit en "évaluant" cette réponse positivement en la reformulant. En évaluant ainsi, il clôt l'activité publique de Anne, il évalue non seulement l'énonciation du mot, mais l'activité de Anne, c'est-à-dire l'énonciation du mot associée à une sélection d'une partie de la figure avec deux droites effectivement perpendiculaires.

Pour ce qui est du mot devant intervenir dans le deuxième emplacement, Anne suppose, qu'il faut bien utiliser le second mot, "parallèle". C'est la situation qui est ainsi très fermée : ce qu'elle fait, et I évalue à nouveau positivement, fermant à nouveau le rapport public de Anne à l'exercice.

Dans cette partie du dialogue entre Anne et I, Anne joue un jeu où s'exprime un rapport public, avec des objets en scène contraints par le décor situationnel et les connaissances formulées en scène dans ce décor.

Une question de I permet alors de voir apparaître des éléments d'un rapport privé, resté en coulisses du rapport public; c'est quand I lui demande comment elle a fait pour répondre. Cela lui permet à la fois de dévoiler sa stratégie de réponse au hasard mais aussi ses difficultés. C'est ainsi que l'on voit que pour elle, le terme "même troisième droite" renvoyait à l'existence d'une troisième droite de même sens que les deux autres. On voit bien aussi comment " l'évaluation de I" peut bloquer le processus de validation de ses réponses pour Anne, au moins dans sa composante publique.

La suite du dialogue est d'ailleurs éclairante sur ce point.

I : Tu aurais ça à l'école, tu penserais que tu as juste ?

A : Je ne sais pas; je ne peux pas deviner.

I : Tu ne sais pas, tu ne peux pas deviner.

Ici, la réaction de I délivre à Anne des éléments d'évaluation de son travail.

A : Je pense que j'aurais faux.

I : Tu penses que tu aurais faux.

Dans le jeu où l'entraîne I, Anne ne sais plus trop ce qu'il faut répondre : elle est entraînée par I dans une phase de validation mais elle n'a pas d'éléments pertinents à sa disposition pour opérer cette validation.

A : Je sais pas ! J'en sais rien, moi !

I : Tu n'en sais rien et alors !

A : On ne nous a pas appris ça, alors... je peux pas dire.

A, démunie sur le plan de la validation se sert de l'absence de mémoire "on ne nous a pas appris ça" pour se sortir de la situation. Plus loin, I lui demande pourquoi elle a répondu tout en ne sachant pas très bien ce qu'il fallait répondre.

I : Mais alors, ce que je n'ai pas très bien compris, c'est pourquoi tu as répondu quand même ?

A : Ben ! Parce que de toute manière (elle dit cela avec un grand sourire).

I : Oui.

A : La première, j'avais mis perpendiculaire...

I : Oui.

A : Donc, la Deuxième c'était parallèle !

I : Ah, d'accord.

A : Donc, la première question, j'ai trouvé facilement et la deuxième comme je trouvais moins facilement, j'ai mis parallèle comme perpendiculaire c'était déjà utilisé.

Anne ne pouvant se comporter en sujet mathématique (non dévolution de la situation mathématique) se sert des éléments du décor situationnel, de façon aléatoire. Le jeu était

suffisamment fermé pour qu'elle fasse les bons choix, renforcée en cela par les clôtures exercées par I par le biais d'"évaluation".

III. Que nous apprend l'analyse précédente sur les conduites d'un enseignant?

III. 1 Notre sujet n'est pas d'étudier en soi une relation duelle interviewer-interviewé, mais bien de contribuer à la modélisation des conduites de l'enseignant. Or, il y a bien sûr des analogies entre la situation étudiée précédemment et ce qui peut se passer en classe. Comme l'interviewer, l'enseignant est contraint par le temps: il doit respecter un programme. Pour ce faire, il réalise une programmation dans le temps des différents contenus puis il essaye de respecter le temps qu'il s'est donné ainsi pour chaque chapitre du cours.

III. 2 Lorsque l'enseignant ouvre un nouveau chapitre, le plus souvent, les savoirs impliqués manifestes vont convoquer d'autres savoirs "vus" par les élèves antérieurement. Comme notre interviewer, on peut supposer que par un jeu de questions-réponses l'enseignant va s'assurer d'une mémoire commune avec les élèves de la classe. Nous avons vu dans l'interview, qu'il y avait une dichotomisation du rapport au savoir de l'élève, et que la référence à une mémoire commune pouvait être en partie fictive. **Il ne s'agit pas de dénoncer cette fiction mais au contraire d'affirmer sa fonctionnalité.** Imaginons, un instant, un enseignant qui voudrait s'assurer que tous ses élèves ont un rapport personnel idoine aux objets de savoir dont il a besoin. On peut, d'une part penser au temps nécessaire pour cela et imaginer sans grand risque que ses espoirs seront déçus.

L'établissement de rapports personnels ad-hoc, impliquerait alors qu'il diffère son projet didactique, une avancée dans le programme, et qu'il reprenne un travail sur des objets de savoirs anciens. Il compromettrait alors la réalisation du travail que contractuellement l'institution scolaire attend de lui.

On peut noter ici, le rôle fonctionnel joué par la dichotomisation du savoir: celle-ci sert à masquer à l'enseignant la fiction de l'idonéité du rapport des élèves aux objets anciens. Les élèves savent ou ne savent pas. Quelques questions bien posées, comme "Vous avez vu cela l'an dernier, n'est ce pas ?" peuvent autoriser l'enseignant à clore rapidement l'établissement d'une mémoire commune. Notons aussi que la relation d'un enseignant n'est pas duelle avec tous ses élèves, et qu'une façon de masquer la fiction est pour le maître de se contenter de quelques bonnes réponses fournies par quelques élèves ou même par un seul.

Insistons bien : notre propos n'est pas d'adresser une critique ni de dénoncer des façons de faire des enseignants mais bien au contraire d'en comprendre la fonctionnalité. Un enseignant qui rendrait publique la fiction dont nous parlions ci-dessus et qui voudrait la réparer compromettrait son travail. Les instructions officielles d'ailleurs, à leur manière, le rappellent en mettant en garde les enseignants à propos des révisions:

"Il convient de faire fonctionner à propos de nouvelles situations, et autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision, les notions et outils vus antérieurement." (programme de sixième : (1985) B.O. n°44).

"En seconde, les activités de résolution d'exercices et de problèmes fournissent un champ de fonctionnement pour les capacités acquises au collège et permettront, en cas de besoin, de consolider ces acquis; on évitera en revanche les révisions systématiques." ⁵ (programme de seconde : (1990) B.O.n°20)

III. 3 Nous pouvons aussi faire un autre parallèle entre la situation analysée et la façon dont un enseignant clôt le rapport au savoir ouvert par une question qu'il a lui-même posée. On le sait, les enseignants procèdent classiquement de manière interrogative, en posant des questions fermées. Le fait que les questions soient fermées permet de clore rapidement le rapport au savoir ainsi ouvert par la question et ainsi de progresser dans la mise en scène des objets de savoir formant le projet de l'enseignant. Ce dernier peut aussi s'appuyer sur quelques bonnes réponses pour clore le sujet. Là aussi, il y a une fiction qui voudrait que les élèves aient tous compris ou aient établi un rapport idoine aux objets de savoir mis en scène. Cette fiction est fonctionnelle, elle permet à l'enseignant de progresser dans son cours.

⁵ Souligné dans le texte! Il semble effectivement que certains enseignants s'étant laisser aller à des révisions chronophages aient ainsi compromis le traitement du programme spécifique de leur classe. Les textes du BO préviennent donc ces pratiques, en particulier dans des classes sensibles aux questions de mémoire commune, comme le sont la sixième et la seconde.

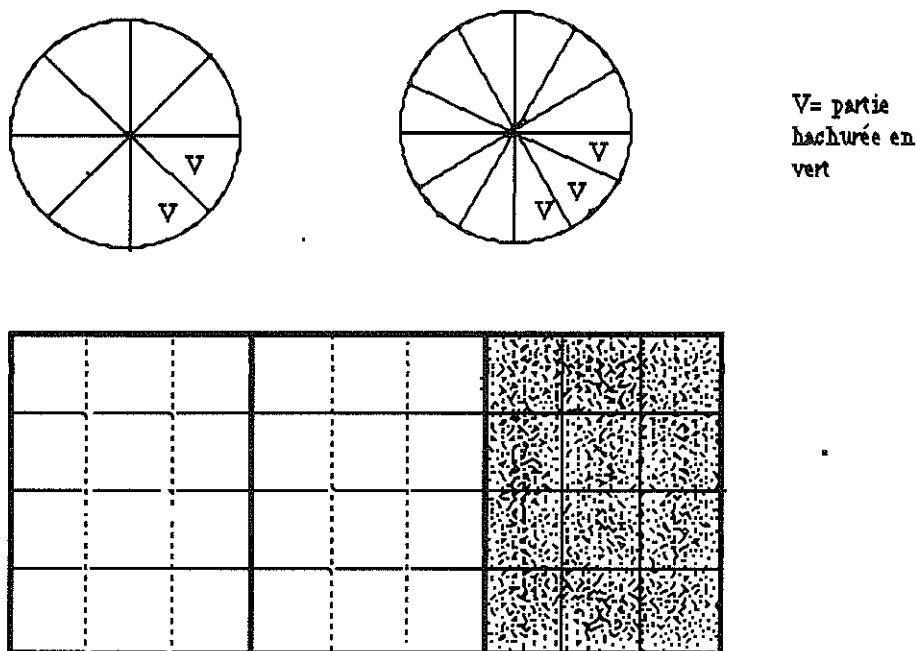
Nous présentons ci-après, l'étude d'un autre protocole, celui-ci extrait d'une classe. Nous l'avons choisi car il nous paraît significatif. Il met en scène un enseignant voulant s'assurer, semble-t-il, que tous les élèves ont compris. Pour cela, il se refuse à clore une question en refusant les bonnes réponses pourtant nombreuses fournies par les élèves. Au contraire, il suscite des réponses erronées pour relancer le débat. Il se trouve que le milieu mathématique ne permet pas de trancher le débat ainsi ouvert. Le débat s'enlise, relance d'autres questions, ouvre des champs connexes à celui qui est l'objet d'étude. En définitive, faute de clore les rapports à des objets de savoir ouverts par ses questions, l'enseignant aurait pu laisser sa classe s'installer dans une situation où des objets et des problèmes hétéroclites ont été mis en scène, situation telle que les élèves ne puissent plus savoir ce qui fait vraiment question.

IV. Analyse d'un protocole enregistré en classe de sixième

IV-1- Présentation de la situation enregistrée :

Les fractions avaient été abordées deux mois auparavant, des apprentissages portant sur d'autres sujets avaient suivi ; l'enregistrement effectué l'a été à un moment où le professeur revenait sur l'étude des fractions afin de traiter la partie du programme concernant l'égalité de fractions et le produit d'un décimal par une fraction.

En début d'heure les élèves avaient tous le document suivant en couleur :



Le professeur avait prévu et a mis en place la gestion de classe suivante :

-énoncé de la consigne :

"Dans les figures suivantes on a représenté des fractions, je vous demande lesquelles. On l'écrit au crayon de papier en dessous"

-1° phase: individuelle

Les élèves cherchent seuls à leur place, le professeur circule de l'un à l'autre.

-2° phase : à deux

A la demande du professeur qui a constaté l'avancement de leur travail, les élèves se mettent deux par deux pour confronter leurs résultats : "*Est-ce que vous avez pareil ou pas pareil ?*"

-3° phase : collective

Les élèves sont invités par le professeur à dire tout ce qu'ils ont écrit.

Le professeur, dans un entretien avant la séance, prévoyait que, pour la première figure, certains élèves proposent un quart, d'autres deux huitièmes, pour la seconde certains un quart d'autres trois douzièmes, que certains enfin proposent un quart égal deux huitièmes égal trois douzièmes.

Pour la troisième figure et la programmation horaire du travail, le professeur s'exprimait ainsi : "*Un peu plus compliqué, j'ai utilisé des couleurs pour essayer qu'ils repèrent un tiers, peut-être qu'il y aura trois neuvièmes avec les barres rouges. Avec les barres vertes peut-être ..., on a des nombres assez grands ..., je pense que tout le monde ne trouvera pas tout mais que certains trouveront les uns et d'autres d'autres et puis il y aura une discussion pour savoir, bon..., je pense qu'en une demi-heure ils auront travaillé, confronté à deux, fait une synthèse pour voir qu'une fraction enfin un nombre peut s'écrire avec différentes fractions, que différentes fractions représentent le même nombre.*"

IV-2- Déroulement effectif de la séance et commentaires :

Durant les deux premières phases, nous n'avons sur l'enregistrement que quelques commentaires du professeur à l'adresse de certains élèves. Ces interventions permettent de penser que le professeur découvre avec étonnement que plusieurs élèves ont inversé l'écriture des fractions ($\frac{8}{2}$ à la place de $\frac{2}{8}$ ou $\frac{4}{1}$ à la place de $\frac{1}{4}$) :

P : "*Qu'est-ce que tu m'écris là ? Comment tu m'écris un quart d'heure ? ...tu es sûr?...tu l'écris un sur quatre ? oui ? quatre sur un ?... c'est pareil ?*"

Aucun élément du milieu mathématique devant lequel se trouvent les élèves ne leur permet de valider leurs écritures, les questions courtes du professeur ne suffisent pas à conduire les élèves à s'interroger sur la pertinence de leurs réponses. Durant la seconde phase, les interactions avec le voisin auraient pu aussi jouer ce rôle, mais il y avait dans cette classe beaucoup trop d'élèves ne possédant pas la connaissance correspondante.

La deuxième phase débute environ huit minutes après le début de la séance et, sept minutes après le professeur interrompt les échanges donnant le signal du début d'une phase collective : P : "*On va reprendre ... on va reprendre s'il vous plaît ...pour le moment on n'écrit rien et quand on se sera mis d'accord on pourra écrire la solution. Pour le moment on n'écrit rien on va simplement dire ce que les uns et les autres ont écrit et on va essayer d'y voir clair là-dedans*"

Ici, le professeur aurait pu corriger les écritures erronées, faire appel à la mémoire de la classe ou rappeler de façon magistrale les conventions d'écriture fractionnaire dans une situation de partage. Dans l'urgence, le professeur ne choisit pas cette technique de clôture, pensant peut-être que la phase de bilan peut être l'occasion pour les élèves, par les confrontations qu'elle induit, de se questionner sur la validité des écritures qu'ils ont produites. L'activité pourra alors se poursuivre et le projet didactique être conduit à son terme en évitant une phase de correction.

Des élèves lèvent le doigt, le professeur écrit au tableau ce qu'ils proposent : ce sont toutes des écritures correctes. Le professeur sollicite alors ceux pour lesquels il avait repéré des écritures erronées, annonce lui-même les productions fausses d'élèves qui ne demandent pas la parole. Tout est écrit au tableau, le professeur intervient alors sur l'organisation du travail : P : "*Bon alors là-dedans il va falloir trier hein, il y en a qui ont donné des choses qui sont pas pareilles semble-t-il, alors d'abord ici je voudrais qu'on discute sur ces deux écritures parce que je les ai rencontrées souvent deux sur huit, huit sur deux, un sur quatre et quatre sur un, est-ce que ce sont les mêmes écritures ?*"

Choisie dans l'urgence une telle formulation centre les élèves sur le symbolisme; la réponse est évidente, il n'y a pas de débat possible, les élèves répondent "en chœur", "non". De plus, elle conduit à prendre de la distance par rapport au problème initialement posé sans créer un milieu pour la validation des réponses données à celui-ci: en effet aucun d'entre eux n'a répondu simultanément huit sur deux et deux sur huit ou un sur quatre et quatre sur un. Le professeur est obligé de relancer le débat en prenant encore plus de distance par rapport au problème initial.

Il poursuit donc :

P : *"Alors vous dites non, je voudrais que vous expliquiez à vos camarades si c'est oui ou si c'est non, si c'est non pourquoi ?"*

Sollicités et guidés par le professeur deux élèves expliquent, l'un que :

M : *"deux sur huit c'est huit parties, sur les parties on a pris deux parties"*

l'autre que :

S : *"huit sur deux, c'est un gâteau partagé en deux, pour faire huit sur deux il faudrait beaucoup de gâteaux... il faudrait quatre gâteaux pour faire huit demis"*

Durant tout l'échange le professeur répète en écho les assertions exactes des élèves et enchaîne :

P : *"Qu'est-ce que tu en penses F. ?"*

F. est un des élèves ayant été repéré publiquement comme ayant écrit huit sur deux pour la première figure.

Le cas de F. est typique. Le professeur sait que ses réponses au problème initial sont écrites de façon erronée, mais lui l'ignore sans doute. L'enseignant espère peut-être que ce qui vient d'être dit aura conduit F. à s'interroger sur la pertinence de ses résultats, devant le silence de F., le professeur décide d'ouvrir un temps de révision.

Il relance le débat sur des questions de révision sur les fractions (numérateur, dénominateur, ...), demande aux élèves l'ayant déjà fait précédemment de rappeler la différence entre deux sur huit et huit sur deux, répète en conclusion la dernière phrase d'un élève : *"donc huit sur deux gâteaux il a dit que ça ferait quatre gâteaux"* en s'appuyant sur un dessin au tableau, puis interpelle S. C. dont la production du début de séance était analogue à celle de F. :

P : *"S.C., est-ce que ces deux écritures huit sur deux et deux sur huit signifient la même chose ?"*

S.C. : *"Non"*

P : *"Donc déjà avec le dessin que nous avons là (il montre la première figure du début de séance), quelle est la bonne réponse ?"*

S.C. répond d'abord huit demis puis devant la réaction de certains élèves et l'insistance du professeur (*"Tu es sûr, huit demis ?"*) change d'avis. A la question du professeur : *"Et pourquoi c'est pas huit demis ?"*, il répond en reprenant l'intervention du professeur: *"Parce qu'il nous aurait fallu quatre gâteaux"*.

Une telle connaissance ne peut être un critère de validation que dans des situations très particulières. De plus, dans la suite de la séance elle sera mobilisée à propos de la distinction entre $1/4$ et $4/1$ de façon erronée : *"pour un sur quatre on en prendra quatre gâteaux"*. Au niveau explicite, rien ne permet de faire l'hypothèse que le rapport de l'élève aux écritures fractionnaires ait été modifié ou simplement remis en cause, néanmoins le professeur considère que le problème du choix entre huit sur un et un sur huit est clos et passe à une autre question sur le même sujet.

La séance a débuté depuis 30 mn quand le professeur ouvre un nouveau débat à propos de $1/4$ et $4/1$:

P : *"Alors qu'est-ce qui nous reste, il nous reste encore des écritures qui semblent être identiques un quart et quatre sur un, alors on va faire parler un petit peu F., est-ce que un quart c'est pareil que quatre sur un ?"*

L'élève interpellé répond évidemment non, mais donne des justifications fausses.

Se refusant toujours à corriger les réponses données, le professeur tente de nouveau de mobiliser un milieu pouvant permettre aux élèves de valider leur réponse.

Dans un premier temps il engage les élèves à se référer à la notion de partage, mais des difficultés apparaissent pour l'interprétation des unièmes (partage en une partie). Il abandonne alors cet univers pour introduire un univers familier, celui des heures. Si un quart d'heure est très vite identifié à quinze minutes, l'interprétation des unièmes d'heure provoque de nombreuses réactions erronées.

Là encore les élèves expriment leur difficultés à assumer le travail d'interprétation qui leur est demandé.

Le professeur doit abandonner et il engage les élèves sur un nouveau débat :

P : *" allez on reviendra tout à l'heure à ça, il faut reprendre un petit peu, est-ce que les écritures deux tiers et trois demis, elles sont ... est-ce qu'elles sont pareilles ou est-ce qu'elles sont pas pareilles ?"*

On assiste alors à un glissement: sans doute induit par les interprétations diverses préalablement proposées par le professeur: les élèves avancent alors, pour répondre à cette question, des interprétations dans des univers extra-mathématiques sans rapport avec les fractions en terme de modélisation.

Un élève proposera par exemple :

J. : *"elles sont pas pareilles parce que si on veut jouer à ...par exemple quand on a des billes et qu'on veut jouer à un jeu qui a trois billes et que on a que deux on peut pas jouer ..."*

La discussion s'anime, la correspondance entre les situations de jeu de billes et les écritures fractionnaires est ambiguë, le niveau sonore monte et le professeur arrête le débat pour demander aux élèves une production écrite individuelle. La séance a maintenant débuté depuis quarante et une minutes :

P : *"Bien, alors on reprend, est-ce que les écritures deux sur trois et trois sur deux sont les mêmes ? Je voudrais qu'on fasse un dessin qui nous montre bien tous, sur votre brouillon, là vous prenez le brouillon, vous allez me représenter la fraction deux tiers, vous allez me représenter la fraction trois demis et on va voir si on a colorié la même part..."*

Une fois encore le maître ne tranche pas. Aucune information sur la pertinence de cette interprétation dans l'univers des jeux de billes n'étant donnée, elle sera de nouveau mobilisée par un élève, de façon tout aussi floue, dans la suite de la séance. Mais le professeur "reprend la classe en main" en proposant une consigne nouvelle à exécuter individuellement.

Un débat de 3 ou 4 mn suit , sur la façon de partager en trois un cercle avec un compas. Le travail sur le cahier est ponctué par les interventions du professeur qui sollicite certains élèves et répète en écho l'énoncé des procédures exactes. Il conclura par :

P : *"Est-ce qu'on peut tenir pour acquis qu'on ne peut pas permuter le numérateur et le dénominateur ? ... la place a une importance ?oui ? ..."*

Cette question est accueillie par un silence dans la classe.

Ce résultat en "baisse" par rapport à l'enjeu des échanges précédents et dont l'articulation avec celui-ci est incertaine clôt l'activité proposée et permet au maître de revenir au problème initial; il est urgent d'avancer, la séance est en effet presque terminée.

Le professeur enchaîne immédiatement :

P : *"Alors je reviens ici, je reviens ici, (P. montre les figures distribuées en début de séance), oui et je reviens à mon problème, ici on avait donc ce dessin, cette figure sur laquelle on travaillait et il y avait des écritures qui étaient proposées ... est-ce que la partie qui est coloriée en vert deux écritures étaient proposées un quart et quatre sur un, est-ce que les deux conviennent ? laquelle convient et que l'on va retenir ?"*

Les premiers élèves qui prennent la parole répondent correctement, mais sans évaluer leurs réponses le professeur sollicite de nouveau d'autres élèves et très vite de nouvelles confusions

apparaissent : *"quatre unièmes ça ferait quatre parties hachurées et là on en a que deux, il faudrait deux gâteaux"*. Le professeur tente à chaque fois de faire "traiter" l'erreur par les élèves.

Mais dans les dernières minutes de la séance le professeur ne sollicite que des élèves ayant des productions exactes et justifie lui-même les conclusions qu'il souhaitait faire établir. Il donne, essentiellement par élève interposé, la solution de l'exercice.

IV.3- Que nous apprend cette situation sur les gestes de l'enseignant :

Si on résume les commentaires faits dans le paragraphe précédent, au cours de la présentation du déroulement de la séance, on peut retenir les traits caractéristiques suivants :

- * dès le début de la séance le professeur constate que le rapport personnel de plusieurs élèves de la classe à un savoir incontournable pour l'avancement de la séquence n'est pas idoine à ce qu'il devrait être. Il décide alors de différer son projet pour reprendre un travail sur des objets déjà abordés.

- * pour reprendre ce travail il refuse de recourir à des phases d'évaluation et tente de proposer des milieux susceptibles de permettre une phase de validation. Mais ce travail nécessairement improvisé ne permet pas d'avancer. En effet :

- produite dans l'urgence, la formulation du débat donnée conduit à une réponse évidente et en décalage avec la finalité poursuivie. Il y aura plusieurs reformulations successives.

- le savoir qu'il y a à retrouver est l'objet d'une convention, ce qui relève nécessairement d'un travail d'institutionnalisation pour le maître.

- les milieux convoqués ne sont pas pertinents pour permettre une appropriation du problème par l'élève.

- * le professeur tente de débusquer et de "traiter" sur le champ tous les rapports des élèves non conformes aux rapports attendus.

De tels gestes entraînent, de fait, un allongement considérable du temps didactique et génère l'émergence d'un foisonnement d'objets, souvent hétéroclites. Mais les contraintes horaires et l'obligation de faire avancer le cours que doit nécessairement respecter le professeur pour conduire sa classe le contraignent à avoir recours à des techniques de gestion de classe qui ne permettent pas un traitement complet des problèmes soulevés. Il s'en suit que la rectification des rapports aux objets mathématiques poursuivie reste sans doute illusoire.

V. Conclusion:

D'autres faits viennent appuyer ce que nous avons tenté de montrer ci-dessus. En particulier des observations de jeunes enseignants, moins experts que le professeur précédent pour reprendre leur classe en main et moins attentifs que lui aux contraintes horaires, nous ont aussi montré "qu'à vouloir trop bien faire", certains induisaient, par leur façon de faire, le chahut dans leur classe. Voulant s'assurer que tous les élèves suivent bien, ils créent des situations ressemblant à la séquence sur les fractions décrite ci-dessus: la non fermeture de questions engendre des prises de paroles désordonnées, des protestations d'élèves prétendant ne pas comprendre. Le jeune professeur sort alors de son cours, abattu, ayant le sentiment d'avoir échoué, d'avoir perdu son temps. Pour lui la fiction s'est écroulée...

Nous nous sommes placés dans cette étude, dans une perspective écologique. A ce titre, on peut dire que "des pratiques dominantes réalisent un équilibre optimal à un moment de l'histoire du système dans lequel elles vivent".

Nous le savons par ailleurs, les enseignants procèdent souvent de façon interrogative. Ils le font en posant des questions fermées pouvant être closes rapidement. Nous avons tenté de montrer ici en quoi cette façon de faire est fonctionnelle, en quoi elle permet de répondre aux

exigences du temps, de son écoulement inexorable et aux contraintes d'avancement du programme.

Nous sommes bien sûr conscient que le milieu mathématique convoqué par les questions est une variable importante; les travaux de didactique sont là pour nous le rappeler. De ce point de vue, on peut considérer chaque question comme ouvrant une micro-situation dont on pourra analyser la pertinence didactique. Cette variable n'était pas pour nous directement un objet d'étude. Il serait cependant tout à fait intéressant de travailler sur les conséquences, en terme d'apprentissage, pouvant résulter d'un enchaînement de questions-réponses. Nous en percevons cependant la difficulté. La nécessaire clôture des questions doit certainement laisser certains élèves en état d'incompréhension au moment où elle s'effectue. D'autres doivent certainement avoir une perception peu assurée de ce qui se joue. L'établissement d'un rapport idoine à des objets de savoir, si jamais il peut se faire, serait donc renvoyé pour certains élèves à des questions, des exercices, on encore à un travail personnel ultérieurs.

Bibliographie:

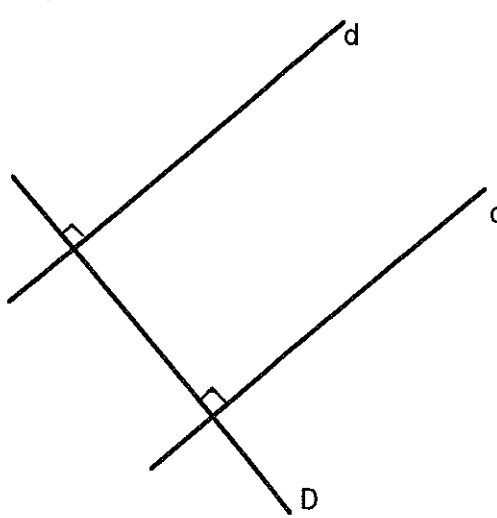
Brousseau G. et Centeno J.(1991) Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant *Recherches en didactique des mathématiques* (Vol 11 n°2.3 pp167/211)

Chevallard Y. (1990/1991) Dimension instrumentale, sémiotique de l'activité mathématique *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble* (Année 90/91 pp103/107)

Margolinas C. (1992) Eléments pour l'analyse du rôle du maître; les phases de conclusion *Recherches en didactique des mathématiques* (Vol12 n°1 pp113/ 159)

ANNEXE 1: extrait du manuel ayant servi de support à l'interview (PYTHAGORE 6^{ième})

a) un résultat



1. Observer ce dessin et compléter avec les signes $\perp$ et $\parallel$:

.d ... D
.d' ... D
.d ... d'

2. Compléter avec les mots **perpendiculaire(s)** et **parallèles (s)** en regardant le dessin

Deux droites à une même troisième droite
sont.....

ETUDE DE L'INSTITUTIONNALISATION EN CLASSE DE SECONDE. VALEUR ABSOLUE, INTERVALLES, ENCADREMENTS, APPROXIMATIONS.

PREMIÈRE PARTIE : choix globaux des enseignants, résultats des élèves.

M.J. Perrin-Glorian, Equipe DIDIREM.

I. Introduction. Problématique et méthodologie.

1. Cadre général du travail : origine des questions.

Dans notre thèse, M.J. Perrin (1992, 1993, 1994) nous avons identifié, à partir d'observations de classes de CM2 et de 6ème, d'entretiens avec des enseignants et des élèves certains phénomènes particulièrement visibles dans les classes faibles :

- une certaine opposition entre faire réussir et faire apprendre les élèves, entre une logique de la réussite et une logique de l'apprentissage. Le désir d'obtenir un minimum de réussite à court terme, d'ailleurs nécessaire au fonctionnement de la classe, peut entrer en contradiction avec les conditions d'un apprentissage qui risque de n'amener la réussite attendue qu'à plus long terme. Les enseignants donnent aux élèves les moyens de réussir les exercices qui devraient attester de l'apprentissage, même sans un réel apprentissage.
- la difficulté de trouver un équilibre entre construction du sens des concepts et maîtrise des algorithmes,
- la pression qui pousse à aplatir l'enseignement sur celui des seuls algorithmes.

Ces phénomènes qui sont reliés aux contraintes de fonctionnement de la classe (le temps, les élèves eux-mêmes qui réclament des algorithmes plus sécurisants, la nécessité d'un minimum de réussite pour que la classe puisse fonctionner, la pression sociale...) et amènent la création de cercles vicieux aboutissant au non apprentissage de certains élèves, pèsent particulièrement sur l'institutionnalisation. L'analyse des difficultés des élèves et des contraintes des enseignants menée dans ce travail conduisait (Perrin-Glorian, 1992) à considérer la dévolution et l'institutionnalisation (Brousseau, 1987) comme deux processus complémentaires se déroulant tout au long de l'action didactique et non seulement comme des phases se déroulant avant ou après la phase adidactique.

En utilisant la théorie anthropologique développé par Chevallard, nous précisons maintenant ce point de vue. L'objectif de l'enseignement est de faire émerger et de développer chez l'élève un rapport personnel aux objets de savoir le plus idoine possible au rapport institutionnel concernant ces objets dans le niveau d'enseignement considéré. Ce rapport personnel comprend des déclarations sur les objets et aussi des actions avec ces objets et d'autres objets —mathématiques, symboliques...— avec lesquels ils sont en relation. Si l'on admet que la construction de ce rapport personnel se fait largement à travers la résolution de problèmes et que l'enseignement, et donc le maître, est responsable de l'idonéité du rapport personnel de l'élève au rapport institutionnel, on peut caractériser la dévolution et l'institutionnalisation de la façon suivante :

Le processus de dévolution est celui par lequel le maître fait en sorte que l'élève engage ses connaissances et utilise les problèmes pour faire évoluer son rapport personnel aux objets de savoir en jeu dans le problème. Le processus d'institutionnalisation est celui par lequel l'enseignant fait émerger pour les élèves un rapport personnel à un objet de savoir donné et s'efforce de le faire évoluer dans le sens d'une plus grande idonéité au rapport institutionnel. C'est en ce sens que nous étudions l'institutionnalisation.

2. Objectifs de la recherche.

Notre projet est ici d'étudier les pratiques d'institutionnalisation pour cerner les variables qui interviennent dans sa gestion (lien avec les diverses activités des élèves, changements de statut des connaissances, places et rôles respectifs de l'enseignant et des élèves...) de façon à

tenter de mettre en relation les choix faits sur ces variables et l'apprentissage des élèves. Il faut rechercher ces variables du côté de l'enseignant, du côté des élèves et du côté du savoir en jeu. En effet, le rapport personnel de l'élève aux nouveaux objets de savoir se crée, et le rapport personnel à des objets de savoir anciens se modifie, sous l'influence du rapport institutionnel, fixé par des programmes, des manuels et médiatisé par le professeur qui a son propre rapport personnel au savoir et ses représentations sur les mathématiques, la manière de les enseigner, de les apprendre et qui a des représentations de ses élèves, de leurs possibilités, de leur devenir.

Nous avons choisi de travailler au niveau de la classe de seconde qui est à la fois la première année du lycée où l'élève va rencontrer des exigences nouvelles de la part des professeurs et la dernière année commune de l'enseignement général avant des orientations porteuses d'un fort enjeu social. Une collaboration avec un sociologue sur une partie de la recherche doit permettre d'interroger la relation entre les apprentissages et les enjeux sociaux.

Notre travail part de trois questions :

1. Qu'y-a-t-il à institutionnaliser ?

Du côté du savoir, il nous faut d'abord déterminer le rapport institutionnel pour plusieurs institutions :

- l'institution "classe de seconde à une certaine époque" à travers les programmes et les manuels correspondants,
- les institutions "classe n°n dans le lycée L de Monsieur X".

Sur le premier point, notre analyse porte sur une étude succincte de la transposition didactique des contenus choisis, surtout la dernière flèche : étude de l'objet à enseigner et passage de l'objet à enseigner à l'objet enseigné. On étudiera ainsi leur place dans les programmes et dans les manuels (les connaissances visées, les classes de problèmes à résoudre, leurs relations avec les autres contenus de la même classe, avec les notions étudiées dans les programmes des classes antérieures, l'utilisation qui en sera faite dans les classes suivantes). Une comparaison avec des programmes précédents pourra servir de révélateur pour le rapport institutionnel considéré.

Sur le second point, nous étudions les choix faits par les professeurs dans l'enseignement du contenu choisi (présentation, types de problèmes, techniques privilégiés...) en même temps que la consolidation des connaissances anciens et la préparation de l'enseignement futur. Derrière les choix du professeur, il y a des théories mathématiques, des convictions sur l'apprentissage, des habitudes de gestion de la classe qui correspondent à un certain équilibre entre diverses contraintes. Mais tout ceci n'apparaît qu'à travers les choix faits et les justifications données, ce qui nous amène à rechercher ce que dit l'enseignant sur ce qu'il attend des élèves et ce qu'il institutionnalise effectivement, et donc à la deuxième question :

2. Comment se manifeste l'institutionnalisation ?

Elle introduit un changement dans le contrat didactique : le professeur n'attend plus la même chose des élèves : de nouveaux outils, nouvelles notions ou nouvelles techniques ont été introduites, l'élève est censé les connaître et les utiliser.

Du côté de l'élève, on devrait donc pouvoir observer l'adaptation à ce changement : l'utilisation (ou non) de ces nouveaux outils, pour résoudre autrement des problèmes qu'on savait déjà résoudre, pour résoudre des problèmes qu'on ne savait pas encore résoudre, les relations qu'ils établissent ou non avec des objets de savoir anciens, en un mot comment se crée le rapport personnel aux objets de savoir nouveaux, comment se modifie le rapport aux objets anciens.

L'évaluation est un temps fort du processus d'institutionnalisation, pour l'élève comme pour le professeur, tant par le travail proposé pour la préparer, les conseils donnés pour le travail à la maison, que par les exercices effectivement choisis.

Du côté de l'enseignant les pratiques d'institutionnalisation sont sous-jacentes à presque toutes ses interventions. Le processus d'institutionnalisation est sous la responsabilité du professeur et se manifeste sous diverses formes à différentes occasions de la vie de la classe :

- au cours des phases de bilan, dans ce qu'il sollicite, reprend ou néglige des interventions des élèves, dans les commentaires qu'il fait et explications qu'il donne, ce qu'il demande de noter sur le cahier...

- dans les rappels qu'il fait lui-même ou qu'il sollicite des élèves,

- dans le choix des activités qu'il propose, des exercices et problèmes qu'il donne à chercher ou à rédiger, dans le choix des contrôles ...

Ces observations nous amènent à nous demander...

3. Où chercher les variables ? Quelles pratiques regarder ? Comment les questionner ?

a) Est-ce que c'est la même chose qui est enseignée ? Qu'est-ce qui est institutionnalisé au niveau des techniques, des justifications données (pratiques relatives au contenu : en quoi consiste exactement le savoir, enjeu de l'enseignement dans chacune des classes observées ?).

Une de nos grilles de lecture est ici l'organisation de l'enseignement au niveau observé en même temps que la consolidation de l'ancien et la préparation du futur, aussi bien dans les choix des exercices que dans les commentaires, ainsi que les techniques qui sont valorisées, par l'usage que le professeur en fait lui-même, par les aides et conseils qu'il donne aux élèves, par ce qu'il privilégie dans les corrections d'exercices.

Par ailleurs, notre hypothèse de travail est que l'enseignant s'adapte à ses élèves. Même s'il utilise la même situation, on attend des différences dans l'institutionnalisation entre une classe forte et une classe faible. En effet, pour que sa classe fonctionne, le professeur a besoin d'un certain niveau de réussite de ses élèves. Nous attendons qu'à travers son institutionnalisation, il essaie de donner à ses élèves les moyens de réussir ce qu'il va leur demander par la suite, notamment dans les contrôles.

Un moyen de repérer des variables a donc été de rechercher des différences entre ce qui se passe à ce niveau, pour un même enseignant, dans une classe forte et dans une classe faible. Cependant, l'observation d'enseignants différents et de classes de niveaux différents devait nous permettre d'accroître la diversité des pratiques observées en même temps que de rechercher des régularités à un autre niveau : des choix apparemment différents peuvent correspondre à une régularité dans les pratiques mais à une optimisation de contraintes différentes.

Ici on va retrouver la marge qui reste à l'enseignant dans l'interprétation des programmes, ses représentations sur les mathématiques, la façon de les enseigner, sur ce qui va être utile dans les classes ultérieures, sur les possibilités des élèves, sur leur devenir scolaire...

b) Comment se fait l'articulation entre le cours et le travail personnel des élèves ? Comment l'enseignant intègre-t-il les élèves dans le processus d'institutionnalisation ? Comment ajuste-t-il l'institutionnalisation à leurs connaissances ? Ici nous élargissons notre recherche à l'étude du rôle de l'enseignant dans la classe, même si nous sommes plus particulièrement attentifs à ce qui contribue à l'institutionnalisation. En effet, nous avons vu dans nos recherches sur les élèves en difficulté qu'un des points délicats pour l'institutionnalisation est le risque de dérapage formel, de divorce entre les situations d'action et l'institutionnalisation qui est faite par le maître. Notre attention se porte donc sur le lien que celui-ci établit entre les connaissances mises en œuvre par les élèves dans les situations d'action et le savoir qu'il veut enseigner, et donc aussi sur les connaissances effectivement mises en jeu par les élèves dans les situations d'action.

- Quelles sont les caractéristiques du travail des élèves en classe ? Quel est le temps de travail effectif ? Sur quoi travaillent-ils ? Quelles connaissances mettent-ils en service ? Quel est l'enjeu de leur travail ? Ici, on va trouver des variables concernant le niveau des élèves, leurs motivations, leurs connaissances antérieures, mais aussi la gestion que fait l'enseignant du travail en classe, la nature de ses interventions...

- Comment l'enseignant gère-t-il le travail des élèves à l'intérieur du temps scolaire ? A qui donne-t-il la parole ? sur quoi portent ses propres interventions ? Comment organise-t-il l'activité des élèves en classe ? Cela renvoie à la gestion à chaud des séances en classe mais aussi à leur préparation hors de la classe par l'enseignant.

- Comment l'enseignant organise-t-il le travail des élèves à l'extérieur de la classe ? Cela comprend aussi bien le travail qui est donné à faire à l'extérieur : exercices à chercher, à rédiger, leçons à apprendre que les traces qui sont laissées aux élèves du travail fait à l'intérieur de la classe : qu'est-ce qui est écrit au tableau ? dicte-t-il un cours ? la correction des exercices à

chercher est-elle faite en classe ? y-a-t-il un corrigé écrit ? En un mot quels moyens donne-t-il aux élèves de travailler ou de retravailler à l'extérieur de la classe ? Quel contrôle exerce-t-il sur ce travail des élèves hors de la classe ?

Sur ce point, on trouvera des variables liées à l'enseignant mais aussi à ses élèves ou du moins à la représentation qu'il s'en fait. On devrait ici trouver des constantes du fonctionnement de la classe : le contenu pourrait avoir moins d'influence, sauf en ce qui concerne l'importance que lui attache l'enseignant dans l'ensemble de la progression de l'année.

Nous pensons trouver des différences notamment

- dans le discours de l'enseignant,
- dans la gestion du temps,
- dans la gestion des interventions des élèves (à qui il donne la parole...),
- dans le choix des exercices, des contrôles, dans la correction qui en est faite...

L'analyse des choix et des différences devraient nous aider à repérer les contraintes des enseignants et les moyens qu'ils utilisent pour réguler l'enseignement et optimiser leurs choix en fonction des contraintes. Du côté des élèves, nous espérons également repérer des régularités et des différences dans la gestion du travail en classe et à la maison et dans l'intégration des objets enseignés dans leurs pratiques mathématiques.

c) Quel est l'effet de l'institutionnalisation sur les pratiques des élèves ?

Il nous faudra pour répondre à cette question, repérer les connaissances que les élèves mettent en jeu dans les activités de recherche, spontanément ou avec l'intervention du professeur, comment elles se modifient dans leurs interactions ou sous l'influence du professeur (interventions au cours de la résolution, cours...), comment elles sont réinvesties dans les contrôles et quel apprentissage se fait aussi par le contrôle, sur le contenu lui-même et sur ce qu'il y a à en savoir.

Nos questions portent aussi sur les méthodes de travail des élèves en classe, au CDI, à la maison. Une de nos grilles de lecture est aussi d'interroger les rapports entre réussite à court terme et réussite à long terme, réussite locale sur un problème et réussite globale sur l'année.

3. Méthodes. Recueil des données.

L'étude des pratiques d'institutionnalisation en classe pose de difficiles questions de méthodes. Comme nous l'avons dit, elle implique la plus grande partie du travail de l'enseignant, il nous faut donc étudier ses choix et son discours en classe, ce qu'il dit ou ne dit pas, ce qu'il fait ou ne fait pas. Pour étudier le côté des élèves, il nous faut des observations assez fines sur ce que les élèves ont réellement fait en classe et si possible à la maison. Cela fait une masse de données à recueillir et à traiter. Nous sommes donc obligés de faire des choix que nous allons maintenant expliciter.

Dans un premier temps, nous avons choisi de faire des études de cas, en recueillant le plus possible d'observables sur un contenu précis concernant un groupe d'élèves dans quelques classes. Le choix des données effectivement recueillies s'est ensuite adapté aux moyens disponibles et manières de travailler des professeurs observés.

Choix des contenus

Nous avons décidé de choisir deux contenus nouveaux en classe de seconde, l'un portant plutôt sur les domaines numérique et algébrique, l'autre en géométrie, pensant qu'il pouvait y avoir des différences importantes dans les pratiques des enseignants et des élèves entre ces deux domaines. Nous avons choisi la notion de fonction et l'homothétie. La notion de fonction s'est révélée un domaine beaucoup trop vaste puisque dans certaines classes l'apprentissage s'étale sur toute l'année. Nous avons dans un premier temps restreint l'observation à la valeur absolue, y compris dans son aspect fonction. Une étudiante de D.E.A a commencé à recueillir des observations sur l'homothétie et doit poursuivre en thèse. Le présent travail nous a d'ailleurs confirmé l'intérêt d'étudier plus à fond ce qui concerne l'enseignement et l'apprentissage des fonctions, ce qui fera l'objet d'une recherche ultérieure. Un autre D.E.A. a porté sur cette question et doit aussi déboucher sur une thèse.

En ce qui concerne l'analyse de la valeur absolue, nous avons examiné sa place dans les programmes actuels, les présentations faites dans les manuels en comparant ce qui est

maintenant proposé en seconde et ce qui concernait la valeur absolue dans les programmes et manuels de collège et de seconde il y a une dizaine d'années, au moment où la valeur absolue était enseignée au collège et en mettant en relation les changements de programme avec les études concernant les difficultés des élèves. Nous avons ensuite analysé l'enseignement dispensé dans quelques classes.

Choix des classes.

Les moyens dont nous disposions ne nous permettaient pas de réaliser une étude aussi vaste que nous l'avions projeté initialement en prenant des classes répondant à beaucoup de critères différents, notamment au niveau social. Nous avons restreint le nombre de classes observées. Nous avons utilisé les facilités offertes par l'IREM et nous avons choisi d'observer les classes de professeurs expérimentés, animateurs IREM. Ce choix n'apporte à notre avis aucune restriction à la validité de notre travail puisqu'il s'agit de repérer des déterminants de l'institutionnalisation. On peut penser que les professeurs experts vont être plus avertis de ce qui risque d'intervenir dans l'apprentissage des notions concernées et que, dans la mesure où ils disposent d'une palette de moyens plus étendue, le repérage des variables sera facilité.

Pour accroître la diversité, nous avons dès l'abord choisi deux professeurs qui avaient des expériences différentes : l'un, que nous appellerons A, a d'abord enseigné longtemps en collège et, au moment des premières observations, n'enseigne en lycée que depuis 2 ans, aux niveaux 2^{de} et première, l'autre, B, enseigne depuis ses débuts (environ 15 ans plus tôt) au lycée en Terminale C. De plus, le premier utilise régulièrement l'ordinateur dans son enseignement. Dans la mesure où l'institutionnalisation met en jeu de façon essentielle les relations entre l'ancien et le nouveau, ce choix est important. Nous faisons l'hypothèse que le professeur qui a une longue expérience du collège sera plus sensible à la consolidation des acquis anciens et que l'autre professeur aura davantage tendance à préparer l'enseignement en Terminale C. Evidemment, les choix des enseignants vont dépendre aussi de leur public : suivant qu'ils ont une classe forte (en référence aux mathématiques bien sûr) où la majorité des élèves envisage une 1^{ère} S ou une classe faible où ce n'est le cas que pour peu d'élèves, les choix risquent d'être différents. C'est pourquoi nous avons aussi choisi d'observer le même enseignant, en l'occurrence le professeur A, dans des classes différentes. Cela a même été la première étape de notre travail qui nous a permis de situer la place de la valeur absolue dans le programme de seconde et d'émettre des premières hypothèses sur les éléments qui pouvaient intervenir, à partir d'un recueil de données relativement limité sur les classes observées. Nous avons ensuite élargi notre étude à 4 enseignants dans 4 classes, en nous donnant davantage de moyens d'observation. C'est dans cette deuxième étape que nous avons collaboré avec un sociologue à partir d'observations dans les mêmes classes.

Nous avons donc des éléments pour comparer les choix d'un même enseignant dans des classes différentes : le professeur A a été observé dans 4 classes de niveaux différents dont deux la même année, en 1992-93. Même si nous n'avons pas recueilli autant d'informations chaque année, nous avons des éléments assez conséquents concernant les 4 classes : une classe forte et une classe faible en 1992-93, une classe moyenne en 1993-1994, une classe très faible en 1995-1996. Les niveaux des classes sont déterminés à partir de l'évaluation de début d'année et de l'orientation en fin d'année.

Par ailleurs, nous avons observé la même année 4 enseignants différents dont deux dans le même établissement. Les niveaux des classes d'après l'évaluation de début d'année étaient assez différents. Un questionnaire a été passé dans les quatre classes à la fin de l'année scolaire. Nous allons détailler ci-dessous les différentes étapes de la recherche.

Moyens d'observation, recueil des données en 1992-93

En 1992-93 nous avons observé l'enseignant A dans deux classes différentes : une classe considérée comme forte et une classe considérée comme faible. Nous avons recueilli tous les cours dans les deux classes pendant 3 semaines : tout ce qui concernait la valeur absolue en liaison avec le signe du binôme, et observé deux groupes d'élèves dans chaque classe pendant les travaux dirigés.

J'ai dit que nos méthodes d'observation ont été influencées par les manières qu'avaient les professeurs d'organiser le travail de la classe. Il me faut dire un mot de l'organisation de l'enseignement dans les deux classes de l'enseignant A, observées en 92-93 :

organisation générale et choix globaux de l'enseignant :

* Dans l'établissement les heures de module et de travaux dirigés ont été regroupées, ce qui donne pour chaque classe :

- 2 heures de cours en classe entière,
- 2 heures de T.D.-module en demi-classe. Il n'y a pas d'alternance avec une autre discipline, ce qui fait que le professeur de mathématiques a l'entière maîtrise de la constitution des groupes.

* Pendant les heures de T.D. les élèves travaillent en groupes de 4 sur une fiche distribuée au début de la séance par le professeur. Celui-ci n'intervient en principe que pour inciter les élèves à travailler, sauf auprès des groupes faibles où l'intervention porte parfois sur le contenu. Il n'y a aucune phase collective.

Le bilan collectif a lieu dans la séance en classe entière qui suit et le cours se fait à l'occasion de ce bilan.

* L'enseignement s'appuie beaucoup sur l'utilisation de la calculatrice et des micro-ordinateurs. Cinq ordinateurs (un par groupe) sont présents dans la salle de T.D. et les élèves sont encouragés à utiliser seuls les logiciels déjà travaillés en classe. Ceux-ci sont disponibles dans la salle de documentation.

L'enseignement est organisé en cycles de 3 semaines se terminant par un contrôle.

Les caractéristiques des deux classes de seconde de ce même enseignant en 1992-93 étaient les suivantes :

- une classe "faible" de 27 élèves (dont 5 filles seulement), fabriquée intentionnellement d'après les dossiers des élèves,
- une "bonne classe" de 35 élèves plus équilibrée entre filles et garçons.

Pour cette première année, l'observation a surtout porté sur le cours du professeur et sur l'observation de quelques élèves sur une période limitée. Les séances collectives (cours) ont été observées pendant la moitié de l'année. Pendant 3 semaines, sur tout ce qui concernait la valeur absolue, toutes les séances (cours et travaux dirigés) ont été observées et enregistrées dans les deux classes. Les copies des élèves au contrôle portant sur cette période ont été relevées et photocopiées.

Analyses effectuées sur cette période

Un mémoire de DEA, soutenu en juin 1994, porte sur l'observation de 3 groupes d'élèves pendant les séances de travaux dirigés, deux dans la classe faible, un dans la classe forte.

Pour l'analyse du cours de l'enseignant, nous avons retenu deux séances de synthèse faites par le professeur dans les deux classes après ces travaux dirigés ainsi qu'une séance de corrections d'exercices pour lesquelles nous avons analysé le discours de l'enseignant. L'analyse de la transcription de l'enregistrement de deux séances collectives a été faite à partir de deux méthodes mises au point par A. Robert et ses élèves (Chiocca, Josse, Robert, 1991) :

- l'analyse linéaire qui s'intéresse à la structuration de la séquence, au contenu traité et permet d'identifier des éléments de la gestion du temps,
- l'analyse catégorielle qui porte sur le discours non mathématique de l'enseignant.

Nous exposerons plus précisément les critères retenus pour ces analyses au moment de les présenter.

Moyens d'observation, recueil des données en 1993-94

Pour l'année 93-94, il était prévu de s'intéresser davantage au travail des élèves pendant les séances de travaux dirigés et à la façon dont ils s'emparaient des éléments d'information apportés par le professeur au cours de la recherche et dont ils reprenaient à leur compte l'institutionnalisation des séances précédentes. Nous avons repris l'étude de la valeur absolue dans deux classes : celle du professeur A, qui était cette fois "une classe moyenne" et celle du professeur B, une assez bonne classe d'un autre établissement. Les séquences de cours ont été enregistrées (mais non observées) dans ces deux classes, deux groupes d'élèves ont été observés en travaux dirigés sur ce sujet dans la classe A. Les cahiers de ces élèves ont également été relevés.

A la fin de l'année des entretiens avec ces élèves et d'autres élèves volontaires ont permis de compléter l'observation sur les méthodes de travail des élèves et l'articulation qu'ils

font entre le cours du professeur et leur travail personnel. Un entretien a également été mené avec chacun des enseignants.

Dans la classe B, nous n'avons pu observer nous-même qu'une seule séance : il s'agissait d'une séance d'enseignement de module sur l'homothétie.

Moyens d'observation, recueil des données en 1994-95

La plus grande partie des données a été recueillie au cours de cette année scolaire : nous avons d'abord interrogé 5 professeurs au début de l'année sur l'organisation de leur enseignement en seconde, sur les difficultés des élèves, et sur leurs intentions concernant les fonctions et la valeur absolue. Nous avons ensuite observé dans 4 des classes presque toutes les séances de mathématiques pendant une période allant de 2 à 4 semaines en relevant les textes d'exercices donnés aux élèves et les copies du contrôle concernant la valeur absolue. Nous avons en fin d'année fait passer un questionnaire concernant les nombres et la valeur absolue aux élèves des quatre classes. S. Broccolichi a observé les élèves de trois de ces classes sur un nombre un peu plus restreint de séances.

Analyses effectuées.

Nous n'avons pu, dans la période considérée, réaliser toutes les analyses des données. Nous avons pour l'instant traité les points suivants :

- éléments d'étude de la transposition didactique de la valeur absolue,
- analyse du discours du professeur A au cours des séances de synthèse des travaux dirigés et cours dans des classes de niveaux différents la même année,
- analyse d'une séance d'exercices dans la classe du professeur B,
- analyse des contrôles dans les 4 classes,
- première analyse sommaire des entretiens avec les élèves,
- comparaison des progressions utilisées par les 4 professeurs la même année ou non,
- analyse des contrôles donnés dans les 4 classes en 94-95,
- résultats du questionnaire de juin 95 dans les 4 classes et mise en relation avec le niveau de la classe et la progression choisie.

Nous avons rédigé la partie concernant l'analyse du rapport institutionnel : les choix concernant le contenu enseigné dans les différentes classes, les résultats des contrôles et du test de fin d'année. Les analyses concernant les pratiques de classes et les méthodes de travail des élèves feront l'objet d'un deuxième rapport.

Ce travail a donné lieu à une communication au congrès annuel du groupe "Psychology of Mathematics Education" qui a eu lieu à Recife en juillet 1995 et a servi de support à l'animation d'ateliers dans les Ecoles d'Eté de didactique des mathématiques de 1993 et 1995.

II La transposition didactique. Evolution des programmes.

1. La présentation classique avant 1990

Avant 1969, la valeur absolue était introduite en classe de 4^{ème}, en même temps que les nombres relatifs : elle servait d'abord à énoncer les règles opératoires sur les relatifs. Elle figurait dans le même chapitre que l'inégalité triangulaire, la formule de Chasles pour 3 points sur un axe et la mesure algébrique d'un segment orienté et que la mesure de la longueur de ce segment. Elle ne figurait pas explicitement dans les programmes des classes suivantes. Après 1969, les relatifs sont introduits dès la classe de 6^{ème}. Jusqu'en 1986, la valeur absolue figurait explicitement dans les programmes¹ à partir de la classe de cinquième. Les programmes et les commentaires ne précisaient rien à son sujet, à aucun des niveaux du collège. La mention de "valeur absolue" dans le libellé du programme semblait suffire. Nous pouvons nous faire une idée de l'enseignement correspondant en examinant les manuels. Dans les manuels, le terme "valeur absolue" était introduit dès la classe de sixième (jusqu'en 1985) en même temps que les

¹ parus en 1977 pour la 6^{ème} et la 5^{ème}, en 1978 pour la 4^{ème} et la 3^{ème}, en 1981 pour la seconde, appliqués en 6^{ème} à la rentrée 1977, en 5^{ème} en 1978, en 4^{ème} en 1979, en 3^{ème} en 1980, en seconde en 1981.

nombres relatifs, dans un cadre purement numérique. Elle était alors vue comme "le nombre sans son signe" ou, plus précisément, on disait qu'un nombre relatif avait un signe et une valeur absolue et que deux nombres opposés avaient la même valeur absolue. En sixième et en cinquième, elle servait à exprimer les règles d'addition puis de multiplication des nombres relatifs mais elle était vraiment étudiée dans le cadre algébrique à partir de la classe de quatrième (jusqu'en 1987), en référence aux relatifs et à l'axe gradué et c'est à ce niveau qu'on établissait ses propriétés. Elle était aussi utilisée dans l'étude des fonctions, qui étaient à cette époque introduites en cinquième, et des résolutions d'équations.

La valeur absolue était introduite et traitée presque exclusivement dans les cadres numérique et algébrique (même si on demandait aussi le placement de points sur un axe gradué). Elle était définie de l'une des manières suivantes :

- * $|x| = x$ si x positif ou nul, $|x| = -x$ si x négatif ou nul
- * $|x|$ est celui qui est positif parmi les deux nombres x et $-x$
- * $|x|$ est le plus grand des deux nombres x et $-x$.

L'axe gradué et les mesures algébriques étaient en général traités dans le chapitre suivant où on ne reparlait pas de valeur absolue.

Elle servait aussi à introduire des difficultés dans les exercices de résolution d'équations ou d'études de fonction, éventuellement pour renouveler l'objet d'étude (Duroux, 1983).

On trouvait alors (en 1979) en classe de 4ème

- * des exercices comme "Calculer les rationnels pour lesquels $|2x+9| < 3,5$; $|4x-5| = 3$ " ; mais aussi " $\left| \frac{2x-3}{3x-2} \right| = 2$ " ou " $\left| \frac{2x-3}{3x-2} \right| \leq 2$ " (Hatier, 1979) ; ou "Trouver toutes les valeurs de x

vérifiant l'égalité indiquée : $|x^2-4| + |x-2| = 0$ ", " $||x-1|-1| = 1$ ", " $||x-1|-1| \leq 1$ " (IREM de Strasbourg, ISTR, 1979)

- * des exercices théoriques comme

"Montrer que pour trois nombres quelconques x, y, z , on a $|x + y - z| \leq |x| + |y| + |z|$ (ibidem)

- * ou encore des études d'applications comme (Monge, Belin, 1979) :

"On considère l'application f définie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow |x-2|$

1) Calculez $f(2)$; $f(-5,5)$; $f(\frac{3}{4})$; $f(0)$; $f(-1)$

2) Soit x un réel supérieur ou égal à 2. Comparez les réels $(x-2)$ and $|x-2|$
démontrez que le réel 3,5 admet un seul antécédent supérieur ou égal à 2 ; déterminez cet antécédent.

Même question pour chacun des réels suivants : $\frac{3}{4}$; 5,5 ; 1

3) Soit x un réel inférieur à 2. Comparez alors les réels $(x-2)$ and $|x-2|$.

Démontrez que le réel 3,5 admet un seul antécédent inférieur à 2 ; déterminez cet antécédent.

Même question pour chacun des réels suivants : $\frac{3}{4}$; 5,5 ; 1

4) L'application f est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$?

La référence aux distances est indiquée pour traiter certains exercices (ce qui montre a contrario qu'on attend un traitement algébrique pour les autres) :

"En interprétant les valeurs absolues comme des distances entre points sur une droite graduée, déterminer x dans les cas suivants : $|x-2| + |x-3| = 5$ ", $|x-2| + |x-3| > 2$..." Remarquons que cet exercice est extrait du manuel de l'IREM de Strasbourg et que ce type d'exercices n'est pas fréquent en général.

Un manuel fait exception, c'est le Deledicq, Lassave et Missenard qui ne donne que des exercices très simples sur la valeur absolue en insistant sur l'axe gradué et le lien avec la distance comme "Représente sur une droite graduée les points d'abscisse x tels que $|x| < 3$; $1 < |x| < 2$; $|x| > x$; $|x| < x$; $|x - 1| < 2$."

En troisième, on l'utilise pour exprimer $\sqrt{x^2}$ comme $|x|$ et produire des fonctions affines par morceaux, comme dans ces exemples extraits du Monge (Belin, 1980) où il s'agit d'étudier des fonctions définies par $|2x+3| + |5x - 4|$ ou (de façon plus cachée) $\sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{(3x-1)^2}$.

Cependant, dans chacun des cas, les intervalles pertinents sont fournis dans les questions :
 "Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]-\infty, -\frac{3}{2}]$, on a ..."

En classe de seconde, en 1973, la valeur absolue figurait parmi les rappels de 4ème : on définit la distance à l'aide de la valeur absolue et on l'utilise pour définir les intervalles et les encadrements. Dans les programmes de 1981, on la trouve dans la rubrique "Activités numériques" où il est précisé que "le calcul sur les nombres réels n'est pas revu pour lui-même mais solidairement avec la résolution des problèmes numériques qui sont au cœur de l'analyse" et qu'il faut éviter "d'accumuler ces activités en début d'année". Le paragraphe contient "Pratique des opérations et des inégalités portant sur les nombres réels, en particulier décimaux, rationnels. Valeur absolue ; distance. Exemples d'approximations d'un nombre réel donné au moyen de suites.". Les commentaires, qui mettent l'accent sur l'importance des majorations, minoration, approximations, ne précisent rien sur la valeur absolue. Elle apparaît aussi à la rubrique fonction puisque la fonction $x \rightarrow |x|$ figure explicitement au programme, mais on voit aussi qu'on peut l'utiliser dans ce chapitre puisque un des thèmes d'études sur les fonctions, proposés à titre indicatif, est "Taux de variation : encadrement de ce taux ; inégalités du type $|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$ pour tous x, y ; interprétation géométrique". Ce thème donne l'occasion de mettre en relation la valeur absolue et la distance. Dans les manuels, les propriétés de la valeur absolue étaient reprises dans le premier chapitre de révision sur les nombres, en même temps que les approximations, mais dans les exercices sur les approximations, les expressions avec inégalités étaient plus utilisées que la valeur absolue. Néanmoins, la valeur absolue était largement utilisée dans les exercices sur les fonctions comme en témoignent ces quelques exemples extraits du Hachette 1985 (Gautier, Gerll, Thiercé, Warusfel) :

" Dans les exercices suivants, on demande d'étudier la fonction f et de tracer sa courbe représentative dans une repère (orthonormé) $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$; $f(x) = x^2 - |x|$;

$f(x) = ||x| - |2x + 1||$; $f(x) = \sqrt{|4 - 9x|}$; $f(x) = \sqrt{|x| - 1}$; $f(x) = \sqrt{|x| + |2x - 4|}$; $f(x) = \sqrt{2x + |x - 1|}$ " ...

Cependant, les instructions officielles des programmes de seconde précisait dès le 10-10-1984, après 3 ans d'application des nouveaux programmes : "*Les exercices faisant intervenir la valeur absolue de manière artificielle (et souvent cumulative) sont en dehors des objectifs de l'ensemble du second cycle.* L'essentiel est de savoir interpréter $|b - a|$ comme étant la distance des points a et b , et, dans cette perspective, des relations telles que $|x - 2| < 1$ ou $|x - 2| < 1/100$ à l'aide des intervalles de centre 2, et de savoir effectuer quelques majorations simples en utilisant l'inégalité triangulaire et les relations donnant la valeur absolue d'un produit ou d'un quotient. On notera que les problèmes mettant en jeu les valeurs absolues nécessitent souvent des raisonnements par disjonction, qui constituent une difficulté supplémentaire pour beaucoup d'élèves. Il convient donc d'aborder ce type de raisonnement à partir de situations simples. L'étude d'exemples de fonctions affines par morceaux, s'appuyant sur des interprétations graphiques, constitue un objectif raisonnable. D'autres exemples accumulant les valeurs absolues, tels que l'étude de la fonction $x \rightarrow |x - |x - 1||$ ou la résolution des équations

$||x| - 3| + |2 + |x|| = 1$ ou $|\frac{2x+5}{x-1}| = \sqrt{(2x+5)^2}$ relèvent de la technicité gratuite et ne peuvent que rebuter les élèves".

Dans le paragraphe sur les fonctions, ils précisent encore "*De façon générale, l'accumulation de difficultés techniques (en particulier de valeurs absolues et de parties entières est tout à fait inopportune.* Des exercices comme ceux qui suivent n'ont pas leur place en seconde : ...

$x \rightarrow \sin |x - 1|$... $x \rightarrow \frac{1 + |x|}{x |x + 2|}$ "

Remarquons que les exercices mentionnés plus haut ont été relevés dans un manuel de 1985 qui publie à la fin de l'ouvrage les instructions ci-dessus. Bien sûr, cela ne nous dit pas quels exercices choisissaient les professeurs pour leurs classes.

Ces paragraphes de commentaire sont repris, mais un peu allégés, dans les programmes de 1986 qui insistent davantage sur les inégalités et inéquations et précisent que la valeur absolue

intervient de façon naturelle dans les problèmes d'approximation. Pour les inéquations, la résolution de $|2x + 1| \leq$ est mentionnée comme un objectif raisonnable.

2. Les difficultés des élèves dans l'enseignement classique.

La valeur absolue provoquait beaucoup d'erreurs chez les élèves plusieurs années après son introduction (voir Duroux 1983 ; Chiarugi, Fracassina, Furinghetti, 1990). On se souvient que c'est à son propos que Duroux (1983) avait caractérisé, à la suite de Brousseau, l'utilisation de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques. Rappelons quelques-uns des résultats qu'il avait obtenus auprès d'élèves de 3ème :

"Quel est le maximum de l'ensemble $\{10 ; -1253 ; 27 ; -3\}$?" : 92% de réussite. Mais "Si a est un nombre réel, quel est le signe de $-a$?" : 48 % de réussite, et "Si $|a| = 1$, que vaut a ?" : 11% de réussite.

"Si $2a + 3 = 1$, que vaut a ?" : 80% de réussite, mais "Si $|a + 2| = 4$, que vaut a ?" : 22% de réussite, et, "Si l'entier a est inférieur à l'entier b , peut-on avoir $|a - b| = 2$?" : 11% de réussite.

Les difficultés subsistent à l'entrée à l'université et l'utilisation de la valeur absolue comme distance semble peu disponible : les tests utilisés par A. Robert (1983) en première année de DEUG montrent que trouver l'ensemble des (x, y) de $\mathbf{R}^2$ tels que $|x - 2| < 0,5$ pose encore problème. Donnons, à titre d'illustration, quelques exemples extraits de copies de licence au printemps 1995 (étudiants ayant donc rencontré la valeur absolue depuis la 5ème) :

- dans un calcul de valeurs propres, deux étudiants qui auront finalement 12,5 ou 17,5 au partiel, ont à résoudre $[\lambda^2 - (2a+b)\lambda + ab + a^2 - 2b^2] (a - \lambda - b)$. Ils trouvent $\Delta = 9b^2$ et

$\lambda_1 = \frac{(2a+b)+3|b|}{2}$; $\lambda_2 = \frac{(2a+b)-3|b|}{2}$; $\lambda_3 = a - b$. Ils n'expriment pas les racines sans valeur

absolue et ne s'aperçoivent pas qu'ils ont une racine double.

- en intégration, plusieurs étudiants écrivent :

$$\int_0^1 |x - y|^{-\alpha} dy = \left[\frac{|x - y|^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_0^1 = \frac{|x - 1|^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

En novembre 1995 (les plus jeunes étudiants peuvent avoir suivi les nouveaux programmes depuis la 6ème, mais peu sont dans ce cas), on peut lire dans des copies de calcul différentiel :

* " $|d(x, x') - d(x', y)| \leq d(x, y)$ et $d(x', y') \geq |d(x', y) - d(y, y')|$ donc $d(x, y) - d(x', y') \leq d(x, x') - d(x', y) + d(y, y')$ ", ce qui revient à supprimer les valeurs absolues et à soustraire des inégalités !

* deux exemples se ramenant à dire que si $a \leq a'$, alors $|a - b| \leq |a' - b|$:

$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y)$ donc $|d(x, y) - d(x', y)| \leq |d(x, x') + d(x', y) - d(x', y)|$;

$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y)$ donc $|d(x, y) - d(x', y')| \leq |d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) - d(x', y')|$, ce qui, cette fois, permet une simplification !

Au collège ou au début du lycée, les erreurs résistantes des élèves consistent soit à faire comme s'il n'y avait pas de valeur absolue, soit à changer la variable de signe ou à distinguer les cas $x > 0$ et $x < 0$, quelle que soit l'expression entre les barres de valeur absolue. On trouve par exemple :

$|a+2| = a+2$ si $a \geq 0$ et $|a+2| = -a - 2$ si $a \leq 0$

si $a < 0$, $|a+2| = -a+2$

si $x > 2$, $|2 - x| = 2 + x$

$|a+2| = 4$ donc $a = 2$

$|a+2| = 4$ donc $a = +2$ ou $a = -2$.

Les erreurs résistantes de ce type ont été attribuées à l'introduction précoce de la valeur absolue comme le nombre sans le signe, ce qui fait que la valeur absolue a disparu des programmes du collège. On l'introduira en seconde, à des élèves qui ont déjà une certaine pratique du calcul algébrique.

3. Place dans les actuels programmes de seconde.

Dans les nouveaux programmes du collège qui entrent en vigueur en 1986 pour la classe de sixième, la valeur absolue disparaît entièrement à ce niveau. Elle ne sera introduite qu'en

seconde, et avec beaucoup de précautions et de restrictions (voir extrait du programme en annexe), ce qui en fait une notion relativement marginale en seconde. Le programme insiste sur la relation à faire entre la notion de valeur absolue, celle de distance et celle d'intervalle. Les manuels ont pris ce commentaire comme une suggestion d'introduire la valeur absolue à partir de la notion de distance qui est abordée naïvement au collège. On s'appuie donc sur l'aspect géométrique de la valeur absolue, mais il faut remarquer que la distance est ici restreinte à la distance sur un axe alors que la notion de distance est plutôt perçue dans le plan ou dans l'espace au collège. C'est en fait plutôt le repérage des points sur un axe qui va servir d'appui, mais on va retrouver là les questions de signe et de nombre relatif.

La valeur absolue est reliée aux approximations dans le cadre numérique et ces deux aspects (géométrique et numérique) préparent l'utilisation qui sera faite de la valeur absolue pour formaliser la notion de limite, ce qui n'intervient plus avant l'enseignement supérieur.

Dans la classe même de seconde, elle a un usage pour la construction de la notion de fonction : c'est un endroit où on va raisonner par disjonction de cas, même si le programme précise qu'il ne faut pas abuser de ce genre d'exemples. On aura des fonctions qui ne sont pas définies à partir d'une seule formule, mais que la valeur absolue va permettre de ramener à une formule.

Par ailleurs, la fonction valeur absolue est une des fonctions de référence du programme de seconde. Ce sera plus tard une source de contre-exemples (pour fabriquer des fonctions continues non dérivables). En classe de seconde elle permet aussi de renouveler l'étude des fonctions linéaires et affines (et va donner une nouvelle occasion d'institutionnaliser ce qu'il y a à savoir sur ces fonctions) et fournit des raisons d'étudier le signe d'un binôme (au programme de seconde) puis d'un trinôme du second degré (en 1ère).

4. Examen de quelques manuels de seconde actuels.

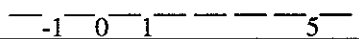
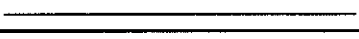
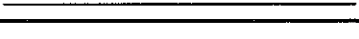
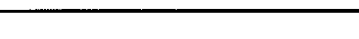
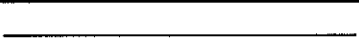
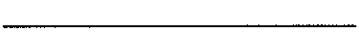
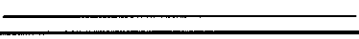
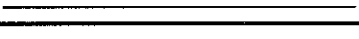
Actuellement, les programmes insistent sur la relation à faire entre la valeur absolue et la notion de distance. En réalité, ils ne donnent pas d'indication sur la manière de définir la valeur absolue, cependant tous les auteurs de manuels ont interprété cette recommandation en introduisant la valeur absolue à partir de la distance. La plupart d'entre eux définissent même d'abord $|a-b|$ comme $d(a,b)$ puis $|x|$ comme $d(0,x)$ sans remarquer que cela donne une autre définition de $|a-b|$ mais qu'elles sont équivalentes parce que la distance est invariante par translation et que donc $d(0,a-b) = d(b,a) = d(a,b)$. De plus, on passe en général sans commentaire de la distance entre deux points à la distance entre deux nombres en disant que la distance entre deux nombres est la distance entre les points qui ont ces nombres pour abscisses sur un axe gradué sans dire qu'on admet que cette définition ne dépend pas de l'axe gradué choisi. Or, suivant l'unité, il est clair que les distances entre les points (au sens usuel) ne seront pas les mêmes. On passe aussitôt à une formulation interne aux nombres "le plus grand moins le plus petit" à partir de l'examen de ce qui se passe sur un axe gradué particulier.

Le point de vue mathématique est ainsi renversé : au lieu de définir la distance sur un axe à partir de la valeur absolue définie de façon intrinsèque sur les nombres comme $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$, on définit la valeur absolue à partir de la distance entre nombres qui ne pourrait être définie sans utiliser, au moins implicitement, la valeur absolue.

Le choix de définir $|a-b|$ par $d(a,b)$ avant $|x|$ s'explique, comme me l'a confirmé un professeur ayant fait ce choix, par un désir d'éviter une erreur très résistante : pour étudier $|x-a|$ ou, plus généralement $|f(x)|$, les élèves distinguent les cas $x > 0$ et $x < 0$.

La résistance de cette erreur amenait d'ailleurs une inflation d'exercices où on a besoin d'étudier en disjoignant les cas des expressions du type $|f(x)|$ alors que les traductions en termes d'intervalles ou de graphiques d'expressions comme $|x-a| < r$ étaient traitées plus rapidement parce que plus faciles, ce qui avait pour conséquence qu'une bonne partie des élèves arrivant à l'université ne maîtrisaient toujours pas ce genre de situation. Les programmes actuels expriment une volonté de donner la priorité à cet aspect, fondamental pour la formalisation de la notion de limite notamment.

La conséquence des choix actuels est que les exercices qu'on va demander aux élèves sont essentiellement des exercices de traduction entre différents langages : celui de la valeur absolue, celui de la distance et celui des inégalités, en particulier dans la définition des intervalles. On trouve surtout des exercices du type suivant (donné par le professeur A):

valeur absolue	distance	droite des réels	encadrement	intervalle
$ x-2 \leq 3$	$d(x; 2) \leq 3$		$-1 \leq x \leq 5$	$x \in [-1 ; 5]$
$ x \leq 7$				
$ x-1 \leq 3/2$				
	$d(x; 5) \leq 9/2$			
			$1 \leq x \leq 4$	
				$x \in [-7 ; -2]$
$ x+3/2 \leq 2$				
			$1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$	
				$\sqrt{3} \in [1,73 ; 1,74]$
$ \pi - 22/7 \leq 10^{-2}$				

5. Les résultats des élèves aux tests EVAPM.

Ce sont d'ailleurs surtout ces traductions que contrôle EVAPM (1991) dès la première année d'application des nouveaux programmes. Pour les traductions entre dessin, écriture usuelle de l'intervalle et inégalités, où il y a congruence entre les registres (Duval,1995), les résultats sont très bons (entre 75% et 89% de réponses justes aux items concernant ces points). Les résultats sont encore très bons quand il s'agit de traduire $d(x;7) \leq 3$ en $|x-7| \leq 3$ (86% de réussite) mais les réussites tombent en dessous de 50% pour tous les autres cas :

- 48% pour la traduction de $d(x,7) \leq 3$ en $4 \leq x \leq 10$;
- 42% pour la traduction de $|x+5| \leq 1$ en $d(x;-5) \leq 1$ et 29% en $-6 \leq x \leq -4$;
- et seulement 29% pour la traduction de $-2 < x < 2$ en $d(x;0) < 2$ et 28% en $|x| < 2$.

A titre de comparaison, Chiarugi et al. trouvaient 39% d'élèves de 14 ans et 80% d'élèves de 17 ans capables de dessiner sur la droite réelle l'intervalle défini par $|x| < 3$. Les élèves de seconde français se situeraient vraisemblablement entre les deux.

Pour le reste, on peut noter que les élèves réussissent mieux les questions numériques que les questions algébriques puisque 41% donnent une réponse juste pour les 4 questions :

si $a = -5$; $b = 25$; $c = -13$, alors $|a-b| = 20$; $|c| - |b| = -12$; $a + |b-c| = 33$; $|a-b| - |a+b| = 10$, (oui, non, je ne sais pas):

alors que seulement 20% donnent une réponse correcte pour les 4 questions : quels que soient les réels a et b , on peut affirmer que $|a-b| \leq a$; $|a+b| \geq a+b$; $|a+b| \geq |a| + |b|$; $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Pour l'aspect fonction de la valeur absolue, 60% peuvent dessiner le graphe correctement pour g définie par $g(x) = |x|$ et 53% peuvent compléter le tableau de variation de g sur $[-5,7]$.

x	-5	7
g(x)		

Ces résultats permettent de penser que les élèves actuels relient sans doute mieux la notion de valeur absolue à celle de distance et qu'ils peuvent passer du langage de la valeur absolue à celui des distances ou réciproquement, du moins dans le cas où le centre de l'intervalle considéré est positif. La traduction d'un encadrement en termes de valeur absolue est en revanche loin d'être acquise.

Remarquons par ailleurs que si la traduction en termes de distance facilite la résolution d'équations du type $|x-a| = r$, elle risque de rendre plus difficile la résolution des équations ou inéquations pour lesquelles le coefficient de x ne serait pas 1, même des équations aussi simples que $|2x-1| = 3$.

6. Quelle est la place de la valeur absolue dans l'enseignement secondaire français actuel ?

6.1. Quels types de problèmes la valeur absolue permet-elle de résoudre ?

Une particularité de la valeur absolue est que c'est surtout un outil de formulation, il va donc être difficile de trouver des problèmes où elle intervienne comme outil de résolution, sauf des problèmes déjà formalisés en mathématiques. C'est par exemple un moyen d'écrire des fonctions sans disjonction de cas, par exemple des racines carrées : $\sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|$ ou des distances, des aires de figures qui dépendent d'un paramètre.

De plus, pour traiter les problèmes qui mettent en jeu une valeur absolue, par exemple pour résoudre des équations ou inéquations, ou des problèmes de distance il faut en général disjoindre les cas. En seconde, on peut prévoir que les expressions que les élèves auront à considérer pourront le plus souvent s'écrire sans la valeur absolue et que les élèves ne l'utiliseront que si on le leur demande ou si elle directement objet d'étude donnée dans le texte, comme un raccourci de langage, par exemple "étudier la fonction $|2x-1|$ ou résoudre $|2x-1| = 3$ ". Si on leur donne à modéliser une situation de distance (voir par exemple le problème "M. Dupont" utilisé dans les classes A et B et décrit dans l'annexe 3), on peut attendre que les élèves disjoignent les cas plutôt que d'utiliser la valeur absolue, sauf peut-être s'ils ont à communiquer avec un ordinateur, par exemple pour faire tracer le graphe de la fonction obtenue. Dans ces conditions, peut-elle fonctionner en seconde autrement que par le contrat ?

En terminale S, elle sert pour définir la notion de limite. Il n'y a plus dans l'enseignement secondaire de formalisation de la notion de limite, mais on peut chercher à quelle condition on a $|f(x) - l| \leq 0,01$ par exemple ou écrire $|x-a| < 0,001$ etc...

En terminale S, elle peut aussi servir pour écrire la majoration des accroissements finis qu'on utilisera dans l'étude des suites récurrentes. Très souvent, on privilégie la structure d'ordre de $\mathbb{R}$ pour se ramener aux suites monotones, plutôt que la structure d'espace métrique. Cependant, le théorème de convergence des suites monotones ne figure plus que dans l'enseignement de spécialité, donc on devrait passer par l'inégalité des accroissements finis pour les autres classes et donc privilégier la distance.

Dans ces deux usages, la valeur absolue peut le plus souvent être remplacée par une écriture en termes d'encadrements qui amènera un traitement d'inégalité. Il est cependant un endroit du programme où elle est indispensable : c'est pour exprimer la primitive de $\frac{1}{x}$ et surtout de $\frac{u'}{u}$ par une seule expression algébrique.

On peut néanmoins prévoir que les élèves n'auront pas souvent l'occasion de l'utiliser dans leur scolarité au lycée, en dehors de ces quelques cas, même si la fonction logarithme figure au programme de la plupart des classes terminales.

6.2. Témoignages de professeurs : éléments de régulation des choix.

Des entretiens avec les professeurs, il ressort qu'un élément important de régulation de leurs choix en ce qui concerne le temps et l'énergie qu'ils vont consacrer à l'enseignement d'une notion est l'usage qui en est fait dans les classes auxquelles se destinent la majorité de leurs élèves et les difficultés que les élèves risquent de rencontrer dans les classes ultérieures. D'ailleurs la perte de ce repère lors d'un changement de niveau d'enseignement enlève des moyens à l'enseignant, comme le pointe le professeur A qui a enseigné longtemps au collège. Les choix vont ainsi se référer à l'expérience professionnelle que les professeurs ont des classes suivantes et aux cursus qu'ils prévoient pour leurs élèves. Le professeur A a cette année une classe faible et il enseigne aussi en 1ère S et en 1ère ES : ce sont les contenus de cette classe qui vont régler ses choix en seconde. Le professeur B a une classe très hétérogène mais dont la moitié peut espérer une 1ère S et il enseigne en Terminale S : le travail sur les inégalités et la structuration des démonstrations sont des enjeux importants.

Sur la valeur absolue, ils nous disent tous les deux qu'ils en feront peu, et, à travers leur discours, on voit que c'est l'occasion de poursuivre d'autres objectifs: travail sur la notion de fonction dans un cas, sur les inégalités dans l'autre.

Professeur A. un minimum... Je vais sans doute la traiter quand même ... Ça va être très vite fait, ça va se limiter à "les points qui sont à égale distance d'un même nombre", on va

faire $|x-a| = 3$ par exemple, je pense qu'on ne va pas aller au delà de ça, de toute façon, la valeur absolue, ils ne la reverront jamais...

.(en 1ère S)..... je suis en train de préparer les limites, on suppose $x > 0$ ou $x < 0$, on se met toujours du bon côté ... Je n'ai pas encore vu la nécessité de la valeur absolue en 1ère S... Peut-être je la ferai parce que c'est une fonction intéressante à voir mais ça ne m'est vraiment pas indispensable. Ce qui est vraiment indispensable en seconde, c'est la notion de fonction... qu'ils sachent repérer que, quand ils tracent un graphique, quand ils ont un point sur un dessin, c'est parce que ce point là a pour coordonnées x et $f(x)$ et qu'inversement, s'ils prennent le point, ils peuvent lire x et $f(x)$, je suis contente parce les miens, au mieux ils iront en 1ère ES... alors en 1ère ES, qu'est-ce qu'on va leur demander... de construire des tangentes ...

Professeur B. La valeur absolue, pas grand chose... Que quand ils voient écrit "valeur absolue" d'abord ils aient pas peur et que quand ils voient $|x-a|$ ils aient dans la tête l'image de la distance parce que... on s'en sert pas tellement si ce n'est pour exprimer plus petit que ε ou que 10 puissance moins quelque chose...

I. On s'en sert pas tellement en seconde et quand est-ce qu'on s'en sert alors ? en terminale quand on introduit les limites ?

B. oui par exemple pour dire $|x_n - l| < 10^{-4}$ c'est tout...

I. en terminale et en 1ère ?

B. Y'a très longtemps que j'ai pas eu de 1ère. ... Quand je te disais que je voulais qu'ils aient une image géométrique avec $|x-a|$, qu'ils aient aussi un encadrement... D'ailleurs, moi, l'exercice qui sert de résumé à la fin sur ce que j'attends d'eux, c'est un exercice où on traduit de 4 façons différentes distance, valeur absolue, intervalle et encadrements, c'est tout ce que je leur demande...

B. ... je ne fais que des exercices qui tournent autour de ça. L'année dernière, j'ai fait "Monsieur Dupont"² pour participer à la recherche mais je suis pas convaincue... je crois que je le ferai pas cette année hein...

I. en fait M. Dupont, c'est plutôt sur la notion de fonction...

B. oui, et comme moi, j'ai pas commencé les fonctions quand je fais la valeur absolue...

7. Conclusion de la deuxième partie.

L'exemple de la valeur absolue, à travers les déclarations des professeurs, confirmées par une étude des manuels, illustre d'abord quelques phénomènes liés à la transposition didactique :

- **la réduction d'une niche écologique** : les objectifs de formalisation des limites ayant disparu des programmes de Terminale, l'utilisation de la valeur absolue pour compliquer les études de fonction ou les résolutions d'équation et renouveler ainsi les objets d'enseignement (Duroux, 1983) ayant été dénoncée et qualifiée d'inutile par l'institution, la valeur absolue devient un objet sans enjeu et s'est réfugiée uniquement dans la définition des intervalles. Elle devient très marginale et a peu d'occasions d'utilisation, sauf si les enseignants l'utilisent pour viser d'autres objectifs. On peut se demander si la présence de ce langage, une manière parmi quatre d'écrire un intervalle, va pouvoir vivre longtemps dans le secondaire non scientifique ou si on va finalement se contenter de l'écriture $d(x,a) \leq r$.

Les professeurs ne s'y trompent pas et c'est un des chapitres qu'ils sacrifieront éventuellement s'ils sont pressés par le temps : un des professeurs que nous avons contactés et qui avait une classe très faible nous a déclaré qu'il ne la traiterait pas. Les professeurs, comme nous avons pu le voir dans les déclarations des professeurs A et B, ont tendance à valoriser ce qui va être utile dans les classes suivantes. Une modification de programme dans une classe de fin de cursus a donc assez rapidement des modifications en amont : les notions qui étaient principalement utilisées dans le domaine qui disparaît perdent de leur importance et auront tendance à disparaître aussi.

² Le professeur B fait ici allusion à un problème d'une séquence de travaux dirigés mise au point par le professeur A et qu'elle a elle-même donné à ses élèves comme devoir à la maison.

- **la centration sur le point de vue donné par la définition** : on constate que la définition algébrique amène certaines difficultés chez les élèves, notamment la mauvaise utilisation ou l'absence d'utilisation de la valeur absolue pour décrire des intervalles. La solution proposée est de changer la définition pour la rendre conforme à l'usage qu'on veut que les élèves en fassent. C'est tout à fait en accord avec la prédominance d'un enseignement par ostension : on choisit la définition en se référant non à la cohérence mathématique mais à l'usage que les élèves doivent faire de l'objet introduit. On calque la définition sur le rapport institutionnel qu'on veut mettre en place : c'est le moyen le plus économique d'enseigner directement ce rapport institutionnel. Ce faisant les élèves améliorent leurs performances dans les types de tâches incriminées mais on peut prévoir que d'autres deviendront plus difficiles.

C'est ce que nous allons vérifier par l'observation de l'enseignement dispensé dans 4 classes de seconde.

III. Rapports institutionnels (ou personnels) à l'objet valeur absolue dans 4 classes de seconde.

III.A. Caractéristiques de l'enseignement dans le courant de l'année

1. Comparaison des progressions des quatre professeurs observés.

Nos observations nous ont montré différentes organisations de l'enseignement de cette notion. Le professeur A a été observé dans 4 classes différentes : il avait deux classes de seconde en 92-93, une en 93-94 et une en 94-95. Les trois premières progressions sont très semblables, nous détaillerons celles de la première année et nous indiquerons ce qui a été traité la dernière année où l'enseignement de la valeur absolue a été moins développé. Pour le professeur B, nous disposons de l'enregistrement des séquences de cours en 1993-94 et de l'ensemble de la progression en 1994-95 ; elles semblent assez voisines, nous détaillerons la deuxième. Pour les professeurs C et D, nous disposons de l'ensemble de la progression 94-95.

Dans toutes les (8) classes observées sauf celle du professeur C, la valeur absolue a été définie à partir de la distance, mais avec des variations dans l'organisation générale de l'enseignement.

Une des différences d'organisation pour les professeurs qui ont introduit la valeur absolue à partir de la distance tient aux choix concernant l'enseignement des fonctions. L'un d'eux (B) a traité d'abord l'aspect numérique avec intervalles, inégalités, résolution d'équations et d'inéquations, approximations (fin novembre, début décembre), puis est revenu sur la fonction valeur absolue comme une des fonctions de référence, au 2ème trimestre (février), après avoir traité les fonctions en janvier. Les autres professeurs (A et D), qui sont dans le même établissement, ont abordé la notion de fonction dès le début de l'année et traité l'aspect fonction de la valeur absolue dès son introduction, en même temps que ce qui concerne les intervalles, après le signe de $ax+b$ et le traitement des inégalités.

Les professeurs A, B, D ont défini la valeur absolue comme une notation pour la distance sur un axe gradué : d'abord $|a-b|$ comme $d(a,b)$, puis $|x|$ comme $d(x,0)$.

Le professeur A est parti de la distance dans des situations variées : dans l'espace, puis dans le plan, sur une droite, sur un axe gradué, et du calcul de quelques écarts de températures.

Les professeurs B et D sont partis de la distance, mais seulement sur un axe gradué.

Les professeurs A et B ont insisté sur la méthode géométrique de résolution des équations en référence à la distance sur un axe gradué et même le professeur A n'a enseigné que cette méthode et la méthode graphique mais pas la méthode algébrique pour "enlever les barres". Le professeur D a commencé de la même manière mais ensuite, il a encouragé la méthode algébrique.

Le professeur B a d'abord étudié seulement les aspects numérique et algébrique de la valeur absolue, avec ses propriétés, et les approximations. La valeur absolue en tant que fonction a été étudiée dans le chapitre sur les fonctions. La résolution des équations et inéquations avec une valeur absolue a été traitée d'une nouvelle manière à ce moment.

Les professeurs A et D ont commencé les fonctions dès le début de l'année, donc ils ont traité l'aspect fonctionnel en même temps ou juste après l'algébrique.

Le professeur C avait défini la valeur absolue à partir de la distance les années précédentes mais avait décidé de commencer par la définition algébrique cette année parce qu'il avait constaté qu'avec la distance tout se passait facilement au moment de l'introduction, mais que les difficultés arrivaient un peu plus tard, au moment où il voulait utiliser la fonction valeur absolue. Il a donc défini $|x|$ comme x si x est positif et $-x$ si x est négatif et a traité en même temps les points de vue numérique et fonctionnel. Il avait commencé l'étude des fonctions avant la valeur absolue aussi a-t-il traité la fonction $|x|$ juste après la définition de la valeur absolue et l'étude de ses propriétés. Mais la relation avec la distance et les intervalles a été faite plus tard. Pour résoudre les équations et inéquations algébriquement, le professeur C a introduit "un tableau pour enlever les barres" en se référant au tableau de signe utilisé avant pour étudier le signe d'un produit de facteurs.

Pour résoudre des équations comme $|x-a| = r$ ou des inéquations comme $|x-a| \leq r$, nous avons donc trouvé les 4 méthodes suivantes :

* méthode géométrique : $|x-a| = r$ veut dire $d(x,a) = r$, les élèves dessinent l'axe et trouvent $a-r$ et $a+r$,

$|x-a| \leq r$: la distance est plus courte, on trouve l'intérieur du segment,

$|x-a| \geq r$: la distance est plus grande, on trouve l'extérieur du segment. Cette méthode est aussi facile pour résoudre des équations ou inéquations comme $|x-a| \leq |x-b|$.

* méthode algébrique : $|x-a| = r$ signifie $x-a = r$ ou $x-a = -r$;

$|x-a| \leq r$ signifie $-r \leq x-a \leq r$;

pour $|x-a| \geq r$, il est nécessaire de distinguer 2 cas,

* méthode algébrique avec un tableau :

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$ x-a $ sans $ $	$-x+a$	$x-a$	
résolution	$-x+a \leq r$ $a-r \leq x \leq a$	$x-a \leq r$ $a \leq x \leq a+r$	

Cette méthode est commode pour des équations complexes.

* méthode graphique : on dessine le graphe de la fonction pour résoudre l'équation ou l'inéquation et on vérifie, ou on utilise le graphe pour choisir la bonne forme algébrique pour résoudre ensuite par une méthode algébrique.

Dans la classe A, le professeur a donné seulement la première et la dernière méthodes. Dans la classe B, les mêmes ont été encouragées mais la seconde a aussi été donnée dans le cours comme un résumé de ce que les élèves avaient fait dans les exercices. Dans la classe D, les méthodes 1, 2, 4 ont été données mais la seconde a été encouragée. Dans la classe C, le professeur a encouragé la troisième et la quatrième méthodes. La première n'a pas été donnée puisque la définition en termes de distance n'avait pas encore vue.

Nous décrivons en annexe 3 le plan des déroulements effectifs dans les classes, avec l'emploi du temps, parce qu'il a une incidence sur l'organisation.

2. Analyse des contrôles donnés dans les 4 classes. Résultats des élèves, erreurs relevées.

Au cours de l'année, chacun des professeurs a donné des contrôles aux élèves, portant sur ce qui venait d'être enseigné. L'étude de ces contrôles et la confrontation de leur analyse avec l'observation des classes doit nous apporter des informations sur ce qui a été institutionnalisé à travers :

- les choix des enseignants : l'analyse a priori des textes doit nous renseigner sur les attentes des enseignants, les techniques privilégiées...

- les procédures de résolution des élèves : est-ce que ce sont les mêmes qui sont utilisées dans toutes les classes pour les mêmes exercices ? Y-a-t-il des différences dans une même classe suivant les exercices, dans des classes différentes pour le même exercice ?
- les types d'erreurs rencontrés : lien avec la procédure employée, avec la classe ...

Nous avons donc relevé les textes des contrôles comportant des exercices sur la valeur absolue et les encadrements et les copies des élèves. Dans la classe C, nous avons peu d'éléments parce que le professeur donnait aussi des petits contrôles surprise, courts, qu'il corrigeait et rendait très vite : nous n'avons pas eu le loisir d'examiner ces copies. Les textes des contrôles et les résultats détaillés sont donnés en annexe 4. On y trouve les types d'exercices suivants :

- ensemble de points d'une droite à partir de distances en cm : classe A,
- distances sur un axe gradué : classe A,
- tableau de conversion valeur absolue - distance - encadrement - intervalle : classes A, B, D.
- des résolutions d'équations et inéquations comportant des valeurs absolues dans toutes les classes mais avec des difficultés très diverses, données en même temps qu'une représentation graphique ou non.
- des représentations graphiques : classes B, C.
- des encadrements et valeurs approchées : classes B, D.

Les contrôles ont été passés en janvier ou février 1995 :

- classe A : une grande partie du contrôle 6 du 31-1-95 (25 élèves présents)
- classe B : une partie des contrôles 4 (17-1-95) et 5 (14-2-95), 34 élèves présents pour chaque,
- classe C : une partie du contrôle 5 (10-2-95, 34 présents) plus une interrogation écrite courte
- classe D : une grande partie du contrôle 6 (10-2-95, 27 présents).

D'après les numéros des contrôles, on peut constater au passage que les contrôles sont les plus fréquents dans la classe la plus faible (A) et les moins fréquents dans les classes les plus fortes (B et C).

Dans la suite, nous allons, pour chaque type de problème, analyser rapidement les textes pour repérer les connaissances évaluées et comparer les choix des enseignants de ce point de vue, avant de donner les résultats des élèves (procédures utilisées, réussite, erreurs).

a) Ensembles de points sur la droite (AB)

Ce type d'exercices concerne des connaissances préalables : celles sur lesquelles on est censé s'appuyer pour introduire la valeur absolue à partir de la distance. On peut noter que ce type d'exercice n'a été posé que dans la classe la plus faible où il faut bien constater que ces préalables sont loin d'être acquis, même après un rappel sur ces questions et une utilisation pour définir la valeur absolue. En effet, les résultats sont inégaux suivant les questions mais la réussite est toujours inférieure à 50% :

- 11 élèves, soit 44% peuvent donner les deux points P tels que $AP = 3$, 4 élèves donnent le cercle complet et un élève donne un des points,
- 9 élèves soit 36% peuvent colorier l'ensemble des points Q tels que $BQ \geq 5$, 3 élèves colorient l'extérieur du cercle, 4 élèves colorient une seule demi-droite,
- 9 élèves soit 36% peuvent colorier l'ensemble des points M tels que $AM < MB$ mais 7 élèves de plus colorient le bon côté mais en se restreignant au segment et 1 élève traite le problème dans le plan (systématiquement) donc 17 élèves, soit 68% relient l'inégalité des distances au fait d'être d'un côté du milieu (ou de la médiatrice)
- 2 élèves seulement trouvent les deux points N tels que $AN = 3 NB$ mais 10 en trouvent un, donc près de la moitié des élèves trouvent au moins une solution.

Un élève résout toutes les questions dans le plan, d'autres le font pour certaines questions seulement, un élève confond systématiquement point et nombre et répond $0 < M < 3$ par exemple. Les questions concernant les égalités ou inégalités de distances en cm sur une droite semblent donc poser problème pour la moitié des élèves de la classe A au moins.

b) Distances sur un axe gradué

Là encore, il s'agit d'un préalable et ce type de question n'est posé que dans la classe A, encore une fois avec une réussite modérée. Les élèves savent presque tous placer des points à coordonnées entières ou demis sur un axe gradué (22 sur 25 n'ont aucune erreur, 1 a une erreur, 2 ne font pas de dessin). Mais, en ce qui concerne l'expression des distances, la réussite est très modeste : 10 élèves fournissent une réponse correcte et 3 autres trouvent les bonnes

valeurs mais avec des problèmes de formulation, 3 élèves font une seule erreur (dont 3 une erreur de signe et 1 une erreur d'écart). Le calcul de distances sur un axe gradué dessiné pose donc problème pour la moitié des élèves de la classe A.

c) Tableaux de conversion de langages sur les intervalles.

Cet exercice a été proposé sous des formes diverses dans les classes A, B, D.

Les trois contrôles comportaient les colonnes "valeur absolue", "distance", "encadrement", "intervalle". Il y avait en plus une colonne pour le dessin dans les classes A et B et une pour centre et rayon dans les classes A et D. Dans les trois classes, distance et valeur absolue étaient d'un côté du tableau, encadrement et intervalle de l'autre, les parties "dessin" ou "centre rayon" se trouvant entre les deux. Les professeurs ont ainsi tous regroupé d'un côté les expressions qui correspondaient à la définition de l'intervalle par les bornes, de l'autre côté celles qui correspondaient à la définition par centre et rayon, le dessin étant le moyen de passer d'une expression à l'autre. Dans la classe D on ne demande pas le dessin mais il peut être fait au brouillon (les valeurs numériques choisies le permettent), c'est d'ailleurs ce qu'a recommandé le professeur en faisant le cours où elle a exprimé les bornes en $a+r$ et $a-r$. Dans la classe A on a à la fois le dessin et l'expression du centre et du rayon, ce qui est d'une part une aide supplémentaire aux élèves, d'autre part un moyen supplémentaire pour l'enseignant de repérer les causes d'erreurs.

Nous avons ici 5 registres pour exprimer les intervalles, que nous désignerons comme l'entête des colonnes, sauf "intervalle" que nous appellerons registre de l'écriture ensembliste. Les trois autres registres sont des sous-registres du registre algébrique, mais avec un traitement propre pour les questions qui nous occupent : définition et comparaison d'intervalles. La tâche consiste en une conversion de registres. Les registres "ensembliste" et "encadrement" se réfèrent à la définition de l'intervalle par ses bornes, les expressions dans les deux registres sont congruentes : il y a correspondance terme à terme et possibilité de traduction automatique. Les registres de la valeur absolue et de la distance font référence à la définition de l'intervalle par centre et rayon, la congruence entre les deux n'est pas parfaite à cause du signe "-" qui apparaît dans l'expression avec valeur absolue. On peut donc attendre des erreurs de signe, particulièrement dans le cas d'un centre négatif. Le registre du dessin joue le rôle d'intermédiaire et permet le passage d'une définition des intervalles par les bornes à une autre par le centre et le rayon ou réciproquement. Dans toutes les classes, les nombres ont été choisis de façon que la représentation soit toujours possible : ce sont de petits entiers et les calculs font intervenir au plus des demis, à une exception près dans la classe D.

Dans la classe B, toutes les valeurs numériques qui figurent dans l'énoncé sont entières mais pour un des intervalles choisis cela correspond à un centre et un rayon en demis. Dans la classe A figurent des demis et aussi des tiers et même des septièmes, mais ces dernières fractions concernent des intervalles centrés en 0. Dans la classe D, il y a une difficulté plus grande sur les fractions pour un des exercices puisque le centre est $1/2$ et le rayon $4/3$. Dans chaque classe la première ou la deuxième ligne correspond au cas où centre et rayons sont entiers positifs, et une ligne à celui où le centre est entier négatif, avec rayon entier, une autre ligne concerne le cas où le centre est en demis et le rayon entier, et, dans les classes A et B une ligne traite celui où centres et rayons sont entiers positifs mais avec une borne négative.

La réussite de cet exercice est bonne dans toutes les classes :

- classe A : 10 élèves réussissent les 7 items, 7 autres élèves réussissent 5 ou 6 items (éventuellement sans faire tous les dessins) soit 68% réussissent au moins 5 items et chaque item sauf le 4ème qui comportait deux bornes en demis, est réussi par au moins 64% des élèves.
- classe B : 18 élèves (53%) réussissent les 5 items mais chaque question est réussie par plus des 2/3 des élèves.
- classe D : 9 élèves sur 26 (35%) réussissent tout l'exercice mais 16 (62 %) réussissent au moins 4 items et chaque item sauf le 4 est réussi par au moins 62% des élèves (rappelons que l'item 4 fait intervenir deux fractions).

Chaque formulation n'intervenant qu'une fois dans les données, et les élèves pouvant remplir le tableau dans l'ordre qu'ils veulent, il est difficile de voir si certaines traductions sont plus faciles

que d'autres. En revanche, on peut regarder l'effet des variables numériques, centre et rayon particulièrement.

* *centre, rayon et bornes entiers positifs* (premier item pour B et D, deuxième pour A):

$d(x,2) < 1$ (classe A) : 68 % réussite

$3 \leq x \leq 9$ ou $1 \leq x \leq 5$ (classe B) : 97% de réussite

$3 < x < 7$ (classe D) : 85% de réussite

* *centre et rayon entiers positifs, une borne négative* :

$] -1,3[$ par le dessin (classe A) : 64 % de réussite

$|x-2| \leq 4$ ou $|x-1| \leq 4$ (classe B) : 88 % de réussite

* *centre entier négatif, rayon entier* :

$x \in [-4,2]$ (classe A) : 64% de réussite

$d(x,-2) \leq 3$ ou $d(x,-3) \leq 5$ (classe B) : 68% de réussite

$d(x,-1) \leq 3$ (classe D) : 85% de réussite

$x \in [-6,-2]$ (classe D) : 65% de réussite

* *centre en demi, rayon entier*

$|x-\frac{1}{2}| \leq 3$ (classe A) : 68% de réussite (item donné en premier, parmi les mieux réussis)

$\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{17}{2}$ (classe A) : 48% de réussite (item le moins réussi)

$x \in [-10,5]$ ou $x \in [-6,1]$ (classe B) : 76% de réussite

$(-4,3)$ ou $(-3,1)$ par le dessin (classe B) : 68% de réussite, un des moins réussis

$x \in [-2,5]$ (classe D) : 62% de réussite

* *centre 0 rayon fractionnaire*

$|x| \leq \frac{2}{3}$ (classe A) : 76% de réussite, item placé en avant dernier, le mieux réussi

$-\frac{2}{7} \leq x \leq \frac{2}{7}$ (classe A) : 72% de réussite, item arrivant en dernier, deuxième meilleure réussite

* *centre et rayon fractionnaires*

$|x-\frac{1}{2}| \leq \frac{4}{3}$ (classe D) : 50% de réussite

On voit donc que le centre 0 facilite beaucoup la tâche, quelle que soit la donnée puisque cela correspond dans les deux sens aux items les mieux réussis de la classe A, pourtant placés en derniers et avec un rayon fractionnaire : dans le cas particulier du centre 0 la nature du rayon n'importe pas. Le centre entier négatif ne semble pas poser particulièrement de problème, sauf peut-être dans le cas où les deux bornes sont négatives, ce qui amène parfois un rayon -2. Le passage de la définition par les bornes à celle par centre et rayon semble plus difficile que l'autre. C'est aussi ce qui se passe quand il y a un centre fractionnaire (voir les deux items de la classe A : quand les deux bornes sont fractionnaires, les élèves ont du mal à trouver le centre et le rayon). L'intervention de fractions, même s'il ne s'agit que de demis, introduit la plus grande difficulté : c'est dans ce cas qu'on a la moins bonne réussite dans toutes les classes, sauf si le centre est 0.

Ces différences de réussite correspondent bien à ce qu'on peut attendre par l'analyse des techniques employées dans la conversion : ajouter un entier et une fraction est plus facile que faire la demi-somme de deux fractions, même en demis ; si l'on passe par le dessin, il est plus facile de compter des unités entières à partir d'un centre en demis que de retrouver les unités séparant deux points dont les abscisses sont en demis.

d) Résolution d'équations et d'inéquations.

Ici, il nous faut distinguer différents types d'équations et d'inéquations qui sont de difficultés différentes suivant les techniques utilisées.

* *type $|x-a| = r$*

- centre et rayon entiers positifs :

$|x-2| = 3$ (classe A)

- centre et rayons entiers, centre négatif :

$|x+7| = 6$ (classe A)

- centre entier, rayon fractionnaire :

centre positif : $|x-1| = \frac{3}{2}$ (classe A)

centre négatif : $|x+2| = \frac{7}{2}$ (classe D)

- centre fractionnaire, rayon entier

$|x-\frac{1}{2}| = 2$ (classe A)

Ce type d'exercice n'a été donné que dans la classe la plus faible, sauf un item dans la classe D mais en cumulant les difficultés du centre négatif et du rayon fractionnaire. Dans les autres classes, ce type d'exercice a sans doute été considéré comme sans difficulté et, pour la classe B, inclus dans le tableau de conversion précédent. Dans la classe C, un exemple en termes de distances dans le contrôle suivant (voir ci-dessous).

Dans la classe A, les nombres de réussites sont pratiquement les mêmes à chaque question (14 sur 25) à part une erreur de signe en plus dans le cas du centre négatif. En revanche les réussites dépendent de la méthode de résolution employée. Nous donnerons donc les résultats en les classant suivant la procédure adoptée :

* *non réponse* : A18, A19, A21,

* *distances avec dessin de la droite graduée* :

- réussite des 4 : 9 élèves dont un avec problème de formulation ($M=...$), et un fournit pour réponse un intervalle

- réussite de 3 sur 4 : un élève (une erreur sur le signe du centre)

- au moins deux erreurs : 2 élèves (erreurs de placement du centre et de calcul, un élève confond point et nombre)

* *raisonnement sur le dessin* :

- réussite des 4 : 2 élèves

* *méthode algébrique* :

- réussite de 3 sur 4 : un élève (une confusion centre-rayon)

- au moins deux erreurs : 5 élèves dont un fournit 2 réponses correctes mais utilise une mauvaise écriture et un autre enlève simplement les barres pour résoudre une équation du premier degré.

* *sans explication* :

- réponse correcte : 1 élève

- avec erreurs : 1 élève (signe et calcul).

Une petite moitié des élèves réussissent grâce au dessin de la droite graduée : 11 élèves ont les 4 réponses justes par ce moyen, un autre a tout juste sans explication. Une bonne partie des élèves (20%) utilisent une méthode algébrique alors que celle-ci a été évitée en cours, une seule (redoublante) avec un peu de succès, les autres sont des élèves très faibles.

Dans la classe D, l'équation $|x + 2| = \frac{7}{2}$ est résolue par 22 élèves (81%), tous par la méthode algébrique (l'un d'eux explique aussi par la distance). Dans cette classe, c'était le premier item qui, pour presque tous les autres nécessitait la méthode algébrique. Trois élèves échouent par la méthode algébrique : l'un fait une erreur de signe dans le calcul algébrique, les deux autres une erreur de signe dans le calcul numérique.

Deux élèves échouent par la distance : l'un échange centre et rayon, l'autre fait une erreur sur le signe du centre.

Dans la classe C, après l'enseignement de la distance, les élèves ont eu à traiter dans le contrôle du 31 mars : 1) x et y sont des réels ; que signifie l'écriture $d(x,y)$? Donner un exemple.

2) Résoudre les équations ou inéquations puis représenter les solutions sur une droite graduée. Vérifier les réponses. ° $d(x,2) = 4$ ° $d(x,2) < 4$ ° $|x+5| > 3$.

Nous n'avons pas eu les copies de ce contrôle.

*** type $|x-a| < r$**

A part l'exercice sur la distance mentionné ci-dessus pour la classe C, le seul exemple relevé dans les contrôles est $|x+5| < 3$ (classe A) : il s'agit d'un intervalle de centre négatif, ce qui est la difficulté principale. Ce sont presque les mêmes élèves qui réussissent, par la même méthode. Nous donnerons donc les résultats en classant suivant la procédure adoptée :

* *non réponse* : 3 élèves,

* *distances avec dessin de la droite graduée* :

- réussite 8 élèves dont un formule mal sa réponse ; erreurs : un élève (signe),

* *raisonnement sur le dessin* :

- réussite : 2 élèves ; erreurs : 1 élève,

* *méthode algébrique* :

- réussite : A17 ; avec erreurs : 5 élèves dont une enlève les barres.

* *sans explication* :

- réponse correcte : un élève (inégalité large) ; avec erreurs : un élève (signe),

* *résout les équations correspondantes* : 2 élèves.

Dans les classes A et D cet exercice a sans doute été considéré comme traité par le tableau.

*** type $|x-a| > r$**

Ce type d'exercice n'a été donné que dans les classes A et C bien qu'il ait donné lieu à exercices en classe dans les autres classes, mais en indiquant que c'était à la limite du programme.

Dans la classe A, il s'agissait de $|x-\frac{5}{3}| > 1$: ce sont les points à une distance supérieure à 1 de $\frac{5}{3}$;

on a deux demi-droites dont on trouve les origines en ajoutant ± 1 à $\frac{5}{3}$. Ici nous avons deux difficultés : le complémentaire d'un intervalle et la fraction.

Là encore, ce sont presque les mêmes élèves qui réussissent, par la même méthode. Cette fois nous classerons les résultats par erreur et indiquerons la méthode pour ceux qui ont réussi.

* *non réponse* : 3 élèves

* *réussite* :

- *distances avec dessin de la droite graduée* : 5 élèves dont un formule mal sa réponse),

- *raisonnement sur le dessin* : 2 élèves

* *renverse les signes d'inégalité ou répond l'intervalle* : 6 élèves

* *erreur de calcul sur les fractions* : 1 élève

* *erreur de signe* : 2 élèves

* *mauvaise méthode algébrique* : 5 élèves (dont une enlève les barres),

* *difficile à interpréter* : 1 élève

* *résout les équations* : 2 élèves.

La réussite chute sensiblement dans ce cas à cause des élèves qui donnent pour réponse l'intervalle au lieu de son complémentaire. Face à une inéquation, les élèves résolvent l'équation et répondent l'intervalle déterminé par les deux solutions, quel que soit le signe de l'inéquation. Pour la classe C, nous n'avons pas les productions des élèves (voir plus haut).

*** type $|x-a| = |x-b|$ et $|x-a| \leq |x-b|$**

Ces exercices ont été posés dans les classes B et C, dans des conditions différentes :

* $|x-2| = |x+3|$ ou $|x-3| = |x+1|$: classe B avant l'étude des fonctions

* $|x+1| \leq |x-4|$ ou $|x+4| = |x-5|$: classe B avant l'étude des fonctions

* Résoudre graphiquement $|x-5| = |3+x|$ puis $|x-5| \leq |3+x|$, comme deuxième question d'un exercice qui demandait la représentation graphique de la fonction f telle que $f : x \rightarrow |x-5|$. (classe B après l'étude des fonctions)

* Résoudre $|x-5| = |3+x|$ puis $|x-5| \leq |3+x|$, comme deuxième question d'un exercice qui demandait la représentation graphique de la fonction f telle que $f : x \rightarrow |x-5|$. (classe C après l'étude des fonctions).

Résultats :

Classe B, avant les fonctions, les méthodes utilisées ont été les suivantes :

- *résolution par le dessin sur la droite graduée* : 13 élèves dont un (B33) seulement pour l'inéquation.

Parmi eux 4 élèves ont réussi à la fois l'équation et l'inéquation, dont un avec une erreur de notation pour l'intervalle ; 6 élèves ont réussi l'équation mais fait une erreur pour l'inéquation (une erreur sur le calcul du milieu, une mauvaise demi-droite, B29 a arrêté l'intervalle à -1, B26 a résolu l'inéquation comme une équation, deux élèves ont donné l'intervalle délimité par les centres comme solution de l'inéquation).

Deux autres élèves ont fait une erreur de ce dernier type aux 2 questions en répondant $\{-3, 2\}$ et $\{-1, 4\}$ pour l'un, $\{-3, 2\}$ et $[-1, 4]$ respectivement pour l'autre

B33 a fait une erreur de signe pour le milieu de l'intervalle (réponse $[1,5 ; 1]$)

Trois élèves ont fait d'autres erreurs

- *résolution en termes de distances avec présence d'un dessin* : 5 élèves dont 4 réussissent dans les deux cas et un réussit l'équation mais se trompe de demi-droite dans le cas de l'inéquation.

- *résolution algébrique* : 4 élèves (avec aussi dessin), deux élèves avec tableau, trois élèves utilisent la méthode algébrique pour l'équation seulement.

avec réussite pour la première, erreur pour la seconde : 2 élèves

non réussite dans les deux : 8 élèves dont un enlève les barres dans le 2ème cas et un dans les deux cas, et dont deux élèves ont une réponse partielle incorrecte : B23 fait une erreur pour l'équation, non réponse pour l'inéquation, B24 (incomplet)

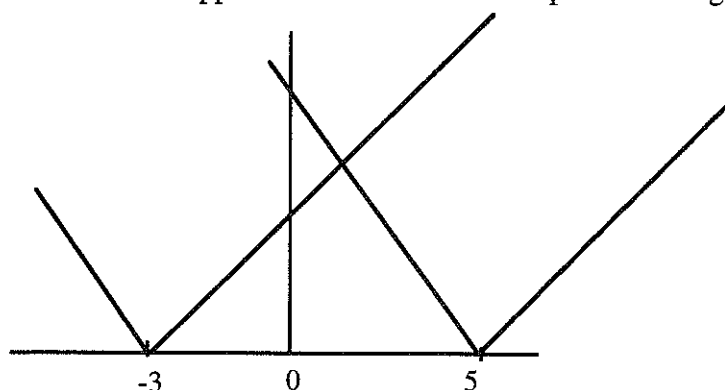
- *non compréhension de la question* : B9

- *n'ont pas répondu à cette question* : 5 élèves.

Les élèves recourent majoritairement à la distance ou au dessin sur la droite graduée pour résoudre ce type d'équations. Tous ceux qui raisonnent explicitement en termes de distances avec le support du dessin réussissent. Ceux qui font le dessin mais ne traduisent pas les équations et inéquations en termes de distances font souvent des erreurs dans le cas de l'inéquation. Certains donnent comme solution les points marqués sur l'axe qui correspondent aux points remarquables pour une traduction en termes de distance : ils démarrent la technique de résolution mais ne la mènent pas à terme. Les élèves qui utilisent une méthode algébrique se trompent en général sauf B15 qui a un peu de chance pour l'équation et renverse l'inégalité pour l'inéquation, et B30 qui utilise un tableau (non enseigné dans cette classe pour ce chapitre) et réussit l'équation mais non l'inéquation pour laquelle il a pourtant bien identifié les 3 cas.

classe B, après les fonctions, résolution graphique demandée :

La résolution suppose la réalisation et l'interprétation du graphique suivant :



* 12 élèves donnent des réponses correctes pour les deux à des détails près : B7 prend l'inégalité stricte : $x > 1$, B21 et B23 ne dessinent pas le deuxième graphique mais fournissent des réponses correctes sans explication, B21 a cependant placé -3 sur l'axe des x, B32 fait de

même avec un graphique faux mais permettant d'avoir la solution correcte s'il prend $x + 3$ pour l'autre ou s'il résout sur l'axe des x .

* 6 élèves résolvent correctement l'équation mais pas l'inéquation :

- B3, B14, B26 et B31 répondent $x \leq 1$ pour l'inéquation (B3 et B31 utilisent un axe gradué et non le graphique cartésien), B14 avait un graphique faux mais semble en avoir refait un autre, correct cette fois, pour la résolution,

- B27 écrit " $f(x) = 4$ et $x = 1$ " pour l'équation, " $f(x) = [0,4]$ et $x = [-3, 5]$ " pour l'inéquation, c'est-à-dire les segments délimités sur les axes par les courbes.

- B29 répond correctement ($x \in [1, +\infty[$) mais colorie toute la zone située au-dessus des deux graphiques.

* 6 élèves marquent le point d'intersection des deux courbes, mais n'expriment pas les solutions, certains colorient des portions de courbes :

- B4 colorie la partie du graphique de $|x-5|$ pour $x \geq 1$

- B13 colorie la zone $x \leq 1$ et $y > -x + 5$

- B19 a dessiné en vert les parties de graphiques correspondant à $x < -3$ et $x > 5$

* 5 élèves ne répondent pas dont deux avaient un graphique correct, et un un demi graphique.

* Les 6 autres font des erreurs variées dans les deux cas :

- B2 a un graphique faux, ne donne pas d'explication et répond $\{-1\}$ et $[-1 ; +\infty[$ qui peut correspondre à la résolution de $x + 5 = -x + 3$

- B9 représente $|x+5|$ et $|x+3|$ mais fait encore des erreurs de signe dans la lecture graphique : il répond $\{4\}$ et $[4, +\infty[$ alors qu'il devrait trouver $\{-4\}$ et $]-\infty, -4]$ avec son graphique

- B10 a un graphique juste mais répond $\{4\}$ et $]-\infty, 4]$: peut-être a-t-elle résolu sur Ox en confondant 3 et -3 et en se référant à la distance

- B11 (graphique correct) résout sur l'axe Ox et répond $\{3, 5\}$ et $[3, 5]$

- B28 répond $x = 4$ et $[4, 5]$ sans explication en ayant dessiné les lignes de rappel du point (4,1) de la courbe

- B34 ne trace pas de graphique et résout algébriquement par une méthode très curieuse qui lui donne néanmoins les résultats exacts : elle écrit " $|x-5| = |3+x|$ $|x-5| = -|3+x|$ $x - 5 = -3 - x$

$x+x = -3+5$ $2x = 2$ $\frac{2x}{2} = \frac{2}{2}$ $x = 1$ " puis " $|x-5| \leq |3+x|$ $|x-5| \leq -|3+x|$ $x - 5 \leq -3 - x$ $x+x \leq -3+5$ $2x \leq 2$ $x \geq 1$ " Les barres sont suivant le cas des barres de valeur absolue ou des parenthèses et l'usage du signe d'inégalité semble flou.

Plus de la moitié des élèves résolvent donc l'équation, dont 12 (35 %) sûrement par la méthode graphique, et 3 sur un axe gradué, le même nombre (18/34) marque le point d'intersection des deux courbes mais seulement 9/34 (26%) résolvent correctement l'inéquation par la méthode graphique. L'enseignant de la classe B a soigneusement identifié dans son cours les différents éléments signifiants de la conversion entre les registres algébrique et graphique. Cependant l'expression dans le cadre algébrique d'une résolution graphique pose encore problème pour la majorité des élèves.

Dans la classe C, on demandait seulement de résoudre, sans préciser la méthode. Nous regarderons d'abord la méthode employée par les élèves puis la réussite ou les erreurs.

C27 n'a pas traité cette question. Restent 33 élèves.

Pour l'équation, 29 élèves ont fait un tableau pour enlever les barres, 3 une résolution graphique et 1 une résolution algébrique.

* Parmi ceux qui font un tableau, 19 réussissent la résolution de l'équation, 10 font des erreurs:

- C30 fait une erreur de signe dans le calcul et trouve $x = -1$,

- C2 traduit $|3-x|$ par $-3+x$ si $x < 3$ et $3-x$ si $x > 3$

- C12 ne remplit pas son tableau et ne répond pas pour l'équation, de même C17 ne le termine pas

- C14 fait un tableau correct mais conclut $S = [-3, 5]$

- C15 fait le tableau correctement mais fait des erreurs de calcul algébrique dans la résolution, C19 en fait dans les cas où les x devraient disparaître

- C16 a des problèmes d'interprétation du tableau : sous " $x=1$ " il écrit "n'est pas dans l'intervalle" et ne conclut pas

- C23 inverse le tableau pour $|x+3|$, trouve 1 dans les mauvais intervalles mais conclut quand même $x = 1$
- C35 inverse le résultat de $|x-5|$ dans le tableau, trouve $x = 1$ dans le mauvais intervalle et conclut "pas de solution", ce qui est cohérent
- * C7 fait une résolution algébrique correcte en posant $x-5 = \pm (3+x)$
- * Pour les résolutions graphiques, une seule est correcte, les autres utilisent des mauvais graphiques.
- C29 trace $y = x-5$ et $y = x+3$ et conclut "impossible"
- C34 a des graphiques faux $|x| - 5$ et $x+3$, ses réponses sont cohérentes avec ces graphiques.

Pour l'inéquation, il y a 8 non réponse de plus. Les 25 élèves restants utilisent le plus souvent la même méthode que pour l'équation, sauf C10 (tableau puis graphique) et C13 (graphique puis tableau), avec succès dans chaque cas. Ce sont d'ailleurs les seuls qui réussissent complètement l'inéquation.

- * C29 et C34 utilisent une méthode graphique sur des graphiques faux.
- * C7 avait résolu l'équation algébriquement, il répond ici $x \leq 1$ sans explication
- * Ceux qui utilisent le tableau ont des problèmes d'interprétation du tableau ou de traitement des inégalités :

- *traitement correct du tableau mais absence de conclusion ou conclusion erronée : C1*
- *mauvais traitement des cas où les x disparaissent*
 - *soit avec traitement algébrique correct ($0 \leq 8$) et mauvaise interprétation : 6 élèves*

On trouve ainsi des réponses du type suivant :

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$ x - 5 $	$-x + 5$	$-x + 5$	0	$x - 5$
$ x + 3 $	$-x - 3$	0	$x + 3$	$x + 3$
$ x - 5 \leq x + 3 $	$-x + 5 \leq -x - 3$ $-x + x \leq -5 - 3$ $0 \leq -8$ impossible	$-x + 5 \leq x + 3$ $-x - x \leq -5 + 3$ $-2x \leq -2$ $x \geq 1$	$x - 5 \leq x + 3$ $x - x \leq 5 + 3$ $0 \leq 8$ impossible	

réponse $1 \leq x \leq 5$ (C18) ou résolution du seul cas du milieu et réponse $x \geq 1$ (ou $x \leq 1$ s'il y a en plus erreur d'inégalité comme C21, voire $x \leq -1$ avec aussi une erreur de signe comme C30)

- C21 ne résout que l'équation du milieu et conclut $x \leq 1$: il ne respecte pas l'entête.
- C30 exclut aussi l'intervalle de droite mais fait une erreur de signe au centre et trouve $x \leq -1$
 - *soit avec erreur de calcul algébrique qui évite de faire disparaître les x : 1 élève*
- C19 fait des erreurs de calcul algébrique pour éviter que les x ne disparaissent ($-x + 5 + 3 + x \leq 0$, $x \leq -8$ à gauche, $x \leq 1$ au milieu, $x - 5 - 3 - x \leq 0$, impossible à droite) et il se trompe dans le produit d'une inégalité par un négatif, concluant ainsi $[-8, 1]$. Remarquons que, dans le cas de l'égalité, cela donne bien la réponse "impossible" de chaque côté.
- *mauvaise utilisation du tableau (non respect de l'entête) : 3 élèves*
- C6 n'envisage que le cas $x > 5$ et $x < -3$ et trouve $x \leq 1$ sans s'apercevoir que ce cas est vide
- C23 inverse les signes dans le tableau pour $|x+3|$, elle trouve donc $x \geq 1$ dans $]-\infty, -3[$, impossible dans $]-3, 5[$, $x \leq 1$ dans $]5, +\infty[$ et ne conclut pas.

- *mauvais traitement des inégalités : 12 élèves.*

Beaucoup d'élèves, outre ceux déjà mentionnés, cumulent au moins deux de ces erreurs.

On voit donc que les élèves utilisent massivement le tableau mais cette utilisation leur pose beaucoup de problèmes, surtout dans le cas des inégalités. A ce moment de l'année, les résultats sont nettement moins bons dans la classe C que dans la classe B : l'interprétation en termes de distance ou la résolution graphique facilitent nettement le traitement de ce genre d'équations, l'utilisation du tableau, qui devrait fournir un algorithme, pose des problèmes de lecture et d'interprétation, comme le montrent les exemples ci-dessus.

- * *types $|ax+b| = c$ (c pouvant être négatif), $|ax+b| \leq c$, $|ax+b| = |cx+d|$.*

Les deux premiers de ces types d'équations n'ont été proposés que dans les classes C et D, le dernier seulement dans la classe D. Ces équations sont difficiles à résoudre par la distance et ne pouvaient être posées en contrôle que dans les classes où la résolution algébrique a été fortement institutionnalisée.

* classe C, contrôle du 10-2-95 : Résoudre $|2x+6| = 5$.

Ce type de question est revenu dans deux interrogations surprise par la suite :

17-3-95 : Résoudre $|2x+6| = 5$, $|2x+6| = -5$, $|2x+6| < 5$ (ou, pour l'autre moitié $|5x+10| = 2 \dots$) après demande de la représentation graphique des fonctions concernées.

5-5-95 : Résoudre $|2x+5| = 7$ $|x-4| = -1$

Nous ne disposons des réponses que pour le contrôle du 10-2-95. Nous les classons suivant la méthode employée :

Ne répondent pas à la question (la dernière du contrôle) : 4 élèves.

* *méthode graphique* : 3 élèves dont deux avec succès, l'un d'eux fait aussi la méthode algébrique, les deux justes ; le troisième a un graphique faux et mal interprété)

* *méthode du tableau* : 15 élèves dont 12 avec succès. Les 3 autres élèves prennent 3 au lieu de -3 comme valeur de partage, l'un d'eux ne fait que cette erreur (conclusion cohérente)

* *méthode algébrique* : 13 élèves dont 5 avec succès et 8 avec échec : l'un disjoint les cas mais ne conclut pas, deux font une erreur de signe, quatre enlèvent les barres, dont un avec l'argument " $2x+6$ supérieur à 0", un autre donne la même justification mais ensuite distingue

$2x + 6 = 5$ et $-2x - 6 = -5$, trouve respectivement $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ et conclut $S = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

* un élève disjoint les cas $x \leq -\frac{1}{2}$ et $x \geq -\frac{1}{2}$ mais on ne sait pas comment il a trouvé cette valeur.

* classe D, contrôle du 10-2-95 :

Résoudre $|5x-1| = -2$, $|4-5x| = 0$, $|2x+1| = \frac{1}{5}$, $|7x+2| = |5x-9|$, $|3x+1| \leq \frac{1}{2}$

** $|5x-1| = -2$: 23 élèves, soit 85% donnent la réponse "impossible". Quatre élèves trouvent 2 solutions par la méthode algébrique dont un aussi par la distance !

Les élèves utilisent très majoritairement la méthode algébrique pour toutes les questions :

** $|4-5x| = 0$: 17 élèves, soit 63%, réussissent par la méthode algébrique, compte non tenu d'éventuels problèmes d'écriture. Les erreurs sont les suivantes : $x = \pm 4/5$ (2 élèves), $x = -4/5$ (2 élèves), $x = 0$ (2 élèves), un élève dit qu'il n'y a pas de solution, un élève fait une autre erreur de calcul algébrique.

Un élève échoue par la distance (signe du centre).

Un élève fait une autre méthode erronée.

** $|2x+1| = \frac{1}{5}$: 14 élèves, soit 52%, réussissent par la méthode algébrique, compte non tenu d'éventuels problèmes d'écriture. Il y a 12 échecs par la méthode algébrique :

- 7 font une erreur dans le calcul algébrique : 3 erreurs de signe dans l'équation), un oublie de diviser par 2, un autre multiplie par 2 au lieu de diviser, un pose les équations et s'arrête, un fait d'autres erreurs
- 2 font une erreur de signe dans le calcul numérique,
- 3 font une erreur sur les fractions ou décimaux.
- Un échec par la distance (signe du centre).

** $|7x+2| = |5x-9|$: 21 élèves, soit 78%, réussissent par la méthode algébrique, compte non tenu d'éventuels problèmes d'écriture. Il y a 6 échecs par la méthode algébrique :

- erreur de signe en enlevant les valeurs absolues ($-5x-9$) : D5, D13
- erreur dans le calcul algébrique : D21 (signe dans équation),
- erreur de signe dans le calcul numérique : D13, D24
- erreur sur les fractions ou décimaux : D17,

** $|3x+1| \leq \frac{1}{2}$: 16 élèves, soit 59%, réussissent par la méthode algébrique, compte non tenu d'éventuels problèmes d'écriture. Il y a aussi 10 échecs par cette méthode et une non réponse :

- une erreur d'inégalité en enlevant les valeurs absolues
- 7 élèves font une erreur dans le calcul algébrique : l'un d'eux multiplie par 3 au lieu de diviser, 4 élèves ajoutent 1 au lieu de soustraire, un élève soustrait 3 au lieu de diviser et un autre fait plusieurs erreurs.

- deux élèves font des erreurs sur les fractions ou décimaux.

Il semble donc que la méthode algébrique ne pose pas de problème en soi dans cette classe : en général les élèves posent les bonnes équations. Les problèmes viennent du traitement algébrique lui-même et du calcul sur les fractions : la meilleure réussite est obtenue dans le cas où on a des x des deux côtés mais aucune fraction. La présence de 0 dans le second membre a aussi entraîné des erreurs parce qu'il n'y a qu'une solution au lieu de deux, que 0 a joué un rôle attracteur ($x=0$) ou répulsif (pas de solution).

Les erreurs d'écriture sont soit un mauvais maniement des signes d'inégalité ou d'intervalles soit l'écriture de $|x|$ à la place de x .

En résumé, en ce qui concerne les résolutions d'équations ou d'inéquations, on peut remarquer d'abord que les choix des exercices sont adaptés à la méthode qui a été favorisée par l'enseignant et au niveau de la classe. Les types $|x-a| = r$, $|x-a| < r$ et $|x-a| > r$ sont les seuls posés dans la classe A (faible) avec différents choix de variables pour le centre et le rayon : $|x-2| = 3$, $|x+7| = 6$, $|x-1| = \frac{3}{2}$, $|x-\frac{1}{2}| = 2$, $|x+5| < 3$, $|x-\frac{5}{3}| > 1$ et, à deux exceptions près, ils ne sont

posés que dans cette classe. Dans les autres classes, on trouve $|x+2| = \frac{7}{2}$ (classe D) et un exercice dans la classe C, après l'enseignement de la distance dans un petit contrôle surprise (31 mars) 1) x et y sont des réels ; que signifie l'écriture $d(x,y)$? Donner un exemple.

2) Résoudre les équations ou inéquations puis représenter les solutions sur une droite graduée. Vérifier les réponses. $d(x,2) = 4$ $d(x,2) < 4$ $|x+5| > 3$.

Les exercices du type $|x-a| = |x-b|$ et $|x-a| \leq |x-b|$ sont posés dans les classes B et C, avant et après l'étude de la fonction valeur absolue pour la classe B, après pour la classe C.

Les exercices du type $|ax+b| = c$, $|ax+b| \leq c$ ou $|ax+b| = |cx+d|$ ne sont posés que dans les classes C et D et seulement la classe D pour le dernier type. Dans cette classe c'est d'ailleurs ce type d'équations qui est majoritaire. Or ces équations ne se résolvent pas facilement par la distance et sont beaucoup plus adaptés à une méthode algébrique, éventuellement accompagnée d'un graphique.

L'étude des méthodes utilisées et des résultats montre que les méthodes utilisées diffèrent selon les classes et leur efficacité aussi :

Dans la classe A, pour les équations, les nombres de réussites sont pratiquement les mêmes à chaque question (14 sur 25) à part une erreur de signe en plus dans le cas du centre négatif. En revanche les réussites dépendent de la méthode de résolution employée. Une petite moitié des élèves réussissent grâce au dessin de la droite graduée : 11 élèves ont les 4 réponses justes par ce moyen, un autre a tout juste sans explication. Une bonne partie des élèves (20%) utilisent une méthode algébrique alors que celle-ci a été évitée en cours, une seule (redoublante) avec un peu de succès, les autres sont des élèves très faibles.

La réussite chute pour la deuxième inéquation.

Dans la classe D, l'équation $|x + 2| = \frac{7}{2}$ est résolue par 22 élèves (81%), tous par la méthode algébrique (l'un d'eux explique aussi par la distance). Dans cette classe, c'était le premier item d'un exercice qui, pour presque tous les autres, nécessitait la méthode algébrique. Trois élèves échouent par la méthode algébrique. Deux élèves échouent par la distance : l'un échange centre et rayon, l'autre fait une erreur sur le signe du centre. D'ailleurs les élèves utilisent très majoritairement la méthode algébrique pour toutes les questions, et le plus souvent avec succès : 78% pour $|7x+2| = |5x-9|$, les difficultés concernent surtout les fractions : 52% de réussite par cette méthode pour $|2x+1| = \frac{1}{5}$, et 59% pour $|3x+1| \leq \frac{1}{2}$ et aussi le cas où on a un 0 au second membre : 63% réussissent $|4-5x| = 0$ par la méthode algébrique. La distance n'est employée que par un élève qui échoue.

Dans la classe B, pour des équations ou inéquations du type $|x-a| = |x-b|$, les élèves recourent majoritairement à la distance ou au dessin sur la droite graduée avant l'enseignement de l'aspect

fonction de la valeur absolue. Tous ceux qui raisonnent explicitement en termes de distances avec le support du dessin réussissent. Ceux qui font le dessin mais ne traduisent pas les équations et inéquations en termes de distances font souvent des erreurs dans le cas de l'inéquation. Les élèves qui utilisent une méthode algébrique se trompent en général sauf deux qui réussissent pour l'équation, dont un utilise un tableau (non enseigné dans cette classe pour ce chapitre). Après l'étude de l'aspect fonction, 35% des élèves peuvent résoudre l'équation et 26% l'inéquation par la méthode graphique qui était demandée. Les problèmes d'interprétation du graphique sont importants, surtout dans le cas de l'inéquation.

Dans la classe C, pour des équations du type $|x-a| = |x-b|$, la plupart des élèves font un tableau pour enlever les barres, et 66% d'entre eux réussissent, mais pour l'inéquation, un seul élève sur 21 réussit avec le tableau : la moitié d'entre eux ont des problèmes d'interprétation du tableau et d'autres font des erreurs de calcul algébrique qui leur évite de se trouver dans un cas où les x disparaissent. Les résolutions graphiques ne sont utilisées que par 3 élèves dans chaque cas, dont deux sur des graphiques faux. On trouve aussi une résolution algébrique réussie pour l'équation, avec réponse fautive pour l'inéquation.

Pour les équations du type $|ax+b| = c$, c'est encore la méthode du tableau qui domine (48% des élèves l'utilisent avec 80% de succès), suivie de près par la méthode algébrique (42% d'utilisateurs) mais avec un succès moindre (38%), la méthode graphique n'est utilisée que par 3 élèves dont 2 réussissent.

Le tableau est donc privilégié par les élèves, avec succès pour les équations, mais avec des difficultés d'interprétation pour les inéquations.

e) Représentation graphique :

Cette question a été posée dans les classes B et C en février 95, sous la même forme :

On donne la fonction f telle que $f : x \rightarrow |x-5|$.

1) Représenter graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Le fait qu'il n'y ait pas eu de question concernant le graphique dans les autres classes ne peut pas être interprété comme le fait que les enseignants aient accordé moins d'importance aux représentations graphiques mais plutôt au fait que les fonctions ayant été abordées dès le début de l'année, la résolution graphique d'équations et d'inéquations avait déjà été abordée dans des contrôles précédents, à propos des fonctions du second degré notamment.

Dans la classe B, 25 élèves (74%) tracent un graphique correct. Cependant, parmi eux, un élève écrit à côté " $x > 0$ " et une élève a utilisé 2 couleurs différentes pour les deux moitiés (ainsi que pour la représentation de $|x+3|$: a-t-elle complété au moment de résoudre les équations ou colorié à ce moment là ?). Trois élèves font un graphique incomplet (un entre -3 et 3, deux pour $x < 5$). Remarquons que les parties utiles pour les résolutions ont été représentées. Deux élèves ne répondent pas et 5 élèves produisent un graphique faux : l'un dessine $-|x| + 5$ ($x + 5$ pour $x < 0$ et $-x + 5$ pour $x > 0$), un autre dessine $|x+5|$ (erreur sur le signe de l'abscisse), un autre dessine $|x| - 5$ (décalage vertical), un autre dessine $x-5$ (droite, enlève les barres) et le dernier dessine $-x+5$ (droite, prend l'opposé).

Dans la classe C, 18 élèves (soit 53 %) fournissent la représentation graphique attendue et un élève représente bien 2 demi-droites, avec les bonnes équations, mais des échelles différentes. Un élève ne répond pas. Les 15 autres font des représentations erronées :

- 3 tracés de demi-droites : 2 élèves tracent la demi-droite correspondant à $x > 5$, et un trace la demi-droite $y = x-5$ pour $x > 0$,
- 4 tracés de droites (3 fois $y = x-5$, et une fois la droite passant par (0,-5) et (1,4))
- deux font une symétrie par rapport à Ox, ce qui ne donne pas une fonction, dont un le fait seulement entre -1 et 2 (tableau de valeurs)
- deux élèves font un décalage vertical ($|x| + 5$ et $|x| - 5$ respectivement)
- un élève coupe à $x = 0$ avec les bonnes expressions ($-x+5$ pour $x < 0$ et $x-5$ pour $x > 0$) ; un autre prend les valeurs entières entre -2 et 2, calcule les valeurs en faisant $x - 5$ pour $x \leq 0$ et $-x + 5$ si $x > 0$ et joint les 5 points obtenus par une ligne brisée et un autre place des points correspondant à $x - 5$ entre 0 et 5 et $x + 5$ entre -5 et 0.

On voit donc ici beaucoup d'erreurs, et en particulier cinq élèves prennent une formule différente pour $x > 0$ et $x < 0$, et un s'arrête à $x = 0$.

A ce moment de l'année, les graphiques semblent mieux réussis dans la classe B que dans la classe C où beaucoup plus d'élèves tracent des droites ou des demi-droites et où 5 élèves font une séparation à $x = 0$ alors que cela ne se produit que pour deux élèves de la classe B.

f) Encadrements et valeurs approchées.

Ces questions ont été abordées dans les contrôles des classes B, C, D mais pour la classe C cela s'est passé après la période d'observation (31 mars) et nous n'avons pas eu accès aux copies des élèves. Ce point n'a pas été traité dans la classe A et n'a donc pas été proposé au contrôle.

Choix des exercices :

Classe B : Exercice 2 du contrôle 4 du 17 janvier.

- 1) Le volume V d'une pyramide à base rectangulaire est donné par la formule $V = \frac{1}{3} Lxlxh$
 - a) L mesure 6 (8) à 10^{-1} près, l mesure 4 (3) à 10^{-1} près, h mesure 11 (10) à 10^{-1} près. Encadrer V en ne donnant qu'une décimale.
 - b) Pour une autre pyramide, L mesure 4 (3) à 10^{-2} près, l mesure 3 (2) à 10^{-2} près, V mesure 5 (4) à 10^{-1} près. Exprimer h en fonction de V , L et l puis encadre h en ne donnant qu'une décimale.
- 2) a) Dans un rectangle, L mesure 7,2 (7,4) à 10^{-1} près par excès, l mesure 3,4 (3,2) à 10^{-1} près par défaut, encadrer le périmètre P .
- b) Dans un autre rectangle, L mesure 15,6 (15,3) à 10^{-1} près, le périmètre P mesure 23 (21) à 10^{-1} près, encadrer la largeur l .

Classe C : exercice 1 du contrôle 6 du 31 mars.

- a) On donne les réels x et y tels que $\frac{2}{7} < x < \frac{3}{7}$ et $\frac{5}{7} < y < \frac{5}{6}$. Encadrer $x+y$, $2x-y$, xy , et $\frac{x}{3y}$ à l'aide de rationnels.
- b) Un pavé droit a pour dimensions L , l et h exprimées en dm et telles que leurs valeurs approchées par défaut à 10^{-1} près sont respectivement 2,3 ; 1,5 et 0,8.
 - 1) Donner un encadrement de L , l , et h dont l'amplitude est la plus faible.
 - 2) Donner un encadrement, en dm^3 , de son volume V .
 - 3) 3 dm^3 est-il une valeur approchée de V à $0,3 \text{ dm}^3$ près ?
 $3,1 \text{ dm}^3$ est-il une valeur approchée de V à $0,4 \text{ dm}^3$ près ?

Cours : Expliciter clairement la différence entre valeur approchée à ε près, valeur approchée par défaut à ε près et valeur approchée par excès à ε près.

- c) (examiné dans le paragraphe sur les résolutions d'équations)
- d) x est un réel tel que $|x+1| < 2$; déterminer les intervalles auxquels appartiennent les nombres $A(x)$ et $B(x)$ tels que $A(x) = x^2$; $B(x) = 5 - x$.
- e) a et b sont deux réels tels que $a < b < -2$. En justifiant, comparer : $a+2$ et $b+2$; $\frac{1}{a+2}$ et $\frac{1}{b+2}$; $(a+2)^2$ et $(b+2)^2$; $\frac{1}{(a+2)^2}$ et $\frac{1}{(b+2)^2}$; $\frac{-5}{(a+2)^2}$ et $\frac{-5}{(b+2)^2}$.

Classe D : exercice 4 du contrôle 6 du 10 février 1995.

- 1) Traduire à l'aide d'une valeur absolue et donner l'encadrement correspondant au nombre x si 29,5 est une valeur approchée de x à $0,5$ près.
- 2) $|y-12,3| \leq 3 \times 10^{-1}$, en déduire un encadrement de y .
- 3) Déterminer l'encadrement correspondant de $x+y$ puis de $x-y$.

Dans la classe D, on vérifie surtout le vocabulaire et la traduction entre langage des valeurs absolues et celui des encadrements ainsi que l'encadrement d'une somme et d'une différence.

Dans les classes B et C, les élèves doivent de plus encadrer des produits et des quotients et utiliser ces notions dans un contexte de mesure, ce qui nécessite de considérer plusieurs opérations à la fois. Dans la classe B, ils doivent aussi inverser des formules, ce qui a été une

importante source de difficulté ; dans la classe C ils doivent traduire en inégalités la définition d'un intervalle par une valeur absolue pour chercher des intervalles images par des fonctions. Le dernier exercice combine les effets des signe, produit, quotient sur les inégalités, outils utilisés dans l'étude des sens de variation de fonctions. On voit donc que les connaissances évaluées sont assez différentes suivant les classes.

Résultats pour la classe B

On peut remarquer que les versions sont équivalentes du point de vue des nombres en jeu : même ordre de grandeur, même nombre de décimales. Cependant pour la question 1b, la difficulté n'était pas exactement la même pour l'arrondi : dans un cas on trouvait $1,97... \leq h \leq 2,06...$ que les élèves arrondissent à $1,9 \leq h \leq 2$ s'ils font une troncature ou à $2 \leq h \leq 2,1$ s'ils prennent les valeurs les plus proches alors que la réponse attendue est $1,9 \leq h \leq 2,1$; dans l'autre cas on trouve $1,22... \leq h \leq 1,28...$ que les élèves arrondissent plus facilement à $1,2 \leq h \leq 1,3$ (réponse attendue) parce que cela correspond aux valeurs les plus proches et que la troncature donnerait le même nombre des deux côtés. Mais pour voir cette différence, il fallait avoir effectué les calculs jusqu'au bout.

Pour la deuxième question, il y avait une erreur de texte. On donnait en fait une valeur approchée du demi-périmètre, ce qui fait qu'en appliquant les formules on trouvait un encadrement de l par des négatifs.

Encadrement du volume.

La formule était fournie, le travail des élèves consistait donc à encadrer un produit. On est dans le cas favorable d'une fonction croissante de chacune des variables. La principale erreur à attendre est une erreur au moment de l'arrondi (tronquer la valeur trouvée au lieu de majorer), sans compter bien sûr les erreurs de calcul ou l'oubli de la division par 3. On a :

- Réussite : 18 élèves dont un prend l'encadrement de la hauteur à 0,01 près
- écriture de valeurs numériques au lieu des variables : $5,9 \leq 6 \leq 6,1 \dots 83,6 \leq 88 \leq 92,6$ deux élèves dont un a en fait un encadrement correct.
- erreur d'arrondi : 10 élèves
- erreur de calcul : B24, B32
- oubli de diviser par 3 : B20
- inverse les inégalités en divisant par 3 : B22
- mauvais encadrement des variables au départ : B21
- autre erreur : B2 (encadre $5,9 \times 3,9 \times 10,9$ à 0,1 près puis à 1 près), B33.

Comme attendu, les résultats sont assez bons pour cette question : 19 élèves, soit 56 %, ont un encadrement correct, même s'il est mal exprimé pour l'un d'eux, et 10 élèves sur 34 soit 29 % font une erreur d'arrondi pour la borne supérieure.

Expression de h

La deuxième partie de la question comportait plusieurs difficultés. La première était de réussir à exprimer h en fonction des autres données. Beaucoup d'élèves ont échoué sur ce point. Cinq élèves ont trouvé une expression erronée par une erreur de calcul algébrique dont deux ont oublié de multiplier par 3. Nous examinons ensuite leur encadrement à partir de l'expression qu'ils ont trouvée. Cependant, certains élèves écrivent une expression avec double dénominateur $\frac{V}{\frac{L \times l}{3}}$ ce qui peut les gêner pour traiter la question suivante. D'autres n'ont pas exprimé h

mais ont traité l'encadrement de h en écrivant $4,9 \leq \frac{1}{3} L \times l \times h \leq 5,1$ puis ont successivement multiplié par 3, $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$ en prenant ou non pour l et L les valeurs approchées convenables.

Trois élèves n'ont pas du tout abordé la question 1b.

Encadrement de h

Cette fois, il faut renverser les inégalités dans le passage à l'inverse, nous pouvons attendre des erreurs à ce niveau. Pour les erreurs d'arrondi, nous les attendons surtout sur la version 1, à cause des valeurs numériques (voir remarque ci-dessus).

Pour l'encadrement des valeurs initiales, nous avons accepté comme correct l'encadrement de V à 0,1 près (comme l et L), mais certains élèves ont confondu 10^{-2} et $2 \cdot 10^{-1}$.

- réussite : 11 élèves dont un fait une erreur d'énoncé (il prend des encadrements à 0,1 près), et un autre a des problèmes d'écriture. Un élève ne termine pas. Les principales erreurs sont les suivantes :

- confusion 10^{-2} et $2 \cdot 10^{-1}$: 4 élèves.
- 7 élèves font les arrondis trop tôt (avant de multiplier par 3 par exemple).
- 7 élèves oublient de multiplier par 3.
- 4 élèves font une erreur d'arrondi.
- 7 élèves ne changent pas les inégalités pour l'inverse.
- problème d'écriture pour manier les inégalités avec inverses : 3 élèves.

Comme prévu la réussite baisse (32%), 21% des élèves oublient de renverser les inégalités quand ils passent à l'inverse. Les problèmes d'arrondis se compliquent puisque les élèves font un encadrement auxiliaire de Lx1 et certains arrondissent déjà cet encadrement. On remarque aussi des difficultés avec les systèmes d'écriture : traitement des inégalités ou usage des exposants.

Encadrement du périmètre

L'encadrement du périmètre ne devrait pas poser trop de problème, sauf éventuellement l'oubli de la multiplication par 2 et les erreurs d'arrondi comme précédemment. En fait, un très grand nombre d'élèves confondent les formules d'aire et de périmètre et encadrent le produit ou le double du produit ou même $2 \times 2L$!

On a seulement 13 réussites (38%). Les principales erreurs sont les erreurs de formule pour le périmètre et la mauvaise compréhension de "par excès, par défaut".

- erreur sur la formule du périmètre (par ex. produit) : 10 élèves
- mauvais encadrement des variables au départ : 12 élèves
- autre erreur : 4 élèves (un calcule le périmètre, un autre écrit la bonne formule puis multiplie, un autre calcule le périmètre puis encadre à 0,1 près et le dernier écrit des valeurs numériques au lieu des variables).
- une non réponse.

Pour la question précédente les mauvais encadrements au départ signifiaient une erreur sur la puissance de 10 ; pour cette question, on peut encore avoir ce problème mais aussi la mauvaise compréhension des expressions "par défaut", "par excès". Nous n'attendions pas autant d'erreurs sur la formule du périmètre !

Encadrement de la largeur

Compte-tenu de l'erreur de texte, la réponse correcte était "impossible". Certains élèves la fournissent après un encadrement de $P/2$ ou de $2L$, d'autres font le calcul jusqu'au bout, trouvent un encadrement par des négatifs et concluent ou non "impossible". Les élèves peuvent faire une erreur d'encadrement (soustraire les inégalités par exemple) et répondre cependant impossible à cause des négatifs. Nous appellerons "réussite" un encadrement correct et nous compterons par ailleurs les réponses "impossible", qu'elles soient motivées ou non par les négatifs.

Pour l'encadrement de la largeur, il s'agit d'encadrer une différence, on peut donc attendre, en plus des erreurs précédentes, l'erreur qui consiste à soustraire les inégalités.

Il y a eu en fait beaucoup d'erreurs de calcul algébrique pour exprimer l en fonction de P et L, par exemple B3 écrit $P = (L+1) \times 2$ donc $l = \frac{P}{L \times 2}$. Le grand nombre de ces erreurs a amené le professeur à faire une séance de module sur le sujet : exprimer chaque variable en fonction des autres à partir de formules de physique.

Pour les élèves qui prennent le produit comme périmètre ou font des erreurs de calcul algébrique, on peut avoir à encadrer un quotient et retrouver les erreurs liées à cette tâche.

- Réussite de l'encadrement : 2 élèves
- réponse "impossible" : 8 élèves.
- problème lié à l'encadrement de la différence : 11 élèves.
- erreur sur la formule du périmètre (par ex. produit) : 6 élèves
- mauvais encadrement des variables au départ : 2 élèves,
- erreur de calcul algébrique : 8 élèves

- ne changent pas les inégalités pour l'inverse : 4 élèves
- 4 élèves font d'autres erreurs : (erreur de calcul, un élève calcule puis encadre, un autre écrit des valeurs numériques au lieu des variables, un autre oublie de diviser par 2).
- non réponse : 1

Ici l'oubli de diviser par 2 peut être une correction de l'énoncé pour avoir une réponse possible. Les problèmes liés à l'encadrement de la différence peuvent se manifester par une soustraction des inégalités ou par le fait d'ajouter des inégalités de sens contraires : certains élèves changent les signes d'inégalité en multipliant l'encadrement de L (ou 2L) par -1 mais ne réécrivent pas l'encadrement avec les inégalités dans le bon sens avant d'ajouter à l'encadrement de P.

En résumé, dans la classe B, les principales difficultés des élèves sont :

- des problèmes de calcul algébrique, notamment exprimer une variable en fonction des autres en partant d'une relation
- le traitement algébrique des inégalités, notamment la multiplication par un négatif ou le passage à l'inverse et la décomposition de la tâche de manière à isoler cette difficulté
- gestion des rapports entre un modèle physique et un modèle mathématique par l'usage de formules notamment,
- le vocabulaire du calcul approché : "par excès, par défaut" ...
- la gestion des arrondis (troncature, valeur la plus proche) pour garder un encadrement valide en ne gardant que le nombre pertinent de décimales

Résultats de la classe D

1) Traduction de "29,5 est une valeur approchée de x à 0,5 près".

20 élèves, soit 77%, produisent un *encadrement correct* à 0,5 près. Un autre fait bien un encadrement à 0,5 près mais avec des négatifs : il a écrit correctement la valeur absolue d'abord et fait l'erreur de signe classique en retraduisant.

- confusion avec "par défaut" ou "par excès" : 3 élèves dont un prend -29,5
- un élève prend 29 comme centre et un élève fait un encadrement à 0,1 près.

Ecriture correcte de la valeur absolue : 15 élèves, soit 58%. Il y a 9 non réponse et 2 réponses erronées : D11 écrit $|x|$; $-29,5 \leq 0,5$ et D12 écrit l'égalité $|x - 29,5| = 0,5$.

2) $|y - 12,3| \leq 3 \times 10^{-1}$, déduire un encadrement.

- Réponse correcte : 15 élèves soit 58% (mais D9, tout en fournissant le bon encadrement dit que le centre de l'intervalle est -12,3 et son rayon 0,3).
- D27 écrit $-0,3 \leq |y - 12,3| \leq 0,3$ $-0,3 + 12,3 \leq |y| \leq 0,3 + 12,3$ $12 \leq |y| \leq 12,6$
- non réponse : D17, D21, D25
- erreur sur les puissances : D1, D8
- prend des négatifs : D5, D23
- confusion avec "par défaut" ou "par excès" : D11,
- prend 12 comme centre : D12
- D13 écrit $12,3 \leq y \leq 3 \times 10^{-1}$

3) Encadrement de $x+y$

- réussite (à partir des encadrements trouvés) : 20 élèves soit 77% (dont D18 qui reprend l'encadrement de x de l'exercice précédent, et D27 qui garde toujours le signe de valeur absolue.
- non réponse partielle : 4 élèves
- D1 prend 3 au lieu de 0,3 trois fois sur 4 et obtient $38,3 \leq x+y \leq 45,3$
- D5 a une réponse ininterprétable et inachevée sans doute.

4) Encadrement de $x-y$

- réussite : 17 élèves, soit 65% (dont D18 qui reprend le même x que pour la somme)
- non réponse partielle : 5 élèves.
- soustraction des inégalités (ou passage à l'encadrement de l'opposé sans changer les signes : 3 élèves dont un avait des encadrements par des négatifs et un autre écrit $|y|$)
- D24 prend 29 des deux côtés pour x.

Pour la classe D, la plus grande difficulté consiste à passer de l'écriture avec valeur absolue à l'encadrement et réciproquement : à peine plus de la moitié des élèves y parviennent alors que l'encadrement d'une somme et même d'une différence sont relativement mieux réussis (les élèves passent par l'encadrement de $-y$, comme l'a montré le professeur en classe. Rappelons qu'il s'agit d'encadrements théoriques de nombres et non d'une utilisation dans une situation où les résultats seraient sans doute moins bons.

En conclusion, les textes des contrôles reflètent bien ce qui a été valorisé dans les classes et les attentes des enseignants sur les compétences de leurs élèves :

- Les exercices visant à tester les connaissances préliminaires sur lesquelles s'appuie l'enseignement ne sont proposés que dans la classe la plus faible, mais après l'enseignement : sans doute le professeur pense-t-il donner une occasion de réussir aux élèves, mais ce n'est le cas que de la moitié d'entre eux.

- Le remplissage d'un tableau de conversion est proposé dans les trois classes où la valeur absolue a été définie à partir de la distance ; les résultats des élèves sont bons, les principales difficultés concernent le calcul avec les fractions, et dans un moindre mesure l'erreur de signe attendue pour le centre de l'intervalle dans le cas où il n'y a pas congruence.

- Pour les résolutions d'équations ou d'inéquations, les enseignants choisissent des exemples où la méthode privilégiée dans l'institutionnalisation est la plus performante. Les élèves utilisent principalement la méthode fortement institutionnalisée : distance, calcul algébrique ou tableau. Les élèves faibles recourent volontiers au calcul algébrique, même si on ne leur a pas enseigné cette méthode. Les résolutions graphiques sont rarement utilisées spontanément par les élèves. Elles amènent une réussite modeste, surtout dans le cas des inéquations : les graphiques eux-mêmes ne sont toujours corrects et surtout l'interprétation algébrique des tracés graphiques posent problème à beaucoup d'élèves. Il en va de même pour l'utilisation du tableau, surtout dans le cas des inéquations.

- Les questions concernant le calcul approché ne sont pas abordées dans la classe la plus faible. Dans la classe moyenne faible, on vérifie surtout le vocabulaire et le traitement des inégalités. Ce n'est que dans les classes les plus fortes qu'on utilise les encadrements dans des problèmes concernant les volumes ou les aires. On peut repérer que les enseignants mettent des jalons pour tester des connaissances sur les inégalités qui leur seront utiles pour l'étude du sens de variations de fonctions (abordé par des méthodes différentes dans les deux classes) et, plus tard, pour l'étude des limites. Le traitement des problèmes révèle des difficultés des élèves, inattendues pour les enseignants, concernant le calcul algébrique et notamment l'expression d'une grandeur en fonction des autres à partir d'une formule d'aire ou de volume.

III.B. Résultats du questionnaire de fin d'année.

En fin d'année, nous avons fait passer un questionnaire dans les quatre classes (voir texte complet en annexe 5). Il comportait une partie destinée à repérer les représentations des élèves sur les nombres et une autre destinée à vérifier les diverses compétences concernant l'utilisation de la valeur absolue. Nous avons introduit la partie sur les nombres parce que l'observation des élèves en classe nous faisait penser que les difficultés rencontrées à propos de la valeur absolue étaient en fait des difficultés avec la notion de nombre, en particulier de nombre réel.

Nous donnons ci-dessous l'analyse a priori concernant le choix des questions et les principaux résultats. Les résultats détaillés par question se trouvent en annexe 5.

1. Conceptions sur les nombres³.

1.1. Rapports entre nombres et écritures.

L'objectif des deux premières questions, que nous reproduisons en réduction ci-dessous, était de cerner les conceptions des élèves sur les nombres (ou les rapports aux nombres) à travers 3 types d'interrogations :

³ Les questions posées aux élèves sont partiellement communes avec celles d'un questionnaire sur les nombres qu'utilisait C. Castela à la même époque.

- ce que les élèves considèrent comme nombres dans une liste donnée, information complétée éventuellement par une explication ;
- les catégories de nombres que l'élève connaît ou considère pertinent de distinguer,
- la possibilité pour un nombre d'avoir plusieurs écritures.

1. Parmi les expressions mathématiques suivantes, barre celles qui ne sont pas des nombres 0,05 ; $\frac{1}{\pi+1}$; $2x+\frac{5}{4}$; -4 ; 0 ; e ; 10^3 ; $2\sqrt{7}$; $-\frac{3}{13}$; $\pi^2\sqrt{17}$; $2-\pi$; $8.5 \cdot 10^{-28}$; $1+\sqrt{7}$; x ; π^2 ; -5^3 ; $(-5)^3$; 0,232323... ; 3x ; $\pi - \frac{22}{7}$ Essaie d'expliquer le mieux possible ce qu'est un nombre pour toi : Quelles sont les différentes catégories de nombres que tu connais ? Donne si c'est possible, dans chaque catégorie, 3 exemples différents et les plus représentatifs possibles de la catégorie. 2. Coche parmi les 4 possibilités qui suivent celle qui correspond le mieux à ton opinion et réponds à la question correspondante : ☐ un même nombre peut toujours s'écrire de plusieurs manières. Si tu as coché cette case, donne des exemples aussi variés que possible de nombres différents avec pour chacun plusieurs écritures différentes ☐ certains nombres ont plusieurs écritures mais d'autres nombres n'en ont qu'une. Si tu as coché cette case, dis quelles sortes de nombres ont plusieurs écritures et quelles sortes n'en ont qu'une. Donne des exemples aussi variés que possible dans chaque cas. ☐ chaque nombre a une seule écriture correcte. Si tu as coché cette case, explique pourquoi. ☐ autre avis : explique ton opinion sur la question, et donne des exemples.

a) qu'est-ce qu'un nombre ?

Pour la première question, nous attendions que les élèves barrent ou non les lettres suivant qu'ils incluaient ou non les variables dans les nombres. Nous attendions aussi qu'ils rejettent certains nombres exprimés sous forme d'opération non effectuée et éventuellement aussi les écritures infinies. L'explication était demandée à la fois pour aider les élèves à avoir un choix cohérent et pour faciliter l'interprétation que nous ferions. On trouvera en annexe de nombreux exemples de telles explications pour chaque catégorie de réponse.

Les résultats sont conformes à notre analyse a priori. Nous avons distingué 5 catégories de réponses (voir en annexe 5 pour des distinctions plus fines).

* réponse 1 : élèves qui ne barrent que des lettres (plus à la rigueur 0 ou 0,232323...)

* réponse 2 : élèves qui barrent aussi les nombres à un chiffre, y compris parfois 0,05.

* réponse 3 : élèves qui refusent, éventuellement en plus des lettres, certaines expressions qui comportent des opérations à effectuer, comme $|2-\pi|$ (la plus refusée) ou les parenthèses $(-5)^3$ ou $(\pi^2\sqrt{17})$ ou $(\pi - \frac{22}{7})$ ou $\frac{1}{\pi+1}$. Certains élèves refusent, en plus des expressions de ce type, des

nombres comme $-\frac{3}{13}$ ou $8.5 \cdot 10^{-28}$.

* réponse 4 : élèves qui ne gardent que des expressions sans opérations (avec au plus 1 ou 2 exceptions). Suivant le cas, les élèves conservent ou non $2\sqrt{7}$, $1+\sqrt{7}$, π^2 , $-\frac{3}{13}$ qui correspondent à des écritures usuelles.

* réponse 5 : élèves qui refusent à la fois les opérations et les nombres à un chiffre.

Les autres réponses sont inclassables ou il y a incohérence entre l'explication et la réponse. Nous avons considéré comme incohérent quelque chose qui aurait amené à classer la réponse et l'explication dans des catégories différentes, mais nous n'avons pas considéré comme incohérente une réponse qui correspondait à peu près à l'explication, même s'il y avait quelques exceptions ; nous n'avons pas non plus considéré comme incohérente une réponse qui a été corrigée, sans que l'explication le soit (elle peut avoir été corrigée après réponse à la question 2 par exemple).

Les catégories ci-dessus sont disjointes.

Les résultats de cette question sont résumés dans le tableau suivant :

catégorie	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	14	18	22	11	1	66
réponse 2	1	2	1	5		9
réponse 3	3	3	4	2	2	14
réponse 4	2	4	6	3		15
réponse 5	0	1	1	0		2
autres	2	1	1	1		5
non réponse	2	0	0	0		2
total	24	29	35	22	3	113

Si nous regroupons d'une part les réponses 2 et 5 sous le label "chiffres" (élèves se préoccupant du nombre de chiffres) et d'autre part les réponses 3, 4, 5 sous le label "opérations" (élèves refusant plus ou moins systématiquement les signes opératoires pour les nombres), nous trouvons :

catégorie	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	14	18	22	11	1	66
chiffres	1	3	2	5		11
opérations	5	8	11	5	2	31

soit, en pourcentages :

Pourcentages						
réponse 1	0,58	0,62	0,63	0,50		0,58
chiffres	0,04	0,10	0,06	0,23		0,10
opérations	0,21	0,28	0,31	0,27		0,27

Notons qu'un élève de la classe B et un élève de la classe C se trouvent dans les deux catégories.

On voit que les différences ne sont pas très grandes entre les classes, sauf en ce qui concerne le refus des nombres à un chiffre qui est plutôt spécifique de la classe D : il y a eu dans cette classe un phénomène de diffusion : un échange a eu lieu à ce sujet entre deux élèves et cela s'est répandu.

Plus de la moitié des élèves expriment une idée de nombre qui n'est pas si mauvaise, compte-tenu des programmes à ce niveau. Certains donnent même des définitions tout à fait acceptables, y compris dans la classe A :

"Un nombre est une quantité ou représente une quantité non variable. Il peut être positif, négatif. L'expression e ou $2x + \frac{5}{4}$ comporte une inconnue. On peut donc faire varier cette inconnue et créer une fonction. Pour que x soit un nombre, il faut le préciser" (A14)

"Un nombre est composé de un à plusieurs chiffres ou cela peut être une lettre mathématique telle que π ayant une valeur déterminée" (B17)

"Un nombre a une valeur numérique, mais ce n'est pas une variable" (B18, qui laisse e)

La différence entre nombre et chiffre n'est pas toujours claire et elle vient perturber les réponses à la question (réponse 2).

Parmi les expressions refusées, $|2-\pi|$ est celle qui l'est le plus souvent (7 élèves ne refusent que cela, à part éventuellement les lettres), sans doute parce que cela peut s'écrire plus simplement, il en est de même de $(-5)^3$, seule expression refusée par un élève.

Les nombres réels qui contiennent dans leur écriture un signe opératoire sont difficilement acceptés comme des nombres par un bon quart des élèves, quelle que soit la classe. De plus, on trouve souvent des explications pour justifier le fait qu'on considère x comme un nombre ou non, ou sur le fait qu'un doit avoir plusieurs chiffres, mais rarement sur le fait que $|2-\pi|$ ou $\frac{1}{\pi+1}$ ne l'est pas : cela paraît sans doute évident. On trouve souvent des définitions similaires pour les élèves qui acceptent les signes opératoires et ceux qui les excluent :

"Pour moi un nombre doit avoir une valeur précise, par exemple $\frac{1}{\pi+1} = 1,31\dots$ il a une valeur; par contre $3x$ n'est pas un nombre, il n'a pas de valeur précise car on ne sait pas la valeur de x " (C2, réponse type 1)

"Un nombre a une valeur approchée ou une valeur exacte. Son expression à elle seule le définit" (C8, réponse type 1)

"Pour moi un nombre est "quelque chose" qui est composé d'au moins 2 chiffres" (B26, réponse type 2)

"Un nombre est l'union de deux chiffres (chiffre = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) qui rendent donc le nombre supérieur ou égal à 10 ou -10" (D6 qui garde 10^3 ; $\pi^2\sqrt{17}$; -5^3 ; $(-5)^3$)

"un nombre est une valeur que l'on peut définir et que l'on peut calculer" (B35, réponse type 3, qui refuse $|2-\pi|$; 0,05 ; 0,232323...)

"Est un nombre qui peut soit se multiplier, diviser, et qui a plusieurs écritures possibles, et de différentes manières" (A26, réponse type 4)

"Pour moi, un nombre c'est un ensemble de chiffres ou alors un chiffre seul" (B12, réponse type 4)

"Un nombre est une valeur définie et réelle" (C21, réponse type 4) .

Cependant, certains élèves excluent explicitement les signes opératoires :

"Un nombre est un réel, c'est-à-dire qu'il peut être même écrit sous forme de puissance ou $\sqrt{\quad}$ tant que n'entrent pas en jeu les additions, soustractions..." (C31, réponse type 4)

"Pour moi un nombre représente tout ce qui appartient à $\mathbf{R}$ mais qui tombe juste" (C13, type 4).

b) catégories de nombres faites par l'élève.

Le mot "catégorie" a parfois posé problème, on a alors dit oralement "toutes les sortes de nombres que vous connaissez. Le plus souvent les élèves distinguent les nombres entiers et les nombres "décimaux", ceux-ci pouvant d'ailleurs inclure des irrationnels ; ou alors les nombres positifs et les nombres négatifs ; ou alors quelques élèves ne font des catégories que dans les nombres entiers, distinguant ordinaux et cardinaux, pairs ou impairs. Nous avons rassemblé toutes ces réponses dans la réponse 2.

La réponse 1 correspond aux élèves qui semblent distinguer des entiers, des décimaux et autre chose, sans que nous puissions toujours en être sûre, et sans que le vocabulaire soit forcément adapté, par exemple certains disent "il y a les entiers, les décimaux et les "rationnels" en donnant comme exemple de cette dernière catégorie $\sqrt{2}$ (par "rationnel", ils entendent "racine").

La réponse 3 correspond aux élèves qui distinguent nettement les nombres selon l'écriture, par exemple "il y a les entiers positifs, négatifs, les décimaux (ou les nombres à virgule), les fractions (en donnant des exemples qui sont décimaux), les racines... (et éventuellement des nombres désignés par un signe comme π). Cela ne veut pas dire que les élèves qui ont la réponse 2 ne font pas la même chose mais les distinctions qui leur viennent plutôt à l'esprit sont entier / non entier, positif / négatif, ce qui peut aussi être lié à l'écriture (signe).

La réponse 4 correspond aux élèves qui ne donnent que des exemples de nombres sans faire de catégories ou à des élèves qui citent des ensembles de nombres comme $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$... sans exemple.

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

catégorie	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	0	1	4	2		7
réponse 2	13	16	15	13	1	58
réponse 3	6	5	13	3	1	28
réponse 4	1	5	1	1		8
autres	1	0	1	1	1	4
non réponse	3	2	1	2		8
total	24	29	35	22	3	113
Pourcentages						
réponse 1	0,00	0,03	0,11	0,09		0,06
réponse 2	0,54	0,55	0,43	0,59		0,51
réponse 3	0,25	0,17	0,37	0,14		0,25

On voit que les réponses 2 et 3 sont massives puisque les 3/4 des élèves font l'une des deux. Seuls 6 % des élèves font une différence soit entre rationnels et décimaux, soit entre rationnels et irrationnels, encore ne peut-on être sûr que cette distinction porte vraiment sur les nombres, comme on peut le voir à travers leurs réponses :

réponse 1 :

B4 : " Il y a les nombres entiers (4 ; 432 ; -17), les nombres décimaux (4,6 ; 12,3 ; -5,976), les nombres interminables ($\frac{1}{3}$; π ; $\sqrt{2}$), (réponse type 1 à la question 1)

C4 : "Il y a les entiers naturels (-2, 3, 4) positifs ou négatifs, les chiffres (de 0 à 9), les réels (tous les nombres quels qu'ils soient, les nombres décimaux (0,1 ; 0,4 ; 10,5)". Remarquons qu'à la question précédente cette élève n'a conservé que les entiers et les écritures à virgule, éventuellement infinies avec l'explication "parmi les nombres on regroupe les chiffres et autres numériques ex : 2 ; -2 ; 10^{-12} ; 0,3."

C16 : "entier (1, 2, 3...), entier relatif (+5, -3 etc...), décimal (0,1 ; 0,2) ; nombres rationnels ($\frac{14}{13}$; $\frac{15}{21}$), (réponse de type 1 à la première question)

C20 "Il y a les nombres rationnels ($\sqrt{7}$), les nombres décimaux (5,15), les nombres décimaux entiers (7 ; 9) (réponse de type 3 à la question 1)

C32 "les nombres décimaux (0,05), les nombres rationnels ($\sqrt{7}$) (réponse de type 3 à la question 1).

D5 "nombres réels : c'est l'ensemble des nombres, ex : 1,5 ; 2 ; $\sqrt{2}$... nombres décimales (sic) : 1,5 ; 1,2 ; 2 ; 3 et tous les autres nombres à virgule, nombres entiers : tous les autres nombres sans virgule, nombres positifs : tous les nombres plus grands que 0, nombres négatifs : tous les nombres inférieurs à 0" (ne barre que e à la première question)

D15 "entiers relatifs positifs et négatifs (3, 17, -2), racines carrées ($\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{3}$), π " (ne barre que l2- π à la question 1)

Les catégories que font les élèves sont fortement liées à l'écriture des nombres. Il est difficile de faire le classement entre les types de réponses. Pour interpréter les réponses des élèves nous nous sommes appuyée sur les exemples fournis. Nous avons reproduit ci-dessus toutes les réponses classées 1. Pour illustrer nos choix concernant les autres réponses, nous nous limiterons à des exemples pris dans la classe C, en remarquant que le mot "réel" a des significations variées pour les élèves, mais rarement celle qu'on attend, il est souvent synonyme d'entier (C2), voire positif (C6) le terme "nombre entier" n'a pas toujours non plus la signification attendue, c'est parfois sans virgule (C9 par exemple) :

réponse 2 : distinguent positifs / négatifs, entiers / décimaux ou pairs / impairs. Les exemples fournis laissent penser que ce sont des nombres qui sont distingués et pas seulement des écritures. Dans certains cas (comme C6, c'est douteux).

C6 "décimaux (2,2 ; 0,2 ; 1,666...) entiers (1 ; 2 ; 3) non réels (-10 ; -20 ; -2)

C7 "les positifs (17 ; 34 ; 12485), les négatifs (-12 ; -2 ; -47)

C8 "nombres positifs de $]0 ; +\infty[$ (3 ; 5264), les nombres négatifs de $] -\infty ; 0[$ (-56), les réels non nuls de $] -\infty ; +\infty[$ (-3 ; +5 ; $+\sqrt{3}$)

C15 : décimaux, entiers, négatifs

C18 : relatifs, décimaux

C19 : décimaux ; entiers

C21 : entiers, décimaux, relatifs

C23 : réels (mais ne donne que des exemples entiers), décimaux, naturels

C26 : nombres après 10, négatifs, décimaux

C27 : "nombres réels — entiers — positifs
— négatifs
— décimaux — positifs
— négatifs"

C34 : "nombres décimaux (2,1 ; 3,4 ; 6,2), nombres naturels (6, 5, 3), nombres relatifs, nombres pairs (8, 6, 2), nombres impairs (1,3, 7)

réponse 3 : élèves qui classent suivant l'écriture des nombres, par exemple C2 classe $\sqrt[3]{9}$ dans "les racines" et C3 classe $\frac{6}{3}$ dans les "rationnels", C9 sépare les nombres qui ont une virgule et ceux qui n'en ont pas. Nous avons notamment mis les élèves dans cette catégorie si les fractions proposées représentant des rationnels sont toujours dans la catégorie "rationnels" ou "fractions" alors que les décimaux proposés sont toujours écrits avec une virgule.

C2 : "les réels (10, 11, 12), les décimaux (2,1 ; 2,2 ; 2,3), les racines $\sqrt{7}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{9}$, les fractions $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{3}$) Certaines catégories sont comprises dans d'autres.

C3 : les réels (-2 ; 3 ; 15) les décimaux (3,14), les rationnels ($\frac{3}{2}$; $\frac{6}{3}$; $\frac{44}{5}$)

C9 : "nombres décimaux (2,334 ; 100,1 ; 0,33), nombres entiers ($\sqrt{7}$; 7 ; $\frac{7}{2}$)"

C11 : "R réel (5; 0; -3), N naturel, D décimaux (0,2 ; 0,5 ; -0,4), Q quotient ($\frac{a}{b}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{20}{19}$)"

C13 : "nombre entier positif (4, 5, 6), nombre entier négatif (-4, -5, -6), nombre impair (1, 3, 5), nombre pair (2, 4, 6), nombre fractionnel ($\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$), les racines carrées ($\sqrt{4}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$)"

C22 : "nombres entiers : sans virgule (-10 ; 20 ; 35), quotient de 2 nombres : fraction ($\frac{10}{2}$; $\frac{25}{2}$; $\frac{1635}{108}$), décimaux : avec virgule (6,5 ; 0,333... ; 109,8...)"

c) un nombre peut-il toujours s'écrire de plusieurs façons ?

La grande majorité des élèves répondent oui à cette question (réponse 1) ; c'est sans doute quelque chose qu'on leur a beaucoup répété tout au long de l'année. Cependant certains élèves ne sont pas de cet avis et pensent que certains nombres, comme 0 par exemple, n'ont qu'une écriture (réponse 2) ou même que chaque nombre n'a qu'une écriture (réponse 3). Cette dernière réponse peut être produite par des élèves en difficulté mais aussi par de très bons élèves qui essaient d'avoir des réponses cohérentes à toutes les questions et ne gardent que les décimaux comme nombres. Un très bon élève de la classe B est dans ce cas avec une réponse cohérente sur l'ensemble des questions. Il s'agit de B1 qui ne conserve que 0 ; -4 ; 0,05 en déclarant "Un nombre est un ensemble de chiffres, à virgule ou non, qui a une valeur exacte" puis répond qu'un nombre n'a qu'une écriture correcte en le justifiant ainsi "Un nombre n'a qu'une écriture parce que les autres écritures sont des opérations ou des appellations (ex : π)".

Les résultats à cette question sont résumés dans le tableau suivant :

catégorie	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	22	12	21	16	3	74
réponse 2	1	5	7	4		17
réponse 3	0	8	3	0		11
autres	1	0	0	0		1
non réponse	0	4	4	2		10
total	24	29	35	22	3	113
Pourcentages						
réponse 1	0,92	0,41	0,60	0,73		0,65
réponse 2	0,04	0,17	0,20	0,18		0,15
réponse 3	0,00	0,28	0,09	0,00		0,10

En conclusion, plusieurs idées se dégagent :

- un peu moins de 60% des élèves expriment une idée assez correcte de nombre, n'excluant que les variables ou les écritures décimales infinies (parfois aussi 0 auquel certains semblent

accorder un statut particulier) et les définitions fournies ne sont pas si mauvaises pour la moitié des élèves.

- pour 27% des élèves, il semble bien que les nombres qui n'ont pas une écriture standard avec une suite de chiffres sont difficilement considérés comme des nombres et il est probable que pour un nombre d'élèves bien plus grand, même s'ils sont acceptés, ils ne sont pas considérés comme des nombres à part entière : ils ne sont pas cités spontanément par les élèves et il y a peu de chances pour que ceux-ci pensent à ce type de nombres de leur propre initiative.

- pour certains élèves, un nombre doit avoir plusieurs chiffres, mais ceci semble surtout un phénomène classe.

- Cependant les distinctions entre catégories de nombres ne semblent liées qu'au signe ou à l'écriture, à part des catégories internes aux entiers (pairs, impairs). Les différences entre entiers, rationnels et décimaux ne sont perçues qu'à travers l'écriture, c'est-à-dire que la plupart des élèves n'ont aucune idée des rapports entre rationnels et décimaux.

- En revanche les trois quarts des élèves pensent que tous les nombres ont plusieurs écritures : c'est un savoir déclaré mais qui ne semble pas opératoire pour distinguer le nombre de son écriture.

Il reste à voir si les élèves ont une idée de la notion de réel par l'intermédiaire de la droite numérique qui est en général supposée être un support pertinent pour cela. C'est l'objet des questions 3 et 4.

1.2. Rapports entre nombres et points d'une droite graduée.

Nous analysons ici les réponses aux questions 3 et 4.

3. Voici une droite graduée où on a placé le point O d'abscisse 0 et le point I d'abscisse 1.

$\begin{array}{c} \text{O} \qquad \qquad \text{I} \\ \hline \end{array}$

Place 5 à 8 points avec des abscisses aussi variées que possible. Indique les abscisses à côté des points. Peux-tu en choisir dans toutes les catégories de nombres que tu connais ? Si oui, fais-le, sinon explique pourquoi.

4. Coche les cases qui correspondent le mieux à ton opinion.

◊ si on me donne n'importe quel nombre, je suis sûr qu'il lui correspond un point et un seul de la droite

◊ si on me donne n'importe quel point de la droite, je suis sûr qu'il lui correspond un nombre et un seul.

◊ il y a des nombres auxquels on ne peut faire correspondre aucun point de la droite.

Explique pourquoi et donne des exemples :

◊ il y a des points de la droite auxquels on ne peut faire correspondre aucun nombre.

Explique pourquoi et donne des exemples :

◊ je n'ai pas d'avis sur la question

Pour le placement de nombres sur l'axe gradué, la plupart des élèves ne placent que des entiers ou des demis, en écriture décimale ou en fraction, certains placent des quarts, souvent écrits sous la forme décimale ,25 ou ,75. Les autres décimaux sont très rares et les autres fractions aussi. Quelques élèves placent des irrationnels (π , 2π , $\frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ sont les seuls que nous avons rencontrés).

Cependant, il est difficile de savoir si les élèves répondent à la question technique du placement effectif des nombres ou à la question théorique. On peut penser que beaucoup répondent à la question technique à cause des commentaires du type "la droite n'est pas assez grande" ou "on ne peut pas placer (précisément) les nombres qui ont un grand nombre de décimales" (mais le mot "précisément" est parfois absent), ou "on ne peut pas placer à la fois des nombres très grands et des nombres très petits". Voici par exemple le commentaire de A14 : "Il est difficile de représenter graduellement avec un minimum de précision un chiffre décimal à nombre de chiffres infini ou indéfini après la virgule. Aussi l'unité est trop importante pour représenter les nombres $\times 10^x$ avec $x > 1$ et trop petite pour représenter les nombres $\times 10^{-x}$ avec $x < 1$."

Cependant d'autres élèves répondent comme A20 "oui, car à chaque nombre est associée une distance, ex $\sqrt{2} \approx 1,4$, $\sqrt{16} = 4$, $\pi \approx 3,14$ ".

Nous avions prévu que les élèves puissent répondre au problème pratique pour la question 3, c'est pourquoi nous avons aussi posé la question 4 où nous espérions que la formule "correspond" aiderait les élèves à se placer sur le plan théorique et non sur celui du placement effectif. Il n'est pas sûr que ce soit le cas et cela explique sans doute que des élèves aient coché

c ou même à la fois a et c. Par exemple, le meilleur élève de la classe B coche abc à la question 4 et dit, pour expliquer c "Pour π par exemple, il y a une infinité de décimales, on ne peut le placer qu'approximativement".

Il faut aussi remarquer aussi que beaucoup d'élèves placent des entiers mais avec une écriture fractionnaire ou avec une racine comme $\sqrt{9}$ ou $-\frac{10}{10}$ ayant ainsi rempli le contrat de placer des nombres "de toutes les catégories" comme le demandait le texte, ce qui montre bien, comme nous l'avions pensé pour la question précédente, que les catégories que font les élèves sont surtout liées à l'écriture.

Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

réponse 1 : placement d'entiers seulement, éventuellement avec une écriture non canonique,

réponse 2 : placement d'entiers ou de demis écrits sous forme ,5 ou sous forme de fractions

réponse 3 : placement de quarts (écriture ,25 ou fraction) ou d'autres décimaux (ex 1,3 ou 1,33)

réponse 4 : placements d'autres fractions ou placement d'irrationnels

argument 1 : "la droite n'est pas assez grande"

argument 2 : ce n'est pas possible s'il y a trop de décimales

argument 3 : problème d'échelle ou d'ordre de grandeur

Les réponses à la question 3 sont rassemblées dans le tableau suivant :

catégorie	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	2	3	2	2	0	9
réponse 2	13	16	18	13	3	63
réponse 3	3	5	8	4	0	20
réponse 4	5	2	4	2	0	13
non réponse	1	3	3	1	0	8
total	24	29	35	22	3	113
Pourcentages						
réponse 1	0,08	0,10	0,06	0,09		0,08
réponse 2	0,54	0,55	0,51	0,59		0,56
réponse 3	0,13	0,17	0,23	0,18		0,18
réponse 4	0,21	0,07	0,11	0,09		0,12
non réponse	0,04	0,10	0,09	0,05		0,07
argument 1	3	0	2	0	0	5
argument 2	1	4	6	0	1	12
argument 3	2	0	1	0	0	3
pb pour les x	1					1

Il y a peu de différences entre les classes. Environ 60% des élèves ne placent que des entiers ou des demis sur leur axe, éventuellement en les déguisant sous d'autres écritures ; 30 % placent autre chose, ne serait-ce que des quarts. Seuls 21 élèves, soit moins d'un sur cinq, donnent des arguments pour expliquer qu'ils ne peuvent pas placer tous les nombres, c'est le plus souvent un problème de précision qui est évoqué.

Pour la question 4, on notera a la première ligne (si on me donne n'importe quel nombre, je suis sûr qu'il lui correspond un point et un seul de la droite), b la deuxième (si on me donne n'importe quel point de la droite, je suis sûr qu'il lui correspond un nombre et un seul), c la troisième (il y a des nombres auxquels on ne peut faire correspondre aucun point de la droite) et d la quatrième (il y a des points de la droite auxquels on ne peut faire correspondre aucun nombre) et on fera figurer les configurations rencontrées "a+b" ou "b+c" etc...

Les autres réponses correspondent à des élèves qui cochent c mais avec des explications autres comme le problème des variables ou la perturbation apportée dans les connaissances sur le repérage par l'introduction de la valeur absolue :

A12 : "il y a des nombres qui ne sont pas assez précis et qu'on ne peut placer sur une droite ex : $2x$, $3y$... sauf si on connaît la valeur de x ou de y ..." (noté dans le tableau pb avec x)

A24 : "quand on a une droite graduée (O; I) $C = E$, $A = D$, $B = I$, $J = F$ (dessin présent, les points "égaux" sont symétriques par rapport à l'origine) car pour une distance il n'y a pas de

nombre négatif or $-4 = 4$; $-3 = 3$; $-1 = 1$ etc... ". Cette même élève écrit sous l'axe "oui, on peut en choisir dans presque toutes les catégories de nombres que je connais, exemple 1 est un nombre positif entier, mais on sait qu'une distance n'est jamais négative, on peut avoir un nombre à virgule ou fractionnaire mais il sera toujours positif et jamais négatif". (elle a pourtant placé des nombres entiers négatifs sur l'axe).

A 28 : "avec les racines, on peut faire correspondre 2 points ex $\sqrt{9} = 3$ ou -3 .

La mauvaise compréhension de la valeur absolue intervient aussi dans l'écriture des nombres, par exemple A4 écrit sur l'axe $-1 = |1|$; $-2 = |2|$.

des réponses c et d sont aussi motivées par la confusion avec la géométrie analytique :

B11 : "si la droite est dans un repère elle ne peut pas passer par tous les nombres".

D21 : "certains points ne passent pas par cette droite, ex. une droite qui passe par l'origine O, si on lui fait correspondre un nombre supérieur à celui-ci il ne pourra pas être sur la droite, ex. $y = 3$."

Les résultats à la question 4 sont les suivants (en catégories disjointes)

réponse a+b	5	6	6	9		26
réponse a+b+c	0	1	2	1		4
réponse a	3	9	1	1	1	15
réponse b	5	3	9	4		21
réponse c	0	0	3	0	1	5
rép. a+c ou b+d	1	0	2	1		4
réponse b+c	1	1	5	1		8
rép. c+d ou a+d	1	0	1	0		2
autre réponse	2	1	0	1	1	5
sans avis	5	4	4	2		15
non réponse	1	4	2	2		9
total	24	29	35	22	3	113

ce qui donne, au total pour les réponses a et b :

total a coché	9	17	10	12	1	49
total b coché	10	11	17	14		52

soit en pourcentages :

réponse a+b	20,8	20,7	17,1	40,9		23
réponse a ou a+b	33,3	51,7	20	45,5		36,3
réponse b ou a+b ou b+c	45,8	34,5	57,1	63,6		48,7

total a coché	37,5	58,6	28,6	54,5		43,4
total b coché	45,8	37,9	62,9	63,6		53,1

On voit ici une tendance inversée entre la classe B et les autres, surtout entre les classes B et C pour le total des a ou b cochés. Les élèves de la classe D sont les plus nombreux à cocher à la fois a et b. Les élèves qui cochent à la fois a et c montrent la difficulté qu'il y a à savoir sur quel plan se placer. Nous considérons d'une part les élèves qui ont coché a seul ou a+b et d'autre part les élèves qui ont coché b et a+b ou b+c. De ce point de vue, la tendance est la même : on voit une différence nette entre la classe B d'une part, la classe C d'autre part, les classes A et D se situant dans une position plus intermédiaire.

Un seul élève a coché a+d, mais avec une réserve pour a, c'est C10 et l'objection qu'il formule concerne aussi l'autre sens : "Il y a des points auxquels on ne peut faire correspondre avec certitude un nombre (par manque de précision) ex : 3,4545..."

En revanche 8 élèves ont coché b+c : il leur paraît donc moins difficile de faire correspondre un nombre à un point de la droite que le contraire : sans doute peut-on plus facilement faire correspondre un nombre, une valeur approchée de l'abscisse à un point qu'un point à un nombre qui a beaucoup de décimales.

La réponse a, choisie majoritairement par la classe B, traduit la possibilité de faire correspondre des points aux nombres et donc de représenter sur un graphique des calculs déjà effectués, la réponse b, majoritaire dans les classes C et D traduit la possibilité d'associer un nombre à un

point et correspond donc plutôt à la lecture graphique. On peut se demander si les différences entre les classes correspondent à des différences de pratiques dans l'utilisation des graphiques. Nous verrons si l'examen des activités des classes permettent de répondre ou non à cette question.

En conclusion, la correspondance entre nombres et points d'un axe gradué n'est peut-être pas aussi transparente que les programmes d'enseignement peuvent le laisser penser :

- il est difficile de savoir sur quel plan l'élève se place ou de lui dire sur quel plan il doit se placer : la possibilité de faire correspondre des nombres à des points dessinés effectivement ou l'existence théorique d'une correspondance entre nombres et points d'une droite,
- les conceptions de ce qu'est un nombre et de ce qu'est un point ne sont probablement élucidées ni l'une ni l'autre, les élèves rattachent les questions aux diverses pratiques qu'ils ont de la droite graduée. Ces deux notions ont sans doute besoin d'être travaillées de façon conjointe : il n'est pas sûr que l'une puisse être considérée comme transparente et servir pour définir l'autre sans autre forme de procès.

1.3 Valeur absolue et nombres irrationnels

La question 7 comportait deux parties :

7. Donne un encadrement aussi précis que possible de $1 - \sqrt{2}$ et explique comment tu l'as trouvé.

Quelle est la valeur exacte de $|1 - \sqrt{2}|$?

Placée après les exercices plus classiques sur la valeur absolue, elle permet à nouveau de tester les nombres, conformément à l'hypothèse que beaucoup de difficultés des élèves sur les fonctions et la valeur absolue sont reliées à des difficultés sur les nombres.

L'objectif de cette question est donc de tester les élèves à la fois sur les nombres et sur la valeur absolue. Nous avons écrit $|1 - \sqrt{2}|$ et non $|\sqrt{2} - 1|$ pour que la réponse correcte ne soit pas confondue avec celle qu'on obtient en enlevant les barres. Nous pensions que les élèves pouvaient fournir un encadrement avec la calculatrice, mais nous attendions un nombre important de non réponse à la deuxième question à cause de la présence de la racine et du fait que $1 - \sqrt{2}$ n'est pas perçu vraiment comme un nombre avec lequel on peut calculer : $\sqrt{2}$ risque de fonctionner comme "x" et d'entraîner des réponses " $1 - \sqrt{2}$ ou $\sqrt{2} - 1$ ". Nous attendions aussi l'identification de $\sqrt{2}$ à une valeur approchée et des réponses décimales approchées de $|1 - \sqrt{2}|$, ou des réponses du type "il n'y a pas de valeur exacte", le terme "valeur" étant réservé aux décimaux. Les résultats sont nettement conformes à notre analyse a priori

Pour l'encadrement, nous avons 54 réponses et nous distinguons :

réponse 1 : encadrement correct

réponse 2 : inégalités dans le mauvais sens (exemple $-0,41 < 1 - \sqrt{2} < -0,42$)

réponse 3 : nombres positifs (exemple $0,41 < 1 - \sqrt{2} < 0,42$)

réponse 4 : valeur approchée ou même valeur de chaque côté de l'encadrement

réponse 5 : autre réponse (souvent quelque chose comme $-0,41 < \sqrt{2} < 0,42$)

non réponse

Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	0	5	11	1	0	17
réponse 2	3	5	7	4	1	20
réponse 3	1	2	2	0	0	5
réponse 4	1	1	1	0	0	3
autre rép.	4	2	2	1	0	9
non réponse	15	14	12	16	1	58
total	24	29	35	22	2	112

Remarquons que c'est l'absence de réponse qui est majoritaire dans toutes les classes. Certes, cette question venait en deuxième partie de questionnaire mais la plupart des élèves qui n'ont pas répondu à cette question, sont allés plus loin dans le questionnaire, parfois jusqu'à la

question 11, plus classique. Notons aussi l'importance de la réponse 2 qui correspond au fait que les élèves oublient de retourner les inégalités quand ils passent à l'opposé. Dans la classe A, aucun élève ne fournit d'encadrement correct et un seul dans la classe D. Dans ces deux classes, le taux de non réponse est particulièrement important. La classe D a manqué de temps, mais dans la mesure où cette question est celle où le taux de non réponse est le plus fort dans toutes les classes, on peut penser qu'il exprime quand même une difficulté des élèves.

Pour croiser avec la question suivante, nous pouvons aussi regrouper les élèves qui avaient une réponse leur permettant d'affirmer que $1-\sqrt{2}$ est négatif et donc de répondre correctement à la question suivante :

catégorie	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponses 1,2,4	4	11	19	5	1	40
autres	5	4	4	1	0	14

On peut supposer que les élèves qui font les réponses 1, 2, 4, pourraient, si on le leur demandait, donner le signe de $1-\sqrt{2}$ (40 élèves) et, bien sûr, des élèves qui ne donnent pas de réponse peuvent le connaître aussi. Nous allons voir s'ils peuvent répondre à la deuxième partie de la question.

Pour la valeur exacte de $|1-\sqrt{2}|$, nous avons 71 réponses fournies et nous avons distingué :

réponse 1 : $\sqrt{2} - 1$

réponse 2* 4: valeur approchée ou "il n'y a pas de valeur exacte"

réponse 5 : $\sqrt{2}-1$ ou $1-\sqrt{2}$,

réponse 6 : $1-\sqrt{2}$

réponse 7 : valeur décimale négative

réponse 8 : $1+\sqrt{2}$

	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	1	5	3	2	1	12
réponse 2*	9	3	8	2	0	22
réponse 5	0	2	9	1	0	12
réponse 6	0	6	3	1	0	10
réponse 7	2	1	0	2	0	5
réponse 8	3	1	1	0	0	5
autre rép.	1	2	1	2	0	6
non réponse	9	9	10	12	1	41
total	24	29	35	22	2	112

Vu les effectifs réduits, le tableau des pourcentages est donné en annexe.

Parmi les autres réponses, deux élèves, B12 et D25, répètent $|1-\sqrt{2}|$.

On peut remarquer que les réponses comportant une $\sqrt{2}$ (1, 5, 6, 8) sont nettement majoritaires dans les classes B et C, alors qu'elles sont très rares dans la classe A qui utilise surtout des valeurs approchées. Ceci est peut-être lié au fait que l'usage de la calculatrice est très encouragé dans la classe A. Dans la classe D, le trop grand nombre de non réponse donne peu d'élèves dans chaque cas. Pour vérifier le statut différent de $\sqrt{2}$ suivant les classes, on peut regrouper les réponses comportant $\sqrt{2}$ d'une part même fausses (1, 5, 6, 8) et celles qui n'envisagent que les décimaux (2, 3, 4, 6), ce qui donne :

	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponses 1,5,6,8	4	14	16	4	1	39
réponses 2*,7	11	4	8	4	0	27

⁴ voir en annexe la répartition de cette réponse en " catégories : réponses 2, 3, 4.

Pourcentages						
réponses 1,5,6,8	0,17	0,48	0,46	0,18		0,35
réponses 2*,7	0,46	0,14	0,23	0,18		0,24

Si l'on assimile les valeurs approchées aux réponses justes (réunion des réponses 1, 2*), on constate que les réponses non fausses et utilisables sont plus nombreuses dans la classe A que dans les autres puisqu'on a :

	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponses 1 à 4	10	8	11	4	1	34
Pourcentages	0,42	0,28	0,31	0,18		0,30

Les résultats de la classe A s'améliorent notablement : ces élèves ont des problèmes avec les inégalités, il est probable que pour eux seuls les nombres décimaux ont statut de nombre mais beaucoup d'entre eux peuvent traiter $|1-\sqrt{2}|$ par une valeur approchée alors que dans les classes B et C les élèves produisent plus de réponses fausses conservant $\sqrt{2}$, ce qu'on peut vérifier en comptabilisant les réponses 5, 6, 8 :

réponses 5,6,8	3	9	13	2	0	27
Pourcentages	0,13	0,31	0,37	0,09		0,24

Nous comparons maintenant les 2 parties de la question, pour savoir notamment quels sont les élèves qui font une réponse exacte ou donnent une valeur approchée parmi ceux qui avaient un encadrement permettant de conclure sur le signe de $1-\sqrt{2}$, ce que nous appellerons "Encad", les autres réponses étant regroupées sous le titre "non Encad." dans les tableaux ci-dessous :

	Encad. 1, 2, 4	non Encad. 3, 5	Enc. non réponse
réponse $\sqrt{2}-1$	10	0	2
réponses 2*	10	6	6
autre réponse	14	7	14
non réponse	6	1	36*

* Nous avons ici considéré comme ayant une non réponse globale les élèves B12 et D25.

On trouve 20 élèves qui donnent pour l'encadrement une réponse montrant que $1-\sqrt{2}$ est négatif et une réponse fausse pour $|1-\sqrt{2}|$ (14 d'entre eux) ou aucune réponse (6 d'entre eux). On voit aussi que les élèves qui ne donnent pas un encadrement pertinent produisent rarement la réponse attendue. Certains donnent une valeur approchée correcte, ce sont des élèves qui ont encadré par 2 valeurs positives, donc en fait $\sqrt{2} - 1$, ou encadré par une valeur négative et une valeur positive comme A16 (qui écrit $-0,410 < 1-\sqrt{2} < 0,145$) ou qui ne savent pas encadrer comme A20 (qui écrit $[\sqrt{2}; -1]$).

Si l'on néglige les 37 élèves qui n'ont pas ou pratiquement abordé la question, qu'on englobe les réponses fausses et les non réponse cela montre que le fait de faire un encadrement qui devrait permettre de déterminer le signe d'un nombre irrationnel ne permet pas, dans les trois quarts des cas, de donner une valeur exacte de la valeur absolue de ce nombre, le quart des élèves en donnent une valeur approchée.

	Encad.	non Encad. ou non réponse
réponse 1	10	2
réponses 2*	10	12
autres réponses	20	22

Les profils ne sont pas exactement les mêmes selon les classes :

classe A	Encad.	non Enc.	non rép	classe B	Encad.	non Enc.	non rép
rép.1	1	0	0	rép.1	5	0	0
rép. 2 *	1	3	4	rép. 2*	2	1	1
autres	1	2	3	autres	3	3	4
non rép.	1	0	8	non rép.	1	0	9

classe C	Encad.	non Enc.	non rép	classe D	Encad.	non Enc.	non rép
rép.1	2	0	1	rép.1	1	0	1
rép. 2 *	5	2	1	rép. 2 *	2	0	0
autres	8	2	4	autres	2	0	3
non rép.	4	0	6	non rép.	0	1	12

Seuls 12 élèves fournissent une réponse correcte, et 10 d'entre eux avaient fourni un encadrement permettant de déterminer le signe, les deux autres n'ayant pas répondu pour l'encadrement. Pour les autres élèves qui répondent, il n'est pas sûr qu'ils fassent une relation entre les deux questions, et c'est douteux pour ceux qui font une réponse 5, 6, 7 8 : il répondent à la question de la valeur exacte le plus souvent sans avoir répondu à celle de l'encadrement, soit en recourant aux valeurs approchées (sans doute avec la calculatrice) soit en utilisant un procédé algébrique. On voit que c'est surtout dans la classe A que des élèves qui ne sont pas capables de fournir l'encadrement fournissent néanmoins une valeur approchée correcte alors qu'ils ont tendance à donner des réponses formelles à partir de $\sqrt{2}$ dans les classes B et C. Dans la classe C, 8 élèves fournissent un encadrement pertinent, aux problèmes d'inégalités près, mais une réponse non pertinente pour $1-\sqrt{2}$. Il y a 14 élèves en tout dans ce cas ; l'importance de la classe C dans cette catégorie s'explique par le nombre élevé dans cette classe d'élèves qui répondent $1-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}-1$. En effet, les réponses de ces 14 élèves se répartissent ainsi :

* $1-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}-1$: B19, C14, C15, C21, C28, C29

* $1-\sqrt{2}$: B25, C17,

* $1+\sqrt{2}$: A9, B23, C16, C19, D15

* -0,41 : D14.

Les réponses aux premières questions du questionnaire laissent penser que seuls les entiers, les décimaux et quelques fractions sont considérés par beaucoup d'élèves comme des nombres "réels", que les seules différences entre nombres qu'ils peuvent imaginer sont reliées au signe ou à l'écriture et que les expressions qui n'ont pas une écriture avec un seul signe comme $|2-\pi|$ ne sont pas considérées comme des nombres. Nous en trouvons une confirmation ici. $1-\sqrt{2}$ ne semble pas être un nombre dont on peut facilement prendre l'opposé, sauf en le remplaçant par une valeur décimale approchée. La distance de 1 à $\sqrt{2}$ ne semble pas plus facile à évaluer. Les difficultés rencontrées sur cette question ne semblent pas reliées à la valeur absolue mais plutôt à la notion de nombre irrationnel.

2. Valeur absolue et intervalles.

Les questions 5 et 6 permettaient de tester les traductions dans les définitions des intervalles entre la donnée des bornes et la définition sous la forme $|x-c| \leq r$ en même temps que la résolution d'équations ou inéquations $|ax+b| = r$ ($\leq r$), en demandant dans chaque cas la réponse dans le cadre géométrique et le registre de la droite graduée, qui est un moyen de passer d'une définition de l'intervalle à l'autre par l'intermédiaire du centre et du rayon.

5. Dans chaque cas, dessine une droite graduée et colorie tous les points qui ont une abscisse x qui vérifie la condition donnée :

ba) $|x - 3,5| \leq 1,5$ _____

) $x \in \left[\frac{3}{4}; 2 \right]$ _____

c) $|x + \frac{3}{2}| \leq 2$ _____

d) $|2x + 1| = 3$ _____

e) $|2x + 1| \leq 3$ _____

6. Quel est le centre de l'intervalle $\left[-\frac{7}{2}; \frac{1}{2} \right]$?

Quel est son rayon ?

Ecris une relation ayant la même signification que $x \in [-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}]$ mais utilisant la valeur absolue.

La question b était une vérification de la lecture correcte d'un intervalle à partir de ses bornes, elle est réussie par presque tous les élèves. Quelques-uns n'y ont pas répondu peut-être parce qu'il n'y avait aucun calcul à faire pour y répondre, quelques autres ont fait une erreur de signe (code S) sur une des bornes ou mal placé $\frac{3}{4}$ (code P).

Nous faisons l'hypothèse (raisonnable d'après les résultats de 5b) que les traductions entre l'intervalle défini par ses bornes et le dessin de l'intervalle ne posent pas d'autre problème, pour la quasi totalité des élèves, que celui du placement ou de la lecture d'abscisses sur un axe gradué. Les réponses aux questions 5a, c, d, e peuvent donc être considérées comme des résolutions d'équations ou d'inéquations. Nous attendons des différences dans la réussite de a et c d'une part, d et e d'autre part pour les classes A, B, D qui ont introduit les valeurs absolues par les distances mais peu de différences pour la classe C où la définition de la valeur absolue s'est faite dans le cadre algébrique.

La question 6 demandait la traduction inverse de 5c mais en demandant des intermédiaires, ce qui devait nous permettre d'analyser les erreurs de traduction. Nous comparerons les résultats de 5c) et 6b) (écriture de la relation à partir des centre et rayon trouvés) qui correspondent à une traduction dans un sens et dans l'autre pour un même intervalle avec centre fractionnaire et négatif et rayon entier. Par la distance, 5c) devrait être mieux réussi que 6b) à cause des difficultés numériques, conformément aux résultats de la question sur le tableau.

Nous avons codé les réponses des élèves en utilisant un même code pour les réponses qui nous semblaient relever d'une même conception, ou plus exactement d'un même type de procédures ; nous devrions, si notre analyse est correcte trouver une certaine cohérence dans les réponses aux diverses questions. La liste des codes des erreurs et des résultats détaillés est assez longue, nous la reportons en annexe.

Nous donnerons ici les réussites aux questions 5a, 5c, 5d, 5e, 6b, nous caractériserons quelques erreurs et nous ferons les comparaisons annoncées.

a) - réussites

catégorie	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
5a code 1	9	11	27	10	0	57
5c code 1	8	8	18	6	0	40
5d code 1	4	4	22	6	0	36
5e code 1	3	3	29	4	0	39
5a et 5c code 1	7	7	18	6	0	38
5d et 5e code 1	3	3	20	4	0	30
5 tout juste	2	1	12	1	0	16
6a code 1	9	14	24	9	1	57
6b code 1	7	7	6	6	0	26
6a et 6b code 1	5	6	6	4		21
5a, 5c, 6b code 1	4	4	5	3	0	16

Pourcentages						
5a code 1	0,38	0,38	0,77	0,45		0,51
5c code 1	0,33	0,28	0,51	0,27		0,36
5d code 1	0,17	0,14	0,63	0,27		0,32
5e code 1	0,13	0,10	0,83	0,18		0,35
5a et 5c code 1	0,29	0,24	0,51	0,27		0,34
5d et 5e code 1	0,13	0,10	0,57	0,18		0,27
5 tout juste	0,08	0,03	0,34	0,05		0,14
6a code 1	0,38	0,48	0,69	0,41		0,51
6b code 1	0,29	0,24	0,17	0,27		0,23

6a et 6b code 1	0,21	0,21	0,17	0,18		0,19
5a, 5c, 6b code 1	0,17	0,14	0,14	0,14		0,14

Les élèves A10, B18, C4, C11, C21, C24, C33 et D6 ont toutes leurs réponses justes pour ces deux questions.

Nous pouvons constater une meilleure réussite à l'exercice 5 dans la classe C que dans les autres classes. Cette tendance se maintient pour le début de l'exercice 6 (déterminer le centre et le rayon) mais non dans la deuxième partie (écrire avec une valeur absolue). La meilleure réussite de la classe C peut s'expliquer par deux facteurs : d'une part les élèves de cette classe se sont plus investis dans la résolution de cet exercice classique parce qu'ils pensaient le contrôle noté et ils ont bénéficié d'un temps plus long ; d'autre part, tous ceux qui donnent une explication (27) utilisent une méthode algébrique et parmi eux, 9 utilisent la méthode de résolution en tableau pour d et e (dont 4 l'utilisent aussi pour a et/ou c). Dans les autres classes, très peu d'élèves font apparaître des calculs (aucun dans la classe B), on peut penser qu'ils ont résolu géométriquement sur le dessin, certains l'indiquent par des accolades, deux élèves de la classe A indiquent le calcul des bornes, deux élèves de la classe A utilisent une méthode algébrique (dont un, A14, correctement, y compris pour d et e), 7 élèves de la classe D font de même (dont 4 correctement mais deux font des erreurs dans le report sur le dessin).

Une autre différence entre les classes est la baisse beaucoup plus forte de réussite entre 6a et 6b dans la classe C que dans les autres classes : pour la moitié des élèves de la classe C, connaître le centre et le rayon ne permet pas d'écrire la définition de l'intervalle à l'aide de la valeur absolue. C'est aussi le cas du quart de élèves de la classe B mais nous savons qu'ils se sont moins investis (14 non réponse pour cette question, parmi lesquels 3 avaient un centre et un rayon corrects et 4 autres avaient un centre juste mais n'ont pas cherché le rayon).

Nous reviendrons sur ces questions dans les paragraphes sur les comparaisons.

b) - erreurs

Nous relevons ici 6 types d'erreurs, dont les 3 premières ne concernent que la question 5 et la dernière les questions 5d et 5e :

erreur A : élèves qui enlèvent les barres de valeur absolue et résolvent algébriquement

erreur B : élèves qui donnent un segment délimité par centre et rayon ou une demi droite délimitée par centre et rayon (cumulée éventuellement avec une erreur de signe pour le centre)

erreur O : intervalle centré en 0 avec le bon rayon

erreur CR : interversion du centre et du rayon, que ce soit en dessinant l'intervalle ou en lisant le dessin,

erreur S : erreur de signe sur une borne ou sur le centre et qui ne font que cette erreur

Pour les questions d et e, nous repérons par 3 codes les élèves qui traitent la question en se référant probablement aux distances comme dans le cas $|x-a|$, sans complètement tenir compte du coefficient :

- co pour les élèves qui font comme si on avait x au lieu de $2x$ et répondent $-4, 2$ ou $-4 \leq x \leq 2$

- R pour ceux qui prennent un centre correct mais un rayon 3 ($-3,5 ; 2,5$ pour bornes) ce qui revient à résoudre $|x + \frac{1}{2}| \leq 3$

- C pour ceux qui prennent un rayon correct mais un centre -1 ($-2,5 ; 0,5$), ce qui revient à résoudre $|x + 1| \leq \frac{3}{2}$.

Nous regrouperons ces codes sous le titre "erreur D"

erreurs	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
5 erreur A	10	8	8	2	2	30
5 erreur B	7	6	0	4	0	17
5 erreur O	4	3	2	2	1	12
5 ou 6 erreur CR	1	2	0	1		4
5 ou 6 erreur S	4	4	3	8		19
erreur D	5	3	0	2		10
total	24	29	35	22	2	112

erreurs	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
5 erreur A	0,42	0,28	0,23	0,09		0,27
5 erreur B	0,29	0,21	0,00	0,18		0,15
5 erreur O	0,17	0,10	0,06	0,09		0,11
5 ou 6 erreur CR	0,04	0,07	0,00	0,05		0,04
5 ou 6 erreur S	0,17	0,14	0,09	0,36		0,17
erreur D	0,21	0,10	0,00	0,09		0,09

Les erreurs B, CR, D sont totalement absentes de la classe C, ce qui est normal puisque les élèves résolvent algébriquement et ne se réfèrent donc pas au centre et au rayon. Ces erreurs correspondent soit à une confusion entre les bornes et le couple centre-rayon, soit à une adaptation erronée de la procédure géométrique à la résolution d'équations du type $|ax+b| = r$. L'erreur A qui consiste à résoudre l'équation ou l'inéquation du premier degré comme s'il n'y avait pas les $|$ est présente dans toutes les classes et très forte dans la classe A où la résolution algébrique n'a pas été enseignée.

L'erreur S est évidemment présente dans toutes les classes et correspond le plus souvent à la non congruence des registres de traduction.

On peut remarquer aussi une différence entre la classe D et les autres au niveau des types d'erreur : si l'on regroupe toutes les erreurs qui correspondent à une résolution algébrique erronée, on trouve respectivement 12, 10, 10, 4 élèves qui font au moins une de ces erreurs ; en revanche l'erreur sur le signe du centre (ou erreur de signe dans la résolution algébrique) est respectivement de 4, 4, 3, 8. On voit que la classe D fait moins d'erreur du premier type et plus du second que les autres classes. Or, dans la classe D, l'introduction de la valeur absolue s'est faite à partir des distances mais la procédure algébrique de résolution des équations et inéquations a été institutionnalisée assez vite alors que dans les classes A et B la procédure géométrique a été privilégiée. Et même, dans la classe A, la procédure algébrique n'a jamais été reprise par le professeur qui a mis en garde les élèves qui voulaient l'utiliser ; cependant, il semble que dans cette classe, la moitié des élèves essaient cependant d'y recourir mais de manière erronée. Les classes A et D font partie du même établissement, la classe D avait un niveau général légèrement supérieur à celui de la classe A (quelques élèves étaient susceptibles d'aller en 1ère S) et le professeur a valorisé assez vite la méthode algébrique mais on peut voir que beaucoup d'élèves recourent à la méthode géométrique en faisant une erreur sur le signe du centre qui est un élément non congruent dans la traduction entre les deux registres.

c) - comparaison des résultats de 5c et 6b

Il s'agit de comparer les résultats de 5c et 6b qui correspondent aux deux sens de traduction pour les écritures des intervalles et pour lesquelles des différences étaient attendues.

5c. traduction de $|x+c| \leq r$ en $x \in [a,b]$

6b. traduction de $x \in [a,b]$ en $|x+c| \leq r$

La traduction dans 6b sera considérée comme bonne quand elle est compatible avec le centre et le rayon trouvés dans 6a, même faux.

	classe A	classe B	classe C	classe D	total
5c et 6b	0,25	0,21	0,17	0,23	0,21
5c et non 6b	0,08	0,14	0,43	0,05	0,20
non 5c et 6b	0,13	0,03	0,00	0,14	0,06
ni 5c ni 6b	0,54	0,62	0,37	0,59	0,53

Nous voyons que les élèves de la classe C, avec une approche algébrique peuvent réussir la traduction de $|x+c| \leq r$ en $x \in [a,b]$, ce qui revient à résoudre une inéquation, bien plus facilement que l'autre sens.

Dans les classes A et D, s'ils peuvent faire un sens, ils peuvent faire l'autre, ou le sens de l'intervalle vers la valeur absolue est un peu mieux réussi, contrairement à notre attente puisque

nous avons des bornes fractionnaires, mais l'effectif qui réussissent est réduit, ce qui fait que le problème de calcul avec les fractions intervient peut-être peu, surtout s'ils font un dessin.

Pour les classes A, B, le succès dans 5c et non 6b est dû à la non réponse dans 6b, dans la classe D, il y a un élève qui prend le mauvais signe du centre pour la traduction, alors que dans la classe C il y a des non réponse mais il y a beaucoup de réponses comme " $0 \leq |x| \leq 3,5$ ou même $-\frac{7}{2} \leq |x| \leq \frac{1}{2}$.

d) - comparaison des résultats de 5a et 5c d'une part, 5d et 5e d'autre part :

Nous attendons ici aussi des différences entre la classe C (peut-être D) et les autres : avec la méthode algébrique, et en particulier avec la méthode du tableau il n'y a pas de différence entre ces items, peut-être même 5d et 5e sont-ils plus faciles parce qu'ils utilisent des entiers, alors que 5d et 5e sont beaucoup plus difficiles que 5a et 5c avec la méthode géométrique,

	réussite a et c	non (a et c)
réussite d, e	A: 2, B: 1, C:17, D: 1	A: 1, B: 2, C: 9, D: 3
non (d et e)	A: 5, B: 5, C: 3, D: 5	A:16, B:21, C: 6, D:13

Les différences sont tout à fait claires, comme attendu, comme on peut le voir sur le tableau de pourcentages de chaque type dans chaque classe

pourcentages 1	classe A	classe B	classe C	classe D	total
ac et de	0,08	0,03	0,49	0,05	0,19
ac et non de	0,21	0,17	0,09	0,23	0,16
(non ac) et de	0,04	0,07	0,26	0,14	0,14
ni ac ni de	0,67	0,72	0,17	0,59	0,51

et, dans chaque type, la contribution de chaque classe est :

pourcentages 2	classe A	classe B	classe C	classe D
ac et de	0,10	0,05	0,81	0,05
ac et non de	0,28	0,28	0,17	0,28
(non ac) et de	0,07	0,13	0,60	0,20
ni ac ni de	0,28	0,37	0,11	0,23
total	0,22	0,26	0,32	0,20

Ces deux tableaux montrent bien la différence sur ce point entre la classe C et les autres : Les élèves de la classe C ont une meilleure réussite dans d,e que dans a,c, et la meilleure réussite pour le tout, souvent par la méthode du tableau. Dans les classes A et B, très peu d'élèves peuvent réussir d et e mais a,c est un peu plus facile. Dans la classe D, ce qui est plus facile n'est pas clair.

Rappelons qu'il faut relativiser les résultats obtenus dans ce paragraphe en se souvenant que les conditions de passation n'ont pas été identiques :

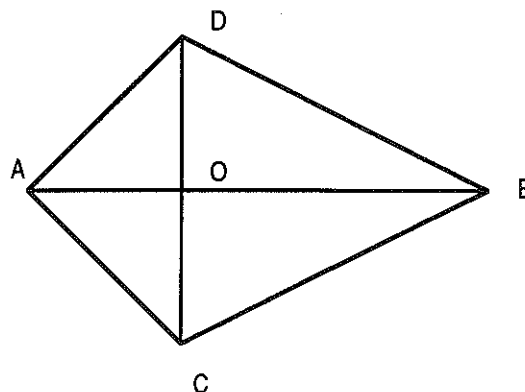
- pour la classe A, le test a été passé assez peu de temps après l'enseignement de la valeur absolue, et le professeur les a incités à réviser et a dit que ce contrôle compterait dans la moyenne,
- pour la classe B, l'enseignement de la valeur absolue était fini depuis 3 mois, le professeur a simplement prévenu les élèves que je ferais un test mais que cela ne le regardait pas, qu'il ne regarderait pas leurs réponses. Le test a eu lieu juste avant les vacances de Pâques, ceci explique l'absence de 5 élèves et peut-être l'investissement moindre de certains autres,
- pour la classe C, le test a aussi eu lieu lors de la dernière séance avant les vacances de Pâques mais le professeur avait annoncé un contrôle surprise, comme il en fait quelquefois, ce qui explique la présence de tous les élèves et leur investissement sur les questions concernant la

valeur absolue jugées "rentables", les questions du début étant plus inattendues ont parfois été moins investies alors même que les élèves disposaient de plus de temps (1h 1/4 environ),
- pour la classe D, la passation a eu lieu dans la dernière séance de cours avant la libération des élèves pour le baccalauréat, ce qui explique quelques absences et sans doute un investissement moindre : le professeur ne pouvait plus utiliser les réponses pour l'évaluation des élèves. De plus, des circonstances indépendantes de notre volonté ont fait que les élèves n'ont pu disposer que de 45 à 50 minutes. Comme pour la classe B, le test avait lieu plus de 3 mois après l'enseignement.

3. Encadrements de longueurs ou aires

La question 8 comportait 5 items et visait à tester l'usage des encadrements dans les calculs. Le premier item permettait de voir si les élèves pouvaient écrire l'encadrement dans le langage de la valeur absolue : nous croiserons donc les réponses avec celles de l'item 6b. Dans le second, nous regarderons simplement l'encadrement de AB, il s'agit pratiquement de tester la compréhension du mot "encadrement" et de l'expression "à un demi centimètre près". Le troisième permettait de tester l'usage des encadrements pour une différence et donc la multiplication d'une inégalité par un nombre négatif : nous attendons une faible réussite. Le quatrième portait sur l'encadrement d'un calcul plus complexe mais obtenu par une application croissante, la réussite devrait être meilleure. Le dernier item demandait un encadrement de l'aire, donc là aussi une opération croissante, mais la difficulté était dans le calcul de l'aire, notamment suivant la décomposition choisie l'encadrement peut être plus ou moins bon.

8. On a dessiné ci-contre une reproduction ADBC d'un cerf-volant dont les diagonales se coupent en O. On connaît les mesures à un demi centimètre près : pour OA, OD et OC 50 cm, pour AB 140 cm. On a par exemple, en prenant comme unité le cm : $49,5 \leq OA \leq 50,5$.



Peux-tu écrire le même renseignement en utilisant la valeur absolue ?

Ecris l'encadrement donné des mesures de AB, OC, OD.

Donne un encadrement de OB :

Donne un encadrement de AC :

Donne un encadrement de l'aire du cerf-volant :

Notons d'abord que cette question n'a pas du tout été abordée par 13 élèves (4 de la classe A, 1 de la classe B, 3 de la classe C et 5 de la classe D, qui, rappelons-le, a disposé de moins de temps. Nous ne considérons pas ces élèves pour cette question. Pour les autres, nous donnons les résultats par item :

a) écriture avec la valeur absolue de $49,5 \leq OA \leq 50,5$

Seuls 10 élèves, dont la moitié de la classe B, donnent la réponse attendue : $|OA - 50| \leq 0,5$ (code 1).

Nous regrouperons sous le code 2 les erreurs qui nous paraissent liées à des problèmes d'écriture (ou d'attention pour ceux qui mettent un signe -) : les 4 élèves qui écrivent $|OA+50| \leq 0,5$ et des variations autour de la réponse correcte : $|x-50| = 0,5$ (3 élèves) ; $|x - 50| \leq -\frac{1}{2}$ (deux élèves) ; ainsi que les élèves qui écrivent $|x-50| \leq 1$, $|x-50,5| \leq 0,5$, $|x-49,5| \leq 0,5$, $|x-49,5| \leq 1$, chacun 1 fois.

Le code 3 sera donné à l'écriture $49,5 \leq |OA| \leq 50,5$ rencontrée 10 fois. Il est vrai que cette écriture fournit une réponse correcte à la question posée mais nous pensions que le contexte

permettrait d'interpréter correctement la question, formulée volontairement dans des termes voisins de la question 6b. Il était de toute façon difficile de préciser la question sans induire la réponse.

Dans le code 4, nous regroupons des écritures très variées utilisant les barres de manière plus ou moins fantaisiste comme $|49,5| \leq |OA| \leq |50,5|$ (2 fois) ou $|49,5| \leq OA \leq |50,5|$ (1 fois) ou même " $|49,5| \leq OA \leq |50,5|$ ou $|49,5| \leq OA \leq |50,5|$ " (1 fois) ou autres variations comme $|OA+0,5| \leq 50$ ou $|OA-49,5| \leq 50,5$. Sous ce code, nous avons regroupé 20 écritures différentes faisant toutes intervenir d'une manière ou d'une autre les nombres 50, 49,5, 50,5 et 0,5 ainsi que OA ou x et des barres de valeur absolue, ces écritures correspondant pour la plupart à une affirmation vraie. Je ne sais pas combien de possibilités d'écriture il y avait mais il est sûr que les élèves ne manquent pas d'imagination sur ce point ! Nous mettons aussi dans cette catégorie une élève (A24) qui écrit " $OA = |x-49,5|$ $OA = |x-50,5|$ mais on fait toujours le plus grand moins le plus petit $x \leq 50,5$ $50,5 - x \leq 50,5 + x$ ", ce qui nous paraît difficilement interprétable.

Les résultats pour les élèves qui ont abordé la question sont les suivants (les non réponse sont des non réponses partielles) :

catégorie	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	2	5	0	3	0	10
réponse 2	2	2	4	5	0	13
réponse 3	3	1	5	0	1	10
réponse 4	7	8	4	4	0	23
non réponse	6	12	19	5	1	43
total	20	28	32	17	2	99
Pourcentages						
réponse 1	0,10	0,18	0,00	0,18	0,00	0,10
réponse 2	0,10	0,07	0,13	0,29	0,00	0,13
réponse 3	0,15	0,04	0,16	0,00	0,50	0,10
réponse 4	0,35	0,29	0,13	0,24	0,00	0,23
non réponse	0,30	0,43	0,59	0,29	0,50	0,43

Nous avons inclus dans les non réponse les élèves qui donnent l'intervalle ainsi que ceux qui répondent "oui" ou "non", même avec explication.

b) Croisement des réponses aux questions 6b et 8a

Nous voulions voir si les élèves pouvaient utiliser dans un contexte géométrique la traduction du langage des encadrements dans le langage de la valeur absolue. C'était le but de la question 8a, que nous comparons à 6b qui demandait la même chose dans le cas des intervalles. La comparaison donne les résultats suivants :

catégorie	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
8a et 6b	3	5	0	1	0	9
6b et non 8a	5	4	6	6	0	21
8a et non 6b	0	0	1	3	0	4
ni 8a ni 6b	10	8	18	10	2	48
non rep. aux 2	6	12	10	2	0	30
total	24	29	35	22	2	112

Nous avons ici englobé dans les réussites les élèves qui répondent par une égalité au lieu d'une inégalité et dans les échecs les non réponse s'il y a réponse à l'autre question. Nous constatons, comme prévu que la question 6b est mieux réussie que la 8a. La réussite à 8a et l'échec à 6b sont exceptionnels, d'autant plus que sur les 4 élèves qui sont dans ce cas, 3 écrivent une égalité pour 8a. La réussite des deux est encore plus rare dans la classe C où la présentation a été algébrique et dans la classe D où la résolution algébrique a été valorisée.

c) Encadrement de AB.

Cette question, qui correspondait à une traduction en termes d'inégalités de l'information "à 0,5 près" est en général bien réussie quand elle est traitée, sauf dans la classe A où la question des valeurs approchées n'a pas été abordée. Les autres réponses peuvent être des encadrements à 0,1 près, celle de B17 ($189,5 \leq AB \leq 190,5$) ou la réponse de A10 ($|x-140| \leq 1$) ou des réponses comme $49,5 \leq AB \leq 140$. En revanche, nous avons compté dans les réponses justes celle de B35 : $1139,51 \leq AB \leq 1140,51$, sans doute influencée par la question précédente. Nous n'avons considéré que les élèves qui ont abordé la question 8.

Les résultats se passent d'autre commentaire :

encadrer AB	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse correcte	8	21	30	14	1	75
autre réponse	7	5	0	2	1	15
non réponse	5	1	2	1	0	9
total	20	28	32	17	2	99
% rép. correcte	0,40	0,79	0,94	0,82	0,50	0,76

d) Encadrement de OB

Il s'agissait cette fois d'encadrer une différence. Comme prévu, nous avons peu de réponses correctes ($89 \leq OB \leq 91$, code 1). Les autres réponses correspondent essentiellement aux erreurs attendues :

code 2 : $89,5 \leq OB \leq 90,5$: calcul de OB et encadrement à 0,5 près,

code 3 : $90 \leq OB \leq 90$ ou $139,5 - 49,5 \leq OB \leq 140,5 - 50,5$: soustraction des inégalités

OB	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	0	6	6	1	0	13
réponse 2	7	12	16	5	0	40
réponse 3	0	8	7	3	0	18
autre réponse	9	3	3	3	1	19
non réponse	4	3	0	5	1	13
total	20	28	32	17	2	99
Pourcentages						
réponse 1	0,00	0,21	0,19	0,06		0,13
réponse 2	0,35	0,43	0,50	0,29		0,40
réponse 3	0,00	0,29	0,22	0,18		0,18
autre réponse	0,45	0,11	0,09	0,18		0,19
non réponse	0,20	0,11	0,00	0,29		0,13

Nous avons compté dans la réponse 2 un élève de la classe A qui répond $|x-90| \leq 1$ parce qu'il avait fait une réponse du même type en 8a.

Trois élèves de la classe B sont classés à la fois en réponse 2 et en réponse 3 : B3 part de $139 \leq AB \leq 141$ pour retrancher les inégalités, B12 et B13 retranchent les inégalités mais concluent avec un encadrement à 0,5 près.

Nous constatons que, comme nous pouvions le prévoir, c'est la réponse 2 qui consiste à calculer OB puis à remettre la même marge d'erreur qui est la plus fréquente. La soustraction des inégalités est aussi assez fréquente, sauf dans la classe A. Dans cette classe, les autres réponses sont les plus fréquentes. Elles correspondent souvent à des élèves qui ont donné un intervalle du type $[90, 140]$ ou qui ont additionné les dimensions, ou qui ont calculé OB sans encadrer.

e) Encadrement de AC.

Il s'agissait ici d'encadrer l'hypoténuse d'un triangle rectangle, connaissant les côtés de l'angle droit. Nous n'avions pas précisé que l'encadrement devait se faire dans les décimaux ni le nombre de chiffres à conserver. Nous avons donc accepté comme réponse correcte tous les encadrements qui contenaient la bonne "fourchette". La procédure la plus rapide consistait à dire que AC est compris entre $49,5\sqrt{2}$ et $50,5\sqrt{2}$. Certains élèves l'ont fait et ont fourni cet

encadrement comme réponse, d'autres en ont déduit un encadrement de AB par des décimaux. D'autres élèves ont calculé les valeurs extrêmes disant $\sqrt{4900,5} \leq AC \leq \sqrt{5100,5}$, donnant cette réponse ou en déduisant un encadrement décimal. Un seul élève fait un mauvais arrondi à droite, nous le comptons dans les réponses justes ainsi qu'un élève qui encadre AC^2 par $(2 \times 49,5)^2$ et $(2 \times 50,5)^2$. Ces réponses, considérées comme correctes, seront codées 1.

D'autres élèves ont calculé une valeur approchée de AC à partir de 50 puis ont pris un encadrement à 0,5 près. Nous avons regroupé avec ceux-là sous le code 2, des élèves qui donnent des encadrements à partir de 70,71, valeur approchée de $50\sqrt{2}$, éventuellement plus resserrés, ou avec erreur de calcul.

Nous coderons 3 la réponse des élèves qui pensent que le triangle AOC est équilatéral et disent $49,5 \leq AC \leq 50,5$.

Les autres réponses seront codées 4, mais nous compterons dans les non réponse un élève qui dit qu'on ne peut pas calculer AC parce qu'on ne nous dit pas que l'angle AOC est droit. Les réponses sont toujours prises parmi les élèves qui ont abordé la question.

AC	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	1	8	14	1	1	25
réponse 2	3	9	11	2	0	25
réponse 3	2	1	3	2	0	8
réponse 4	2	3	1	0	0	6
non réponse *	12	7	3	12	1	35
total	20	28	32	17	2	99
Pourcentages						
réponse 1	0,05	0,29	0,44	0,06		0,25
réponse 2	0,15	0,32	0,34	0,12		0,25
réponse 3	0,10	0,04	0,09	0,12		0,08
réponse 4	0,10	0,11	0,03	0,00		0,06
non réponse	0,60	0,25	0,09	0,71		0,35

On constate que les réponses 1 et 2 sont en nombre équivalent et que les élèves des classes A et D ont presque tous sauté cette question. Les encadrements ont été très peu travaillés dans la classe A, toujours dans des situations plus simples. Les élèves de la classe D qui manquaient de temps ont choisi des exercices plus familiers.

Les réponses correctes sont, comme prévu, plus nombreuses que pour OB, ce qui est normal puisque la technique qui consiste à faire le calcul avec les valeurs extrêmes donne ici une réponse correcte et une réponse fausse (code 3) dans le cas de la soustraction.

f) Encadrement de l'aire.

On retrouve le même type de procédures qu'à la question précédente, avec en plus la difficulté de calculer l'aire dont nous ne tiendrons pas compte ici mais qui a entraîné encore plus de non réponse dans les classes A et D.

Nous considérerons comme correctes, et codées 1, les réponses $6905,25 \leq A \leq 7095,25$ mais aussi les encadrements moins précis qui résultent d'un découpage de la surface en 2 triangles, ce qui peut donner un encadrement encore plus large si on prend un découpage maladroit. Nous ne tiendrons pas compte non plus des erreurs dues aux encadrements précédents ni des erreurs de calcul, ni même de l'oubli de diviser par 2 dans les calculs d'aire, ce qui donne des encadrements autour de 14000 (c'est le cas de 3 élèves de la classe C, d'un élève de la classe D et d'un autre de la classe B qui, de plus, n'encadre qu'une des dimensions ($139,5 \times 100 \leq A \leq 140,5 \times 100$), mais que nous laissons quand même avec ce groupe.

De même nous regrouperons dans la réponse 2 les élèves qui font l'encadrement après le calcul, autour de 7000 ou de 14000, mais nous mettrons dans les autres réponses les encadrements qui correspondent à d'autres erreurs de formule, des confusions addition multiplication ou des réponses difficiles à interpréter.

Les résultats sont les suivants :

Aire	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	0	11	10	1	1	18
réponse 2	2	3	10	0	0	20
autre réponse	2	1	7	2	0	12
non réponse	16	13	5	14	1	49
total	20	28	32	17	2	99
Pourcentages						
réponse 1	0,00	0,36	0,22	0,00		0,18
réponse 2	0,10	0,14	0,41	0,06		0,20
autre réponse	0,10	0,04	0,22	0,12		0,12
non réponse	0,80	0,46	0,16	0,82		0,49

Seuls 50 élèves répondent à cette question, dont seulement 4 pour la classe A et 3 pour la classe D. Dans les classes B et C, c'est respectivement environ la moitié et les trois quarts des élèves qui répondent. Parmi les réponses exprimées, les réponses qui témoignent d'une compréhension de l'effet des opérations sur les encadrements ne sont majoritaires que dans la classe B. Dans la classe C, elles sont à égalité avec celles qui sont obtenues par le procédé qui consiste à calculer l'aire à partir des mesures approchées et à prendre un encadrement arbitraire après. C'est aussi la procédure qu'utilisent les 2 élèves de la classe A qui arrivent à calculer l'aire sans trop d'erreur.

En conclusion, les questions concernant les encadrements sont assez peu réussies, même en ne considérant que les élèves qui les ont abordées. On avoisine le tiers de réponses correctes pour les classes B et C dans le cas où on a des sommes ou produits de quantités positives (une des classes réussit mieux l'hypoténuse et l'autre l'aire). L'erreur la plus répandue dans ce cas consiste à calculer la grandeur cherchée à partir des valeurs moyennes et à faire après un encadrement à 0,5 près. Dans le cas d'une différence, le cinquième seulement des élèves réussissent dans les classes B et C : à l'erreur précédente s'ajoute celle qui consiste à soustraire les inégalités. Dans les classes A et D on a très peu de réponses correctes. Nous avons déjà signalé que les encadrements n'avaient presque pas été traités dans la classe A et nous avons vu que dans la classe D, il y avait peu d'utilisation dans des situations de modélisation. De plus les élèves de la classes D ont disposé de moins de temps et n'ont en général pas abordé les questions concernant l'aire et l'hypoténuse qui demandaient des calculs.

4. Expression algébrique de la valeur absolue.

Nous analysons ici les résultats de la question 9 :

9. Pour chacune des affirmations, entoure ce qui convient et explique ta réponse :			
◇ pour tous les nombres réels x positifs, on un $ x - 2 = x - 2$	vrai	faux	je ne sais pas
◇ pour tous les nombres réels x négatifs, on un $ 2 - x = 2 + x$	vrai	faux	je ne sais pas
◇ pour tous les nombres réels supérieurs à 2, on un $ 2 - x = x - 2$	vrai	faux	je ne sais pas

Cette question cherchait à repérer des erreurs classiques sur la définition algébrique de la valeur absolue. On pouvait attendre que beaucoup d'élèves répondent "vrai" à la première affirmation qui n'est contredite que par les nombres entre 0 et 2. La réponse "vrai" à la deuxième est une erreur classique qui consiste à dire que la valeur absolue est positive donc qu'il faut mettre $+x$ si x est négatif. La troisième affirmation était vraie mais l'écriture sous la forme $|2 - x|$ plutôt que $|x - 2|$ pouvait induire en erreur. C'est ce qui s'est passé pour beaucoup d'élèves pour qui $|2 - x|$ n'est sans doute pas équivalent à $|x - 2|$, comme en témoignent d'ailleurs les commentaires qui accompagnent les réponses.

a) Résultats.

D'abord, nous pouvons dire que très peu d'élèves donnent une réponse correcte pour les 3 questions :

les 3	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
correct FFV	1	5	6	1	0	13
2 cor. 1 jnsp	1	0	1	0	0	2

Si nous regardons une assertion à la fois, nous voyons que ce n'est pas la même assertion qui donne la meilleure réussite dans chaque classe :

% réussite	classe A	classe B	classe C	classe D	total
affirm.1	0,43	0,59	0,44	0,65	0,52
affirm.2	0,43	0,45	0,82	0,35	0,54
affirm.3	0,70	0,38	0,24	0,65	0,44

La 1ère affirmation est la mieux réussie des 3, bien que peu nettement, dans la classe B, à égalité avec la 3ème dans la classe D ; c'est la 2ème assertion qui a, de loin, le meilleur taux de réponses correctes dans la classe C, et la 3ème affirmation est la mieux réussie dans la classe A, à égalité avec la 1ère pour la classe D mais c'est la moins bien réussie dans la classe B et dans la C où les écarts sont d'ailleurs les plus grands. La troisième question est aussi celle pour laquelle la réponse des étudiants est le plus souvent "Je ne sais pas", en particulier dans la classe C (22 : 3 + 5 + 10 + 4).

Les réponses détaillées par question sont données en annexe

Remarquons de plus qu'ici, nous n'avons tenu compte que des réponses et non des justifications alors que certains élèves donnent de mauvaises justifications à des réponses justes, nous les comptabilisons cependant avec les autres puisque d'autres élèves ne donnent aucune justification. Les mauvaises raisons ne devraient pas permettre de fournir des réponses justes à toutes les questions. Voyons donc ce que donne l'examen du nombre de réponses justes à l'ensemble des questions.

Ensemble	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse FFV	1	5	6	1	0	13
2 Corrects, 1JSP	1	0	1	0	0	2
réponse FFF	0	1	6	1	0	8
réponse FVV	5	2	1	8	0	16
réponse VFV	8	4	1	3	0	16
total 2 rép.justes	13	7	8	12	0	40
1er Correct	3	9	1	3	1	17
2ème Correct	1	3	14	2	0	20
3ème Correct	1	0	0	1	0	2
total 1 rep.juste	5	12	15	6	1	39
réponse VVF	2	5	2	0	1	10
autre réponse	1	0	2	1	0	4
non réponse	1	0	1	2	0	4
total	24	29	35	22	2	112

Les réponses entièrement correctes ne sont qu'au nombre de 13. Il y a certes 55 élèves qui fournissent au moins deux réponses justes mais il est à craindre qu'en tenant compte des explications, nous découvrions que cela ne recouvre pas la compréhension de la valeur absolue, surtout pour ceux qui déclarent vraie la seconde affirmation. Ils sont les plus nombreux dans les classes A et D. Il est à noter également que, pour les élèves qui répondent correctement à 2 questions, la 3ème est presque toujours correcte pour les classe A, B, D qui ont eu la présentation par les distances et presque jamais pour la classe C. Ce sont les élèves de la classe D, et dans une moindre mesure A, qui se trompent le plus souvent pour la deuxième affirmation et ceux de la classe A qui se trompent le plus pour la 1ère question. Pour ceux qui ont une seule

réponse correcte, nous retrouvons le fait que la classe C a le plus d'élèves qui ne répondent juste qu'à la deuxième affirmation, et la classe B pour la première. On n'a presque jamais des réponses justes à la 3ème seule : rappelons que c'est celle qui inspire le plus de doute.

Ces résultats ne sont pas étonnants a priori : on pourrait penser que la présentation algébrique amène à rencontrer l'erreur correspondant à l'assertion 2 au cours de l'apprentissage, ce qui amène une institutionnalisation forte sur ce point, alors que la présentation par la distance amène à attirer l'attention sur le 2 qui est à l'intérieur de la valeur absolue pour séparer les deux déterminations. Mais, dans la classe C, 11 élèves donnent une réponse juste au b en pensant que, dans ce cas, $|2-x| = -2+x$: l'un d'eux explique que $|2-x| = -(2-x)$ si $x < 0$. Le grand nombre de réponses correctes au b) dans la classe C s'explique donc par une erreur.

Il faut donc analyser les explications fournies pour tirer des conclusions plus précises.

b) Analyse des explications fournies.

Il y a peu d'explications, surtout pour la dernière affirmation.

** Pour la première affirmation, sur 49 explications fournies (dont 36 pour des réponses justes),*

- 19 élèves fournissent une réponse juste avec une explication pertinente :

12 donnent le contreexemple $x = 1$ (A7, A10, B4, B19, B26, B28, B32, C2, C11, C21, C24, C26), les autres disent qu'il faudrait $x > 2$ ou que ça peut être $2 - x$ si $x < 2$ ou redonnent la définition avec le bon partage (A20, B27, C3, C13, D6, D15, D24).

- 7 élèves donnent une réponse juste avec des explications non fausses mais non pertinentes : "une valeur absolue est positive" (B25, C19, C25), " $| -2 | = 2$ et il n'est pas indiqué que $x > 2$ " (A1), "la valeur absolue d'un nombre négatif doit ensuite être positif" (A22), " $|x-2|$ peut être égal à $-x+2$ et x être négatif" (C10), "c'est le plus grand nombre qui est placé en premier" (D9).

- 10 élèves donnent une réponse juste avec une explication fautive dont 6 répondent "car $|x-2| = x+2$ " (A8, A24, B11, B24, B30, C33), "car x est aussi ≤ 0 " (D3), "si $x < 2$ la V.A. est négative et une V.A. n'est jamais négative" (A9), "un nombre positif devant un signe - donne -" (D21)

- 3 élèves donnent une explication pertinente mais une réponse fautive parce qu'ils n'ont pas tenu compte de "x positif" : "vrai car $|x-2| = x - 2$ si $x \geq 2$ " (A26), "si $x \geq 2$ " (C6), "c'est le plus grand moins le plus petit" (D22),

- 10 élèves donnent une réponse fautive avec une explication fautive ou non pertinente : " $|x-2| = x-2$ quand $x \geq -2$ " (A16), " $|x| = x$ " (B10, B20, C23), "par exemple $| -2 | = -2$ " (B13), "la V.A. enlève le signe -" (B35 qui prend pour exemple $x = 3$), " $|x-2| = x-2$ si $x > 0$ " (C4), "on ne peut pas avoir $-x+2$ car x positif" (C18), "la V.A. d'un nombre est positive" (C23), "quand une V.A. est positif, on ne change rien mais on enlève le symbole" (C35)

** Pour la deuxième affirmation, sur 43 explications (dont 29 avec des réponses justes)*

- 9 élèves fournissent une réponse juste avec une explication pertinente : 5 fournissent un contreexemple (-1 pour B4, B32, C21, C26, -4 pour B19), les autres disent que $|2-x| = 2-x$ quand $2 \geq x$ (A16, A26, D12) ou que " $|2-x| = -2+x$ ou $2-x$ " (C24),

- 2 déclarent qu'une V.A. est toujours positive (C9, C19),

- 18 donnent une réponse juste avec une explication fautive, dont 11 disent que $|2-x| = -2+x$ (C3, C4, C8, C11, C12, C14, C15, C18, C22, C30, C31), 2 disent $|2-x| = -2-x$ (C13, C33), C2 prend 1 pour contreexemple, C6 déclare "si $x+2 \leq 0$ ", B10 et B20 disent " $|x| = x$ ",

- 14 tentent de justifier la réponse "vrai" dont 3 élèves (D6, D15 et D24) ont fourni des justifications correctes pour les deux autres affirmations, ils répondent ici : "2 est alors $> x$ et on soustrait toujours au nombre le plus grand le nombre le plus petit" (D6), " $d(2,x)$, vrai car $2 \geq x$ négatif" (D15), "oui car le plus grand moins le plus petit $2-(-x) = 2+x$ " (D24). Les autres explications vont dans le même sens : "on fait la différence du plus grand nombre et du plus petit donc le signe est +" (A9), "car $x < 0$ et - par - donne +" (A10), " $| -x | = x$ " (B13), "2 signes - à la suite se transforment en +" (B35), "quand une V.A. est négatif on écrit l'opposé (C35), "un nombre négatif devant un signe - donne +" (D21), ou sont non pertinentes : "une V.A. est toujours positive" (A22, B11, C25, D4), sauf " $|2-x|$ avec x négatif = $x-2$ " (D30).

** Pour la troisième affirmation, sur 17 explications (dont 8 avec des réponses justes)*

- 4 ont des réponses correctes et des explications pertinentes : "différence entre le plus grand et le plus petit" (A9, D6), "car $x \geq 2$ " (D15, D24)

- 2 prennent un exemple ($x = 3$) (A10, A16),

- 2 ont une réponse juste et une explication fausse : "on additionne le plus grand au plus petit" (D21), C26 prend pour exemple $x = 2$ mais écrit $|2-2| = 2$ et $2-2 = 2$,
 - 9 ont des réponses et des justifications fausses : " $|2-x| = 2+x$ " (A8, D9), " $|2-x| = 2-x$ si $x > 2$ " (C10, C13, C33, D30), " $|2-x| \geq 2$ " (A24), "ou $2-x$ " (C3), "la valeur absolue enlève le signe - : si $x = 3$ $|2-3| = 1$ et $2-3 = -1$ " (B35).

On peut voir que les explications fournies montrent bien les difficultés avec les nombres négatifs, notamment la difficulté à penser $-x$ positif. On retrouve ici des explications tout à fait conformes aux résultats de la thèse de Tchoubou (1996).

c) Comparaison avec Chiarugi et al. pour la définition algébrique de $|x|$

* Nous pouvons comparer notre question 9a "pour tous les nombres réels positifs, nous avons $|x-2| = x-2$ vrai, faux, je ne sais pas" avec la question 6 de Chiarugi et al. "est-il vrai que $|x-1| = x-1$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $x > 0$?"

Chiarugi 14 ans : 25%, 17 ans : 57%, 19 ans : 69 %

notre 9a : 52% (A : 43%, B : 59%, C : 44%, D : 65%)

Nos résultats sont voisins de ceux de Chiarugi à 17 ans, ce qui est assez positif, compte tenu du fait que les élèves français voient la valeur absolue pour la première fois.

* Nous comparons aussi nos questions

9b "pour tous les nombres réels négatifs, on a $|2-x| = 2+x$ vrai, faux, je ne sais pas" et

9c "pour tous les nombres réels plus grands que 2, on a $|2-x| = x-2$ vrai, faux, je ne sais pas"

avec la question 7 de Chiarugi et al. "est-il vrai que $|1-x| = 1+x$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $x > 1$?"

même si ce n'est pas exactement la même : nous pouvons attendre que notre question 9b soit plus difficile que la question 7 de Chiarugi parce que $x < 0$ donne la tentation de changer x en $-x$, et notre 9c devrait être équivalent.

En fait, cela semble vrai dans les classes A et D mais pas dans les classes B et C :

Chiarugi 14 ans : 54%, 17 ans : 72%, 19 ans : 69 %

notre 9b : 54% (A : 43%, B : 45%, C : 82%, D : 35%)

notre 9c : 44% (A : 70%, B : 38%, C : 24%, D : 65%)

Pour expliquer les différences en 9b, il nous faut rappeler que les explications fournies par les élèves montrent que la réussite de la classe C à la question 9b cache souvent l'erreur $|2-x| = -2+x$ si $x < 0$. La mauvaise réussite des élèves des classes B et C à la question 9c est difficile à expliquer car les élèves n'ont fourni que très peu d'explications pour cette question. Il est probable que $|2-x|$ n'est pas équivalent à $|x-2|$ pour beaucoup d'élèves, surtout dans la classe C où les élèves ne font pas le lien avec la distance.

En conclusion, le très faible pourcentage de réussite aux trois items et le petit nombre d'explications correctes montre que l'expression algébrique de la valeur absolue est loin d'être acquise, même dans la classe C où c'est ce mode de présentation qui a été choisi. Pour la deuxième affirmation les bons résultats de la classe C s'expliquent par une erreur, on a un peu plus d'explications correctes dans le cas d'une affirmation fausse où un contreexemple très simple est disponible. Les explications manquent surtout pour justifier une affirmation vraie, comme la troisième. Des différences entre les classes se manifestent au niveau des erreurs, notamment le fait que les élèves qui ont eu une présentation algébrique réussissent plus mal la troisième question : on peut penser que $|2-x|$ n'est pas traité comme $|x-2|$. D'ailleurs cette question qui traduit la définition mais avec une écriture inhabituelle, entraîne le plus de réponses "je ne sais pas". C'est curieusement dans les classes les plus faibles (A puis D) qu'elle est le mieux réussie, peut-être est-ce dû au fait que c'est la représentation la plus élémentaire de la valeur absolue comme distance qui était la plus pertinente ici : "le plus grand moins le plus petit". Les autres différences sont plus difficiles à interpréter.

5. Représentation graphique.

Seuls les élèves de la classe C qui disposaient de 20 minutes de plus ont tous abordé la question. Les élèves des classes A qui ont eu à peine 50 minutes et surtout D, à peine 45 minutes, ont particulièrement manqué de temps et beaucoup ne sont pas arrivés à cette question.

C'est pourquoi nous compterons les pourcentages sur le nombre d'élèves qui ont abordé la question.

Nous avons compté avec les réponses correctes des élèves qui ont fait correctement 2 représentations graphiques (f et h pour B25, C20, C32, f et g pour A14, B17, B19, B32, C22) ou même seulement f pour C26, en pensant que les premiers n'ont pas tracé $|x|$ qui ne servait pas pour les résolutions suivantes et que les derniers n'ont pas eu assez de temps. Cette hypothèse est peut-être abusive puisque certains élèves ont représenté correctement 2 fonctions et fait une erreur sur la 3ème (voir réponse 6) mais elle semble raisonnable au vu de la plupart de ces copies.

Nous distinguerons donc :

réponse 1 : pas d'erreur,

réponse 2 : correct mais partiel (restreint à $x > 0$ pour C7, D25, à $x > a$ pour C9 et C19, à $x < a$ pour DX)

réponse 3 : problème de pente : c'est le cas de 2 élèves : C3 qui représente $|3x|$ pour $|x-3|$ et correctement $|x|$ et $|x+2|$ et D22 qui représente $|0,5x+1|$ pour $|x+2|$, correctement $|x|$ mais ne représente pas $|x-3|$

réponse 4 : décalage vertical, avec de plus dans un cas (C1) une restriction à $x > 0$, et dans le cas de D11 et D23 un double décalage (sommet en (2,4) pour f dans les 2 cas, en (-3,-9) pour h chez D11, non réponse pour h chez D23),

réponse 5 : toutes les représentations sont des droites (équations variées)

réponse 6 : réponses mixtes : certaines représentations correctes, les autres avec une des erreurs précédentes sauf réponses 3 qui sont aussi des réponses mixtes mais non comptées ici. Nous trouvons pour la réponse 6 :

B3 et B33 représentent correctement $|x+2|$ et $|x-3|$ mais tracent $x=1$ pour $|x|$,

D7 et D15 tracent correctement $|x|$ et $|x-3|$ mais font un décalage vertical ($|x|+2$) pour f,

B27 trace correctement les mêmes mais fait la droite $x+2$ pour f,

C30 trace correctement $|x+2|$ et $|x|$ et fait $|x|-3$ pour h,

A27 trace correctement $|x-3|$, fait un décalage vertical pour f et trace $y = 1$ pour $|x|$,

B6 trace correctement $|x+2|$ mais trace $y = x$ pour $|x|$ et ne trace pas h,

B31 trace correctement $|x|$ mais $y = 2$ et $y = 3$ pour les autres .

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Graphiques	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	8	17	28	4	1	58
réponse 2	0	0	3	2	0	5
réponse 3	0	0	1	1	0	2
réponse 4	5	3	1	2	0	11
réponse 5	3	0	1	3	1	8
réponse 6	1	5	1	2	0	9
total réponses	17	25	35	14	2	93
% réponse 1	0,47	0,68	0,80	0,29		0,62
correct pour $ x $	13	22	30	9	1	75
% correct pour $ x $	54	76	86	41		70
non réponse	7	4	0	8	0	19

Les résultats sont meilleurs dans la classe C qui a disposé de plus de temps et pour laquelle l'enjeu était plus important. Ils sont bons aussi dans la classe B où l'on rencontre par ailleurs le plus de réponses mixtes, avec une ou deux représentations justes. Les résultats pour $|x|$ sont un peu meilleurs que ceux d'EVAPM (60%) mais c'est dû aux classes B et C qui ont des résultats bien meilleurs alors que ceux des classes A et D sont moins bons mais rappelons que le temps a manqué dans ces classes (surtout D) comme le montre le nombre important de non réponse. Rappelons que les classes B et C sont aussi celles qui ont les meilleurs résultats au test d'évaluation nationale de début d'année.

L'erreur la plus fréquente consiste à faire un décalage vertical, c'est-à-dire à représenter par exemple $|x|+3$ au lieu de $|x-3|$ (11,8% des élèves sont dans ce cas, c'est l'erreur dominante dans

la classe A). L'autre erreur fréquente consiste à tracer des droites (présentes dans toutes les classes sauf la classe B).

Cependant ces résultats doivent être modérés par le fait que beaucoup d'élèves (mais pas tous) disposent d'une calculatrice graphique et ont pu s'en servir pour tracer les courbes même si je leur ai demandé de ne pas le faire.

6. Résolution d'équations et d'inéquations

Cette question étant la dernière, beaucoup d'élèves ne l'ont pas abordée, surtout dans les classes A (9) et B (11). Dans la classe D, qui a eu le moins de temps, beaucoup d'élèves l'ont commencée, en la préférant parfois au tracé des représentations graphiques ou aux encadrements de AC ou de l'aire du cerf volant.

Les élèves "autres" n'ont pas abordé la question. Les effectifs maximum pour chaque équation ou inéquation sont donc 15 pour la classe A, 18 pour la classe B, 33 pour la classe C, 20 pour la classe D. Cependant, nous ne considérerons pas ici les non réponses comme des échecs et nous calculerons pour chaque question les réussites sur les réponses effectives.

Seules les trois premières questions pouvaient être traitées facilement par tous les élèves et les deux dernières questions n'étaient pas vraiment au programme de seconde, l'une ($|x-3| = 2x$) était adaptée à un traitement algébrique ou graphique, l'autre ($|x-3|+|x-2| = 1$) à un traitement par les distances.

6.1. $|x-3| = 1,4$ et $|x-3| = \sqrt{2}$

En rapprochant ces deux questions, nous voulions voir si les élèves remplaceraient $\sqrt{2}$ par une valeur approchée ou si la présence de la racine carrée entraînait davantage d'erreurs algébriques. Nous attendions certaines erreurs comme celle qui consiste à enlever les valeurs absolues sans autre forme de procès et amène à trouver une seule solution.

Dans le tableau ci-dessous, on trouvera un classement des réponses des élèves. Les réponses par lecture graphique sont aussi des réponses correctes, mais éventuellement approchées (1,5 au lieu de 1,6 par exemple). Les erreurs de calcul sont essentiellement numériques dans le cas de 1,4 (exemple $3 - 1,4 = 2,4$ ou $3 - 1,4 = -1,6$) et des erreurs de signe dans le cas de $\sqrt{2}$ (par exemple $-x = \sqrt{2}-3$, $x = \sqrt{2} + 3$ ou donner comme solution $\sqrt{2}-3$ ou $x-3 = \sqrt{2}$ donc $x = -3+\sqrt{2}$). "Inégalités" concerne des élèves qui résolvent une inégalité au lieu d'une égalité ou répondent un segment après avoir résolu l'équation. Les élèves de toutes ces catégories ont donc employé une méthode de résolution correcte en ce qui concerne le traitement de la valeur absolue, c'est pourquoi nous les avons compté pour calculer le pourcentage d'élèves utilisant une méthode correcte. Nous avons compté comme correctes les réponses d'un élève (C2) qui formule sa réponse finale " $|x| = \dots$ " au lieu de " $x = \dots$ " à toutes les questions. En revanche, nous avons compté dans "autres réponses", celles de C4 : "si $x > 0$, $x-3 = 1,4$ $x = 3,4$; si $x < 0$, $-x+3 = 1,4$ $x = 1,6$ " et "si $x > 0$, $x-3 = \sqrt{2}$ " puis arrêt. Il fait la même chose au c).

$ x-3 = 1,4$	classe A	classe B	classe C	classe D	total
effectif	15	18	33	18	84
réponse correcte	6	5	21	10	42
lecture graphique	0	0	2	2	4
erreur de calcul	1	3	4	2	9
inégalités	0	1	0	1	2
une seule solution	4	3	3	1	11
erreur CR	2	2	0	0	5
autres erreurs	2	4	3	2	11
% méthode correcte	47	50	82	83	68
$ x-3 = \sqrt{2}$	classe A	classe B	classe C	classe D	total
effectif	14	13	32	16	75
réponse correcte	4	4	16	10	34
lecture graphique	0	0	1	0	1

err. calcul (signe)	1	2	4	0	7
inégalités	0	0	1	0	1
approximations	1	1	0	0	2
idem 1,4 (correct)	0	0	2	2	4
idem 1,4 (incorrect)	2	0	2	0	4
une seule solution	3	3	2	1	9
erreur CR	0	1	0	0	1
autres erreurs	3	2	4	3	12
% méthode correcte	43	54	75	75	65
méthode corr. pour les 2	6	6	23	12	43

Les différences entre les deux exercices ne sont finalement pas très grandes et 10 élèves utilisent des approximations à une ou deux décimales. On trouve peu d'autres erreurs spécifiques à $\sqrt{2}$ sauf A26 qui transforme $|x-3| = \sqrt{2}$ en $x-3 = 2$. Cependant des erreurs algébriques apparaissent dans ce cas pour des élèves qui ne faisaient pas la même erreur pour 1,4 :

B3 fait " $x+3 = 14$, $x = 11$ " dans un cas et " $x+3 = \sqrt{2}$, $x = -3\sqrt{2}$ " dans l'autre.

B25 qui avait fait une erreur CR pour 1,4 (avec dessin), répond $3\sqrt{2}$ ou $-3\sqrt{2}$ pour $\sqrt{2}$.

C1 répond respectivement " $x+3 = 1,4$, $x = -1,6$ " et " $x+3 = \sqrt{2}$, $x = -3\sqrt{2}$ ".

Dans le tableau, nous avons regroupé les élèves donnant une seule solution. Cela peut être parce qu'ils remplacent $|x-a|$ par $x-a$ ou par $x+a$ ou parce qu'ils ne regardent qu'une branche du graphique.

Par erreur CR, nous entendons une interversion du centre et du rayon quand les élèves passent par l'intervalle de la droite numérique dessiné. Les autres erreurs concernent essentiellement des règles erronées pour enlever les barres de valeur absolue, employées parfois très régulièrement. Ainsi, plusieurs élèves remplacent $|x-a|$ et $|x+a|$ par $x+a$ (où $a > 0$), ce qui les amènent à trouver une seule solution, d'autres remplacent $|x-a| = r$ par $x-a = r$ ou $x+a = r$, comme D23 qui le fait partout sauf à la question e), ils trouvent alors deux solutions qui sont les mêmes que celles qu'on obtient en intervertissant le centre et le rayon. Cette même difficulté à distinguer centre et rayon ou a et r se retrouve dans la classe C dans l'utilisation du tableau : des élèves mettent r comme ligne de partage des x pour résoudre $|x-a| = r$. Ils résolvent correctement les équations mais peuvent mal conclure en excluant des valeurs qui, pour eux, ne sont pas dans le bon intervalle, comme C13 et C33:

a) $|x-3| = 1,4$
 $S\{4,4\}$

b) $|x-3| = \sqrt{2}$
 $S\{\sqrt{2}+3\}$

c) $|7x-11| = -1$ impossible

d) $|3x+4| \leq 5$
 $x \in [-3; 5]$

e) $|x-3| = |x+2|$

Une autre règle de traitement erronée consiste à remplacer $|ax+b| = r$ par $ax+b = r$ ou $-ax+b = r$, ce qui amène à trouver deux solutions opposées. L'élève B12 l'utilise pour les questions c) et d) alors qu'il traite correctement a) et b) par le dessin de la droite. On ne la trouve pas si $a = 1$.

Un élève (D25) remplace $|x-a| = r$ par $|x| = r+a$, ce qui devrait l'amener au même résultat, mais, en fait il conclut $x = r+a$, $-x = -(r+a)$ pour chaque question.

On retrouve également les erreurs répertoriées pour les intervalles : prendre 1,4 et 3 comme bornes, mais beaucoup plus rarement : ainsi seul A20 répond $[1,4 ; 3]$ et $[\sqrt{2} ; 3]$ avec une représentation sur la droite. Il fait une erreur de ce type à toutes les questions. B14 place 1,4 et 3 sur la droite et marque x devant -1,4 (il ne fait rien pour $\sqrt{2}$)

On trouve aussi des erreurs de calcul algébrique dans la résolution des équations du premier degré, qui sont le plus souvent cumulées avec des erreurs concernant la valeur absolue. Ainsi

A13 : " $3 - x = 1,4$ $-x = \frac{1,4}{3} = -0,08$ ou $x =$ " Même chose pour $\sqrt{2}$ où elle semble cependant envisager les deux cas puisqu'elle écrit aussi $x - 3 = \sqrt{2}$ mais ne termine pas.

B33 cumule les erreurs sur la V.A., le calcul algébrique et les décimaux : " $x+3 = 1,4$, $x = 1,4+3$, $x = 1,7$ ".

Reste le cas de D11 qui répond "une valeur absolue est toujours positive" alors qu'il répond

" $-\frac{2}{7} \leq x \leq 0$ " à la question suivante. A-t-il mal vu en copiant sur son voisin ?

Comme prévu, les résultats sont meilleurs dans les classes C et D, qui ont eu un traitement plus algébrique. Il semble que beaucoup d'élèves ne reconnaissant pas l'activité de traduction des intervalles quand on leur demande de résoudre une équation ou une inéquation. Le terme "résoudre" appelant pour eux un traitement algébrique, ils utilisent les règles de résolution des équations du premier degré en se débarrassant de la valeur absolue d'une manière ou d'une autre. Nous comparerons dans le paragraphe 4 les résultats de l'activité de conversion des contrôles avec cette résolution pour les classes A, B, D.

6.2. $|7x-1| = -1$.

Cette question était bien sûr destinée à vérifier si les élèves utilisaient le fait qu'une valeur absolue est positive. Certains l'ont dit sans calcul, d'autres, dans la classe C, après une résolution par tableau (C32). Nous avons compté toutes ces réponses comme correctes.

Beaucoup d'élèves des classes A et B ont cessé de répondre à partir de cette question alors que 2 élèves de la classe D n'ont répondu qu'à cette question (et à e) pour D5 qui pensait que c'était aussi impossible). Les effectifs sont donc réduits pour les classes A et B (9 et 11).

Nous distinguerons les élèves qui trouvent 2 solutions en résolvant algébriquement. Ces solutions peuvent être 0 et $\frac{2}{7}$ ou 0 et $-\frac{2}{7}$ ou même 0 et 0 suivant les règles utilisées pour la V.A.

Certains élèves (C12, C29) trouvent encore d'autres solutions comme $\frac{7}{2}$ pour $7x = 2$ ou s'arrêtent à $7x = 0$, $7x = 2$ (A12 qui a trouvé les équations en s'écartant sur la droite d'une distance 1 à partir de 1). Un autre élève que nous avons rangé dans cette catégorie (A1) ne résout pas $7x = 0$ et répond $S = \{\frac{2}{7}\}$. D11 traduit en $-2 \leq 7x \leq 0$ et trouve $-\frac{2}{7} \leq x \leq 0$.

Les élèves qui trouvent une seule solution utilisent une règle erronée pour la V.A., le plus souvent $7x-1 = -1$ qui donne $x = 0$ (A26 trouve alors $x = 7$ et B3 $x = -7$), ou $7x+1 = -1$ qui donne $x = -\frac{2}{7}$ (B33, C1, D9). Signalons aussi C20 qui dit " $x < 0$ puisque le résultat est négatif",

transforme $|7x-1|$ en $-7x+1$ et conclut " $x = \frac{2}{7}$ " ; il fait ensuite un tableau et sous l'équation $7x =$

0 écrit " $x = -7$, $S = \emptyset$ ".

Un élève relève de l'erreur CR, c'est A6 qui fait un dessin en s'écartant de 1 à partir de -1 et répond 0, -2, sans s'occuper du 7, adaptation du traitement par la distance.

Les autres erreurs sont les suivantes :

A9 répond $\frac{6}{7}$ $\frac{8}{7}$ avec un dessin où il indique 1 au centre, on retrouve une des adaptations que nous avons notée C (rayon adapté mais pas le centre) du traitement par la distance.

A20 répond $[-1, \frac{1}{7}]$, c'est l'erreur qui consiste à prendre pour borne d'un intervalle son centre et son rayon (ici négatif d'ailleurs !)

C26 répond "cela signifie $7x-1 = -1$ ou $7x-1 = 1$ " puis " $x = \emptyset$ ou $x = \emptyset$, S n'a pas de solution"

$ 7x-1 = -1$	classe A	classe B	classe C	classe D	total
effectif	9	11	33	18	71
réponse correcte	0	4	21	13	38
2 solutions	5	3	7	3	18
erreur CR	1	0	0	0	1
1 solution	2	4	4	2	12
autre	2	0	1	0	3
% réponse correcte	0	36	64	72	54

C'est la classe D qui a les meilleurs résultats sur cette question, suivie par la classe C. Les élèves des classes A et B qui répondent tentent très majoritairement un traitement algébrique (7/9 et 7/11). Il semble là encore que la distance soit peu réinvestie pour traiter ces questions. N'oublions pas cependant que la majorité des élèves de ces classes n'ont pas abordé la question.

6.3. $|3x+4| \leq 5$.

Sur cette question, les élèves des classes A et B sont désavantagés puisqu'aucune méthode n'a été institutionnalisée dans ce cas, et même dans la classe A, aucun exercice de ce type n'a été traité. D'ailleurs seuls 5 élèves de la classe A répondent (de manière erronée) et 12 de la classe B (dont 1 seul correctement). Les élèves de ces deux classes font très majoritairement des erreurs liées au traitement de la valeur absolue alors que ce n'est le cas que de moins d'un tiers des élèves de la classe D et moins de 10% dans la classe C : dans ces deux classes, les élèves disposent de techniques pour traiter ce type d'exercices. Dans la classe C, c'est la méthode du tableau qui a été institutionnalisée le plus nettement et le professeur a encouragé plutôt à traiter les inégalités séparément tandis que dans la classe D, seule l'a été la méthode de la double inégalité : $-5 \leq 3x+4 \leq 5$. Ce sont en effet les méthodes qu'utilisent les élèves. Mais beaucoup d'élèves de la classe C qui utilisent le tableau ou traitent les deux inégalités séparément éprouvent des difficultés à conclure. Ce sont les élèves qui utilisent la double inégalité qui réussissent le plus souvent, ce qui explique la meilleure réussite de la classe D. En effet, parmi les 16 élèves qui réussissent, 12 le font par la double inégalité (C4, C10, C17, C29, D3, D4, D6, D7, D14, D22, D24, D26), 3 par un traitement séparé des deux inégalités (B18, C11, C14) et 1 par le tableau (C28). Cela s'explique facilement puisque dans la double inégalité, les élèves n'ont pas à gérer le "et" et le "ou" alors que la gestion logique reste à leur charge dans les autres méthodes. Evidemment, les problèmes ressurgiraient dans le traitement de $|3x+4| \geq 5$.

$ 3x+4 \leq 5$	classe A	classe B	classe C	classe D	total
effectif	5	12	31	16	64
réponse correcte	0	1	7	8	16
probl. de conclusion	0	0	8	1	9
traite une égalité			1	1	2
erreur de V.A.	3	9	3	5	20
erreur d'inégalité	0	0	5	0	5
erreur calcul algèbr.	0	0	4	1	5
erreur CR	1	0	0	0	1
erreur de tableau			2		2
autre erreur	1	2	1	0	4
% réponse correcte	0	8	23	50	25
% erreur V.A.	60	75	10	31	31

Parmi les élèves faisant une erreur de valeur absolue, certains font aussi une erreur sur le traitement des inégalités (multiplication par un négatif) ou une erreur de calcul algébrique (changement de signe en changeant de membre pour une addition). En revanche, les erreurs répertoriées calcul algébrique ou inégalités ne concernent pas le traitement de la valeur absolue (les inéquations ou le tableau ont été bien posés), mais les élèves peuvent avoir des problèmes de conclusion comme C25 qui fait un tableau, fait une erreur de signe dans le traitement de l'inégalité de la partie négative, trouve donc $x \leq -3$ et entoure ses deux résultats : faut-il comprendre " $x \leq -3$ ou $x \leq \frac{1}{3}$ " ou " $x \leq -3$ et $x \leq \frac{1}{3}$ " ?

La description des erreurs se trouve dans l'annexe 5.

6.4. $|x-3| = |x+2|$ et $|x-3| \leq |x+2|$

Ces questions sont a priori plus faciles à traiter en termes de distance. Malheureusement très peu d'élèves des classes A et B les ont abordées, les effectifs chutent aussi dans les autres classes : respectivement 5 et 3 pour la classe A, 10 et 7 pour la classe B dont 6 ont traité les deux ; 19 et 12 pour la classe C ; 14 et 8 pour la classe D.

Pour l'égalité, on trouve 20 réponses correctes dont 4 par le graphique (A15, B25, C24, D4), 1 qui combine graphique pour choisir les bonnes équations et résolution algébrique (C28), 2 par la distance sur la droite (B5 et B13), 3 par le tableau (C6, C11, C25), 7 par une résolution algébrique des deux équations (C7, C5, D3, D7, D22, D23, D26) même si la conclusion n'est pas toujours clairement donnée dans ce dernier cas. D24 qui résout les deux équations, trouve $x-x = 5$ et écrit un 0 par-dessus le 5 mais ne conclut pas ; D6 pose les deux équations sans résoudre, nous les comptons comme "problèmes de conclusion". B18 et B21 répondent correctement sans explication. Pour B18, c'est clairement une résolution graphique (traces sur le graphique), pour B21, c'est plus probablement une résolution mentale à partir de la distance parce qu'il n'a pas fait de graphique.

$ x-3 = x+2 $	classe A	classe B	classe C	classe D	total
effectif	5	10	20	14	49
réponse correcte	1	5	8	6	20
probl. de conclusion				2	2
erreur de V.A. 2 cas			1	2	3
erreur de V.A. 1 cas	1	4	4	1	10
erreur calcul algèbr.	1			1	2
erreur logique			2		2
autre erreur	2	1	5	2	10
% réponse correcte		50	40	43	41
% erreur V.A.		40	25	21	27

Pour l'inégalité, qui est la question la moins traitée de toutes, on a 4 réponses correctes dont 3 par le graphique (A15, C34, D4) plus sans doute B18 qui ne donne pas d'explication. Deux autres élèves fournissent la bonne réponse mais avec des explications douteuses : C19 par une résolution algébrique mais il n'a envisagé que 2 cas : $x-3 \leq x+2$ (qui est valable si $x \geq 3$) et $x-3 \geq -x-2$ (qui est équivalent à $3-x \leq x+2$ pour le cas $-2 \leq x \leq 3$), cette réponse peut donc être difficilement considérée comme correcte. C6 fait un tableau mais écrit $\emptyset$ aussi bien dans la case $x \leq -2$ que dans la case $x \geq 3$, il écrit $x \geq \frac{1}{2}$ dans la case du milieu et conclut $x \geq \frac{1}{2}$.

Pour l'inégalité, nous avons :

$ x-3 \leq x+2 $	classe A	classe B	classe C	classe D	total
effectif	3	7	12	8	30
réponse correcte	1	1	1	1	4
probl. de conclusion		1	1		2

double inég. et arrêt				3	3
erreur de V.A. 1 cas	1	1	1		3
erreur d'inégalité			1		1
"impossible"			2	1	3
erreur logique			3		3
autre erreur	1	4	3	3	11

Pour l'égalité les problèmes de conclusion concernent les deux élèves (D6 et D24) qui n'ont pas terminé la résolution algébrique, pour l'inégalité, il s'agit de B13 qui résout par un dessin et conclut $\{0,5\}$ comme pour le e), et de C7 qui résout l'égalité algébriquement et répond directement $x \leq \frac{1}{2}$ pour l'inégalité (sans doute en reportant le signe $\leq$ de la question).

La description des autres erreurs se trouve en annexe 5.

6.5. $|x-3| = 2x$

Cette question est à la limite du programme de seconde. Elle pourrait être traitée graphiquement et notre objectif était de voir si les élèves recourraient d'eux-mêmes à cette méthode, la représentation graphique de $|x-3|$ ayant été demandée à la question précédente.

Pour cette question, nous avons 3 réponses dans la classe A, 7 dans la classe B, 20 dans la classe C et 11 dans la classe D. Nous trouvons seulement 4 réponses correctes, 2 par lecture graphique (A15, D4), 2 par le tableau (C20, C25).

La réponse la plus fréquente (réponse 2) est celle qui consiste à dire $x-3 = 2x$ ou $3-x = 2x$, ce qui amène à trouver $x = -3$ ou $x = 1$: C3, C5, C8, C12, C13 (avec tableau), C14, C19, C30, D3, D7, D15, D20, D22. C21 ne termine pas le calcul. C33 conclut $[-3,1]$. D'autres élèves font la même chose avec une erreur de calcul, ce qui donne des résultats variés : B18, C2, C7, C9,

C23, D23, D24. D6 part aussi de $x-3 = 2x$ ou $x-3 = -2x$, en tire $\frac{x-3}{2} = x$ ou $\frac{x-3}{-2} = x$ et s'arrête.

Ces 23 élèves résolvent donc algébriquement sans tenir compte du fait qu'une valeur absolue est positive même s'ils l'ont utilisé au c).

D'autres élèves font des erreurs sur la valeur absolue, soit en trouvant 2 cas : B5 ($x-3 = 2x$ ou $x+3 = 2x$), B12 ($x-3 = 2x$ ou $-x-3 = -2x$), sans tenir compte des conditions, soit en trouvant une seule solution

- à partir de $x-3 = 2x$ ($x = -3$) : B9, B31, C11, C23, D9 et A26 qui fait en plus une erreur de calcul algébrique et trouve $x = 1$

- à partir de $x+3 = 2x$: B3 et B33 qui fait de plus une erreur de signe et trouve -3.

Les autres erreurs sont :

A6 dessine la droite, place $2x$ en -1, trace une accolade de longueur 3 jusqu'à 1, écrit dessous $x-3 = 2x$ et répond 1,

C15 qui passe encore au carré " $x-3 = 2x$ d'où $-3 = 2x^2$ " et arrive à $x = \sqrt{\frac{-3}{2}}$

C34 résout graphiquement en fait $|x-3| = 2$

D25 écrit $|x| = -3+2x$, $|x|-2x = -3$ et s'arrête.

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

$ x-3 = 2x$	classe A	classe B	classe C	classe D	total
effectif	3	7	20	11	41
réponse correcte	1	0	2	1	4
réponse 2	0	0	9	5	14
rép. 2 +err. calc. alg.	0	1	5	3	9
erreur de V.A. 2 cas	0	2	0	0	2
erreur de V.A. 1 cas	1	4	2	1	8
autre erreur	1	0	2	1	4
% réponse correcte		0	10	9	10
% erreur V.A.		86	10	9	24

Evidemment, pour ces petits effectifs, les pourcentages ne servent qu'à faciliter la lecture.

6.6. $|x-3| + |x-2| = 1$.

Cette question aurait dû être plus facilement résolue à partir du modèle des distances mais aucun élève n'y a eu recours. Un seul élève a trouvé la réponse correcte, c'est B18 qui a résolu graphiquement $|x-3| = 1 - |x-2|$, ce qui, outre la ligne de rappel $x = 0,5$ sur le graphique, est aussi une des raisons qui nous fait penser qu'il avait résolu graphiquement e) et f).

En fait C25 a résolu $|x-3|+|x+2| = 1$, elle a bien distingué les 3 cas du tableau fait pour la question e) mais a dit que $-1 \in]-\infty, -2]$ ce qui l'amène à conclure $S = \{-1\}$ au lieu de $S = \emptyset$.

La plupart des élèves résolvent $x-3+x-2 = 1$ ou $-x+3-x+2 = 1$ et trouvent $x = 3$ ou $x = 2$. C'est le cas de C5, C7, C8, C12, D3, D7, D22, D24. D'autres font de même mais avec une erreur de calcul algébrique : C9, C13, C15, C19, C24, C30, D20.

B12 fait de même mais, pour lui $|x-a| = x-a$ ou $-x-a$ donc il trouve 3 et -3.

Nous regroupons tous ces élèves sous le sigle "réponse 2".

D'autres élèves résolvent simplement $x-3+x-2 = 1$: B9, C23, D9, avec éventuellement en plus une erreur de calcul algébrique : A26, B31. Nous les regrouperons sous le titre "1 réponse".

Deux autres élèves (A15, B19) trouvent $x = 3$ sans explication : ont-ils essayé cette valeur ou résolu par le procédé ci-dessus ? Difficile de le dire pour A15 qui prétend avoir trouvé ici "par calcul" mais a beaucoup utilisé les graphiques pour les questions précédentes, avec cependant pour la question a) une seule réponse -1,6 "par lecture graphique ou par calcul $3-1,4 = 1,6$ " et une seule réponse $3-\sqrt{2}$ au b) "par calcul". B19 a l'air de procéder comme s'il n'y avait pas de barre. Nous rattacherons ces deux élèves à la catégorie "1 réponse".

B3 et B33 résolvent $x+3+x+2 = 1$ (pour eux $|x-a| = x+a$), nous les rattacherons aussi à "1 réponse".

Pour les autres, C14 prétend qu'il n'y a pas de solution, sans explication

A6, qui faisait l'erreur CR, répond $x = 4$ et $x = 3$ parce que $4-3 = 1$ et $3-2 = 1$ (écrits sous les points $x = 4$ et $x = 3$ d'une droite graduée,

C3 tente une lecture graphique mais il résout séparément $|x-3| = 1$ et $|x-2| = 1$ (avec une erreur)

C6 fait un tableau, enlève bien les barres mais répond $\emptyset$ entre 2 et 3, -2 à gauche et 3 à droite et conclut $]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$

D10 écrit $d(x-3)+d(x-2) = 1$; $(x-3) + (x-2) - 1 = 0$

D25 traduit toujours $|x-a| = b$ par $|x| = b + a$, cela lui donne ici $|x|+|x| = 6$, $|2x| = 6$, $x = 3$, $-x = -3$.

$ x-3 + x-2 = 1$	classe A	classe B	classe C	classe D	total
effectif	3	7	15	8	33
réponse correcte	0	1	0	0	1
erreur ordre négatifs	0	0	1	0	1
réponse 2	0	1	10	5	16
1 réponse	2	5	1	1	9
autre erreur	1	0	3	2	6

En conclusion, bien que les résultats de cette question portent sur des effectifs réduits, il nous semble que les grandes lignes suivantes ressortent à propos des méthodes employées :

- quand il s'agit de résolution d'équations, la méthode la plus fortement institutionnalisée continue à être utilisée mais la méthode algébrique tend à être privilégiée dans toutes les classes, même quand elle n'a pas été enseignée ;

- la méthode graphique est très peu utilisée, sauf par de très bons élèves, comme B18 qui domine assez nettement l'ensemble ; elle donne peu de réussite dans le cas des inégalités ;

- la méthode des distances peut conduire à des confusions entre centre et rayon ou entre les bornes et le couple centre rayon ; elle est peu utilisée dans les cas difficiles : le graphique étant déjà partiellement tracé, les bons élèves ont alors préféré la méthode graphique ;

- la méthode du tableau nécessite des interprétations parfois délicates et occasionne des erreurs surtout pour les inégalités mais elle permet de réussir des résolutions difficiles aux élèves qui

continuent à l'employer, par exemple pour $|x-3| = |x+2|$; des confusion analogues à celle des bornes avec le couple centre rayon peuvent intervenir pour la délimitation des intervalles d'étude - la méthode algébrique par double inégalité est la plus performante pour résoudre des équations comme $|3x+4| \leq 5$ mais elle provoque des erreurs pour les élèves qui veulent l'utiliser pour résoudre $|x-3| \leq |x+2|$.

7. Comparaison entre les contrôles et le test final.

Nous allons comparer quelques questions des contrôles et du test avant de tirer quelques conclusions sur le rapport institutionnel de chaque classe aux objets de savoir considérés et sur l'effet sur les productions des élèves.

7.1. Equations du type $|x-a| = r$

Pour les classes A et D qui ont rencontré ce type d'équations dans les contrôles, nous comparerons les méthodes utilisées et le résultat aux contrôles à la question $|x-3| = 1,4$ du test. Pour la classe A, le contrôle comportait 4 exercices de ce type. Nous avons vu que les élèves utilisaient en général la même méthode et réussissaient de la même manière, nous avons considéré qu'ils ont réussi s'ils ont réussi trois des items sur quatre. Pour la classe D, il s'agissait de l'item $|x+2| = \frac{7}{2}$. Pour les 14 élèves de la classe A et les 17 élèves de la classe B qui ont traité les deux types de questions, les résultats sont résumés dans le tableau à double entrée suivant ("réussite" signifie réussite pour les deux, "échec" signifie échec pour les deux, "réus. C" signifie réussite au contrôle échec au test et "réus. T" réussite au test, échec au contrôle :

contrôle test	distance	algébrique	graphique
distance	Réussite : 2 (A) Réus. C : 2 (A) Echec : 1 (A)	Réussite : Réus. T : 1 (A) Echec :	
algébrique	Réussite : 3 (A) Réus. C : 1 (A) Echec :	Réussite : 1 (A) et 10 (D) Réus. C : 5 (D) Echec : 2 (A)	
graphique	Réussite : Réus. C : 1 (A) Echec :	Réussite : 2 (D) Réus. C : Echec :	

Les 9 élèves de la classe A qui utilisaient avec succès la distance au contrôle continuent à l'utiliser pour 4 d'entre eux dont 2 avec succès ; 4 passent à la méthode algébrique dont 3 avec succès et un au graphique sans succès ; l'élève qui échouait par la distance au contrôle continue à échouer par la même méthode. Pour les 4 élèves de la classe A qui utilisaient une méthode algébrique au contrôle, dont un seul avec succès, 3 reprennent la même méthode avec les mêmes résultats (1 succès, 2 échecs), un autre utilise la distance au test, cette fois avec succès. Les 17 élèves de la classe D avaient utilisé la méthode algébrique avec succès au contrôle, 15 gardent la même méthode mais cette fois 5 échouent, et deux passent avec succès à la méthode graphique.

Pour les élèves des classes B (18) et C (32) nous relèverons seulement les méthodes employées pour le même exercice lors du test et le résultat obtenu :

distance	algébrique	tableau	graphique
Réussite : 4 (B) 1 (C) Echec : 3 (B)	Réussite : 6 (B) 18 (C) Echec : 5 (B) 6 (C)	Réussite : 3 (C) Echec : 2 (C)	Réussite : 2 (C) Echec :

Un autre élève de la classe C fournit une réponse correcte mais sans justification.

Nous avons vu que les élèves de la classe B recouraient prioritairement à la distance dans les contrôles et ceux de la classe C au tableau. Cette fois, dans les deux classes, la majorité des élèves utilisent une méthode algébrique, plus souvent avec succès dans la classe C. Dans les

deux classes, ceux qui continuent à utiliser la méthode fortement institutionnalisée ne réussissent plus que dans la moitié des cas. Dans la classe C deux élèves utilisent le graphique et un la distance, tous trois avec succès.

7.2. Equation du type $|x-a| = |x-b|$.

Une équation de ce type figurait dans le test. Elle avait aussi été posée en contrôle deux fois dans la classe B (une fois avant l'introduction de la fonction valeur absolue, où la méthode attendue de résolution était la distance, une fois avec une demande de résolution graphique) et une fois dans la classe C sans imposer de méthode mais alors qu'on avait demandé la représentation graphique d'une des fonctions. Dix élèves de la classe B et 21 de la classe C ont répondu à la fois au contrôle et à cette question du test. Dans le tableau ci-dessous nous croisons les méthodes utilisées au contrôle et au test ainsi que la réussite. Les élèves de la classe B seront comptés deux fois : une fois pour la résolution avant les graphes et une fois pour la résolution graphique, sauf B12 qui n'a pas répondu pour la distance et B33 qui n'a pas répondu pour la résolution graphique.

contrôle test	distance	algébrique	tableau	graphique
distance	Réussite : 2 (B) Réus. T : 1 (B) Echec :	Réussite : Réus. C : Echec : 1 (B)	Réussite : Réus. C : Echec :	Réussite : 3 (B) Réus. C : 1 (B) Echec :
algébrique	Réussite : Réus. C : Echec : 2 B	Réussite : 1 C Réus. C : Echec : 1 B	Réussite : 1 C Réus. C : 3 C Echec : 6 C	Réussite : 1 B Réus. C : 1 B Echec : 1 B
tableau	Réussite : Réus. C : Echec :	Réussite : Réus. C : Echec :	Réussite : 5 C Réus. C : Echec :	Réussite : Réus. C : Echec :
graphique	Réussite : 2 B Réus. C : Echec :	Réussite : Réus. C : Echec :	Réussite : 2 C Réus. C : 1 C Echec :	Réussite : 2 B Réus. C : Echec : 2 C

Les quatre élèves de la classe B qui avaient réussi les contrôles par la distance et par le graphique réussissent le test, deux d'entre eux par la distance et deux par le graphique. Deux élèves avaient échoué par la distance et réussi le graphique, l'un réussit le test par la distance, l'autre échoue par la méthode algébrique ; un autre élève avait réussi le graphique et échoué par la méthode algébrique, il échoue au test par la distance. Un autre avait réussi le graphique sans répondre au premier contrôle, il échoue par une méthode algébrique, c'est aussi le cas d'un élève qui avait échoué par la distance au contrôle sans répondre pour le graphique et d'un élève qui avait échoué deux fois au contrôle : par une méthode algébrique et par le graphique.

Pour la classe C, on peut voir qu'un élève est fidèle à la méthode algébrique qui le fait réussir les deux fois. Quant aux 12 élèves qui réussissaient par le tableau, cinq lui restent fidèles et continuent à réussir, trois élèves passent à une méthode graphique avec succès pour deux d'entre eux, quatre élèves passent à une méthode algébrique, un seul réussit. Les six élèves qui échouaient par le tableau passent sans plus de succès à une méthode algébrique. Deux élèves utilisent le graphique dans les deux cas, toujours sans succès.

A propos des résolutions d'équations, il semble se dessiner quelques régularités :

- Dans toutes les classes la méthode fortement institutionnalisée (distance ou tableau) a tendance à céder du terrain au profit de la méthode algébrique ou éventuellement de la méthode graphique si les circonstances s'y prêtent (graphique déjà tracé), c'est-à-dire au profit d'une méthode qui paraît plus rapide ou plus naturelle.
- Le changement de méthode ne se fait avec succès que pour des élèves qui réussissaient par la méthode fortement institutionnalisée par l'enseignant. Il semble qu'il y ait deux raisons contraires du changement de méthode : les uns ont bien intégré la méthode enseignée par le professeur et n'ont plus besoin des béquilles qu'elle apportait, les autres l'utilisaient

probablement comme un rituel qu'ils ont oublié avec le temps, ils reviennent à une méthode algébrique plus "naturelle" pour "résoudre" mais sans respecter les spécificités de la valeur absolue. L'échec par la méthode graphique peut être dû à un mauvais graphique, à une erreur de lecture ou à une absence de lecture du graphique : on fait tous les tracés utiles et on s'arrête sans conclure.

- Dans toutes les classes, ce sont de bons élèves qui utilisent spontanément avec succès à une méthode graphique, c'est-à-dire des élèves qui peuvent réussir par au moins une autre méthode, souvent deux.

7. 3. Valeur absolue et intervalles.

Pour les élèves des classes A, B, D, nous avons comparé la réussite pour les traductions des intervalles.

a) de centre et rayon vers bornes.

Pour le test, nous avons considéré la réussite aux questions 5a ($|x-3,5| \leq 3$) ou 5c ($|x+\frac{3}{2}| \leq 2$) que les élèves réussissent souvent en même temps et l'avons comparé aux lignes suivantes des tableaux de conversion : $|x-\frac{1}{2}| \leq 3$ pour la classe A (item 1), $d(x;-2) \leq 3$ pour la classe B (item 5) et $d(x, -1) \leq 3$ pour la classe D (item 3).

Les résultats de cette comparaison figurent dans le tableau ci-dessous :

test	contrôle	Réussite	Echec	non réponse
Réussite		A : 8 B : 11 D : 9		
Echec		A : 8 B : 5 D : 8	A : 8 B : 6 D : 2	
non réponse		A : 0 B : 2 D : 2	A : 0 B : 2 D : 0	

Le phénomène le plus net est la baisse de réussite dans toutes les classes même si elle est un peu moins marquée dans la classe B.

b) de bornes vers centre et rayon

Nous comparons ici la réussite à la traduction en termes de valeur absolue de $x \in [-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}]$ (question 6b) aux questions suivantes des contrôles : $\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{17}{2}$ (classe A, item 4), $x \in [-10; 5]$ ou dessin de $[-4, 3]$ (classe B, item 2 ou 3), $x \in [-2; 5]$ (classe D, item b). Dans le cas où on a deux items une seule réussite sera considérée comme une réussite. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

test	contrôle	Réussite	Echec	non réponse
Réussite		A : 2 B : 5 D : 5	A : 4 B : 0 D : 1	
Echec		A : 9 B : 15 D : 8	A : 8 B : 5 D : 7	
non réponse			A : 1 B : 0 D : 0	

La baisse de réussite est encore beaucoup plus nette dans ce sens. Il est vrai que la tâche attendue est plus difficile à cerner hors du tableau.

Il est vraisemblable que le remplissage du tableau, qui est une tâche bien cadrée juste après l'apprentissage et qui fournit le format de réponse attendue, amène la réussite pour des élèves qui n'arrivent pas à reconnaître les mêmes traductions sous des formulations un peu différentes, sans avoir le modèle attendu sous les yeux.

Conclusion.

Dans cette première partie de recherche, nous avons surtout étudié l'institutionnalisation du point de vue du contenu à institutionnaliser. Nous avons formulé des conclusions partielles à la fin de chaque paragraphe, nous nous contenterons ici de faire une synthèse des principales. Nous avons identifié les différents types d'exercices mettant en jeu la valeur absolue que l'on peut rencontrer dans les programmes de seconde actuels en les comparant à ceux que l'on a pu rencontrer antérieurement, à ce niveau ou au collège. Nous avons essayé d'éclairer, à travers l'analyse des programmes et les réponses d'élèves de 4 classes à un questionnaire, les relations que cette notion entretient avec d'autres notions mathématiques rencontrées en seconde : nombres, intervalles et avec le raisonnement logique et l'usage de quantificateurs implicites. Des difficultés imputées à la valeur absolue nous semblent être des difficultés dans la construction de la notion de nombre réel ou des difficultés liées à l'usage des connecteurs logiques, des quantificateurs et des opérations sur les intervalles, ce qui ne veut pas dire qu'il faut préalablement travailler ces concepts pour aplanir les difficultés concernant les valeurs absolues, mais qu'il faut les travailler à propos de la valeur absolue comme de la plupart des raisonnements mathématiques.

En observant le déroulement des séquences en classe, nous avons observé que les enseignants n'institutionnalisait pas les mêmes techniques pour résoudre les équations contenant des valeurs absolues, même en partant d'une même présentation de la valeur absolue. Nous avons relevé 4 méthodes différentes, inégalement valorisées selon les classes.

Dans les contrôles, les enseignants choisissent de préférence des exercices pour lesquels les techniques qu'ils ont valorisées vont être les plus performantes.

Au moment des contrôles les élèves utilisent presque exclusivement la méthode qui a été la plus valorisée en classe, sauf en ce qui concerne la méthode algébrique qui est utilisée, notamment par les élèves faibles, même quand elle n'a pas été enseignée. Trois mois plus tard, le nombre d'élèves utilisant la méthode algébrique augmente dans toutes les classes, avec succès pour certains des élèves qui réussissaient bien par la méthode valorisée par le professeur, toujours avec échec pour ceux qui ne réussissaient pas par la méthode encouragée par le professeur. On peut penser que dans le premier cas, il y a intériorisation du procédé, on peut aller plus vite en allégeant le rituel et que dans le second cas, on a perdu le rituel pour retomber dans un autre plus familier.

La méthode graphique n'est utilisée spontanément avec efficacité que par de bons élèves qui réussissent aussi par d'autres méthodes.

Les deux présentations successivement valorisées par les manuels (algébrique à partir des nombres, géométrique à partir de la distance) semblent correspondre à deux conceptions dont aucune n'entraîne automatiquement l'autre pour les élèves dans la mesure où ce ne sont pas les mêmes problèmes qui favorisent l'une ou l'autre et que les programmes amènent à traiter que les élèves facilement abordables avec la conception enseignée : par exemple la définition de la valeur absolue à partir de la distance rend difficile la résolution d'équations du type $ax+b=c$ quand $a \neq 0$

Une autre partie de nos données devrait nous permettre d'étudier les pratiques plus proprement pédagogiques des enseignants, en relation avec les réactions des élèves. Ce sera l'objet d'un deuxième tome du rapport concernant la présente recherche.

Références bibliographiques

Amra N. mémoire de D.E.A. non publié Université Paris 7

A.P.M.E.P. (1991) *Evaluation du programme de mathématiques. Seconde 1991*. Publication n° 88, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris.

Brousseau G. (1987) Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2, p. 33-115. La pensée sauvage Grenoble.

Chevallard Y. (1992) : Concepts fondamentaux de la didactique des mathématiques : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactiques de mathématiques*, vol. 12.1, 73-111, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chiarugi I., Fracassina G. and Furinghetti F. (1990) Learning difficulties behind the notion of absolute value. *Proceedings of PME 14*, Mexico 1990, vol. III, 231-238.

Chiocca C. ; Josse E. ; Robert A. (1991) Analysis of the accompanying discourse of mathematics teachers in the classroom. *Proceedings of PME XV*, Assisi, vol. I, 215- 222.

Duroux A. (1983) La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x* n°3, 43-87.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, vol. 5, IREM de Strasbourg, p. 37-65

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang

Perrin-Glorian M.J. (1992) : *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 7 (février 1992).

Perrin-Glorian M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des "classes faibles" *Recherches en didactique des mathématiques* n°13/1.2. p.5-118

Perrin-Glorian M.J. (1994) Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège : ce que nous apprend l'étude de "classes faibles". *Petit x* n° 36, IREM de Grenoble p.5-40.

Robert A. et Josse E. (1993) Introduction de l'homothétie en seconde : analyse de deux discours de professeurs, *Recherches en didactique des mathématiques* n° 13.1.2., 119-154 La Pensée sauvage, Grenoble.

Annexe 1. Extrait des programmes de seconde.

Opérations sur les inégalités

- Signe de $ax + b$. Signe d'un produit, d'un quotient
- Passage au carré, à l'inverse, à la racine carrée dans une inégalité entre deux nombres positifs.
- Position relative de a et a^2 selon que $a \geq 1$ ou $0 \leq a \leq 1$.

Valeur absolue, intervalles, approximations.

- Valeur absolue, distance.
- Inégalité triangulaire : $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- Valeur absolue d'un produit, d'un quotient.
- Intervalles ; notations des divers types d'intervalles.
- Pratique, sur des exemples numériques, du vocabulaire concernant les approximations d'un nombre a :
Lorsque que $b \leq a \leq c$, on dit que b et c encadrent a .
Lorsque $|a' - a| \leq k \cdot 10^{-p}$, où $1 \leq k \leq 10$, on dit que a' est une approximation (ou valeur approchée) de a à la précision $k \cdot 10^{-p}$.
Approximations décimales de a par défaut, par excès à 10^{-p} près (ces nombres sont de la forme $m \cdot 10^{-p}$, où m est entier.

Le programme se limite à l'étude d'expressions à coefficients numériques. Ces questions sont à relier à l'étude des fonctions et à leur représentation graphique : on pourra ainsi interpréter le signe de $ax + b$, la comparaison de a et a^2 pour $a \geq 0$, ou encore les opérations simples sur les inégalités ; par exemple, le fait que, si $0 < a \leq b$, alors $0 < 1/b \leq 1/a$, est à rapprocher de la décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $]0, +\infty[$ et de l'allure de sa représentation graphique.

La valeur absolue ne figure pas au programme de troisième.
En seconde, l'essentiel est de savoir interpréter $|b - a|$ comme étant la distance de deux points a et b , et, dans cette perspective, des relations telles que $|x - 2| \leq 1/100$ à l'aide des intervalles de centre 2.

Ces notions ne sont pas des objets d'étude en soi : elles interviennent dans les problèmes d'approximation. On pourra évaluer, sur quelques exemples numériques, la précision obtenue pour une somme ou un produit ; mais toute étude générale du calcul des approximations est exclue et aucun énoncé de résultats à ce propos n'est exigible des élèves. La pratique de troncatures et d'arrondis, déjà engagée au collège, sera poursuivie, sans formalisation de ces notions.

Dans le paragraphe concernant les fonctions, on lit notamment, sous la rubrique "**Fonctions usuelles**" :

- A travers l'étude des fonctions figurant au programme et de situations menant à des fonctions qui s'en déduisent de façon simple, on mettra en valeur la **diversité du comportement des fonctions**. Dans ce cadre, il est important que les élèves soient entraînés à mieux maîtriser les situations de **proportionnalité**, dont l'étude a été abordée au collège, en relation avec l'étude des fonctions linéaires et des fonctions affines.

a) Variation et représentation graphique des fonctions :

$$x \mapsto ax + b ; x \mapsto |x| ; x \mapsto x^2 ; x \mapsto x^3$$

$$x \mapsto \sqrt{x} ; x \mapsto \frac{1}{x}.$$

On sera amené à effectuer une exploration numérique du comportement de ces fonctions pour les grandes valeurs de x et, dans le cas de $x \mapsto \frac{1}{x}$, pour les petites valeurs de x ; mais toute mise en forme de la notion de limite est hors programme.

Annexe 1 bis. Profil des classes.

Evaluation à l'entrée en seconde (résultats exprimés en %)

	92-93 A 2°7	92-93 A 2°8	93-94 A	94-95 A	94-95 B	94-95 C	94-95 D
moins de 20				2	1		
entre 20 et 25				4	0		1
entre 25 et 30		2	1	3	1		2
entre 30 et 35		2	2	5	2		3
entre 35 et 40		1	3	0	1		2
entre 40 et 45		3	0	9	4	4	6
entre 45 et 50		5	7	0	3	3	2
entre 50 et 55	1	5	8	1	2	1	2
entre 55 et 60	1	3	3	0	6	4	5
entre 60 et 65	9	3	7	0	2	5	1
entre 65 et 70	4	3	1	2	2	8	3
entre 70 et 75	6		2		1	2	0
entre 75 et 80	6		1		4	5	1
entre 80 et 85	3				0	0	
entre 85 et 90	3				3	2	
plus de 90					2		

Résultats de l'orientation de fin de seconde

	92-93 2°7	92-93 2°8	93-94 A	94-95 A	94-95 B	94-95 C
1°S	19	2	4	1	14	10
1°ES	2	3		6	4	5
1° STL, STT...	2	12		9	6	4
1°L, Mus.	10	0		5	7	1
BEP	0	7		1	1	1
Redoublent	0	3		4	3	10
Réorientation						4

Dans la classe A 94-95 : deux élèves qui ont passé l'évaluation sont partis, deux autres figurent dans l'orientation ; il y a donc 24 en commun ;
 classe B, un arrivé au milieu de l'année.

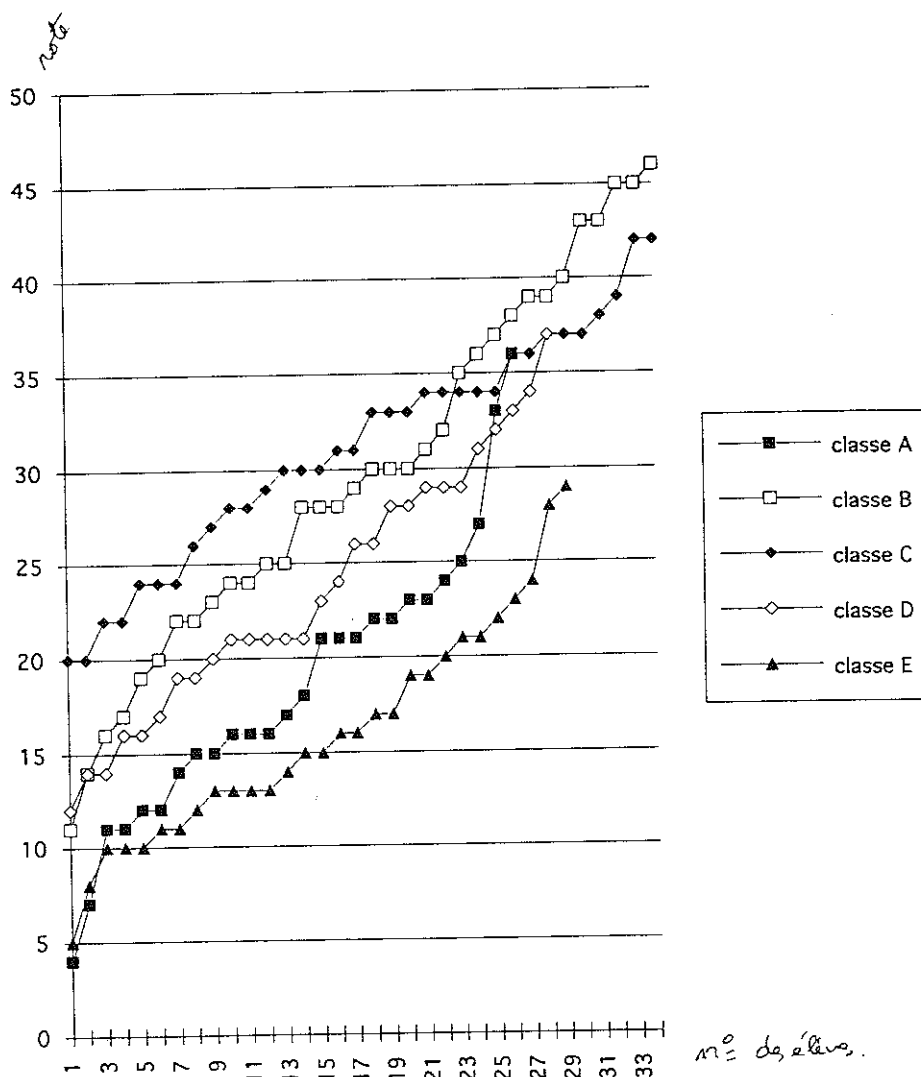
Résultats du test de fin d'année.

Nous avons produit un barème pour comparer les résultats globaux des élèves au questionnaire de mai-juin 95. Les classes n'étaient pas dans les mêmes conditions, il n'est donc pas possible de les comparer directement, en revanche cela permet de donner une idée de l'hétérogénéité de chaque classe.

classe	classe A	classe B	classe C	classe D
note sur 40				
moins de 5	3	1		
de 5 à 9,5	10	8	1	4
de 10 à 14,5	6	9	6	12
de 15 à 19,5	3	8	12	4
de 20 à 24,5	2	1	14	2
de 25 à 29,5		0	2	
de 30 à 34,5		1		
de 35 à 40		1		

On retrouve la structure initiale des classes avec un décalage vers le bas pour la classe B et un décalage vers le haut pour la classe C, explicables par les conditions de passation différentes.

Répartition par classe des notes sur 49 de l'évaluation de début de seconde.

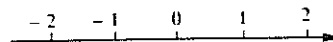


Annexe 2. Quelques extraits de manuels.

coll. Terracher 2^e 1990 Hachette

III - Représentation des nombres réels

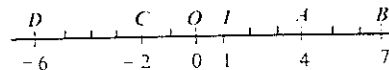
Pour nous aider à construire des définitions, à illustrer des résultats, à découvrir des propriétés, etc., nous nous appuierons tout au long de ce chapitre, sur la représentation habituelle des nombres réels sur une droite graduée. Cette représentation va nous permettre, dès maintenant, de « débroussailler » un problème nouveau⁽¹⁾, celui du calcul de la distance entre deux nombres (activités 4 et 5).



A
CH
4

1 Voici le relevé de certaines températures, hier matin à 8 heures, sous abris :
Dijon : -6° ; Caen : -2° ; Orléans : 0° ; Ile d'Yeu : 1° ; Avignon : 4° ; Biarritz : 7° .
Calculer les écarts de température entre deux quelconques de ces localités. (On pourra les désigner par leur initiale.)

2 Avec les données de la figure ci-après, calculer les distances mutuelles entre les points A, B, C, D, I et O.
Quel est le lien avec l'exercice précédent ?



C
ommer-
taire

L'activité précédente fait comprendre que la distance entre deux nombres x et y — que nous notons $d(x, y)$ — n'est autre que la distance MN , où M et N sont les points d'abscisses x et y sur une droite graduée. (Cela explique l'utilisation, à propos des nombres, d'un vocabulaire géométrique : distance, puis — comme on le verra — points, centre, etc.)

A
CH
5

1 Lequel des deux nombres 0,12 et 0,13 est le plus proche de $\sqrt{65} - \sqrt{63}$?

2 Vérifier que pour deux quelconques des nombres de l'ensemble :

$$E = \{-6; -2; 0; 1; 4; 7\},$$

la distance entre ces nombres s'obtient par la formule : Le plus grand moins le plus petit.

3 D'une façon plus générale, on associe à deux réels x et y le nombre : « Le plus grand — le plus petit. »

1° Montrer que ce nombre est toujours positif ou nul.

2° Exprimer en fonction de x le nombre obtenu lorsque $y = 0$ (envisager les deux cas $x \geq 0$ et $x < 0$) et vérifier qu'il est égal à la distance de 0 à x .

p 66.

IV - Valeur absolue. Distance

1 - Distance entre deux réels

Nous adoptons la définition suivante (largement inspirée des résultats dégagés dans les activités 4 et 5, p. 66.

On appelle *distance entre deux réels x et y* , la distance sur la droite numérique entre les points d'abscisses x et y .

On note $d(x, y)$ la distance entre x et y .

Avec les données de la figure 3, on a, par exemple :

$$d(0; -4) = OB = 4; d(1, 3) = IA = 2; d(-4, 3) = AB = 7;$$

$$d(1, -2) = IC = 3, \text{ etc.}$$

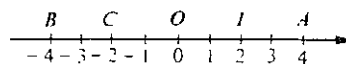


Fig. 3

L'ordre : les nombres et les inégalités . 73

Remarque : La définition ci-dessus donne le point de vue géométrique de la distance entre deux réels. Si nous ne disposons que de ce point de vue, cela signifierait que pour calculer la distance entre deux points, il faudrait recourir systématiquement à une représentation graphique. D'où la question : Existe-t-il un procédé de calcul de la distance entre deux réels ? Nous trouvons la réponse à cette question en généralisant les résultats obtenus dans l'activité 5 :

La distance entre deux nombres est calculée par la différence entre le plus grand et le plus petit de ces deux nombres.

1. Calculer avec ce procédé $d(3, -15)$ et $d(-5, 1; -6, 3)$:
 • $d(3, -15) = 3 - (-15) = 18$ (car 3 est le plus grand);
 • Comme $-5, 1$ est plus grand que $-6, 3$, on obtient $d(-5, 1; -6, 3) = (-5, 1) - (-6, 3) = 1, 2$.
2. D'une façon plus générale, étant donné deux réels x et y :
 Si $x \geq y$, alors $d(x, y) = x - y$; si $x \leq y$, alors $d(x, y) = y - x$.
3. Quels que soient x et y , d'une part $d(x, y) \geq 0$ (c'est une distance), d'autre part $d(x, y)$ est toujours l'un des deux nombres $x - y$ ou $y - x$ (nombres qui sont opposés).
 Ces observations conduisent à la propriété remarquable suivante : $d(x, y)$ est, parmi les différences $x - y$ et $y - x$, celle qui est positive !

2 - Valeur absolue d'un réel

Dans la définition ci-après, nous tenons compte des propriétés précédentes.

La distance d'un nombre x à zéro est appelée valeur absolue de x et est notée $|x|$. On a, indifféremment :

- (1) $|x| = d(0, x)$
- (2) $|x|$ est le nombre positif parmi x et $-x$
- (3) $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. Il est clair que $|-5| = 5$, $|-5| \times 2,4 = |-12| = 12$ et plus généralement que pour tout réel x : $|-x| = |x|$. Comme $x^2 \geq 0$, quel que soit x , on a : $|x^2| = x^2$.
3. Pour exprimer $|\sqrt{2} - 2|$, il nous faut auparavant examiner le signe de $\sqrt{2} - 2$. Comme $\sqrt{2} < 2$, $\sqrt{2} - 2$ est négatif. La valeur absolue de $\sqrt{2} - 2$ est donc le nombre positif $2 - \sqrt{2}$ (opposé de $\sqrt{2} - 2$).
 Ce dernier exemple conduit aux remarques suivantes.

Remarques :

1. La valeur absolue d'un nombre réel est un réel positif.
2. Lorsqu'on s'apprête à écrire « valeur absolue de », il faut marquer un temps d'arrêt, pour se consacrer à l'étude de la question : « Connait-on le signe de... ? »

15 Quelle est la valeur absolue de :

- $-\frac{1}{3}$; $(-2)^3$; $\pi - 3,14$; $\sqrt{2} - \sqrt{3}$?
- x avec $-x = 3$?
- y avec $y^2 = 25$?

16 Citer tous les entiers relatifs x tels que $|x| \leq 5$.

2° Résoudre l'équation d'inconnue t :

$$\left| \frac{t^{1789} - t^{1214} + 17\,071\,783}{\sqrt{1515 + t^{805}}} \right| = -52.$$



3 - Premières propriétés

Les diverses définitions de la valeur absolue conduisent aux propriétés suivantes (x et y désignent des nombres réels).

1. $|x| = |y|$ signifie $x = y$ ou $x = -y$.
2. Soit r un nombre positif :
 $|x| = r$ est équivalent à $x = r$ ou $x = -r$
 $|x| \leq r$ est équivalent à $-r \leq x \leq r$.



17 Résoudre les équations :

- $|x| = 9$; $|x| = 2$; $|x|^2 = 1$.

18 Combien existe-t-il de réels x tels que :
 $(|x| - 1)(|x| - 5)(x^2 - 25) = 0$?
 $|x| \leq 4$ et $x \in [-2, 3]$.

19 Représenter sur la droite numérique :

- l'ensemble des réels x tels que $|x| \leq 2$;
- l'ensemble des réels x tels que $|x| > 3$;
- l'ensemble des réels x tels que :
 $|x| \leq 4$ et $x \in [-2, 3]$.

4 - Valeur absolue, distance et intervalle

Nous avons vu que la distance $d(x, y)$ est, parmi les nombres opposés $x - y$ et $y - x$, celui qui est positif. Il en découle donc :

Quels que soient les réels x et y , $d(x, y) = |y - x|$.

Cette relation entre distance et valeur absolue, jointe à la définition des intervalles, va nous permettre de donner diverses interprétations de certaines égalités et inégalités :

Étant donné un réel quelconque a et un réel r strictement positif.
 Pour un réel x , les énoncés suivants ont la même signification :

- (1) $|x - a| \leq r$ (en termes de valeur absolue)
- (2) $d(a, x) \leq r$ (en termes de distance)
- (3) $x \in [a - r, a + r]$ (en termes d'intervalle)
- (4) $a - r \leq x \leq a + r$ (en termes d'encadrement).

Ces résultats sont justifiés par :

- l'égalité $d(a, x) = |x - a|$;
 - la définition d'un intervalle : $x \in [a - r, a + r]$ signifie $a - r \leq x \leq a + r$;
 - le fait que $|x - a| \leq r$ signifie : $-r \leq x - a \leq r$, soit $a - r \leq x \leq a + r$.
- Note :** L'intervalle $[a - r, a + r]$ est appelé intervalle de centre a et de rayon r .



Considérons sur une droite $\mathcal{D}$ un segment $[P, Q]$ de longueur $2r$ et A son milieu (figure 4).
 On a donc $AP = AQ = r$.

Pour un point M de la droite $\mathcal{D}$, il revient au même de dire : M est un point du segment $[P, Q]$, ou M est entre P et Q , ou la distance AM est inférieure ou égale à r .

Fig. 4

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

Bordas
coll. Fractale
1990

AP1 Distance et valeur absolue

Le mot *distance* est un terme courant de la vie quotidienne. On dit, par exemple, que la distance Nantes-Paris est, approximativement, de 400 km. Remarquons que cette distance est exprimée à l'aide d'une unité (le kilomètre) par un nombre positif. Nous vous proposons dans cette activité de préciser cette notion de distance.

Considérons une droite (Δ) et $(O, \vec{I})$ un repère unitaire de cette droite (unité de longueur : le centimètre).

Plaçons sur cette droite les points A, B, C, D, E, F et G d'abscisses respectives 5, 3, -1, -4, 2, -5, 6 (fig. 1).

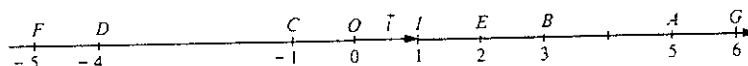


Fig. 1

1 ■ Distance de deux points

Dans le chapitre 6, nous avons défini le nombre $\overline{AB}$, appelé mesure algébrique du vecteur $\overline{AB}$.

Nous pouvons écrire : $\overline{AB} = 3 - 5$ soit $\overline{AB} = -2$.

Une distance est mesurée par un nombre positif. La distance des points A et B , notée AB , ou aussi $d(A, B)$, est égale à 2.

Calculez les distances suivantes :

$AB, AC, AD, AE, AF, AG, BF, CE, GC, FE, CA, EA, GA$.

Définition

De façon générale, M et N étant les points de (Δ) d'abscisses respectives x et y , la distance des points M et N est le nombre positif, noté MN tel que :

si $x \geq y$ alors $MN = x - y$,

si $x \leq y$ alors $MN = y - x$.

Ce nombre est appelé « valeur absolue de x moins y » et il est noté $|x - y|$.

Il résulte de cette définition que quels que soient les nombres x et y :

$$|y - x| = |x - y|.$$

2 ■ Valeur absolue d'un nombre

En appliquant la définition de la distance de deux points à O et M nous obtenons : $OM = |x - 0| = |x|$.

Ce qui nous permet de définir la **valeur absolue** d'un nombre.

si x est positif alors $|x| = x$,

si x est négatif alors $|x| = -x$.

a) Donnez alors les valeurs absolues des nombres suivants :

$$7; -3; -\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}; \pi^2 - 10; 10^{-3}; \frac{1}{10^2}.$$

b) Donnons une interprétation géométrique de la définition de la valeur absolue d'un nombre.

Soit M le point de (Δ) d'abscisse x et M' le point de (Δ) d'abscisse $-x$. Que pouvez-vous dire de M et M' ?

Suivant le signe de x nous avons l'un des deux schémas ci-contre (fig. 2).

Dans les deux cas nous avons : $OM = OM'$ soit $|x| = |-x|$.

La distance OM est nulle si, et seulement si $M = O$; donc

$|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Déterminez les abscisses x des points M de (Δ) tels que :

$$OM = 3; \quad OM = \sqrt{5}; \quad OM = \frac{3}{2}.$$

Plus généralement, en reprenant les points définis au début de cette activité, déterminez les abscisses des points M dans chacun des cas suivants

- $AM = 2$.
- $BM = 3$.
- $CM = 4$.

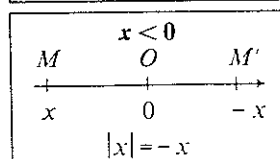
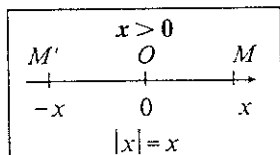


Fig. 2

1. VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE

Définition 1

Soit x un nombre. On appelle valeur absolue de x le nombre positif noté $|x|$ défini de la façon suivante :

- si x est positif alors $|x| = x$,
- si x est négatif alors $|x| = -x$.

EXEMPLES

- $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ car $\sqrt{2} > 1$ donc $\sqrt{2} - 1$ est positif.
- $|3 - \pi| = \pi - 3$ car puisque $\pi > 3$, le nombre $3 - \pi$ est négatif, donc sa valeur absolue est son opposé $\pi - 3$.
- $|x^2 + 1| = x^2 + 1$ car, quel que soit le nombre x , $x^2 + 1$ est strictement positif.

Remarque

Nous avons vu en activité que : $|x| = 0$ est équivalent à $x = 0$.

Propriété 1

Quel que soit le nombre x : $|-x| = |x|$ et $\sqrt{x^2} = |x|$

EXEMPLES

- $|1 - \sqrt{3}| = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$ • $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$.

Propriété 2

Quels que soient les nombres x et y :

$$|xy| = |x| \times |y| \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

Si de plus y est non nul : $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

EXEMPLES

- $|(-4) \times 3| = |-4| \times |3| = 4 \times 3 = 12$.
- $|(-4) + 3| \leq |-4| + |3|$ • $\left| \frac{-4}{3} \right| = \frac{|-4|}{|3|} = \frac{4}{3}$.

Propriété 3

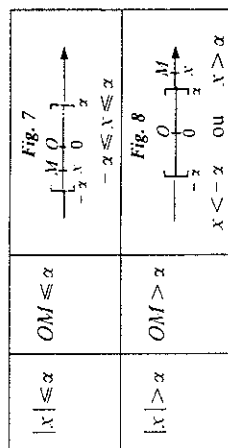
a est un nombre strictement positif et x est un nombre quelconque.

$|x| = a$ est équivalent à $x = a$ ou $x = -a$.

$|x| \leq a$ est équivalent à $-a \leq x \leq a$

$|x| > a$ est équivalent à $x < -a$ ou $x > a$.

Ces propriétés sont illustrées graphiquement de la façon suivante :



EXEMPLES

- $|x| \leq 5$ est équivalent à $-5 \leq x \leq 5$ ou encore à : x est élément de l'intervalle $[-5; 5]$.
- $|x| > 3$ est équivalent à $x < -3$ ou $x > 3$, ce que l'on peut encore exprimer en disant que x est élément de : $] -\infty; -3[\cup] 3; +\infty[$.

2. ENCADREMENTS D'UN NOMBRE

1. Définition

Soit x un nombre donné. Réaliser un encadrement de x , c'est trouver deux nombres a et b tels que $a \leq x \leq b$.
Le nombre $b - a$ est l'amplitude de cet encadrement.

Définition 2

EXEMPLES

- Si nous écrivons $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ nous réalisons un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 1.
- Si nous écrivons : $3,14 \leq \pi \leq 3,15$ nous réalisons un encadrement de π d'amplitude 10^{-2} .

2. Encadrement d'une somme, d'un produit de deux nombres

Vous retiendrez les deux règles suivantes :

Règle 1

Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.

Règle 2

Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

TRAVAUX PRATIQUES D'APPROCHE

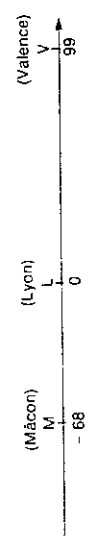
1 La vallée du Rhône

Dans la vie de tous les jours, le mot *distance* est fréquemment utilisé. Vous savez en particulier qu'une distance s'exprime toujours par un **réel positif** : on ne dit jamais que la distance entre Paris et Lyon est de -450 kilomètres ! Sur une carte on a lu les distances suivantes, en kilomètres.

	à Mâcon	à Chalon-sur-Saône	à Dijon
De Lyon	68	125	192
	à Valence	à Avignon	
De Lyon	99	224	

Calculez la distance entre Mâcon et Dijon, entre Avignon et Valence, entre Valence et Avignon, entre Valence et Mâcon.

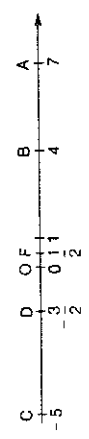
Représentons cette situation de la façon suivante sur une droite graduée.



- Avec les conventions ainsi faites, quelle est l'abscisse du point A (Avignon) ? du point D (Dijon) ? du point C (Chalon) ?
- Utilisez ces abscisses pour calculer les distances entre C et M, entre A et M, entre V et D, entre D et C.

2 Distance et valeur absolue

Sur une droite graduée, les points A, B, C, D, E, F ont pour abscisses respectives : 7 ; 4 ; -5 ; -3 ; 112 ; $\frac{1}{2}$. Nous n'avons pas pu indiquer le point E sur ce dessin.



La distance entre A et B est : $7 - 4 = 3$; on dit aussi que la distance entre 4 et 7 (ou entre 7 et 4) est 3.

La distance entre C et B est : $4 - (-5) = 9$; on dit aussi que la distance entre 4 et -5 (ou entre -5 et 4) est 9. Vous remarquerez que la distance entre deux réels est égale à la différence entre le plus grand et le plus petit.

Calculez les distances entre $-\frac{3}{2}$ et 7, entre -5 et 112 ; entre 112 et -5 ; entre 4 et $\frac{1}{2}$, entre $-\frac{3}{2}$ et -5.

M est le point d'abscisse x de cette droite graduée. On veut calculer la distance entre x et 4. Pour cela, il est important de connaître la place de x par rapport à 4. Envisageons les différents cas possibles :



La distance entre x et 4 s'écrit, dans ce cas : $4 - x$. La distance entre x et 4 est égale à 0.

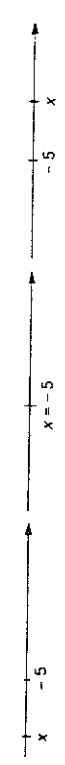
Résumons cela, en écrivant que la distance entre x et 4 est égale à :

$$\begin{cases} x - 4 & \text{lorsque } x > 4 \\ 4 - x & \text{lorsque } x < 4 \\ 0 & \text{lorsque } x = 4. \end{cases}$$

De manière condensée, la distance entre x et 4 est notée $|x - 4|$ (qui se lit « valeur absolue de x moins 4 ») ou $|4 - x|$. On peut présenter ces différentes écritures dans un tableau tel que celui-ci.

x	x	4	x
x - 4	4 - x	0	x - 4

- a/ Calculez la distance entre les réels x et -5 dans chacun des cas suivants.



Écrivez cette distance à l'aide de la notation « valeur absolue ».

- $\left| x + \frac{3}{2} \right|$ désigne la distance entre deux réels. Lesquels ?

Présentez dans un tableau les écritures de cette distance sans utiliser la notation « valeur absolue ».

- a/ $|x - 7|$ désigne la distance entre deux réels. Lesquels ?

b/ Aidez-vous d'une droite graduée pour trouver tous les réels x tels que $|x - 7| = 5$.

c/ Quels sont tous les réels x tels que $\left| \frac{3}{2} - x \right| = 2$?

- Représentez sur une droite graduée l'ensemble des réels x tels que $|x + 2| \leq 1$.

COURS

1 Valeur absolue

a/ Distance entre deux réels

La distance entre deux réels est la différence entre le plus grand et le plus petit. Par conséquent :

$$\begin{cases} x - a & \text{lorsque } x \geq a \\ a - x & \text{lorsque } x \leq a \end{cases}$$

La distance entre deux réels x et a est égale à :

Notation

Au lieu d'utiliser cette écriture sur deux lignes, on utilise la notation condensée $|x - a|$ pour désigner la distance entre x et a .
L'écriture $|x - a|$ se lit « valeur absolue de $x - a$ ».

COMMENTAIRE

Notez que lorsque $x = a$, on a $|x - a| = 0$: la distance entre a et a est $a - a = 0$.

b/ Valeur absolue d'un réel

DÉFINITION 1

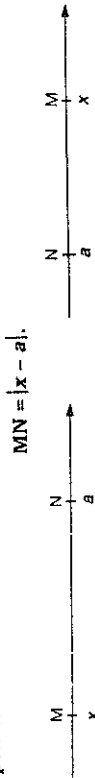
La valeur absolue d'un réel x est la distance entre x et 0. On la note $|x - 0|$, c'est-à-dire $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{lorsque } x \geq 0 \\ -x & \text{lorsque } x \leq 0 \end{cases}$$

Exemples : $\left| \frac{31}{7} \right| = \frac{31}{7}$ $|-5,7| = 5,7$.

c/ Interprétation géométrique

Sur une droite graduée, M est le point d'abscisse x et N le point d'abscisse a . La distance entre les réels x et a , c'est-à-dire $|x - a|$, est la distance entre les points M et N :



De plus, notons O le point d'abscisse 0 de cette droite graduée.

$|x|$ est la distance entre x et 0 ; c'est aussi la distance entre les points O et M . Donc $OM = |x|$.

d/ Exemple

La distance entre un réel x et $-\frac{3}{2}$ s'écrit $\left| x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right|$ c'est-à-dire $\left| x + \frac{3}{2} \right|$.

En d'autres termes :

$$\left| x + \frac{3}{2} \right| = \begin{cases} x + \frac{3}{2} & \text{lorsque } x > -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} - x & \text{lorsque } x < -\frac{3}{2} \\ 0 & \text{lorsque } x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

On peut présenter ces écritures dans le tableau suivant :

x	$-\frac{3}{2}$
$\left x + \frac{3}{2} \right $	$-\frac{3}{2} - x$ 0 $x + \frac{3}{2}$

e/ Conséquences immédiates des définitions

(1) La distance entre x et a est un réel POSITIF.

Pour tous réels x et a , on a : $|x - a| \geq 0$.

En particulier, pour tout réel x , on a $|x| \geq 0$.

(2) La distance entre x et a est aussi la distance entre a et x .

Donc, pour tous réels x et a , on a : $|x - a| = |a - x|$.

En particulier, pour tout réel x , on a : $|x| = |-x|$.

(3) Écrire que $|x - a| = 0$ équivaut à écrire que $x - a = 0$ c'est-à-dire $x = a$.

En particulier, écrire que $|x| = 0$ équivaut à écrire que $x = 0$.

(4) Un réel est inférieur à sa valeur absolue.

En effet : • lorsque $x \geq 0$, on a $|x| = x$ on peut donc écrire $x \leq |x|$;

• lorsque $x \leq 0$, on a $|x| \geq 0$ et donc $x \leq |x|$.

Donc, pour tout réel x , on a : $x \leq |x|$.

Exemple

$-x - 4$ est l'opposé de $x + 4$; en effet : $-(x + 4) = -x - 4$.

D'après la conséquence (2) ci-dessus, on a : $|-x - 4| = |x + 4|$.

Voici présentées les diverses écritures de $|-x - 4|$ sans utiliser la « notation valeur absolue ».

$$|-x - 4| = \begin{cases} x + 4 & \text{lorsque } x > -4 \\ -4 - x & \text{lorsque } x < -4 \\ 0 & \text{lorsque } x = -4 \end{cases}$$

x	-4
$ -x - 4 $	$-4 - x$ 0 $x + 4$

3. Valeur absolue (première approche)

Dickier coll. D'imathème (1994)

La valeur absolue d'un nombre réel x , notée $|x|$ est x lui-même s'il est positif, son opposé $-x$, si x est négatif.

EXEMPLES

$$\left| \frac{7}{3} \right| = \frac{7}{3}; \quad |-5| = 5; \quad |3\sqrt{5}| = 3\sqrt{5}; \quad |-\pi| = \pi;$$

$$|5 - \sqrt{2}| = 5 - \sqrt{2} \text{ car } 5 - \sqrt{2} > 0;$$

$$|1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1 \text{ car } 1 - \sqrt{3} < 0 \text{ et } -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1.$$

Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ et si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$.

Conséquence : pour tout nombre réel x , $|x| \geq 0$.

Propriétés

On vérifie que $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$.

Pour tout nombre réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$.

Valeur absolue et opérations

• Produit, quotient

Pour tous nombres réels a et b

$$|ab| = |a| \times |b| \text{ et } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

• Somme

Inégalité triangulaire

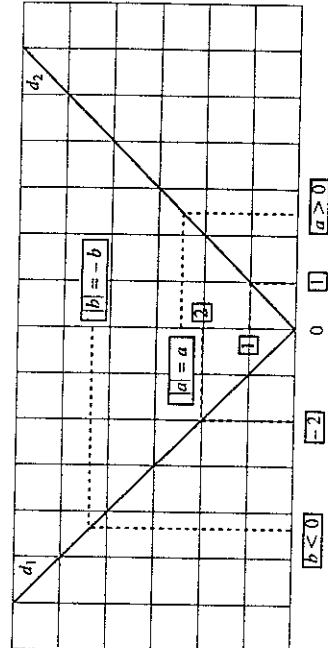
Pour tous nombres réels a et b $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Fonction valeur absolue

La représentation graphique de la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est la réunion des deux demi-droites :

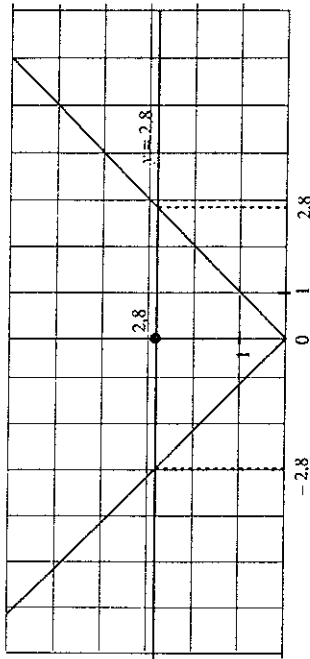
d_1 d'équation $y = -x$ avec $x \leq 0$.

d_2 d'équation $y = x$ avec $x \geq 0$.



Équation $|x| = a$ ($a > 0$)

Résoudre l'équation $|x| = 2,8$, c'est trouver les antécédents de 2,8 par la fonction valeur absolue.



Méthode

1° On trace la droite d'équation $y = 2,8$.

2° Les abscisses des points d'intersection de cette droite avec la représentation graphique de la fonction valeur absolue sont les solutions de l'équation.

On obtient :

L'équation $|x| = 2,8$ a deux solutions : $-2,8$ et $2,8$.

Pour $a > 0$, l'ensemble des solutions de l'équation $|x| = a$ est $\{-a; a\}$.

Autrement dit deux nombres ont même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.

EXEMPLES

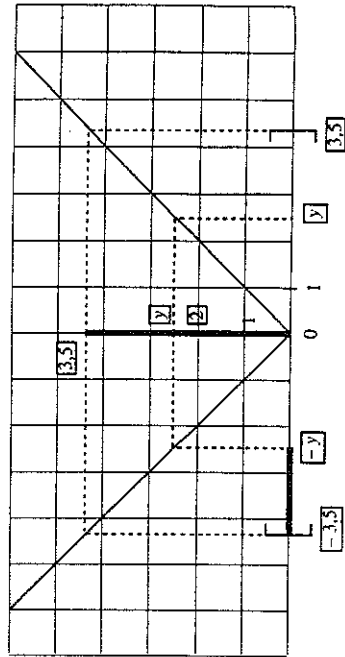
• $|x| = 4$ si et seulement si $x = 4$ ou $x = -4$.

• $|x - 1| = 3$ si et seulement si $x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$.

Cette équation a pour ensemble de solutions $\{-2; 4\}$.

Inéquation $|x| \leq a$ ($a > 0$)

Résoudre l'inéquation $|x| \leq 3,5$ c'est trouver l'ensemble des antécédents des éléments de $[0; 3,5]$ par la fonction valeur absolue.



Tout élément y de $[0; 3,5]$ a deux antécédents y et $-y$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x| \leq 3,5$ est l'intervalle $[-3,5; 3,5]$.

INFORMATION

Diolier
coeff. Di'wattine
1994
chapitre 5.

1. Tableau de signes

Pour déterminer le signe d'un produit de facteurs de la forme $ax + b$, on dresse un tableau dans lequel on indique le signe de chaque facteur.

EXEMPLE

Résoudre $(2x + 1)(3 - x) \leq 0$ (1).

Résoudre l'inéquation (1) revient à chercher le signe de $(2x + 1)(3 - x)$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
Signe de $2x + 1$		-	0	+
Signe de $3 - x$		+	0	-
Signe de $(2x + 1)(3 - x)$		-	0	+

Pour établir la dernière ligne du tableau, on utilise la règle des signes d'un produit : par exemple pour $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$, on a $2x + 1 < 0$ et $3 - x > 0$, on en déduit que le produit est négatif.

En ne gardant que les première et dernière lignes du tableau, on obtient :

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
Signe de $(2x + 1)(3 - x)$	-	0	+	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$S =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [3; +\infty[.$$

2. Valeur absolue

Transformation de $|x - a|$

EXEMPLE

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = |x - 2|$.

Si $x \leq 2$, alors $x - 2 \leq 0$ et $f(x) = |x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$, car la valeur absolue d'un nombre négatif est égale à son opposé.

Si $x \geq 2$, alors $x - 2 \geq 0$ et $f(x) = |x - 2| = x - 2$, car un nombre positif est égal à sa valeur absolue.

On résume ces résultats dans un tableau :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $x - 2$		-	0
$ x - 2 $		$-x + 2$	$x - 2$

Soit a un nombre réel donné, pour tout réel x :

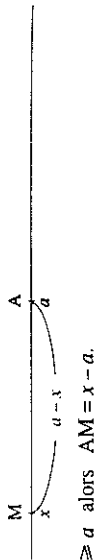
si $x \leq a$, alors $|x - a| = -(x - a) = -x + a$

si $x \geq a$, alors $|x - a| = x - a$.

Valeur absolue et distance

Sur une droite graduée, on appelle A et M les points d'abscisses respectives a et x :

si $x \leq a$ alors $AM = a - x$



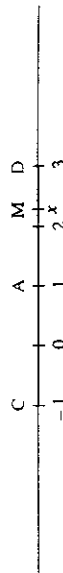
si $x \geq a$ alors $AM = x - a$.



Dans tous les cas $AM = |x - a|$.

EXEMPLE

Avec les notations précédentes l'inéquation $|x - 1| \leq 2$ est équivalente à $AM \leq 2$.



Or $AM \leq 2$ si et seulement si M est un point du segment $[CD]$, donc si et seulement si $x \in [-1; 3]$.

On vérifie algébriquement que l'inéquation $|x - 1| \leq 2$ est équivalente à

$$-2 \leq x - 1 \leq 2 \text{ et donc } -1 \leq x \leq 3.$$

Sur une droite graduée, la distance des points A d'abscisse a et M d'abscisse x est $|x - a|$.

Quel que soit $b \geq 0$,

$|x - a| \leq b$ équivaut à $a - b \leq x \leq a + b$

$|x - a| \leq b$ équivaut à $AM \leq b$.

3. Système de deux équations à deux inconnues

Équation à deux inconnues

Une solution de l'équation à deux inconnues $ux + vy + w = 0$ est un couple (x_0, y_0) qui vérifie

$$ux_0 + vy_0 + w = 0.$$

Nous admettons le résultat suivant.

L'ensemble des points du plan $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient $ux + vy + w = 0$ avec $(u, v) \neq (0, 0)$ est une droite.

Annexe 3. Les progressions de 4 professeurs.

1. Professeur A,

1.1. Année 1992-1993, deux classes : 2^{de} 7 (forte) et 2^{de} 8 (faible).

Emploi du temps :

2h en classe entière : 2h le mercredi matin pour les 2^{de} 7, 1h le mardi matin, 1h le mercredi matin pour les 2^{de} 8

2h en demi-classe : T.D. - module confondus (un groupe le vendredi et un groupe le samedi dans chaque classe).

Plan du cours sur la valeur absolue dans les 2 classes : 2^{de} 7 - 2^{de} 8

Manuels : Dimathème pour la seconde 8, Fractales pour la seconde 7.

Les fonctions ont été commencées dès le début de l'année par les fonctions du second degré (paraboles).

Etant donné l'emploi du temps, nous appellerons ici séance un groupement de 2 heures, cours (en classe entière) ou T.D. (en demi-classes)

Séance 1 : T.D. 15 et 16 janvier

Dans les deux classes : présentation de la distance de 2 nombres dans l'espace, dans le plan, sur une droite (une demi-séance, la première partie est de la géométrie avec Géoplan).

En 2^{de} 8 la séance a lieu en classe entière le 16.

Texte : feuille Val 1.

Séance 2, Cours des 19 et 20 Janvier :

* 2^{de} 8 - 19-01 :

- distances sur un axe gradué I(1), A(2), B(7), C(-2), D(-6)

Calcul de d(O,A), d(O,I), d(A,B), d(O,C) etc ... (toutes les possibilités)

placement de E ($\sqrt{2}$), F ($\sqrt{2}-2$). Construction à la règle et au compas de $\sqrt{2}$ pour placer E. d(O,E), d(O, F)

- définition de $|x|$ comme d(O,M) où M a pour abscisse x.

- Distribution de la feuille de cours (annexe 2).

exercice 10 p. 128 : résoudre $|x| = 1$; $|x| \leq 1$ puis P. propose $|x| = 2,4$

- à chercher exercice 11 : résoudre $|x-2| = 1$; $|x-2| \leq 1$.

* 2^{de} 8 - 20-01 :

- correction de l'exercice, introduction de $|x-a|$, résolution d'équations $|x-a| = r$ et d'inéquations $|x-a| \leq r$ (a et r donnés) à l'aide de la représentation des nombres réels sur la droite graduée

- A faire pour le 22 ou 23 : exercices 13, 14, 15, 16 p.128. Résoudre

13. $|x+2| = 3$; $|x+2| \leq 3$; 14. $|x-5| = 0,1$; $|x-5| < 0,1$; 15. $|x| = 6$; $|x| > 6$;

16. $|x-1| = 2$; $|x-1| \geq 2$

* 2^{de} 7 - 20-01 :

- correction d'exercices de géométrie

- révisions sur la racine carrée (représentation d'un nombre positif par l'aire d'un carré, la racine carrée de ce nombre étant égale à la longueur du côté du carré, encadrement de la

racine carrée d'un nombre entier naturel, représentation d'un segment de longueur $\sqrt{a}$, $a \in \mathbb{N}$.)

- leçon sur la valeur absolue, exemples $|\sqrt{2}|$, $|2 - \sqrt{2}|$, $|\sqrt{3} - 2|$,

- résolution d'équations de la forme $|x-a| = r$ et d'inéquations $|x-a| \leq r$ à partir de la représentation d'un nombre sur un axe gradué.

- Pour les 22 et 23 janvier : exercices 13-14-15-22 p. 221. Il s'agit de "déterminer les nombres x de $\mathbf{R}$ vérifiant l'équation ou l'inéquation proposée"

13. $|x| = 7$; $|x| = \frac{2}{3}$; $|x| = \pi$ 14. $|x - 1| = 1$; $|x - 2| = 3$; $|x + 1| = 1$.

15. $|x - 1| = 0$; $|x - \sqrt{2}| = 1$; $|x + 5| = 3$

22. Déterminer les nombres a et b tels que la relation donnée soit équivalente à $x \in]a, b[$.

Faites dans chaque cas une représentation graphique : $|x - 3| < 1$; $|x - \frac{1}{2}| < \frac{5}{2}$; $|x + 1| < 2$.

Séance 3, T.D. des 22 et 23 janvier

Dans les 2 classes :

- correction d'un exercice de géométrie sur les médiatrices d'un triangle et des exercices sur la valeur absolue. Distribution d'un corrigé écrit.

- Distribution des feuilles de cours sur distance et V.A. (voir feuille Val 3.) en 2°7, de la feuille de préparation du contrôle 5 (voir ci-dessous ce qui concerne la V.A. pour la 2°8)

Une unité de longueur étant donnée, savoir représenter un segment dont la longueur est un nombre irrationnel de la forme $\sqrt{a}$ où a est un entier naturel.

(d) une droite graduée de repère (O, I)

- savoir placer des points de (d) dont les abscisses sont des nombres réels.
- savoir calculer la distance de deux points de (d) définis par la donnée de leurs abscisses.
- savoir placer des points de (d) à une distance donnée d'un point connu de (d).
- savoir caractériser un segment de droite comme ensemble de points de (d) situés une distance inférieure à un nombre donné, d'un point donné de (d).

Savoir la définition de la valeur absolue d'un nombre réel. (distance de ce nombre à zéro)

Interpréter $|x - a|$ comme la distance des deux nombres x et a .

Utiliser la représentation des nombres réels sur une droite graduée pour :

- résoudre l'équation $|x - a| = r$ où a et r sont donnés.
- résoudre l'inéquation $|x - a| < r$ où a et r sont donnés.

- Devoir n°5 à faire pour le 9 ou le 10 Février (géométrie et extraction d'une racine carrée).
- T.D. Monsieur Dupont (annexe 3)

Contrôle 5 les 26 et 27 Janvier voir ci-dessous ce qui concerne les distances et V.A.
2°7

Exercice 3

Représenter sur la droite graduée (d) munie du repère (O, I) ,



a) l'ensemble (E) des points M tels que $OM = 3\sqrt{2}$.

b) le point A d'abscisse $5 - \sqrt{2}$ et l'ensemble des points N tels que $AN = \sqrt{2}$.

c) le point B d'abscisse $2 - \sqrt{2}$ et l'ensemble des points S tels que $SB < 4$.

2°8

Exercice 2

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$|x - 3.5| = 2.1$$

$$|x - 1.7| \leq 3.2$$

2) Représenter sur la droite graduée (d) munie du repère (O, I)



a) l'ensemble (E) des points M tels que $OM = \sqrt{3}$

b) A le point d'abscisse - 4.7 et l'ensemble (G) des points S tels que $AS > 1.4$

c) B le point d'abscisse 1.2 et l'ensemble (F) des points N tels que $BN \leq 2.8$

Séance 4 : T.D. des 29 et 30 janvier

Dans les deux classes :

- synthèse du T.D. "monsieur Dupont" (texte sur feuille Val 4). Distribution d'un corrigé écrit. Les élèves n'utilisent pas la valeur absolue, même quand le professeur propose de demander à l'ordinateur la représentation graphique de la fonction. Le professeur n'insiste pas.

- reste du temps (variable de 1/4 h à 1h consacré à un jeu sur ordinateur "jeu de cible". Il s'agit de trouver un intervalle en posant des questions sous forme $|x - l| \leq$ alors qu'un morceau de droite graduée est représenté à l'écran et se colore différemment suivant les réponses aux questions posées qui peuvent être "extérieur", "contient", "touché", puis "gagné", perdu".

Séance 5, Cours des 2 et 3 Février

Dans les deux classes, traductions entre les diverses écritures des intervalles (feuille photocopiée Val 7). Allusion à ce qui a été fait sur l'ordinateur.

En seconde 7 introduction du vocabulaire en termes de "valeur approchée" à propos des 3 derniers exemples.

2°8. exercice à faire du 2 au 3 : activité 4 page 118, corrigé le 3 ainsi que l'exercice 2 du contrôle 5.

Plus d'exercices traités en 2°8 (2x1h), plus de discours et d'explications du prof en 2°7.

Séance 6, T.D. des 5 et 6 Février :

Points sur la droite (feuille Val 8)

Séance 7, Cours des 9 et 10 Février.

- synthèse du T.D. dans les deux classes en 2 heures. Le III n'est pas abordé en seconde 8.

Dans la seconde 7, $h(x) = f(x)$ et $h(x) = g(x)$ ne sont pas traités, $g(x) + 3 = 8 * f(x)$ l'est mais pas $f(x-4) = \frac{5}{2}$.

Séance 8, T.D. des 12 et 13 Février.

- Correction des exercices à chercher (propriétés de la valeur absolue d'un nombre, encadrements : feuille Val 10).

- associer fonction et graphique (feuille Val 11) : traité collectivement.

2-3 mars distribution de la feuille de préparation du contrôle 6 (feuille Val 12)

6 mars : contrôle 6. Les exercices 1 et 2 concernent la valeur absolue et sont communs aux deux classes (voir ci-dessous). Il y a en outre un exercice de géométrie commun aux deux classes et, seulement dans la 2^o7, un exercice de géométrie qui donne lieu au tracé d'une fonction et à un problème d'encadrements.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 3(x-3)^2 = 18 - 2x^2 + (2x+5)(3-x) \\ \text{b)} & |x - \sqrt{3} + 1| = 3 \cdot 10^{-2} \\ \text{c)} & |3 \cdot 10^5 - x| < 5 \cdot 10^{-5} \\ \text{d)} & |2x + 7| > 3\sqrt{5} \end{array}$$

Exercice 2

Madame Justine vient de partir à la retraite. Elle a l'intention de chercher un appartement dans la grande rue du village Manet. Elle se rendra à pieds

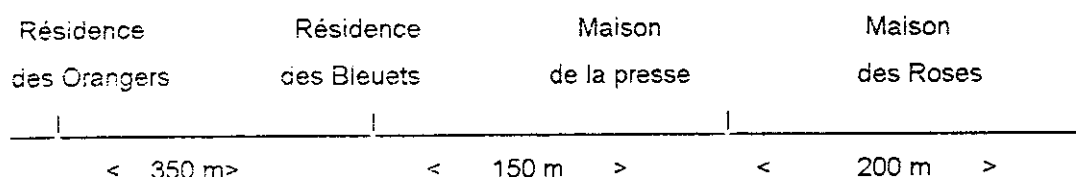
-une fois par jour chez ses enfants dans la résidence des Orangers (lundi, mardi, mercredi, jeudi et vendredi)

-le mardi et le jeudi chez le kiné dans la résidence des Bleuets

-le lundi et le vendredi chez le marchand de journaux (Maison de la presse)

-le lundi, mercredi et vendredi au foyer du 3^{ème} âge (Maison des Roses)

Où doit-elle choisir son appartement pour marcher moins de 1600m par jour, sachant que le plan de la grande rue est le suivant:



Total 15 heures plus 2 heures de contrôle mais il y a une plus grosse part de travail sur les fonctions qui sera sans doute faite à d'autres occasions dans les autres classes.

1.2. Années suivantes.

En 1993-1994, la progression a été sensiblement la même, mais le texte "M Dupont" a été modifié : voir VA5'.

En 1994-1995, le professeur A avait une classe plus faible (voir résultat de l'évaluation, annexe 1 bis) et a assez nettement réduit le travail sur les valeur absolue. Les situations "Monsieur Dupont" et "points sur la droite" n'ont pas été abordées. Nous avons le calendrier suivant :

- 11 et 12 janvier 1995 : T.D. sur les distances un peu plus développé que dans Val 1 (voir VA1), feuille de cours à peu près équivalente à Val 3 mais la propriété d'invariance par translation $d(x+a, y+a) = d(x, y)$ est mentionnée explicitement ainsi que sa conséquence $d(x, y) = d(x-y, 0)$ ce qui permet de définir $|x-y|$ de cette façon.
 - 14 janvier : fin du cours, début de Val 7
 - 17 janvier : jeu de cibles sur ordinateur
 - 18 janvier : correction de Val 7,
- soit 5 séances d'une heure et un contrôle (contrôle 6, voir plus loin annexe 4).

CLASSE 2

TRAVAUX DIRIGES

A/

L'unité de longueur est le centimètre.

1) *dans l'espace.*

A est un point connu de l'espace.

Où se trouvent les points M, M' et M" de l'espace tels que :

- a) $AM = 3$
- b) $AM' < 4.5$
- c) $AM'' > 2$

2) *dans le plan.*

A est un point connu du plan.

Où se trouvent les points M, M' et M" du plan tels que :

- a) $AM = 3$
- b) $AM' < 4.5$
- c) $AM'' > 2$

Colorier en rouge l'ensemble des points M, en vert l'ensemble des points M' et en bleu l'ensemble des points M".

3) *sur la droite*

Dessiner une droite (d), placer un point A sur cette droite (d).

Où se trouvent les points M, M' et M" de la droite (d) tels que :

- a) $AM = 3$
- b) $AM' < 4.5$
- c) $AM'' > 2$

Colorier en rouge, vert et bleu les points M, M' et M".

4) *sur la droite graduée*

Dessiner une droite graduée (x'x) d'origine O et placer le point A d'abscisse 1.08.

Quelles sont les abscisses des points M, M' et M" de (x'x) tels que:

- a) $AM = 3$
- b) $AM' < 4.5$
- c) $AM'' > 2$

B/ Voici le relevé de certaines températures hier matin à 8 heures, sous abris:

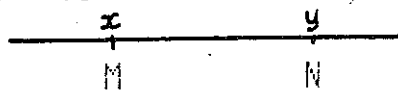
Dijon : -6° ; Caen : -2° ; Orléans : 0° ; Istres : 1° ; Avignon : 2° ; Biarritz : 7° Calculer les écarts de température entre deux quelconques de ces localités (on pourra les désigner par leur initiale)

DISTANCE ET VALEUR ABSOLUE

I / DEFINITIONS

Chaque nombre réel peut être représenté par un point sur une droite graduée et inversement à chaque point d'une droite graduée on peut associer un nombre réel. On parlera de "droite numérique" pour désigner une droite graduée sur laquelle sont représentés des nombres réels. On désignera souvent par la même lettre (b par exemple), à la fois le point qui, sur la droite graduée, a pour abscisse le réel b .

* On appelle **distance entre les deux nombres réels x et y** , la distance MN où M et N sont les points d'abscisses x et y sur une droite graduée.



On note $d(x,y) = MN$.

La distance entre deux nombres est calculée par la différence entre le plus grand et le plus petit de ces deux nombres.

$$d(x,y) = x - y \text{ si } x > y \text{ ou } d(x,y) = y - x \text{ si } y > x$$

Remarques:

1) $d(x,y) = d(y,x)$ car $MN = NM$

2)
$$d(x,0) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

* On appelle **valeur absolue d'un nombre x** , la distance de ce nombre à 0.

On note $|x|$

On a, indifféremment :

(1) $|x| = d(x,0)$

(2) $|x|$ est le nombre positif parmi x et $-x$.

(3)
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(4)
$$|x-y| = d(x-y,0) = d(x,y) = \begin{cases} x-y & \text{si } x-y \geq 0 \\ y-x & \text{si } x-y \leq 0 \end{cases}$$

II / PROPRIETES

x et y désignent deux nombres réels quelconques.

1) Deux nombres ont la même valeur absolue si et seulement s'ils sont égaux ou opposés.

$|x| = |y|$ signifie $x = y$ ou $x = -y$

2) Le produit des valeurs absolues deux nombres est égal à la valeur absolue du produit de ces deux nombres.

$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$

TRAVAUX DIRIGES

Monsieur Dupont travaille dans la compagnie WW dont le siège est à Paris. Il est chargé des relations avec les succursales situées en Seine-Maritime (Rouen, Yvetot, Le Havre).

Sa semaine est organisée ainsi:

- le lundi et le samedi, il se rend au siège de la compagnie WW;
- le mardi et le jeudi, il va à Rouen;
- le mercredi il va au Havre et le vendredi à Yvetot.

Chaque soir, Monsieur Dupont rejoint sa famille.

Le Havre, Yvetot, Rouen et Paris sont situés ,dans cet ordre, sur une même route (ordre Ouest-Est)

On supposera que "la route est droite".

Paris-Rouen : 110 km Le Havre-Yvetot : 50 km Le Havre-Rouen : 85 km

Quelle distance Monsieur Dupont parcoura-t-il chaque semaine

- s'il habite à Paris ?
- s'il habite à Barentin (Barentin est situé sur la route précédente, à 17 km à l'ouest de Rouen) ?

Monsieur Dupont n'aime pas conduire (et de plus il veut aider son pays à faire des économies d'énergie ...), il souhaite donc avoir la plus petite distance à parcourir chaque semaine.

Aidez Monsieur Dupont à trouver où il doit chercher son logement ?

Dans le cadre de la décentralisation, la compagnie WW installe son siège au Havre et garde une annexe à Paris.

Monsieur Dupont se rend toujours 2 fois par semaine au siège et une seule fois à Paris.

Où devra-t-il trouver un logement pour avoir à nouveau une distance minimale à parcourir ?

De plus Monsieur Dupont se rend chaque semaine avec sa famille chez ses parents qui habitent à Bolbec.

Bolbec est situé sur la route Le havre-Rouen , à 30 km à l'est du Havre.

Examinez de nouveau le problème avec ce déplacement supplémentaire.-

Valeur absolue, intervalle, distance et encadrement

I / Définitions

1) Soient deux réels a et b tels que $a < b$.

L'intervalle fermé $[a, b]$ est l'ensemble des réels x compris entre a et b .

$x \in [a, b]$ signifie $a \leq x \leq b$

2) Soient i un réel et r un réel strictement positif

L'intervalle fermé I de centre i et de rayon r est l'ensemble des réels x situés à une distance de i inférieure à r .

Pour un réel x , les énoncés suivants ont la même signification:

- | | | |
|-------------------------------|--------------|----------------|
| (1) $d(x, i) \leq r$ | en termes de | distance |
| (2) $ x - i \leq r$ | en termes de | valeur absolue |
| (3) $i - r \leq x \leq i + r$ | en termes d' | encadrement |
| (4) $x \in [i - r, i + r]$ | en termes d' | intervalle |

3) Soient deux réels a et b tels que $a < b$.

Le centre de l'intervalle fermé $[a, b]$ est le réel $(a+b)/2$

La longueur de $[a, b]$ est le réel $b-a$

Le rayon (ou la demi-longueur) de $[a, b]$ est le réel $(b-a)/2$

Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intervalle fermé $[a, b]$.

4) c étant un réel et r un réel strictement positif, on dit que

" c est une approximation de x à r près" pour exprimer le fait que:

$d(x, c) \leq r$ ou $|x - c| \leq r$ ou $c - r \leq x \leq c + r$ ou $x \in [c - r, c + r]$

II / Exercices

1) Compléter le tableau suivant (les intervalles sont fermés):

intervalle	bornes	centre	rayon	longueur	droite des réels
$[-2; 5]$					
	3 et 1				
		-2	5		
		-5		7	
	-2 et ...	1			
	3 et		5		

2) Compléter chaque ligne du tableau suivant:

valeur absolue	distance	droite des réels	encadrement	intervalle
$ x - 2 \leq 3$	$d(x, 2) \leq 3$		$-1 \leq x \leq 5$	$x \in [-1; 5]$
$ x \leq 7$				
$ x - 1 \leq 3/2$				
	$d(x, 5) \leq 9/2$			
			$1 \leq x \leq 4$	
				$x \in [-7; -2]$
$ x + 3/2 \leq 2$				
			$1.4 \leq \sqrt{2} \leq 1.5$	
				$\sqrt{3} \in [1.72; 1.73]$
$ 11 - 22/7 \leq 10^{-2}$				

CLASSE 2

TRAVAUX DIRIGES

(d) est une droite graduée munie du repère (O,I).
Placer les points A et B de (d) d'abscisses 3 et -2.
M est un point de (d) d'abscisse réelle x.

I / On appelle N le milieu du segment [OM]
Compléter le tableau suivant où ON représente la distance des points O et N:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
ON											

Ecrire ON en fonction de x. On notera $f(x) = ON$.

Choisir un repère orthogonal (O,I,J) puis dessiner la représentation graphique de f dans ce repère pour x compris entre -5 et 5.

II / On appelle P le symétrique du point O par rapport au point M.
AP désigne la distance des points A et P. Compléter le tableau suivant:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
AP											

Ecrire AP en fonction de x. On notera $g(x) = AP$

Dessiner la représentation graphique de g dans le repère (O,I,J) pour $x \in [-5;5]$.

Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on :

a) $AP = 12$

b) $AP = 8$

c) $AP = 7\sqrt{2}$

d) $AP = ON$

III / On appelle Q le point défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OQ} = 3 \overrightarrow{OM}$
Exprimer la distance des points B et Q en fonction de x. On notera $h(x) = BQ$

Représenter la fonction h dans le repère (O,I,J) sur l'intervalle $[-5;5]$.

Résoudre dans R les équations suivantes :

a) $h(x) = 12$

b) $h(x) = 8$

c) $h(x) = f(x)$

d) $h(x) = g(x)$

Résoudre graphiquement les équations suivantes:

a) $g(x) + 3 = 8 * f(x)$

b) $f(x-4) = 5/2$

Travaux dirigés : propriétés de la valeur absolue d'un nombre, encadrement

1) Compléter le tableau suivant :

a	b	a	b	a+b	a + b	a-b	a * b	a*b	
4	-5								
-2	1								
-3	3								
-3	5								
4	6								
2/3	-5/3								
5/7	3/35								
10 ²	10 ⁻¹								
-10 ⁻²	-10 ⁻¹								
-10 ³	10 ⁻³								
3.10 ⁻³	2.10 ⁻²								
-7.10 ⁻⁶	-3.10 ²								
$-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$								
$1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$								
$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$								
$\sqrt{6}-\sqrt{3}$	$\sqrt{8}+\sqrt{2}$								

2) Encadrer l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont 127.6 m à 0.4 m près et 51.5 m à 0.2 m près

3) deux cercles (c) et (c') concentriques de rayons respectifs r et r', donner un encadrement de la couronne sachant que $0.61 < r < 0.62$ et 1.25 est une valeur approchée de r' à 0.01 près. (prendre $3.14 < \pi < 3.15$)

4) Compléter le tableau suivant (donner l'intervalle de plus petit diamètre, si possible)

x	y	x+y	xy	-y	x-y	1/x	1/y	x/y	
[2; 7]	[2; 7]								
[1; 5]	[2; 3]								
[-3; -1]	[-5; -4]								
[1; 5]	[-4; -2]								
[-1; 1]	[1; 3]								

5) a et b deux nombres tels que $|a - 0.5| \leq 1$ et $|b - 1| \leq 0.5$, à quels intervalles appartiennent a et b ?

Donner un encadrement de a+b, a-b et ab (amplitude la plus faible possible.)

$$f(x) = |3x-3| + |x-2|$$

la représentation graphique de f est...

$$\begin{cases} \text{si } x \leq 1, & h(x) = -4x + 5 \\ \text{si } 1 \leq x \leq 2, & h(x) = 3x - 1 \\ \text{si } 2 \leq x, & h(x) = 4x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{si } x \leq -\frac{3}{2}, & j(x) = -2x - 3 \\ \text{si } -\frac{3}{2} \leq x, & j(x) = 2x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{si } x \leq 1, & l(x) = x \\ \text{si } 1 \leq x \leq 2, & l(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \text{si } 2 \leq x, & l(x) = 2x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

la représentation graphique de h est...

la représentation graphique de j est...

la représentation graphique de l est...

$$g(x) = |x+2|$$

la représentation graphique de g est...

$$\begin{cases} \text{si } x \leq 2, & i(x) = \frac{5}{8}x - \frac{1}{4} \\ \text{si } 2 \leq x, & i(x) = 3 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{si } x \leq 1, & l(x) = x \\ \text{si } 1 \leq x \leq 2, & l(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \text{si } 2 \leq x, & l(x) = 2x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

la représentation graphique de i est...

la représentation graphique de l est...

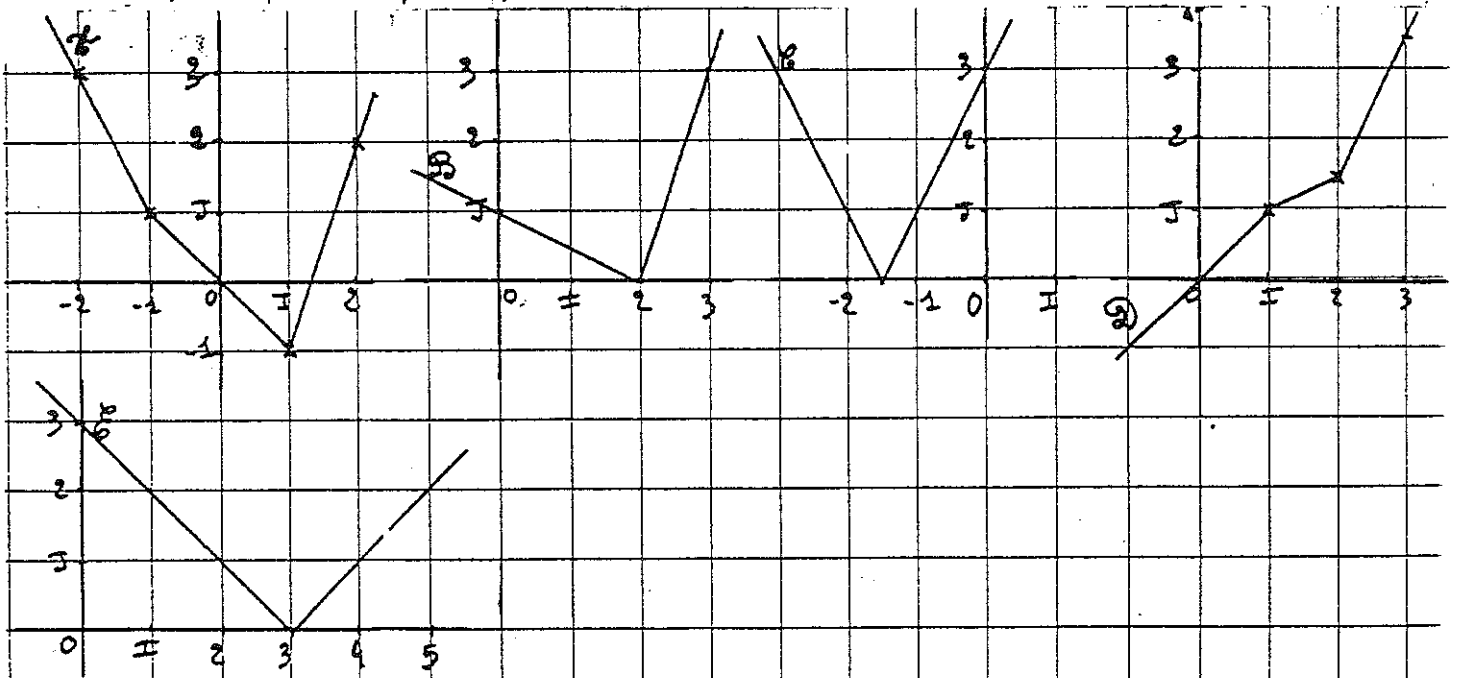
la représentation graphique de m est...

$$k(x) = 2|x| + 3$$

la représentation graphique de k est...

$$m(x) = |2x+3|$$

la représentation graphique de m est...



Classe 2Préparation du contrôle 6

Liste de savoir-faire	Référence
Savoir-faire des contrôles précédents	
Interpréter $ a - b $ comme <i>distance</i> des deux nombres a et b .	
Calculer la distance deux nombres après avoir comparé ces deux nombres. Penser à considérer deux cas pour écrire $ x - a $ sans les barres: 1) $x < a$ alors $ x - a = a - x$ 2) $a < x$ alors $ x - a = x - a$ Faire un tableau pour présenter l'écriture (sans les barres) d'une expression contenant des valeurs absolues ; penser à distinguer plusieurs cas.	
Utiliser les propriétés suivantes : " Deux nombres opposés ont la même valeur absolue." " Deux nombres qui ont la même valeur absolue sont égaux ou opposés"	
Choisir parmi les écritures suivantes, la plus adaptée au problème: 1) $d(a, b) < c$ (<i>distance</i>) 2) $ a - b < c$ (<i>valeur absolue</i>) 3) $b - c < a < b + c$ (<i>encadrement</i>) 4) $a \in [b - c, b + c]$ (<i>intervalle</i>) 5) a appartient à l'intervalle de centre b et de rayon c 6) b est une approximation de a à c près	
Utiliser les opérations sur les inégalités: a, b, c et d désignent des nombres réels 1) $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$ 2) $a < b$ alors $-b < -a$ 3) $c > 0$ et $a < b$ alors $ac < bc$ 4) $c < 0$ et $a < b$ alors $bc < ac$ 5) $0 < a < b$ alors $0 < 1/b < 1/a$	
Calculer sur les puissances, les fractions et les radicaux.	
Encadrer l'opposé d'un nombre, l'inverse d'un nombre positif, la somme de deux nombres et le produit de deux nombres positifs.	
Connaître et reconnaître les fonctions de référence: (parité, sens de variation, représentation graphique,...) $x \mapsto x$ (<i>identité</i>), $x \mapsto x^2$ (<i>carré</i>), $x \mapsto x $ (<i>valeur absolue</i>) a et b deux réels donnés, $x \mapsto b$ (<i>constante</i>), $x \mapsto ax$ (<i>linéaire</i>), $x \mapsto ax + b$ (<i>affine</i>), $x \mapsto ax^2$ (<i>carré</i>), $x \mapsto x - a $ (<i>valeur absolue</i>)	
Utiliser le sens de variation d'une fonction de référence pour minimiser (ou maximiser) une quantité Penser à utiliser la lecture graphique pour -contrôler un calcul -trouver des solutions entières ou décimales d'une équation -résoudre une inéquation ou un système d'inéquations - ...	

Travaux dirigés

Monsieur Dupont travaille dans la compagnie WW dont le siège est à Paris. Il est chargé, des relations avec les succursales situées en Seine-Maritime (Rouen, Yvetot, Le Havre).

Sa semaine est organisée ainsi:

- le lundi et le samedi, il se rend au siège de la compagnie WW;
- le mardi et le jeudi, il va à Rouen;
- le mercredi il va au Havre et le vendredi à Yvetot.

Chaque soir, Monsieur Dupont rejoint sa famille.

Le Havre, Yvetot, Rouen et Paris sont situés ,dans cet ordre, sur une même route (ordre Ouest-Est)

On supposera que "la route est droite".

Paris-Rouen : 110 km Le Havre-Yvetot : 50 km Le Havre-Rouen : 85 km

Quelle distance Monsieur Dupont parcoura-t-il chaque semaine

- s' il habite à Paris ?
- s' il habite à Barentin (Barentin est situé sur la route précédente , à 17 km à l'ouest de Rouen) ?

De quoi dépend la distance parcourue chaque semaine ? Exprimer cette distance par une fonction.

Monsieur Dupont reçoit une indemnisation hebdomadaire pour une distance parcourue inférieure à 800 km. Caractériser les endroits où Monsieur Dupont doit choisir son logement s'il ne veut pas avoir de frais de transport ?

VA 5'

Monsieur Dupont n'aime pas conduire , il souhaite donc avoir la plus petite distance à parcourir chaque semaine. Aidez Monsieur Dupont à trouver où il doit chercher son logement?

Dans le cadre de la décentralisation, la compagnie WW installe son siège au Havre et garde une annexe à Paris.

Monsieur Dupont se rend toujours 2 fois par semaine au siège et une seule fois à Paris.

Où devra-t-il trouver un logement pour avoir à nouveau une distance minimale à parcourir ?

De plus Monsieur Dupont se rend chaque semaine avec sa famille chez ses parents qui habitent à Bolbec.

Bolbec est situé sur la route Le havre-Rouen , à 30 km à l'est du Havre.

Examinez de nouveau le problème avec ce déplacement supplémentaire.

I / A/

L'unité de longueur est le centimètre.

1) dans l'espace.

A est un point connu de l'espace.

Où se trouvent les points M, M' et M" de l'espace tels que :

- a) $AM = 3$
- b) $AM' < 4.5$
- c) $AM'' > 2$

2) dans le plan.

A est un point connu du plan.

Où se trouvent les points M, M' et M" du plan tels que :

- a) $AM = 3$
- b) $AM' < 4.5$
- c) $AM'' > 2$

Colorier en rouge l'ensemble des points M, en vert l'ensemble des points M' et en bleu l'ensemble des points M".

3) sur la droite

Dessiner une droite (d) , placer un point A sur cette droite (d).

Où se trouvent les points M, M' et M" de la droite (d) tels que :

- a) $AM = 3$
- b) $AM' < 4.5$
- c) $AM'' > 2$

Colorier en rouge, vert et bleu les points M, M' et M".

4) sur la droite graduée

Dessiner une droite graduée (x'x) d'origine O et placer le point A d'abscisse 1.08.

Quelles sont les abscisses des points M, M' et M" de (x'x) tels que:

- a) $AM = 3$
- b) $AM' < 4.5$
- c) $AM'' > 2.3$

B / L'unité de longueur est le centimètre.

A et B sont deux points distants de 6 cm

1) dans l'espace.

Où se trouvent les points M et M' de l'espace tels que :

- a) $AM = MB$
- b) $AM' < M'B$

2) dans le plan.

Où se trouvent les points M et M' du plan tels que :

- a) $AM = MB$
- b) $AM' < M'B$

Colorier en rouge l'ensemble des points M, en vert l'ensemble des points M'

3) sur la droite

Soit (d) la droite définie par les points A et B

Où se trouvent les points M, M' et M'' de la droite (d) tels que :

- a) $AM = MB$
- b) $AM' < M'B$
- c) $AM'' = 2 M''B$

Colorier en rouge les points M, en vert les points M' et en bleu les points M''.

4) sur la droite graduée

Dessiner une droite graduée (x'x) d'origine O et placer le point A d'abscisse 1.08 et le point B d'abscisse - 4.92. Quelles sont les abscisses des points M, M' et M'' de (x'x) tels que:

- a) $AM = MB$
- b) $AM' = 3 M'B$
- c) $5 AM'' = M''B$

III/ A / Voici le relevé de certaines températures hier matin à 8 heures, sous abris :
Dijon : -6 ; Caen : -2 ; Orléans : 0 ; Istres : 1 ; Avignon : 2 ; Biarritz : 7

Calculer les écarts de température entre deux quelconques de ces localités
(on pourra les désigner par leur initiale) -

B / (D) est une droite graduée de repère (O, I)



- 1°) Quels sont les écarts entre les nombres 4 et 9 ?
 " " -4 et -7 ?
 " " 5 et -7 ?
 " " -1 et 9 ?
 " " -4 et 4 ?

2°) a) Sur l'axe, quels sont les nombres a tels que l'écart entre a et 3 vaut 4 ?

b) Sur l'axe, quels sont les nombres b tels que l'écart entre b et -3 vaut 10.5 ?

3 °) a) Que penser des nombres dont l'écart à zéro est $7/3$?

b) Comment exprimer l'écart entre a et zéro ?

c) Comment exprimer l'écart entre deux nombres réels a et b ?

2. Professeur B. Année 1994-1995.

Emploi du temps :

classe entière : 1h le mardi, 1h le jeudi, 1h le vendredi une semaine sur deux,

T.D. : 1h pour un groupe le mardi, un groupe le jeudi (par ordre alphabétique)

Module : 1h 1/2 une semaine sur deux le lundi : un groupe pour les moyens, un groupe forts et faibles ensemble, et, de temps en temps, après chaque contrôle choix individuel d'élèves (sur un point à retravailler)

Plan de cours sur valeur absolue, encadrements. (1-20 dec 94)

séance 1 : 1er décembre 94, classe entière

- Distance de points sur un axe gradué

A (2), B (4), C (5), D (-2), E (-3) F (0,5) placés sur un axe dessiné au tableau. Elle interroge une douzaine d'élèves pour donner des distances entre ces points. Certains élèves remarquent spontanément la symétrie et le fait que c'est toujours positif.

- Dans le cahier de cours, elle demande aux élèves de noter quelques exemples et la définition de la distance entre deux nombres réels x et y comme la distance entre les points d'abscisses x et y sur un axe gradué.

Propriétés : $d(x,y) = d(y,x)$ et $d(x,y) \geq 0$

- Autres exemples : $d(6,13)$, $d(21,16)$, $d(-5,-3)$, $d(1,-3)$

- Elle demande aux élèves d'énoncer une règle numérique qui permet de répondre sans regarder le dessin : le plus grand moins le plus petit, qui est formalisée en

si $x \geq y$, $d(x,y) = x - y$; si $y \geq x$, $d(x,y) = y - x$. puis

$x - y \geq 0$ etc...

Chacune des formes est notée dans le cahier

- Valeur absolue introduite comme une notation : $|x - y| = d(x,y)$.

Reprise de toutes les propriétés précédentes avec la nouvelle notation.

- Exercice 1 : Chercher les x tels que $d(x,3) = 2$; $d(5,x) = 3$; $d(3,x) = 2$; $d(-5,x) = 1$; $d(-2,x) = 5$.

Les élèves cherchent puis correction au tableau par deux méthodes : géométrique et algébrique.

- Exercice 2 : Chercher les x tels que $d(x,3) \leq 2$.

Aux élèves qui font des erreurs par la méthode algébrique, elle conseille de recommencer avec la méthode géométrique.

La correction collective est renvoyée au prochain cours.

- Exercice à chercher pour mardi 6 :

Résoudre $|x - 2| = 1$; $|x - 2| = 9$; $|x - (-3)| = 1$; $|x + 4| = 2$; $|x - 5| \leq 7$.

Séance 2 : 6 Décembre 1994, classe entière

Séance entièrement consacrée à la correction des exercices à chercher à la maison, par les deux méthodes. Les élèves ont privilégié la méthode algébrique ce qui occasionne beaucoup d'erreurs que le professeur laisse s'exprimer. Elle insiste sur la méthode géométrique en disant que l'autre peut être difficile (voir notamment ce qui concerne la résolution de l'inéquation).

Séance 3, 6 et 8 Décembre 1994 : TD en demi-classe.

- Exercice 1. Résoudre géométriquement $d(x,5) = 1$; $d(x,5) = 8$; $|x - 5| = 2$; $|x - 5| = 4,5$; $|x - 5| = 7$; $d(x,5) \leq 0,1$; $|x - 5| \leq 1$.

- Exercice 2. $d(x,-2) = 0,5$; $d(x,-2) = 2$; $d(x,-2) = 4,1$; $|x - (-2)| = 1$; $|x + 2| = 3$; $d(x,-2) \leq 6$; $|x + 2| \leq 0,5$.

- Exercice 3. $|x-3| = 6$; $|x+4| = 2$; $|x-2,1| = 1$; $|x-1,3| = 7$; $|x+3| \leq 5$.

Les élèves cherchent individuellement en comparant avec leurs voisins. Le professeur se promène et va voir les élèves qui appellent. Quand tout le monde a fini le premier exercice, elle arrête la recherche et demande "Qu'est-ce que j'ai cherché à vous faire apprendre ?" Diverses réponses des élèves sont approuvées mais elle insiste sur le fait qu'il y avait un seul point intéressant (5) et interroge Fabrice (qui s'est trompé) sur le deuxième exercice. Elle attire l'attention sur le $-(-2)$ puis sur le $+2$ qui cache un $-(-2)$ et dit que dans le 3ème exercice, il faut s'adapter. Moussou redemande l'explication du +, Florence la donne.

Peu après le professeur écrit un autre texte.

- Exercice 4 :

$[7,9]$ est l'ensemble des solutions d'une équation du type $|x-a| \leq r$. Laquelle ?

$[3,8 ; 4,2]$

$[-1 , 5]$

$[-10 , -6]$

Guillaume fait remarquer qu'il s'agit d'inéquations.

Les exercices ne sont pas corrigés collectivement. Le professeur vérifie ce qu'a fait chacun des élèves. Les 3ème et 4ème qui n'ont pas été terminés par tout le monde seront corrigés en classe entière dans l'heure qui suit.

D'autres exercices sont donnés pour ceux qui ont terminé : n° 72- 77 p. 47. (Ce sont des exercices sur les puissances et les simplifications de fractions).

Séance 4, 8 Décembre 1994 : classe entière

- Correction des exercices 3 et 4 du T.D. Dans un groupe $|x-1,3| = 7$ était remplacé par $|x-1,3| \leq 7$, c'est celui-là qui est corrigé.

Puis, on corrige les exercices à faire pour ce jour là :

Résoudre graphiquement $|x-2| = |x-5|$; $|x+1| = |x-4|$; $|x+2| = |x+6|$; $|x+2| \geq |x+6|$; $|x-3| \geq |x-8|$

- Suite du cours. Equations

"On a beaucoup manipulé, vous savez faire, on va simplement écrire le cas général dans le cours $|x-a| = r$ avec... Aujourd'hui, je n'ai pas eu les remarques que j'ai eues dans le premier groupe : "si vous mettez $|x-1| = -3$ "

Des élèves : pas de solution

P. Alors je précise $r \geq 0$.

etc...

Le cas de l'équation est traité, avec un exemple pour répondre à "pourquoi "ou" et pas "et".

La sonnerie intervient avant l'inéquation.

- Exercices pour mardi : n° 27-28 p. 221

P. précise que c'est le même genre avec un peu de fractions et de nombres à virgule.

Dans les exercices 26 à 29, déterminez les nombres a et ϵ tels que la relation donnée soit équivalente à $|x-a| \leq \epsilon$.

27. $x \in [\frac{3}{2} ; \frac{7}{2}]$; $x \in [\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}]$; $x \in [-\frac{1}{2} ; \frac{5}{4}]$

28. $x \in [3,2 ; 7,8]$; $x \in [-1,4 ; 2,6]$; $x \in [-4,6 ; 2,1]$

Séance 5, 13 Décembre 1994 : classe entière

a) Correction des exercices. 27 et 28 : détermination du centre et du rayon dans le cas de fractions ou d'écritures à virgule.

b) cours :

- inscription dans le cahier du cas général pour la résolution de $|x-a| \leq r$ avec $r \geq 0$

- définition de $|x|$ et propriétés

- résolution de $|x| = r$ après 2 exemples.

Séance 6, 13 et 15 Décembre 1994 : TD en demi-classe.

- Exercice 1. Résoudre a) $|y| = 3$; b) $|y| \leq 3$; c) $|y| = 6$; d) $|y| \leq 4$.
- Exercice 2. Résoudre a) $|2x-1| = 3$; b) $|2x-1| \leq 3$; c) $|-4x+2| = 6$; d) $|-3x+2| \leq 4$.
- A partir de l'écriture des solutions pour le premier, on remplace y par ce qu'il faut pour trouver les solutions du 2ème.
- Elle conclut en disant "je ne vous en donnerai pas plus de ce genre là. Je voulais seulement vous montrer qu'avec la géométrie on pouvait résoudre quand il y avait x ou y tout seuls mais que quand il y a 2x ou des choses comme ça c'est plus difficile avec la géométrie alors on utilise y". Elle annonce ensuite "Notre chapitre s'appelait valeur absolue et encadrements, on va passer aux encadrements et faire des exercices avant de le mettre dans le cours".
- résolution de $|x-2| \leq 0,1$ et introduction du vocabulaire : "2 est une valeur approchée de x à 0,1 près"
- si $3 \leq x \leq 3,01$ "3 est une valeur approchée de x par défaut"
- elle sollicite les élèves pour l'autre cas. Eric propose $2,9 \leq x \leq 3$ et dit "3 est une valeur approchée de x par excès"
- traduction du langage "valeur approchée" dans les langages "valeur absolue", "encadrements".:
- * 1,63 est une valeur approchée de x au centième près"
- * -0,35 est une valeur approchée de x à $3 \cdot 10^{-2}$ près.
- * 0,43 est une valeur approchée de x à 10^{-2} près.
- * 0,55 est une valeur approchée de x par défaut à 10^{-2} près.
- * 3,15 est une valeur approchée de π par excès à 10^{-2} près.

Séance 7, 15 Décembre 1994 : classe entière

a) cours

- précision sur le cours précédent : a et r sont donnés, et usage des mathématiciens à propos des lettres du début ou de la fin de l'alphabet.
- Inéquations $|x| \leq r$ $r \geq 0$ et r donné.
- propriétés de la valeur absolue :
- * Quel que soit x, $|x|^2 = x^2$.
- * $\sqrt{x^2} = |x|$
- * Théorème préliminaire. Deux nombres qui ont le même carré sont égaux ou opposés.
- * Conséquence. Si deux nombres positifs ont les mêmes carrés, alors ils sont égaux.
- * $|xy| = |x| |y|$; $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$; $|x+y| \leq |x| + |y|$

Toutes les propriétés sont démontrées, la première par disjonction de cas, les autres en se servant des propriétés déjà démontrées.

- Encadrements : définitions de "a est une valeur approchée de x à r près", "a est une valeur approchée de x par défaut à r près", "a est une valeur approchée de x par excès à r près".

b) Exercice numéro 44 page 222.

En utilisant l'encadrement $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, encadrez chacun des nombres suivants :

$$2 + \sqrt{3} ; 1 - 2\sqrt{3} ; \frac{2 - 3\sqrt{3}}{5}.$$

Séance 8, 16 Décembre 1994 : classe entière

- Correction de l'exercice ci-dessus. A ce propos rappel sur le produit des termes d'une inégalité par un nombre négatif, placements sur un axe gradué.
- exercice n° 46. Encadrez l'aire d'un rectangle dont les dimensions des côtés à la précision d'un millimètre sont 10 cm et 5 cm. Non traité, seules les données sont expliquées.
- cours sur les inégalités illustré par l'exemple précédent :
- * si $a \leq b$ et si $x \leq y$ alors $a+x \leq b+y$, ce qui permet d'encadrer le périmètre du rectangle,
- * si $0 \leq a \leq b$ et si $0 \leq x \leq y$ alors $0 \leq ax \leq by$, ce qui permet d'encadrer l'aire du rectangle.

Valeur approchée de l'aire : on trouve $48,51 \leq A \leq 51,51$. Un élève propose 50,01 à 1,5 près, ce qui correspond exactement à ce qu'on faisait jusque là dans la traduction encadrement/intervalle. P. explique que ce n'est pas ce qu'on fait dans la pratique, on prend une valeur plus agréable, quitte à perdre de l'information. Elle propose 50 à 1,6 près. Une élève proteste parce qu'alors 51,55 pourrait convenir, ce qui n'est pas le cas. Malgré l'explication du professeur : si on agrandit l'intervalle, il n'y a pas de problème, l'élève semble peu convaincue.

- Exercice 47 cherché par les élèves non corrigé :

ABCD est un trapèze de bases [AB], de hauteur [DH] (figure fournie). Les mesures à 1 mm près sont $AB = 10,2$ cm, $CD = 6,4$ cm, $Dh = 3,1$ cm.

Donnez une valeur approchée de l'aire du trapèze.

Séance 9, 20 Décembre 1994 : classe entière

- Correction de l'exercice à faire à la maison : n°45 p. 222

En utilisant les encadrements suivants $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, encadrez chacun des nombres suivants :

$$\sqrt{3} = \sqrt{2} ; 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} ; \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} .$$

- autre exercice : $4 \leq x \leq 8$ et $2 \leq y \leq 32$. Encadrer $x - y$.

Conclusion : on met une étape intermédiaire : $x - y = x + (-y)$.

- Avec les mêmes données, encadrer xy et $\frac{x}{y}$.

On écrit dans le cours: pour encadrer $x - y$, on encadre d'abord $-y$; pour encadrer $\frac{x}{y}$ on

encadre d'abord $\frac{1}{y}$ et on écrit l'exemple pour $\frac{1}{y} : 0 \leq y \leq 32$; on divise tout par y :

$0 \leq 1 \leq \frac{32}{y}$, ensuite on divise par 32 : $0 \leq \frac{1}{32} \leq \frac{1}{y}$ puis de l'autre côté $y \geq 2$ donc $\frac{2}{y} \leq 1$ donc $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$. On résume en disant que si $2 \leq y \leq 32$, on a $\frac{1}{32} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ ou encore " quand on prend les inverses de 2 nombres positifs, le plus grand des nombres a l'inverse le plus petit " : si $y \leq 32$ alors $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{32}$.

La séance (dernière avant les vacances de Noël) se termine en demandant à quelques élèves ce qu'ils ont appris aujourd'hui.

- Exercices à faire pour la rentrée : n° 55 et 56 p. 223.

55. Déterminez un encadrement de $\frac{1}{x}$ à l'aide de nombres décimaux à une décimale.

L'encadrement devra avoir la plus faible amplitude possible : $0,47 \leq x \leq 0,51$.

56 Déterminez un encadrement de $\frac{x}{y}$ à l'aide de nombres décimaux à une décimale.

L'encadrement devra avoir la plus faible amplitude possible : $1,1 \leq x \leq 1,2$; $0,5 \leq y \leq 0,6$.

Les exercices sont corrigés le 5 Janvier.

A partir du 5 janvier début de la notion de fonction.

Contrôle le 17 janvier : la moitié du contrôle porte sur valeur absolue, encadrements, l'autre sur le début de la notion de fonctions.

2 versions : droite, gauche (voir textes en annexe 4)

Fonction valeur absolue entre le 24 janvier et le 6 Février.

Séance 10, T.D. des 24 et 26 janvier :

- Correction du contrôle 4 dans lequel il y avait à résoudre $|x-3| = |x+1|$ et $|x-3| \leq |x+1|$ dans une des versions.
- A la fin, le professeur fait écrire "Fonction valeur absolue" dans le cahier de cours $f: x \rightarrow |x|$ Df = $\mathbf{R}$ et demande de tracer le graphe.
- Ecriture dans le cahier de la parité et de la définition par cas ($x \geq 0$, $x \leq 0$) pour justifier l'alignement.

Séance 11 : Cours du 26 janvier

- Correction d'exercices sur le sens de variation des fonctions affines et du second degré.
- fin du cours sur la V.A.
- * expression de $|x|$ "sans les barres" dans un tableau
- * exemples d'autres fonctions utilisant la V.A. : $g(x) = |x-3|$: représentation graphique et expression "sans les barres" dans un tableau.
- à chercher pour mardi
- * $h(x) = |x+1|$: courbe et expression "sans les barres".
- * $f(x) = -x^2 + 4$: courbe, tableau de variation et démontrer que f est décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty, 0]$.

Séance 12, T.D. des 31 janvier et 2 Février :

"Monsieur Dupont version 2" 1ère partie jusqu'à l'expression de la fonction (texte VA 5' de la classe A)

Séance 13, T.D. des 6 et 9 Février :

"Monsieur Dupont" 2ème partie : tableau d'expression de la fonction "sans les barres" et représentation graphique.
Reprise dans l'autre hypothèse.

Total : environ 13 heures + 1h pour le contrôle.

3. Professeur C 1994-1995.

Emploi du temps :

Modules : mercredi 10h-11h30 par demi classe.

T.D. : Jeudi 8h à 9h pour un groupe, 13h à 14h pour l'autre.

Cours : jeudi 14h à 15h et vendredi 13h à 14h30.

Déroulement de l'enseignement de la valeur absolue.

Séance 1. 26 janvier. T.D. d'introduction à la valeur absolue.

La feuille de T.D. "Valeur absolue d'un nombre réel" commence par la définition algébrique de la valeur absolue et continue avec 5 exercices qui vont être traités sur plusieurs séances. Nous la reproduisons dans l'encadré qui suit :

Valeur absolue d'un nombre réel
<u>Définition</u> Soit a un nombre réel, on appelle "valeur absolue de a " (et on note $ a $) le nombre réel égal à a lorsque a est positif, le nombre réel $\text{opp}(a)$ (ou $-a$) lorsque a est négatif. c'est-à-dire : $ a = a$ si a est positif $ a = -a$ si a est négatif
<u>Applications</u> 1. Exprimer les nombres suivants sans le symbole $ \ $; $ 2 =$; $ -2 =$; $ 2,7 =$; $ -7,51 =$; $ 3-\sqrt{5} =$; $ 3-\sqrt{14} =$ $ \frac{5}{7} - 2 =$; $ 4 - \frac{9}{2} =$; $ 6 + \frac{5}{4} =$ 2. x est un élément de $\mathbb{R}$; comment peut-on écrire le nombre $ x-3 $ sans le symbole $ \ $? Même question pour $ 2x+1 $, pour $ 5-3x $ 3. Représenter graphiquement les fonctions suivantes : $f : x \longrightarrow x-3 $; $g : x \longrightarrow 2x+1 $; $h : x \longrightarrow 5-3x $ 4. Résoudre les équations, inéquations . $ x-3 = 2$; $ x-3 \leq 2$; $ 2x+1 = -1$; $ 2x+1 > -1$; $ 5-3x = 4$; $ 5-3x \leq 4$ $ x-3 = 2x+1 $ 5. Représenter la "fonction de référence" $f : x \longrightarrow x $

La définition est donnée et les incompréhensions de la définition se manifestent aussitôt. La plupart des élèves (dont de très bons élèves) font beaucoup d'erreurs. Certains enlèvent purement et simplement les barres, d'autres font bien $|-2| = 2$ mais écrivent

$$|\frac{5}{7} - 2| = \frac{5}{7} + 2 \text{ ou } |3 - \sqrt{5}| = 3 + \sqrt{5}.$$

Au bout de 10 minutes, le professeur fait une mise au point, rappelle la définition en disant que la valeur absolue est égale au nombre ou à son opposé et que pour prendre l'opposé d'une différence, il faut prendre l'opposé de chacun des termes. Elle envoie des élèves au tableau pour corriger collectivement l'exercice 1 et fait réécrire au premier la définition sous la forme $|a| = a$ si a positif, $|a| = \text{opp } a$ si a négatif.

Pour l'exercice 2, le premier exemple a l'air de se traiter assez facilement mais le deuxième pose davantage de problèmes. Une élève par exemple commence à distinguer $x > 0$; après question, il semble qu'elle pense que $2x + 1$ positif pour $x > 0$ (et donc $2x + 1$ négatif pour x négatif).

Pour la correction de l'exercice 2 ($|x - 3|$) au tableau, le professeur suggère de recourir au tableau de signes qui a été abondamment utilisé dans les séances précédentes pour étudier le signe de produits.

Les cours des 26 janvier et 27 janvier portent sur les fonctions de référence : fonctions affine, affine par morceaux, carré, cube, fonction racine carrée et fonction inverse et interrogation surprise d'une demi-heure sur les fonctions.

Séance 2. TD du 2 février : suite de la feuille de T.D.

Institutionnalisation de deux méthodes pour tracer la représentation graphique de $|x-3|$: 1) on sait qu'on a deux demi-droites (mise en rapport avec les intervalles infinis), on prend le point (3,0) commun aux deux demi-droites et un point sur chaque ; 2) on trace la droite $y = x-3$, on garde la partie où $y > 0$ et le symétrique du reste par rapport à Ox. Les élèves traitent ensuite les autres exemples.

Séance 3. Cours du 2 février

Résolution des équations : sur $|x-3| = 2$, institutionnalisation de deux méthodes, celle du tableau et la méthode graphique avec commentaires sur l'intérêt et les inconvénients éventuels, annonce d'une 3ème méthode qui n'a été rencontrée que par un des groupes et qui est reportée à la semaine suivante.

Résolution des inéquations $|x-3| \leq 2$ en commençant cette fois par la méthode graphique. Pour la méthode du tableau, il faut regarder les cas et réunir les intervalles.

Cas $|2x+1| = -1$, 3 méthodes : si on est malin réponse immédiate, méthode graphique et méthode algébrique traitée quand même tout en insistant sur le fait que c'est inutile de la faire mais parce qu'ils vont voir quelque chose (en fait qu'il faut être vigilant sur l'intervalle de validité des équations, ce qui sera particulièrement important dans le cas des inéquations et dans le cas où on a des x des deux côtés.

Inéquation $|2x+1| > -1$; mêmes remarques.

Pour $|5-3x|$ méthode graphique mais avec résolution algébrique des équations pertinentes pour avoir les solutions exactes. Inéquation $|5-3x| \leq 4$ par la méthode graphique "parce qu'on connaît déjà les bornes" bien que l'élève interrogée ait proposé le tableau.

Pas de cours le 3 février

Séance 4, TD du 9 février : suite de la feuille de T.D.

Correction de l'exercice donné le 2/2/95. Dans le groupe 10 élèves ont utilisé le tableau et 5 la méthode graphique. Correction du tableau puis de la méthode graphique : pour cette dernière les équations des demi-droites sont écrites sur le graphique et ce dernier sert à sélectionner les bonnes équations qui sont résolues algébriquement de façon à trouver les solutions exactes.

"Le graphique me dit combien il y a de solutions et quelles équations il faut résoudre si j'ai pris soin d'écrire les équations sur chacune des demi-droites. Il nous aide à faire du travail utile et à ne pas faire du travail inutile".

Les élèves font encore la représentation graphique de $|x|$ qui sera portée dans le cahier de cours puis commencent des exercices sur les fonctions.

Séance 5 : Cours du 9 février

Correction d'exercices sur les fonctions qui n'étaient pas terminés dans le groupe 2.

Exercice n°41 et 42 p. 148 du livre.

Il s'agit de trouver les points d'un axe gradué qui vérifient certaines relations.

$|x-2| + |x+4| = 6$; $|x-2| + |x+4| = 8$; $|x-2| + |x+4| = 4$ pour l'exercice 41 et

$|x-2| = 2|x+4|$; $2|x-2| = |x+4|$; $|x-2| \leq |x+4|$; $2|x-2| \leq |x+4|$ pour l'exercice 42.

Les élèves sont un peu déroutés ; la première question est corrigée par la méthode du tableau.

Le professeur précise que ce n'est pas terminé qu'il faut donner une réponse en termes de points et que tout l'exercice est un peu comme cela et qu'ils verront plus tard s'ils peuvent le résoudre autrement.

10 février : contrôle n° 5 (voir plus loin)

Les observations s'arrêtent là (reprise des cours du second semestre à Paris 7). Total : 5 heures observées. La partie sur les encadrements et les intervalles n'a pas été observée.

4. Professeur D. 1994-1995.

Emploi du temps :

T.D.-module : mardi 15h à 17h pour un groupe, mercredi 8h à 10h pour l'autre.

Cours : vendredi de 13h à 15h.

Séance 1. 24 (ou 25) janvier. T.D. d'introduction à la valeur absolue.

Déroulement observé du mardi 24 janvier 1995. T.D. groupe 1.

Présentation à partir de la distance : villes de la vallée du Rhône puis représentation sur un axe gradué (voir feuille n°1).

Les élèves travaillent sur le classeur sous le titre "Introduction à la valeur absolue". Le professeur est obligé d'intervenir auprès de chaque groupe d'élèves pour qu'ils utilisent les abscisses pour le c) plutôt que les données et la carte. Comme il n'y a pas de point hors du dessin, les élèves n'ont en effet aucune raison de ne pas se servir de la carte. Les élèves travaillent individuellement ou par deux et le professeur corrige auprès de chacun.

- Après 30 minutes, le professeur demande aux élèves de prendre le cahier de cours et fait le cours, en écrivant presque tout au tableau. La distance entre nombres est définie à partir de la distance entre points sur la feuille de T.D. mais il en va autrement dans le cahier de cours. Voici ce qu'ont pu copier les élèves (avec entre parenthèses quelques interventions orales fortes et parfois susceptibles d'être notées aussi).

Chapitre 5. Valeur absolue. Distance. Encadrement.

I. Distance et valeur absolue.

a) Distance entre deux réels.

La distance entre deux réels x et a se calcule par la différence entre le plus grand et le plus petit de ces nombres.

$$d(x,a) = \begin{cases} x - a & \text{si } x \geq a \\ a - x & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

Lorsque $x = a$, $d(a,a) = 0$.

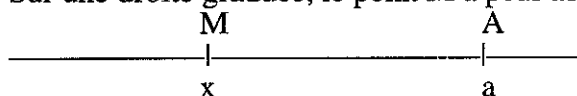
(Elle appelle l'attention et annonce oralement qu'on va prendre une notation plus condensée)

$d(x,a) = |x - a|$ "valeur absolue de $x - a$ "

Exemple $d(x,1) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

b) Interprétation géométrique.

Sur une droite graduée, le point M a pour abscisse x , le point A a pour abscisse a .



$$d(x,a) = AM = |x - a|.$$

c) valeur absolue d'un réel.

(Question : je vous ai dit $d(x,a) = |x - a|$, comment définir $|x|$? Des élèves proposent par la distance à 0)

$$|x| = |x - 0| = d(x,0)$$

(Et, pour la calculer, comment faire ? N'écrivez pas maintenant)

$$|x| = d(x,0) = \begin{cases} x - 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 - x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

A horizontal line with an arrow pointing to the right. There are two points marked on the line: one at the origin labeled '0' and another to the right labeled 'x'.

(Notez)

Définition : la valeur absolue d'un réel x , notée $|x|$ est la distance entre les réels x et 0.

$$d(x,0) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Exemples : $|\frac{3}{7}| = \frac{3}{7}$; $|-5| = 5$; $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

Ce dernier exemple pose problème et attire des réponses comme $\sqrt{2}|$ et $1 + \sqrt{2}|$.

d) Conséquences immédiates de la définition

1) La distance entre deux réels est un réel positif.

$d(x,a) = |x - a|$ est un réel positif

$|x|$ est un réel positif.

2) $|x - a| = 0$ équivaut à $x = a$

$d(x,a) = 0$.

$|x| = 0$ équivaut à $x = 0$

3) La distance entre x et a est la même que la distance entre a et x

$d(x,a) = d(a,x)$ $|x - a| = |a - x|$

$d(x,0) = d(0,x)$ $|x| = |-x|$

Deux réels opposés ont la même valeur absolue.

Dans le reste de la séance, les élèves doivent reprendre les exercices à partir du 6). Le professeur demande de faire des dessins à partir du 7).

L'exercice 6 est corrigé au tableau. Les autres (7 et 8) sont à terminer pour vendredi en même temps qu'il faut apprendre le cours.

Séance 2. Cours du 27 janvier.

La séance commence par la correction d'un problème puis les élèves abordent la suite de la feuille n°2 sur valeur absolue jusqu'au tableau de la 3ème page que les élèves ont à terminer pour le 2 février, avec des insertions de cours dont nous reproduisons les grandes lignes.

Le cours porte sur

II. Valeur absolue et intervalles.

a est un réel donné quelconque, r est un réel donné qu'on prendra toujours positif.

Pour résoudre $d(x,a) = r$, le professeur fait appel au dessin puis demande comment cela se traduit en valeur absolue et fait écrire sur le cahier :

1) Quels sont les réels x qui sont à une distance r du réel a ? $d(x,a) = r$.

Il faut s'appuyer sur le dessin (fait) à partir duquel on obtient les points d'abscisses $a+r$ et $a-r$.

Chercher les x tels que $d(x,a) = r$ revient à déterminer les points M d'abscisse x tels que $AM = r$, ce qui se traduit avec une valeur absolue par :

$|x - a| = r$ équivaut à $x = a + r$ ou $x = a - r$ où r est un réel positif.

Exemple proposés : $|x + 2| = 3$; $|x + 10| = -7$; $|x - 7| = 0$.

2) Quels sont les réels x dont la distance au réel a est inférieure à r ?

$d(x,a) \leq r$ $|x - a| \leq r$

De même, le professeur fait appel à l'utilisation du dessin pour placer $a - r$ et $a + r$ (distance égale à r) pour passer aux écritures $a - r \leq x \leq a + r$ ou $x \in [a - r, a + r]$

Enoncé de l'équivalence des 4 écritures dans le cas où r positif.

Etiquetage : voilà ce qu'il y a à savoir faire.

Traitement de 2 exercices : résoudre $|x - 1| \leq 5$; traduire $x \in [-3, 7]$ à l'aide d'une valeur absolue.

Les élèves travaillent sur le tableau de la feuille n°3. Seule la première ligne est corrigée.

Séance 3. T.D. du 31 janvier (ou 1er février)

On commence par corriger les deux tableaux de la troisième page sur les valeurs absolues avant de continuer le cours (je reproduis ci-dessous presque tout ce qui est écrit au tableau).

III. Propriétés des valeurs absolues.

1) Réels de même valeur absolue.

$|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$. Des réels de même valeur absolue sont égaux ou opposés.

En repartant de $|x| = x$ si $x \geq 0$..., le professeur examine les 4 cas possibles pour conclure à l'équivalence annoncée écrite aussi en français : deux réels de même valeur absolue sont égaux ou opposés, aussitôt appliquée à l'exemple par un élève au tableau :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x - 1| = 5 - x|$

On vérifie que les deux valeurs trouvées, -4 et 2 vérifient bien l'équation donnée.

2) Valeur absolue d'un produit et d'un quotient.

Propriété : $|x \times y| = |x| \times |y|$.

La valeur absolue d'un produit de deux nombres est égale au produit des valeurs absolues de ces deux nombres.

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} ; \left| \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{|y|}$$

$$|x^2| = |x \times x| = |x| \times |x| = |x|^2.$$

On vérifie que chacune des extrémités est égale à x^2 .

3) Valeur absolue d'une somme.

Remplissage du tableau suivant par les élèves puis correction collective :

x	y	x	y	x + y	x+y	x+y	conclusion
1	2						
-1	-3						
2	-5						
-3	1						

Conclusion au tableau :

Propriété : $|x+y| \leq |x| + |y|$ Inégalité triangulaire.

Distribution de la feuille de T.D. suivante que les élèves commencent à résoudre.

Pour les équations cela se passe à peu près bien malgré quelques erreurs du genre $|2x - 1| = 4$

ou $|2x - 1| = -4$ ou des erreurs dans la résolution des équations du premier degré comme $x - \frac{1}{2}$

$= 2$ traduit en $x = \frac{2}{-\frac{1}{2}}$; en revanche, pour les inéquations, les élèves remplacent massivement

$|3x - 6| \leq 9$ par $3x - 6 \leq 9$ ou $3x - 6 \leq -9$.

Le professeur leur recommande d'utiliser la méthode du b).

Les élèves doivent chercher l'exercice 2 pour vendredi. Dans le deuxième groupe, le lendemain, la plupart des élèves ont traité l'exercice 2 en classe.

Séance 4. Cours du 3 Février

Cours sur la fonction valeur absolue. Définition algébrique, représentation graphique.

Résolution graphique d'équations : $|x| = 3$; $|x| = -2$; $|x| = 0$.

Résolution d'inéquations : $|x| \leq a$ équivaut à $-a \leq x \leq a$, traduction graphique.

Pour $|3x - 1| = 2$, le professeur introduit un changement de variable : $|X| = 2$... puis traite

$|7x+3| = 1$; $|4x-5| \leq 2$. Les élèves font ensuite l'exercice 3 qui est corrigé au tableau.

Le cours continue par V. Encadrements, valeur approchée d'un nombre.

Définitions des encadrements et diverses valeurs approchées puis encadrements d'une somme et d'un produit, avec des règles données généralement.

Pour la séance suivante les élèves doivent chercher l'exercice 4 et le n° 49 p. 158.

Séance 5. T.D. du 7 (ou 8) février.

Correction de "la chasse au trésor". et de l'exercice 49 : $-2,31 < x < -2,29$; $-3,25 < y < -3,24$, encadrer la somme, la différence et le produit.

Les élèves traitent ensuite la feuille d'exercices. Les trois premiers ont vérifiés individuellement, les deux derniers sont corrigés au tableau.

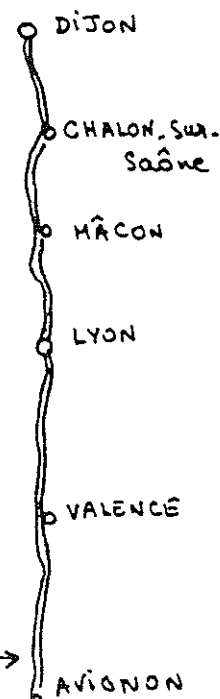
Nous avons donné une description plus brève des séances 4 et 5 : le style est toujours le même et il ne semble pas y avoir de différence entre les séances de cours et de travaux dirigés, à part l'effectif. Le professeur écrit entièrement au tableau ce qui est à copier sur le cahier de cours.

Total : 10 heures.

1. La Vallée du Rhône

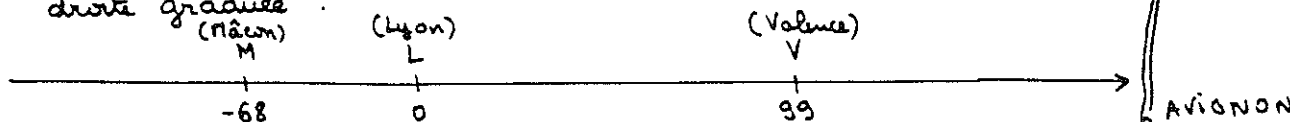
Dans la vie de tous les jours, le mot distance est fréquemment utilisé. Vous savez en particulier qu'une distance s'exprime toujours par un réel positif: sur une carte on a lu les distances suivantes, en kilomètres:

	à Mâcon	à Chalon-sur-Saône	à Dijon		à Valence	à Avignon
de Lyon	68	125	192	de Lyon	99	224



a) Calculez la distance entre Mâcon et Dijon, entre Avignon et Valence, entre Valence et Avignon, entre Valence et Mâcon.

Représentons cette situation de la façon suivante sur une droite graduée.



b) Avec les conventions ainsi faites, quelle est l'abscisse du point A (Avignon)? du point D (Dijon)? du point C (Chalon)?

c) Utilisez ces abscisses pour calculer les distances entre C et M, entre A et M, entre V et D, entre D et C. (On les notera CM; AM; VD; DC)

d) Un véhicule X circule sur la route Dijon - Avignon. Sur la droite graduée on repère X par son abscisse x .

Calculer en fonction de x les distances entre X et A
entre X et V
entre X et L
entre X et D

2. Distance et valeur absolue

Sur une droite graduée Δ les points O, A, B, C, D, E, F ont pour abscisses respectives: 0; 7; 4; -5; $-\frac{3}{2}$; 12; $\frac{1}{2}$

Placez sur Δ , les points précédents.

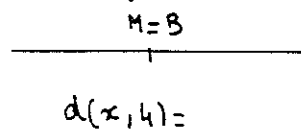
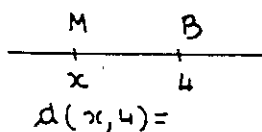
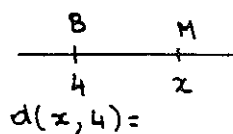
La distance entre A et B est: $7-4=3$; On dit aussi que la distance entre 4 et 7 (ou entre 7 et 4) est 3. On note $AB = d(7; 4) = 3$

définition: On appelle distance entre les deux nombres réels x et y la distance MN où M et N sont les points d'abscisses x et y sur une droite graduée. On note $d(x, y) = MN$

1°) Calculez les distances entre $-\frac{3}{2}$ et 7; entre -5 et 12; entre 12 et -5; entre 4 et $\frac{1}{2}$; entre $-\frac{3}{2}$ et -5; entre 4 et 0; entre 0 et -5.

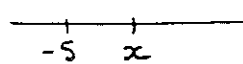
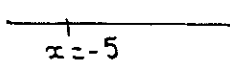
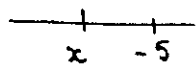
(1.2) 2°) Essayez d'en déduire une règle générale pour calculer $d(x; y)$

3°) Soit le point M d'abscisse x sur la droite graduée Δ .
On veut calculer la distance entre x et 4. Envisageons plusieurs cas:



De manière condensée, la distance entre x et 4 est notée $|x - 4|$ (qui se lit « valeur absolue de x moins 4 ») ou $|4 - x|$ (expliquez pourquoi)

4°) Calculez la distance entre les réels x et -5 dans chacun des cas suivants:



Exprimez cette distance à l'aide de la notation « valeur absolue »

5°) Donnez toutes les interprétations possibles de $|x|$

6°) $|x - 12|$ désigne la distance entre deux réels. Lesquels?
Même question pour $|x + 5|$ puis $|x + \frac{3}{2}|$

7°) a) $|x - 7|$ désigne la distance entre deux réels. Lesquels?
b) Aidez-vous d'une droite graduée pour trouver tous les réels x tels que $|x - 7| = 5$

En procédant de la même façon, quels sont les réels x tels que: $|x - \frac{1}{2}| = 2$
puis $|x + 5| = 1$?

8°) a) Représentez sur une droite graduée l'ensemble des réels x tels que: $|x - 4| \leq 1$? Donnez un encadrement de x .

b) Même question avec $|x + 2| \leq 3$

c) Même question avec $|x| \leq 2$

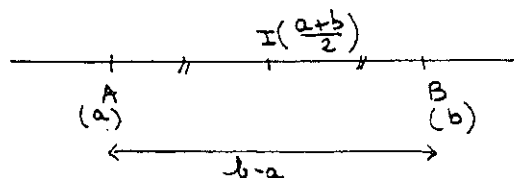
3. Valeur absolue et intervalles

le réel x appartient à l'intervalle $[a; b]$ équivaut à $a \leq x \leq b$

le milieu (ou centre) de l'intervalle $[a, b]$ est le réel $\frac{a+b}{2}$

la longueur de l'intervalle $[a, b]$ est le réel $b - a$

le rayon (ou demi-longueur) de l'intervalle $[a, b]$ est le réel $\frac{b-a}{2}$



(403)

2°.

1) Compléter le tableau suivant : (les intervalles sont fermés)

Intervalle	bornes	centre de l'intervalle	rayon de l'intervalle	droite des réels	Valeur absol
$x \in [-2; 5]$					
	3 et 1				
		1	3		
		-1	$\frac{5}{2}$		
					$ x-2 \leq 3$
					$ x \leq 4$

2) Compléter chaque ligne du tableau suivant :

valeur absolue	distance	droite des réels	encadrement	intervalle
$ x-1 \leq \frac{3}{2}$				
	$d(x, 5) \leq \frac{9}{2}$			
			$1 \leq x \leq 4$	
				$x \in [-7; -2]$
$ x + \frac{3}{2} \leq 2$				
			$1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$	

ex1: Résolution d'équations et d'inéquations contenant des valeurs absolues1) Soit l'équation $|2x-1|=4$

a) Résoudre cette équation en utilisant la propriété:

$$|X|=4 \text{ équivaut à } X=4 \text{ ou } X=-4$$

b) Etablir l'égalité $|2x-1|=2|x-\frac{1}{2}|$. En déduire que l'équation $|2x-1|=4$ est équivalente à $d(x; \frac{1}{2})=2$. Résoudre cette dernière équation.2) Reprendre les questions du 1) pour résoudre l'équation $|5+2x|=1$ 3) Résoudre les inéquations: $|3x-6| \leq 9$ puis $|0,5x+2| \leq 1$ ex2: La fonction valeur absolueOn considère la fonction $f: x \mapsto |x|$ 1) Calculer $f(-3)$; $f(0)$; $f(2)$; $f(1-\sqrt{2})$.Si $x \in [0; +\infty[$ alors $f(x) =$ Si $x \in]-\infty; 0]$ alors $f(x) =$ 2) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité: 2cm). Représenter graphiquement la fonction f dans ce repère.3) Résoudre, par le calcul, les équations suivantes: $|x|=3$; $|x|=-2$; $|x|=0$. Retrouver ces résultats à l'aide de la représentation graphique de f .4) Résoudre, par le calcul, les inéquations suivantes: $|x| \leq 1$; $|x| \geq \frac{7}{2}$. Retrouver ces résultats à l'aide de la représentation graphique de f .ex3: On considère la fonction $g: x \mapsto |x+2|$ 1) Ecrire $g(x)$ sans le symbole de valeur absolue.2) Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter graphiquement la fonction g dans ce repère.

3) Résoudre, par le calcul et graphiquement les équations suivantes:

$$|x+2|=3 \quad ; \quad |x+2|=-1 \quad ; \quad |x+2|=0$$

puis les inéquations: $|x+2| \leq 3$; $|x+2| \leq 2$; $|x+2| > 1$ ex4: "La chasse au trésor"

On vient de retrouver un parchemin attribué à Rackham le pirate. Sur ce parchemin figure le plan d'une île et le message que nous avons traduit ainsi: "sur la ligne qui passe par le cocotier et le mât, j'ai caché un trésor. Deux fois la distance du trésor au mât, plus trois fois la distance du trésor au cocotier est égal à 65 pas. De plus, j'ai compté 30 pas entre le mât et le cocotier".

1^{re} étape: mathématiser cette situation et choisir l'inconnue. Pour cela, on assimile la ligne dont il est question à une droite graduée d'origine le point M (mât); le cocotier au point C d'abscisse 30. L'emplacement du trésor à un point T d'abscisse x .

2^e étape: mettre cette situation en équation3^e étape: résoudre l'équation4^e étape: où peut se trouver le trésor de Rackham le pirate?

ex1: Résolution d'équations et d'inéquations contenant des valeurs absolues1) Soit l'équation $|2x-1|=4$

a) Résoudre cette équation en utilisant la propriété:

$$|X|=4 \text{ équivaut à } X=4 \text{ ou } X=-4$$

b) Etablir l'égalité $|2x-1|=2|x-\frac{1}{2}|$. En déduire que l'équation $|2x-1|=4$ est équivalente à $d(x; \frac{1}{2})=2$. Résoudre cette dernière équation.2) Reprendre les questions du 1) pour résoudre l'équation $|5+2x|=1$ 3) Résoudre les inéquations: $|3x-6| \leq 9$ puis $|0,5x+2| \leq 1$ ex2: La fonction valeur absolueOn considère la fonction $f: x \mapsto |x|$ 1) Calculer $f(-3)$; $f(0)$; $f(2)$; $f(1-\sqrt{2})$.Si $x \in [0; +\infty[$ alors $f(x) =$ Si $x \in]-\infty; 0]$ alors $f(x) =$ 2) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités: 2cm). Représenter graphiquement la fonction f dans ce repère.3) Résoudre, par le calcul, les équations suivantes: $|x|=3$; $|x|=-2$; $|x|=0$. Retrouver ces résultats à l'aide de la représentation graphique de f .4) Résoudre, par le calcul, les inéquations suivantes: $|x| \leq 1$; $|x| \geq \frac{7}{2}$. Retrouver ces résultats à l'aide de la représentation graphique de f .ex3: On considère la fonction $g: x \mapsto |x+2|$ 1) Écrire $g(x)$ sans le symbole de valeur absolue.2) Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter graphiquement la fonction g dans ce repère.

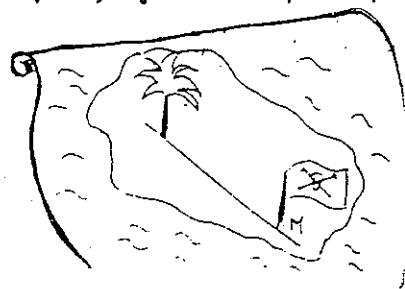
3) Résoudre, par le calcul et graphiquement les équations suivantes:

$$|x+2|=3 \quad ; \quad |x+2|=-1 \quad ; \quad |x+2|=0$$

puis les inéquations: $|x+2| \leq 3$; $|x+2| \leq 2$; $|x+2| > 1$ ex4: "La chaise au trésor"

On vient de retrouver un parchemin attribué à Rackham le pirate. Sur ce parchemin figure le plan d'une île et le message que nous avons traduit ainsi: "sur la ligne qui passe par le cocotier et le mât, j'ai caché un trésor. Deux fois la distance du trésor au mât, plus trois fois la distance du trésor au cocotier est égal à 65 pas. De plus, j'ai compté 30 pas entre le mât et le cocotier".

1^{re} étape: mathématiser cette situation et choisir l'inconnue
 Pour cela, on assimile la ligne dont il est question à une droite graduée d'origine de point M (mât); le cocotier au point C d'abscisse 30. L'emplacement du trésor à un point T d'abscisse x .

2^e étape: mettre cette situation en équation3^e étape: résoudre l'équation4^e étape: où peut se cacher le trésor de Rackham le pirate?

Exercices sur les valeurs absolues

ex1: Écrire plus simplement, c'est à dire sans les barres de valeur absolue: $|2-\sqrt{3}|$; $|3-\pi|$; $|0,5 - \frac{\sqrt{2}}{2}|$

ex2: Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes:

$$|x-2|=3 \quad ; \quad |x|=7 \quad ; \quad |x+4|=\frac{1}{5} \quad ; \quad |5x-7|=|x-1|;$$

$$2|3x+1|=5|x-1|; \quad |3x-5|=-3 \quad ; \quad |7x+4|=2 \quad ; \quad |2-x|=\frac{2}{3}$$

ex3: Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes:

$$|x-3| \leq 2 \quad ; \quad |x| < 1 \quad ; \quad |2x-3| \leq 5 \quad ;$$

ex4: Donner un encadrement du nombre x dans chacun des cas suivants: a) x a pour valeur ^{approchée} $\sqrt{1,5}$ à 10^{-1} près
 b) $-1,2$ est une valeur approchée à $0,7$ près de x
 c) $-12,51$ est une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de x
 d) $-15,48$ est une valeur approchée par excès à 10^{-2} près de x .

ex5: Compléter le tableau:

$5 < x < 8$	$x \in]5; 8[$	$d(x; \frac{13}{2}) < \frac{3}{2}$	$ x - \frac{13}{2} < \frac{3}{2}$
	$x \in]-5; 9[$		
		$d(x; -1) < 0,1$	
			$ x+2 < \frac{1}{4}$
$-1 < x < 2$			

Annexe 4.

Textes des contrôles

Classe A. Contrôle n° 5 : voir texte original page suivante.

Classe A. Contrôle n° 6 : 31 janvier 1995.

Exercice 1 (7 points)

I) A et B sont deux points distants de 7cm.

- 1) Donner l'ensemble (E) des points M de la droite (AB) tels que : $AM < MB$.
- 2) Donner l'ensemble (F) des points N de la droite (AB) tels que : $AN = 3 NB$.
- 3) Donner l'ensemble (G) des points P de la droite (AB) tels que : $AP = 3$.
- 4) Donner l'ensemble (H) des points Q de la droite (AB) tels que : $BQ \geq 5$.

II) (δ) est une droite graduée munie du repère (O, I). On donne les points et leurs abscisses : A(-4), B(3), C(-5), E(-7), F(-1/2) et G(3/2). Donner les distances suivantes : d(A,B), d(B,C), d(E,C), d(E,F) et d(F,G).

Exercice 2 (10 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$|x - 2| = 3 \qquad |x + 5| < 3 \qquad |x + 7| = 6$$

$$|x - 1| = \frac{3}{2} \qquad |x - \frac{1}{2}| = 2 \qquad |x - \frac{5}{3}| > 1$$

Exercice 3 (8 points)

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Placer les points suivants définis par leurs coordonnées dans le repère (O, I, J) : A(2,-1), B(4,2), C(0,-4), E(8,8), F(-1,-2) et G(1,1).

- 1) Calculer les coordonnées des vecteurs AB, AC et AE. Prouver qu'ils sont colinéaires. En déduire que les points A, B, C sont alignés.
- 2) Calculer les coordonnées du milieu H du segment [BE].
- 3) Prouver que FGAC est un parallélogramme.

Exercice 4 (15 points).

Compléter le tableau suivant :

valeur absolue	distance	centre	rayon	droite réelle	encadrement	intervalle
$ x - \frac{1}{2} \leq 3$						
	$d(x, 2) < 1$					
				$] -1 ; 3]$		
					$\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{17}{2}$	
						$x \in [-4; 2]$
$ x \leq \frac{2}{3}$						
					$-\frac{2}{7} \leq x \leq \frac{2}{7}$	

Contrôle n° 5Exercice 1 (17 points)

(O,I,J) est un repère orthogonal.

A / On donne la parabole (P) , représentation graphique de la fonction f :

$$x \mapsto x^2 + 6x + 5$$

(voir feuille 1)

1) S' aider du graphique pour résoudre les équations et les inéquations suivantes:

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 5$

c) $f(x) = -4$

d) $f(x) < 0$

e) $f(x) > 2$

f) $-3 < f(x) < 5$

(ne pas oublier d' indiquer votre méthode)

Retrouver par le calcul b) et c) .

2) Proposer une méthode pour résoudre graphiquement l' équation :

$$x^2 + 6x + 5 = 2x + 5$$

Donner les solutions.

B / On considère la fonction g définie par : $x \mapsto -x^2 + 5$

1) Sur le graphique précédent, construire la parabole (Q) représentation graphique de g

2) Résoudre dans R les équations et inéquations suivantes :

a) $g(x) = 1$

b) $g(x) = -4$

c) $g(x) = 0$

e) $g(x) < 1$

d) $g(x) > 0$

e) $-4 < g(x) < 4$

C / Résoudre graphiquement puis par le calcul : $f(x) > g(x)$.

Exercice 2(8 points)

ABC est un triangle . Soit Q le milieu de [AC]. R est défini par $\overrightarrow{BR} = 2 \overrightarrow{BC}$.

P est le point défini par : $\overrightarrow{PB} + 2 \overrightarrow{PA} = \vec{0}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AP} = 1/3 \overrightarrow{AB}$.

2) Montrer que $\overrightarrow{PR} = -4/3 \overrightarrow{AB} + 2 \overrightarrow{AC}$

3) Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

4) Montrer que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 3 (15 points)

Résoudre dans R les équations suivantes:

a) $(5x - 4)^2 - (3x + 7)^2 = 0$

b) $(x + 2)^2 = x^2 - 4$

c) $(2x - 3)(x + 1) = (x + 1)^2$

d) $(x - 3)^2 = (1 - 2x)^2$

e) $(2x - 7)(3x + 1) - (4x - 5)(2x - 7) = 0$

f) $x^2 + 2x - 3 = 0$

g) $(3x - 4)^2 = 3x - 4$

h) $x^2 - 5 = 0$

NOM

Prénom

(feuille 1)

Classe 2₁₃

Mardi 10 Janvier 1995

Contrôle n° 5 (suite)

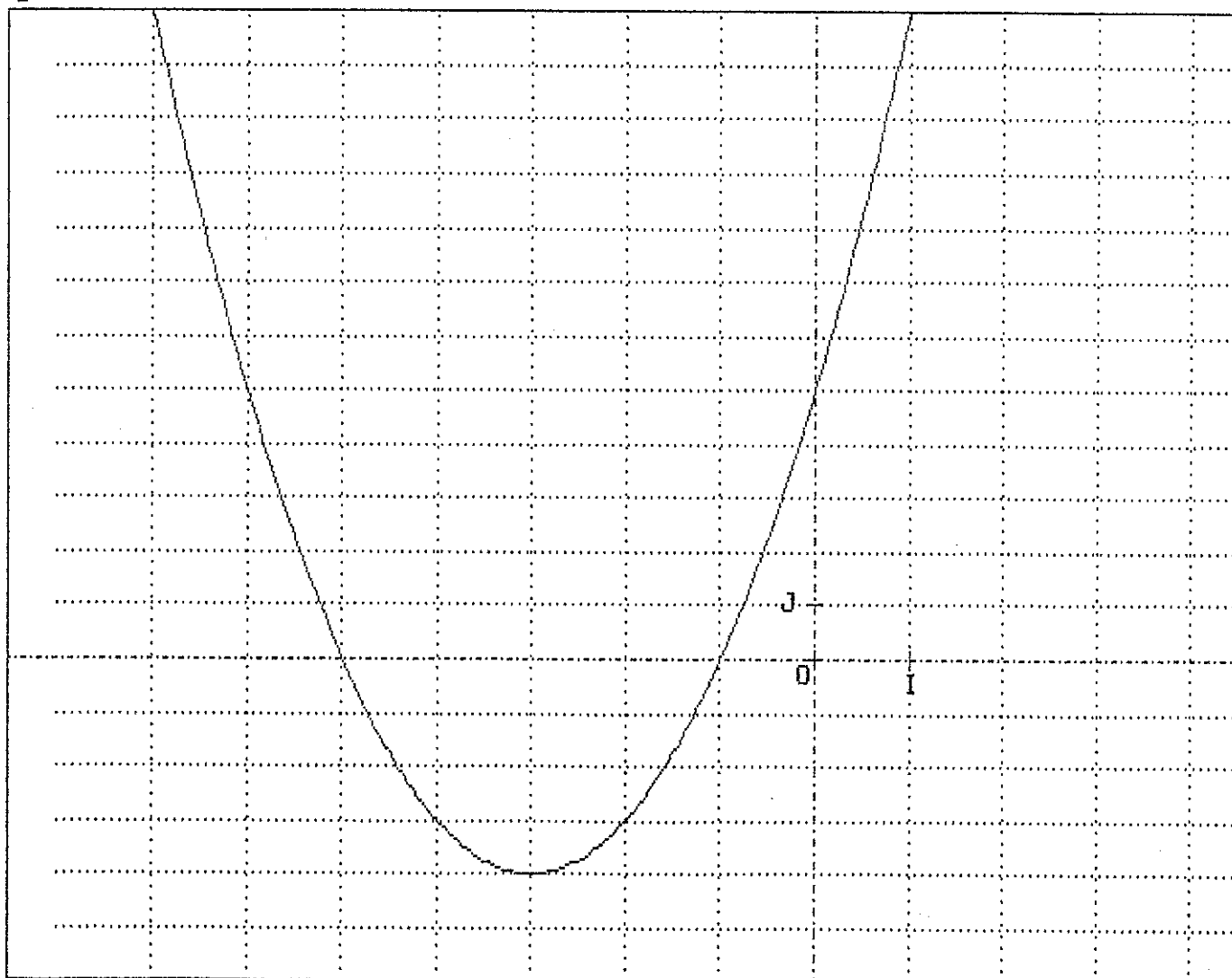
Exercice 1 (dessin)

(O,I,J) est un repère orthogonal.

A / On donne la parabole (P) , représentation graphique de la fonction f :

$$x \mapsto x^2 + 6x + 5$$

$$y = x^2 + 6x + 5$$

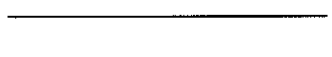


Classe B. Contrôle 4 du 17 janvier 1995

Le texte, comme pour chaque contrôle, comportait deux versions pour que des élèves voisins n'aient pas le même texte. Nous donnons ci-dessous la version 1 avec, entre parenthèses, les valeurs numériques de la version 2. Pour l'exercice 3 qui ne porte pas sur la valeur absolue, nous ne donnons qu'une version.

Exercice 1.

1) Compléter le tableau suivant en prenant en exemple la première ligne qui est remplie.

distance	valeur absolue	dessin	intervalle	encadrement
$d(x; 5) \leq 3$	$ x-5 \leq 3$		$x \in [2;8]$	$2 \leq x \leq 8$
				$3 \leq x \leq 9$ $(1 \leq x \leq 5)$
			$x \in [-10;5]$ $(x \in [-6;1])$	
				
	$ x-2 \leq 4$ $(x-1 \leq 4)$			
$d(x; -2) \leq 3$ $(d(x; -3) \leq 5)$				

2) Résoudre

- a) $|x-2| = |x+3|$ ($|x-3| = |x+1|$)
b) $|x+1| \leq |x-4|$ ($|x+4| \leq |x-5|$).

Exercice 2.

1) Le volume V d'une pyramide à base rectangulaire est donné par la formule $V = \frac{1}{3} Lx \times h$

a) L mesure 6 (8) à 10^{-1} près, l mesure 4 (3) à 10^{-1} près, h mesure 11 (10) à 10^{-1} près. Encadrer V en ne donnant qu'une décimale.

b) Pour une autre pyramide, L mesure 4 (3) à 10^{-2} près, l mesure 3 (2) à 10^{-2} près, V mesure 5 (4) à 10^{-1} près. Exprimer h en fonction de V , L et l puis encadrer h en ne donnant qu'une décimale.

2) a) Dans un rectangle, L mesure 7,2 (7,4) à 10^{-1} près par excès, l mesure 3,4 (3,2) à 10^{-1} près par défaut, encadrer le périmètre P .

b) Dans un autre rectangle, L mesure 15,6 (15,3) à 10^{-1} près, le périmètre P mesure 23 (21) à 10^{-1} près, encadrer la largeur l .

Exercice 3.

a) On considère la fonction f définie sur $[1, 10]$. On donne le tableau de valeurs suivant :

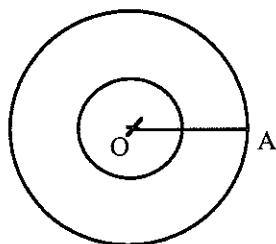
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	8	10	10,5	11	10,8	10,7	10,5	7	5	4

- Construire la courbe représentant f dans un repère (unité 1cm ou 1 grand carreau sur chaque axe)

- Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 6$ $f(x) = 2$

- Déterminer l'intervalle I formé de tous les x tels que $f(x) \geq 5$.

b)



OA mesure 100.

OM mesure x , x est compris entre 0 et 100.

Calculer le périmètre total $p(x)$ de la couronne et son aire $a(x)$.

Lorsque x augmente, comment varie $p(x)$?
et $a(x)$?

Remarques concernant les exercices 1 et 2.

On remarquera que les deux versions ont été choisies très soigneusement pour que les difficultés soient exactement équivalentes.

Dans l'exercice 1, la tâche consiste en une conversion de registres. La congruence peut être affectée par les signes, des difficultés peuvent être apportées par la nature des nombres, en particulier les fractions, la taille des nombre peut permettre ou non la représentation. Le professeur a donné la même valeur à chacune des variables didactiques de l'exercice.

Pour l'exercice 2 aussi, on peut remarquer que les versions sont équivalentes du point de vue des nombres en jeu : même ordre de grandeur, même nombre de décimales.

Remarquons cependant pour la question 1b, la difficulté n'était pas exactement la même pour l'arrondi : dans un cas on trouvait $1,97... \leq h \leq 2,06...$ que les élèves arrondissent à $1,9 \leq h \leq 2$ s'ils font une troncature ou à $2 \leq h \leq 2,1$ s'ils prennent les valeurs les plus proches ; dans l'autre cas on trouve $1,22... \leq h \leq 1,28...$ que les élèves arrondissent plus facilement à $1,2 \leq h \leq 1,3$ parce que cela correspond aux valeurs les plus proches et que la troncature donnerait le même nombre des deux côtés. Mais pour voir cette différence, il fallait avoir effectué les calculs jusqu'au bout.

Pour la deuxième question, il y avait une erreur de texte. On donnait en fait une valeur approchée du demi-périmètre, ce qui fait qu'en appliquant les formules on trouvait un encadrement de l par des négatifs.

Classe B. Contrôle 5 : 14-2-1995.

Le contrôle 5, dont on trouvera le texte complet ci-dessous, portait principalement sur les fonctions : représentation graphique, sens de variation et résolution graphique d'équations et inéquations. Deux exercices concernaient des paraboles et le troisième la valeur absolue. C'est ce dernier exercice que nous analysons ici.

Exercice 1.

(O, I, J) est un repère orthogonal.

A. On donne la parabole (P), représentation graphique de la fonction f :

$$x \longmapsto x^2 + 6x + 5 \quad D_f = [-8, 1]$$

(la représentation graphique tracée par ordinateur est fournie, en grande taille : 1,4 cm pour unité en abscisse, 0,7 cm en ordonnée, quadrillage apparent, cf contrôle 5 classe A)

1) S'aider du graphique pour résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 5$

c) $f(x) = -4$

d) $f(x) < 0$

e) $f(x) > 2$

(ne pas oublier d'indiquer votre méthode)

2) Retrouver par le calcul b) et c)

B. On considère la fonction g définie par : $x \longmapsto -x^2 + 5$ sur $D_g = \mathbf{R}$

1) Montrer que la fonction g est paire.

2) Déterminer le sens de variation de g sur l'intervalle $[0, +\infty[$ puis sur l'intervalle $]-\infty, 0]$. En déduire le tableau de variation de g.

3) Construire point par point la représentation graphique de g sur le graphique précédent.

4) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$ puis $f(x) > g(x)$.

Exercice 2.

On donne la fonction f telle que $f : x \longmapsto |x-5|$.

1) Représenter graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

2) Résoudre graphiquement $|x-5| = |3+x|$ puis $|x-5| \leq |3+x|$.

Classe C. Contrôle 5 :10-2-95

Le professeur de la classe C donne régulièrement des petits contrôles surprise courts et deux fois par trimestre un contrôle d'une heure et demie. Les moyennes trimestrielles font intervenir, avec une pondération, tous ces contrôles ainsi que les devoirs à la maison. Par exemple, pour le 3ème trimestre il y avait deux contrôles sur 20, coefficient 3, deux "interro" sur 8 et 12 respectivement coefficient 2, un devoir sur 20 coefficient 1. Le professeur C utilise la même technique que le professeur B : elle donne deux versions de ses contrôles pour que les élèves voisins n'aient pas les mêmes.

Le contrôle 5 (10 février 1995), en grande partie commun avec la classe B, avait pour thème les fonctions. Nous reproduisons le texte ci-dessous :

Exercice 1.

(O, I, J) est un repère orthogonal.

A. On donne la parabole (P), représentation graphique de la fonction f :

$$x \longmapsto x^2 + 6x + 5$$

(la représentation graphique tracée par ordinateur est fournie, en grande taille : 1,4 cm pour unité en abscisse, 0,7 cm en ordonnée, quadrillage apparent, cf contrôle 5 de la classe A)

1) S'aider du graphique pour résoudre les équations et inéquations suivantes :

- | | | |
|---------------|---------------|--------------------|
| a) $f(x) = 0$ | b) $f(x) = 5$ | c) $f(x) = -4$ |
| d) $f(x) < 0$ | e) $f(x) > 2$ | f) $-3 < f(x) < 5$ |

(ne pas oublier d'indiquer votre méthode)

Retrouver par le calcul b) et c)

2) Proposer une méthode pour résoudre graphiquement l'équation :

$$x^2 + 6x + 5 = 2x + 5$$

Donner les solutions.

B. On considère la fonction g définie par : $x \longmapsto -x^2 + 5$

1) Montrer que la fonction g est paire.

2) Déterminer le sens de variation de g sur l'intervalle $[0, +\infty[$ puis sur l'intervalle $]-\infty, 0]$. En déduire le tableau de variation de g.

3) Construire point par point la représentation graphique de g sur le graphique précédent.

4) Résoudre graphiquement puis par le calcul $f(x) = g(x)$ puis $f(x) > g(x)$.

Exercice 2.

On donne la fonction f telle que $f : x \longmapsto |x-5|$.

1) Représenter graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

2) Résoudre $|x-5| = |3+x|$ puis $|x-5| \leq |3+x|$.

Exercice 3.

a) Résoudre graphiquement $x^2 - 2 \leq 0$; $x^3 + 8 > 0$; $\frac{1}{x} < 0,5$.

b) Résoudre $|2x+6| = 5$.

Le contrôle de la classe C est plus long que celui de la classe B parce que les élèves disposent d'une heure et demie alors qu'ils n'ont qu'une heure dans la classe B. On peut remarquer que toutes les suppressions dans la classe B concernent des résolutions algébriques.

Sur la valeur absolue, il y a eu, dans la classe C, une partie de ce contrôle 5 et deux exercices dans des "interrogations surprise" :

- **le 17 mars** : "Représenter graphiquement la fonction f telle que $f(x) = |2x+6|$ (resp. $|5x+10|$). Résoudre $|2x+6| = 5$ $|2x+6| = -5$ $|2x+6| < 5$ " (resp. $|5x+10| = 2 \dots$).

- **le 5 mai** : "Résoudre $|2x+5| = 7$ $|x-4| < -1$.

L'exercice 1 du contrôle 6 du 31 mars a été consacré à l'aspect distance et encadrements :

a) On donne les réels x et y tels que $\frac{2}{7} < x < \frac{3}{7}$ et $\frac{5}{7} < y < \frac{5}{6}$. Encadrer $x+y$, $2x-y$, xy , et $\frac{x}{3y}$ à l'aide de rationnels.

b) Un pavé droit a pour dimensions L , l et h exprimées en dm et telles que leurs valeurs approchées par défaut à 10^{-1} près sont respectivement 2,3 ; 1,5 et 0,8.

1) Donner un encadrement de L , l , et h dont l'amplitude est la plus faible.

2) Donner un encadrement, en dm^3 , de son volume V .

3) 3 dm^3 est-il une valeur approchée de V à $0,3 \text{ dm}^3$ près ?

$3,1 \text{ dm}^3$ est-il une valeur approchée de V à $0,4 \text{ dm}^3$ près ?

Cours : Expliciter clairement la différence entre valeur approchée à ε près, valeur approchée par défaut à ε près et valeur approchée par excès à ε près.

c) 1) x et y sont des réels ; que signifie l'écriture $d(x,y)$? Donner un exemple.

2) Résoudre les équations ou inéquations puis représenter les solutions sur une droite graduée. Vérifier les réponses. ° $d(x,2) = 4$ ° $d(x,2) < 4$ ° $|x+5| > 3$.

d) x est un réel tel que $|x+1| < 2$; déterminer les intervalles auxquels appartiennent les nombres $A(x)$ et $B(x)$ tels que $A(x) = x^2$; $B(x) = 5 - x$.

e) a et b sont deux réels tels que $a < b < -2$. En justifiant, comparer : $a+2$ et $b+2$; $\frac{1}{a+2}$ et $\frac{1}{b+2}$;

$(a+2)^2$ et $(b+2)^2$; $\frac{1}{(a+2)^2}$ et $\frac{1}{(b+2)^2}$; $\frac{-5}{(a+2)^2}$ et $\frac{-5}{(b+2)^2}$.

Le contrôle comportait aussi deux exercices de géométrie.

Classe D, contrôle 6 : 10/2/95

Le contrôle comportait un exercice de géométrie analytique et 3 exercices sur le chapitre des valeurs absolues et encadrements. L'effectif était de 27 élèves (D19 absent).

Exercice 1.

Le plan est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(-2; 1)$, $B(3; \frac{5}{2})$, $C(2; 3)$

$D(-1; 3)$, $E(\frac{7}{2}; 0)$ et les droites D1, D2, D3 et D4 définies par :

- D1 est la droite (AE).
- D2 est la droite qui passe par B et a comme coefficient directeur -2.
- D3 passe par C et est parallèle à la droite d'équation $2x - 3y = 0$.
- D4 passe par D et est parallèle à (CE).

- 1) Faire une figure et construire les 4 droites.
- 2) Déterminer les équations des 4 droites.
- 3) Démontrer que les 4 droites définissent un parallélogramme.

Exercice 2

Pour l'exercice 2, il fallait compléter un tableau, comme dans les classes A et B, mais sans dessin, avec une colonne pour centre et rayon :

encadrement	appartenance à un intervalle	a = centre de l'intervalle r = rayon de l'intervalle	distance	valeur absolue
$3 < x < 7$				
	$x \in [-2; 5]$			
			$d(x; -1) \leq 3$	
				$ x - \frac{1}{2} \leq \frac{4}{3}$
	$x \in [-6; -2]$			

Exercice 3 : Résoudre dans **R** les équations et inéquations suivantes :

- a) $|x + 2| = \frac{7}{2}$; b) $|5x - 1| = -2$; c) $|4 - 5x| = 0$
d) $|2x + 1| = \frac{1}{5}$; e) $|7x + 2| = |5x - 9|$; f) $|3x + 1| \leq \frac{1}{2}$

Exercice 4.

- 1) Traduire à l'aide d'une valeur absolue et donner l'encadrement correspondant au nombre x si 29,5 est une valeur approchée de x à 0,5 près.
- 2) $|y - 12,3| \leq 3 \times 10^{-1}$, en déduire un encadrement de y.
- 3) Déterminer l'encadrement correspondant de x+y puis de x-y.

Remarque : la question 3 est beaucoup plus difficile que dans les classes A et B puisque le coefficient de x n'est égal à 1 que pour une seule des équations, le rayon étant alors 7/2. Dans la classe C on avait un exercice de ce type dans le contrôle 6 (une seule équation, coefficients entiers) et un exercice du type du e) dans les contrôles des classe B et C, mais avec des coefficients plus simples et une représentation graphique.

Résultats des contrôles détaillés par classe

1. Classe A, contrôles 5 et 6.

Classe A, contrôle 5, 25 élèves

Le contrôle 5 comportait 3 exercices. Nous avons analysé les résultats des élèves pour deux d'entre eux qui portaient sur les fonctions (paraboles) et la résolution des équations du second degré. Le troisième portait sur la géométrie et le calcul vectoriel.

Exercice 1. A12 ne l'a pas abordé du tout, restent 24 élèves

1. graphique fourni : $f(x)$

1.a Résolution graphique d'équations $f(x) = k$

Réussite pour les 3 : 14 (A1, A3, A7, A8, A9, A10, A11, A14, A15, A17, A18, A20, A23, A24)

Réussite partielle : 3 (A4(ac), A19(a), A26(a))

non traité : 2 (A13, A22)

3 erreurs : 5 (A2, A6, A16, A21, A27)

erreurs :

- confusion abscisse ordonnée : 2 élèves A19 (bc), A26 (bc)
- calcule $f(k)$: 3 élèves (A2 (abc), A6 (abc), A21 (abc),
- une seule racine trouvée : 2 élèves (A4 (b), A16 (b))
- erreur de lecture portant sur le SIGNE : 1 élève A16 (ac).
- autre erreur : A27 (abc)
- problème de vocabulaire (échange abscisse et ordonnée) : A10

1.b Retrouver ces résultats par le calcul

- vérification des valeurs trouvées par un calcul numérique : 8 élèves (A1(c), A7, A9, A10, A11, A15 (ab), A20, A26)
- vérifie des valeurs fausses par le calcul et ne conclut pas qu'elles sont fausses : A19
- remarquent que $(-3, -4)$ est le sommet de la parabole : A3, A7, A11,
- tableau : 2 élèves (A4 (avec x décroissants), A18)
- résolution algébrique : 8 élèves dont
 - résolution algébrique correcte : 3 élèves A1(a), A14, A17(b).
 - résolution algébrique incomplète 2 élèves A1(b), A17(c)
 - résolution algébrique erronée 4 élèves (A15 (bc), A16 (abc), A22 (abc), A23 (bc))
- erreur "calculatrice" : A13
- calcul de $f(k)$: 3 élèves (A2 (abc), A6 (abc), A21 (abc))
- non traité : 4 élèves A3, A8, A24, A27

1.c Résolution graphique d'inéquations

- non réponse totale : 3 élèves A6, A13, A27
- tout correct :
- réussite partielle : 10 élèves réussissent au moins d (éventuellement en mettant des inégalités larges) : A4 (d), A7 (d), A9(d), A10 (de), A11 (d), A14 (d*e'f), A15(d), A16 (d), A17(d), A23 (d*)
- non réponse partielle : A7 (f), A8(d*), A9(ef), A11 (e), A15(f), A17(ef), A26 (f) A21 (df)
- demi réponse pour f : 3 élèves A1(avec une borne erronée), A2(avec une borne erronée), A4, A16
- erreur d'intervalle : A1(f), A3(df), A8(e), A10 (f), A11 (f: problème d'écriture ?), A15(e), A20(f), A23 (e)
- dont erreur de logique ou écriture : 3 élèves : A1(e), A18(f), A23 (f),
- erreur de borne (lecture) : 5 élèves : A1 (f : $0 > x > -1$), A8 (f signe), A14 (e: -0,5 lu -1,5 et f : traite $0 < f(x) < 5$), A15 (e : -0,5 lu -1,5), A16 (b)
- inégalités larges au lieu de strictes : 3 élèves : A8, A14, A23
- problème dans l'utilisation des signes $< >$: A1 (de)
- seulement entiers visibles donnés : A24 (df)

- bornes entières pour e : A24
 - donne les solutions de l'équation : A26 (de)
 - lecture graphique des racines de l'équation puis remplace = par < ou > suivant ce qui est demandé : A1 (e, lié à erreur sur Ineg) A18 (def?)
 - $f(x) < 2$ quand $x < 2$ (confusion abscisse-ordonnée ?) etc... : A3(de), A8(f+ signe)
 - mélange abscisse et ordonnée : 2 élèves : A19 (?), A20
 - autre erreur : 4 élèves : A2(de), A3(f), A7(e), A19(f)
 - pas de lecture graphique : A22
 - calcule $f(k)$: A21(e),
 - problème d'écriture des intervalles : A11 ($f : 0 > x > -6$ et $-2 > x > -4$).
- Confusion des notations $() \{ \} []$: A26
- Les points sont seulement les points visibles : A19 A20 ?

méthode algébrique :

- tableau de signes correct : A9(d), A11(d) (pour vérifier)
- erreur calcul algébrique : A22
- erreur calcul numérique : A16
- $ab < 0$ pour $a < 0$ ou $b < 0$: A16, A1
- problème dans l'utilisation des signes < > incohérence des inégalités écrites : A16

Exemple $ab < 0$ pour $a < 0$ ou $b < 0$:

A1 (bonne élève) écrit "Sur le graphique on a $f(x) < 0$ quand $x < -1$ et $x > -5$.

Je résous en factorisant $x^2 + 6x + 5 < 0$ $(x+3-2)(x+3+2) < 0$ $x+1 < 0$ ou $x+5 < 0$ $x < -1$ ou $x < -5$.

Je ne trouve pas tout à fait le même résultat qu'à la lecture graphique"

Confusion abscisse ordonnée

A20 : $f(x) < 0$ "tout l'ensemble des points de la courbe ont une abscisse inférieure à 0 sauf quand $f(x) = 13$ où $x = 1$.

$f(x) > 2$ il n'existe pas de points visibles appartenant à la courbe qui aient une abscisse supérieure à 2."

Les demi-réponses avec bornes erronées peuvent être dues à la résolution d'inéquations du premier de gré : on teste une valeur et on met tout l'intervalle jusqu'à la racine :

A2 : $f(x) < 0$ J'utilise un tableau de calcul $f(x) < 0$ pour $x < -1$

$f(x) > 2$. J'utilise un tableau de calcul $f(x) > 2$ pour $x > -1$

Mais $-3 < f(x) < 5$ J'utilise un tableau de calcul $-2 < x < 1$. (inégalité stricte donc on s'arrête à l'entier précédent ?)

1d. $f(x) = 2x+5$

Non réponse : A1, A7, A9, A12, A18, A23, A27

Résolution graphique correcte : A4(mais prend aussi les points d'intersection avec l'autre parabole), A10, A11, A14, A17.

Résolution à la calculatrice graphique A3 (reproduction des graphiques), A20 (x^2+4x), A8 (-4 seulement : avec vérif. : il avait lu (-4,-3) et (-1,4) et conserve -4)

Résolution algébrique

- incomplète A13 ($x^2+4x = 0$ et vérifie que -4 est solution), A20 ($x^2+4x = 0$ et s'arrête)

- fausse A2 ($x^2+4x = 0$, $xx+2x2x=0$ $x(4x) = 0$ $(4x)=0$ pour $x=-4$)

seulement $x=0$ (vérification) A16

Essai de valeurs numériques ou tableau : A15 ($x^2+4x = 0$ puis tableau et réussit) ; (A19 ($x^2-4x = 0$ puis tableau des valeurs pour 1,2,3,4 et conclut $x=4$) ; A21 (5 et -4 : y-a-t-il lecture graphique, confusion abscisse-ordonnée pour 5 et essai de vérification ? erreur de signe fait que ça ne se vérifie pas pour -4 : $-16-24+5$))

Chercher les racines de $f(x) = 0$ et $2x+5 = 0$: A6 (+ erreur de signe $x=2,5$)

Problème d'écriture algébrique : A13 écrit ce qu'elle tape sur sa calculatrice : $-4x^2+4x-4$

Autre erreur : A22 ($(x+5)^2 = 2x+5$), A24 (lire les points en dessous de l'axe des abscisses), A26

2. Fonction $g(x) = -x^2+5$

2.1. Construction du graphique de $g(x) = -x^2+5$

- non réponse : 3 élèves, A11, A12, A21
- graphique correct : 10 élèves, A1, A3 (un peu imprécis), A4, A7, A9, A10, A14, A17, A18, A20 (correct pour $y>0$, prolongé par des droites pour $y<0$).
- imprécis : 4 élèves, A6, A8 (pour $y>0$, prolongé par des droites pour $y<0$), A23, A27
- décalage : 2 élèves, A6 ($-x^2+4$ et imprécis), A22 ($-x^2+4$)
- orientation (graphique de x^2+5) : 5 élèves, A2, A16, A19, A24, A26
- orientation et décalage : 2 élèves, A13 (x^2-4 et imprécis), A15 (x^2+4).

2.2. Résolution de $g(x) = k$

Ici les élèves pouvaient résoudre algébriquement mais ils sont souvent repris une résolution graphique. Nous n'avons pas distingué pour la réussite.

Réussite pour les 3 : 5 élèves (A4, A10, A14, A18, A23)

dont méthode algébrique : A23

Réussite partielle : 7 élèves (A1(ab), A7(ab), A8 (ab), A9(ab), A15(ab), A17 (ab), A20 ac)

lecture sur graphique imprécis non vérifié : A3

non réponse partielle : A9 (c),

non traité : 5 élèves (A11, A12, A13, A19, A27)

3 erreurs : 7 élèves (A2, A6, A16, A21, A22, A24, A26)

erreurs :

- $\sqrt{5}$ et $\sqrt{-5}$: A7c ;
- $\sqrt{5}$ seulement pour c : A15
- racines positives seulement : A16
- $x=5$ pour c : A8,
- lecture sur graphique imprécis : A3,
- erreur de lecture : A17(c).
- calculent $f(k)$: 5 élèves (A2 (abc), A6 (abc), A21 (abc), A24, A26)
- autre erreur : A22 (remplace x^2 par x)

2.2. Résolution des inéquations sur $g(x)$.

réussite :

tout correct : A4 (mais erreur d'énoncé)

partiellement correct (A1 d, A7 de, A10 de (mais erreur d'énoncé), A14 e, A17 d

non réponse : A6, A8, A9, A11, A12, A13, A19, A21, A27

non réponse partielle : A7 f, A16 ef, A24 f

- 3 erreurs (ou 2 erreurs et 1 NR) : A2, A3, A15, A20, A22, A23, A24 + A26 ?

erreurs

- demi-réponse : A16 d
- valeurs entières seulement (et faux) : A24
- mauvais intervalle à partir des racines ($]-1,1[$) pour f : A1 ef, A10 f, A14 d ($2,5 \leq x \leq -2,5$)
 $f(3 \leq x \leq -3$ et $-1 \leq x \leq 1$), A17e ($-2 > x > 2$) f ($3 > x > -3$)
- traitement des inéquations comme des équations : A23
- lit les valeurs de l'équation sur le graphique et remplace = par < ou > : A20 (réponses $g(x) < 1$ quand $x < 2$ ou $x < -2$; $g(x) > 0$ pour $x > 2,3$ ou $x > -2,3$; $-4 < g(x) < 4$ quand $-3 < x < 3$); A18 (mais valeurs numériques imprécises : $\pm 1,75$ au lieu de ± 2 , $\pm 3,25$ au lieu de ± 3)
- identification x/y : $g(x) < 1$ quand $x < 1$ etc ... A2d
- problème d'écriture des intervalles : A14, A17
- autres erreurs : A2e (pas de solution), A22 (remplace x^2 par x)

2.3. $f(x) > g(x)$

réussite :

- correct par le graphique : A14 (sauf inégalité large), A17 (mais problème d'écriture : $-3 > x > 0$)
- demi réponse ($x > 0$) : A4, A1 ($f(x) > 5$)
- résolution correcte de $f(x) = g(x)$: A10
- en traçant $2x^2+6x$ à la calculatrice : A3

- non réponse : A2, A7, A8, A9, A11, A12, A15, A18, A19, A21, A22, A23, A24, A27
- début calcul algébrique et arrêt : A6, A20,
- erreurs : A13, A16, A26

erreurs

- calcul algébrique : A13 (essai de 6 et écrit comme elle tape sur la calculatrice), A16 ($x^2 + x^2 = x^4$), A26 (et signe)

3. Résolution d'équations :

Deux élèves n'ont pas abordé cet exercice. (A14 et A18) Restent 23 élèves.

Factorisation : c, e, g :

- Réussite des 3 : 2 élèves, A10, A16,
- Réussite c et e : 5 élèves, A1, A2, A8, A9, A19
- Réussite de l'une des deux : 8 élèves, A7 (e), A4 (c), A12 (e), A13 (c), A15(e), A20 (c), A21 (e), A24 (c)
- échec aux 3 : 7 élèves, A3, A6, A11, A22, A23, A26, A27,
- échec en c et non réponse en e,g : A17.
- * Reconnaissance de la factorisation mais échec :
 - erreur de calcul numérique : A1 (g), A3 (c)
 - simplification par $x+1$ pour c : A11
 - ne sait pas résoudre l'équation factorisée : A9 (g), A11(e), A15 (g), A21(c), A23 (e), A27 (e),
 - erreur de signe : A3(e), A4 (e), A6(e), A13(e), A19(g), A20(e), A22 (e), A24(eg), A26 (ce)
 - autre erreur de calcul algébrique : A3 (e), A6, A7 (c), A12 (g), A13 (e), A19 (g), A22 (e), A24 (g), A26 (ce),
 - facteur 1 supprimé ou remplacé par -1 (pour g) : A3, A6, A7, A13, A19, A26
- * développe (g) : A2, A4, A20, A21, A22 (cg), A23, A27 (cg)
- * calcul algébrique faux sans factorisation : A6(c), A22 (cg), A23 (cg), A27(cg)
- * identité remarquable fausse : A12 (c), A13(g), A15 (c)A27 (cg)
- * résolution graphique : A20 (g après développement et lit 1,5 pour 4/3)
- * non réponse partielle : A8 (g), A11 (g)

Identité remarquable A^2-B^2 : a, d,

- * réussite/échec
 - réussite des deux : 4 élèves, A4, A9, A12, A16
 - réussite d'une : 7 élèves, A1 (d), A2 (a), A7 (a), A8 (a), A10 (d), A19 (a), A24 (a),
 - échec aux deux : 9 élèves, A3, A11, A13, A15, A20, A21, A22, A23, A26,
 - non réponse partielle : 4 élèves, A6(d), A8 (d), A17 (d), A27 (a)
- * reconnaît l'identité mais erreur ensuite :
 - ne sait pas résoudre l'équation factorisée : A15 (ad), A21 (a),
 - calcul numérique : A22 (a),
 - signe : A1 (a), A2 (d), A10 (a), A19 (d), A20 (d), A26 (a),
 - autre erreur de calcul algébrique : A2 (d), A19 (d), A26 (a)
- * remplace par A^2-B^2 A-B : A11 (a)
- * développe : A3 (a), A7 (d), A11 (d), A13 (ad), A20 (a), A21 (d), A22 (d), A23 (ad), A24 (d), A26 (d), A27 (d)
- * identité remarquable fausse : A17 (a), A26 (d), A27 (d),
- * calcul algébrique faux sans reconnaissance Id.R.: A3 (a), A6 (a), A13 (ad), A23 (ad), A26 (d),
- * résolution graphique : A3 (d : fausse, le constate en vérifiant)

h : ($x^2 - 5 = 0$)

h n'est entièrement réussie par aucun élève

- un élève, A7, répond $\sqrt{5}$ et $\sqrt{-5}$
- un élève reconnaît l'identité remarquable et s'arrête : A15,
- un élève essaie de l'écrire comme le début d'un carré et fait des erreurs de calcul pour reconnaître une identité : A1 ($x^2 - 5 = 0$; $x^2 - 6+1 = 0$; $(x+3+1)(x-3+1) = 0$)

- non réponse partielle : 6 élèves, A3, A6, A8, A9, A21, A23,
- ne sait pas : A26,
- réponse $\sqrt{5}$: 5 élèves, A4, A10, A13, A16, A17
- réponse 5 : A27 ; 5 et -5 : A22 ; $5/2$ et $-5/2$: A19
- réponses graphiques fausses : A20 (0,23), A2 (entre 1 et 2)
- pas de solution : A24 (avec tableau), A11 ($x^2 = -5$)
- réponse $5/x$: A12

Identité remarquable et factorisation ou développement: b

- non réponse : A6
- développe et réussit : A2, A23
- développe et échoue : 9 élèves, A4, A7, A10, A12, A13 (signe), A21, A22, A26, A27,
- factorise x^2-4 et réussit : A19,
- factorise x^2-4 et échoue : 10 élèves, A1 (signe), A3, A8, A9, A11, A15, A16, A17, A20, A24,
- identité remarquable fausse : 8 élèves, A3, A8, A9, A11, A20, A21, A24, A27

Début d'un carré et identité remarquable : f

- non réponse : A7, A8, A9, A10, A13
- résolution graphique : A3 (faux), A20 (juste avec vérification)
- résolution algébrique réussie : A16
- début de résolution algébrique correcte : A11, A17
- trouve par tableau de valeurs : A24
- essai de résolution algébrique faux : A1, A2, A4, A19, A23, A27
- identité remarquable fausse : A1, A22
- impossible : A15, A21,
- ne sait pas : A26
- réponse fausse non justifiée : A6 (3), A12 (-2),

Finalement 3 élèves réussissent : un par essai de valeurs entières, un par résolution graphique, un par résolution algébrique.

Un seul élève, A16, réussit 6 équations (sauf b h) ; quatre en réussissent 4 : A2 (sauf d f g h), A9 (sauf b f g h), A10 (sauf a b f h), A19 (sauf d f g h) ; 5 élèves en réussissent 3 : A1 (cde), A4 (acd), A8 (ace), A12 (ade), A24 (acf) ; un élève en réussit 2 : A7 (ae) ; 4 élèves en réussissent une : A13 (c), A15 (e), A21 (e), A23 (b) et 7 élèves n'en réussissent aucune : A3, A6, A11, A17, A22, A26, A27.

Classe A. Contrôle 6 : 31/1/95

Le contrôle 6 comportait 4 exercices dont 3 sur distance et valeur absolue dont nous rapportons ci-dessous les résultats, et un exercice de géométrie analytique et vectorielle.

Absents : A5, A25 ; A28 ne faisait pas encore partie de la classe. Effectif : 25

Exercice 1

Il porte sur les distance sur une droite non graduée dans la première partie (distances en cm), graduée dans la deuxième

Première partie : On donne 2 points A, B distants de 7 cm, il faut colorier des ensembles de points.

1) Points M de (AB) tels que $AM < MB$

- Réussite : A1, A7, A8, A11, A13 (mal formulé), A14, A19, A23, A24, soit 36% des élèves
- bon côté mais restreint au segment : A2, A3, A6, A9, A15, A2, A26, soit 28 % des élèves
 - traite le problème dans le plan (systématiquement) : A17
 - mauvais côté (restreint au segment ou non) : A10, A16, A18, A20,
 - confusion point-nombre (systématiquement) : A4 : ici "l'ensemble (E) des points M de la droite (AB) tel que $AM < MB$ est $0 \leq M \leq 3$ "

- erreur sur distance : A12 (les points du segment)

- non réponse A22.

Au total donc 17 élèves, soit 68% relient l'inégalité des distances au fait d'être d'un côté du milieu (ou de la médiatrice).

2) Points N tels que $AN = 3 NB$.

Réussite : A14, A23, soit 8 %

- un seul point : A1, A8, A9, A10, A11, A15, A19, A20, A21, A24 soit 40%

- confusion point-nombre (systématiquement) : A4 : "... $N = 7/3$

- un seul point du mauvais côté : A26

- erreur sur distance : A16 (C milieu de AB, $3,5/3 = 1/3$ CB, $1/3 AN = NB$), A17 (sur la perpendiculaire à AB à $7/3$ de B)

- colorie un segment à gauche de A : A27

- non réponse : A2, A3, A6, A7, A12, A13, A18, A22.

Question la plus mal réussie : moins de la moitié des élèves produisent au moins une solution sur les deux.

3) Points P tel que $AP = 3$

Réussite : A1, A8, A9, A10, A11, A14, A15, A16, A19, A23, A24 soit 44 %

- trace le cercle sans conclure ou dit "tous les points du cercle" : A2, A6, A17, A20 soit 16 %

- un seul point : A18, A21, A26 soit 12 % (seul celui de A18 est correct)

- intérieur du disque : A7,

- confusion point-nombre (systématiquement) : A4 : "... $AP = 7/3 AB$

- autre erreur : A21, A26

- colorie un segment de longueur 3 à partir de A à l'intérieur de [AB]: A27

- non réponse : A3, A12, A13, A22

60% des élèves mettent en œuvre la distance sur la droite ou dans le plan.

4) Points Q tels que $BQ \geq 5$

Réussite : A1, A7, A8, A10, A11, A14, A15, A19, A23, soit 36 %

- trace le cercle sans conclure ou dit "tous les points à l'extérieur du cercle" : A2 (mal formulé : "tous les points qui sont plus grands ou égale à 5 en prenant pour centre le point B"), A17, A20 soit 12 %

- une seule demi-droite : A16, A18 (?), A24, A26, soit 16 %

- restreint au segment : A4,

- intérieur du disque : A6,

- confusion point-nombre (systématiquement) : A4 : "... $2 \leq Q \leq 7$

- traite $BQ \leq 5$: A4, A6, A9,

- autre erreur (distance) : A21, A26, A27

- non réponse : A3, A12, A13, A22

On peut donc conclure que les deux tiers des élèves environ peuvent traduire graphiquement une égalité de distance (première et troisième questions, sans tenir compte du fait qu'ils se placent dans le plan au lieu de se restreindre à la droite ou qu'ils se restreignent au segment pour la première question). Moins de la moitié réussissent dans le cas d'une inégalité (quatrième question) et seuls deux élèves (qui réussissent tout l'exercice) peuvent traiter un rapport de distances, moins de la moitié produisent une seule des deux solutions.

Deuxième partie : placer 6 points sur un axe gradué puis exprimer 5 distances entre ces points.

Placement des points :

- tout juste : 22 élèves

- 1 erreur : A9

- pas de dessin : A6, A7

Expression des distances :

- tout juste : A1, A3, A4 (mais donne vecteurs), A10, A11, A12, A14, A15 (mais problème de formulation), A17, A18, A19 (mais donne vecteurs), A20, A23,

- 1 erreur : A2, A21 et A24 (signe), A8 (écart),

- 2 erreurs : A13, A16 (1 signe et 1 distance), A27 (écarts et distance négative)
- 3 erreurs ou plus : A7 (fait la somme), A9 (exprime l'intervalle en termes de centre et rayon), A22 (paraphrase le texte), A26 (signes et écarts)
- non réponse : A6.

Les élèves savent donc presque tous placer des points à coordonnées entières ou en demis sur un axe gradué. Le calcul des distances sur un axe gradué pour des abscisses entières ou en demis est réussi par 52% des élèves, même si certains ont des difficultés au niveau de l'expression. Plus des 2/3 des élèves font au plus une erreur sur cette question.

Exercice 2.

Il s'agit de résoudre 4 équations et deux inéquations portant sur la valeur absolue : le coefficient de x est toujours égal à 1, elles peuvent donc se traduire facilement en termes de distances, l'une des inéquation a pour solution un intervalle, l'autre deux demi-droites.

Les équations avaient les caractéristiques suivantes :

- centre et rayon entiers positifs
- centre entier négatif, rayon entier,
- centre entier positif, rayon $3/2$
- centre $1/2$, rayon entier.

Nous donnerons les résultats en classant suivant la procédure adoptée :

* *non réponse* : A18, A19, A21,

* *distances avec dessin de la droite graduée* :

- réussite des 4 : A1, A4, A10, A11, A13, A15, A16 (mais problème de formulation : $M=...$), A20 (mais répond intervalle), A24
- réussite de 3 sur 4 : A2 (signe du centre)

- au moins deux erreurs : A3 (erreurs de placement du centre et de calcul), A6,

* *raisonnement sur le dessin* :

- réussite des 4 : A7, A12,

* *méthode algébrique* :

- réussite de 3 sur 4 : A17 (confusion centre-rayon)
- au moins deux erreurs : A8, A9 (2 réponses correctes mais mauvaise écriture), A22 (enlève les barres), A26 et A27 font des erreurs variées.

* *sans explication* :

- réponse correcte : A14
- avec erreurs : A23 (signe et calcul).

Une petite moitié des élèves réussissent grâce au dessin de la droite graduée : 11 élèves ont les 4 réponses justes par ce moyen, un autre a tout juste sans explication. Une bonne partie des élèves (20%) utilisent une méthode algébrique alors que celle-ci a été évitée en cours, une seule (A23 redoublante) avec un peu de succès, les autres sont des élèves très faibles.

Les inéquations :

* $|x+5| < 3$: il s'agit d'un intervalle de centre négatif, ce qui est la difficulté principale.

Nous donnerons les résultats en classant suivant la procédure adoptée :

* *non réponse* : A18, A19, A21,

* *distances avec dessin de la droite graduée* :

- réussite A1, A4, A10, A11, A13 (mais formule mal sa réponse), A15, A20, A24 (?)
- erreurs : A2 (signe),

* *raisonnement sur le dessin* :

- réussite : A7, A12,

- erreurs : A3,

* *méthode algébrique* :

- réussite : A17

- erreurs : A8, A9, A22 (enlève les barres), A26 et A27 font des erreurs variées.

* *sans explication* :

- réponse correcte : A14 (inégalité large)

- avec erreurs : A23 (signe),

* résout les équations : A6, A16.

Ce sont presque les mêmes élèves qui réussissent, par la même méthode.

* $|x - \frac{5}{3}| > 1$: ce sont les points à une distance supérieure à 1 de $\frac{5}{3}$; on a deux demi-droites dont

on trouve les origines en ajoutant ± 1 à $\frac{5}{3}$. Ici nous avons deux difficultés : le

complémentaire d'un intervalle et la fraction.

Cette fois nous classerons par erreur et indiquerons la méthode pour ceux qui ont réussi.

* *non réponse* : A18, A19, A21,

* réussite :

- *distances avec dessin de la droite graduée* : A4, A10, A13 (mais formule mal sa réponse), A15, A24

- *raisonnement sur le dessin* : A7, A12,

* renverse les signes d'inégalité ou répond l'intervalle : A1, A2, A3, A11, A14, A23,

* erreur de calcul sur les fractions : A2

* erreur de signe : A3, A17

* mauvaise méthode algébrique : A8, A9, A22 (enlève les barres), A26 et A27 qui font des erreurs variées.

* difficile à interpréter : A20,

* résout les équations : A6, A16.

Ce sont presque les mêmes élèves qui réussissent, par la même méthode.

La réussite chute sensiblement dans ce cas à cause des élèves qui répondent l'intervalle au lieu de son complémentaire. Face à une inéquation, les élèves résolvent l'équation et répondent l'intervalle déterminé par les deux solutions, quel que soit le signe de l'inéquation.

Exercice 4 : tableau à compléter.

On a le même type d'exercice que dans la classe A, avec la demande supplémentaire du centre et du rayon. L'exercice comptait 7 items au lieu de 5. On avait un centre entier négatif, deux centres en demis, deux rayons avec des fractions moins simples ($\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{7}$) mais pour des intervalles centrés en 0.

Réussite totale : 10 élèves : A1, A8, A9, A10, A11, A16, A17, A18, A23, A24

Réussite de 5 ou 6 items : A2 (sans dessin pour 5 et 6), A4, A6 (sans dessin pour 5), A7, A12 (sans aucun dessin), A14, A15,

Réussite de 3 ou 4 items : A20,

Réussite de 1 ou 2 items : A13, A19,

aucun réussi en entier : A3, A21, A22, A26, A27.

$|x - \frac{1}{2}| \leq 3$ réussi par 17 élèves.

$d(x, 2) < 1$ réussi par 16 élèves

$\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ réussi par 16 élèves

$\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{17}{2}$ réussi par 12 élèves

$x \in [-4, 2]$ réussi par 16 élèves

$|x| \leq \frac{2}{3}$ réussi par 19 élèves

$|x| \leq \frac{2}{7}$ réussi par 18 élèves (1 non réponse)

En résumé, 10 élèves, soit 40%, ont réussi les 7 items ; 17 élèves, soit 68%, réussissent au moins 5 items sur 7.

La principale difficulté est de trouver le centre et le rayon : les exercices qui ont un centre 0 sont les mieux réussis bien que les rayons soient plus difficiles ; le plus mal réussi est celui qui a un centre fractionnaire (erreur sur le centre ou le rayon pour 7 élèves). Certains élèves échangent centre et rayon (A19 pour 4). Deux élèves (A3, A22) prennent systématiquement les bornes pour centre et rayon et réciproquement. A3, A19, A22 et A26 se trompent systématiquement sur le signe du centre. A19 a tout le reste juste.

Les élèves les plus faibles A13, A21, A22, A26, A27 ne réussissent que la traduction congruente entre intervalle et encadrement ; entre valeur absolue et distance on a le plus souvent une erreur de signe ; le passage des bornes aux centre et rayon et réciproquement

n'est pas du tout compris par ces élèves (A13 réussit cependant le 2 mais met les signes "<" à l'envers).

2. Classe B. Contrôles 4 et 5.

Classe B, Contrôle 4, mardi 17 janvier 1995.

Ce contrôle comprenait une première partie sur la valeur absolue, les intervalles et les inégalités et une deuxième partie sur l'introduction de la notion de fonction. Nous analysons ici la première partie composée de 2 exercices. Le texte, comme pour chaque contrôle, comportait deux versions pour que des élèves voisins n'aient pas le même texte. Nous donnons ci-dessous la version 1 avec, entre parenthèses, les valeurs numériques de la version 2.

Exercice 1.

1) Compléter le tableau suivant en prenant en exemple la première ligne qui est remplie.

distance	valeur absolue	dessin	intervalle	encadrement
$d(x; 5) \leq 3$	$ x-5 \leq 3$		$x \in [2; 8]$	$2 \leq x \leq 8$
				$3 \leq x \leq 9$ ($1 \leq x \leq 5$)
			$x \in [-10; 5]$ ($x \in [-6; 1]$)	
				
	$ x-2 \leq 4$ ($ x-1 \leq 4$)			
$d(x; -2) \leq 3$ ($d(x; -3) \leq 5$)				

2) Résoudre

- a) $|x-2| = |x+3|$ ($|x-3| = |x+1|$)
b) $|x+1| \leq |x-4|$ ($|x+4| \leq |x-5|$).

On remarquera que les deux versions ont été choisies très soigneusement pour que les difficultés soient exactement équivalentes. Nous avons ici 5 registres pour exprimer les intervalles, que nous désignerons comme l'entête des colonnes, sauf "intervalle" que nous appellerons registre de l'écriture ensembliste. La tâche consiste en une conversion de registres. Les registres "ensembliste" et "encadrement" se réfèrent à la définition de l'intervalle par ses bornes, les expressions dans les deux registres sont congruentes : il y a correspondance terme à terme et possibilité de traduction automatique. Les registres de la valeur absolue et de la distance font référence à la définition de l'intervalle par centre et rayon, la congruence entre les deux n'est pas parfaite à cause du signe "-" qui apparaît dans l'expression avec valeur absolue. On peut donc attendre des erreurs de signe, particulièrement dans le cas d'un centre négatif. Le registre du dessin joue le rôle d'intermédiaire et permet le passage d'une définition des intervalles par les bornes à une autre par le centre et le rayon ou réciproquement. Les nombres ont été choisis de façon que la représentation soit toujours possible : ce sont de petits entiers et les calculs font intervenir au plus des demis.

La classe comportait 34 élèves.

Pour la première question,

18 élèves ont entièrement réussi l'exercice, il s'agit de : B2, B4, B5, B8, B9, B10, B12, B13, B14, B15, B18, B23, B25, B26, B28, B31, B32, B34, soit 52,94%.

Pour les réussites partielles, on trouve

- 15 élèves de plus qui ont réussi le a) soit 1 seule erreur,

- 8 élèves de plus qui ont réussi le b) soit 76,47% de réussite
- 5 élèves de plus qui ont réussi le c) soit 67,65 % de réussite
- 12 élèves de plus qui ont réussi le d) soit 88,26 % de réussite
- 5 élèves de plus qui ont réussi le e) soit 67,65 % de réussite.

On a donc plus des 2/3 des élèves qui réussissent chaque question et plus de la moitié qui réussissent le tout. Presque tous les élèves ont réussi le a), celui qui ne l'a pas réussi a réussi le b) qui était de même nature ainsi que c et d, donc tous les élèves ont été capables de faire le passage bornes à centre rayon au moins une fois.

Les erreurs sont les suivantes¹ :

- erreur dans l'utilisation des symboles $[,], \leq, <$ etc... : B16, B20, B27.
- placement erroné de points sur le dessin : B3, B6, B7, B17, B33.
- lecture erronée des abscisses : B22.
- erreur de signe dans la traduction entre le registre des distances et celui de la valeur absolue: B3, B6, B16, B17, B19, B20, B21, B29, B30, B33.
- erreur sur le centre quand l'intervalle est connu par ses bornes : B11, B17, B20, B22, B27, B29, B33.
- erreur sur le rayon quand l'intervalle est connu par ses bornes : B29.
- erreur sur les bornes quand l'intervalle est connu par le centre et le rayon : B29.

Remarquons que l'erreur de signe peut se produire uniquement au niveau des écritures algébriques ou au moment du placement sur le dessin, entraînant des erreurs dans les écritures algébriques ; nous avons dans ce cas relevé l'erreur à la fois au niveau du signe et au niveau du dessin puisque nous ne connaissons pas la procédure exacte de l'élève et qu'il est difficile de savoir si l'erreur de signe se produit au moment du placement sur le dessin ou par une mauvaise lecture du centre : si, partant de $|x+2| \leq 3$ l'élève place 2, cela peut être parce qu'il a pensé que le centre était 2 ou parce qu'il a placé 2 au lieu de -2.

Pour la deuxième question,

les méthodes utilisées ont été les suivantes :

- résolution graphique sur la droite graduée : B1, B3, B5, B6, B13, B17, B18, B25, B26, B28, B29, B32, B33 (pour l'inéquation)

Parmi eux B4, B5, B25, B32 ont réussi à la fois l'équation et l'inéquation, avec éventuellement une erreur de notation pour l'intervalle (B5)

B18 a fait une erreur sur le calcul du milieu dans le deuxième cas

B1 a réussi l'équation mais pris la mauvaise demi-droite pour l'inéquation

B29 ont réussi l'équation mais a arrêté l'intervalle à -1 pour l'inéquation

B26 a réussi l'équation mais résolu l'inéquation comme une équation

B6, B28 ont réussi l'équation et donné l'intervalle délimité par les centres comme solution de l'inéquation.

B21 et B31 ont fait une erreur du même type aux 2 questions en répondant $\{-3, 2\}$ et $\{-1, 4\}$ pour l'un, $\{-3, 2\}$ et $[-1, 4]$ respectivement pour l'autre

B33 a fait une erreur de signe pour le milieu et d'intervalle (réponse $[1,5 ; 1]$)

B3, B13, B17 ont fait d'autres erreurs

- résolution en termes de distances :

- à la fois dessin et raisonnement sur les distances : B4, B8, B10, B20, B22

avec réussite dans les deux cas pour B4, B10, B20, B22

avec réussite de l'équation mais mauvaise demi-droite dans le cas de l'inéquation : B8

- résolution algébrique : B7, B14, B15, B19 (avec aussi dessin), B23, B24 (tableau), B27, B30, B33 (pour l'équation)

avec réussite pour la première, erreur pour la seconde : B15, B30

avec erreurs dans les deux : B7, B14, B19 (enlève les barres dans le 2ème cas), B23 (pour l'équation, non réponse pour l'inéquation), B24 (incomplet), B27, B33 (enlève les barres)

- non compréhension de la question : B9

n'ont pas répondu à cette question : B2, B11, B12, B16, B34.

Les élèves recourent majoritairement à la distance ou au dessin sur la droite graduée pour résoudre ce type d'équations. Ceux qui raisonnent explicitement en termes de distances avec

¹ nous indiquons les codes des élèves qui ont fait au moins une fois le type d'erreur

le support du dessin réussissent. Pour ceux qui font le dessin mais ne traduisent pas les équations et inéquations en termes de distances font souvent des erreurs dans le cas de l'inéquation. Certains donnent comme solution les points marqués sur l'axe qui correspondent aux points remarquables pour une traduction en termes de distance : ils démarrent la technique de résolution mais ne la mènent pas à terme. Les élèves qui utilisent une méthode algébrique se trompent en général sauf B15 qui a un peu de chance pour l'équation et renverse l'inégalité pour l'inéquation, et B30 qui utilise un tableau (non enseigné dans cette classe pour ce chapitre) et réussit l'équation mais non l'inéquation pour laquelle il a pourtant bien identifié les 3 cas.

Exercice 2.

- 1) Le volume V d'une pyramide à base rectangulaire est donné par la formule $V = \frac{1}{3} L \times l \times h$
- a) L mesure 6 (8) à 10^{-1} près, l mesure 4 (3) à 10^{-1} près, h mesure 11 (10) à 10^{-1} près. Encadrer V en ne donnant qu'une décimale.
- b) Pour une autre pyramide, L mesure 4 (3) à 10^{-2} près, l mesure 3 (2) à 10^{-2} près, V mesure 5 (4) à 10^{-1} près. Exprimer h en fonction de V , L et l puis encadrer h en ne donnant qu'une décimale.
- 2) a) Dans un rectangle, L mesure 7,2 (7,4) à 10^{-1} près par excès, l mesure 3,4 (3,2) à 10^{-1} près par défaut, encadrer le périmètre P .
- b) Dans un autre rectangle, L mesure 15,6 (15,3) à 10^{-1} près, le périmètre P mesure 23 (21) à 10^{-1} près, encadrer la largeur l .

Là encore, on peut remarquer que les versions sont équivalentes du point de vue des nombres en jeu : même ordre de grandeur, même nombre de décimales.

Remarquons cependant pour la question 1b, la difficulté n'était pas exactement la même pour l'arrondi : dans un cas on trouvait $1,97... \leq h \leq 2,06...$ que les élèves arrondissent à $1,9 \leq h \leq 2$ s'ils font une troncature ou à $2 \leq h \leq 2,1$ s'ils prennent les valeurs les plus proches ; dans l'autre cas on trouve $1,22... \leq h \leq 1,28...$ que les élèves arrondissent plus facilement à $1,2 \leq h \leq 1,3$ parce que cela correspond aux valeurs les plus proches et que la troncature donnerait le même nombre des deux côtés. Mais pour voir cette différence, il fallait avoir effectué les calculs jusqu'au bout.

Pour la deuxième question, il y avait une erreur de texte. On donnait en fait une valeur approchée du demi-périmètre, ce qui fait qu'en appliquant les formules on trouvait un encadrement de l par des négatifs.

1.a. Encadrement du volume.

La formule était fournie, le travail des élèves consistait donc à encadrer un produit. On est dans le cas favorable d'une fonction croissante de chacune des variables. La principale erreur à attendre est une erreur au moment de l'arrondi (tronquer la valeur trouvée au lieu de majorer), sans compter bien sûr les erreurs de calcul ou l'oubli de la division par 3. On a :

- Réussite : B1, B4, B5, B7, B9, B10, B11, B12, B14, B15, B16, B18, B23, B25, B26, B27, B28, B29 (mais encadrement de la hauteur à 0,01 près), soit 18 élèves
- écriture de valeurs numériques au lieu des variables : $5,9 \leq 6 \leq 6,1 \dots 83,6 \leq 88 \leq 92,6$: B8, B13 qui a en fait un encadrement correct.
- erreur d'arrondi : B3, B6, B8, B17, B19, B22, B24, B30, B31, B34
- erreur de calcul : B24, B32
- oubli de diviser par 3 : B20
- inverse les inégalités en divisant par 3 : B22
- mauvais encadrement des variables au départ : B21
- autre erreur : B2 (encadre $5,9 \times 3,9 \times 10,9$ à 0,1 près puis à 1 près), B33.

Comme attendu, les résultats sont assez bons pour cette question : 19 élèves, soit 55,9 %, ont un encadrement correct, même s'il est mal exprimé pour B13, et 10 élèves sur 34 soit 29,4 % font une erreur d'arrondi pour la borne supérieure.

1.b. Expression de h

La deuxième partie de la question comportait plusieurs difficultés. La première était de réussir à exprimer h en fonction des autres données. Beaucoup d'élèves ont échoué sur ce point. Certains ont trouvé une expression erronée par une erreur de calcul algébrique. Nous examinons ensuite leur encadrement à partir de l'expression qu'ils ont trouvée. Il s'agit de :

oubli de x^3 : B22, B23

autre mauvaise expression : B17, B21, B28.

Cependant, certains élèves écrivent une expression avec double dénominateur $\frac{V}{\frac{L \times l}{3}}$ ce qui peut

les gêner pour traiter la question suivante. D'autres, comme B14, n'ont pas exprimé h mais ont traité l'encadrement de h en écrivant $4,9 \leq \frac{1}{3} L \times l \times h \leq 5,1$ puis ont successivement

multiplié par 3, $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$ en prenant ou non pour l et L les valeurs approchées convenables.

- non réponse totale à la question 1b : B16, B24, B33

Encadrement de h

Cette fois, il faut renverser les inégalités dans le passage à l'inverse, nous pouvons attendre des erreurs à ce niveau. Pour les erreurs d'arrondi, nous les attendons surtout sur la version 1, à cause des valeurs numériques (voir remarque ci-dessus).

Pour l'encadrement des valeurs initiales, nous avons accepté comme correct l'encadrement de V à 0,1 près (comme l et L), mais certains élèves ont confondu 10^{-2} et $2 \cdot 10^{-1}$.

- réussite : B1, B4, B7 (mais fait une erreur d'énoncé : il prend encadrements à 0,1 près), B10, B12, B15, B18, B19, B26, B27 (mais problèmes d'écriture), B29.

- non terminé : B20

- confusion 10^{-2} et $2 \cdot 10^{-1}$: B6, B8, B14, B28.

- font les arrondis trop tôt (avant de multiplier par 3 par exemple) : B2, B5, B9, B11, B22, B26, B31.

- oubli de multiplier par 3 : B6, B8, B13, B22, B23, B25, B31.

- erreur d'arrondi : B3, B11, B30, B31.

- ne changent pas les inégalités pour l'inverse : B6, B11, B13, B17, B21, B30, B34.

- problème d'écriture pour manier les inégalités avec inverses : B9, B14, B28.

- écriture de valeurs numériques au lieu des variables : B13.

- autre erreur : B2, B5.

Comme prévu la réussite baisse (32,35%), 20,6% des élèves oublient de renverser les inégalités quand ils passent à l'inverse. Les problèmes d'arrondis se compliquent puisque les élèves font un encadrement auxiliaire de $L \times l$ et certains arrondissent déjà cet encadrement. On remarque aussi des difficultés avec les systèmes d'écriture : traitement des inégalités ou usage des exposants.

2.a. Encadrement du périmètre

L'encadrement du périmètre ne devrait pas poser trop de problème, sauf éventuellement l'oubli de la multiplication par 2 et les erreurs d'arrondi comme précédemment. En fait, un très grand nombre d'élèves confondent les formules d'aire et de périmètre et encadrent le produit ou le double du produit ou même $2l \times 2L$!

- Réussite : B1, B3, B4, B10, B11, B15, B18, B19, B21, B23, B25, B26, B31

- écriture de valeurs numériques au lieu des variables : B13.

- oubli de multiplier par 2 :

- autre erreur sur la formule du périmètre (par ex. produit) : B2, B6, B12, B17, B22, B24, B27, B28, B34, B29

- erreur d'arrondi :

- mauvais encadrement des variables au départ : B5, B6, B7, B9, B12, B13, B14, B17, B20, B22, B28, B30

- autre erreur : B16 (calcule le périmètre), B32 (écrit la bonne formule puis multiplie), B33 (calcule le périmètre puis encadre à 0,1 près).

- non réponse : B8

Pour la question précédente les mauvais encadrements au départ signifiaient une erreur sur la puissance de 10 ; pour cette question, on peut encore avoir ce problème mais aussi la mauvaise compréhension des expressions "par défaut", "par excès". Nous n'attendions pas autant d'erreurs sur la formule du périmètre !

On a seulement 13 réussites (38,2%). Les principales erreurs sont les erreurs de formule pour le périmètre et la mauvaise compréhension de "par excès, par défaut".

2.b. Encadrement de la largeur

Compte-tenu de l'erreur de texte, la réponse correcte était "impossible". Certains élèves la fournissent après un encadrement de $P/2$ ou de $2L$, d'autres font le calcul jusqu'au bout, trouvent un encadrement par des négatifs et concluent ou non "impossible". Les élèves peuvent faire une erreur d'encadrement (soustraire les inégalités par exemple) et répondre cependant impossible à cause des négatifs. Nous appellerons "réussite" un encadrement correct et nous compterons par ailleurs les réponses "impossibles, qu'elles soient motivées ou non par les négatifs.

Pour l'encadrement de la largeur, il s'agit d'encadrer une différence, on peut donc attendre, en plus des erreurs précédentes, l'erreur qui consiste à soustraire les inégalités.

Il y a eu en fait beaucoup d'erreurs de calcul algébrique pour exprimer l en fonction de P et L , par exemple B3 écrit $P = (L+l) \times 2$ donc $l = \frac{P}{L \times 2}$. Le grand nombre de ces erreurs a amené le professeur à faire une séance de module sur le sujet : exprimer chaque variable en fonction des autres à partir de formules de physique.

Pour les élèves qui prennent le produit comme périmètre ou font des erreurs de calcul algébrique, on peut avoir à encadrer un quotient et retrouver les erreurs liées à cette tâche.

- Réussite de l'encadrement : B18, B25
- réponse "impossible" : B1, B4, B5, B14, B15, B18, B19, B21, B32
- écriture de valeurs numériques au lieu des variables : B13.
- problème lié à l'encadrement de la différence : B1, B4, B6, B7, B16, B19, B21, B28, B30, B31, B32
- oubli de diviser par 2 : B30
- autre erreur sur la formule du périmètre (par ex. produit) : B12, B17, B22, B27, B28, B29
- erreur d'arrondi :
- mauvais encadrement des variables au départ : B2, B16,
- erreur de calcul algébrique : B3, B9, B10, B11, B20, B26, B28, B31
- ne changent pas les inégalités pour l'inverse : B11, B13, B17, B34
- autre erreur : B5 (calcul), B33 (calcule puis encadre).
- non réponse : B8

Ici l'oubli de diviser par 2 peut être une correction de l'énoncé pour avoir une réponse possible. Les problèmes liés à l'encadrement de la différence peuvent se manifester par une soustraction des inégalités ou par le fait d'ajouter des inégalités de sens contraires : certains élèves changent les signes d'inégalité en multipliant l'encadrement de L (ou $2L$) par -1 mais ne réécrivent pas l'encadrement avec les inégalités dans le bon sens avant d'ajouter à l'encadrement de P .

Classe B. Contrôle 5, 14-2-1995.

Le contrôle 5 portait principalement sur les fonctions : représentation graphique, sens de variation et résolution graphique d'équations et inéquations. Deux exercices concernaient des paraboles et le troisième la valeur absolue. C'est ce dernier exercice que nous analysons ici.

Texte :

On donne la fonction f telle que $f : x \rightarrow |x-5|$.

- 1) Représenter graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
- 2) Résoudre graphiquement $|x-5| = |3+x|$ puis $|x-5| \leq |3+x|$.

Pour la première question,

* 25 élèves tracent un graphique correct : B1, B4, B5, B6, B7, B10, B11, B12, B13, B17, B18 à B31, B35. Cependant, parmi eux, B27 écrit à côté " $x > 0$ " et B19 a utilisé 2 couleurs

différentes pour les deux moitiés (ainsi que pour celle de $|x+3|$: a-t-elle complété au moment de résoudre les équations ou colorié à ce moment là ?

* B3, B15 et B33 font un graphique incomplet (B3 entre -3 et 3, B15 et B33 pour $x < 5$). Remarquons que les parties utiles pour les représentations ont été représentées.

* B8 et B34 ne répondent pas.

* 5 élèves produisent un graphique faux :

- B2 dessine $-|x| + 5$ ($x + 5$ pour $x < 0$ et $-x + 5$ pour $x > 0$)
- B9 dessine $|x+5|$ (erreur sur le signe de l'abscisse)
- B14 dessine $|x| - 5$ (décalage vertical)
- B16 dessine $x-5$ (droite, enlève les barres)
- B32 dessine $-x+5$ (droite, prend l'opposé).

Pour la deuxième question,

* 12 élèves donnent des réponses correctes pour les deux : B1, B5, B6, B7, B12, B15, B18, (B21, B22), B23, B25, (B32). Cependant, parmi eux, B7 prend l'inégalité stricte : $x > 1$, B21 et B23 ne dessinent pas le deuxième graphique mais fournissent des réponses correctes sans explication, B21 a cependant placé -3 sur l'axe des x, B32 fait de même avec un graphique faux mais permettant d'avoir la solution correcte s'il prend $x + 3$ pour l'autre ou s'il résout sur l'axe des x.

* 6 élèves résolvent correctement l'équation mais pas l'inéquation : B3, B14, B26, B27, B29, B31 :

- B3, B14, B26 et B31 répondent $x \leq 1$ pour l'inéquation (B3 et B31 utilisent un axe gradué et non le graphique cartésien), B14 avait un graphique faux mais semble en avoir refait un autre, correct cette fois, pour la résolution,

- B27 écrit " $f(x) = 4$ et $x = 1$ " pour l'équation, " $f(x) = [0,4]$ et $x = [-3, 5]$ " pour l'inéquation, c'est-à-dire les segments délimités sur les axes par les courbes.

- B29 répond correctement ($x \in [1, +\infty[$) mais colorie toute la zone située au-dessus des deux graphiques.

* 6 élèves marquent le point d'intersection des deux courbes, colorient éventuellement des portions de courbes mais n'expriment pas les solutions :

- B4 colorie la partie du graphique de $|x-5|$ pour $x \geq 1$

- B13 colorie la zone $x \leq 1$ et $y > -x + 5$

- B17, B24, B35 : seul le point d'intersection est marqué

- B19 a dessiné en vert les parties de graphiques correspondant à $x < -3$ et $x > 5$

* 5 élèves ne répondent pas : B8, B16, B20, B30, B33 : B20 et B30 avaient un graphique correct, B33 un demi graphique.

* Les 6 autres font des erreurs variées :

- B2 a un graphique faux, ne donne pas d'explication et répond $\{-1\}$ et $[-1 ; +\infty[$ qui peut correspondre à la résolution de $x + 5 = -x + 3$

- B9 représente $|x+5|$ et $|x+3|$ mais fait encore de serreurs de signe dans la lecture graphique : il répond $\{4\}$ et $[4, +\infty[$ alors qu'il devrait trouver $\{-4\}$ et $]-\infty, -4]$ avec son graphique

- B10 a un graphique juste mais répond $\{4\}$ et $]-\infty, 4]$: peut-être a-t-elle résolu sur Ox en confondant 3 et -3 et en se référant à la distance

- B11 (graphique correct) résout sur l'axe Ox et répond $\{3, 5\}$ et $[3, 5]$

- B28 répond $x = 4$ et $[4, 5]$ sans explication en ayant dessiné les lignes de rappel du point (4,1) de la courbe

- B34 ne trace pas de graphique et résout algébriquement par une méthode très curieuse qui lui donne néanmoins les résultats exacts : elle écrit " $|x-5| = |3+x|$ $|x-5| = -|3+x|$ $x - 5 = -3 - x$

$x+x = -3+5$ $2x = 2$ $\frac{2x}{2} = \frac{2}{2}$ $x = 1$ " puis " $|x-5| \leq |3+x|$ $|x-5| \leq -|3+x|$ $x - 5 \leq -3 - x$ $x+x \leq$

$-3+5$ $2x \leq 2$ $x \geq 1$ " Les barres sont suivant le cas des barres de valeur absolue ou des parenthèses et l'usage du signe d'inégalité semble flou.

La moitié des élèves résolvent donc l'équation, dont 12 (34,3 %) sûrement par la méthode graphique, et 3 sur un axe gradué, plus de la moitié (18/35) marquent le point d'intersection des deux courbes mais seulement 9/35 (25,7%) résolvent correctement l'inéquation par la méthode graphique.

L'enseignant de la classe B a soigneusement identifié les différents éléments signifiants de la conversion entre les registres algébrique et graphique. Cependant l'expression dans le cadre algébrique d'une résolution graphique pose encore problème pour la majorité des élèves.

3. Classe C. Contrôle 5 , 10-2-95

Le professeur de la classe C donne régulièrement des petits contrôles surprise courts et deux fois par trimestre un contrôle d'une heure et demie. Les moyennes trimestrielles font intervenir, avec une pondération, tous ces contrôles ainsi que les devoirs à la maison. Par exemple, pour le 3ème trimestre il y avait deux contrôles sur 20, coefficient 3, deux "interr" sur 8 et 12 respectivement coefficient 2, un devoir sur 20 coefficient 1. Le professeur C utilise la même technique que le professeur A : elle donne deux versions de ses contrôles pour que les élèves voisins n'aient pas les mêmes.

Sur la valeur absolue, il y a eu une partie du contrôle 5 (10 février 1995), deux exercices dans des "interrogations surprise" :

- le 17 mars : "Représenter graphiquement la fonction f telle que $f(x) = |2x+6|$ (resp. $|5x+10|$). Résoudre $|2x+6| = 5$ $|2x+6| = -5$ $|2x+6| < 5$ " (resp. $|5x+10| = 2 \dots$).

- le 5 mai : "Résoudre $|2x+5| = 7$ $|x-4| < -1$.

L'exercice 1 du contrôle 6 du 31 mars a été consacré à l'aspect distance et encadrements :

a) On donne les réels x et y tels que $\frac{2}{7} < x < \frac{3}{7}$ et $\frac{5}{7} < y < \frac{5}{6}$. Encadrer $x+y$, $2x-y$, xy , et $\frac{x}{3y}$ à l'aide de rationnels.

b) Un pavé droit a pour dimensions L , l et h exprimées en dm et telles que leurs valeurs approchées par défaut à 10^{-1} près sont respectivement 2,3 ; 1,5 et 0,8.

1) Donner un encadrement de L , l , et h dont l'amplitude est la plus faible.

2) Donner un encadrement, en dm^3 , de son volume V .

3) 3 dm^3 est-il une valeur approchée de V à $0,3 \text{ dm}^3$ près ?

$3,1 \text{ dm}^3$ est-il une valeur approchée de V à $0,4 \text{ dm}^3$ près ?

Cours : Expliciter clairement la différence entre valeur approchée à ε près, valeur approchée par défaut à ε près et valeur approchée par excès à ε près.

c) 1) x et y sont des réels ; que signifie l'écriture $d(x,y)$? Donner un exemple.

2) Résoudre les équations ou inéquations puis représenter les solutions sur une droite graduée. Vérifier les réponses. ° $d(x,2) = 4$ ° $d(x,2) < 4$ ° $|x+5| > 3$.

d) x est un réel tel que $|x+1| < 2$; déterminer les intervalles auxquels appartiennent les nombres $A(x)$ et $B(x)$ tels que $A(x) = x^2$; $B(x) = 5 - x$.

e) a et b sont deux réels tels que $a < b < -2$. En justifiant, comparer : $a+2$ et $b+2$; $\frac{1}{a+2}$ et $\frac{1}{b+2}$;

$(a+2)^2$ et $(b+2)^2$; $\frac{1}{(a+2)^2}$ et $\frac{1}{(b+2)^2}$; $\frac{-5}{(a+2)^2}$ et $\frac{-5}{(b+2)^2}$.

Le contrôle comportait aussi deux exercices de géométrie.

Nous n'avons pas eu accès aux copies des contrôles surprise ni à celles du contrôle 6. Nous avons seulement analysé le contrôle 5 dans lequel la partie concernant la valeur absolue était la suivante :

On donne la fonction f telle que $f : x \rightarrow |x-5|$.

1) Représenter graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

2) Résoudre $|x-5| = |3+x|$ puis $|x-5| \leq |3+x|$.

Résoudre $|2x+6| = 5$.

La première partie est commune avec la classe A mais ici, le professeur ne précise pas "graphiquement" dans la deuxième question.

C31 est absent, nous avons donc 34 élèves. Les résultats sont les suivants :

Première question :

* 18 élèves (soit 52,9 %) fournissent la représentation graphique attendue : C3, C4, C5, C10, C13, C14, C16, C17, C19, C20, C21, C23, C24, C26, C28, C30, C32

* 1 élève (C11) représente bien 2 demi-droites, avec les bonnes équations mais des échelles différentes.

* 1 élève (C35) ne répond pas.

* 2 élèves (C12, C22) tracent la demi-droite correspondant à $x > 5$,

* C18 trace la demi-droite $y = x-5$ pour $x > 0$,

* C6, C7, C29 tracent la droite $y = x-5$,

* C25 trace la droite passant par (0,-5) et (1,4)

* C8 fait une symétrie par rapport à Ox ($-x+5$ et $x-5$ pour $x < 5$, ce qui n'est pas une fonction)

* C15 fait la même chose mais seulement entre -1 et 2 (tableau de valeurs)

* C21 et C34 font un décalage vertical ($|x| + 5$ et $|x| - 5$ respectivement)

* C2 coupe à $x = 0$ avec les bonnes expressions ($-x+5$ pour $x < 0$ et $x-5$ pour $x > 0$)

* C1 prend les valeurs entières entre -2 et 2, calcule les valeurs en faisant $x - 5$ pour $x \leq 0$ et $-x + 5$ si $x > 0$ et joint les 5 points obtenus par une ligne brisée

* C33 place des points correspondant à $x - 5$ entre 0 et 5 et $x + 5$ entre -5 et 0.

On voit donc ici beaucoup d'erreurs, et en particulier beaucoup d'élèves qui prennent une formule différente pour $x > 0$ et $x < 0$.

Deuxième question

Nous regarderons d'abord la méthode employée par les élèves puis la réussite ou les erreurs.

C27 n'a pas traité cette question. Restent 33 élèves.

Pour l'équation, 29 élèves ont fait un tableau pour enlever les barres, 3 une résolution graphique et 1 une résolution algébrique.

* Parmi ceux qui font un tableau,

- 19 réussissent la résolution de l'équation : C1, C3, C4, C5, C6, C8, C9, C10, C11, C18, C20, C21, C22, C24, C25, C26, C28, C32, C33.

- 10 font des erreurs :

- C30 fait une erreur de signe dans le calcul et trouve $x = -1$,

- C2 traduit $|3-x|$ par $-3+x$ si $x < 3$ et $3-x$ si $x > 3$

- C12 n'a rempli pas son tableau et ne répond pas pour l'équation, de même C17 ne le termine pas

- C14 fait un tableau correct mais conclut $S = [-3, 5]$

- C15 fait le tableau correctement mais fait des erreurs de calcul algébrique dans la résolution, C19 en fait dans les cas où les x devraient disparaître

- C16 a des problèmes d'interprétation du tableau : sous " $x=1$ " il écrit "n'est pas dans l'intervalle" et ne conclut pas

- C23 inverse le tableau pour $|x+3|$, trouve 1 dans les mauvais intervalles mais conclut quand même $x = 1$

- C35 inverse le résultat de $|x-5|$ dans le tableau, trouve $x = 1$ dans le mauvais intervalle et conclut "pas de solution", ce qui est cohérent

* C7 fait une résolution algébrique correcte en posant $x-5 = \pm (3+x)$

* Pour les résolutions graphiques :

- C13 le fait correctement

- C29 trace $y = x-5$ et $y = x+3$ et conclut "impossible"

- C34 a des graphiques faux $|x| - 5$ et $x+3$, ses réponses sont cohérentes avec ces graphiques.

Pour l'inéquation, il y a 8 non réponse de plus : C2, C8, C11, C16, C17, C24, C26, C35.

Les 25 élèves restant utilisent le plus souvent la même méthode que pour l'équation, sauf C10 (tableau puis graphique) et C13 (graphique puis tableau), avec succès dans chaque cas. Ce sont d'ailleurs les seuls qui réussissent complètement l'inéquation.

* C29 et C34 utilisent une méthode graphique sur des graphiques faux.

* C7 avait résolu l'équation algébriquement, il répond ici $x \leq 1$ sans explication

* Ceux qui utilisent le tableau ont des problèmes d'interprétation du tableau ou de traitement des inégalités :

- *traitement correct du tableau mais absence de conclusion ou conclusion erronée : C1*

- C1 fait correctement son tableau mais conclut $\{1\}$

- *mauvais traitement des cas où les x disparaissent*

- soit avec traitement algébrique correct ($0 \leq 8$) et mauvaise interprétation : C15, C18, C20, C21, C30, C33

- C15 a des problèmes pour interpréter le tableau : elle écrit $\emptyset$ dans le cas $0 < 8$, elle a aussi un problème dans le traitement des inégalités avec l'addition : quand elle change un terme de côté, elle change le sens de l'inégalité au lieu de changer le signe du terme;

- C18 écrit $\emptyset$ dans le cas $0 < 8$, il conclut donc $[1, 5]$. De même C5 conclut $] -3, 1]$ (erreur inégalité en plus)

- C20 écrit "les solutions se trouvent dans l'intervalle $[-3, 5] \quad x \leq 1$ " (elle fait aussi l'erreur sur les inégalités)

- C21 ne résout que l'équation du milieu et conclut $x \leq 1$: il ne respecte pas l'entête.

- C30 exclut aussi l'intervalle de droite mais fait une erreur de signe au centre et trouve $x \leq -1$

- soit avec erreur de calcul algébrique qui évite de faire disparaître les x : C19

- C19 fait des erreurs de calcul algébrique pour éviter que les x ne disparaissent et il se trompe dans le produit d'une inégalité par un négatif, concluant ainsi $[-8, 1]$

- mauvaise utilisation du tableau (non respect de l'entête) : C6, C21, C23

- C6 n'envisage que le cas $x > 5$ et $x < -3$ et trouve $x \leq 1$ sans s'apercevoir que ce cas est vide
C23 inverse les signes dans le tableau pour $|x+3|$, elle trouve donc $x \geq 1$ dans $]-\infty, -3]$, impossible dans $]-3, 5]$, $x \leq 1$ dans $]5, +\infty[$ et ne conclut pas.

- mauvais traitement des inégalités : C3, C4, C5, C14, C15, C19, C20, C22, C25, C28, C32, C33

- C9 et C25 font une erreur dans le sens de l'inégalité, écrivent $x \leq 1$ mais répondent $[1, +\infty[$ ou $\{1, +\infty[$

Beaucoup d'élèves, outre ceux déjà mentionnés, cumulent au moins deux de ces erreurs :

- C3, C4, C14, C22 passent de $-2x \leq -2$ à $x \leq 1$ pour la zone $-3 \leq x \leq 5$ et

- C3 conclut $[-3, 5] \cup [5, +\infty[$

- C4 ne conclut pas

- C14 conclut $[-3, 5]$

- C22 conclut $[-3, +\infty[$

- C12 écrit $[5, +\infty[$ sans explication

On voit donc que l'utilisation du tableau pose beaucoup de problèmes aux élèves, surtout dans le cas des inégalités. A cette époque de l'année, les résultats sont nettement moins bons dans la classe C que dans la classe B : l'interprétation en termes de distance ou la résolution graphique facilitent nettement le traitement de ce genre d'équations.

Résolution de $|2x + 6| = 5$

Ne répondent pas à la question (la dernière du contrôle) : C2, C12, C27, C30.

* méthode graphique : C5, C21 (et algébrique, les deux justes), C17, (non réussi : graphique faux et mal interprété)

* méthode du tableau

- avec succès : C1, C3, C4, C10, C14, C16, C18, C20, C25, C28, C32, C34

- avec échec : C8, C9, C13

Plusieurs élèves prennent 3 au lieu de -3 comme valeur de partage : C8, C9, C13, C13 ne fait que cette erreur (conclusion cohérente)

* méthode algébrique

- avec succès : C5, C7, C21, C23, C24

- avec échec : C6 (disjoint les cas mais ne conclut pas), C11, C22 (erreur de signe), C15, C26, C29 (enlèvent les barres), C33 fait de même mais avec l'argument " $2x+6$ supérieur à 0", C35 donne la même justification mais ensuite distingue $2x + 6 = 5$ et $-2x - 6 = -5$, trouve respectivement $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ et conclut $S = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

* C19 disjoint les cas $x \leq -\frac{1}{2}$ et $x \geq -\frac{1}{2}$ mais on ne sait pas comment il a trouvé cette valeur

4. Contrôle 6, classe D, 10/2/95

Le contrôle comportait un exercice de géométrie analytique et 3 exercices sur le chapitre des valeurs absolues et encadrements. L'effectif était de 27 élèves (D19 absent).

Exercice 2

Pour l'exercice 2, il fallait compléter un tableau, comme dans les classes A et B, mais sans dessin, avec une colonne pour centre et rayon :

encadrement	appartenance à un intervalle	a = centre de l'intervalle r = rayon de l'intervalle	distance	valeur absolue
$3 < x < 7$				
	$x \in [-2;5]$			
			$d(x;-1) \leq 3$	
				$ x - \frac{1}{2} \leq \frac{4}{3}$
	$x \in [-6;-2]$			

On a donc un intervalle avec centre et rayon entiers positifs, deux intervalles avec centre entier négatif et rayon entier, un intervalle avec centre et rayon fractionnaires dont un avec des dénominateurs différents.

Les résultats sont les suivants, sur 26 élèves (D28 n'a pas joint la feuille d'énoncé à sa copie).

- réussite totale : 9 élèves, soit 35 % : D3, D6, D8, D14, D15, D18, D22 (bornes approchées en 4), D26, D27

- réussite de 4 sur 5 (avec éventuellement erreurs mineures ailleurs) : 7 élèves : D2 (rayon -2 au 5), D4 (rayon faux en 2 mais aussi quelques erreurs de recopiage du rayon dans la dernière case, D12 (borne en 4, écriture des inégalités larges ou strictes en 1 et 5), D16 (borne en 4), D20 (centre -8 au 5), D23 (inverse centre et rayon en 2), D24 (borne fausse en 4, mais avec problèmes d'écriture) soit réussite au moins 4 : 62 %

- réussite de 3 sur 5 : D5, D7 (rayon en 2, calcul d'une borne en 4), D10 (calcul en 4, centre rayon en 5), D17 (borne en 4, rayon -2 en 5).

- réussite de 2 sur 5 : D25

- une seule ligne réussie : D9 (ne répond pas pour la distance en 1, 2, 5, erreur de borne en 4), D13 (ne réussit que 1, erreurs sur centre et rayon ailleurs), D21 (ne réussit que 1, erreurs diverses)

- aucun réussi en entier : D1 (ne réussit que les traductions congruentes), D11 (erreurs diverses).

Nous comptons la ligne réussie même en cas de confusion entre inégalités larges et strictes ou intervalles ouverts et fermés.

Réussite au 1 : 22 élèves soit 85%

Réussite au 2 : 16 élèves soit 62%

Réussite au 3 : 22 élèves soit 85%

Réussite au 4 : 13 élèves soit 50%

Réussite au 5 : 17 élèves soit 65%

Comme prévu, les fractions posent des problèmes : le 4 est le moins réussi à cause des erreurs de calcul pour les bornes. De même pour le 2 on a des erreurs pour le rayon. Le centre négatif ne pose pas tellement de problème, en 5, l'erreur principale consiste à proposer un rayon -2 (5 élèves et 1 propose -4). En fait les élèves calculent algébriquement centre et rayon et font dans ce cas la différence dans le mauvais sens.

Exercice 3 : Résolution d'équations et d'inéquations.

Cette question est beaucoup plus difficile que dans les classes A et B puisque le coefficient de x n'est égal à 1 que pour une seule des équations, le rayon étant alors $\frac{7}{2}$. Dans la classe C on avait un exercice de ce type dans le contrôle 6 (une seule équation, coefficients entiers) et un exercice du type du e) dans les contrôles des classe B et C, mais avec des coefficients plus simples et une représentation graphique.

Les élèves utilisent très majoritairement la méthode algébrique :

a) $|x + 2| = \frac{7}{2}$

- réussite par la méthode algébrique : 22 élèves, soit 81%, compte non tenu d'éventuels problèmes d'écriture. D27 réussit aussi par la distance.
- échec par la méthode algébrique : D10 (erreur de signe dans le calcul algébrique), D24 et D28 (erreur de signe dans le calcul numérique).
- échec par la distance : D13 (échange centre/rayon), D18 (signe du centre).

b) $|5x-1| = -2$

- réponse "impossible" : 23 élèves, soit 85%
- trouve 2 solutions par la méthode algébrique : D17, D20, D25, D27 (et par la distance !)

c) $|4-5x| = 0$

- réussite par la méthode algébrique : 17 élèves, soit 63%, compte non tenu d'éventuels problèmes d'écriture.
- $x = \pm 4/5$: D9, D12
- $x = -4/5$: D10, D27
- autre erreur de calcul algébrique : D14
- $x = 0$: D2, D28
- pas de solution : D5
- échec par la distance : D18 (signe du centre).
- autre : D13.

d) $|2x+1| = \frac{1}{5}$

- réussite par la méthode algébrique : 14 élèves, soit 52%, compte non tenu d'éventuels problèmes d'écriture.
- échec par la méthode algébrique :
 - erreur dans le calcul algébrique : D2, D10 et D24 (signe dans équation), D9 (oubli de diviser par 2), D20 (multiplie par 2 au lieu de diviser), D21 (pose les équations et s'arrête), D25 (?)
 - erreur de signe dans le calcul numérique : D4, D17,
 - erreur sur les fractions ou décimaux : D5, D13, D14
- échec par la distance : D18 (signe du centre).

e) $|7x+2| = |5x-9|$

- réussite par la méthode algébrique : 21 élèves, soit 78%, compte non tenu d'éventuels problèmes d'écriture.
- échec par la méthode algébrique :
 - erreur de signe en enlevant les valeurs absolues $(-5x-9)$: D5, D13
 - erreur dans le calcul algébrique : D21 (signe dans équation),
 - erreur de signe dans le calcul numérique : D13, D24
 - erreur sur les fractions ou décimaux : D17,

f) $|3x+1| \leq \frac{1}{2}$

- réussite par la méthode algébrique : 16 élèves, soit 59%, compte non tenu d'éventuels problèmes d'écriture.
- échec par la méthode algébrique :
 - erreur d'inégalité en enlevant les valeurs absolues : D25
 - erreur dans le calcul algébrique : D1 (multiplie par 3 au lieu de diviser), D4, D5, D14 et D28 (ajoutent 1), D13 (plusieurs), D17 (soustrait 3 au lieu de diviser).
 - erreur sur les fractions ou décimaux : D7, D21
 - non réponse : D10.

Il semble que la méthode algébrique ne pose pas de problème en soi : en général les élèves posent les bonnes équations. Les problèmes viennent du traitement algébrique lui-même et du calcul sur les fractions.

Les erreurs d'écriture peuvent être un mauvais maniement des signes d'inégalité ou d'intervalles ou l'écriture de $|x|$ à la place de x .

Exercice 4. Encadrements et valeurs approchées, écriture en valeur absolue.

Nous avons deux exercices du même type dans le contrôle 4 de la classe A, mais contextualisés (volume, périmètre) : la mise en équation et le traitement des formules avaient posé des problèmes.

Un élève (D10) n'aborde pas l'exercice. Restent 26 élèves.

1) Traduction de "29,5 est une valeur approchée de x à 0,5 près".

* Production d'un encadrement correct à 0,5 près : 20 élèves, soit 77%.

- D9 fait bien un encadrement à 0,5 près mais avec des négatifs : il a écrit correctement la valeur absolue d'abord et fait l'erreur de signe classique en retraduisant.

- confusion avec "par défaut" ou "par excès" : D11, D13 (et écrit -29,5), D25

- prend 29 comme centre : D12

- à 0,1 près : D17

* Ecriture correcte de la valeur absolue : 15 élèves, soit 58%

- non réponse : 9 élèves

- D11 écrit $|x|$; $-29,5| \leq 0,5$ et D12 écrit l'égalité $|x - 29,5| = 0,5$

2) $|y - 12,3| \leq 3 \times 10^{-1}$, déduire un encadrement.

- Réponse correcte : 15 élèves soit 58% (mais D9, tout en fournissant le bon encadrement dit que le centre de l'intervalle est -12,3 et son rayon 0,3)

- D27 écrit $-0,3 \leq |y - 12,3| \leq 0,3$ $-0,3 + 12,3 \leq |y| \leq 0,3 + 12,3$ $12 \leq |y| \leq 12,6$

- non réponse : D17, D21, D25

- erreur sur les puissances : D1, D8

- prend des négatifs : D5, D23

- confusion avec "par défaut" ou "par excès" : D11,

- prend 12 comme centre : D12

- D13 écrit $12,3 \leq y \leq 3 \times 10^{-1}$

3) Encadrement de $x+y$

- réussite (à partir des encadrements trouvés) : 20 élèves soit 77% (dont D18 qui reprend l'encadrement de x de l'exercice précédent, et D27 qui garde toujours le signe de valeur absolue.

- non réponse partielle : 4 élèves

- D1 prend 3 au lieu de 0,3 trois fois sur 4 et obtient $38,3 \leq x+y \leq 45,3$

- D5 a une réponse ininterprétable et inachevée sans doute.

4) Encadrement de $x-y$

- réussite : 17 élèves, soit 65% (dont D18 qui reprend le même x que pour la somme)

- non réponse partielle : 5 élèves.

- soustraction des inégalités (ou passage à l'encadrement de l'opposé sans changer les signes : D5 (qui avait des encadrements par des négatifs), D20, D27 (en écrivant $-y$)

- D24 prend 29 des deux côtés pour x

La plus grande difficulté consiste à passer de l'écriture avec valeur absolue à l'encadrement et réciproquement : à peine plus de la moitié des élèves y parviennent alors que l'encadrement d'une somme et même d'une différence sont relativement mieux réussis (les élèves passent par l'encadrement de $-y$, comme l'a montré le professeur en classe. Rappelons qu'il s'agit d'encadrements théoriques de nombres et non d'une utilisation dans une situation où les résultats seraient sans doute moins bons.

Annexe 5

Compléments aux résultats du test

1. Nombres.

Réponses détaillées à la question "Qu'est-ce qu'un nombre ?"

* réponse 1 : élèves qui ne barrent que des lettres (plus à la rigueur 0 ou 0,232323....)

1.a. ne barrent rien : classe A, 2 ; classe B, 0 ; classe C, 2 ; classe D, 2.

Explications données :

"Un nombre est un chiffre qui peut être positif ou négatif mais il peut être aussi remplacé par une lettre" (A2)

"Ce sont tous des nombres car on peut écrire un nombre sous plusieurs formes" (A9)

"Pour moi un nombre est un alignement de chiffres connus ou une quelconque expression qui possède une valeur" (C3)

"Un nombre est une valeur réelle" (C34)

"Un nombre est une expression numéral (sic) composée de plusieurs ou un seul chiffres" (D12)

1.b. barrent seulement e : classe A, 1 ; classe B, 3 ; classe C, 0 ; classe D, 3.

Explications données :

"Un nombre pour moi doit représenter quelque chose, une valeur, une grandeur. Quand on pense à un chiffre, on pense à un nombre, ex 3,5 est un nombre ; x est un nombre ssi on lui attribue une valeur" (A13)

"Un nombre est composé de chiffres, peu importe le nombre de chiffres ou son signe" (B2)

"Pour moi, c'est un ensemble de chiffres" (B19)

"Des chiffres : décimaux, entiers, positifs, négatifs" (B13)

"Un nombre, c'est tous les réels compris entre $]-\infty ; +\infty[$ (D5)

"plusieurs chiffres assemblés" (D25)

1.c. barrent tout ce qui contient x (e barré ou non) : classe A, 7 ; classe B, 13 ; classe C, 17 ; classe D, 2, autres 1².

Exemples d'explications données :

"Pour moi un nombre représente une distance qui dépend de l'unité choisie" (A6)

"Un nombre est quelque chose de concret que l'on peut compter, additionner ou soustraire. Cela peut-être une distance ou de l'argent. Pour de l'argent, les nombres négatifs peuvent être des dettes" (A10)

"Pour moi les nombres sont compris dans l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$. Des nombres se composent uniquement de chiffres et non pas de lettres ou sous la forme d'abord d'une opération qui une fois effectuée donnera un ou une série de chiffres d'où un nombre." (A11)

"Un nombre est une quantité ou représente une quantité non variable. Il peut être positif, négatif. L'expression e ou $2x + \frac{5}{4}$ comporte une inconnue. On peut donc faire varier cette

inconnue et créer une fonction. Pour que x soit un nombre, il faut le préciser" (A14)

"Un nombre est un outil de mathématique avec lequel on peut calculer pour trouver un résultat" (A19)

"Pour moi un nombre est une valeur exacte et précise, qui ne peut s'exprimer que par des chiffres. π est considéré comme la valeur d'un nombre" (A27)

"Pour moi un nombre est composé de chiffres et quand on le calcule, il donne des chiffres" (B5)

"Un nombre pour moi est quelque chose de réel, de défini" (B6)

"C'est un chiffre ou encore une lettre qui représente un chiffre précis" (B10)

² Nous classons "autres" 3 élèves : l'un a servi à évaluer le test et n'est pris en compte que pour les premières questions, les deux autres sont 1 élève de la classe A et un élève de la classe B qui sont arrivés après les vacances de février, qui ont donc suivi un autre enseignement et pour lesquels nous n'avons pas d'autres données.

"Un nombre n'est pas une lettre ; il y a plusieurs sortes de nombres, il y en a des définis comme 1 ou 102 et il y en a des indéfinis comme $7x$ " (B11)
 "Un nombre est composé de un à plusieurs chiffres ou cela peut être une lettre mathématique telle que π ayant une valeur déterminée" (B17)
 "Un nombre a une valeur numérique, mais ce n'est pas une variable" (B18, excellent élève, qui laisse e)
 "Un nombre est quelque chose entièrement défini (B32)
 "Un nombre est compris entre $-\infty$, $+\infty$ ($-\infty \leq 0 \leq +\infty$) (B34)
 "Pour moi un nombre doit avoir une valeur précise, par exemple $\frac{1}{\pi+1} = 1,31\dots$ il a une valeur; par contre $3x$ n'est pas un nombre, il n'a pas de valeur précise car on ne sait pas la valeur de x " (C2)
 "Un nombre a une valeur approchée ou une valeur exacte. Son expression à elle seule le définit" (C8)
 "Un nombre pour moi est une chose précise (à peu près approchée à 10^{-10}), ce qui n'est pas le cas d'une expression littéraire (sic)" (C10)
 "Un nombre est un chiffre, il peut être positif ou négatif, il peut être à virgule ou pas" (C15)
 "Un nombre pour moi est une expression numérique par laquelle il est possible de calculer ou mesurer" (C17)
 "Pour moi un nombre c'est tout ce qui correspond à des chiffres. Par exemple, $\pi \approx 3,14\dots$ mais e n'est égal à rien" (C33)
 "Pour moi un nombre est une expression numérale pouvant être composée de plusieurs chiffres et pas de lettres" (D16)
 "Pour moi un nombre c'est un ou une combinaison de chiffres" (D18)

1.d. barre e, x et éventuellement $3x$: classe A, 3 ; classe B, 2 ; classe C, 2 ; classe D, 4.

Exemples d'explications données :

"Un nombre est un chiffre, qu'il soit à virgule, au carré, positif ou négatif" (A12 qui ne barre que x et e)
 "Un nombre est une chose qui est supérieure ou inférieure à zéro, c'est une chose qui est mesurée, un nombre s'est une chose réelle" (A15 barre x et e)
 "Un nombre est pour moi composé de chiffres ou un symbole tel que π qui en représente un ($\pi \approx 3,14\dots$)" (B4 qui barre x, e et $3x$)
 "Un nombre, c'est un ou plusieurs chiffres, avec ou sans virgule" (B9 barre e et x)
 "Un nombre pour moi est une expression numérique par laquelle il est possible de calculer ou mesurer" (C17 qui barre x, e et $3x$)
 "Un nombre est composé de chiffres. Il indique une certaine valeur ou une certaine quantité" (D2, barre e et x)
 "C'est une valeur positive ou négative qui peut être calculée et découverte si on la met en inconnue" (D11, barre e et x)
 "C'est une valeur positive, négative ou nulle" (D20, barre x, e et $3x$)

1.e. barre les lettres et 0 : classe A, 1 ; classe B, 0 ; classe C, 0 ; classe D, 0.

Explication donnée : "x est une valeur donnée" (A23)

1.f. ne barre que 0,232323... : classe A, 0 ; classe B, 0 ; classe C, 1 ; classe D, 0.

Explication donnée :

"Pour moi un nombre a une valeur précise, n'est pas infini dans son écriture (π est une écriture arrêtée). Les lettres peuvent désigner des nombres entiers (le plus souvent) ou des décimaux." (C24)

Nous avons rattaché à cette catégorie :

C12 qui barre les lettres et -5^3 (peut-être parce qu'il figure 2 fois)

Total pour la catégorie 1 : classe A, 14 ; classe B, 18 ; classe C, 22 ; classe D, 11.

* réponse 2 : élèves qui se préoccupent du nombre de chiffres

2.a. barrent 0, -4 et éventuellement les lettres : classe B, 1 ; classe C, 1 ; classe D, 2.

Exemples d'explications données :

"Pour moi un nombre est "quelque chose" qui est composé d'au moins 2 chiffres" (B26)

"Un nombre c'est un ensemble de chiffres" (C27 barre -4, 0, e, x)

"Un nombre, c'est 2 chiffres ou plus" (D3, barre -4, 0, e)

"Un nombre est un ensemble de chiffres, une somme de chiffres" (D9, barre -4, 0, e, x)

2.b. déclarent que les nombres doivent être plus grands que 9 ou que 10 : classe D, 3.³

Explications données :

"Les chiffres au-dessus de 10" (D4 qui garde 0 ; 10^3 ; $\pi^2\sqrt{17}$; $8,5 \cdot 10^{-28}$; -5^3 ; $(-5)^3$; $\pi - \frac{22}{7}$)

"Un nombre est l'union de deux chiffres (chiffre = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) qui rendent donc le nombre supérieur ou égal à 10 ou -10" (D6 qui garde 10^3 ; $\pi^2\sqrt{17}$; -5^3 ; $(-5)^3$)

"Un nombre est composé au minimum de 2 chiffres, il est donc compris entre $]-\infty ; -9[\cup]9 ; +\infty[$ " (D23 qui garde 10^3 ; $2\sqrt{7}$; $\pi^2\sqrt{17}$; $|2 - \pi|$; $8,5 \cdot 10^{-28}$; π^2 ; -5^3 ; $(-5)^3$)

2.c. autre réponse du même type : classe A, 1 (A4 barre -4, 0, 0,05, 10^3 , 0,232323..., pas d'explication donnée).

2.d. même idée mais confond en plus chiffre et nombre : classe B, 1 (conserve 0, -4, e, x)

Explication donnée :

"Un nombre est un numéro ou un symbole représentant un et un seul nombre ou numéro (nombre $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ un seul numéro, chiffre $\rightarrow$ 435 $\rightarrow$ combinaison de numéros)" (B27)

Total pour la catégorie 2 : classe A, 1 ; classe B, 2 ; classe C, 1 ; classe D, 5.

* réponse 3 : Elèves qui refusent, éventuellement en plus des lettres, certaines expressions.

3.a. refusent seulement $|2 - \pi|$: classe A, 1 ; classe B, 2 ; classe C, 1 ; classe D, 2, autres 1.

"Un nombre peut être entier ou décimal, positif ou négatif. On peut effectuer différentes opérations avec ces nombres ; multiplication, addition etc..." (A8, barre e, x et $|2 - \pi|$)

"Un nombre est un (des) chiffre(s) qui peut comporter des puissances, des racines, des fractions ou des virgules, ou ce peut être une lettre qui remplace un (des) chiffre(s). Il peut être positif ou négatif (A28, catégorie "autres", ne barre que e et $|2 - \pi|$)

"Un nombre est une expression mathématique représentée par des chiffres ou des lettres (ou les deux qui représente une valeur" (C 30 qui barre aussi e)

"Un nombre est un groupe de chiffres qui donne un seul résultat" (D24, barre e et $|2 - \pi|$)

"Un nombre est un symbole qui définit une quantité" (D15, ne barre que $|2 - \pi|$)

Nous mettons aussi dans cette catégorie B24 qui refuse $|2 - \pi|$ et -5^3 (peut-être parce qu'il est égal à $(-5)^3$) et dit "tous les nombres doivent être dans un domaine de définition : $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$ "

3.b refuse les parenthèses $(-5)^3$ et e : classe A, 1 : A21, pas d'explication

3.c. refusent une autre expression : 3

($\pi^2\sqrt{17}$) classe A, 1 (A20 qui barre aussi les lettres et dit pour un nombre "c'est une valeur réelle, positive ou négative, à partir de laquelle on peut faire des calculs, des distances... Elle peut être entière ou ne pas l'être" ;

classe B, 1 (B14 refuse x et $\pi^2\sqrt{17}$ et dit qu'un nombre "c'est un ensemble de chiffres";

classe C, 1 (C26 qui refuse les lettres et $\pi - \frac{22}{7}$ et dit "un nombre est composé de plusieurs chiffres ; tous les nombres au-dessus de 10 sont des nombres").

3.d. refusent plusieurs expressions :

³ Un élève de la classe B donne une explication de ce type mais ne barre que x et e, nous l'avons classé dans "autres réponses", c'est B21.

classe C, 2 (C20 refuse $|2-\pi|$; $-\frac{3}{13}$; $8.5 \cdot 10^{-28}$)

(C32 qui refuse $|2-\pi|$ et $\frac{1}{\pi+1}$ et dit "Un nombre est une série de chiffres, entiers ou décimaux"

; 1 autre (B35 qui refuse $|2-\pi|$; 0,05; 0,232323... et explique "un nombre est une valeur que l'on peut définir et que l'on peut calculer")

Total pour la catégorie 3 : classe A, 3 ; classe B, 3 ; classe C, 4 ; classe D, 2 ; autres, 2.

* réponse 4 : ne garde que des expressions sans opérations (avec au plus 1 ou 2 exceptions).

Suivant le cas, les élèves conservent ou non $2\sqrt{7}$, $1+\sqrt{7}$, π^2 , $-\frac{3}{13}$ qui correspondent à des écritures usuelles.

Total pour la catégorie 4 : classe A, 2 ; classe B, 4 ; classe C, 6 ; classe D, 3.

Exemples d'explications données :

"Est un nombre qui peut soit se multiplier, diviser, et qui a plusieurs écritures possibles, et de différentes manières" (A26)

"Un nombre est un chiffre, il peut être négatif ou positif" (B3)

"Pour moi, un nombre c'est un ensemble de chiffres ou alors un chiffre seul" (B12)

"Parmi les nombres on regroupe les chiffres et autres numériques ex : 2 ; -2 ; 10^{-12} ; 0,3." (C4 qui n'a conservé que les entiers et les écritures à virgule, y compris 0,2323...)

"Un nombre est un réel, c'est-à-dire qu'il peut être même écrit sous forme de puissance ou $\sqrt{\quad}$ tant que n'entrent pas en jeu les additions, soustractions..." (C31)

Parmi eux, certains (bons) élèves ne gardent que les décimaux en donnant des explications.

- Trois bons élèves de la classe C ne gardent que les écritures finies : 0,05 ; -4 ; 0 ; 10^3 ; $-\frac{3}{13}$; $(-5)^3$; -5^3 ; $8.5 \cdot 10^{-28}$;

C11 (qui refuse aussi $(-5)^3$) dit "Un nombre c'est une valeur nette, précise, directement utilisable, réelle"

C13 dit " Pour moi un nombre représente tout ce qui appartient à $\mathbf{R}$ mais qui tombe juste".

C21 "Un nombre est une valeur définie et réelle".

- B1 (très bon élève) ne garde même que -4 ; 0 ; 0,05 en disant "un nombre est un ensemble de chiffres, à virgule ou non, qui a une valeur exacte"

* réponse 5 : élèves qui refusent à la fois les opérations et les nombres à un chiffre :

classe B : 1 élève (B16, élève en grande difficulté, garde $-\frac{3}{13}$; $8.5 \cdot 10^{-28}$; 10^3 ; $(-5)^3$ et dit

"un nombre $\neq$ un chiffre") ; classe C : 1 élève (C14 garde $2x + \frac{5}{4}$; e ; $8.5 \cdot 10^{-28}$; 10^3 ; $\pi^2\sqrt{17}$;

x ; $(-5)^3$; -5^3 ; $3x$ et dit "Un nombre est un entier ou un décimal fait à partir de chiffres (0 -> 9) un nombre est composé de chiffres).

* réponses inclassables, souvent incohérentes avec l'explication: classe A, 2 ; classe B, 1 ; classe C, 1 ; classe D, 1.

A16 barre -4, 0, e, $|2-\pi|$, $1+\sqrt{7}$, π^2 , $3x$ et dit "un nombre peut être positif ou négatif, c'est aussi les décimaux, un nombre a plusieurs écritures (les puissances, les racines, les fractions)

A22, élève en grande difficulté, ne conserve que -4, 0, 10^3 , $2\sqrt{7}$, $-\frac{3}{13}$; $|2-\pi|$; $1+\sqrt{7}$; -5^3 ; $(-5)^3$;

$3x$; $\pi - \frac{22}{7}$ et dit "Pour moi, un nombre c'est un chiffre où il n'y a pas de virgule."

B21 ne barre que x et e et dit "c'est supérieur à 9, c'est-à-dire composé de 2 chiffres"

Encadrement de $1-\sqrt{2}$

Pourcentages

réponse 1	0,00	0,17	0,31	0,05	0,00	0,15
réponse 2	0,13	0,17	0,20	0,18	0,50	0,18
réponse 3	0,04	0,07	0,06	0,00	0,00	0,04
réponse 4	0,04	0,03	0,03	0,00	0,00	0,03
autre réponse	0,17	0,07	0,06	0,05	0,00	0,08
non réponse	0,63	0,48	0,34	0,73	0,50	0,52

Valeur exacte de $|1-\sqrt{2}|$

réponse 2 : valeur approchée avec au moins 5 décimales,

réponse 3 : autre valeur approchée

réponse 4 : "il n'y a pas de valeur exacte"

réponse 2	5	2	2	2	0	11
réponse 3	3	1	3	0	0	7
réponse 4	1	0	3	0	0	4

Pourcentages						
réponse 1	0,04	0,17	0,09	0,09	0,50	0,11
réponse 2	0,21	0,07	0,06	0,09	0,00	0,10
réponse 3	0,13	0,03	0,09	0,00	0,00	0,06
réponse 4	0,04	0,00	0,09	0,00	0,00	0,04
réponse 5	0,00	0,07	0,26	0,05	0,00	0,11
réponse 6	0,00	0,21	0,09	0,05	0,00	0,09
réponse 7	0,08	0,03	0,00	0,09	0,00	0,04
réponse 8	0,13	0,03	0,03	0,00	0,00	0,04
réponse 9	0,04	0,07	0,03	0,09	0,00	0,05
non réponse	0,38	0,31	0,29	0,55	0,50	0,37

Parmi les autres réponses, deux élèves, B12 et D25, répètent $|1-\sqrt{2}|$.

Intervalles.

Codage détaillé des erreurs. Pour les questions 5a, 5c, 5d, 5e

- le code 1 correspond à une réponse correcte ($2 \leq x \leq 5$; $-\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$; -2 et 1 ; $-2 \leq x \leq 1$),
 - le code 2 correspond à une résolution comme s'il n'y avait pas de barres ($x \leq 5$; $x \leq \frac{1}{2}$; $x = 1$; $x \leq 1$, nous considérerons avec un code 2', les élèves qui prennent $0 \leq x \leq 5$ etc...
 - le code 3 correspond à la même idée mais avec une erreur de signe en plus ($x \leq 2$ ou $x \leq -2$; $x \leq \frac{7}{2}$; $x = 2$; $x \leq 2$),
 - le code 4 correspond aux mêmes erreurs mais avec $\geq$ dans le cas où on ajoute un nombre négatif.
- Les codes 2, 3, 4 seront regroupés pour repérer les élèves qui traitent ces équations ou inéquations comme s'il n'y avait pas de valeur absolue.
- le code 0 correspond aux élèves qui donnent un intervalle centré en 0 et délimité par une borne correcte, par exemple $-5 \leq x \leq 5$ pour a,
 - le code 5 correspond aux élèves qui donnent aussi une demi-droite comme solution, mais délimitée par un point d'abscisse le centre ou le rayon, par exemple $x \leq 3,5$ ou $x \geq 3,5$ ou $x \geq 1,5$ ou $x \leq 1,5$ pour a,
 - le code B correspond aux élèves qui donnent un intervalle délimité par le centre et le rayon, avec éventuellement des erreurs de signe, par exemple $1,5 \leq x \leq 3,5$ ou $-3,5 \leq x \leq 1,5$

Nous pourrions éventuellement regrouper les codes 5 et B, puisque ce sont des élèves qui cherchent des réponses d'un certain type (demi-droite ou intervalle) mais cherchent les bornes dans les nombres fournis, le code 5 correspondant aux élèves qui cumulent probablement une erreur de type B et une erreur de type 2.

- le code CR correspond aux élèves qui échangent centre et rayon que ce soit en dessinant l'intervalle ou en lisant le dessin,

- nous noterons S les erreurs qui font une erreur de signe sur une borne ou sur le centre si le reste est juste,

- le code 6 sera réservé aux autres erreurs.

- Pour les questions d et e, nous repèrerons les élèves qui traitent la question en se référant probablement aux distances comme dans le cas $|x-a|$, sans complètement tenir compte du coefficient :

- co pour les élèves qui font comme si on avait x au lieu de $2x$ et répondent $-4, 2$ ou $-4 \leq x \leq 2$

- R pour ceux qui prennent un centre correct mais un rayon 3 ($-3,5 ; 2,5$ pour bornes) ce qui revient à résoudre $|x + \frac{1}{2}| \leq 3$

- C pour ceux qui prennent un rayon correct mais un centre -1 ($-2,5 ; 0,5$), ce qui revient à résoudre $|x + 1| \leq \frac{3}{2}$.

Pour l'exercice 6, nous noterons les erreurs éventuelles de signe (S), de centre (C), de rayon (R) et la traduction sera considérée à partir des valeurs trouvées par les élèves, qu'elles soient justes ou non.

Nous repèrerons l'erreur qui consiste à traduire $-\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ par $0 \leq |x| \leq 3,5$ ou quelque chose de ce genre ou même $-3,5 \leq |x| \leq 0,5$.

erreurs

5 codes 2,3,4	10	8	8	2	2	30
5 code 0	4	3	2	2	1	12
5 code 5	5	4	0	1		10
5 code B	2	2	0	3		7
5 code 5 ou B	7	6	0	4	0	17
5 ou 6 code CR	1	2	0	1		4
5 ou 6 code SC	4	4	3	8		19
codes co, C, R	5	3	0	2		10
total	24	29	35	22	2	112

Pour faire ce croisement, nous avons considéré qu'il s'agissait d'une réussite si l'élève n'a fait que des erreurs de calcul ou de remplacement de $\leq$ par $=$, ou s'il n'a fait que des erreurs de dessin, les traductions algébriques étant correctes (1 cas), mais s'il ne répond pas, nous avons considéré cela comme une non réussite.

Expression algébrique de la valeur absolue. Résultats détaillés par affirmation.

Aff1	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse F	10	17	15	13	1	56
réponse V	13	12	19	7	1	52
réponse JSP	0	0	0	0	0	0
total	23	29	34	20	2	108
% réponse F	0,43	0,59	0,44	0,65	0,50	0,52
Aff2	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse F	10	13	28	7	0	58
réponse V	11	15	5	12	1	44
réponse JSP	2	1	1	1	1	6
total	23	29	34	20	2	108
% réponse F	0,43	0,45	0,82	0,35	0,00	0,54

Aff3	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse V	16	11	8	13	0	48
réponse F	4	13	16	3	2	38
réponse JSP	3	5	10	4	0	22
total	23	29	34	20	2	108
% réponseV	0,70	0,38	0,24	0,65	0,00	0,44

Résolution d'équations

Description des erreurs pour $|3x+4| \leq 5$.

L'erreur CR correspond à A20 qui répond $[-\frac{4}{3}; 5]$. Les erreurs de tableau correspondent à C13 et C33 qui prennent 5 comme valeur de séparation du tableau, considèrent que la valeur $\frac{1}{3}$ trouvée à droite ne convient pas et concluent $[-3; 5]$.

Les erreurs de valeur absolue peuvent correspondre à une disjonction de 2 cas :

* $3x+4 \leq 5$ ou $3x+4 \leq -5$: C16, D20

* $3x+4 \leq 5$ ou $3x - 4 \leq 5$: B5, B25, D23

* $3x+4 \leq 5$ ou $4 - 3x \leq 5$: A1, B4, B12

* $3x \leq 4+5$ ou $3x \leq 4 - 5$: A17

ou à une seule inégalité :

* $3x+4 \leq 5$ ce qui donne $x \leq \frac{1}{3}$ pour B9, B19, B31, C23 et $x = \frac{1}{3}$ pour B33 et C27. B3 et D21 partent de cette inégalité mais font des erreurs de calcul algébrique.

* $|3x| \leq 1$ pour D25 d'où il conclut $x = \frac{1}{3}$ ou $-x = -\frac{1}{3}$.

Les autres erreurs correspondent à un mauvais dessin sur la droite graduée (A9 et B14) ou à une résolution graphique à partir d'un graphique faux (C34).

Les problèmes de conclusion concernent surtout les élèves de la classe C et un de la classe D, ces élèves ont, à part cela, un traitement correct :

- les élèves qui traitent séparément les inégalités et concluent $x \leq \frac{1}{3}$ ou $x \geq -3$ ou laissent les calculs en 2 colonnes sans plus de conclusion : C3, C7, C8, D15

- C5 traite correctement les 2 inégalités mais conclut $S = \{-3; \frac{1}{3}\}$

- C9 et C19 traitent correctement les 2 inégalités et concluent l'un $x \in [0; \frac{1}{3}]$, l'autre $x \in [0; \frac{1}{3}[$

C9 a même écrit le 0 par-dessus un -3 écrit d'abord. Est-ce la trace du fait qu'une valeur absolue est positive jointe à la difficulté à distinguer la variable de l'image par une fonction ? Cette difficulté se manifeste chez C4 par le fait de dire "si $x > 0$, $|x-3| = x-3$ etc...". En revanche il traite correctement le d) par double inégalité.

- C20 et C32 font un tableau pour enlever les barres : C20 remplace partout ses $\leq$ par des $=$ et conclut $S = \{-3; \frac{1}{2}\}$ en recopiant mal son résultat ; C32 trouve $\frac{5+4}{-3}$ dans la colonne $x \leq -\frac{4}{3}$, écrit dessous $\emptyset$, trouve $\frac{5-4}{3}$ dans la colonne $x \geq -\frac{4}{3}$ et répond finalement $\{\frac{5-4}{3}\}$

Erreurs relevées dans la résolution de $|x-3| = |x+2|$ et $|x-3| \leq |x+2|$.

A1 et D14 font une erreur de calcul algébrique dans la résolution mais avec un bon traitement algébrique de la valeur absolue et trouvent $-\frac{1}{2}$.

Les erreurs de valeur absolue avec 2 cas (C30, D20, D21) consistent à dire $x-3 = x+2$ ou $x-3 = -x+2$. C30 trouve $x = \frac{5}{2}$, D20 s'arrête D21 fait de plus une erreur de calcul algébrique : pour $x - x = 2+5$, il trouve $x = 5$.

Les erreurs de valeur absolue avec 1 cas consistent presque toutes (B9, B12, B33, C14, C19, C23, D9) à enlever les barres, poser $x-3 = x+2$ et s'arrêter ou conclure impossible. A26 et B3 font la même chose avec en plus une erreur de signe qui les amène à $2x = 5$. C1 pose, lui, $x+3 = x+2$ avant de s'arrêter.

Dans le cas de l'inégalité, A26 résout $x-3 \leq x+2$ et B33 $x+3 \leq x-2$, avec de plus une erreur de calcul algébrique qui les amène à $2x \leq 5$ et $2x \leq -5$ respectivement. On peut d'ailleurs remarquer que beaucoup d'erreurs de calcul algébrique ont pour conséquence d'éviter le 0x. Les problèmes de logique consistent, dans le cas de l'égalité à résoudre $x-3 = x+2$ et $-x+3 = -x-2$, ce qui donne 2 fois la même chose et conduit à une absence de solution. (C8 qui dit "mettons $|x-3|$ positif et $|x+2|$ positif" pour le premier cas, C12 fait la même chose mais avec une erreur de signe qui lui permet de trouver une solution).

Dans le cas de l'inégalité, nous avons classé dans cette catégorie les deux élèves qui fournissent une réponse correcte avec une mauvaise justification (C6 et C19) et aussi C5 qui distingue bien 3 cas, sans indiquer les valeurs de x auxquelles cela correspond et prend $x-3 \leq x-2$ au lieu de $3-x \leq x+2$, ce qui lui donne $x \leq \frac{1}{2}$ dans cette zone, mais il ne conclut pas. Pour l'égalité il avait fait la même chose mais c'était alors équivalent.

Des élèves de la classe D (D7, D14, D22) essaient d'utiliser une double inégalité : ils partent de $-x-2 \leq x-3 \leq x+2$ et, après avoir en général ajouté 3 à chaque membre s'arrêtent. D3 fait le même chose à partir de $x-2 \leq x-3 \leq x+2$.

Pour les autres réponses, dans le cas de l'égalité,

A6 adapte l'erreur CR des autres questions en s'écartant de 3 et 2 de chaque côté de 3 pour trouver 1 et 6,

A20 continue à confondre bornes et (centre, rayon) et répond $x \in [3, -2]$

B14 trace la droite, place -2 et 3 et écrit x à côté de 0,

C3 fait une lecture graphique correcte à partir d'un mauvais graphique ($|3x|$ au lieu de $|x-3|$)

C9 résout algébriquement en envisageant les 4 cas, mais trouve $x = \frac{1}{2}$ et $x = -\frac{1}{2}$ à cause d'une erreur de calcul et conclut $[0, \frac{1}{2}[$,

C15 écrit " $x-3 = x+2$, $x = x+5$, $x^2 = 5$, $x = \sqrt{5}$; $-x+3 = -x-2$, $-x = -x-5$, $-x^2 = -5$, $x = \sqrt{5}$

D15 écrit $d(x;3) = d(x;-2)$ puis $x = \frac{x-2}{3}$ ou $x = \frac{2-x}{3}$ et trouve $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$.

C29 et D5 pensent qu'il n'y a pas de solution, C29 parce que "les fonctions sont parallèles", D5 parce que "une valeur absolue n'est jamais égale à une autre".

Dans le cas de l'inégalité,

A1 écrit $2x \leq 5$ sans explication,

B5 trace la droite, place -2, 0, 3 et répond $]-\infty, 3]$

B25 hachure une zone du plan sur le graphique (la zone au-dessus de $|x+2|$ et le triangle compris entre les deux courbes et l'axe des x)

B3 écrit $x+3 \leq x+2$, $1 \leq 0$ et ne conclut pas,

B19 répond " $x = \mathbb{R}$ ",

C3 résout graphiquement à partir d'un mauvais graphique en faisant de plus une erreur de lecture : il conclut $x \leq 1$ ou $x \leq -0,5$ au lieu de $-0,5 \leq x \leq 1$,

C9 envisage les 4 cas, trouve $0x \leq 5$, dit "faux", $0x \leq -5$, dit "faux", $x \geq \frac{1}{2}$, $2x \geq -\frac{1}{2}$ et conclut $x \in [0, \frac{1}{3}[$

C15 fait le même genre de choses que pour les égalités et conclut $x \in \{\sqrt{1}, \sqrt{5}\}$

D15 écrit $d(x,3) \leq d(x,-2)$: $|x-3| - |x+2| \leq 0$, le barre et s'arrête,

D21 écrit " $x-3-x+2 \leq 0$ " et s'arrête

C14, C23 et D9 répondent impossible : C14 sans explication (même réponse au e), C23 en expliquant que les fonctions sont parallèles sur le graphique, D9 après avoir écrit $x-x \geq 2+3$.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

<http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html>

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7

Case 7018

2 place Jussieu

75251 Paris cedex 05

TITRE :

Pratiques des élèves et des enseignants en classe de mathématiques

AUTEUR (S) :

Noirfalise Annie
Noirfalise Robert
Perrin-Glorian Marie-Jeanne

RESUME :

Rôle des gestes de clôture dans l'enseignement des mathématiques

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1997
ISBN : 2-86612-128-7