

DANS NOS CLASSES

Lettre de Leibniz à La Roque : la quadrature arithmétique du cercle

Groupe M. : A. T. H.

Dans le texte du *De Origo*, Leibniz mentionne la méthode des métamorphoses sans en développer les détails. Cette méthode est explicitée pour la première fois dans une lettre adressée à La Roque, directeur du *Journal des Savants*, qu'on date de 1673. Dans cette lettre, Leibniz explique qu'il a obtenu une quadrature exacte et non plus approchée du cercle, en utilisant la méthode des métamorphoses; cette méthode consiste à remplacer la courbe irrationnelle qu'est le cercle par une courbe rationnelle (dont l'équation met en jeu une fraction rationnelle). Il en déduit alors une valeur de $\frac{\pi}{4}$ sous forme d'une série infinie de rationnels : $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$. La procédure infinie n'est pas un obstacle pour Leibniz : il explique que la simplicité de la loi de progression de cette série permet à l'esprit d'embrasser d'un seul regard la totalité de la série, qu'il identifie à la valeur exacte de $\frac{\pi}{4}$. Il est extrêmement fier de ce résultat, qu'il obtient vers 1672, alors qu'il n'est encore qu'un mathématicien novice, pendant son séjour à Paris, où il a été envoyé pour une mission diplomatique. Il y a rencontré Huygens, lui-même en séjour temporaire à Paris, qui décèle chez le jeune Leibniz des qualités de mathématicien, mais qui est désolé de sa formation très hétéroclite, et décide de l'initier plus sérieusement à la discipline. Leibniz gardera toujours une certaine nostalgie de ce premier résultat mathématique important.

Leibniz déclare que sa méthode peut s'appliquer à toute courbe "transcendante", ce qui signifie pour lui à toute courbe dont l'équation ne s'exprime pas à l'aide de fonctions puissances. Il ne donnera cependant pas d'autre application de la méthode des métamorphoses.

La lettre à La Roque étant très concise et difficile à lire, nous proposons au lecteur ce problème, de niveau post-bac mais dont certaines parties peuvent être proposées à des élèves de terminale scientifique, afin d'en faciliter ensuite la lecture.

Problème : Quadrature du cercle à la manière de ... Leibniz

Les deux parties, bien que liées, sont indépendantes en grande partie. On peut toujours utiliser les résultats des diverses questions dans la suite du problème. Le but du problème est de trouver une expression de π sous forme de limite d'une suite de nombres rationnels.

Partie A. Etude d'une fonction et approximation d'une aire

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$ par : $f: z \mapsto f(z) = \frac{2z^2}{1+z^2}$

1°) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 8 cm) (on étudiera la position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{3}}$).

2°) Donner une interprétation géométrique du nombre $A = \int_0^1 f(z) dz$

Le but des questions suivantes est de déterminer une suite convergente vers A .

3°) a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout z de $\mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots + (-1)^n z^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+2}}{1+z^2}$$

b) En déduire une expression de A sous forme de la somme d'un nombre rationnel et d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer (tous deux dépendant de n).

c) On pose $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{z^{2n+4}}{1+z^2} dz$ et $u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+3}$

Montrer que : $|R_n| < \frac{1}{2n+5}$ et en déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

d) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de u_5 ; u_{50} ; u_{500} .

Partie B : Métamorphose d'un cercle

1°) Lire le texte suivant, extrait d'une lettre de Leibniz, écrite à La Roque, directeur du *Journal des Savants*.

Pour cet effect je me suis servi de ce lemme :
Trois paralleles BC, GE, HF (fig. 1), passant par les trois angles d'un triangle BEF et un des costez EF estant prolongé jusqu'à la rencontre d'une des paralleles en C, le rectangle sous l'intervalle BC entre le point de rencontre C et l'angle B, par lequel passe cette parallele, et sous GH, la distance des deux autres paralleles GE, HF, c'est à dire le rectangle PGH (en supposant BGH normale à BC, et CP égale et parallele à BG) sera le double du Triangle BEF. De même, si HQ égale à BM, le rectangle QHN sera égal au double Triangle BFL.

Les points C , E et F sont alignés; les droites (BC) , (GE) et (HF) sont parallèles. Le rectangle $GPP'H$ a une aire double de celle du triangle BEF . Les questions a) et b) sont destinées à vous aider à démontrer cette assertion.

a) On projette orthogonalement B en C' sur (EF) et E en F' sur (HF) . Montrer que les triangles BCC' et EFF' sont semblables.

b) En déduire $BC' \times EF = BC \times EF'$ et démontrer l'assertion de Leibniz.

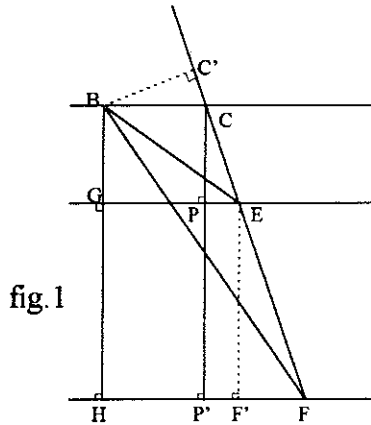


fig.1

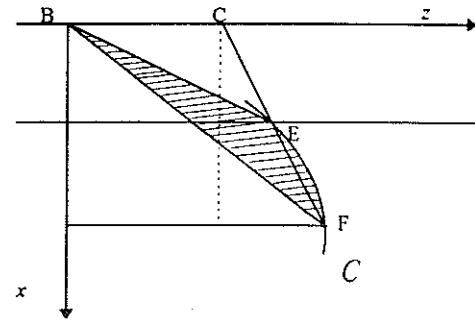


fig.2

2°) Voici ce qu'explique Leibniz dans la suite de sa lettre.

Soit B un point donné, qui sera pris pour origine du repère formé par les axes (Bz) et (Bx) , et E et F deux points d'une courbe C . Si E et F sont très proches, la droite (EF) peut être considérée comme la tangente à C en E et le triangle BEF est le triangle curviligne infinitésimal limité par l'arc EF de la courbe C et les droites (BE) et (BF) .

On a montré à la question 1°) que l'aire grisée est double de l'aire hachurée.

Imaginons qu'on répète la construction en chaque point E de la courbe C : on trace en E la tangente à C , qui coupe (Bz) en C' et on projette C orthogonalement en E' sur la parallèle à (Bz) passant par E . E' décrit une courbe C' lorsque E décrit C . On obtient alors le résultat suivant :

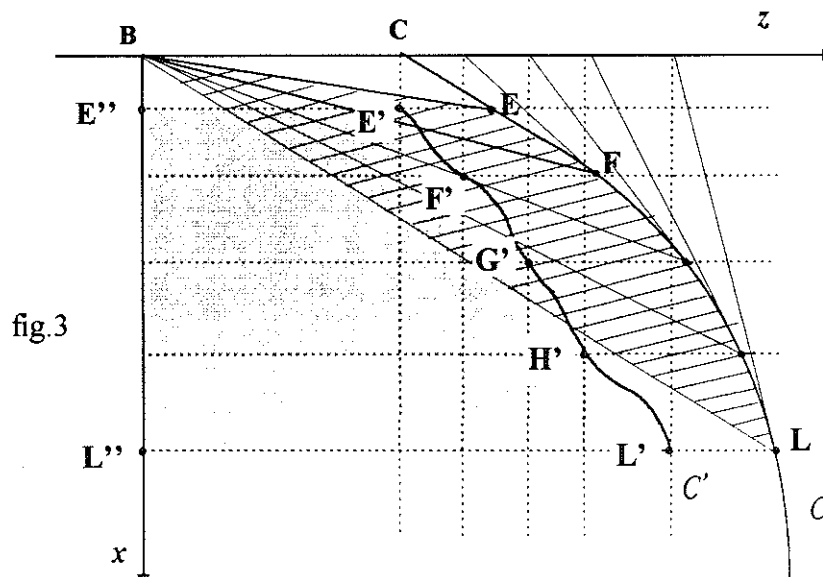


fig.3

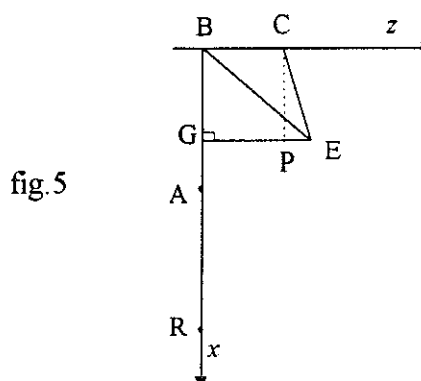
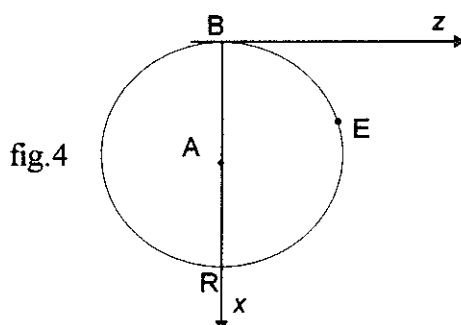
L'aire grisée (assimilable à l'aire du domaine limité par (Bx), (E'E''), (L'L''), C') est le double de l'aire hachurée (du domaine limité par C, (BE), (BL)).

Remarquons qu'on a remplacé une quadrature par une autre .

Quelle égalité d'aires obtient-on si on fixe L sur C, qu'on place E en B et qu'on fait tendre vers l'infini le nombre de points comme F, G, H,... qui subdivisent l'arc BL?

3°) Leibniz utilise alors ce résultat pour déterminer l'aire d'un cercle de rayon 1.

a) Reproduire la figure 4 et tracer le point E' de la courbe C' correspondant à un cercle de centre A et de rayon 1.



b) Nous allons chercher l'équation de C' dans le repère formé (B, (Bx), (Bz)). On note G le projeté orthogonal de E sur (Bx). On pose $BC = z$ et $BG = x$. Montrer que les triangles BCA et GBE sont semblables. En déduire : $EB^2 = CA^2 \times \frac{GB^2}{BC^2}$ et montrer que : $\frac{BR}{GB} = \frac{CA^2}{BC^2}$

En déduire l'équation de C' (c'est-à-dire l'expression de x en fonction de z).

4°) Lire l'extrait suivant de la lettre de Leibniz :

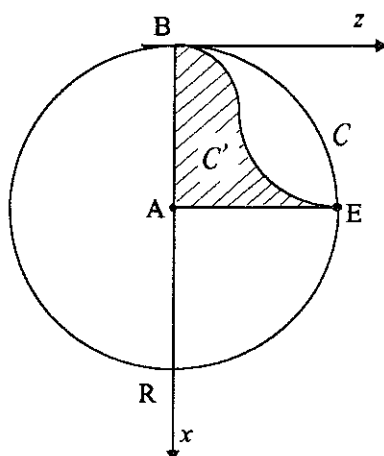
Car la courbe E(E)((E)) étant un arc de cercle, la courbe des interceptées, sçavoir BP(E)((P)), se pourra rapporter à l'angle droit RBC par cette equation $\frac{2az^2}{a^2+z^2} \propto x$, appellant BG ou CP, x et BC ou GP, z, c'est à dire RB sera à BG en raison doublée de AC à BC, comme il est aisé de démonstrer.

Remarquer la notation de Leibniz, qui désigne différents points de la courbe par E, (E), ((E)), de manière analogue à nos E, E', E''. La courbe E(E) ((E)) est la courbe C, la courbe BP(E)((P)) est la courbe C' ; a est le rayon de C (a = 1).

Que signifie l'expression : "RB sera à BG en raison doublée de AC à BC" ?

5°)

fig. 6



a) Donner une expression de l'aire du domaine limité par C' , (Bz) et la droite d'équation $z = 1$ à l'aide d'une intégrale.

b) En déduire une expression de l'aire hachurée (domaine limité par C' , (Bx) , la droite d'équation $x = 1$).

c) On a vu au 2°), que l'aire hachurée est le double de l'aire du domaine limité par la corde (BE) et l'arc BE du cercle. Déduire de ce qui précède une expression de l'aire $\tilde{A}$ du quart de cercle ABE à l'aide d'une intégrale.

d) En utilisant la partie A, exprimer $\tilde{A}$ comme limite d'une suite de nombres rationnels.

Quelle est la valeur exacte de $\tilde{A}$? Qu'en conclure pour π ?

Lire le texte de Leibniz (nous avons travaillé dans le cas particulier où BAE est un angle droit ce qui correspond à $b = 1$).

Et pour y arriver il faut se servir de la belle methode de Nicolaus Mercator, selon laquelle, puisque x estant l'unité et $\frac{x}{2}$

égal à $\frac{z^2}{1+z^2}$, la même x sera égale à $z^2 - z^4 + z^6 - z^8$ etc. à l'infini, et la somme de toutes les x égale à la somme de toutes les $z^2 - z^4$ etc. Or la première de toutes les z estant infiniment petite, et la dernière estant d'une certaine grandeur, comme BC somme de toutes z^4 sera $\frac{b^5}{5}$ etc. (par la quadrature des paraboles).

donc la somme de toutes les x ou l'espace $BCPB$, ou la différence du rectangle CBG et du double segment du cercle BEB sera $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. donc (par une suite assez aisée de la Geo-

metrie ordinaire) l'arc BDE sera $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc. le rayon estant 1 et BC , touchante de la moitié de l'arc, estant appelée b . Ce qu'il falloit demonstrier.

Retour sur le calcul de l'aire du secteur circulaire BAE de mesure α inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$.

Le secteur circulaire BAE a pour angle au centre α ; $\tan(\frac{\alpha}{2}) = BC$. On pose $BC = b$.

L'aire curviligne $\tilde{A}_1$ limitée par (BR), (GE) et C' (gris foncé) est le double de l'aire $\tilde{A}_2$ du segment (hachuré) de cercle BE (limité par C et [BE]).

Première étape : on calcule l'aire $\tilde{A}_3$ (hachurée) limitée par (BC), (CP) et C' .

$$\frac{x}{2} = \frac{z^2}{1+z^2} = z^2 - z^4 + z^6 - z^8 \dots, \text{ (cf. A 3° a)}$$

"La somme de tous les x ", si $x = f(z)$, est égale, en termes modernes, à :

$$\int_0^b f(z) dz ; \quad \text{c'est donc :} \quad 2 \int_0^b (z^2 - z^4 + \dots) dz = 2 \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} \dots \right)$$

"La première de toutes les z étant infiniment petite ... la somme de toutes les z^2 sera $\frac{b^3}{3}$, " correspond à

ce que nous écrivons $\int_0^b z^2 dz = \frac{b^3}{3}$.

Or $\tilde{A}_3$ (gris clair) est la différence entre l'aire du rectangle BCPG et $\tilde{A}_1$, elle-même double de $\tilde{A}_2$ qui est "la différence entre le rectangle CBG et le double du segment du cercle".

Deuxième étape :

L'aire $\tilde{A}$ du secteur ABE est égale à l'aire $\tilde{A}_2$ du segment de cercle ajoutée à l'aire du triangle BAE qui vaut $\frac{1}{2} (AB \times GE)$; or $AB = 1$; $GE^2 = AE^2 - AG^2$ donc :

$$GE^2 = 1 - \left(1 - \frac{2b^2}{1+b^2} \right)^2 = \frac{4b^2}{1+b^2} \left(1 - \frac{b^2}{1+b^2} \right) = \frac{4b^2}{(1+b^2)^2} \quad \text{et} \quad GE = \frac{2b}{1+b^2}$$

l'aire $\tilde{A}$ du secteur BAE vaut donc :

$$\tilde{A} = \underbrace{\frac{b}{1+b^2}}_{\text{triangle BAE}} + \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{2b^3}{1+b^2}}_{\text{rectangle BCPG}} - \underbrace{2 \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} \dots \right)}_{\text{aire } \tilde{A}_3} \right)$$

$$\tilde{A} = b \left(\frac{1}{1+b^2} + \frac{b^2}{1+b^2} \right) - \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} \dots \right)$$

$$\tilde{A} = b - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} \dots$$

Ce qui termine la démonstration.

Si on prend $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $b=1$ et on retrouve la série

rencontrée plus haut.

On remarque, comme toujours à cette époque, qu'on ne voit apparaître aucune préoccupation explicite de convergence.

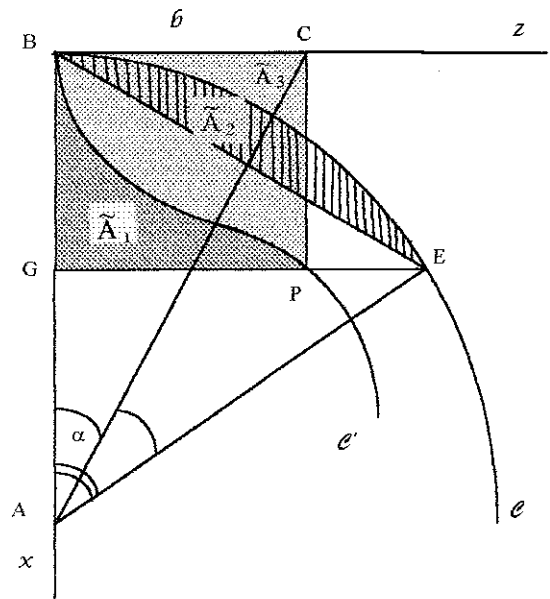


Fig. 7

Monsieur

La quadrature Arithmétique du Cercle et de ses segments ou secteurs, que j'ay trouvée et communiquée à plusieurs excellens Geometres il y a déjà quelques années, leur a paru assez extraordinaire, et ils m'ont exhorté d'en faire part au public. Mais comme je n'aime pas d'écrire un volume farci d'un grand nombre de propositions repassées pour donner une seule qui soit nouvelle et considerable, j'ay recours à Vostre Journal qui nous donne le moyen de publier un theoreme sans faire un livre.

Quadrature Arithmétique est, qui exprime la grandeur de la figure proposée par un rang infini de nombres rationaux ou commensurables à une grandeur donnée, ce qui suffit pour l'Arithmétique lorsqu'on ne le sçauroit faire par un nombre rationel fini, car l'arithmétique ne connoist les nombres irrationaux qu'autant qu'elle les peut exprimer par les rationels soit finis soit infinis. Et il n'est pas difficile de donner même un rang infini de nombres rationaux égal à une racine sourdo, ce que je croy d'avoir fait le premier, en.....*) la division dans une extraction continuée.

La quadrature Arithmétique du Cercle et de ses parties peut estre comprise dans ce theoreme: Le rayon du Cercle estant l'unité, et la tangente BC de la moitié BD d'un arc donné BDE estant appelée b , la grandeur de l'arc sera: $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc. Or les arcs estant trouvez, il est aisé de trouver les espaces, et le corollaire de ce theoreme est que le Diametre et son quarré estant 1. le Cercle est $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12}$ etc. L'usage de cette quadrature est qu'outre la beauté d'un theoreme aussi simple et aussi surprenant que celui-ci. vous avons un moyen de trouver les angles par les costez et à rebours; item les espaces ou portions des Cercles, Ellipses, Cones, Spheres, Spheroides et de leur sur-

faces, le tout par une simple addition de nombres rationaux ou graceux commensurables au defaut même de tables toutes calculées, et sans polygones, dont le calcul demande une extraction perpetuelle de racines, outre qu'ainsi on approchera bien viste; car si b par exemple ou BC estoit $\frac{1}{10}$ du rayon, b^{11} seroit $\frac{1}{10^{11}}$ et par consequent toutes les puissances plus hautes pourront negligées hardiment. Ce qui serviroit à continuer les tables, et à les rendre plus exactes sans beaucoup de peine.

Or comme il n'y a rien de si important que de voir les origines des inventions qui valent mieux à mon avis que les inventions mêmes, à cause de leur fécondité et par ce qu'elles contiennent en elles la source d'une infinité d'autres qu'on en pourra tirer par une certaine combinaison (comme j'ay coutume de l'appeller)

ou application à d'autres sujets lors qu'on s'avisera de la faire comme il faut; j'ay crû estre obligé de faire part au public de l'origine de celle-cy. J'ay donc considéré, que les quadratures que nous avons trouvées jusqu'icy par l'analyse ordinaire, dependent des regles Arithmetiques de trouver les sommes des rangs réglés, ou des progressions de nombres rationaux. Mais les ordonnées du cercle estant irrationnelles, j'ay taché de transformer le cercle en une autre figure, du nombre de celles que j'appelle rationnelles, c'est à dire dont les ordonnées sont commensurables à leurs abscisses. Pour cet effect j'ay fait le dénombrement de quantité de Metamorphoses, et les ayant essayées par une combinaison tres aisée (car je pourrois par ce moyen écrire en une heure de temps une liste de plus de 50 figures planes ou solides, différentes, et neantmoins dependentes de la circulaire) j'ay trouvé bientôt le moyen que je m'en vays expliquer. J'ay crû cependant à propos de remarquer cecy en passant pour justifier ce que j'avois dit autrefois de l'utilité des combinaisons pour trouver des choses que l'algebre et si vous voulez, l'analyse même telle que nous l'avons ne scauroit donner. Or le moyen que les combinaisons m'ont offert sert à trouver un nombre infini de figures commensurables à une figure donnée. Pour cet effect je me suis servi de ce lemme: Trois paralleles BC, GE, HF (fig. 1), passant par les trois angles d'un triangle BEF et un des costez EF estant prolongé jusqu'à la rencontre d'une des paralleles en C, le rectangle sous l'intervalle BC entre le point de rencontre C et l'angle B, par lequel passe cette parallele, et sous GH, la distance des deux autres paralleles

GE, HF, c'est à dire le rectangle PGH (en supposant BGH normale à BC, et CP égale et parallele à BG) sera le double du Triangle BEF. De même, si HQ égale à BM, le rectangle QHN sera égal au double Triangle BFL. Et si ces bases EF, FL etc. sont infiniment petites, et continuées pour remplir*) tout l'Espace EB((E))LFE à la courbe EFL((E)), et de même si GH, HN etc. sont infiniment petites afin que les rectangles PGH, QHN etc. remplissent tout l'espace PG((G))((P))QP à la courbe PQ((P)), tout cet espace sera le double de l'autre espace. Et puisque FEC, LFM, ((E))((C)) seront les touchantes de la premiere courbe, le theoreme se pourra enoncer generalement ainsi: Si d'une courbe E((E)) on mene à un costé AB d'un angle droit ABC les ordonnées EG, ((E))((G)), à l'autre costé BC les touchantes EC, ((E))((C)), alors la somme des interceptées BC, ((B))((C)) entre le point de l'angle B et le point de la rencontre des touchantes C ou ((C)) appliquées normalement à l'axe AB ou GP, ((G))((P)), c'est à dire la figure PG((G))((P))QP sera le double de l'espace EB((E))E compris entre une portion de la premiere courbe et les droites qui joignent les extremités de cette portion au point B.

Le troisieme Corollaire est la quadrature Arithmetique du Cercle. Car la courbe E(E)((E)) estant un arc de cercle, la courbe des interceptées, sçavoir BP(E)((P)), se pourra rapporter a l'angle droit RBC par cette equation $\frac{2az^2}{a^2+z^2} \sqcap x$, appellant BG ou CP, x et BC ou GP, z, c'est à dire RB sera à BG en raison doublée de AC à BC, comme il est aisé de demonstrier. D'ou il s'ensuit premierement que celui qui trouvera une regle de donner par abrégé la somme d'un tel rang, quoyque fini, de nombres rationaux:

$\frac{2,1}{1+1}$ ou $\frac{2}{2}$, $\frac{2,4}{1+4}$ ou $\frac{8}{5}$, $\frac{2,9}{1+9}$ ou $\frac{18}{10}$, $\frac{2,16}{1+16}$ ou $\frac{32}{17}$ etc. sans

estre obligé de les ajouter ensemble l'un apres l'autre, aura achevé la quadrature du cercle, parceque c'est la progression des ordonnées CP de la figure BCPB, dont la quadrature donneroit celle du Cercle. Mais à present ce n'est pas encor la quadrature Arithmetique. Et pour y arriver il faut se servir de la belle methode de

Nicolaus Mercator, selon laquelle, puisque a estant l'unité et $\frac{x}{2}$

égal à $\frac{z^2}{1+z^2}$, la même x sera égale à $z^2 - z^4 + z^6 - z^8$ etc. à

l'infini, et la somme de toutes les x égale à la somme de toutes les $z^2 - z^4$ etc. Or la premiere de toutes les z estant infiniment petite, et la derniere estant d'une certaine grandeur, comme BC

que nous appellerons b, la somme de toutes les z^2 sera $\frac{b^3}{3}$, et la

somme de toutes z^4 sera $\frac{b^5}{5}$ etc. (par la quadrature des paraboles).

donc la somme de toutes les x ou l'espace BCPB, ou la difference du rectangle CBG et du double segment du cercle BEB sera $\frac{b^3}{3}$

$-\frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. donc (par une suite assez aisée de la Geo-

metrie ordinaire) l'arc BDE sera $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc. le

rayon estant 1 et BC, touchante de la moitié de l'arc, estant appelée b. Ce qu'il falloit demonstrier. J'avoue que cette demonstration ne pourra pas estre entendue de tout le monde, parcequ'elle suppose bien des choses qui ne sont connues qu'à ceux qui sont versez dans les nouvelles decouvertes et qui sçavent manier les caracteres ou symboles. Mais il n'y en a que trop pour ceux-cy: et il faudroit un volume pour satisfaire aux autres. On pourroit prouver aussi le rapport qu'il y a entre la figure des interceptées B((G))((P))PB et le cercle, en supposant la quadrature

de la Cissoeide trouvée par Mons. Hugens, comme il m'a fait remarquer. Mais la demonstration que je viens de donner m'a servi de principe d'invention et est seconde en theoremes nouveaux. S'il y a lieu d'esperer qu'on pourra jamais arriver à une raison analytique, exprimée en termes finis, du Diametre à la circonference, je croy que ce sera par cette voye, car quoyque les expressions soyent infinies, nous ne laissons pas quelques fois d'en trouver les sommes: et pour cet effect je donneray pour conclusion l'observation suivante, qui me paroist tres curieuse:

$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{16} \frac{1}{32} \frac{1}{64} \frac{1}{128} \frac{1}{256} \frac{1}{512} \frac{1}{1024} \frac{1}{2048} \frac{1}{4096} \frac{1}{8192} \frac{1}{16384} \frac{1}{32768} \frac{1}{65536} \frac{1}{131072} \frac{1}{262144} \frac{1}{524288} \frac{1}{1048576} \frac{1}{2097152} \frac{1}{4194304} \frac{1}{8388608} \frac{1}{16777216} \frac{1}{33554432} \frac{1}{67108864} \frac{1}{134217728} \frac{1}{268435456} \frac{1}{536870912} \frac{1}{1073741824} \frac{1}{2147483648} \frac{1}{4294967296} \frac{1}{8589934592} \frac{1}{17179869184} \frac{1}{34359738368} \frac{1}{68719476736} \frac{1}{137438953472} \frac{1}{274877906944} \frac{1}{549755813888} \frac{1}{1099511627776} \frac{1}{2199023255552} \frac{1}{4398046511104} \frac{1}{8796093022208} \frac{1}{17592186044416} \frac{1}{35184372088832} \frac{1}{70368744177664} \frac{1}{140737488355328} \frac{1}{281474976710656} \frac{1}{562949953421312} \frac{1}{1125899906842624} \frac{1}{2251799813685248} \frac{1}{4503599627370496} \frac{1}{9007199254740992} \frac{1}{18014398509481984} \frac{1}{36028797018963968} \frac{1}{72057594037927936} \frac{1}{144115188075855872} \frac{1}{288230376151711744} \frac{1}{576460752303423488} \frac{1}{1152921504606846976} \frac{1}{2305843009213693952} \frac{1}{4611686018427387904} \frac{1}{9223372036854775808} \frac{1}{18446744073709551616} \frac{1}{36893488147419103232} \frac{1}{73786976294838206464} \frac{1}{147573952589676412928} \frac{1}{295147905179352825856} \frac{1}{590295810358705651712} \frac{1}{1180591620717411303424} \frac{1}{2361183241434822606848} \frac{1}{4722366482869645213696} \frac{1}{9444732965739290427392} \frac{1}{18889465931478580854784} \frac{1}{37778931862957161709568} \frac{1}{75557863725914323419136} \frac{1}{151115727451828646838272} \frac{1}{302231454903657293676544} \frac{1}{604462909807314587353088} \frac{1}{1208925819614629174706176} \frac{1}{2417851639229258349412352} \frac{1}{4835703278458516698824704} \frac{1}{9671406556917033397649408} \frac{1}{19342813113834066795298816} \frac{1}{38685626227668133590597632} \frac{1}{77371252455336267181195264} \frac{1}{154742504910672534362390528} \frac{1}{309485009821345068724781056} \frac{1}{618970019642690137449562112} \frac{1}{1237940039285380274899124224} \frac{1}{2475880078570760549798248448} \frac{1}{4951760157141521099596496896} \frac{1}{9903520314283042199192993792} \frac{1}{19807040628566084398385987584} \frac{1}{39614081257132168796771975168} \frac{1}{79228162514264337593543950336} \frac{1}{158456325028528675187087900672} \frac{1}{316912650057057350374175801344} \frac{1}{633825300114114700748351602688} \frac{1}{1267650600228229401496703205376} \frac{1}{2535301200456458802993406410752} \frac{1}{5070602400912917605986812821504} \frac{1}{10141204801825835211973625643008} \frac{1}{20282409603651670423947251286016} \frac{1}{40564819207303340847894502572032} \frac{1}{81129638414606681695789005144064} \frac{1}{162259276829213363391578010288128} \frac{1}{324518553658426726783156020576256} \frac{1}{649037107316853453566312041152512} \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696} \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392} \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784} \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568} \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136} \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272} \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544} \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088} \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176} \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352} \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704} \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408} \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816} \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632} \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264} \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528} \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056} \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112} \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224} \frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448} \frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896} \frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792} \frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584} \frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168} \frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336} \frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672} \frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344} \frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688} \frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376} \frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752} \frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504} \frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008} \frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016} \frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032} \frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064} \frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128} \frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256} \frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512} \frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024} \frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048} \frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096} \frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192} \frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384} \frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768} \frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536} \frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072} \frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144} \frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288} \frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576} \frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152} \frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304} \frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608} \frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216} \frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432} \frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864} \frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728} \frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456} \frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912} \frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824} \frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648} \frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296} \frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592} \frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184} \frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368} \frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736} \frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472} \frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944} \frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888} \frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776} \frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552} \frac{1}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104} \frac{1}{14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208} \frac{1}{28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416} \frac{1}{56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832} \frac{1}{113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664} \frac{1}{226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328} \frac{1}{452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656} \frac{1}{904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312} \frac{1}{1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624} \frac{1}{3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248} \frac{1}{7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496} \frac{1}{14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992} \frac{1}{28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984} \frac{1}{57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968} \frac{1}{115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936} \frac{1}{231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279872} \frac{1}{463168356949264781694283940034751631413079938662562256157830336031652518559744} \frac{1}{926336713898529563388567880069503262826159877325124512315660672063305037119488} \frac{1}{1852673427797059126777135760139006525652319754650249024631321344126610074238976} \frac{1}{3705346855594118253554271520278013051304639509300498049262642688253220148477952} \frac{1}{7410693711188236507108543040556026102609279018600996098525285376506440296955904} \frac{1}{14821387422376473014217086081112052205218558037201992197050570753012880593911808} \frac{1}{29642774$