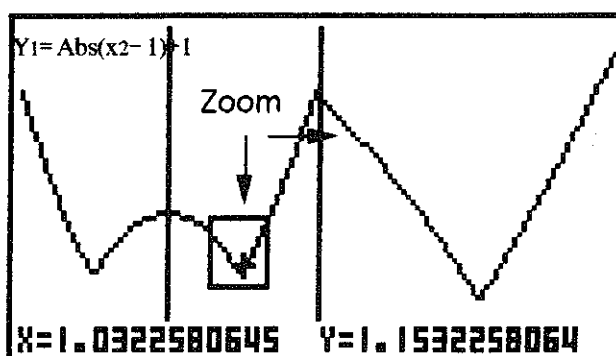
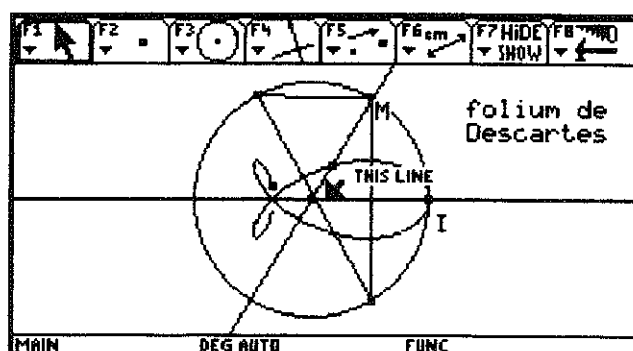


La calculatrice au lycée



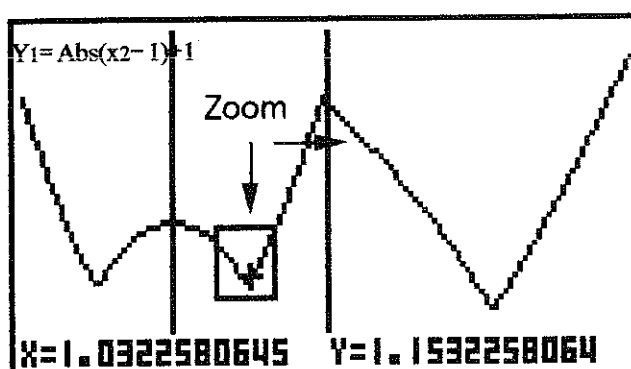
C. Jeulin
R. Proteau
D. Sperandio



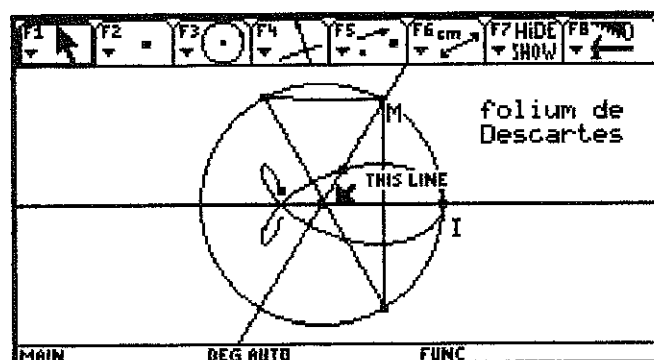
- objectif** : Utiliser les calculatrices en Première et Terminale.
- sujet** : Les calculatrices comme auxiliaires de l'enseignement des mathématiques.
- niveau** : Classes de 1S et TS.
- public** : Enseignants de Lycée.

**Avec le soutien de la DLC et des MAFPEN de
Créteil, Paris, Versailles**

La calculatrice au lycée



C. Jeulin
R. Proteau
D. Sperandio



objectif :	Utiliser les calculatrices en Première et Terminale.
sujet :	Les calculatrices comme auxiliaires de l'enseignement des mathématiques.
niveau :	Classes de 1S et TS.
public :	Enseignants de Lycée.

Dans nos stages IREM - MAFPEN et dans cette brochure, les seules calculatrices utilisées sont des CASIO (7900, 9900, 9960,...) et des TI (82, 83, 92) dont nous avons apprécié les performances ; nous remercions Monsieur OCANA pour CASIO et Monsieur BASTID pour TI, qui nous ont prêté des calculatrices pour animer ces stages.

Nous nous sommes assez souvent inspirés des brochures d'accompagnement publiées par les constructeurs, ainsi que des stages organisés par Monsieur FERRAND pour CASIO et Monsieur COSTE pour TI.

Les graphiques et les programmes de la brochure sont des copies directes des écrans des machines.

Nos remerciements vont à Odette Dierker et Nadine Locufier, spécialistes de reprographie qui ont réalisé le tirage de cette brochure.

INTRODUCTION

I. Présentation

Cette brochure est un complément à notre brochure IREM n° 85, parue en 1995, qui présentait et utilisait des calculatrices que les fabricants ont améliorées ou remplacées. Elle reprend les activités que nous avons développées pendant l'année scolaire 96-97 au cours des stages organisés à l'IREM PARIS VII sous le titre « Calculatrices en 1èreS & TS », dans le cadre du P.A.F (Plan Académique de Formation).

Les calculatrices envisagées sont seulement :

CASIO 9900, CASIO 9960GT, TI82, TI83, TI92.

II. Intentions Majeures

Les intentions majeures n'ont pas changé en ce qui concerne les élèves : manipulations de base, utilisation systématique pour conjecturer, pour vérifier, pour concrétiser et mieux comprendre. Nous insistons toujours sur l'emploi des calculatrices graphiques qui permettent, avec une efficacité certaine, de passer du cadre algébrique ou numérique au cadre graphique ou au domaine de l'analyse. Les activités décrites sont extraites de notre pratique pédagogique courante dans des classes de 1èreS & TS. La plupart d'entre-elles sont utilisables ou adaptables pour les autres classes de Lycées.

En ce qui concerne les professeurs, nous avons présenté davantage d'activités pédagogiques destinées au déroulement du cours en classe et nécessitant une rétroprojection : notion de fonction (possible dès la classe de seconde), probabilités et

programmes de simulation, géométrie avec la TI 92, introduction de la notion de dérivée, notion d'asymptote.

Nous n'avons maintenant presque plus besoin de fournir des programmes aux élèves puisque les calculatrices récentes possèdent des programmes tout intégrés pour la plupart des questions (suites, résolution approchée, tableaux de valeurs). Cependant nous en avons laissé quelques-uns.

Terminons la présentation de cette brochure, destinée à remettre à jour celle de 95, en précisant que nous n'avons pas du tout envisagé l'utilisation pédagogique du calcul formel, disponible sur l'actuelle TI92 ou certaines HP.

LE CLAVIER

LE CLAVIER - TI 82-83 - CASIO 9900 et ses petites soeurs

1) Les touches graphiques : TRACE - ZOOM - WINDOW ou RANGE - GRAPH

2) Les touches d'accès aux symboles de couleur du clavier :

2nd ou Shift ALPHA

3) Mise en route : AC^{ON} (CASIO) - ON (TI) - puis Arrêt de la machine par

OFF

4) Les menus : CASIO - MENU différentes icônes ;

TI - les différents menus sont accessibles directement par des touches MATH, STAT, etc.

Pour chaque MENU on accède à des sous-menus.

Entrez dans le menu MATH (dans COMP pour CASIO) et regardez les différents sous-menus. Les touches EXIT ou QUIT permettent de sortir.

Exemple : calculer $\sqrt[3]{10}$; $6!$; C_{10}^3 .

5) Les états de la machine : La touche **MODE** pour TI ; **SETUP** POUR CASIO, permet de mettre la calculatrice dans un état donné : (par exemple, pour les constructions de courbes on peut préciser de ne placer que des points (PLOT ou DOT) ou bien relier ces points entre eux (CONNECTED ou CONNECT)).

Pour changer l'unité d'angle pour CASIO utiliser la touche **DRG** (SHIFT 1 dans le menu COMP) appuyer sur Rad par **F2** puis EXE.

Exemple : calculer $(1-3i)(2+5i)^2$; $\arg(1+i\sqrt{3})$; $\tan 27^\circ$; $\sin(\pi/7) + \cos^2(\pi/5)$

6) Les touches d'édition : **INS** (pour insérer un ou plusieurs caractères) et **DEL** (pour effacer un ou plusieurs caractères).

Exemple : taper $\frac{0,52 + \sqrt{3,5}}{\sqrt[3]{7}(12,5 + \pi)}$, on s'est trompé, il faut taper $\frac{-2 + \sqrt{13,5}}{\sqrt[3]{7}(12,5 + 2\pi)}$

Attention! il faut distinguer (-) et - pour TI.

7) Rappel d'un calcul ou d'une expression .Un calcul vient d'être effectué, pour le rappeler :

*CASIO utiliser la flèche gauche . **Exemple :** taper $-1 + \sqrt{5}/2$ puis EXE, il y a une erreur, vous vouliez taper $(-1 + \sqrt{5})/2$ (utiliser **INS**) et donner une valeur approchée. Ensuite, rappeler ce dernier calcul pour avoir une valeur approchée de $(-1 - \sqrt{5})/2$.

*TI : faire le même travail , la touche de rappel est **ENTRY** (par 2nd ENTER).

8) Rappel du dernier résultat : **ANS**.

Exemple : calculer $\pi \times (2,05 \cdot 10^{-3})^2 + \sin(\pi/5)$ (on trouve 0.5877984548) puis la racine carrée de ce nombre (on trouve 0.7666801516). Pour les puissances de 10 : la touche **10^x** (CASIO), **EE** (TI)

9) Touche d'affectation : $\boxed{\rightarrow}$ (CASIO) ; $\boxed{\text{STO} \rightarrow}$ (TI) (mémorisation de valeurs dans une variable). Pour afficher l'état d'une variable, taper le nom de la variable puis ENTER ou EXE. **Exemple** x ENTER ; A ENTER etc.

Exemple 1 : calculer $\pi d^2/4$ pour $d = -1,56$; $d = 3,85$; $d = 4,39 \cdot 10^{-3}$

$-1.56 \rightarrow D$ -1.56	→	$\pi * D^2 / 4 \rightarrow S$ 191134497
---	---	--

$3.85 \rightarrow D$ 3.85	→	ENTRY $3.85 \rightarrow D$ ENTRY $\pi * D^2 / 4 \rightarrow S$ ENTER 11.64156428
--	---	---

Recommencer avec $D = 4.39 \text{ E-}3$

Autre méthode, on peut stocker D et S en même temps :

$-1.56 \rightarrow D : \pi * D^2 / 4 \rightarrow S$ 191134497
--

Exemple 2 : Soit l'équation : $2x^2 - 4x - 3 = 0$.

Stocker $A=2$; $B=-4$; $C=-3$; $B^2 - 4AC \rightarrow D$ puis calculer $\frac{-B + \sqrt{D}}{2A}$ et rappeler ce

résultat pour calculer $\frac{-B - \sqrt{D}}{2A}$ (attention aux différents signes -)

10) Calcul de fraction. $\boxed{a + b/c}$ (CASIO) ; utiliser la touche $(\div)$ puis FRAC du menu MATH.(TI)

Exemple (TI)

$37,5 \triangleright \text{Frac}$	$15/4$
-----------------------------------	--------

ou

$(1/2 + 1) / (1/3 + 1) \triangleright \text{Frac}$	$-9/4$
--	--------

ou

$125/45 \triangleright \text{Frac}$	$25/9$
-------------------------------------	--------

Exemple (TI) en mode complexe $\arg(\sqrt{3} - i)$

MATH $\triangleright\triangleright 4$

angle

$\sqrt{3} - i$

angle ($\sqrt{3} - i$)

ENTER

-0.5235987756

$/\pi$

Ans/ π

-0.1666666667

$\triangleright$ Frac

Ans $\triangleright$ Frac

-1/6

$\arg(\sqrt{3} - i) = -\pi/6$

LE GRAPHISME

OBJECTIF

La calculatrice facilite les échanges entre le *cadre algébrique*, le *cadre de l'analyse* et le *cadre graphique*.

I. MISE EN MEMOIRE D'UNE FONCTION

1) TI 82-83

La touche $\boxed{Y=}$ permet de stocker 10 fonctions. La fonction est rendue active lorsque le signe = est noirci ; on désactive la fonction en appuyant sur ENTER.

Pour les fonctions définies par intervalles, on utilise les opérations du menu $\boxed{\text{TEST}}$; la syntaxe est par exemple, $(x+1)(x<-1)+(2x-1)(x>2)$

Exemples :

$$x \xrightarrow{f} \sqrt{x^2 - 3x + 4} ; x \xrightarrow{g} \frac{\sin x}{x} ;$$

$$x \xrightarrow{h} (-2x - 1 \text{ si } x \leq -1/2 ; (x+1)^2 \text{ si } x > 1/2) ; x \xrightarrow{i} E(x) + (x - E(x))^2$$

2) CASIO 9900GC

Dans le menu COMP : $\boxed{\boxed{F}} \boxed{\text{MEM}}$ (par Shift 0), on obtient le bandeau

$\boxed{\text{STO}} \boxed{\text{RCL}} \boxed{\text{fn}} \boxed{\text{SEE}}$, taper l'expression puis l'enregistrer par STO puis f_n ($1 \leq n \leq 6$).

Autre méthode : on entre directement dans le MENU GRAPH dans lequel on peut stocker 20 fonctions : On tape l'expression de la fonction sur la ligne mise en surbrillance ; la fonction est rendue active ou non par SEL (touche verte F5).

3) CASIO 9960GT

Dans le menu RUN : OPTN puis $\triangleright \triangleright$ FMEM (par la touche verte F3) ; on obtient le bandeau STO RCL fn SEE, taper l'expression puis l'enregistrer par STO (touche verte F1) dans l'une des 6 mémoires $f_1..f_6$.

Autre méthode : on entre directement dans l'un des MENUS TABLE ou GRAPH dans lesquels on peut stocker 20 fonctions. On tape l'expression de la fonction sur la ligne mise en surbrillance ; la fonction est rendue active ou non par SEL (touche verte F1).

II. LE TABLEAU DE VALEURS

- Très simplement, il est possible d'obtenir les valeurs d'une expression en utilisant le séparateur d'instruction « : ».

Exemple : $1.2 \rightarrow x : 2 \rightarrow y : 2x+y$ ENTER
4.4

On rappelle ensuite l'expression par ENTRY (TI) ou flèche $\triangleleft$ (CASIO) ; puis on modifie les valeurs de x et de y. Pour se placer en début de ligne utiliser : pour TI 2nd $\triangleleft$; pour CASIO $\triangleleft$ puis SHIFT Δ (ou bien $\triangleleft$ puis on replace « à la main » le curseur en début de ligne).

- Pour une fonction d'une variable, la calculatrice donne directement un tableau de valeurs :

1) TI 83

Utiliser **TABLE** après avoir activé la fonction choisie. Le réglage de la table se fait par **TBLSET** on indique la valeur initiale, le pas et on précise si on veut un affichage automatique ou à la demande.

2) CASIO 9900GC

On entre dans le menu TABLE, s'affichent alors les sous-menus suivants :

RA - F	ST - F	REC		SET
--------	--------	-----	--	-----

On choisit **ST - F** (puisqu'il s'agit d'écrire de « stocker » l'expression d'une fonction) puis on tape l'expression de la fonction sur la ligne mise en surbrillance ; puis, par **TABL** , on obtient le tableau de valeurs. Le réglage de la table se fait par le sous-menu **RANG** (on indique la valeur initiale , la valeur finale et le pas).

3) CASIO 9960GT

On entre dans le menu TABLE, s'affichent alors les sous-menus suivants :

SEL	DEL	TYPE	COLR	RANG	TABL
-----	-----	------	------	------	------

a) Si on a mis en mémoire une fonction notée f_1 dans **FMEM** il est possible de la faire apparaître et de la placer en Y_3 par exemple. On met la ligne Y_3 en surbrillance puis on utilise le menu **OPTN** et à l'aide de $\triangleright$ (par la touche verte F6) on obtient le sous menu **FMEM** (dans lequel on entre par la touche verte F1) appuyer sur la touche verte F3 suivie de f_1 puis EXE.

b) Directement : on se place sur la ligne choisie, par exemple Y_4 et on tape l'expression voulue, activée après EXE. Par le sous-menu **TABL** on fait apparaître une table de valeurs. Le réglage de la table se fait par le sous-menu **RANG** (on indique la valeur initiale , la valeur finale et le pas)

A partir de la table de valeurs, on peut obtenir la courbe représentative de la fonction.

III. LA PAGE GRAPHIQUE

1) TI 83

Par **MODE** on règle la page graphique. Par **Full Horiz G.T** on peut travailler en plein écran, ou en écran partagé horizontalement, ou en écran partagé verticalement (dans ce cas apparaissent simultanément la courbe et le tableau de valeurs).

2) CASIO 9900GC et 9960GT

Entrons maintenant dans le menu GRAPH

Par **SETUP** on règle l'éditeur graphique ; se placer sur une ligne en surbrillance et actionner les différents réglages possibles.

*N'oubliez pas la touche **EXIT** pour revenir à la page précédente.*

IV. CONSTRUCTION D'UNE COURBE

Il faut commencer par régler la fenêtre d'affichage de la courbe **WINDOW** (pour TI)

V.Window ou **Range** (pour CASIO).

1) TI 83

La fonction étant active, on appuie sur **GRAPH**. Des codages différents peuvent être utilisés pour distinguer les différentes courbes ; pour cela revenir à **Y =** et placer le curseur en début de ligne puis appuyer sur ENTER pour faire apparaître les différents codages.

2) CASIO 9900GC

Une fonction ayant déjà été enregistrée, utiliser **SEL** pour activer cette fonction ou pour la désactiver. Par **DRAW** on fait apparaître la courbe. On passe de la page texte à la page écran par **G ↔ T**.

3) CASIO 9960GT

De même, une fonction étant active (utiliser SEL pour activer ou désactiver), on peut en obtenir sa courbe par DRAW.

IV. DEPLACEMENT SUR UNE COURBE

Pour toutes les calculatrices, on utilise TRACE et on se déplace sur la courbe à l'aide des flèches $\triangleleft$ $\triangleright$. Les coordonnées du point s'affichent ; on notera le déplacement de l'origine du repère lorsque l'on maintient le doigt sur l'une des flèches.

V. ZOOM

Utiliser le sous-menu BOX pour obtenir un agrandissement de la courbe.

Pour TI par Zoom Out ou Zstandard on revient à une vue globale de la courbe.

Pour CASIO utiliser ORIG pour retrouver l'allure de départ. En utilisant Dual Screen : Graph dans SET UP on peut voir ensemble la courbe dans la fenêtre d'origine et l'agrandissement.

EXERCICES

Exercice 1

Soit $f(x) = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{NIR^2}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}$ où $N = 98$, $I = 2$, $R = 6,5$ calculer $f(x)$ pour x entier variant de 0 à 15.

Exercice 2

Conjecturer un tableau de variation pour les fonctions suivantes :

- $x \xrightarrow{f_1} x^{1/x}$
- $x \xrightarrow{f_2} \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
- $x \xrightarrow{f_3} (x-2)\sqrt{x^2 - 4}$
- $x \xrightarrow{f_4} (x-2)\sqrt{|x^2 - 4|}$
- $x \xrightarrow{f_5} \tan(\pi x)$

Exercice 3 (NATHAN 1S n°1 page 458)

f_1 et f_2 sont les fonctions trinômes du second degré définies respectivement par :

$$f_1(x) = -x^2 + 3x \text{ et } f_2(x) = x^2 - x.$$

1. Tracez, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ des fonctions f_1 et f_2 .

2. On note $\mathcal{C}_3$ la courbe qui est la symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses.

a. Tracez $\mathcal{C}_3$.

b. On note f_3 la fonction représentée par $\mathcal{C}_3$. Précisez $f_3(x)$ pour tout réel x .

Partie II. On choisit un autre repère orthonormal, que l'on note $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$.

1. f est la fonction trinôme du second degré définie par $f(x) = -x^2 + 2x$. Tracez la courbe $\mathcal{C}$ qui représente la fonction f dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$.

CONSEIL : Tracer $\mathcal{C}$ sur une autre feuille que celle qui a servi à représenter $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.

2. M est un point quelconque de $\mathcal{C}$, d'abscisse x , I est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et J le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

On note φ la fonction qui à tout réel x , associe $MI + MJ$.

a. Vérifiez que $\varphi(x) = |x| + |f(x)|$.

b. Exprimez $\varphi(x)$ sans utiliser la valeur absolue.

INDICATION : Discuter selon la position de M sur $\mathcal{C}$.

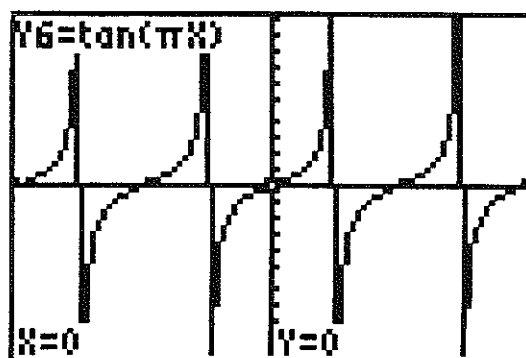
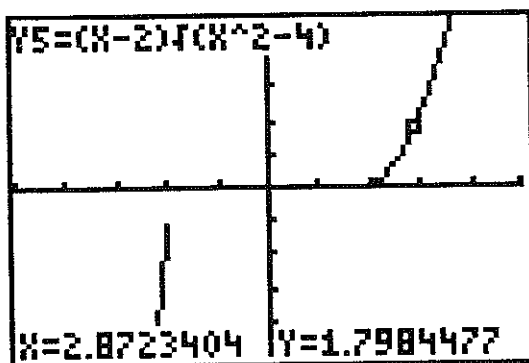
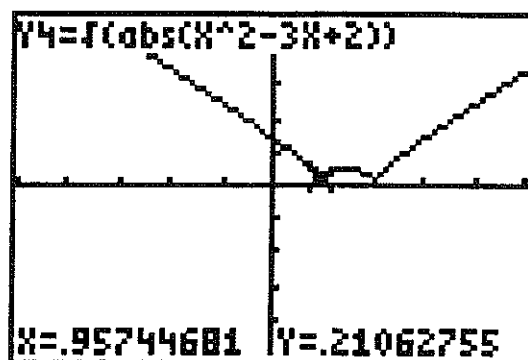
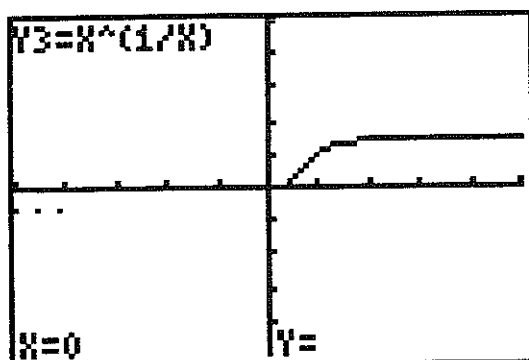
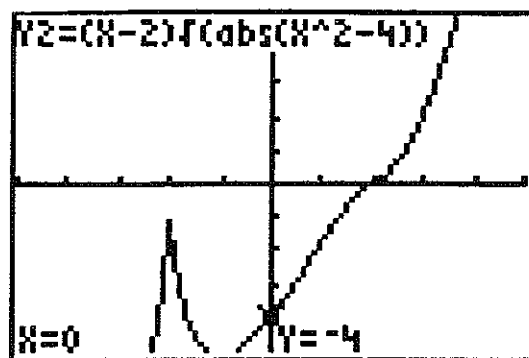
c. Sans étudier la fonction φ , uniquement en exploitant les résultats de la partie 1, tracez dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction φ .

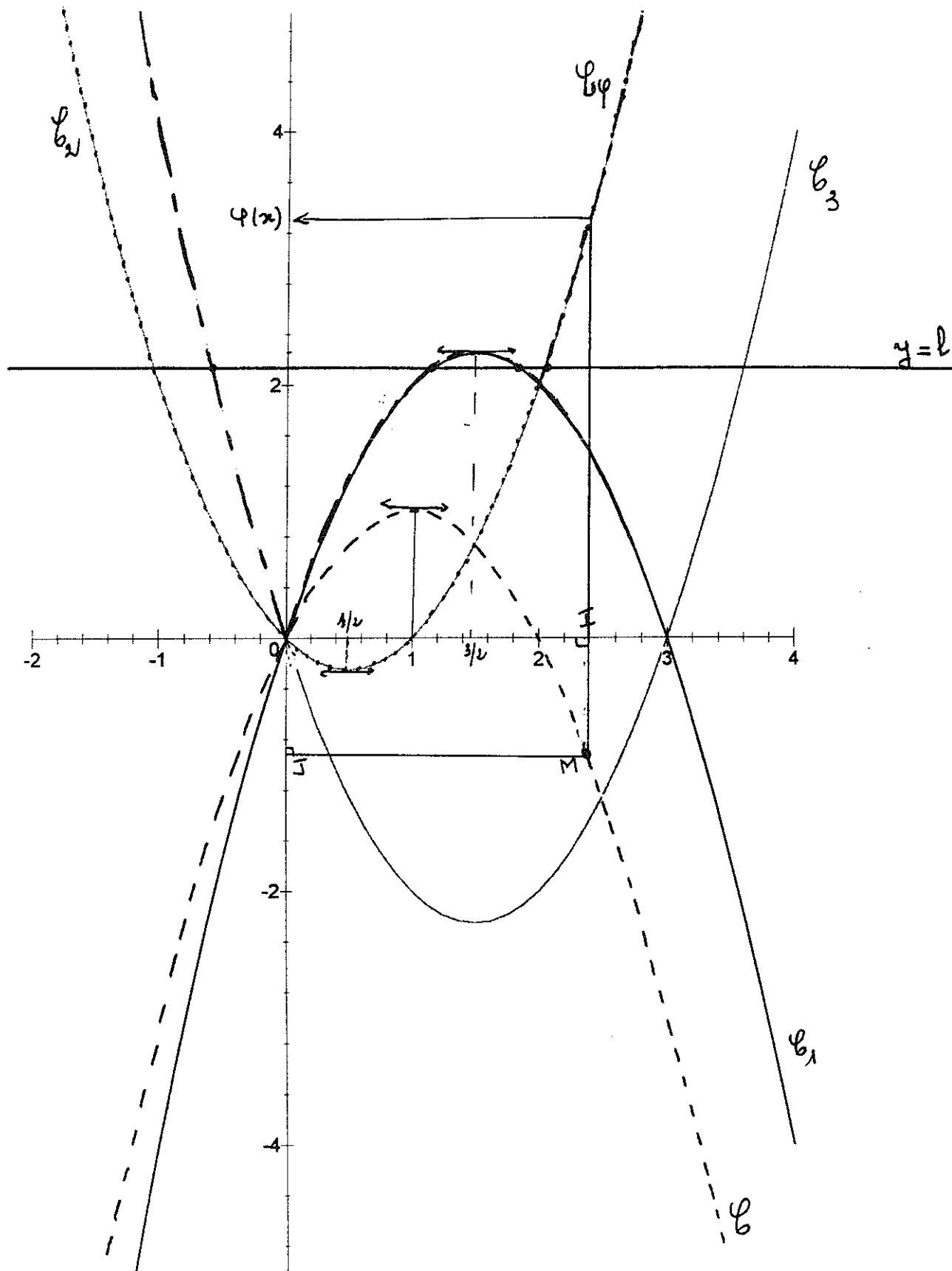
d. Graphiquement, déterminez le nombre de points M de $\mathcal{C}$ pour lesquels la somme des distances aux axes du repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$ est un réel strictement positif donné ℓ .

e. Achevez par le calcul la détermination de ces points lorsque $\ell = \frac{17}{8}$.

X	Y1	Y3
0	3.8E-5	ERROR
1	1.4142	1
2	1.4142	1.4142
3	1.4142	1.4142
4	1.4142	1.4142
5	1.3797	1.4142
6	1.348	1.3797

X=6





LA PROGRAMMATION

I. PROGRAMMER

Une calculatrice programmable permet d'**enregistrer** un programme (par exemple une formule $f(x)$ où x est une variable réelle), puis d'**utiliser** cette formule pour calculer certaines valeurs de $f(x)$.

Etapas de la programmation :

1) Indiquer à la calculatrice de se mettre en état de programmer :

a) *On se met en mode programme :*

PRGM puis EDIT pour T.I-81 à T.I-83

Mode 2 (WRT) pour Casio 7000 à 8800

Icône PRGM puis PRGM pour Casio 8900 à 9960

b) *On choisit un numéro de programme vierge , par exemple le PRGM 8 :*

T.I 81-83

PRGM EDIT éventuellement en utilisant ▶

8 (éventuellement en utilisant ▼ jusqu'à ce que le curseur soit en face de 8.)

ENTER

CASIO 7000-8800

MODE 2 8 (éventuellement en utilisant ▼ jusqu'à ce que le curseur clignote en face de P8)

EXE

CASIO 8900-9900

Icône PRGM puis PRGM 8 (éventuellement en utilisant ▽ jusqu'à ce que le curseur clignote en face de P8)

2) Ecriture du programme dans la zone de mémoire choisie :

Demander à la machine de lire la valeur de x et la mettre en mémoire, puis donner la formule $f(x)$ et faire afficher $f(x)$

3) Indiquer à la calculatrice de se mettre en état de calculer ; on se met en mode exécution :

T.I. : Par QUIT on sort de l'écriture puis on appelle le programme 8 par PRGM puis ENTER sur le bon numéro de programme.

CASIO 7000-8800 : Par MODE 1 (RUN) on sort de l'écriture puis on appelle le programme 8 par PRGM Prog 8.

CASIO 8900-9960 :

On peut de deux façons appeler le programme :

soit en restant en mode PRGM, se mettre en face du programme sélectionné puis RUN (par la touche verte F_1) ou EXE

soit revenir en mode COMP, puis appeler le programme sélectionné par PRGM Prog 8 (ou le nom du programme).

II. PROGRAMMATION D'UNE FONCTION

* Faire demander une valeur de x
 * La faire mettre dans la mémoire X
 * Ecrire $f(x)$
 * Afficher $f(x)$

T.I.

FONCTION
 Disp "X="

Input X

Disp "Y="

Disp Y_i

CASIO - 7800 - 9960

'FONCTION
 "X" ?→X : f_i

CASIO - 7000 - 8000

FONCTION
 "X" ?→X : f(x)

Pour T.I. , la formule $f(x)$ est stockée dans Y_i .

Pour CASIO 7800 jusqu'à 9960 , $f(x)$ est stockée dans f_i .

Ces programmes sont donc valables pour toutes les fonctions, il suffira de changer l'expression de Y_i ou de f_i .

CASIO 180.P

Mode 0 (LRN)

P_1

a Min

$f(x) =$

Mode . (RUN)

x P_1

$P_1 P_2$ clignote : on choisit P_1

a qcq de D_f est mis en mémoire

x obtenu par la mémoire MR

affiche $f(x)$

III. PROGRAMMATION AVEC ITERATION (Introduction au raisonnement par récurrence)

1) Conjecture d'une formule : $S = \sum_{k=1}^n (2k-1)$

Programme : IMPAIR (T.I.83)

If	Then
----	------

0 → S	<i>on initialise S à 0</i>
1 → K	<i>valeur initiale pour k</i>
Input "N=",N	<i>valeur finale pour k</i>
Lbl 1	
If K ≤ N	<i>condition d'arrêt</i>
Then	
S + 2×K-1 → S	
Disp S	<i>on peut améliorer l'affichage et</i>
K + 1 → K	<i>introduire PAUSE</i>
Goto 1	
End	

2) Autre exemple : somme des cubes : $S = \sum_{k=1}^n k^3$

Programme : SOMCUBE

For

```

0 → S
Input "N=",N
For (K,1,N)
S + K ^ 3 → S
Disp "K=",K
PAUSE
Disp "S(K)=",S
PAUSE
End

```

IV. EXEMPLES

1) Vérification de calculs algébriques.

a) Soit $P(x) = -6x^4 - 11x^3 + 213x^2 - 33x - 35$

Calculer $P(1/2)$, $P(1/3)$, $P(-5)$, $P(-7)$.

En déduire une factorisation de $P(x)$ puis résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

b) Soit $f(x) = \frac{4x^2 - 48x - 25}{2x^3 + 5x^2 - 4x - 3} = \frac{N(x)}{D(x)}$

Factoriser $N(x)$ et $D(x)$ puis simplifier $f(x)$.

Résoudre $f(x) > \frac{1}{x+3} + \frac{2x+11}{2(x^2-1)}$

2) Tracé de courbes.

Programmer $Y_1 = x^2 - 2x - 3$ $Y_2 = -2(x+3)^2$ $Y_3 = x^2 + x + 1$
 $Y_4 = (x-2)^2$ $Y_5 = -x^2 + 3x - 3$ $Y_6 = -x^2 - 5x - 3$

Stocker les 6 fonctions, soit en f_i , soit en Y_i

Tableau de valeurs de $f_i(x)$ pour $-9 \leq x \leq 10$ avec un pas de 1.

(Les six fonctions stockées serviront pour l'étude du signe d'un trinôme du second degré).

3) Suite 421

Programmer la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{N} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \\ \quad = \frac{1}{2} u_n & \text{si } u_n \text{ est pair} \end{cases}$$

LA SUITE : 4-2-1**T.I.**

```
Prgm : 421
: Disp « v0= »
: Input X
: Lbl1
: Disp X
: Pause
: If Int(X/2)≠X/2
: 3X+1→X
: Disp X
: Goto 2
: Lbl2
: If Int(X/2)=X/2
: X/2→X
: Goto 1
```

CASIO

```
Prog421
« v0= » ?→X↓
Lbl1↓
Int(X/2)≠X/2⇒3X+1→X ⚡
X/2→X ⚡
Goto1
```

DERIVATION - SUITES

NOTION D'APPROXIMATION AFFINE

Considérons la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$ et $x_0 = -1$. Soit C la courbe représentative.

Graphique 1 : $-5 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq 3$

Graphique 2 : $-2 \leq x \leq 0$ et $-1 \leq y \leq 0$

Graphique 3 : $-1.01 \leq x \leq -0.99$ et $-0.52 \leq y \leq -0.48$

La courbe semble devenir une droite ; on pose $x = -1 + h$ et on montre que :

$$f(-1+h) = f(-1) + h(A + \varepsilon(h)) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

SUITES RECURRENTES

Exercice 1 (extrait des annales Vuibert)

Soit la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1} \end{cases}$$

TI 83 se mettre en MODE Seq ; par la touche Y = on peut entrer 3 suites.

Ensuite par FORMAT choisir **Web.Régler** WINDOW et TBLSET pour la table de valeurs.

CASIO 9960GT : menu RECUR on entre la formule définissant la suite récurrente , la variable n ou a_n etc. est prise dans l'icône n.a_n . Régler RANG et WINDOW

Par TRACE puis EXE on fait apparaître « le petit escalier ».

Exercice 2 (extrait des annales Vuibert);

Soit $f(x) = \ln(1+x)$ et la suite u définie par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Rappel pour enregistrer la fonction pour CASIO : OPTN puis $\triangleright \triangleright$ FMEM (par la touche verte F3) ; on obtient le bandeau STO RCL fn SEE , taper l'expression puis enregistrer la par STO (touche verte F1) dans l'une des 6 mémoires $f_1 \dots f_6$.

Exercice 3 (extrait des annales Vuibert);

Soit la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$$

Calculer u_1, u_2, u_3 etc. valeurs exactes puis valeurs approchées. Emettre des conjectures concernant la convergence de la suite u .

WINDOW : $-1 \leq x \leq 15$ et $-1 \leq y \leq 15$.

Pour l'étude de la suite on peut poser $v_n = \ln(u_n) - 2$ et montrer que la suite v est géométrique.

Pour une TI 92 on peut programmer une suite récurrente à l'aide de l'instruction **WHEN**. Par exemple : $\text{when } (n=0, e^3, e\sqrt{u(n-1)}) \rightarrow u(n)$

SYSTEMES LINEAIRES

TI83

On résout un système linéaire par un calcul matriciel. Se mettre en MODE MATRX.

Soit à résoudre le système :
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [X] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Le système s'écrit : $[A] \times [X] = [B]$ d'où $[X] = [A]^{-1} \times [B]$.

* On édite EDIT la matrice $[A]$ (il faut définir ses dimensions : ligne - colonne) ; puis on quitte.

* On édite la matrice $[B]$

* Enfin, on calcule $[A]^{-1} \times [B]$ ($[A]$ et $[B]$ sont récupérées dans MATRX).

CASIO 9960GT

Prendre le menu principal EQUA puis SIML, on choisit le nombre d'inconnues 2,3,4,5,6. Si le système n'admet pas une unique solution la calculatrice affiche : Math ERROR.

COMPLEXES

TI83

Taper : $1 + i$ sto T se mettre en MODE a+bi EXE

se mettre en MODE re^θ i EXE

angle(T) ; abs(T) pour argument et module de T (se mettre successivement en mode radian ou en degré.

$2 e^{(i \pi/3)}$ sto z EXE (vérifier l'écriture selon que l'on est en mode algébrique ou exponentielle.

$3 e^{(i \pi/4)}$ sto u EXE

Faire des calculs du type u z dans les deux modes.

CASIO 9960GT

En MODE COMP. Par Set up on peut passer de Rad en Deg.

On accède au sous-menu CPLX complexe par OPTN. On utilise ensuite le bandeau sur l'écran (y compris pour i).

STATISTIQUES

I. Les paramètres

Pour une série statistique on définit certains paramètres que nous rappelons, avec les notations usuelles.

1°) Série statistique simple :

a) *moyenne des X_i* : $\text{mean}(X) = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ou $\frac{\sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$ avec des fréquences a_i

b) *variance des X_i* : $V(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2$

c) On définit aussi une variance « estimée » pour la population X (utilisée d'après la théorie des sondages) que nous noterons $V'(X)$:

variance "estimée" de X : $V'(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$; on a donc : $n \times V(X) = (n-1) \times V'(X)$

d) *écart type des X_i* : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ soit $V(X) = (\sigma_X)^2$

écart type estimé pour la population X : $\text{stdDev} = S_X = \sqrt{V'(X)}$

$\sqrt{n} \times \sigma_X = \sqrt{(n-1)} \times S_X$ (pour n grand la différence entre les deux écarts types est faible).

2°) Série statistique double :

$$\text{a) covariance des } (X_i, Y_i) \text{ cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n} = \frac{\sum X_i Y_i}{n} - \bar{X} \bar{Y}$$

$$\text{b) coefficient de corrélation linéaire : } r = \text{cov}(X, Y) / (\sigma_X \sigma_Y)$$

La droite de régression linéaire de X en Y a pour équation $y = a x + b$

$$\text{coefficient directeur de la droite de régression de X en Y : } a = \sigma_{XY} / V(X)$$

$$\text{coefficient d'ajustement de la droite de régression de X en Y : } b = \bar{Y} - a \bar{X}$$

II. Utilisation des statistiques pour une variable aléatoire, en probabilités.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire $X, \{(X_i, P(X=X_i)) ; i=1,2 \dots n\}$, étant supposée connue, on peut utiliser les calculs statistiques à une variable ; on assimile les valeurs X_i à une suite statistique et les $P(X=X_i)$ aux coefficients a_i . On a alors, pour l'espérance mathématique et la variance de la variable X :

$$E(X) = \sum X_i \times P(X=X_i) = \bar{X}$$

$$V(X) = \sum (X_i - \bar{X})^2 \times P(X=X_i) = (\sigma_X)^2.$$

La **TI92** donne S_X et, pour avoir σ_X , il faut le demander dans l'écran de calcul sous la forme σ_X .

Pas de difficultés pour ces calculs avec la **TI83** qui accepte des fréquences quelconques.

III. Statistiques CASIO - 9960 GT

1°) Entrée des données

Dans le MENU, se placer sur l'icône STAT EXE :

apparaissent des listes (éventuellement vides), que l'on peut remplir de la façon habituelle et, au bas de l'écran les sous menus :

SRT - A	SRT - D	DEL	DEL - A	INS	▷
GRPH	CALC				

SRT - A et **SRT - D** sont utilisés pour définir des calculs statistiques portant sur plusieurs listes

DEL - A pour effacer la liste 1 (un message demande confirmation)

Rappelons que l'on « remonte » l'arbre par la touche **EXIT**, éventuellement par

AC/ON

2°) Exemple :

Remplir dans les listes 1 et 2 les données suivantes :

	List 1	List 2
1	12,5	36,2
2	23,2	23,2
3	25,3	25
4	36	12
5	50	58

3°) Calculs statistiques

Après avoir rempli les listes :

CALC	sous menus	1 - VAR	2 - VAR	REG	SET
-------------	------------	----------------	----------------	------------	------------

SET permet de vérifier (ou modifier) l'état des données

1 - VAR affiche les paramètres de la liste sélectionnée : 1- Variable

$$\bar{x} = 29,4$$

$$\sum x = 147$$

$$\sum x^2 = 5130,58$$

$$x\sigma_n = 12,7183332$$

$$x\sigma_{n-1} = 14,2195288$$

$$n = 5$$

REG propose les différents modes de régression :

X **Med** **X^2** **X^3** **X^4** **Log** **Exp** **Pwr**

Par exemple, avec **X** (régression linéaire) :

LinearReg

$$a = 0.51420658$$

$$b = 15.7623264$$

$$r = 0.41973756$$

$$y = a x + b$$

3°) Graphiques

Par **GRPH** sous menus **GPH1** **GPH2** **GPH3** **SEL** **SET**

Le « Range » est calculé automatiquement pour un tracé correct.

Après avoir établi le « type » voulu pour le dessin par **SET** , puis sélectionné une (ou plusieurs) liste(s) par **SEL** , on fait tracer le graphe par **DRAW** . (On peut comparer les graphiques obtenus par les différents modes de régression).

PROBABILITES

I . ANNIVERSAIRES

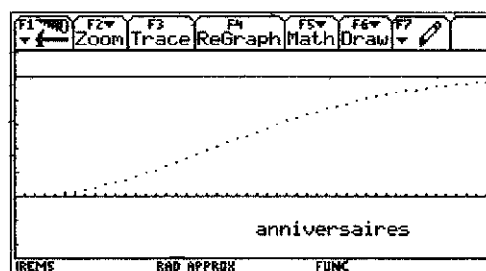
Dans une salle, X personnes sont réunies ; en supposant que leurs jours de naissance soient distribués au hasard des 365 jours de l'année, quelle est la probabilité $p(X)$ que au moins deux d'entre elles fêtent leur anniversaire le même jour?

Réponse: $p(X) = 1 - nPr(365, X) / (365^X)$ (l'univers est l'ensemble des X-listes de dates prises dans les 365 jours ; on utilise l'événement contraire c.à.d. l'ensemble des X anniversaires tous distincts, formant des arrangements d'ordre X).

La représentation graphique est tracée ci-dessous, pour X variant de 0 à 47,6. Pour que la machine calcule $nPr(365, X)$ (c.à.d. le nombre d'arrangements d'ordre X de 365 éléments) il est indispensable que X soit entier ; il faut donc choisir la fenêtre pour que le curseur de TRACE passe sur les valeurs entières. Pour une TI92 on a pris ici : $\min X = 0$, $\max X = 47.6$ pour 238 pixels, soit $47.6/238 = 0,2$ unité pour 1 pixel ; on voit bien sur la représentation graphique que les seuls points tracés sont de coordonnées entières. Pour une TI83, on pourrait prendre $X_{\min} = 0$ et $X_{\max} = 47$ car la fenêtre affiche 94 pixels.

Le tableau de valeurs ci-dessous est obtenu depuis une TI83; on notera un dépassement de capacité à partir de $X=40$.

X	p(X)	X	p(X)
29	.68097	35	.81438
30	.70632	36	.83218
31	.73045	37	.84873
32	.75335	38	.86407
33	.77497	39	.87822
34	.79532	40	ERROR



Probabilité P(X) (TI92)

II. PROBABILITES AU LOTO MULTIPLE

(Une seule grille, 7 ou 8 ou 9 ou 10 n° cochés parmi 49 numéros de la grille ; tirage de 6 numéros plus un complémentaire, avec deux tirages indépendants pour une mise).

Nous ne donnons ici que quelques calculs parmi les nombreux possibles ; les gains n'étant pas fixés à l'avance, on ne peut pas calculer l'espérance mathématique.

a) Probabilité de trouver exactement 3 numéros sur les 6 numéros gagnants, sans tenir compte du n° complémentaire, dans un jeu à 7 numéros :

$$p_7(3) = C_6^3 \times C_{43}^4 / C_{49}^7 = \frac{1025}{35673} \approx 0,0287 \quad (\text{l'univers est l'ensemble des grilles à 7 numéros que peut choisir le joueur}).$$

b) Probabilité de trouver exactement 3 numéros sur les 6, dans un jeu à 8 numéros :

$$p_8(3) = C_6^3 \times C_{43}^5 / C_{49}^8 \approx 0,0427$$

c) Probabilité de ne rien gagner sur une grille avec 7 numéros (c.à.d : n'obtenir aucun des 6 n° gagnants ou bien 1 exactement, ou bien 2 exactement, sans tenir compte du n° complémentaire).

$$p_7(0) = (C_{43}^7 + C_6^1 \times C_{43}^6 + C_6^2 \times C_{43}^5) / C_{49}^7 = 241982 / 249711 \approx 0,9691$$

D'où la probabilité de gagner quelque chose : $1 - p_7(0) = a \approx 0,0309$ (événement contraire)

En réalité, pour un versement de 28 F, le joueur participe à deux tirages indépendants ; la probabilité de gagner quelque chose, au moins une fois pour les deux tirages, est donc (d'après la probabilité d'une réunion) :

$$p = a + a - a \times a = a(2 - a) \approx 0,0609, \text{ soit, à peu près, une chance sur 16.}$$

III. SIMULATION DE LANCERS D'UN DE

Avec un programme simulant 4 séries de chacun 1000 lancers d'un dé on a obtenu le tableau suivant donnant les fréquences d'apparition de chaque numéro de 1 à 6 .

Programme TI92

DE	1	2	3	4	5	6
nombre de séries	4					
	.167	.181	.183	.145		
	.176	.171	.182	.169		
	.167	.15	.143	.17		
	.173	.162	.156	.168		
	.152	.183	.167	.176		
	.165	.153	.169	.172		

Programme sur TI83

.156	.160	.163	.155
.183	.160	.160	.174
.176	.177	.171	.170
.167	.163	.188	.176
.172	.176	.143	.165
.146	.164	.175	.162

On fera comparer les fréquences expérimentales obtenues à la fréquence théorique $1/6$ soit à peu près 0,1667. On peut utiliser ces résultats pour introduire la notion de probabilité.

IV. SIMULATION DE PILE OU FACE.

On peut, pour une introduction de la notion de probabilité, s'appuyer sur la simulation d'un jeu de pile ou face avec une pièce supposée bien équilibrée (*programme PILFACE*).

Voici les fréquences obtenues avec un programme sur la TI93 ; on obtiendrait des résultats analogues avec une TI 83 ou même une CASIO .

DE	1	2	3	4	5	6
nombre de lancers	500					
[pile .506]						
[face .494]						
nombre de lancers	1000					
[pile .486]						
[face .514]						

On trouvera des programmes de simulation en annexe ; la partie principale d'un tel programme de simulation est la fonction rand qui, dans une calculatrice, choisit des nombres au hasard.

V. LE KENO (Ancienne version)

1°) Principe du jeu .

Sur une grille comportant 70 numéros le joueur coche 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 numéros ; un tirage au hasard fournit 20 numéros gagnants ; selon le nombre de numéros joués, il gagne lorsqu'il a trouvé un certain nombre de numéros gagnants (voir les feuilles de La Française des Jeux). On peut pour chaque grille miser 10 F ou 20 F. Par exemple, lorsque le joueur coche 4 numéros sur une grille à 10 F, il gagne 50 F s'il a trouvé 3 gagnants et 500 F s'il a trouvé 4 numéros gagnants. Ce jeu de Keno se prête bien au calcul par dénombrements et les calculatrices permettent d'obtenir les différentes probabilités et espérances de gain de façon approchée (de façon exacte avec la TI92). La société des Jeux fournit le détail des chances de gagner ainsi que les gains possibles ; elle ne calcule pas l'espérance mathématique par crainte de décourager certains joueurs mais les chances de gagner qu'elle communique sont correctes et on peut les faire vérifier.

2°) Calcul des probabilités pour une grille à 4 numéros.

a) Choix de l'univers des possibles (Ω). On peut prendre comme événements élémentaires, soit les différentes grilles que peut choisir le joueur, soit les différents tirages possibles de 20 numéros gagnants. Dans le premier cas on a $\text{card}(\Omega) = C_{70}^4$, dans le deuxième $\text{card}(\Omega) = C_{70}^{20}$; les calculs seront différents dans les deux cas, mais paraissent à priori plus simples avec le premier choix Ω .

b) Probabilités de gain avec le choix de Ω comme Univers. Soit B_i l'événement « on a trouvé exactement i gagnants parmi les numéros cochés ».

$\text{card}(B_3) = C_{20}^3 \times C_{50}^1$ (prendre 3 numéros parmi les 20 gagnants et compléter par 1 numéro pris parmi les 50 non gagnants)

$\text{card}(B_4) = C_{20}^4$ (prendre les 4 numéros parmi les 20 gagnants)

$$p(B_3) = \text{card}(B_3) / \text{card}(\Omega) = 11400/183379 \approx 0.06216633$$

$$p(B_4) = \text{card}(B_4) / \text{card}(\Omega) = 57/10787 \approx 0.005284$$

c) Probabilités de gain avec le choix de Ω' comme univers.

Soit B'_i l'événement « on a trouvé exactement i gagnants parmi les numéros cochés ». Ici, on doit dénombrer les ensembles de 20 numéros gagnants qui contiennent i numéros parmi ceux qui ont été cochés.

$\text{card}(B'_3) = C_{66}^{17} \times C_4^3$ (on doit choisir 3 numéros gagnants parmi les 4 cochés puis compléter avec 17 numéros qui sont pris en dehors des 4 cochés c.a.d. parmi 66)

De même, on a : $\text{card}(B'_4) = C_{66}^{16}$ (on doit, pour avoir un ensemble de 20 numéros gagnants et contenant les 4 n° cochés, choisir 16 autres numéros que les 4 cochés en les prenant parmi les 66 non cochés)

On calcule maintenant les probabilités dans l'univers Ω' :

$$p(B'_3) = C_{66}^{17} \times C_4^3 / C_{70}^{20} = p(B_3) = 11\,400 / 183\,379$$

On peut vérifier l'égalité des deux probabilités par un calcul à la main, par un calcul machine exact (TI92) ou, pour CASIO et TI83, par un calcul approché.

On a aussi $p(B'_4) = C_{66}^{16} / C_{70}^{20} = p(B_4)$; les calculs numériques sont un peu plus simples avec Ω et nous ferons les calculs dorénavant dans cet univers.

d) Calcul de l'espérance mathématique

Supposons que le joueur ait misé 10 F pour une grille à 4 n° ; d'après les gains indiqués, l'espérance mathématique E_4 vaut, sachant que la probabilité de perdre est $1 - p(B_3) - p(B_4)$:

$$E_4 = p(B_3) \times (50-10) + p(B_4) \times (500-10) + (1 - p(B_3) - p(B_4)) \times (-10)$$

$$E_4 = 50 \times p(B_3) + 500 \times p(B_4) - 10 \times (p(B_3) + p(B_4) + 1 - p(B_3) - p(B_4))$$

$$E_4 = 50 \times p(B_3) + 500 \times p(B_4) - 10, \text{ soit de façon approchée}$$

$$E_4 \approx -4,2496$$

Remarque 1 : Pour une mise de 20 F les gains sont multipliés par deux et par conséquent aussi l'espérance mathématique qui devient - 8,4992.

Remarque 2: Pour le calcul d'une espérance mathématique, on pourra utiliser la formule un peu plus simple : Espérance = $(\sum \text{gain indiqué}(B_i) \times p(B_i)) - \text{mise}$

*** CALCUL DES PROBABILITES POUR UNE GRILLE A 5 NUMEROS.**

Nous donnerons maintenant seulement un tableau affichant les formules et les calculs approchés.

nombre de gagnants	probabilité	gain	p(B _i) approchée
3	$C_{20}^3 \times C_{50}^2 / C_{70}^5$	20 F	0.11538
4	$C_{20}^4 \times C_{50}^1 / C_{70}^5$	50 F	0.02002
5	$C_{20}^5 \times C_{50}^0 / C_{70}^5$	2000 F	0.00128

L'espérance mathématique est, pour 5 numéros et une mise de 10 F :

$$E_5 \approx -4.130$$

Les calculs sont analogues pour les grilles à 6, 7, ..., 10 numéros, en tenant compte des gains indiqués. A titre de dernier exemple nous présentons le tableau de calculs pour une grille à 10 numéros, ceux-ci étant effectués avec la précision permise par la TI92.

***JEU A 10 NUMEROS** (mise de 10 F)

nombre de n° gagnants	probabilités	proba approchées	gains
5	$C_{20}^5 \times C_{50}^5 / C_{70}^{10}$	0.08280535	20 F
6	$C_{20}^6 \times C_{50}^4 / C_{70}^{10}$	0.02250145	50 F
7	$C_{20}^7 \times C_{50}^3 / C_{70}^{10}$	0.00383003	100 F
8	$C_{20}^8 \times C_{50}^2 / C_{70}^{10}$	0.00039	1000 F
9	$C_{20}^9 \times C_{50}^1 / C_{70}^{10}$	0.000002	50000 F
10	$C_{20}^{10} \times C_{50}^0 / C_{70}^{10}$	0.00000047	2000000 F

L'espérance mathématique pour une grille à 10 n° est $\sum \text{gain}(B_i) \times p(B_i)$:

$$E_{10} \approx -4,45690$$

On peut vérifier, en calculant les espérances mathématiques pour tous les choix du nombre de numéros cochés (de 4 à 10), que c'est pour 5 que l'espérance est la plus grande ; c'est donc en jouant des grilles à 5 n° que l'on risque de perdre le moins d'argent !

VI. NOUVEAU JEU DE KENO

1) Jeu à 2 numéros

Prenons comme Univers Ω l'ensemble des grilles à 2 n° que peut choisir le joueur, on a donc $\text{card } \Omega = C_{70}^2$. On effectue les calculs pour une mise de 10 F.

gain	nbre de gagnants	cardinal de l'événement	probabilités
-10	0 ou 1	$C_{50}^2 + C_{50}^1 \times C_{20}^1$	0.9213
50	2	C_{20}^2	0.0787 ($\approx 1/13$)

L'espérance mathématique pour ce mode de jeu est **espken2 = - 850/161 $\approx$ -5. 2795**

L'écart type est **écarken2 $\approx$ 16. 1530**

Remarque. On pourrait prendre comme univers l'ensemble des tirages des 20 n° gagnants ; on aurait alors $p(2 \text{ gagnants}) = C_{68}^{18} \div C_{70}^{20} = C_{20}^2 \div C_{70}^2 = \frac{38}{483}$

Les calculs paraissent plus compliqués avec ce choix de l'univers ; nous utiliserons donc dans toute la suite Ω = ensemble des choix du joueur.

Dans toute la suite nous supposons aussi que la mise est de 10 F.

Le calcul complet de proba (gain = - 10) pourrait être évité, mais nous l'effectuerons à chaque fois pour permettre la vérification $\sum p_i = 1$.

2) Jeu à 3 numéros

Maintenant $\text{card } \Omega = C_{70}^3$.

gain	nbr de gagnants	cardinal de l'événement	probabilités
-10	0 ou 1	$C_{50}^3 + C_{20}^1 \times C_{50}^2$	0.8056
10	2	$C_{20}^2 \times C_{50}^1$	0.1735 ($\approx 1/6$)
90	3	C_{20}^3	0.0208 ($\approx 1/48$)

L'espérance mathématique pour ce mode de jeu est : **espken3 = -4. 44467**

L'écart type est **écarken3 = 15.711**

3) Jeu à 4 numéros

Maintenant $\text{card } \Omega = C_{70}^4$.

gain	nbr de gagnants	cardinal de l'événement	probabilités
-10	0, 1 ou 2	$C_{50}^4 + C_{20}^1 \times C_{50}^3 + C_{20}^2 \times C_{50}^2$	0.9325
40	3	$C_{20}^3 \times C_{50}^1$	0.0622 ($\approx 1/16$)
490	4	C_{20}^4	0.0053 ($\approx 1/189$)

L'espérance mathématique pour ce mode de jeu est : **espken4 = - 4. 2496**

L'écart type est : **ecarken4 = 37. 9919.**

4) Jeu à 5 numérosMaintenant card $\Omega = C_{70}^5$

gain	nbr de gagnants	cardinal de l'événement	probabilités
-10	0, 1 ou 2	$C_{50}^5 + C_{20}^1 \times C_{50}^4 + C_{20}^2 \times C_{50}^3$	0.8633
10	3	$C_{20}^3 \times C_{50}^2$	0.1154 ($\approx 1/9$)
40	4	$C_{20}^4 \times C_{50}^1$	0.0200 ($\approx 1/50$)
1990	5	C_{20}^5	0.0013 ($\approx 1/781$)

L'espérance mathématique de ce mode de jeu est **espken5 $\approx$ - 4. 1295**L'écart type est **ecarken5 $\approx$ 72.0121****5) Jeu à 6 numéros**Pour ce mode de jeu, card $\Omega = C_{70}^6$.

gain	nbr de gagnants	cardinal de l'événement	probabilités
-10	0, 1, 2 ou 3	$C_{50}^6 + C_{20}^1 \times C_{50}^5 + C_{20}^2 \times C_{50}^4 + C_{20}^3 \times C_{50}^3$	0.9485
10	4	$C_{20}^4 \times C_{50}^2$	0.0453 ($\approx 1/22$)
290	5	$C_{20}^5 \times C_{50}^1$	0.0059 ($\approx 1/169$)
9990	6	C_{20}^6	0.0003 ($\approx 1/3383$)

L'espérance mathématique est : **espken6 = - 4. 3648**L'écart type est **ecaken6 = 173. 436****6) Jeu à 7 numéros**Maintenant card $\Omega = C_{70}^7$.

gain	nbr de gagnants	cardinal de l'événement	probabilités
-10	0, 1, 2 ou 3	$C_{50}^7 + C_{20}^1 \times C_{50}^6 + C_{20}^2 \times C_{50}^5 + C_{20}^3 \times C_{50}^4$	0.9033
10	4	$C_{20}^4 \times C_{50}^3$	0.0792 ($\approx 1/13$)
40	5	$C_{20}^5 \times C_{50}^2$	0.0158 ($\approx 1/63$)
990	6	$C_{20}^6 \times C_{50}^1$	0.0016 ($\approx 1/619$)
24990	7	C_{20}^7	0.0001 ($\approx 1/15464$)

L'espérance mathématique est : **espken7 = - 4. 39022**L'écart type est **ecaken7 = 205.116**

7) Jeu à 8 numéros

Pour ce choix card $\Omega = C_{70}^8$

gain	nombre de gagnants	cardinal de l'événement	probabilités
-10	0, 1, 2, 3 ou 4	$C_{50}^8 + C_{20}^1 \times C_{50}^7 + C_{20}^2 \times C_{50}^6 + C_{20}^3 \times C_{50}^5 + C_{20}^4 \times C_{50}^4$	0.96236
10	5	$C_{20}^5 \times C_{50}^3$	0.03219($\approx 1/31$)
90	6	$C_{20}^6 \times C_{50}^2$	0.00503($\approx 1/199$)
2490	7	$C_{20}^7 \times C_{50}^1$	0.00041($\approx 1/2436$)
24990	8	C_{20}^8	1.10^{-5} ($\approx 1/74941$)

L'espérance mathématique est : **espken8 = -4. 49086**

L'écart type est : **ecaken8 = 914. 65**

8) Jeu à 9 numéros

gain	nombre de gagnants	cardinal de l'événement	probabilités
-10	0, 1, 2, 3, 4	$C_{50}^9 + C_{20}^1 \times C_{50}^8 + C_{20}^2 \times C_{50}^7 + C_{20}^3 \times C_{50}^6 + C_{20}^4 \times C_{50}^5$	0.93186
10	5	$C_{20}^5 \times C_{50}^4$	0.0549($\approx 1/18$)
40	6	$C_{20}^6 \times C_{50}^3$	0.01168 $\approx 1/86$
490	7	$C_{20}^7 \times C_{50}^2$	0.00146 $\approx 1/685$
4990	8	$C_{20}^8 \times C_{50}^1$	9.69×10^{-5} $\approx 1/10\ 325$
999990	9	C_{20}^9	$2.6.10^{-6}$ $\approx 1/387\ 197$

L'espérance mathématique pour ce mode de jeu est : **espken9 = - 4. 52083**

L'écart type : **ecaken9 = 1369. 94**

On remarque que l'espérance mathématique garde des valeurs voisines les unes des autres selon le nombre de numéros que choisit le joueur, mais que l'écart type augmente beaucoup avec le nombre de numéros. La probabilité de gagner une grosse somme est bien entendu très faible.

9) Jeu à 10 numéros

Pour cette dernière façon de jouer, on a : $\text{card } \Omega = C_{70}^{10}$.

On notera une innovation dans les gains : on reçoit 20 F si on ne trouve aucun des numéros gagnants, c'est à dire que l'on gagne exceptionnellement 10 F pour n'avoir rien trouvé.

gain	nbre de gagnants	cardinal de l'événement	probabilités
-10	1, 2, 3 ou 4	$C_{20}^1 \times C_{50}^9 + C_{20}^2 \times C_{50}^8 + C_{20}^3 \times C_{50}^7 + C_{20}^4 \times C_{50}^6$	0.86456
10	0 ou 5	$C_{50}^{10} + C_{20}^5 \times C_{50}^5$	0.1087($\approx 1/9$)
40	6	$C_{20}^6 \times C_{50}^4$	0.0225 $\approx 1/44$
90	7	$C_{20}^7 \times C_{50}^3$	0.00383 $\approx 1/261$
990	8	$C_{20}^8 \times C_{50}^2$	0.00039 $\approx 1/2571$
24 990	9	$C_{20}^9 \times C_{50}^1$	$2,117 \cdot 10^{-5}$ $\approx 1/47238$
1999 990	10	C_{20}^{10}	$4,7 \cdot 10^{-7}$ $\approx 1/2147181$

L'espérance mathématique est : $\text{espken10} = -4.4682$

L'écart type est : $\text{ecaken10} = 1369.9$

COMPARAISON DES MODES DE JEUX AU KENO

jeux	espérance	écart	
esp2	-5.2795	16.15	
esp9	-4.5208	1369.94	
esp8	-4.4909	914.65	
esp10	-4.4682	1369.9	
esp3	-4.4447	15.71	
esp7	-4.3902	205.11	
esp6	-4.3648	173.44	
esp4	-4.2496	37.99	
esp5	-4.1295	72.01	

D'après les espérances mathématiques calculées le jeu le moins désavantageux est celui de 5 numéros.

10) Le Jackpot Keno

Pour une mise de 10 F le joueur se voit attribué un numéro Jackpot constitué d'un arrangement de 4 nombres : 1 d'un chiffre suivi de 3 de 2 chiffres (de 1 à 99). Lors du tirage du Keno un numéro Jackpot est, en plus des 20 gagnants, tiré au sort. Le joueur gagne dans 3 cas :

*il a le Jackpot et obtient au moins 100 000 F ; la probabilité d'un tel événement est

$$\text{prob}(J) = \frac{1}{9 \times A_{99}^3} \approx 1,180 \times 10^{-7}$$

*il a les 3 derniers n° du Jackpot, dans l'ordre ; il obtient alors 20 000 F ; la probabilité de cet événement est

$$\text{prob}(3\text{der ordre}) = \frac{1}{A_{99}^3} \approx 1,063 \times 10^{-6}$$

*il a les 3 derniers n° du Jackpot, dans le désordre ; il obtient alors 5 000 F ;

$$\text{prob}(3\text{der désordre}) = \frac{5}{A_{99}^3} \approx 5,313 \times 10^{-6}$$

Les chances de gain au Jackpot sont évidemment très faibles, mais cette possibilité de gain supplémentaire ne demande pas de nouvelle mise ; l'espérance mathématique semble importante mais est illusoire : 2,164.

PROGRAMMES T.I.92

PILFACE()

```

Prgm
Local m,i,k,n
newMat(2,2)⇒m:pile⇒m[1,1]:face⇒m[2,1]
Input "nombre de lancers",n
For i,1,n
rand(2)⇒k
If fPart(k/2)=0 Then
1+m[1,2]⇒m[1,2]
Else
1+m[2,2]⇒m[2,2]
EndIf
EndFor
round(m[1,2]/n,4)⇒m[1,2]:round(m[2,2]/n,4)⇒m[2,2]
Disp m
EndPrgm

```

LOTOS ()

```

Prgm
©donne la liste d'un tirage +no compl; avec F5
on peut lire 8 tirages successifs
Local lo,k,m,lt1
DelVar lt
newList(6)⇒lt
seq(a,a,1,49)⇒lo
For i,1,6
rand(50-i)⇒k
lo[k]⇒lt[i]
k+100⇒lo[k]
SortA lo
EndFor
SortA lt
lo[rand(43)]⇒comp
augment(lt,{cp,comp})⇒lt1
Disp lt1
EndPrgm

```

DESERIE ()

©prg donnant sous forme d'une matrice de 6 lignes les fréquences des 6 numéros d'un dé pour r séries de n lancers

```

ClrIO
Local n,r,j,k
Input "nbre de lancers",n
Input "nbre de séries",r
1⇒s:newMat(6,r)⇒d
Lbl e1
0⇒j
Lbl e3
j+1⇒j
If j>n Then
Goto e4
EndIf
rand(6)⇒k
1+d[k,s]⇒d[k,s]
Goto e3
Lbl e4
s+1⇒s
If s≤r Then
Goto e1
EndIf
d/n⇒d
Disp round(d,3)
EndPrgm

```

KENO1 ()

```

Prgm
newList(20)⇒l1:newList(70)⇒l2
seq(a,a,1,70)⇒l2
For i,1,20
rand(71-i)⇒k
l2[k]⇒l1[i]
k+100⇒l2[k]
SortA l2
EndFor
SortA l1:DelVar l2
list➤mat(11,4)⇒matkeno
Disp matkeno
©donne liste l1 et matkeno,les 20 numéros d'un
tirage keno dans les 70 entiers
EndPrgm

```

PROGRAMMES TI 83

FREPART : trace la fonction de répartition lorsque les X_i sont dans L_1 et les probabilités $p(X_i)$ dans L_2

```
FnOff : ClrDraw
dim(L1) → N
L1(1) - 1 → Xmin
L1(N) + 2 → Xmax
0 → Ymin : 1.2 → Ymax
1 → Xscl : .5 → Yscl
L2(1) → T
For (I, 1, N-1)
Line (L1(I), T, L1(I+1), T)
T + L2(I+1) → T
End
Line (L1(N), 1, Xmax, 1)
Line (Xmin, 0, L1(1), 0)
```

LOTO : simule un tirage de loto donnant 6 numéros + 1 complémentaire parmi {1,...,49} ; on peut les voir dans L_2 et le complémentaire dans L_3 après Done

```
ClrList L1, L2, L3
49 → dim(L1) : 6 → dim(L2) : 1 → dim(L3)
seq(A, A, 1, 49, 1) → L1
For (I, 1, 6)
randInt(1, 50 - I) → K
L1(K) → L2(I)
100 + K → L1(K)
SortA(L1)
End
SortA(L2)
randInt(1, 50 - I) → T
L1(T) → C : C → L3(1)
SetUpEditor L1, L2, L3
ClrList L1
Pause C
Pause L2
Disp " STAT 1 L2 L3 "
```

PILFACE : donne dans une matrice 2×2 le nombre de sorties de Pile puis Face pour n lancers puis les deux fréquences

```
{ 2, 1 } → dim([B])
Fill(0, [B])
Input "NBRE DE LANCERS : ", N
For (I, 1, N)
randInt(1, 2) → K
If fPart(K/2) = 0
Then
1 + [B](1, 1) → [B](1, 1)
Else
1 + [B](2, 1) → [B](2, 1)
End
End
Disp [B]
Disp 1/N × [B]
```

ARRGN3 : donne dans les listes L_1 L_2 L_3 les A_N^3 arrangements d'ordre 3 de l'ensemble $\{1, \dots, N\}$

```
Input " N = ", N
N nPr 3 → V
ClrList L1, L2, L3
V → dim(L1) : V → dim(L2) : V → dim(L3)
I → T
For (I, 1, N)
For (J, 1, N)
For (K, 1, N)
If (I=J or I=K or J=K)
Goto 1
I → L1(T) : J → L2(T) : K → L3(T)
1 + T → T
Lbl 1
End:End:End
SetUpEditor L1, L2, L3
Disp " VOIR STAT 1 "
```

CALCULS APPROCHES D'INTEGRALES

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $I = \int_a^b f(t)dt$.

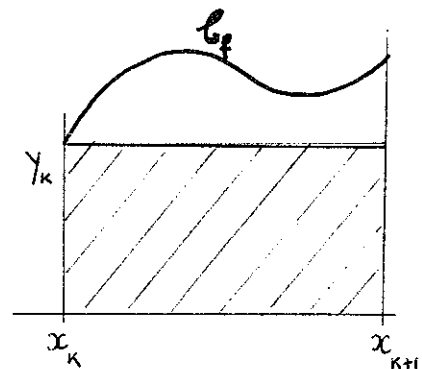
I. Méthode des rectangles

1°) Principe

On effectue une subdivision de $[a, b]$ en n intervalles égaux, de longueur $h = \frac{b-a}{n}$. On obtient ainsi n intervalles $[x_k, x_{k+1}]$

($0 \leq k \leq n-1$) avec $x_k = a + kh$ ($x_0 = a; x_n = b$).

Sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, on remplace f par la fonction constante égale à $y_k = f(x_k)$ $0 \leq k \leq n$.



2°) Valeur approchée de I

a) L'intégrale $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt$ est donc remplacée par $\frac{b-a}{n} f(x_k)$

b) On obtient pour valeur approchée de I, le nombre $R(h)$:

$$R(h) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

3°) Estimation de l'erreur

a) Quand h tend vers 0, $R(h)$ tend vers l'intégrale I.

b) Estimation de l'erreur ε :

Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$ on a $\varepsilon \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1$ où $M_1 = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$

Remarque : si on prend les rectangles au point médian, i.e.

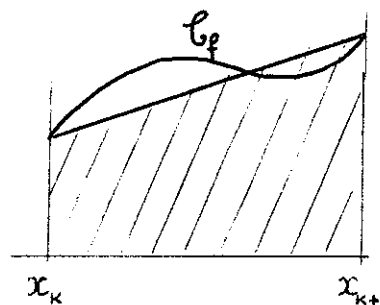
$R(h) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + (2k-1) \frac{b-a}{2n}\right)$ on a pour toute fonction de classe C^2 sur $[a, b]$

$$\varepsilon \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2 \text{ où } M_2 = \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)|.$$

II. Méthode des trapèzes.

1°) Principe

Sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, on remplace f par la fonction affine P qui vérifie : $f(x_k) = P(x_k)$; $f(x_{k+1}) = P(x_{k+1})$.



2°) Valeur approchée de I

a) L'intégrale $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt$ est donc remplacée par $\frac{x_{k+1} - x_k}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})]$

b) On obtient pour valeur approchée de I, le nombre $T(h)$:

$$T(h) = \frac{h}{2} [(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + \dots + (y_k + y_{k+1}) + \dots + (y_{n-1} + y_n)]$$

soit

$$T(h) = \frac{h}{2} \left[y_0 + y_n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} y_k \right]$$

c) On démontre que, lorsque n tend vers $+\infty$ (h tend vers 0), la suite $(T(h))$ converge vers I . On démontre également que l'erreur ε commise en remplaçant I par $T(h)$ est inférieure à $\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$ où $M_2 = \sup_{t \in [a,b]} |f''(t)|$ (On dit qu'on a une approximation de l'ordre de h^2 , puisque $\varepsilon < \frac{\lambda}{h^2}$).

III. Méthode de SIMPSON

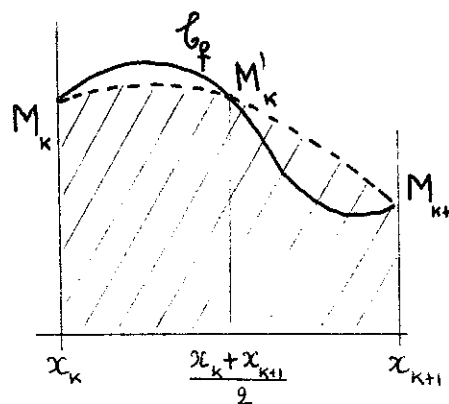
1°) Principe

Sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$, on remplace f par la fonction polynôme P_k de degré inférieur ou égal à 2 qui vérifie :

$$f(x_k) = P_k(x_k); f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = P_k\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right); f(x_{k+1}) = P_k(x_{k+1})$$

(Dans la plupart des cas, sauf si les points

$M_k(x_k, y_k)$, $M_k'\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right)$, $M_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$ sont alignés, C_{P_k} sera un arc de parabole).



Puisque, pour toute fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3,

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(t)dt = \frac{\beta - \alpha}{6} \left[P(\alpha) + P(\beta) + 4P\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right], \text{ l'intégrale } \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \text{ est donc remplacée par}$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{6} \left[P_k(x_k) + 4P_k\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + P_k(x_{k+1}) \right].$$

Or, puisque $f(x_k) = P_k(x_k)$; $f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = P_k\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$; $f(x_{k+1}) = P_k(x_{k+1})$, en définitive

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \text{ est remplacée par } \frac{x_{k+1} - x_k}{6} \left[f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right].$$

2°) Valeur approchée de I

En posant encore $h = \frac{b-a}{n}$, $y_k = f(x_k)$ $0 \leq k \leq n$ et $f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = y'_k$ on obtient pour valeur approchée de I le nombre S(h) :

$$S(h) = \frac{h}{6} [(y_0 + 4y'_1 + y_1) + \dots + (y_{n-1} + 4y'_{n-1} + y_n) + (y_{n-1} + 4y'_n + y_n)]$$

soit
$$S(h) = \frac{h}{6} \left[(y_0 + y_n) + 4 \sum_{k=1}^n y'_k + 2 \sum_{k=1}^{n-1} y_k \right]$$

ou bien
$$S(h) = \frac{h}{6} \left[y_0 - y_n + 4 \sum_{k=1}^n y'_k + 2 \sum_{k=1}^n y_k \right]$$

3°) Estimation de l'erreur

a) Quand h tend vers 0, S(h) tend vers l'intégrale I.

b) Estimation de l'erreur ε :

La formule dite de Simpson est la suivante :

pour toute fonction f de classe C^4 sur $[a, b]$, il existe c, $c \in]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c)$$

donc l'erreur ε est telle que $\varepsilon < \frac{(b-a)^5}{2880n^4} M_4$ où $M_4 = \sup_{t \in [a,b]} |f^{(4)}(t)|$

S(h) est donc une approximation de I d'ordre h^4 .

IV. Méthode de ROMBERG

Le principal inconvénient des méthodes précédentes réside dans le fait que l'on ne connaît pas la précision du résultat (sauf en calculant $f^{(2)}$, $f^{(4)}$ et les nombres M_2 et M_4 , ce qui n'est pas toujours facile et demande au moins quelques secondes !).

On pourrait alors penser améliorer la précision en approchant f par des fonctions polynômes de degré supérieur à 3, ce qui est vrai lorsque les suites obtenues convergent ! [Kusmin en 1931 (Zur Theorie der mechanischen Quadraturen - Leningrad) a démontré que les approximations d'ordre supérieur ne convergent pas nécessairement, même lorsque f est continue sur $[a, b]$].

1°) Principe de la méthode de Romberg (1955-*Vereinfachte numerische Integration*)

Elle repose sur une utilisation originale de la méthode des trapèzes :

a) Etant donné un pas h , une estimation $T(h)$ (que nous noterons désormais $T_0(h)$) de l'intégrale est obtenue par la méthode des trapèzes.

Si l'on divise le pas par 2, l'estimation $T_0(\frac{h}{2})$ sera plus précise et on peut de même calculer $T_0(\frac{h}{4}), T_0(\frac{h}{8}), \dots, T_0(\frac{h}{2^p})$. Cette suite converge vers I .

b) Or, si l'on calcule $\frac{4T_0(\frac{h}{2}) - T_0(h)}{3}$, un calcul élémentaire montre qu'on obtient exactement $S(h)$, approximation obtenue par la méthode de Simpson avec le pas h . Alors que $T_0(h)$ est une approximation d'ordre h^2 , $S(h)$ est une approximation d'ordre h^4 .

Notons désormais $S(h) = T_1(h)$; on peut de même calculer $T_1(\frac{h}{2}), T_1(\frac{h}{4})$ et définir une suite $(T_1(\frac{h}{2^p}))$ qui converge vers I ; $T_1(\frac{h}{2^p})$ est une meilleure approximation de l'intégrale que $T_0(\frac{h}{2^p})$.

On obtient $T_1(\frac{h}{2^p})$ par la formule $T_1(\frac{h}{2^p}) = \frac{4T_0(\frac{h}{2^{p+1}}) - T_0(\frac{h}{2^p})}{4 - 1}$

c) On peut de façon générale obtenir une suite définie par :

$$T_k(\frac{h}{2^p}) = \frac{4^k T_{k-1}(\frac{h}{2^{p+1}}) - T_{k-1}(\frac{h}{2^p})}{4^k - 1}$$

2°) Tableau

On peut alors constituer le tableau suivant :

$T_0(h)$	$T_0(\frac{h}{2})$	$T_0(\frac{h}{2^2})$	...	$T_0(\frac{h}{2^{k-2}})$	$T_0(\frac{h}{2^{k-1}})$	$T_0(\frac{h}{2^k})$
$T_1(h)$	$T_1(\frac{h}{2})$	$T_1(\frac{h}{2^2})$	...	$T_1(\frac{h}{2^{k-2}})$	$T_1(\frac{h}{2^{k-1}})$	
$T_2(h)$	$T_2(\frac{h}{2})$	$T_2(\frac{h}{2^2})$	...	$T_2(\frac{h}{2^{k-2}})$		
.	.	.	.			
.	.	.	.			
.	.	.	.			
$T_{k-1}(h)$	$T_{k-1}(\frac{h}{2})$					
$T_k(h)$						

On démontre que :

- si f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$, les colonnes et les lignes du tableau convergent vers l'intégrale
- l'erreur est inférieure à $|T_{k+1}(h) - T_k(h)|$
- la suite $(T_k(h))$ converge bien plus rapidement vers I que la suite $(T_0(\frac{h}{2^k}))$.

3°) Utilisation de la méthode

On commence par calculer $T_0(h)$ (par la méthode des trapèzes).

On calcule ensuite $T_0(\frac{h}{2})$ et on en déduit $T_1(h)$; puis $T_0(\frac{h}{4})$ et on en déduit $T_1(\frac{h}{2})$.

Plus généralement, on obtient le tableau d'ordre $(k+1)$ à partir du tableau d'ordre k en calculant $T_0(\frac{h}{2^{k+1}})$ puis en en déduisant les $T_p(\frac{h}{2^{k+1-p}})$ où $p \in [1, k+1]$.

Le calcul est terminé lorsque la différence entre $T_{k+1}(h)$ et $T_k(h)$ est inférieure à un nombre fixé à l'avance.

INTRODUCTION A LA NOTION DE FONCTION (T.I.92)

I. Présentation de l'activité

1) Nous présentons une activité mise au point par MM. Coste et Jacquinet lors des stages TI de l'année 96-97, utilisable en classe de seconde pour introduire la notion de fonction. La calculatrice est la TI92. La fonction est d'origine géométrique (aire d'un rectangle) et l'utilisation du rétro - projecteur permet d'illustrer différentes notions : ensemble de définition, tableau de valeurs numériques, sens de variation, maximum, courbe représentative, expression algébrique.

2) Texte de l'exercice

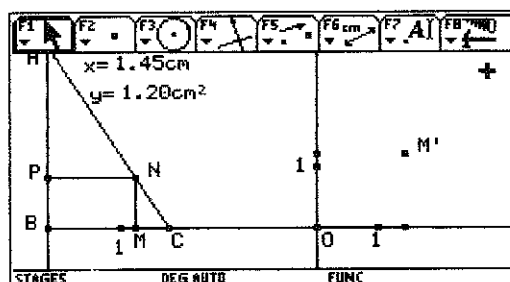
Soit un triangle ABC, rectangle en B, tel que $BA=3\text{cm}$, $BC=2\text{cm}$; un point M variable décrit le segment [BC], la parallèle à (AB) menée par M coupe [AC] en N et la parallèle à (BC) menée par N coupe (AB) en P. On pose :

$BM = x$ (en cm) $y = \text{Aire du rectangle BMNP}$ (en cm^2).

Etudier la fonction $f : x \rightarrow y$.

3) Préparation de la calculatrice

Dans application Géométrie (APPS8-nom de fichier) on prépare le triangle rectangle BCA (droites perpendiculaires en B sur lesquelles on porte [BC] et [BA]) ; on place M (le point variable) sur [BC] puis on construit N et enfin P. Avec F6-1-2 on fait afficher x et l'aire y . On construit en outre un repère orthonormé d'origine



O en portant l'unité 1 cm sur les axes ; par F4-9 on reporte x et y sur ces axes et on construit le point M' de coordonnées (x,y) . On s'assure de la validité des constructions en déplaçant « à la main » le point pilote M : le rectangle BMNP doit se modifier, x et y doivent varier ainsi que le point M' .

II. Variations de y

En faisant déplacer le point M sur le segment [BC] on voit que x varie de 0 à 2, que y semble être croissante de 0 à 1.5 sur $[0,1]$ puis décroissante de 1.5 à 0 sur $[1,2]$, ces conjectures étant

fondées sur les valeurs de x et de y qui s'affichent sur la figure de gauche.

Une justification de ces résultats pourra être fournie plus tard.

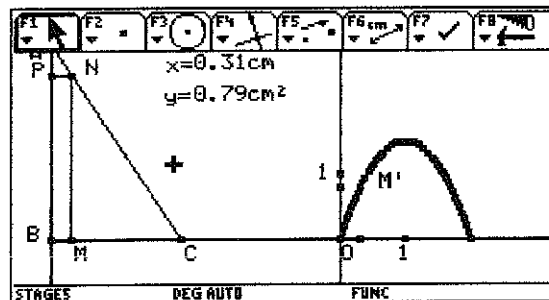
x	0	1	2
y	0	1,5	0

III. Construction point par point de la représentation graphique

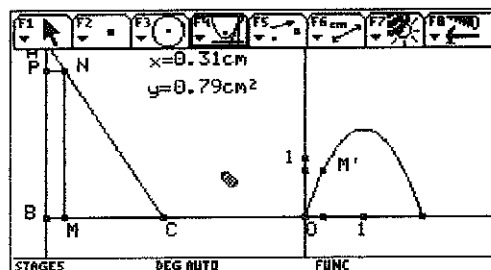
On examine maintenant le déplacement du point M' dans son repère xOy (à droite de l'écran) suivant le déplacement du point pilote M (figure à gauche de l'écran).

Les coordonnées de M' ($x = BM$, $y = \text{Aire BMNP}$) sont notées à gauche et on peut faire apparaître les points M' successifs par F7-2-sélection de M' . On obtient un tracé analogue à la figure ci-dessous

Notons que cette figure ne peut pas être préparée à l'avance car l'ensemble des points M' est effacé lorsqu'on quitte cet écran. Mais son tracé pas à pas est au contraire assez spectaculaire.



En utilisant F4-A(lieu)-M'-M on peut faire tracer le lieu géométrique de M' lorsque M décrit $[BC]$. On obtient un assez bon tracé de la parabole, comme ci-contre.



IV. Relevé des valeurs numériques

La TI92 permet de relever les valeurs numériques par F8-B(on recentre la page à gauche par F8-A) dans le tableau de droite, suivi de F6-7-2 puis 1. On peut faire un relevé automatique par F7-3 (animation) ou par valeurs isolées. On obtient un tableau analogue à celui-ci.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat

$x = 0.13\text{cm}$
 $y = 0.36\text{cm}^2$

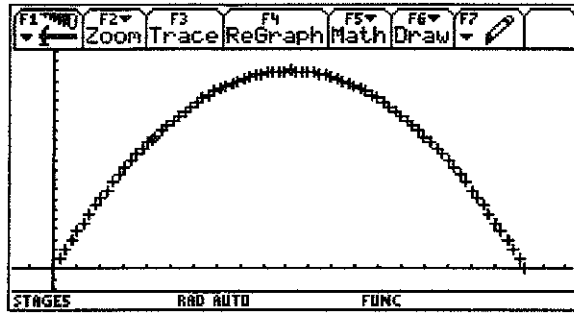
DATA	x	y	
	c1	c2	c3
1	.517	1.15	
2	.69	1.36	
3	.541	1.18	
4	.414	.986	
5	.394	.95	
6	.38	.924	

r5c2= .94981154532828

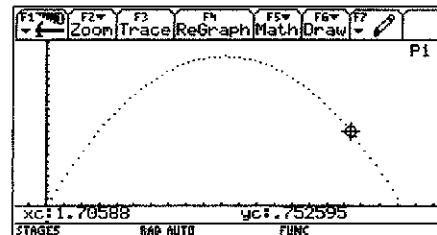
STAGES
RAD AUTO
FUNC

V. Tracé utilisant les valeurs numériques

Avec le relevé automatique des données on recueille un grand nombre de coordonnées (x,y) en veillant à ce que le point M décrive tout [BC]. On revient ensuite à l'éditeur graphique « Y= » et on valide Plot1 (par exemple : scatter-plus- x =c1 - y = c2). Le tracé point par point selon les coordonnées recueillies se fait par Zoom-Data et a l'allure ci-contre. C'est une troisième représentation graphique de la fonction.



Voici un autre tracé (plot: scatter-dot-x=c1-y=c2) sur lequel on peut faire déplacer le curseur par Trace.



VI. Etude théorique

1) Expression de y. Dans le triangle BCA on a :

$$y = \frac{1}{2} BM \times MN$$

$$BM = x \quad MN = CM \times \frac{BA}{CB} = (2-x) \times \frac{3}{2}$$

$$y = 1,5 x (2-x) = -1,5 x^2 + 3x \quad (0 \leq x \leq 2)$$

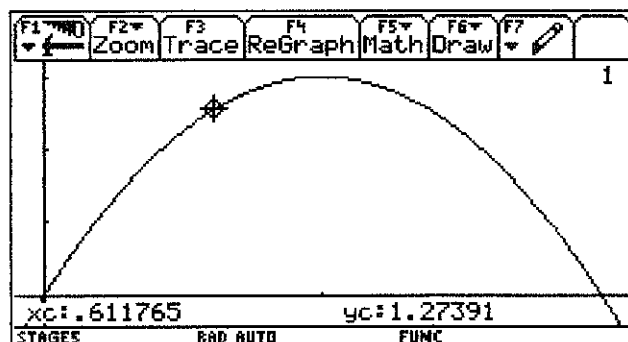
2) Représentation graphique d'après la formule.

Dans l'éditeur graphique on peut maintenant entrer l'expression de y et faire tracer y1 ; on pourrait s'assurer de la concordance de ce tracé avec la courbe obtenue point par point au paragraphe V.

Sur cette représentation graphique on pourra examiner les questions suivantes :

- *ensemble de définition
- *maximum
- *minimum
- *sens de variation
- *équation y = valeur donnée
- *le rectangle peut-il être un carré ?

*distinctions entre valeurs exactes obtenues par des calculs et valeurs approchées fournies par le tracé ou la calculatrice.



GEOMETRIE AVEC TI92

I. Un lieu géométrique

On donne deux points fixes A et B et une constante R réelle strictement positive et différente de 1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que

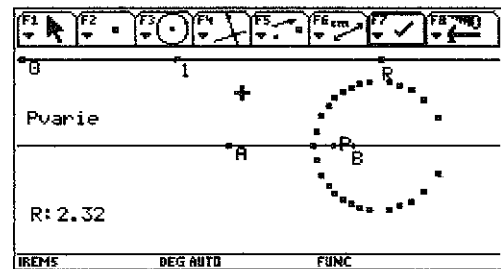
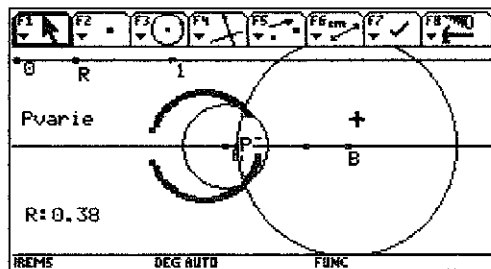
$$\frac{MA}{MB} = R.$$

1°) Préparation de la calculatrice

Pour disposer d'une valeur R variable, on commence par construire une échelle : sur une droite (en haut de la figure) on place 2 points fixes déterminant une unité, et un point R variable ; on fait apparaître le quotient des longueurs des segments d'origine 0, ce qui fournit une valeur pour R que l'on fait varier en déplaçant le point R «avec la main».

On trace ensuite la droite (AB) (fixe) sur laquelle on place le point P variable puis l'homothétique P' de P dans $\text{Hom}(B, R)$; on construit le segment BP' et on trace (par F4-8-Compas) le cercle de centre A et de rayon BP' qui coupe le cercle de centre B et de rayon BP en deux points M et M' du lieu cherché. En effet : $MA/MB = BP'/MB = kMB/MB = k$.

La TI92 possède une fonction de traçage d'un lieu géométrique, mais on obtient ici un tracé trop fragmentaire. Il est préférable, en déplaçant le point P et en conservant la trace des points M et M' , de montrer en classe, avec la rétro - projection, le cercle cherché. On voit ci-dessous deux cas, avec $R=0.39$ et $R=2.32$; à gauche on a laissé les cercles permettant la construction point par point, à droite on a effacé ces cercles.



2°) Utilisation pédagogique

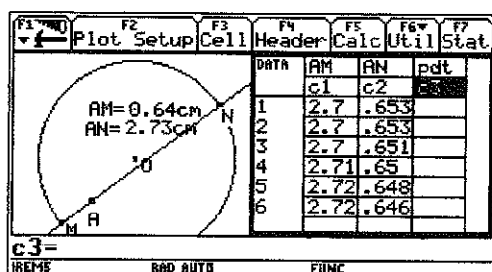
On peut utiliser ces images préparées à l'avance comme une recherche expérimentale ou comme une confirmation des calculs (Lieu géométrique au programme en TS). On sait que, pour $R \neq 1$, le lieu est le cercle de diamètre $[UV]$, U et V étant respectivement les barycentres de $\{(A,1),(B,R)\}$ et $\{(A,1),(B,-R)\}$.

II. Puissance d'un point par rapport à un cercle

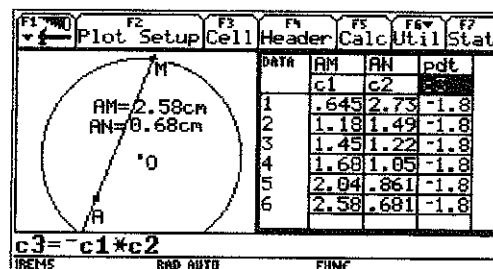
On donne un cercle C de centre O et un point A non situé sur le cercle. Une sécante variable passant par A coupe C en deux points M et N ; étudier le produit $p = \overline{AM} \times \overline{AN}$.

1°) Préparation de la calculatrice

On construit un cercle C et un point A intérieur à C (on peut aussi bien le prendre extérieur). On place le point variable M sur C et le deuxième point, N , d'intersection de (AM) avec C . En utilisant la commande «distance» (F6) on fait apparaître les valeurs de AM et AN ; avec «visionner les données» (F8-B) on affiche à droite de l'écran un tableau dans lequel on fait entrer par couples associés AM et AN (F6 -7 Recueillir des données-2 Définir les entrées - 1 Mémoriser des données). Avec la commande « F7-3 Animation » le point M se met en mouvement sur le cercle tandis que les colonnes « AM » et « AN » se remplissent (on échange les écrans actifs par « 2nd-APPS ») ; on peut aussi déplacer M sur C « manuellement ».



DATA	AM c1	AN c2	pd
1	2.7	.653	
2	2.7	.653	
3	2.7	.651	
4	2.71	.65	
5	2.72	.648	
6	2.72	.646	



DATA	AM c1	AN c2	pd
1	.645	2.73	-1.8
2	1.18	1.49	-1.8
3	1.45	1.22	-1.8
4	1.68	1.05	-1.8
5	2.04	.861	-1.8
6	2.58	.681	-1.8

Le tableau de gauche donne quelques valeurs associées de AM et AN .

Le tableau de droite fournit quelques autres valeurs et le calcul du produit $-AM \times AN$, le signe - étant introduit pour un point A intérieur au cercle.

2°) Utilisation

La notion de puissance d'un point par rapport à un cercle n'étant pas du programme, on présentera cet exercice comme activité ou Travail Dirigé. Le but de la présentation par la calculatrice est de suggérer (fortement !) que le produit p est constant, c'est à dire indépendant de la sécante (MN).

Dans un deuxième temps on fera chercher une démonstration et trouver la valeur de la constante : avec le produit scalaire, on a, en notant M' le point diamétralement opposé à M :

$$\rightarrow \rightarrow$$

$$p = \overline{AM} \cdot \overline{AM'}$$

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

$$p = (\overline{AO} + \overline{OM}) \cdot (\overline{AO} - \overline{OM})$$

$$p = \overline{OA}^2 - r^2$$

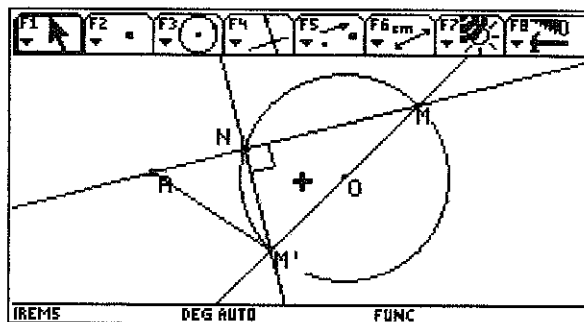


figure avec A extérieur

III. Homothétie d'une parabole

1°) Exercice

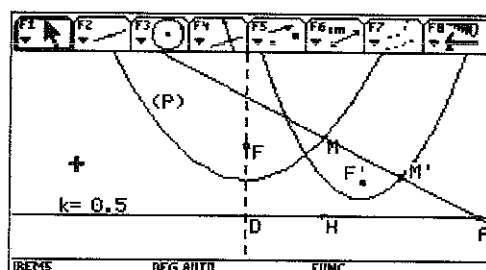
On donne une parabole (P) de foyer F , de directrice D , et un point A de D . Déterminer et construire l'image de (P) par l'homothétie de centre A et de rapport $k=0.5$.

2°) Préparation de la calculatrice

a) Construction de la parabole (P) . On place la droite D , le foyer F , un point A sur D . On choisit ensuite un point H variable sur D ; on trace la médiatrice de $[FH]$ et la perpendiculaire à D par H dont on détermine le point M d'intersection qui est un point de (P) . Pour construire (P) on peut utiliser la commande « F4 -A Lieu -pointer M puis H » ; le tracé est amélioré en choisissant dans la commande « $\diamond$ (diamant)-F(format) - # Objets d'un lieu = 60 ».

b) Construction de la transformée de (P)

Avec « F5-3 homothétie » on construit l'image M' de M , F' image de F ; on peut tracer (MM') pour mieux voir. Il reste à faire apparaître le lieu de M' par « F4-A-pointer M' puis H ». On obtient apparemment une autre parabole.



3°) **Etude mathématique.** Après l'étude graphique expérimentale précédente, il sera facile, en utilisant le projeté H' de M' sur D , de montrer que :

$$\frac{M'F'}{M'H'} = \frac{MF}{MH} = 1 \quad (\text{conservation des rapports de distance}).$$

L'image de (P) par l'homothétie $(A, 2)$ est la parabole de foyer F' , de directrice D .

On peut modifier le rapport d'homothétie et le centre ; on démontre aussi facilement que la transformée est la parabole ayant pour foyer l'homothétique de F et pour directrice la droite homothétique de D .

IV. Constructions de coniques

1°) Objet de la manipulation

Présenter la construction de quelques coniques définies selon le programme de TS par foyer, directrice et excentricité

2°) Préparation de la calculatrice

On prépare d'abord une échelle pour faire varier l'excentricité ; sur une droite placée en haut de l'écran on définit une unité OI et on place un point variable V , le rapport OV/OI exprimé comme réponse R sera l'excentricité $e = R$ (OV et OI sont obtenus par F6-1 et le quotient en passant au calcul par F6-6).

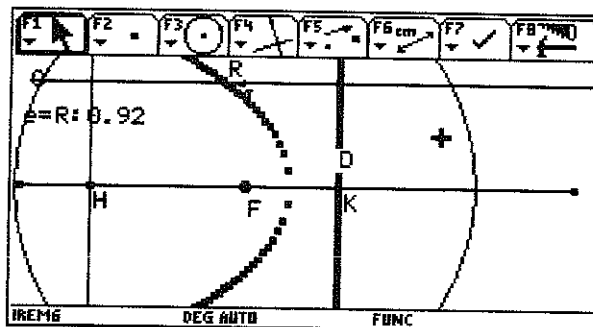
On met en place l'axe focal en traçant un segment $[UV]$ qui limitera les déplacements d'un point variable P sur cet axe ; on place aussi sur l'axe le pied K de la directrice et on trace

la directrice perpendiculairement à (UV). Pour obtenir des points vérifiant $MF/MH = e$, on construit les points d'intersection de la perpendiculaire T à (UV) en P avec le cercle Γ de centre F et de rayon $e \times KP$. La construction de ce dernier cercle se fait de la manière suivante : construire P' homothétique de P dans Hom (K, $e=R$) puis le segment [KP'] enfin par F-4 (compas) le cercle de centre F et de rayon KP' . Les points d'intersection M et M' (lorsqu'ils existent) vérifient $MF/MH = KP'/MH = e$.

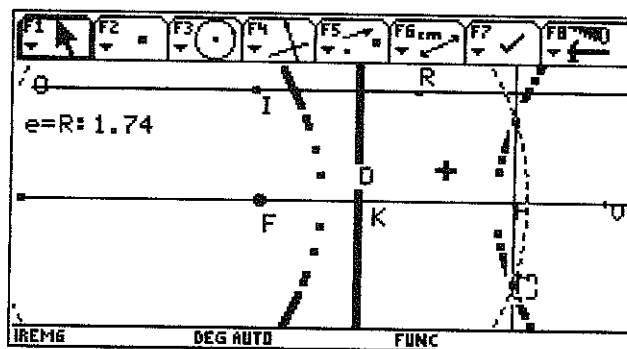
3°) Constructions

La commande F4 -lieu géométrique ne donne pas ici un bon tracé, même avec un grand nombre de points. Il vaut mieux utiliser F7- 2 (Trace On/Off), pointer les points M et M' puis diriger le tracé en déplaçant P (noté H sur la figure ci-contre). On obtient la conique sous forme de points épais et espacés ; on a marqué aussi en traits épais la directrice D et le foyer F. Une certaine irrégularité est inévitable, particulièrement au voisinage de l'axe focal ; pour alléger la figure, tous les points n'ont pas leur nom.

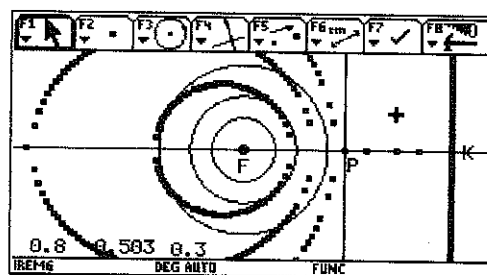
Il n'est pas facile avec ces procédures de faire tracer plusieurs coniques sur la même figure ; d'autre part les courbes sont seulement partiellement visibles.



ellipse $e=0.92$



hyperbole $e = 1.74$



trois ellipses

Pour montrer 3 ellipses sur une même figure, on n'a pas utilisé l'échelle [OI] mais employé les excentricités 0.8, 0.503, 0.3.

V. Homothéties

1°) Préparation de la calculatrice

a) Construction d'une échelle.

Dans l'écran géométrie (APPS-8Géométrie) on ouvre d'abord un fichier (par exemple, homothk) puis l'option F8-9Format (ou ♦F) dans laquelle on valide Systèmes d'axes - Rectangulaires-Enter ; avec le pointeur en forme de main, on descend verticalement l'origine du repère puis on augmente la longueur de l'unité. Pour fixer en bas de l'écran l'axe xx' on place dessus deux points (aux extrémités de préférence) et on construit la droite passant par ces points. On place sur l'axe un point K dont on demande les coordonnées (par F6-5-enter) ; enfin, on sélectionne l'ordonnée et on l'efface. Par ♦F on revient à l'option Systèmes d'axes OFF que l'on valide.

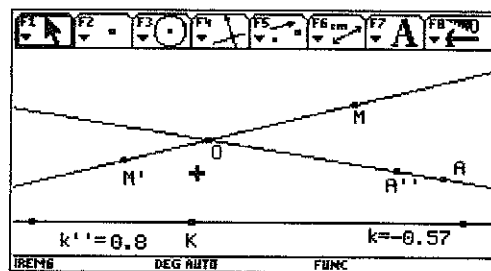
Pour vérifier le bon achèvement de cette construction de l'échelle des valeurs de k , on fait déplacer K sur son axe modifiant ainsi la valeur affichée k .

b) Mise en place de l'homothétie. On place d'abord un point O, centre de l'homothétie (par F2-1-pointer-enter) ; soit un point M quelconque, son homothétique par $\text{hom}(O,k)$ est construit par F5-3 en suivant les instructions.

2°) Utilisations

a) Homothéties de centre O.

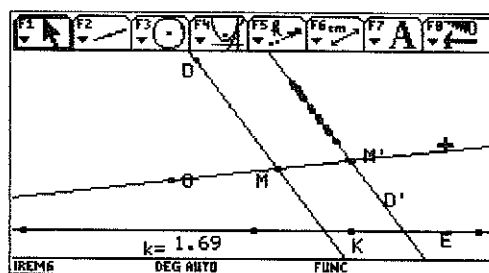
Le point O étant fixe, on peut faire varier M (d'où M') pour une valeur fixée de k , ou faire varier k ; pour montrer une autre homothétie de rapport différent (A et A'' avec $k = 0.8$) on écrit à part, par F7-6, le nouveau rapport 0.8 et on revient à $\text{hom}(O,0.8)$ par F5-3



b) Homothétique d'une droite.

Soit une droite D fixe (F2-4) et une valeur k choisie comme rapport d'homothétie ; on place un point M variable sur D (F2-2) et on construit son image M' par $\text{hom}(O,k)$. On peut faire tracer l'image D' de D par F4-A en pointant M' dont on veut le lieu puis M qui pilote la construction. On peut par F7-2-pointer M' suivre les positions de M' sur D' point par point ou par animation (F7-3- main tendant le ressort).

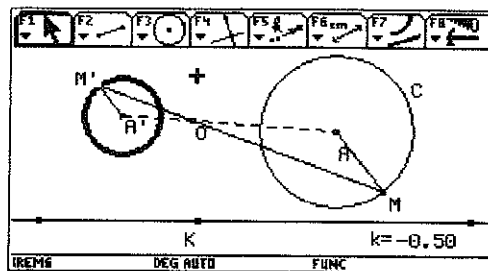
En faisant varier K, c.à.d k , on voit (avec un peu de patience) D' se déplacer.



On peut aussi, k étant fixé, faire varier D

c) Homothétique d'un cercle.

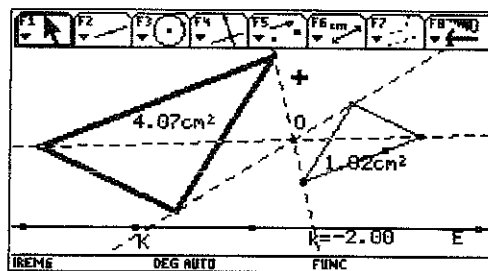
Par F3-1 on trace un cercle C de centre A sur lequel on place par F2-2 un point M variable ; on construit ensuite par F5-3 le cercle C' homothétique dans $\text{hom}(O,k)$, ainsi que l'homothétique M' de M . Ayant tracé les segments $[AM]$ et $[A'M']$ on pourra en déplaçant M sur C (par le curseur main) voir tourner conjointement ces segments.



Homothétie de rapport $k = -0.50$

d) Homothétique d'un triangle.

On détermine un triangle par F3-3 et on construit son image par $\text{hom}(O,k)$ en utilisant F5-3 puis les instructions. On peut vérifier la propriété des aires de surfaces homothétiques en faisant calculer par F6-2 les aires des 2 triangles : le rapport des aires est, à quelques décimales près, k^2 .



Homothétie de rapport $k = -2$

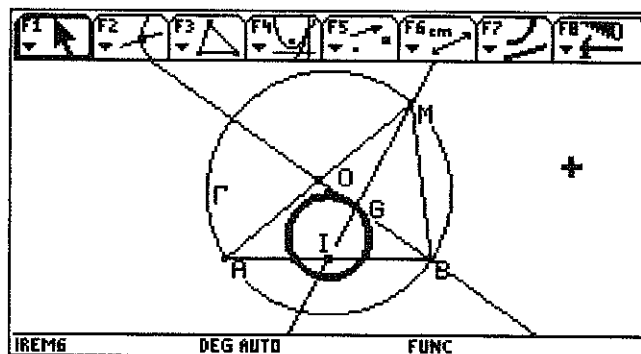
3°) Un exercice simple

Soit un cercle Γ de centre O et une corde fixe $[AB]$ de ce cercle. Un point M variable décrit Γ . Déterminer et construire l'ensemble des isobarycentres G de ABM .

a) Préparation de la figure

On trace par F3-1 le cercle Γ de centre O , on place ensuite les points A, B, M sur Γ (par F2-2), les milieux de $[AB]$ et $[AM]$ (par F4-3) puis l'isobarycentre G à l'intersection des 2 médianes (par F2-3).

b) Construction du lieu. Par F4-A-M variable-pointer G , on fait apparaître le lieu de G (renforcé en gras par F78). On conjecture qu'il s'agit d'un cercle.



c) Résolution de l'exercice

$$\begin{array}{ccc} \rightarrow & & \rightarrow \\ IG & = & 1/3 \quad IM \end{array}$$

On passe de chaque point M à chaque point G par l'homothétie de centre I et de rapport $1/3$. On a démontré le résultat apparent sur la figure : l'ensemble des points G est le cercle de centre O' et de rayon $R/3$.

(R étant le rayon de Γ et O' tel que $IO' = 1/3 \quad IO$.)

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

<http://www.irem-paris7.fr.st/>

- Demander notre catalogue en écrivant à

**IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05**

TITRE :

La calculatrice au lycée.

AUTEUR (S) :

Jeulin, Chantal

Proteau, Roger

Sperendio, Danièle

RESUME :

Complément de la brochure n°85 “ la calculatrice en 1ère et Terminale Scientifique ” avec des modèles de calculatrices plus récentes.

MOTS CLES :

Calculatrices-mathématiques

Editeur : IREM

Université PARIS 7-Denis Diderot

Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE

Case 7018 - 2 Place Jussieu

75251 PARIS Cedex 05

Dépôt légal : 1997

ISBN : 2-86612-133-3