DANS NOS CLASSES

Différences finies et Sommation de séries par une méthode de Leibniz

ou

la naissance d'une vocation mathématique

Martine Bühler, Anne Michel-Pajus

En 1672, Gottfried Wilhelm Leibniz, arrive à Paris. Agé de 26 ans, il est chargé par le prince de Hanovre d'une mission diplomatique. Bachelier à seize ans, il a déjà beaucoup étudié (en Allemagne), mais il s'intéresse plus à la logique et à l'invention d'une machine à calculer qu'aux mathématiques. Il rencontre à Paris Huygens, la gloire scientifique de l'époque, et lui parle d'une découverte, fondée sur des réflexions logiques, qui lui semble intéressante pour calculer les sommes de séries (avec une notation différente, sans indices, il s'agit du résultat de la question 3a).

> Il observait que, à partir de ceci : "A = A" ou à partir de son équivalent : "A - A = 0" (comme on peut le voir au premier abord, sans aller plus loin), on tire une très belle propriété des différences à savoir :
>
> $$A \underbrace{-A+B}_{+L} \quad \underbrace{-B+C}_{+M} \quad \underbrace{-C+D}_{+N} \quad \underbrace{-D+E}_{+P} - E = 0$$
>
> Si maintenant, on pose que A, B, C, D, E sont des quantités croissantes et que les différences des deux quantités consécutives B-A, C-B, D-C, E-D, sont appelées L, M, N, P, il s'ensuit alors que :
>
> $$A + L + M + N + P - E = 0, \qquad \text{ou :} \qquad L + M + N + P = E - A,$$
>
> c'est-à-dire que la somme des différences entre termes consécutifs (quel que soit le nombre) est égale à la différence entre les deux termes extrêmes.

Huygens décide alors de tester le jeune homme, et lui demande de calculer la somme de la série $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+etc$ (série du 2 e). Leibniz réussit brillamment, généralise la méthode et encouragé par ce succès, décide de se mettre sérieusement aux mathématiques!

C'est cette méthode que nous vous présentons ici.

A partir d'une suite u, de terme général u_n, on peut définir une suite du par :

$(du)_n = u_{n+1} - u_n$, nommée suite des différences premières associées à u

1) A partir d'une suite u, de terme général u_n, on peut définir une suite du par :

$du_n = u_{n+1} - u_n$, nommée suite des différences premières associées à u

Déterminer du dans les cas suivants :

a) $u_n = n$

b) $u_n = n^2$

c) $u_n = n^3$

d) $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

e) $u_n = \dfrac{1}{n}$

2) A partir d'une suite u, de terme général u_n, on peut définir une suite Su par :

$Su_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$, nommée suite-somme associée à u.

Déterminer Su dans les cas suivants :

a) $u_n = a$ (où a est une constante réelle)

b) $u_n = 2n + 1$

c) $u_n = q^n$ si $q \neq 1$

d) $u_n = n$

e) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n>0$ et $u_0 = 0$ (On peut utiliser la question 1.e) . Reprendre cette question après avoir traité la question 3. a).

3) Montrer que :

a) $(S(du))_n = u_{n+1} - u_0$. Sous quelle forme ce résultat apparaît-il dans l'encadré de l'introduction?

b) $(d(Su))_n = u_{n+1}$

4) Lire le texte suivant :

> Il [Leibniz] considéra que n'importe quel terme d'une suite pouvait, la plupart du temps, être désigné par une notation générale, par laquelle on peut se référer à une suite simple. Par exemple, si le terme général de la suite des naturels 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, etc. est appelé x, on appellera le terme général de la suite des carrés x.x ou de celle des cubes x^3 etc. ; le terme général de la suite des nombres triangulaires, c'est-à-dire que 0, 1, 3, 6, 10, etc. s'écrira $\dfrac{x(x+1)}{1.2}$, ou $\dfrac{xx+x}{2}$.♥
>
> N'importe lequel des nombres pyramidaux : 0, 1, 4, 10, 20, etc. ... s'écrira $\dfrac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}$, soit $\dfrac{x^3+3xx+2x}{6}$, et ainsi de suite. Et de cette façon, au moyen d'un calcul général, on peut trouver la suite

♥ Note : si x est la suite des naturels, sa suite-somme est la suite des nombres triangulaires, la suite-somme de celle-ci est la suite des nombres pyramidaux, etc.. Leibniz note ainsi x ce que nous désignerions plutôt par n.

obtenue par différence d'une suite donnée, et quelquefois aussi la suite obtenue par somme [d'une suite donnée], lorsqu'elle est exprimée numériquement,

Par exemple, xx est un nombre carré, le carré qui lui est immédiatement supérieur est xx + 2x + 1, la différence des deux est 2x + 1, c'est à dire que la suite des nombres impairs est la " suite-différence " des nombres carrés. En effet, si x désigne 0, 1, 2, 3, 4, etc., 2x + 1 désigne 1, 3, 5, 7, 9. De la même manière, la différence entre x^3 et $x^3 + 3xx + 3x + 1$ est $3xx + 3x + 1$, c'est pourquoi tel est le terme général de la suite-différence de la suite des cubes.

5) Montrer que :

Si u et v sont deux suites : $d(u + v) = du + dv$

Si u est une suite et k un réel quelconque : $d(ku) = k\,du$

6) Soit u la suite numérique réelle définie par $u_n = \alpha\, n^3 + \beta\, n^2 + \gamma\, n + \delta$, où $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sont des constantes réelles.

a) Déterminer du_n.

b) Soit v définie par $v_n = n^2$. Comment faut-il choisir α, β, γ, δ pour que $du = v$?

Ceci implique-t-il que $Sv_n = u_{n+1}$? (on peut utiliser 3.a))

Déterminer δ pour que $Sv_n = u_{n+1}$. En déduire une expression rationnelle de $1^2+2^2+\ldots+n^2$ en fonction de n.

Lire la suite du texte :

Par conséquent, si la valeur du terme général d'une suite donnée peut s'exprimer à l'aide d'une variable x, qui ne figure ni au dénominateur, ni en exposant, il semblait que l'on pût toujours trouver la suite-somme d'une suite donnée. Par exemple, si l'on cherche la somme des nombres carrés, comme il était certain que la variable x ne pouvait être supérieure à la puissance cubique, l'auteur supposait que son terme général était $z = \ell x^3 + mxx + nx$ où dz doit être xx . Il en résultera $dz = \ell\, d(x^3) + md\,(xx) + n$ (en posant que $dx = 1$). Mais $d(xx) = 2x + 1$ et $d(x^3) = 3xx + 3x + 1$ (d'après ce qui a été déjà trouvé). Donc :

$$\begin{aligned} dz = 3\,\ell xx + 3\,\ell x &+ \ell \\ + 2\,mx &+ m \\ &+ n = xx \end{aligned}$$

donc $l = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + n = 0$ ou $n = \frac{1}{6}$, c'est-à-dire que le terme général de la suite-somme des carrés est : $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$, soit $\frac{2x^3 - 3xx + x}{6}$.

Par exemple, si l'on veut la somme des 9 ou 10 premiers carrés à partir de 1 jusqu'à 81, ou de 1 jusqu'à 100, on prend pour x la valeur 10 ou 11, (nombre immédiatement supérieur à la racine du dernier carré), et $\frac{2x^3 - 3xx + x}{6}$ sera $\frac{2000 - 300 + 10}{6} = 285$, ou $\frac{2 \times 1331 - 3 \times 121 + 11}{6} = 385$.

Il n'est pas beaucoup plus difficile de faire la somme de 100 ou 1000 nombres carrés grâce à cette formule abrégée.

7) Leibniz affirme plus loin:

> En dernier lieu, il vit aussi une manière d'appliquer le calcul différentiel aux suites de nombres quand la variable entre dans l'exposant, comme dans le cas d'une progression géométrique, où, si l'on pose b comme base, le terme général est b^x, en désignant par x les nombres naturels. Donc le terme général de la suite-différence sera :
>
> $$b^{x+1} - b^x = b^x (b - 1)$$
>
> Par conséquent, il est manifeste que la suite-différence d'une progression géométrique donnée est aussi une progression géométrique proportionnelle à la progression donnée. De là, on obtient la somme d'une progression géométrique.

Soit u une suite géométrique de raison b ($b \neq 1$)

a) Ecrire la relation liant u_n et du_n indiquée dans l'encadré précédent.

b) Quelle est l'opération permettant de passer de u à du

c) Quelle est la nature de la suite du ? La suite Su est-elle de même nature ?

d) Déterminer, en utilisant ce qui précède, une expression de Su_n à l'aide de u_{n+1} et u_0.

8) Dans l'extrait suivant, Leibniz donne une méthode permettant de calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, puis lim S_n quand n tend vers $+\infty$. Pour les calculs, il utilise une suite auxiliaire u définie a priori par

$u_n = \frac{e}{bn + c}$, ainsi que la suite du.

Lire le texte suivant, puis expliciter les calculs nécessaires à la démonstration incomplète du résultat sur la limite de S_n et déterminer cette limite.

> Effectivement, soit x = 1 , ou 2, ou 3, etc[42]..; le terme général de la série $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35}$ + etc... est $\frac{1}{4x^2 + 8x + 3}$; on cherche le terme général de la série-somme ; on examine par la méthode la plus simple si on peut l'obtenir sous la forme suivante : $\frac{e}{bx + c}$; on aura :
>
> $$\frac{e}{bx+c} - \frac{e}{bx+b+c} = \frac{eb}{b^2x^2 + b^2x + bc + 2bcx + c^2} = \frac{1}{4x^2 + 8x + 3}$$
>
> En identifiant ces deux formules on obtient :
>
> b = 2, eb = 1, donc : $e = \frac{1}{2}$, $b^2 + 2bc = 8$, soit : 4 + 4c = 8 ou c = 1, et enfin : $bc + c^2 = 3$, ce qui en découle.
>
> Donc le terme général de la série-somme est : $\frac{\frac{1}{2}}{2x + 1}$, soit $\frac{1}{4x + 2}$; or 4x + 2 est le double d'un nombre impair.

42 On remarquera que Leibniz a omis l'étape x = 0