

NOTES D'ECOUTE

G. Monge (1746-1818), J.H. Lambert (1728-1777)

Géométrie pratique, géométrie spéculative.

Roger Laurent

Roger Laurent a eu la gentillesse de nous adresser ce compte rendu d'une conférence qu'il a prononcée à l'Institut Henri Poincaré

La pratique des représentations de l'espace par les hommes de l'art, architectes, peintres, tailleurs de pierre, charpentiers ou géomètres a conduit à deux modes de représentation privilégiés. Il fallait d'une part représenter rigoureusement l'espace afin de construire et communiquer des données par l'ichnographie (projection sur un plan horizontal) et l'orthographie (projection frontale), pour reprendre une expression de Vitruve¹; ce mode de représentation conduira à la géométrie descriptive. D'autre part donner une perception globale de l'espace par la scénographie ou perspective, comme aujourd'hui le permet la photographie, pour soulager l'effort de conceptualisation qu'exigeait le mode descriptif, conduira à la géométrie projective.

A partir de cette double tradition de la représentation s'élaboreront les traités de Géométrie Descriptive et de Géométrie Projective. Une foule de propriétés nouvelles se dégageront de ces géométries.

Représenter l'espace.

Le traitement de ce problème des représentations de l'espace a souvent conduit à l'élaboration de techniques sans liens, développées pour résoudre au coup à coup divers projets de constructions. On va alors assister à une inflation de traités de perspective parmi lesquels certains contiennent en germes les éléments fondateurs de ce qu'on appellera au XIX^{ème} siècle la nouvelle géométrie. Piero della Francesca (1418-1492) par exemple, après Alberti (1404-1472), met en place de manière rigoureuse la technique de construction d'une perspective par points de fuite. Il y a déjà chez Guidobaldo del Monte (1600), la mise en place des ingrédients qui permettront de fonder la

¹ Vitruve M.P. *Les dix livres d'architecture*, d'après la traduction de Claude Perrault de 1673, reprise par André Delmas en 1979, éd. Balland, livre 1, chap. 2, p. 30.

géométrie projective, comme par exemple le concept de point de fuite associé à une direction de droites. Il s'agit d'un traité dans lequel Guidobaldo s'attache à dégager les concepts de base indépendamment de problèmes particuliers. Chez Girard Desargues (1591-1661), un pas décisif sera fait vers cette géométrie spéculative, par l'utilisation de la perspective et des transversales dans ses publications de 1636 et de 1639 et où apparaît pour la première fois la recherche des invariants dans une transformation par une perspective, ce qui fera dire à Michel Chasles à propos du fameux théorème sur l'involution de six points² que " *...le premier inventeur est M. Desargues, un des plus grands esprits de ce temps, et des plus versés aux mathématiques, et entre autres aux coniques* ".

La nouvelle géométrie.

Cette nouvelle géométrie ou géométrie moderne, comme la nommait Michel Chasles³, se caractérise par une autre approche que celle héritée de la géométrie euclidienne et de Descartes. C'est d'abord son caractère général. Quelques principes se dégagent des procédés de construction apparemment différents et les généralisent. C'est ensuite l'économie des calculs algébriques qui disparaissent au profit du raisonnement sur les propriétés des figures⁴. Voilà comment Michel Chasles résume son analyse⁵ sur les travaux de Pascal et de Desargues, membres correspondants de l'Académia Intelligentia animée par le père Marin Mersenne à Paris, avant la fondation de l'Académie des Sciences par Colbert en 1666: "*...écrits où devaient briller le génie inventeur de ce profond géomètre (Pascal), et l'art admirable avec lequel il savait généraliser une première découverte, et en tirer toutes les vérités qu'elle renfermait. Desargues, que Pascal avait pris pour guide, et qui était digne en effet d'un tel disciple, avait aussi écrit sur les coniques, un an auparavant, d'une manière neuve et originale. Sa méthode reposait, comme celle de Pascal, sur les principes de la perspective, et sur quelques théorèmes de la théorie des transversales*". Le caractère spéculatif et le choix de généraliser s'imposent à cette assemblée de gens savants. On sait par contre le conflit qui opposera le fervent disciple de Desargues, Abraham Bosse, nommé à l'Académie de peinture au moment de sa création en 1648 pour y enseigner la perspective, et qui en sera exclu en 1661 pour avoir voulu imposer les principes de géométrie de la perspective aux praticiens qui les refusaient. Cette divergence de points de vue à une époque où le statut de peintre, architecte, tailleur de pierre ou mathématicien est mal défini, fait apparaître la fracture entre théoriciens et praticiens. Souvent sous-jacente dans les écoles, elle sera réduite par la création de corps spécialisés.

On peut se poser la question sur la manière dont s'élabore une science. Deux exemples choisis parmi bien d'autres peuvent servir de support à notre essai pour comprendre la constitution en corps de doctrine d'une discipline. Il y a bien sûr la personnalité, l'équation personnelle des savants mais aussi la structure sociale. Gaspard Monge et Jean-Henri Lambert nous serviront de modèles. Dans ces deux cas, il y a d'abord le pédagogue, l'enseignant soucieux de simplifier et de clarifier mais aussi le chercheur académicien spéculatif qui essaie de

²Michel Chasles .- *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* 1837, p.72.

³Michel Chasles, *Aperçu Historique* , p.66, 90.

⁴Bkouche R.- *Desargues au XIX^e siècle, l'influence d'un livre non lu* , Article IREM de Lille, 1994.

⁵Michel Chasles, *Aperçu Historique* , p.74.

généraliser, de dégager l'essentiel d'une pratique, avec plus ou moins de génie ou de chance. Les traités qui jalonnent cette histoire de la perspective, leur préface, mettent en évidence d'une part l'exposé des techniques, leurs présentations plus ou moins pédagogiques et d'autre part l'effort de synthèse dans le but de dégager les principes essentiels qui vont concourir à constituer ce que nous appelons une théorie ou discipline. Piero della Francesca, Guidobaldo del Monte, Simon Stevin de Bruges, Girard Desargues, Brook Taylor, Monge et Lambert sont plutôt à classer dans la deuxième catégorie.

Les traités. Écoles et Académies. Monge, le professeur, le politique.

Monge enseigne à l'Ecole Royale du Génie de Mézières de 1764 à 1784. C'est après 1765 qu'il résout le problème du défilement, pour les fortifications en particulier. Son cours de Géométrie Descriptive⁶ naît à ce moment là mais restera secret dans cette école militaire. On sait aussi que, sollicité par de nombreuses fonctions publiques et politiques, examinateur de la marine en 1783, puis Ministre de la Marine de 1792 à 1793, il ne consacra pas beaucoup de temps à l'édition de ses travaux. Professeur à l'École Normale de l'An III de la République de janvier à mai 1795, dont il fut un des membres fondateurs, il aura l'occasion de publier, comme ses collègues, son cours de *Géométrie Descriptive*. Ce cours qui est la synthèse rigoureuse de ce que nous avons appelé la première tradition dans un article précédent⁷ se voulait rigoureux et suivi de travaux pratiques, quoique riche en applications à caractère théorique, en particulier pour la démonstration de théorèmes de géométrie plane à partir de figures de l'espace, comme le précise Michel Chasles dans son *Aperçu Historique...* de 1837⁸, "...Le caractère principal des écrits de Desargues était une grande généralité dans ses principes théoriques et dans ses applications, telle que celle qui fait la beauté et le grand mérite de la *Géométrie Descriptive* de Monge". Chasles cite Bosse qui dans ses *Pratiques géométrales et perspectives* fait remarquer que "M. Desargues démontrait universellement, par les solides, ce qui n'est pas l'usage ordinaire de ceux qui se disent géomètres ou mathématiciens" et Chasles de conclure: "Ces mots de Bosse, par les solides, ne signifieraient-ils pas que Desargues employait dans ses démonstrations la considération des figures à trois dimensions, pour parvenir aux propriétés des figures planes? ce qui est aujourd'hui le caractère de l'école de Monge, en géométrie spéculative". Un propos de Chasles qui fera l'objet de discussions⁹, "C'est cet art infiniment utile de déduire d'un seul principe un grand nombre de vérités, dont les Anciens ne nous offrent point d'exemples, qui fait l'avantage de nos méthodes sur les leurs". Nous avons présenté dans l'article cité supra¹⁰ la démonstration du théorème généralisé de Desargues (relatif aux triangles perspectifs de 1648) par cette méthode fondée sur la *Géométrie Descriptive* de Monge. On est ici en présence d'un mathématicien qui à partir d'une pratique dans une école (École Royale du Génie de Mézières) où sont formés des ingénieurs et des architectes, généralise et présente des mémoires à l'Académie des sciences, en 1771 sur les équations aux dérivées partielles pour traiter des surfaces développables,

⁶Monge G.- *Géométrie descriptive*, cf. 3^e éd., 1811, *Des plans tangents et des normales aux surfaces courbes*, p. 49.

⁷Roger Laurent, *La double tradition de la perspective*, Actes Institut suisse, Rome, 1994.

⁸Chasles M.- *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 1837, p. 87.

⁹Ibid., p.73.

¹⁰Roger LAURENT, *La double tradition de la perspective*, Actes Institut suisse, Rome, 1994, fig. 12.

en 1775, un huitième mémoire sur la "Théorie des ombres et des pénombres et des surfaces développables " qui constitue un complément des méthodes de géométrie et de géométrie analytique, en 1776, un mémoire sur la "Théorie des remblais et des déblais " qui complète la théorie eulérienne de la courbure des surfaces. Autant de problèmes concrets qui trouvent ici des solutions au caractère général dans ces publications à l'Académie des Sciences. Cet état d'esprit de Monge sera présent dans ses vues politiques dès 1793 et prendra forme en mars 1794 à la Commission des Travaux Publics dont il fait partie. Cette commission prépare la création d'une Ecole unique d'ingénieurs civils et militaires. Monge propose des cours plus théoriques à l'École Normale de l'an III où l'on forme des professeurs pour les Écoles centrales (les lycées de nos jours) ou encore à l'École Polytechnique.

L'Académicien de Berlin.

Dans un autre cadre, Lambert n'agira pas différemment. On sait que jeune précepteur des enfants de la riche famille Von Salis à Coire en Suisse, il imaginait une machine à perspective, décrite dans une publication de 1752¹¹, véritable outil conceptuel d'aide à la création. Dans ses *Notes et Additions à la Perspective Affranchie de l'embaras du plan géométral* de 1759, les *Anmerkungen und zuzäte*, publiées en 1774, il décrira douze perspectographes, qui, s'ils représentent théoriquement une économie de travail pour dessiner des perspectives, n'en sont pas moins une contribution importante à la géométrie spéculative. Les propriétés utilisées pour ces constructions sont en effet celles de la géométrie des invariants, des transversales, propriétés conservées par projection conique centrale ou par rabattements. Outre ces perspectographes, Lambert publie quinze problèmes de géométrie de la règle qui retiendront entre autre toute l'attention de Michel Chasles dans son *Aperçu Historique*¹²: quand il dit: "Le célèbre Lambert, autre Leibnitz par l'universalité et la profondeur de ses connaissances, doit être placé au nombre des mathématiciens qui, dans un temps où les prodiges de l'analyse occupaient tous les esprits, ont su conservé la connaissance et le goût de la Géométrie et en faire les plus savantes applications". Nous avons souvent décrit ces quinze problèmes de géométrie de la règle¹³ comme éléments importants du passage au projectif. La publication en annexe d'une traduction française de ces problèmes de la géométrie de la règle peut être utile pour les étudiants des Lycées ou des Universités et constituer des éléments de motivation comme ça a été le cas pour les anciens élèves de l'École Polytechnique. Hachette publie en effet en 1807, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, un article où des solutions sont données à ces types de problèmes. Si Lambert, dès 1759 dans son traité de perspective¹⁴ au titre significatif *La Perspective Affranchie de l'embaras du plan géométral*, essaie de dégager les éléments essentiels des pratiques anciennes de la perspective pour résoudre efficacement les problèmes de représentation par des procédés rapides, le transporteur pour les échelles d'angles, les échelles des profondeurs, la méthode d'égaux resections pour construire des perspectives au point de l'œil très éloigné, les méthodes fondées sur la géométrie élémentaire pour résoudre les problèmes de restitutions géométrales à partir

¹¹Roger Laurent, *Essai sur la perspective*, avec trad. Jeanne Peiffer de *Anlage zur Perspektive* de Lambert de 1752, Librairie scientifique A. Blanchard, Paris, 1981.

¹² Chasles M.- *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 1837, p.185.

¹³Cf. note 6.

¹⁴ Jean-Henri Lambert.-*La Perspective Affranchie de l'embaras du plan géométral*, 1759, rééd. Paris, Alain Brieux, 1977.

d'une perspective, il va, en 1774 dans ses *Anmerkungen und zuzäte*, mettre en évidence des propriétés de type projectif à partir de la pratique de la perspective. L'Académicien de Berlin, trois ans avant sa mort et comme une synthèse de ses recherches dans ce domaine, dégage avec une joyeuse alacrité ces problèmes de géométrie de la règle¹⁵ à caractère spéculatif. Quelques années plus tard, en 1813, prisonnier des Russes à Saratov sur les bords de la Volga, Jean-Victor Poncelet profitera de cette captivité et du temps de loisir dont il disposera pour reprendre toutes ces questions dont il publiera plus tard en 1822 les résultats dans son son fameux *Traité des propriétés projectives des figures*, ouvrage utile à tous ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain et qui sera la conclusion, spéculative, avant le colloque d'Erlangen de Félix Klein en 1872, de cette longue histoire des modes de représentations de l'espace.

Que reste-t-il de cette longue pratique?

Des traités, certains pratiques, d'autres plus théoriques, une synthèse concise d'une longue expérience professionnelle, l'exemple passionnant et qui passionne des générations de chercheurs, étudiants ou professeurs, du passage d'une technique des hommes de l'art à une théorie mathématique sans doute obsolète mais riche par ses applications en informatique, en photogrammétrie et en pédagogie de la formation professionnelle.

Roger Laurent ainsi que la rédaction de Mnémosyne tiennent à la disposition du lecteur intéressé une importante bibliographie sur le sujet.

Ecrivez-nous.

Au SOMMAIRE du Numéro 12

Etude Histoire de quelques projections cartographiques

Marie Benedittini

Bonnes vieilles pages Traité de Topographie de L. Puissant

Dans nos classes La mesure du Méridien

¹⁵ Laurent R.- *La place de Jean-Henri Lambert dans l'histoire de la perspective*, avec en annexe une traduction des *Anmerkungen und zuzäte*, ou *Notes et additions*, traduction de J. Peiffer, commentaires de R. Laurent.