INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

27

Octobre 1996

CAHIER DE DIDIREM

Rapports entre habileté calculatoire et "prise de sens" dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire.

Denis BUTLEN & Monique PEZARD
IUFM de Créteil, équipe de Recherche DIDIREM

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

UNIVERSITE PARIS VII - DENIS DIDEROT

Rapports entre habileté calculatoire et "prise de sens" dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire.

Denis BUTLEN & Monique PEZARD
IUFM de Créteil, équipe de Recherche DIDIREM

Notre travail s'inscrit dans une recherche menée depuis déjà plusieurs années ; il vise à compléter et généraliser dans le cadre d'une problématique plus large les résultats obtenus lors d'une première étude sur ce thème [6].

Cette recherche porte sur les liens entre les compétences calculatoires, la construction de représentations d'un problème numérique et le traitement de celui-ci chez des élèves de la fin de l'école élémentaire.
Nous étudions cette question en utilisant le filtre du calcul mental mais aussi en évaluant le poids des variables numériques intervenant dans les problèmes. Nous nous intéressons à l'impact d'une pratique régulière de calcul mental sur l'habileté des élèves à résoudre différents types de problèmes. Nous analysons la résolution de problèmes numériques classiques : nous entendons par là des problèmes faisant intervenir une ou plusieurs opérations facilement reconnaissables par des élèves de fin de cycle trois.
Nous utilisons pour analyser et interpréter les résultats de notre expérience des outils mis au point par la psychologie cognitive, concernant en particulier le fonctionnement des systèmes mnésiques. Toutefois, nous nous intéressons ici à l'étude des liens entre un enseignement intégrant des activités régulières de calcul mental et l'apprentissage de la résolution de problèmes numériques.

Nous nous proposons aussi d'étudier le rôle du maître dans la gestion des activités de calcul mental et plus particulièrement le poids de l'institutionnalisation dans la capitalisation des connaissances et compétences acquises lors de ces activités et dans un éventuel transfert lors de la résolution écrite ou mentale de problèmes.

Cette étude se propose donc de déterminer comment et sous quelles conditions, une pratique régulière de calcul mental peut améliorer les performances des élèves de la fin de l'école primaire lors la résolution de problèmes numériques "classiques".

Dans un premier temps, nous exposons certains résultats de la psychologie cognitive portant sur le fonctionnement des systèmes mnésiques et sur la représentation des problèmes, que nous utiliserons pour interpréter les résultats de notre expérience. Dans un second temps, nous présentons notre problématique et la méthodologie adoptée.
Ensuite, nous exposons nos résultats ainsi que l'interprétation que nous en faisons. Nous terminons par de nouvelles questions soulevées par cette recherche.

I- PROBLÉMATIQUE GÉNÉRALE

1) QUELQUES RÉSULTATS DE RECHERCHE EN PSYCHOLOGIE PORTANT SUR LA MÉMOIRE ET LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

a) Des résultats sur un modèle de fonctionnement de la mémoire

Nous prenons en compte les résultats de travaux que nous avons décrits précédemment dans un article [6] dont voici un extrait :

"Ces travaux [20] semblent montrer que pour une grande part les difficultés rencontrées dans une tâche de résolution de problèmes sont liées aux contraintes de fonctionnement des systèmes mnésiques. Les psychologues distinguent entre mémoire à long terme (MLT) et mémoire à court terme (MCT). Dans une activité de résolution de problèmes, on fait appel à la fois à des connaissances en MLT (propriété, relation, règles générales de déduction, algorithmes...) et à des informations en MCT, considérée alors comme une mémoire de travail (données du problèmes, résultats déjà calculés ...)
D'après J.F. Richard dans [20], tous les psychologues s'accordent pour reconnaître que la capacité de la MCT est limitée. De plus, "il y a compétition entre d'une part, le stockage de l'information et d'autre part l'exercice d'activités cognitives non automatisées qui peuvent se faire difficilement sans contrôle conscient et éventuellement peuvent s'accompagner d'une verbalisation."
Pour l'instant, les psychologues ne peuvent que formuler des hypothèses pour expliquer cette concurrence entre activités de stockage et activités de traitement : la MCT étant très labile, elle devrait, pour ne pas être perdue, être entretenue par une activité de révision périodique dont la

répétition mentale serait une forme. Cela interdirait donc d'exécuter des traitements cognitifs complexes dans le même temps.
Les limitations de la MCT ne sont pas sans effets sur la résolution de problèmes : ces effets peuvent être divers :
- difficulté dans la compréhension de l'énoncé : si le déchiffrage du texte n'est pas automatisé, il peut constituer une charge mentale importante et perturber ainsi le stockage en mémoire de l'information
- défaut de prise en compte de certaines données : il peut se traduire par l'oubli de résultats antérieurs, mais aussi par une restriction des possibles à considérer
- perte de contrôle dans l'exécution de l'algorithme de résolution, dans le cas où il serait complexe.
Comment surmonter ces limitations ? J.F. Richard pense que l'on peut développer des stratégies exigeant une moindre charge en mémoire par exemple à l'aide de représentations imagées. (...)

M. Fayol dans [13] reprend l'idée de compétition dans la MCT à propos de deux catégories de calculs (définies par G. VERGNAUD) : le "calcul numérique" renvoyant aux opérations classiques et le "calcul relationnel" concernant les opérations mentales nécessaires à la saisie des relations en jeu.
Ces deux catégories de calculs sont-elles indépendantes ? Les travaux de J.P. Fischer [14] et surtout ceux de F. Conne cités par M. Fayol ne semblent laisser aucun doute sur cette question : les mêmes problèmes (à "calcul relationnel invariant") présentés en faisant varier les valeurs numériques entraînent une baisse de performances (liée à l'accroissement de la taille des nombres) mais surtout des changements dans la représentation du problème.
M. Fayol cite alors plusieurs auteurs postulant l'existence d'un espace mental assimilé à la MCT ou à la mémoire de travail. Cet espace mental total disponible croîtrait ou non avec l'âge. On aurait l'équation suivante :

$ET = ES + EO$

ET : espace de traitement total

ES : espace de stockage des données et de construction de la représentation associée à un problème

EO : espace requis pour les opérations.

Dès lors, si ES est très important il reste peu de place pour EO. Inversement, si la complexité des opérations mobilise une part importante pour EO, il restera peu de place pour le "calcul relationnel" et la compréhension de la structure du problème en souffrira.
Selon les auteurs il y a deux interprétations possibles : soit ET augmente avec l'âge selon un processus de maturation, soit ET reste constant (au moins à partir de six ans), ce serait alors une automatisation progressive des opérations qui entraînerait une baisse de la place prise par EO.
Dans les deux cas, c'est toujours ES qui est bénéficiaire, permettant ainsi un meilleur stockage des données et une progression dans la construction des représentations."

b) Une définition de la représentation des problèmes

Nous retenons comme définition de la représentation d'un problème celle proposée par J.F. Richard dans Psychologie Française n°29 : " *un problème est défini par trois catégories d'éléments : la situation initiale, la situation terminale ou but à atteindre, les transformations (matérielles ou symboliques) permises pour y parvenir. La représentation du problème est l'interprétation que le sujet se donne de ces différents éléments.* "

c) La question de l'allégement de la charge en mémoire de travail lors de la résolution de problèmes

Un certain nombre de recherches en psychologie cognitive portent sur la question suivante : sur quels éléments peut-on agir afin d'alléger la charge en mémoire de travail lors de la résolution de problèmes ?

Dans [11], M. Fayol cite un certain nombre d'études (de psychologues américains) portant sur les différentes modalités possibles de présentation d'un problème additif. La présence de matériel "physique" ou "manipulatoire" augmente les performances des élèves (enfants de 6/7 ans).
Il en est de même dans le cas d'un énoncé de problème présenté sous forme partiellement ou totalement imagée (enfants de 9 à 12 ans). Ce support faciliterait le traitement sémantique des données. De plus, l'auteur relève un progrès plus net des performances chez les "mauvais" lecteurs. Il interprète ce phénomène de la façon suivante : les illustrations soulageraient la charge cognitive des mauvais lecteurs en diminuant le recours à la mémoire de travail.

De façon plus générale, pour surmonter les limitations de la M.C.T., Jean-François Richard [20] propose de développer des stratégies exigeant une moindre charge en mémoire. En particulier, citant M.Denis, il considère que les représentations imagées seraient sûrement un moyen efficace pour y parvenir. Il donne à cela deux raisons : la première est que l'image assure, d'une certaine façon, un codage supplémentaire de l'information. Celle-ci, conservée au terme d'une activité d'imagerie, serait plus facilement accessible, à court terme comme à long terme, qu'une information purement verbale. La seconde raison est que la représentation imagée relève principalement du registre visuel et se trouve donc "moins sujette aux effets de compétition dus à l'exercice simultané d'activités cognitives non automatisées". Dans [9], M.Denis considère qu'il est vraisemblable que, dans le traitement d'un problème, "une activité d'imagerie appropriée est en mesure de donner un surcroît de disponibilité aux représentations mentales des données du problème". Mais il définit aussi les limites de l'utilisation de représentations imagées dans la résolution de problèmes. En effet, l'efficacité de l'imagerie visuelle dépend de la nature du problème. De plus, sa mise en oeuvre "prend du temps". Enfin, il faut tenir compte du degré "naturel" de développement des capacités d'imagerie chez l'individu. Selon Piaget, ce développement est en effet lié à l'évolution cognitive générale de la personne.

D'autres travaux [11] mettent en évidence l'impact des formulations des énoncés de problèmes sur les performances globales des élèves. Par exemple, l'ordre de succession chronologique ou non des faits relatés, l'ordre de présentation des informations, en particulier la place de la question et enfin la formulation plus ou moins explicite ont des incidences sur les performances des élèves et plus précisément provoquent des changements de procédures de résolution. M. Fayol explique ces résultats expérimentaux par le biais de la représentation du problème construite par le sujet. Selon lui, la construction de cette représentation se trouverait sous la dépendance de deux facteurs : d'une part, le recours plus ou moins facile au mime de l'action et d'autre part, la familiarité plus ou moins grande avec le type de texte de l'énoncé. M. Fayol considère que le sujet se construit une représentation globale du problème numérique de type "schéma" auquel sont associées des procédures. Cela l'amène à distinguer les sujets "novices" des sujets "experts". Les premiers ne disposant pas de schéma en MLT doivent stocker en MCT les informations du problème et en élaborer une représentation globale. Dès lors, il y a risque de surcharge en mémoire de travail. Au contraire, les seconds, à la lecture de l'énoncé du problème, peuvent sélectionner et activer en mémoire le "schéma" adéquat.

2) PROBLÉMATIQUE DE LA RECHERCHE

Si nous retenons le modèle de fonctionnement des systèmes mnésiques décrit ci-dessus, nous pouvons admettre que pour augmenter la capacité des élèves à résoudre des problèmes, on peut soit réduire l'espace des opérations, soit agir sur l'espace correspondant au stockage des données et à la construction de représentations associées à un problème (au sens de J.F. Richard).
De même, nous admettons que, dans la résolution d'un problème, plus l'espace requis pour les opérations est réduit, plus l'espace mental mobilisé par le stockage des données, la mise en oeuvre d'un "calcul relationnel" et la reconnaissance du modèle est important. Ainsi, la réduction de l'espace requis pour les opérations devrait permettre d'accroître la capacité des élèves à reconnaître le modèle sous-jacent, à mettre plus aisément en oeuvre les opérations nécessaires à la résolution du problème.

Au cours de la résolution d'un problème numérique classique, nous distinguons deux types d'activités distinctes mais en étroite relation. Le premier type d'activités est constitué d'une prise d'informations, du stockage de celles-ci et de la mise en œuvre par l'élève d'un processus plus ou moins automatisé l'amenant à reconnaître ou à construire le modèle[1] mathématique associé au problème. Ce type d'activités relève de l'espace ES de stockage des données et de construction de la représentation du problème. Le second type d'activités est constitué par le traitement purement technique et calculatoire des données numériques. Il relève donc de l'espace EO requis pour les opérations.

Nous pensons que les compétences requises par ces deux types d'activités sont liées. Nous considérons que la reconnaissance de l'opération intervenant dans la résolution du problème et l'habileté calculatoire de l'élève dépendent l'une de l'autre. En effet, pour qu'il puisse se faire une idée des différentes transformations à effectuer sur les données du problème, l'élève doit disposer de capacités calculatoires suffisantes. Nous pensons donc qu'il existe une dialectique entre prise de sens et habileté calculatoire lors de la résolution de problèmes numériques.

Pour étudier ces interactions, nous proposons des situations construites selon deux axes de recherche : accroître l'espace mental mobilisé pour le stockage des données et la construction de représentation du problème, réduire l'espace requis pour les opérations.

Comment agir sur l'espace correspondant au stockage des données et à la construction de représentations associées à un problème ?

Nous avons travaillé la question de l'impact du calcul mental sur l'évolution des procédures des élèves à propos de la résolution mentale du problème du "jeu de l'autobus"[2] et lors d'une première étude faite sur le rôle des "petits nombres" [6].

Nous avons montré qu'un jeu sur les variables numériques mis en oeuvre lors de la résolution mentale de problèmes du type "jeu de l'autobus" permet de faire évoluer les procédures des élèves et de les optimiser . Cela favorise le passage de procédures de type "état-transformation-état" à des procédures faisant intervenir des compositions de transformations [6].

Les recherches en didactique portant sur les variables d'une situation laissent penser que la taille des nombres dans un problème est souvent un facteur de modification des procédures de résolution mises en oeuvre.
Dans nos travaux précédents [6], nous avons étudié le rôle joué par des "petits nombres" dans la compréhension de la structure de problèmes faisant intervenir le calcul du cardinal d'un produit cartésien de trois ensembles. Nous avons montré que la familiarisation avec le problème dans le cas de petits nombres ne débouche que sur une recherche exhaustive de tous les éléments du produit cartésien. Pour dépasser cette procédure additive, trop coûteuse à mettre en oeuvre dans le cas de "grands nombres", il semble nécessaire d'adopter une progression permettant de surmonter les difficultés liées à la structure du problème d'une part, à la taille des nombres d'autre part. Nous avons souligné l'efficacité du dispositif basé sur le schéma suivant : problème complexe faisant intervenir le produit de trois ensembles de cardinaux assez grands - simplification éventuelle (en cas d'échec massif des élèves) de structure par réduction du nombre d'ensembles du produit cartésien - simplification éventuelle portant sur la taille du cardinal de ces ensembles - retour au problème initial.
Ces résultats se retrouvent lors de la résolution d'autres problèmes multiplicatifs, en particulier les problèmes de combinatoire.
La réduction de la taille des variables numériques intervenant dans un problème multiplicatif à structure complexe n'est donc pas suffisante pour reconnaître le modèle. Il faut aussi construire un dispositif initialisant la reconnaissance du modèle dans le cas de "grands nombres".

---

(1) Reconnaître le modèle mathématique revient ici à reconnaître l'opération arithmétique (addition, soustraction, multiplication, division)

(2) énoncé de problème du type : "*Dans un autobus, il y a n personnes ; au premier arrêt a personnes montent, au deuxième arrêt b personnes descendent. Combien y-at-il de personnes dans l'autobus quand il repart après ce dernier arrêt ?*"

Nous poursuivons notre recherche sur différentes modalités d'enseignement permettant d'enrichir et de faire évoluer les procédures de résolution des élèves en travaillant la question suivante : un entraînement régulier en calcul mental a-t-il une influence sur la nature des procédures des élèves lors de la résolution écrite de problèmes numériques simples ou plus ouverts ?

Nous essayons de déterminer dans quelle mesure un entraînement régulier en calcul mental peut faciliter l'exploration des relations existant entre les données d'un problème, favoriser la mise en œuvre de procédures d'essais (éventuellement mentales) au cours de la recherche du problème ainsi que de procédures de contrôle du résultat.

Pour répondre à cette question, nous procédons à des entretiens individuels avec des élèves de l'école élémentaire et du début du collège (6ème et 5ème) ayant bénéficié d'un entraînement au calcul mental ; ces entretiens portent sur la résolution de problèmes numériques moins "classiques" que ceux précédemment étudiés. Leur analyse ne fait pas l'objet de cet exposé car la recherche est encore en cours . Toutefois, les élèves ne semblent pas réinvestir beaucoup certaines compétences acquises en calcul mental, lors de la résolution de problèmes non "classiques".

Comment peut-on réduire l'espace des opérations ?

On peut envisager plusieurs solutions :
- assurer une maîtrise des différentes techniques opératoires et une plus grande mémorisation de faits numériques
- utiliser des "petits nombres" : en effet, dans ce domaine numérique l'automatisation des calculs est plus aisée ; les faits numériques sont plus nombreux et plus disponibles
- permettre par une pratique quotidienne du calcul mental, une plus grande familiarité avec les nombres, une meilleure connaissance et un emploi plus adapté des propriétés des opérations, une automatisation plus précoce des calculs.

Nous nous intéressons dans nos recherches aux deux derniers moyens.

Le poids des variables numériques : influence de la taille des nombres

Nous avons déjà rappelé dans le paragraphe précédent que la réduction de la taille des nombres, si elle constitue dans certaines conditions une aide à la prise de sens, n'est pas toujours suffisante pour permettre la reconnaissance d'un modèle mathématique peu familier.

La pratique régulière du calcul mental

Nous étudions l'impact d'une pratique régulière de calcul mental sur la résolution mentale et écrite de problèmes.

Nous cherchons à tester l'hypothèse selon laquelle une telle pratique diminue le coût des opérations et accroît de ce fait l'espace consacré au stockage des données et à la construction de représentations du problème. Pour cela nous allons comparer les performances d'élèves bénéficiant d'un entraînement régulier en calcul mental aux performances d'élèves suivant un enseignement "standard".

Voici de façon plus précise les questions posées dans cette étude :

1) *À propos de l'écart, dans les performances en résolution mentale et écrite de problèmes, entre les élèves d'une classe pratiquant régulièrement le calcul mental et les élèves d'une classe témoin* :

1-1) Existe-t-il un tel écart lors de la résolution mentale de problèmes ? Lors de la résolution écrite ? La différence est-elle aussi importante dans les deux cas ?

1-2) S'il existe, sur quoi porte cet écart ?

- sur la reconnaissance du modèle
- sur le tri des données
- sur la maîtrise des calculs ?

1-3) Cet écart dépend-il de la structure du problème posé, de sa complexité, du degré de familiarité des élèves avec cette structure ?

2) *À propos des différences de performances entre résolution mentale et résolution écrite des mêmes problèmes numériques "classiques" dans une classe pratiquant régulièrement du calcul mental et dans une classe témoin. :*

2-1) Dans les deux types de classes, existe-t-il un écart de performances entre résolution mentale et écrite de mêmes problèmes numériques "classiques" ?

2-2) S'il existe, sur quoi porte cet écart ?
- sur la reconnaissance du modèle
- sur le tri des données
- sur la maîtrise des calculs ?

2-3) Cet écart dépend-il de la structure du problème posé, de sa complexité, du degré de familiarité des élèves avec cette structure ?

2-4) S'il existe, l'écart est-il de même importance pour la classe entraînée et pour la classe témoin ? Porte-t-il sur les mêmes types d'erreurs ?

Dans le cas de la classe témoin, l'écart de performances entre résolution mentale et écrite doit nous permettre d'évaluer les conséquences d'un recours à l'écrit en résolution de problèmes, indépendamment de toute pratique régulière de calcul mental.
Dans une classe entraînée, une comparaison similaire doit nous permettre de préciser l'impact d'une pratique régulière de calcul mental par rapport à un recours à l'écrit. Qu'apporte une telle pratique dans les rapports entre résolution mentale et résolution écrite de problèmes numériques "classiques" ?

Une étude spécifique d'un processus d'institutionnalisation, le rôle du maître dans "le transfert des compétences de calcul"

Se poser la question de l'impact du calcul mental sur la résolution écrite et mentale de problèmes numériques amène nécessairement à s'intéresser au transfert de certaines compétences calculatoires et aux processus d'institutionnalisation de celles-ci. Nous admettons, faute de preuves du contraire, que l'institutionnalisation participe à ce processus de transfert ou constitue une aide supplémentaire.

Nous choisissons deux entrées différentes pour traiter cette question :
-1- étude du poids de l'institutionnalisation dans une ingénierie “ classique ” où elle est à la charge du maître
-2- étude d'une situation spécifique s'appuyant sur la production collective d'écrits par les élèves d'une classe entraînée, dans le but de construire une mémoire collective.

-1- Pour traiter la première question, nous nous appuyons sur certaines recherches de didactique des mathématiques.
En particulier, dans nos recherches précédentes sur le calcul mental [6], nous avons constaté que le maître a un rôle très important à jouer dans l'explicitation des procédures utilisées par les élèves : pour qu'une activité de calcul mental soit enrichissante, il est indispensable que le maître d'une part fasse expliciter les procédures mises en oeuvre par les élèves (qu'elles conduisent ou non à un résultat juste) ; d'autre part qu'il fasse comparer ces procédures, afin que chaque élève puisse déterminer, en fonction de ses conceptions numériques, et par souci personnel d'économie, la procédure la mieux adaptée (celle-ci n'est pas forcément la même pour tous les élèves). Ce travail permet la diffusion de

nouvelles procédures dans toute la classe. Toutefois, il doit être complété par une institutionnalisation de certaines procédures et par une automatisation de certains calculs.
Sur ce point, nous rejoignons les conclusions de J.P. Fischer sur la nécessaire automatisation de certains calculs élémentaires [16].
De plus, dans notre étude sur la résolution mentale de problèmes du type "jeu de l'autobus", nous avons montré qu'une institutionnalisation trop tardive et trop faible retardait, voire empêchait, l'évolution qualitative des procédures des élèves.

Dans le cadre de l'expérimentation décrite ici, le maître peut pratiquer deux types d'institutionnalisation forte : premièrement, une institutionnalisation de règles de calcul mental s'appuyant sur les spécificités des variables numériques ; deuxièmement, une institutionnalisation portant sur la résolution des problèmes testés : reconnaissance de types de problèmes, institutionnalisation de procédures de résolution adaptées aux contraintes de l'écrit ou du mental.

Nous essayons donc de mesurer l'impact d'une institutionnalisation forte sur les performances des élèves en répondant aux questions suivantes : quel est l'impact de l'institutionnalisation par le maître de procédures de calcul mental sur les performances des élèves dans la résolution de problèmes ? Une institutionnalisation plutôt forte a-t-elle une plus grande efficacité ? Si oui, cela dépend-il du type de problème, notamment du degré de familiarité de l'élève avec le problème ?

-2- Pour répondre à la deuxième question, nous pensons mettre en place un processus de conceptualisation fondé sur une dialectique entre actions et formulations.

Nous nous appuyons d'une part, sur les résultats d'une expérimentation menée précédemment dans le cadre d'une recherche effectuée au CE2 sur un enseignement de mathématiques à des élèves en difficulté [5] et d'autre part, sur les études déjà faites en didactique des mathématiques portant sur l'institutionnalisation notamment par M.J. Perrin sur les situations de rappels [18]. La spécificité de nos travaux réside dans le recours à l'écrit. Les situations de rappel décrites sont essentiellement orales. Nous prenons également en compte les travaux de Gérard Sensevy [22] sur la production collective de textes mathématiques. Notre dispositif expérimental est toutefois différent et les buts poursuivis ne sont pas identiques. G. Sensevy utilise les écrits des élèves pour faire progresser l'enseignement du professeur et le temps didactique ; alors que les séances de mémoire collective mises en place dans notre dispositif ne servent pas systématiquement de support au développement de l'enseignement en cours. Nous n'avons d'ailleurs pas adopté un dispositif s'appuyant sur plusieurs générations de textes.

Nous nous proposons de mettre en place une activité de mémoire collective ayant un double but d'apprentissage et de diagnostic.

Apprentissage, institutionnalisation : nous admettons que ces séances de bilan de savoir(3) où les élèves doivent produire un écrit collectif permettent d'aider à :
- la décontextualisation en imposant une formulation excluant tout exemple particulier
- la dépersonnalisation en imposant une rédaction collective
- la conceptualisation des notions et méthodes étudiées
- l' institutionnalisation des possibles transferts entre calcul mental et résolution écrite de problèmes.

Diagnostic : En plus de la volonté d'améliorer les performances des élèves, nous pensons avoir aussi accès à ce que les élèves retiennent des activités de calcul mental faites en classe, à ce qui est important pour eux, et dans une certaine mesure, à certaines de leurs conceptions des nombres et des propriétés des opérations. La régularité de ces séances nous permet de reconstruire l'histoire de l'appropriation de certaines techniques de calcul, procédures, règles...mais aussi celle de la construction de certaines notions ou de la reconnaissance de certains modèles. Nous pouvons ainsi espérer recueillir des indices sur les processus d'automatisation correspondant. De plus, nous souhaitons ainsi avoir des indications sur certains réinvestissements du calcul mental dans la résolution écrite de problèmes.

(3) Nous reprenons ici une expression employée par B. Charlot dans [2]

Nous nous intéressons aussi aux contraintes institutionnelles (école, collège) pesant sur la gestion d'un dispositif s'appuyant sur des bilans de savoir collectifs et sur une pratique régulière de calcul mental.
Cette recherche sur le rôle de l'écrit collectif fait l'objet d'un autre exposé. Signalons toutefois quelques résultats d'un rapport intermédiaire de recherche[7]. Le débat collectif accompagnant les bilans de savoir joue un rôle plus important en CM2 qu'en sixième dans la décontextualisation des textes produits. Ce type d'activité semble déboucher davantage sur un apprentissage en CM2 qu'en sixième où les contraintes institutionnelles (caractère inhabituel des activités de calcul mental, poids de l'écrit) semblent faire obstacle.

II- MÉTHODOLOGIE

Pour évaluer l'impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les performances des élèves de CM2 lors de la résolution de problèmes numériques, nous avons construit une expérimentation se déroulant sur cinq années (1991-1996). Nous faisons varier différents éléments :
- la part consacrée au calcul mental dans l'enseignement des mathématiques : le public testé est constitué de deux classes pratiquant régulièrement du calcul mental et de deux classes témoin
- le mode d'institutionnalisation des procédures de calcul mental et de résolution mentale de problèmes (forte ou faible)
- le mode de résolution de problèmes : mentale ou écrite
- le degré de complexité des problèmes, le degré de familiarité des élèves avec ces problèmes
- le type d'opération intervenant dans le problème.

Choix des problèmes

Nous avons testé des problèmes numériques qui s'inscrivent dans les apprentissages prévus en CM2 et ne portent pas sur des notions non encore enseignées à ce niveau. Ce sont des problèmes que l'on peut qualifier de "classiques", à savoir faisant intervenir une ou plusieurs opérations facilement reconnaissables par des élèves de CM2, et dont l'habillage s'inscrit dans le répertoire habituel des manuels de ce niveau. De plus, les énoncés ne présentent pas de difficultés particulières de vocabulaire. Nous avons fait ce choix pour ne pas introduire de variables supplémentaires.

Pour construire ces problèmes, nous faisons intervenir plusieurs variables :
- la nature des opérations (addition, soustraction, multiplication, division)
- le nombre de données numériques (2 données, 3 données, une donnée inutile)
- la structure du problème "simple" ou "complexe" : pour cette différenciation, nous nous appuyons sur les travaux de G. VERGNAUD concernant les structures additives et multiplicatives [23].

Pour **l'addition**, nous considérons comme structure "simple" soit les problèmes de composition de mesures (réunion), soit les problèmes de calcul d'un état final.
Nous considérons comme structure "complexe" soit les problèmes de calcul d'un état initial, soit les problèmes de composition de transformations positives.

Pour la **soustraction**, de la même façon, nous considérons comme structure "simple" soit les problèmes de recherche du complément, soit les problèmes de calcul d'un état final (sens "enlever").
Nous considérons comme structure "complexe" soit les problèmes de calcul d'un état initial, soit les problèmes de composition de transformations négatives (à noter que ces derniers se résolvent en fait par une addition).

Pour la **multiplication**, nous considérons comme structure "simple" les problèmes d'addition réitérée ou pouvant se représenter par une grille rectangulaire .
Nous considérons comme structure "complexe" les problèmes de combinatoire (recherche de tous les possibles) et ceux faisant intervenir un calcul d'aire ou de volume.

Pour la **division**, nous considérons comme structure "simple" les problèmes de partage ou de répartition et comme structure "complexe" les problèmes faisant intervenir l'inverse d'une multiplication ou la recherche d'une dimension dans un calcul d'aire ou de volume.
Les problèmes de division avec trois données n'étant pas adaptés, nous proposons à la place des problèmes de division avec reste.

Nous allons croiser la variable "type d'opération" avec les variables "données numériques" et "structure simple ou complexe", ce qui conduit à 24 problèmes différents.

Les valeurs numériques sont choisies de telle sorte qu'elles n'apportent pas de complexité supplémentaire (nombres inférieurs à 10 ou se prêtant à un calcul mental "facile").

Ces 24 problèmes sont donc construits ainsi (voir tableau n°1 et annexe n°1).

Tableau n°1 : critères de construction des problèmes

données numériques / opérations	2 données	3 données	une donnée inutile
+	état final *n°4* — état initial *n°5*	état final *n°12* — composée de transformations *n°16*	réunion *n°10* — état initial *n°3*
-	complément *n°15* — état initial *n°19*	état final *n°6* — composée de transformations *n°7*	distance *n°11* — composée de transformations *n°21*
X	addition réitérée *n°1* — Aire *n°8*	addition réitérée *N°20* — Volume *n°13*	addition réitérée *n°2* — Produit cartésien *n°24*
/	répartition (reste nul) *n°17* — multiplication inverse (aire) *n°22*	répartition (avec reste) *n°9* — division avec reste *n°14*	division (reste nul) *n°23* — multiplication inverse *n°18*

Dans chaque case du tableau :
en haut, à gauche, figurent les numéros de problèmes à structure simple
en bas, à droite, figurent les numéros de problèmes à structure complexe.

Pour désigner chaque problème, nous utilisons un triplet (opération, nombre de données ou donnée inutile (notée di), complexité de la structure (notée s ou c)).
Le problème n°1 :
Pour réaliser un pull, Sylvie achète 18 pelotes de laine à 20F la pelote ; calcule le montant de la dépense.
est noté (x,2,s) car il s'agit d'un problème de multiplication avec deux données et de structure simple (addition réitérée).
Le problème n°3 :
Marie fête son anniversaire le 22 septembre : elle a 11 ans.
Elle dit à sa maman : " j'ai exactement 32 ans de moins que toi !"
Quel est l'âge de maman ?
est noté (+,di,c) car c'est un problème d'addition avec une donnée inutile et de structure complexe (calcul d'un état initial).

Pour évaluer le poids d'une institutionnalisation "forte" sur les performances des élèves, nous faisons l'hypothèse qu'il suffit de retenir parmi les problèmes ci-dessus ceux relevant d'une structure complexe (12 problèmes). En effet, les problèmes à structure simple sont suffisamment familiers à des élèves de CM2 pour limiter les effets de l'institutionnalisation.
En fait, nous avons tout de même retenu deux problèmes à structure simple (n°2 et n°6) faisant intervenir le calcul d'un état final dans un jeu de l'autobus. De plus, nous avons changé l'habillage

des problèmes entre la résolution mentale et la résolution écrite ; mais la structure et les valeurs numériques restent strictement identiques.

Ces 12 problèmes sont construits ainsi (voir tableau n°2 et annexes n°2 et n°2 bis) :

Tableau n°2 : critères de construction des problèmes

données numériques / opérations	2 données	3 données	une donnée inutile
+		état final *n°6* ; composée de transformations *n°9*	état initial *n°1*
-		état final *n°2* ; composée de transformations *n°5*	composée de transformations *n°10*
X	Aire *n°4*	Volume *n°7*	Produit cartésien *n°12*
/	multiplication inverse (aire) *n°11*	division avec reste *n°8*	division avec reste n°3

Dispositif expérimental

Pour évaluer l'impact d'une pratique régulière de calcul mental sur la résolution de problèmes, nous avons proposé soit 24 problèmes, soit 12 problèmes à deux types de classes : deux classes entraînées et un échantillon témoin constitué de deux classes non entraînées.

Public testé

Nous disposons de deux classes entraînées régulièrement au calcul mental : les classes de CM2 de Mme D. (1991 / 1992, testée sur 24 problèmes) et de Mme G. (1992 / 1993, testée sur 12 problèmes).

De même, nous disposons de deux classes témoin : les classes de CM2 de Mme D. (1992 / 1993, testée sur 12 problèmes) et de Mme K (1994-95 et 1995-96, testées sur 24 problèmes).

Dans chaque cas, le scénario pour les classes entraînées est le suivant :

Les séances ont lieu une fois par semaine ; elles sont conduites par l'un des chercheurs, l'autre chercheur et le maître de la classe jouant le rôle d'observateur. Elles se décomposent ainsi :

- deux séances "d'échauffement" au calcul mental de 45 minutes environ : compter et décompter de n en n , opérations mentales, jeux faisant intervenir des calculs mentaux, par exemple "le compte est bon", le jeu de Syracuse...
- trois ou six séances (selon le nombre de problèmes à traiter) constituées d'une part par des activités de calcul mental (environ 20 minutes) et d'autre part par la résolution mentale de quatre problèmes. Le

maître lit deux fois le texte du problème ; pendant cette lecture les élèves peuvent noter brièvement des informations. Après un temps de réflexion de quelques minutes pendant lequel ils n'ont pas le droit d'écrire, les élèves doivent donner le résultat avec éventuellement un calcul en ligne, en aucun cas ils ne peuvent utiliser l'algorithme écrit.
- trois ou six séances (selon le nombre de problèmes à traiter) constituées par la résolution écrite de quatre problèmes : ce sont les mêmes problèmes que ceux proposés en résolution mentale, mais cette fois ci, le texte est écrit sur une feuille, les élèves doivent le lire et répondre aux questions. Le maître précise qu'il souhaite voir les éventuels essais, dessins, opérations effectués. Les calculettes ne sont pas autorisées.
Notons deux différences de passation entre les classes entraînées de madame D et de madame G. Dans la première la passation écrite ne s'est pas faite immédiatement après la passation mentale alors que c'est le cas dans la classe de madame G.
Dans la classe de madame G, l'entraînement au calcul mental a été plus important que dans celle de madame D entre les différentes séances de passation.

Dans les classes témoin, la passation est identique à celle des classes entraînées mais n'est pas accompagnée d'un entraînement au calcul mental.

Planification des différentes expérimentations portant sur l'impact d'un entraînement au calcul mental sur la résolution mentale et écrite de problèmes numériques "classiques"

	structures simples		**structures complexes**	
	classe entraînée	classe témoin	classe entraînée	classe témoin
institutionnalisation forte	(4)	(4)	Mme G 1992/1993	Mme D 1992/1993
institutionnalisation faible	Mme D 1991/1992	Mme K 1994/1995 1995/1996	Mme D 1991/1992	Mme K 1994/1995

L'étude de l'impact d'un entraînement au calcul mental sur la comparaison entre résolution mentale et écrite des mêmes problèmes se fait sur les mêmes classes entraînées et témoin.
Nous pouvons comparer ces deux types de classes car ce sont des classes de même niveau (CM2), d'effectifs équivalents, d'un même groupe scolaire, donc constituées d'élèves recrutés dans des milieux socioculturels comparables.

(4) Le rôle de l'institutionnalisation n'est étudié que pour les problèmes à structure complexe : nous faisons l'hypothèse qu'il n'est pas sensible dans le cas des structures simples

III- RÉSULTATS DE L'EXPÉRIMENTATION

III-1) IMPACT DU CALCUL MENTAL SUR LA RÉSOLUTION MENTALE ET ÉCRITE DE PROBLÈMES NUMÉRIQUES "CLASSIQUES"

III-1-1) Impact du calcul mental sur la résolution mentale de problèmes numériques "classiques"

A- Cas des structures simples

Comparaison (1991 / 92 et 1994 / 95/96) : classe D (entraînée) et classes témoin

Le tableau n°3 présente les pourcentages d'erreurs effectuées par les élèves des deux types de classes ; ils sont calculés par rapport au nombre total d'élèves de chaque classe. Une erreur est comptabilisée soit comme erreur de modèle, soit comme erreur de calcul ou de tri de données. Ces deux derniers cas sont répertoriés sous la rubrique "autres erreurs". Les différences de pourcentages sont calculées entre classes témoin et classe(s) entraînée(s) ; cela explique les pourcentages comptabilisés négativement.

Cas des structures additives

Le nombre d'erreurs de l'échantillon témoin varie entre 14% et 54% alors qu'il varie entre 5% et 36% pour la classe entraînée. Les erreurs sont essentiellement des erreurs de calcul ou de données sauf pour le problème n°11 (problème de soustraction, calcul de distances, avec données inutiles).

Les différences de performances sont en faveur de la classe entraînée. Le test du X montre que ces différences ne sont significatives que pour le problème n°10 (faisant intervenir une addition de trois termes). On peut aussi noter une assez forte différence de performances au problème n°11. Ces deux exercices présentent une donnée inutile.
Dans le cas du problème d'addition (n°10), la différence porte sur le nombre d'erreurs de calcul ou de données. Dans l'autre cas (problème n°11), elle porte surtout sur les erreurs de modèle (addition au lieu de soustraction).

La présence d'une donnée inutile semble intervenir dans l'écart des performances.

Cas des structures multiplicatives

Le nombre d'erreurs de l'échantillon témoin varie entre 18% et 72%. Ce sont plutôt des erreurs de calcul et de données.
Le nombre d'erreurs de la classe entraînée est du même ordre sauf pour le problème n°2 et le problème n°23 ; notons que dans ce dernier cas, les performances sont inversées au profit du groupe témoin. Comme pour l'échantillon témoin, ce sont plutôt des erreurs de calcul et de tri de données.

Un seul problème présente un écart de performances significatif au profit de la classe entraînée ; il s'agit du problème n°2 présentant une donnée inutile et faisant intervenir deux multiplications successives. Les calculs sont souvent incomplets dans les classes non entraînées.
Notons que la classe entraînée n'obtient pas systématiquement de meilleurs résultats que l'échantillon témoin.

Conclusion sur les structures simples :

Les différences de performances entre classe entraînée et classes non entraînées s'observent seulement pour deux problèmes sur 12. Dans les deux structures (additives et multiplicatives), elles concernent un problème présentant un élément de difficulté supplémentaire (donnée inutile).
Dans les deux types de classes, les erreurs étant plutôt des erreurs de calcul ou de données, nous pouvons penser que le modèle est assez bien reconnu. L'impact du calcul mental ne peut alors se traduire que par une meilleure maîtrise des calculs et des données ; ce qui est le cas pour les deux problèmes présentant un écart significatif.

Dans le cas des structures simples, l'impact d'un entraînement au calcul mental sur la résolution mentale de problèmes est donc faible.

Tableau n°3 : comparaison des performances en résolution mentale entre une classe entraînée (D) et un échantillon constitué de deux classes non entraînées (structures simples)

STRUCTURES	**ADDITIVES**						**MULTIPLICATIVES**					
	n°4	n°10	n°12	n°6	n°11	n°15	n°1	n°2	n°20	n°9	n°17	n°23
TYPE DE PROBLÈME	(+,2,s)	(+,di,s)	(+,3,s)	(-,3,s)	(-,di,s)	(-,2,s)	(x,2,s)	(x,di,s)	(x,3,s)	(/,reste)	(/,2,s)	(/,di,s)
Total d'erreurs (résolution mentale, classe non entraînée)	7	12	10	8	26	12	9	24	27	25	18	34
Pourcentages d'erreurs (résolution mentale, classe non entraînée)	14%	25%	21%	17%	54%	25%	18%	49%	56%	52%	38%	72%
Total d'erreurs (résolution mentale, classe entraînée)	3	1	5	3	8	2	5	5	11	9	11	22
Pourcentages d'erreurs (résolution mentale, classe entraînée)	14%	5%	23%	14%	36%	9%	23%	23%	50%	41%	50%	100%
Différence d'erreurs en pourcentages	**1%**	**20%**	**-2%**	**3%**	**18%**	**16%**	**-4%**	**26%**	**6%**	**11%**	**-13%**	**-28%**
Total modèles erronés et non réponse (mentale, classe non entraînée)	3	1	0	0	23	1	2	3	4	13	5	9
Pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale classe non entraînée)	6%	2%	0%	0%	48%	2%	4%	6%	8%	27%	10%	19%
Total modèles erronés et non réponse (mentale, classe entraînée)	0	1	2	1	6	0	0	0	0	4	2	6
Pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale classe entraînée)	0%	5%	9%	5%	27%	0%	0%	0%	0%	18%	9%	27%
Différence de modèles erronés en pourcentages	**6%**	**-2%**	**-9%**	**-5%**	**21%**	**2%**	**4%**	**6%**	**8%**	**9%**	**1%**	**-8%**
Total autres erreurs (mentale classe non entraînée)	4	11	10	8	3	11	7	21	23	12	13	25
Pourcentages autres erreurs (mentale classe non entraînée)	8%	23%	21%	17%	6%	23%	14%	43%	48%	25%	27%	53%
Total autres erreurs (mentale classe entraînée)	3	0	3	2	2	2	5	5	11	5	9	16
Pourcentages autres erreurs (mentale classe entraînée)	14%	0%	14%	9%	9%	9%	23%	23%	50%	23%	41%	73%
différence des autres erreurs en pourcentage	**-5%**	**23%**	**7%**	**8%**	**-3%**	**14%**	**-8%**	**20%**	**-2%**	**2%**	**-14%**	**-20%**
test du $\chi 2(0,05)$	-3,832	1,069	-3,792	-3,694	-1,031	-0,87	-3,561	2,227	-3,490	-2,739	-2,373	4,571
Problèmes présentant une différence significative		**n°10**						**n°2**				
Différence d'erreurs en pourcentages	**1%**	**20%**	**-2%**	**3%**	**18%**	**16%**	**-4%**	**26%**	**6%**	**11%**	**-13%**	**-28%**

B- Cas des structures complexes

B.a- Première comparaison (1991 / 92 et 1992 / 93) : classe D (entraînée) et classes témoins

voir tableau n°4

Structures additives

Le pourcentage d'erreurs est supérieur dans la classe non entraînée pour quatre problèmes sur 6. Le test du $\chi2$ n'est significatif que pour 2 problèmes sur 6. Les écarts significatifs s'observent dans la composition de transformations de même signe (problème n°9, 22%), mais surtout de signes contraires (problème n°10, 41%). Ils sont dus essentiellement à des erreurs de modèle.

Quand il existe, l'impact du calcul mental porte sur les problèmes les plus complexes et sur la reconnaissance du modèle.

Structures multiplicatives

Les résultats sont partagés. Un seul problème présente un écart de performances significatif (problème n°8, 30%). Il s'agit d'un problème de division avec reste. Les erreurs, dans ce cas, se partagent entre erreurs de modèle (écart de 10%) et autres erreurs (écarts de 19%).

Tableau n°4 : comparaison des performances en résolution mentale entre une classe entraînée (D) et un échantillon constitué de deux classes non entraînées (structures complexes)

STRUCTURES	ADDITIVES						MULTIPLICATIVES					
TYPE DE PROBLÈME NOM	n°1 (+,di,c)	n°6 (+,3,s)	n°9 (+,3,c)	n°2 (-,3,s)	n°5 (-,3,c)	n°10 (-,di,c)	n°4 (x,2,c)	n°7 (x,3,c)	n°12 (x,di,c)	n°3 (/,di,c)	n°8 (/,rest,c)	n°11 (/,2,c)
total d'erreurs (résolution mentale classe non entraînée.)	17	9	17	10	28	30	21	11	40	26	32	28
pourcentages d'erreurs (résolution mentale classe non entraînée.)	35%	19%	35%	21%	58%	64%	45%	23%	85%	55%	67%	60%
total d'erreurs (résolution mentale classe entraînée.)	5	5	3	3	19	5	8	6	22	10	8	14
pourcentages d'erreurs (résolution mentale classe. entraînée.)	23%	23%	14%	14%	86%	23%	36%	27%	100%	45%	36%	64%
différence d'erreurs en pourcentages	**13%**	**-4%**	**22%**	**7%**	**-28%**	**41%**	**8%**	**-4%**	**-15%**	**10%**	**30%**	**-4%**
total modèles erronés et non réponses(mentale classe. non entraînée.)	17	0	13	0	22	16	17	5	38	13	16	15
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale classe. non entraînée.)	35%	0%	27%	0%	46%	34%	36%	10%	81%	28%	33%	32%
total modèles erronés et non réponses (mentale classe. entraînée.)	5	2	1	1	15	1	6	6	21	5	5	10
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale classe. entraînée.)	23%	9%	5%	5%	68%	5%	27%	27%	95%	23%	23%	45%
différence de modèles erronés en pourcentage	**12%**	**-9%**	**22%**	**-5%**	**-22%**	**29%**	**9%**	**-17%**	**-14%**	**5%**	**10%**	**-13%**
total autres erreurs(mentale classe. non entraînée.)	0	9	4	10	6	14	4	6	2	13	16	13
pourcentages autres erreurs (mentale classe. non entraînée.)	0%	19%	8%	21%	13%	30%	9%	13%	4%	28%	33%	28%
total autres erreurs (mentale classe. entraînée.)	0	3	2	2	4	4	2	0	1	5	3	4
pourcentages autres erreurs (mentale classe. entraînée.)	0%	14%	9%	9%	18%	18%	9%	0%	5%	23%	14%	18%
différence des autres erreurs en pourcentage	**0%**	**19%**	**-1%**	**12%**	**-6%**	**12%**	**0%**	**13%**	**-1%**	**5%**	**19%**	**10%**
test significatif à 0.05	-2,291	-3,612	0,723	-3,149	3,272	12,26	-3,224	-3,604	0,01	-2,974	5,251	-3,689
problèmes présentant une différence significative			**n°9**			**n°10**					**n°8**	
différence d'erreurs en pourcentages	**13%**	**-4%**	**22%**	**7%**	**-28%**	**41%**	**8%**	**-4%**	**-15%**	**10%**	**30%**	**-4%**

Conclusion

L'impact d'un entraînement au calcul mental est plutôt faible dans cette classe entraînée ; seulement 3 problèmes sur 12 présentent un écart significatif selon le test du $\chi 2$.

Quand elles existent, les différences de performances s'observent dans les problèmes additifs les plus complexes (composition de transformations) et sont alors dues à des erreurs de modèles. Les résultats sont peu significatifs pour les problèmes relevant des structures multiplicatives.

B.b- Seconde comparaison (1992/93) : classe G (entraînée) et échantillon témoin (cf. tableau n°5)

Globalement, quand il n'y a pas entraînement au calcul mental, le pourcentage d'erreurs est soit du même ordre, soit plus important, sauf pour le problème n°7 (calcul de volume) où les résultats sont inversés.

Structures additives

Le nombre d'erreurs est supérieur quand il n'y a pas d'entraînement au calcul mental. Les différences les plus significatives concernent les problèmes n°1 (calcul d'un état initial), n°6 (calcul d'un état final) et le problème n°10 (composition de transformations de signe contraire).

L'entraînement en calcul mental n'a pas permis une meilleure réussite des élèves au problème n°5 (jeu de l'autobus avec composition de transformations). Par contre il semble avoir eu des effets positifs à la séance suivante (différence de 21% pour le problème n°10).

Les erreurs de modèle sont en nombre supérieur dans la classe n'ayant pas bénéficié d'un entraînement en calcul mental sauf pour le problème n°5. Nous constatons une augmentation des confusions état/transformation, de l'ordre de 20 à 30% pour les problèmes faisant intervenir une composition de transformations. Toutefois, cela ne concerne pas le premier problème portant sur la composition de transformations (n°5).

Pour que l'entraînement en calcul mental se révèle efficace, il semble donc nécessaire de laisser un temps de maturation, de familiarisation avec le problème. L'impact du calcul mental semble alors porter davantage sur la reconnaissance du modèle ; 3 problèmes sur 6 présentent une différence importante.

Structures multiplicatives

Les performances enregistrées dans la classe ayant bénéficié d'un entraînement en calcul mental sont toujours supérieures à celles de l'échantillon témoin sauf pour le problème n°7. Pour ce problème, nous constatons que les erreurs de la classe entraînée sont essentiellement des erreurs de modèle. Nous pouvons expliquer ces résultats par une familiarité plus faible des élèves de la classe entraînée avec un calcul de volume.
De même, les élèves de la classe entraînée reconnaissent mieux le modèle que ceux de l'échantillon témoin sauf pour le problème n°7.

Le test du $\chi 2$ ne nous donne aucun écart significatif ; notons cependant une différence de performances de 19% pour le problème n°8 (division avec reste) et une différence de 23% dans la reconnaissance du modèle dans le cas du problème n°3 (problème de division avec donnée inutile).

Conclusion

Dans le cas des structures additives, les résultats sont meilleurs dans la classe entraînée et on observe une meilleure reconnaissance du modèle.

Dans le cas des structures multiplicatives, les écarts ne sont pas assez significatifs pour conclure à un impact suffisamment net d'un entraînement en calcul mental.

Tableau n°5 : comparaison des performances en résolution mentale entre une classe entraînée (G) et un échantillon témoin (structures complexes)

STRUCTURES	ADDITIVES						MULTIPLICATIVES					
TYPE DE PROBLÈME NOM	n°1 (+,di,c)	n°6 (+,3,s)	n°9 (+,3,c)	n°2 (-,3,s)	n°5 (-,3,c)	n°10 (-,di,c)	n°4 (x,2,c)	n°7 (x,3,c)	n°12 (x,di,c)	n°3 (/,di,c)	n°8 (/,rest,c)	n°11 (/,2,c)
total d'erreurs (résolution mentale classe. non entraînée.)	17	9	17	10	45	30	21	11	40	26	32	28
pourcentages d'erreurs (résolution mentale classe. non entraînée.)	35%	19%	35%	21%	94%	64%	45%	23%	85%	55%	67%	60%
total d'erreurs (résolution mentale classe. entraînée.)	3	0	6	2	20	9	6	11	17	11	10	11
pourcentages d'erreurs (résolution mentale classe. entraînée.)	14%	0%	29%	10%	95%	43%	29%	52%	81%	52%	48%	52%
différence d'erreurs en pourcentages	**21%**	**19%**	**7%**	**11%**	**-1%**	**21%**	**16%**	**-29%**	**4%**	**3%**	**19%**	**8%**
total modèles erronés et non réponses(mentale classe. non entraînée.)	17	0	13	0	35	16	17	5	38	13	16	15
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale classe. non entraînée.)	35%	0%	27%	0%	73%	34%	36%	10%	81%	28%	33%	32%
total modèles erronés et non réponses (mentale classe. entraînée.)	1	0	1	0	17	2	5	9	16	1	5	5
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale classe. entraînée.)	5%	0%	5%	0%	81%	10%	24%	43%	76%	5%	24%	24%
différence de modèles erronés en pourcentage	**30%**	**0%**	**22%**	**0%**	**-8%**	**24%**	**12%**	**-33%**	**5%**	**23%**	**9%**	**8%**
total autres erreurs(mentale classe. non entraînée.)	0	9	4	10	10	14	4	6	2	13	16	13
pourcentages autres erreurs (mentale classe. non entraînée.)	0%	19%	8%	21%	21%	30%	9%	13%	4%	28%	33%	28%
total autres erreurs (mentale classe. entraînée.)	2	0	5	2	3	7	1	2	1	10	5	6
pourcentages autres erreurs (mentale classe. entraînée.)	10%	0%	24%	10%	14%	33%	5%	10%	5%	48%	24%	29%
différence des autres erreurs en pourcentage	**-10%**	**19%**	**-16%**	**11%**	**7%**	**-3%**	**4%**	**3%**	**-1%**	**-20%**	**9%**	**-1%**
test significatif à 0.05	0,259	1,006	-3,41	-2,322	-3,784	0,093	-1,782	6,289	-3,561	-3,746	-0,573	-3,336
problèmes présentant une différence significative	**n°1**	**n°6**				**n°10**		**n°7**				
différence d'erreurs en pourcentages	**21%**	**19%**	**7%**	**11%**	**-1%**	**21%**	**16%**	**-29%**	**4%**	**3%**	**19%**	**8%**

C- Conclusion : Impact d'un entraînement au calcul mental sur la résolution mentale de problèmes numériques "classiques"

Afin de faciliter l'analyse des résultats, nous utiliserons le tableau R1 récapitulant les résultats des deux classes entraînées dans le cas des structures complexes.

Quelques réflexions sur le nombre et la nature des erreurs aux problèmes complexes

Structures additives : le pourcentage d'erreurs varie de 19% à 94% pour l'échantillon témoin, deux problèmes présentant un taux supérieur à 50%. Les erreurs se partagent entre erreurs de calculs (pour les problèmes les plus simples) et erreurs de modèle (pour les plus complexes).

Pour les classes entraînées, les pourcentages d'erreurs varient de 12% à 91 % avec un problème présentant un taux d'erreurs supérieur à 50%. Un problème plutôt difficile (n°5) présente un taux important d'erreurs de modèle, pour les autres les erreurs sont plutôt des erreurs de calcul ou de données.

Structures multiplicatives : le pourcentage d'erreurs varie de 23% à 85% pour l'échantillon témoin, quatre problèmes présentant un taux supérieur à 50%. Deux problèmes présentent un taux nettement plus important d'erreurs de modèle ; les erreurs aux autres problèmes se répartissent entre erreurs de modèle et erreurs de calcul.

Pour les classes entraînées, les pourcentages d'erreurs varient de 33% à 91% avec trois problèmes présentant un taux d'erreurs supérieur ou égal à 50%. Les erreurs sont plutôt des erreurs de modèle.

Tableau R1 : comparaison des performances en résolution mentale entre deux classes entraînées (G et D) et un échantillon témoin (cas des structures complexes)

STRUCTURES	ADDITIVES						MULTIPLICATIVES					
TYPE DE PROBLÈME NOM	n°1 (+,di,c)	n°6 (+,3,s)	n°9 (+,3,c)	n°2 (-,3,s)	n°5 (-,3,c)	n°10 (-,di,c)	n°4 (x,2,c)	n°7 (x,3,c)	n°12 (x,di,c)	n°3 (/,di,c)	n°8 (/,rest,c)	n°11 (/,2,c)
total d'erreurs (résolution mentale classe. non entraînée.)	17	9	17	10	45	30	21	11	40	26	32	28
pourcentages d'erreurs (résolution mentale classe. non entraînée.)	35%	19%	35%	21%	94%	64%	45%	23%	85%	55%	67%	60%
total d'erreurs (résolution mentale classe. entraînée.)	8	5	9	5	39	14	14	17	39	21	18	21
pourcentages d'erreurs (résolution mentale classe. entraînée.)	19%	12%	21%	12%	91%	33%	33%	40%	91%	49%	42%	49%
différence d'erreurs en pourcentages	**17%**	**7%**	**14%**	**9%**	**3%**	**31%**	**12%**	**-17%**	**-6%**	**6%**	**25%**	**11%**
total modèles erronés et non réponses(mentale classe. non entraînée.)	17	0	13	0	35	16	17	5	38	13	16	15
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale classe. non entraînée.)	35%	0%	27%	0%	73%	34%	36%	10%	81%	28%	33%	32%
total modèles erronés et non réponses (mentale classe. entraînée.)	6	2	2	1	32	3	11	15	37	6	10	15
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale classe. entraînée.)	14%	5%	5%	2%	74%	7%	26%	35%	86%	14%	23%	35%
différence de modèles erronés en pourcentage	**21%**	**-5%**	**22%**	**-2%**	**-2%**	**27%**	**11%**	**-24%**	**-5%**	**14%**	**10%**	**-3%**
total autres erreurs(mentale classe. non entraînée.)	0	9	4	10	10	14	4	6	2	13	16	13
pourcentages autres erreurs (mentale classe. non entraînée.)	0%	19%	8%	21%	21%	30%	9%	13%	4%	28%	33%	28%
total autres erreurs (mentale classe. entraînée.)	2	3	7	4	7	11	3	2	2	15	8	6
pourcentages autres erreurs (mentale classe. entraînée.)	5%	7%	16%	10%	16%	26%	7%	5%	5%	35%	19%	14%
différence des autres erreurs en pourcentage	**-5%**	**12%**	**-8%**	**12%**	**5%**	**4%**	**2%**	**8%**	**0%**	**-7%**	**15%**	**14%**
test significatif à 0.05	1,473	-2,408	0,105	-1,638	-3,156	14,37	-1,283	2,882	-2,779	-3,109	8,067	-1,782
problèmes présentant une différence significative (0,05)	**n°1**		**n°9**			**n°10**		**n°7**			**n°8**	
différence d'erreurs en pourcentages	**17%**	**7%**	**14%**	**9%**	**3%**	**31%**	**12%**	**-17%**	**-6%**	**6%**	**25%**	**11%**

Conclusion sur l'impact d'un entraînement au calcul mental sur la résolution mentale de problèmes numériques "classiques"

Structures additives

L'entraînement au calcul mental a un impact positif sur les performances des élèves quelque soit le niveau de complexité des problèmes.

Dans le cas des structures simples : cet impact est faible et s'observe dans des problèmes présentant un élément de difficulté supplémentaire ; il porte alors sur tous les types d'erreurs.

Dans les deux types de classe, les erreurs sont essentiellement des erreurs de calcul ou de données.

Dans le cas des structures complexes : l'impact est plus marqué (3 problèmes sur 6) et porte essentiellement sur la reconnaissance du modèle.

Structures multiplicatives

Les résultats sont globalement meilleurs quand il y a entraînement au calcul mental. Notons le cas particulier du calcul de volume mieux réussi dans les classes témoins. Les écarts sont peu différenciés entre les deux types de classes.

Dans le cas des structures simples, les erreurs sont de même nature pour la classe entraînée et pour l'échantillon témoin : ce sont des erreurs de calcul et de données. Notons que les différences de performances entre les deux types de classes ne sont pas systématiquement en faveur de la classe entraînée. Nous ne pouvons donc pas conclure à un impact.

Dans le cas des structures complexes, les écarts ne sont pas assez significatifs pour conclure à un impact du calcul mental.

Essayons de mesurer l'impact d'un entraînement au calcul mental sur la résolution mentale de problèmes en fonction du degré de complexité du problème posé.

***Dans le cas des structures simples*, les écarts de performances sont peu marqués et ne sont pas toujours en faveur de la classe entraînée. Les erreurs des deux types de classes étant essentiellement des erreurs de calcul ou de données, on peut penser que le modèle est facilement reconnu par les élèves. L'impact du calcul mental ne peut alors se traduire que par une plus grande maîtrise des calculs et des données. Dans notre expérience, cet impact est faible.**

***Dans le cas des structures complexes additives*, on observe un impact d'un entraînement au calcul mental portant sur la reconnaissance du modèle.**

***Dans le cas des structures complexes multiplicatives*, les écarts de performances sont peu marqués. Le nombre important d'erreurs de modèle dans les classes entraînées ne nous permet pas de conclure à un impact du calcul mental.**

III-1-2) Impact du calcul mental sur la résolution écrite de problèmes numériques "classiques"

A- Structures simples

Comparaison (1991 / 92 et 1994 / 95/96) entre une classe D (entraînée) et un échantillon témoin constitué de deux classes non entraînées

Nous devons tenir compte des conditions différentes de passation des protocoles écrits dans les deux classes entraînées : dans la classe D, la passation s'est effectuée deux mois après la fin de l'entraînement au calcul mental ; par contre, dans la classe G, il n'y a pas eu cette coupure dans le temps.
De ce fait, nous devons moduler les conclusions concernant la classe D, l'impact du calcul mental se trouvant atténué ; par contre, cela nous permet d'en tester la durabilité (cf. tableau n°6).

Cas des structures additives

Nous ne constatons aucune différence significative de performances entre les deux classes.

Pour l'échantillon témoin, le pourcentage d'erreurs varie de 8% à 44%. Les erreurs sont plutôt des erreurs de calcul (sauf pour le problème 11, calcul de distance avec donnée inutile - soustraction).
Pour la classe entraînée, les pourcentages d'erreurs sont légèrement plus faibles pour tous les problèmes. Les erreurs se répartissent un peu plus entre erreurs de modèle et erreurs de calcul. Notons, comme pour les classes témoins, le fort pourcentage d'erreurs de modèle pour le problème n°11.
Les erreurs sont trop peu nombreuses pour permettre une mesure de l'impact du calcul mental.

Cas des structures multiplicatives

Nous constatons des résultats nettement meilleurs dans la classe entraînée ; quatre problèmes présentent un écart significatif selon le test du $\chi 2$.
Les différences de performances s'expliquent par un nombre plus important d'erreurs de données ou de calcul dans la classe non entraînée.

Conclusion dans le cas des structures simples

Les différences de performances significatives n'existent que pour les structures multiplicatives et ne portent que sur les erreurs de calculs ou de tri de données.
Notons que dans le cas des structures multiplicatives, les différences sont nettement plus affirmées lors de la résolution écrite que lors de la résolution mentale.

Tableau n°6 : comparaison des performances en résolution écrite entre une classe entraînée (D) et un échantillon témoin (structures simples)

STRUCTURES	**ADDITIVES**						**MULTIPLICATIVES**					
	n°4	n°10	n°12	n°6	n°11	n°15	n°1	n°2	n°20	n°9	n°17	n°23
TYPE DE PROBLÈME	(+,2,s)	(+,di,s)	(+,3,s)	(-,3,s)	(-,di,s)	(-,2,s)	(x,2,s)	(x,di,s)	(x,3,s)	(/,reste)	(/,2,s)	(/,di,s)
Total d'erreurs (résolution écrite, classe non entraînée)	4	6	5	8	20	4	11	24	23	10	18	21
Pourcentages d'erreurs (résolution écrite, classe non entraînée)	8%	13%	11%	17%	44%	8%	23%	50%	49%	22%	38%	44%
Total d'erreurs (résolution écrite, classe entraînée)	1	1	2	2	7	3	1	4	3	5	7	2
Pourcentages d'erreurs (résolution écrite, classe entraînée)	5%	5%	10%	10%	33%	14%	5%	19%	14%	24%	33%	10%
Différence d'erreurs en pourcentages	**3%**	**8%**	**2%**	**7%**	**11%**	**-6%**	**18%**	**31%**	**35%**	**-2%**	**5%**	**34%**
Total modèles erronés et non réponse (écrite, classe non entraînée)	1	0	0	2	17	0	0	3	6	2	7	6
Pourcentages modèles erronés et non réponses (écrite classe non entraînée)	2%	0%	0%	4%	38%	0%	0%	6%	13%	4%	15%	13%
Total modèles erronés et non réponse (écrite, classe entraînée)	0	1	1	1	7	0	0	1	3	2	2	2
Pourcentages modèles erronés et non réponses (écrite classe entraînée)	0%	5%	5%	5%	33%	0%	0%	5%	14%	10%	10%	10%
Différence de modèles erronés en pourcentages	**2%**	**-5%**	**-5%**	**-1%**	**5%**	**0%**	**0%**	**1%**	**-1%**	**-6%**	**5%**	**3%**
Total autres erreurs (écrite classe non entraînée)	3	6	5	6	3	4	11	21	17	8	11	15
Pourcentages autres erreurs (écrite classe non entraînée)	6%	13%	11%	13%	7%	8%	23%	44%	36%	18%	23%	31%
Total autres erreurs (écrite classe entraînée)	1	0	1	1	0	3	1	3	0	3	5	0
Pourcentages autres erreurs (écrite classe entraînée)	5%	0%	5%	5%	0%	14%	5%	13%	0%	13%	23%	0%
différence des autres erreurs en pourcentage	**1%**	**13%**	**6%**	**8%**	**7%**	**-6%**	**18%**	**31%**	**36%**	**5%**	**0%**	**31%**
test du $\chi 2(0,05)$	-3,54	-2,63	-3,78	-3,00	-2,79	-2,86	0,078	4,20	6,250	-3,80	-3,621	6,156
Problèmes présentant une différence significative							**n°1**	**n°2**	**n°20**			**n°23**
Différence d'erreurs en pourcentages	3%	8%	2%	7%	11%	-6%	**18%**	**31%**	**35%**	-2%	5%	**34%**

B- Structures complexes

B.a- Première comparaison : classe entraînée (D), échantillon témoin (cf. tableau n°7)

structures additives

Globalement, le nombre d'erreurs est supérieur quand il n'y a pas entraînement au calcul mental. Mais l'écart n'est significatif que pour le problème n°9 (composition de transformations de même signe : +24 %) où il porte davantage sur les erreurs de modèle.

Structures multiplicatives

Les résultats sont partagés car deux problèmes sont mieux réussis dans les classes témoins. Ce sont les problèmes de calcul de volume et de calcul du cardinal d'un produit cartésien (peu familiers aux élèves de CM2).
Toutefois, on observe trois écarts significatifs en faveur de la classe entraînée : problèmes de calcul d'aire direct et inverse, problème de division avec donnée inutile. Les écarts de performances portent plutôt sur les erreurs de calcul et de données.

Tableau n°7 : comparaison des performances en résolution écrite entre une classe entraînée (D) et une classe non entraînée (D) (structures complexes)

STRUCTURES	**ADDITIVES**						**MULTIPLICATIVES**					
TYPE DE PROBLÈME NOM	n°1 (+,di,c)	n°6 (+,3,s)	n°9 (+,3,c)	n°2 (-,3,s)	n°5 (-,3,c)	n°10 (-,di,c)	n°4 (x,2,c)	n°7 (x,3,c)	n°12 (x,di,c)	n°3 (/,di,c)	n°8 (/,rest,c)	n°11 (/,2,c)
total d'erreurs (résolution écrite , D.)	7	6	14	5	36	26	21	9	24	23	20	20
pourcentages d'erreurs (résolution écrite , D.)	15%	14%	29%	11%	80%	54%	45%	20%	50%	49%	43%	42%
total d'erreurs (résolution écrite , D., entraînée)	5	2	1	2	16	12	3	6	17	5	8	4
pourcentages d'erreurs (résolution écrite , D. entraînée)	23%	9%	5%	9%	76%	57%	14%	29%	81%	24%	38%	19%
différence d'erreurs	2	4	13	3	20	14	18	3	7	18	12	16
différence d'erreurs en pourcentages	**-8%**	**5%**	**24%**	**2%**	**4%**	**-3%**	**30%**	**-9%**	**-31%**	**25%**	**5%**	**23%**
total modèles erronés et non réponses(écrite , D.)	2	0	10	2	25	19	12	7	23	10	5	9
pourcentages modèles erronés et non réponses (écrite , D.)	4%	0%	21%	4%	56%	40%	26%	15%	48%	21%	11%	19%
total modèles erronés et non réponses (écrite , D., entraînée)	4	1	1	1	15	11	2	4	16	3	4	3
pourcentages modèles erronés et non réponses (écrite , D., entraînée)	20%	5%	5%	5%	71%	52%	10%	19%	76%	14%	19%	14%
différence du nombre de modèles erronés	-2	-1	9	1	10	8	10	3	7	7	1	6
différence de modèles erronés en pourcentage	**-16%**	**-5%**	**16%**	**-1%**	**-15%**	**-12%**	**16%**	**-4%**	**-28%**	**7%**	**-8%**	**5%**
total autres erreurs (écrite , D.)	5	6	4	3	11	7	9	2	1	13	15	11
pourcentages autres erreurs (écrite , D.)	10%	14%	8%	6%	24%	15%	19%	4%	2%	28%	33%	23%
total autres erreurs (écrite , D., entraînée)	1	1	0	1	1	1	1	2	1	2	4	1
pourcentages autres erreurs (écrite , D., entraînée)	3%	4%	0%	4%	5%	5%	4%	10%	5%	10%	19%	5%
différence du nombre des autres erreurs	4	5	4	2	10	6	8	0	0	11	11	10
différence des autres erreurs en pourcentage	**8%**	**10%**	**8%**	**2%**	**19%**	**9%**	**15%**	**-5%**	**-3%**	**18%**	**14%**	**18%**
test du $\chi 2(0{,}05)$	-2,669	-3,454	1,814	-3,785	-3,65	-3,765	4,009	-2,758	4,208	1,466	-3,592	0,58
			n°9				**n°4**			**n°3**		**n°11**
différence d'erreurs en pourcentages	**-8%**	**5%**	**24%**	**2%**	**4%**	**-3%**	**30%**	**-9%**	**-31%**	**25%**	**5%**	**23%**

B.b- Deuxième comparaison (1992 / 1993) : classe G entraînée et classe D non entraînée (cf. tableau n°8)

Globalement, quand il n'y a pas entraînement au calcul mental, le pourcentage d'erreurs est soit du même ordre, soit plus important, sauf pour les problèmes n°1 (calcul additif d'un état initial) et n°7 (calcul de volume).

Structures additives

Le nombre d'erreurs est systématiquement supérieur quand il n'y a pas d'entraînement au calcul mental, sauf pour le problème n°1. Les différences les plus significatives concernent les problèmes n°5 et n°10 (composition de transformations de signe contraire, respectivement 22% et 38%) et dans une plus faible mesure, le problème n°9 (composition de transformations de même signe : 17%).

Tous les problèmes de composition de transformations présentent donc un taux de réussite supérieur dans la classe entraînée. L'impact de l'entraînement au calcul mental sur ce type de problème, déjà pressenti lors de la résolution mentale, se trouve ici confirmé en résolution écrite. Les élèves de la classe entraînée semblent s'être familiarisés plus vite avec ce type de problème.

Les erreurs de modèle sont toujours en nombre supérieur ou égal dans les classes n'ayant pas bénéficié d'un entraînement en calcul mental, excepté pour le premier problème.

L'augmentation des erreurs est plutôt due à une non reconnaissance du modèle (confusion état/transformation ou réponse incomplète).

Comme nous l'avons pressenti lors de la résolution mentale, l'impact du calcul mental en résolution écrite semble porter davantage sur les structures additives les plus complexes et, dans ce cas, sur la reconnaissance du modèle.

Structures multiplicatives

Les performances enregistrées dans la classe ayant bénéficié d'un entraînement en calcul mental sont ici toujours supérieures ou comparables à celles du groupe témoin sauf pour le problème n°7. Comme lors de la résolution mentale, on peut expliquer les meilleures performances des classes témoins à un calcul de volume par une plus grande familiarité de ces élèves avec ce type de problème.

Les différences de performances les plus significatives concernent ici un problème de multiplication (calcul d'aire, 31%), un problème de division faisant intervenir aussi un calcul d'aire (n°11, 33%) et un problème de division avec donnée inutile (n°3, 26%). On relève de plus, un écart de 18% pour le problème de division n°8 (division avec reste).

L'impact du calcul mental, en résolution écrite, est effectif pour les structures multiplicatives complexes (4 problèmes sur 6). Les différences de performances portent sur tous les types d'erreurs.

Tableau n°8 : comparaison des performances en résolution écrite entre une classe entraînée (G) et échantillon témoin (structures complexes)

STRUCTURES	ADDITIVES						MULTIPLICATIVES					
TYPE DE PROBLÈME NOM	n°1 (+,di,c)	n°6 (+,3,s)	n°9 (+,3,c)	n°2 (-,3,s)	n°5 (-,3,c)	n°10 (-,di,c)	n°4 (x,2,c)	n°7 (x,3,c)	n°12 (x,di,c)	n°3 (/,di,c)	n°8 (/,rest,c)	n°11 (/,2,c)
total d'erreurs (résolution mentale , D.)	7	6	14	5	36	26	21	9	24	23	20	20
pourcentages d'erreurs (résolution mentale , D.)	15%	14%	29%	11%	80%	54%	45%	20%	50%	49%	43%	42%
total d'erreurs (résolution mentale , G.)	5	1	3	1	14	4	3	11	11	5	6	2
pourcentages d'erreurs (résolution mentale , G.)	23%	4%	13%	5%	58%	17%	14%	46%	46%	23%	25%	8%
différence d'erreurs	2	5	11	4	22	22	18	-2	13	18	14	18
différence d'erreurs en pourcentages	**-8%**	**9%**	**17%**	**6%**	**22%**	**38%**	**31%**	**-26%**	**4%**	**26%**	**18%**	**33%**
total modèles erronés et non réponses(mentale , D.)	2	0	10	2	25	19	12	7	23	10	5	9
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale , D.)	4%	0%	21%	4%	56%	40%	26%	15%	48%	21%	11%	19%
total modèles erronés et non réponses (mentale , G.)	5	0	1	0	11	1	1	8	11	3	2	1
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale , G.)	23%	0%	4%	0%	46%	4%	5%	33%	46%	14%	8%	4%
différence du nombre de modèles erronés	-3	0	9	2	14	18	11	-1	12	7	3	8
différence de modèles erronés en pourcentage	**-19%**	**0%**	**17%**	**4%**	**10%**	**35%**	**21%**	**-18%**	**2%**	**8%**	**3%**	**15%**
total autres erreurs (mentale , D.)	5	6	4	3	11	7	9	2	1	13	15	11
pourcentages autres erreurs (mentale , D.)	10%	14%	8%	6%	24%	15%	19%	4%	2%	28%	33%	23%
total autres erreurs (mentale , G.)	0	1	2	1	3	3	2	3	0	2	4	1
pourcentages autres erreurs (mentale , G.)	0%	4%	8%	5%	13%	13%	9%	13%	0%	9%	17%	4%
différence du nombre des autres erreurs	5	5	2	2	8	4	7	-1	1	11	11	10
différence des autres erreurs en pourcentage	**10%**	**9%**	**0%**	**2%**	**12%**	**2%**	**10%**	**-8%**	**2%**	**19%**	**16%**	**19%**
test du $\chi 2(0,05)$	-2,669	-2,013	-0,613	-2,981	3,202	9,754	4,738	6,683	-3,673	2,208	-0,505	7,131
exercices présentant une différence significative (à 0,05)					**n°5**	**n°10**	**n°4**			**n°3**		**n°11**
différence d'erreurs en pourcentages	**-8%**	**9%**	**17%**	**6%**	**22%**	**38%**	**31%**	**-26%**	**4%**	**26%**	**18%**	**33%**

C. Impact d'un entraînement au calcul mental sur de la résolution écrite de problèmes numériques "classiques"

Afin de faciliter l'analyse des résultats, nous utiliserons le tableau R2 récapitulant les résultats des deux classes entraînées.

Les trois analyses précédentes nous amènent à proposer les éléments de conclusion suivants :

Dans le cas des structures additives, nous constatons qu'un entraînement au calcul mental diminue globalement le nombre des erreurs pour les structures complexes alors que celui-ci est pratiquement inchangé pour les structures simples.
Dans le cas des structures additives complexes, la moitié des problèmes présentent un écart significatif (test du $\chi 2$) ; ce sont des problèmes faisant intervenir des compositions de transformations de même signe ou de signes contraires. Cet écart s'explique à la fois par une diminution du nombre d'erreurs de modèle et du nombre des autres erreurs.

Nous constatons un écart de performances entre classe entraînée et échantillon témoin plus marqué dans le cas de la classe G où la passation écrite s'est effectuée tout de suite après l'entraînement au calcul mental. Dans ce dernier cas, les écarts portent plutôt sur la reconnaissance du modèle.

Ainsi, en résolution écrite, l'impact du calcul mental se traduit par une diminution globale du nombre d'erreurs (de tous les types) seulement dans le cas des structures additives complexes. Il ne porte sur la reconnaissance du modèle que dans le cas où la passation s'inscrit dans une pratique régulière.

Dans le cas des structures multiplicatives, nous constatons qu'un entraînement au calcul mental conduit globalement à une diminution du nombre d'erreurs. Notons cependant que deux problèmes (calcul d'un volume et calcul du cardinal d'un produit cartésien) font exception. Cela peut s'expliquer par leur caractère peu familier pour des élèves de CM2.

Dans le cas des structures simples : l'écart de performances est en faveur de la classe entraînée et porte sur les erreurs de calculs ou de données.

Dans le cas des structures complexes, l'impact du calcul mental, quand il existe, s'observe dans les problèmes de calcul d'aire et de division ; l'écart de performances porte sur tous les types d'erreurs.

Notons que les résultats sont semblables pour les deux classes entraînées ; le temps ne semble donc pas être un facteur de perturbation.

Tableau R2 : comparaison des performances en résolution écrite entre deux classes entraînées (G et D) et un échantillon témoin (structures complexes)

STRUCTURES	**ADDITIVES**						**MULTIPLICATIVES**					
TYPE DE PROBLÈME NOM	n°1 (+,di,c)	n°6 (+,3,s)	n°9 (+,3,c)	n°2 (-,3,s)	n°5 (-,3,c)	n°10 (-,di,c)	n°4 (x,2,c)	n°7 (x,3,c)	n°12 (x,di,c)	n°3 (/,di,c)	n°8 (/,rest,c)	n°11 (/,2,c)
total d'erreurs (résolution écrite , D.)	7	6	14	5	36	26	21	9	24	23	20	20
pourcentages d'erreurs (résolution écrite , D.)	15%	14%	29%	11%	80%	54%	45%	20%	50%	49%	43%	42%
total d'erreurs (résolution écrite , D. entraînée)	10	3	4	3	30	16	6	17	28	10	14	6
pourcentages d'erreurs (résolution écrite , D. entraînée)	23%	7%	9%	7%	65%	35%	14%	38%	62%	23%	31%	13%
différence d'erreurs en pourcentages	**-8%**	**7%**	**20%**	**4%**	**15%**	**19%**	**31%**	**-18%**	**-12%**	**26%**	**12%**	**28%**
total modèles erronés et non réponses(écrite , D.)	2	0	10	2	25	19	12	7	23	10	5	9
pourcentages modèles erronés et non réponses (écrite , D.)	4%	0%	21%	4%	56%	40%	26%	15%	48%	21%	11%	19%
total modèles erronés et non réponses (écrite , D. entraînée)	4	1	2	1	26	12	3	12	27	6	6	4
pourcentages modèles erronés et non réponses (écrite , D. entraînée)	9%	2%	4%	2%	57%	26%	7%	27%	60%	14%	13%	9%
différence de modèles erronés en pourcentage	**-5%**	**-2%**	**16%**	**2%**	**-1%**	**13%**	**19%**	**-11%**	**-12%**	**7%**	**-2%**	**10%**
total autres erreurs (écrite , D.)	5	6	4	3	11	7	9	2	1	13	15	11
pourcentages autres erreurs (écrite , D.)	10%	14%	8%	6%	24%	15%	19%	4%	2%	28%	33%	23%
total autres erreurs (écrite , D. entraînée)	6	2	2	2	4	4	3	5	1	4	8	2
pourcentages autres erreurs (écrite , D. entraînée)	14%	4%	4%	5%	9%	9%	7%	11%	2%	9%	18%	4%
différence des autres erreurs en pourcentage	**-3%**	**9%**	**4%**	**2%**	**16%**	**6%**	**12%**	**-7%**	**0%**	**18%**	**15%**	**18%**
test du $\chi 2(0{,}05)$	-1,497	-1,863	5,491	-3,165	2,443	3,122	12,59	5,645	-1,151	7,508	-1,039	11,02
			n°9		**n°5**	**n°10**	**n°4**			**n°3**		**n°11**
différence d'erreurs en pourcentages	**-8%**	**7%**	**20%**	**4%**	**15%**	**19%**	**31%**	**-18%**	**-12%**	**26%**	**12%**	**28%**

En conclusion, nous allons essayer de préciser l'impact d'un entraînement au calcul mental sur la résolution écrite de problèmes selon le degré de complexité de la structure sous-jacente.

Structures simples additives : nous n'avons pas observé d'impact significatif, les erreurs étant trop peu nombreuses pour en permettre la mesure.

Structures simples multiplicatives : nous observons un impact important se traduisant par une diminution des erreurs de calcul et de données.

Structures complexes additives : nous observons un impact portant sur tous les types d'erreurs bien que la diminution du nombre des erreurs de modèle soit plus importante dans la classe où la passation s'inscrit dans une pratique régulière.

Structures multiplicatives complexes sous-jacentes à des problèmes **relativement familiers** aux élèves de CM2 (calcul d'aire, de division) : nous observons un impact se traduisant par une diminution de tous les types d'erreurs.

Structures multiplicatives complexes sous-jacentes à des **problèmes peu familiers** aux élèves de CM2 (calcul de volume ou du cardinal d'un produit cartésien) : les résultats semblent dépendre du degré de familiarité des élèves avec le problème posé. Les élèves de l'échantillon témoin ont sans doute plus fréquenté ce type de problème.

Un entraînement régulier au calcul mental semble donc avoir un impact positif lors de la résolution écrite d'une certaine catégorie de problèmes : ceux-ci doivent être relativement familiers aux élèves sans toutefois l'être trop ; leur degré de complexité ne doit être ni trop faible, ni trop fort.
La nature des erreurs concernées par cet impact dépend du degré de complexité du problème : quand la structure est simple, ce sont des erreurs de calcul et de données ; quand la structure est plus complexe, l'impact porte sur tous les types d'erreurs. Il ne porte sur la reconnaissance du modèle que dans le cas des structures additives complexes lorsque la passation s'inscrit dans une pratique régulière de calcul mental.

III-2) IMPACT DU CALCUL MENTAL SUR L'ÉCART DE PERFORMANCES ENTRE RÉSOLUTION ÉCRITE ET MENTALE DES MÊMES PROBLÈMES NUMÉRIQUES "CLASSIQUES"

Nous utilisons ici les résultats du travail de mémoire de recherche de DEA de didactique des mathématiques (université de Paris VII) de Liliane SOSSA[5] .

Dans un premier temps, l'analyse des différences de performances pour un échantillon témoin doit nous permettre de cerner de façon générale les écarts entre résolution écrite et résolution mentale de problèmes.

Dans un second temps, la comparaison avec les différences observées dans les classes entraînées doit nous permettre de préciser l'impact du calcul mental.

Les différences de pourcentages correspondent aux écarts observés entre résolution écrite et résolution mentale pour un même type de classe. Un pourcentage négatif correspond à un pourcentage plus important d'erreurs en résolution mentale.

III-2-1) Analyse des écarts de performances pour un échantillon témoin

A- Structures simples

Cette analyse porte sur 12 problèmes à structure simple. Globalement les résultats sont meilleurs en résolution écrite qu'en résolution mentale (cf. tableau n°9).

Structures additives

(5) L. SOSSA a participé partiellement à l'expérimentation dans le cadre de son DEA.

Tous les problèmes sont mieux réussis par écrit. Trois problèmes présentent un écart significatif : le n°10 (addition de 3 termes), le n°12 (recherche d'un état final avec deux additions) et le n°15 (recherche d'un complément). L'écart porte sur les erreurs de calcul et de tri de données.

structures multiplicatives

Les problèmes sont globalement mieux réussis à l'écrit et les écarts significatifs sont au nombre de 2. Les différences de performances concernent tous les types d'erreurs.

Dans ces deux classes non entraînées, dans le cas des structures simples, nous constatons donc de **meilleurs résultats en résolution écrite** ; l'écart existe à la fois pour les problèmes additifs et multiplicatifs. Notons toutefois que les écarts de pourcentages entre écrit et mental sont plus importants pour les structures multiplicatives que pour les structures additives.
Les erreurs concernées sont de tous les types, avec une prédominance pour les erreurs de calcul et de tri de données.

Tableau n°9 : analyse des écarts de performances entre résolution écrite et mentale pour un échantillon témoin, cas des structures simples (classes de madame K, 1994/95/96)

STRUCTURES	ADDITIVES						MULTIPLICATIVES					
	n°4	n°10	n°12	n°6	n°11	n°15	n°1	n°2	n°20	n°9	n°17	n°23
TYPE DE PROBLÈME	(+,2,s)	(+,di,s)	(+,3,s)	(-,3,s)	(-,di,s)	(-,2,s)	(x,2,s)	(x,di,s)	(x,3,s)	(/,reste)	(/,2,s)	(/,di,s)
Total d'erreurs (résolution écrite, classe non entraînée)	4	6	5	8	20	4	11	24	23	10	18	21
Pourcentages d'erreurs (résolution écrite)	8%	13%	11%	17%	44%	8%	23%	50%	49%	22%	38%	44%
Total d'erreurs (résolution mentale)	7	12	10	8	26	12	9	24	27	25	18	34
Pourcentages d'erreurs (résolution mentale)	14%	25%	21%	17%	54%	25%	18%	49%	56%	52%	38%	72%
Différence d'erreurs en pourcentages	**-6%**	**-12%**	**-10%**	**0%**	**-10%**	**-17%**	**5%**	**1%**	**-7%**	**-30%**	**1%**	**-29%**
Total modèles erronés et non réponse (écrite, classe non entraînée)	1	0	0	2	17	0	0	3	6	2	7	6
Pourcentages modèles erronés et non réponses (écrite, classe non entraînée)	2%	0%	0%	4%	38%	0%	0%	6%	13%	4%	15%	13%
Total modèles erronés et non réponse (résolution mentale)	3	1	0	0	23	1	2	3	4	13	5	9
Pourcentages modèles erronés et non réponses (résolution mentale)	6%	2%	0%	0%	48%	2%	4%	6%	8%	27%	10%	19%
Différence de modèles erronés en pourcentages	**-4%**	**-2%**	**0%**	**4%**	**-10%**	**-2%**	**-4%**	**0%**	**4%**	**-23%**	**4%**	**-7%**
Total autres erreurs (écrite, classe non entraînée)	3	6	5	6	3	4	11	21	17	8	11	15
Pourcentages autres erreurs (écrite, classe non entraînée)	6%	13%	11%	13%	7%	8%	23%	44%	36%	18%	23%	31%
Total autres erreurs (résolution mentale)	4	11	10	8	3	11	7	21	23	12	13	25
Pourcentages autres erreurs (résolution mentale)	8%	23%	21%	17%	6%	23%	14%	43%	48%	25%	27%	53%
différence des autres erreurs en pourcentage	**-2%**	**-10%**	**-10%**	**-4%**	**0%**	**-15%**	**9%**	**1%**	**-12%**	**-7%**	**-4%**	**-22%**
test du $\chi 2(0,05)$	-1,5	1,81	0,75	-3,8	-2,0	13,6	-3,2	-3,81	-2,8	20,9	-3,8	11,7
		n°10	n°12			n°15				n°9		n°23
Différence d'erreurs en pourcentages		**-12%**	**-10%**			**-17%**				**-30%**		**-29%**

B- Structures complexes

Il y a toujours moins d'erreurs en résolution écrite qu'en résolution mentale (cf. tableau n°10).

Structures additives

Les écarts de performances sont toujours en faveur de l'écrit. Trois problèmes présentent un écart significatif : problème n°1 (calcul d'un état initial), problèmes n°2 (calcul d'un état final) et n°5 (composition de transformations de signes contraires). Ces écarts sont dus à une diminution de tous les types d'erreurs entre l'oral et l'écrit.

Structures multiplicatives

La aussi, les écarts de performances sont toujours en faveur de l'écrit. Trois problèmes présentent des écarts significatifs, ce sont les problèmes les plus difficiles : problème n°12 (calcul du cardinal d'un produit cartésien), problème n°8 (division avec reste) et problème n°11 (division portant sur calcul d'aire). Les erreurs concernées sont des erreurs de modèle

Tableau n°10 : analyse des écarts de performances entre résolution écrite et mentale pour un échantillon témoin (structures complexes)

STRUCTURES	STRUCTURES ADDITIVES						STRUCTURES MULTIPLICATIVES					
TYPE DE PROBLÈME **TYPE D'ERREURS**	n°1 (+,di,c)	n°6 (+,3,s)	n°9 (+,3,c)	n°2 (-,3,s)	n°5 (-,3,c)	n°10 (-,di,c)	n°4 (x,2,c)	n°7 (x,3,c)	n°12 (x,di,c)	n°3 (/,di,c)	n°8 (/,rest,c)	n°11 (/,2,c)
total d'erreurs (résolution écrite , D.)	7	6	14	5	36	26	21	9	24	23	20	20
pourcentages d'erreurs (résolution écrite , D.)	15%	14%	29%	11%	80%	54%	45%	20%	50%	49%	43%	42%
total d'erreurs (résolution mentale , D.)	17	9	17	10	45	30	21	11	40	26	32	28
pourcentages d'erreurs (résolution mentale , D.)	35%	19%	35%	21%	94%	64%	45%	23%	85%	55%	67%	60%
différence d'erreurs en pourcentages	**-21%**	**-5%**	**-6%**	**-11%**	**-14%**	**-10%**	**0%**	**-3%**	**-35%**	**-6%**	**-23%**	**-18%**
total modèles erronés et non réponses(résolution écrite , D.)	2	0	10	2	25	19	12	7	23	10	5	9
pourcentages modèles erronés et non réponses (écrite , D.)	4%	0%	21%	4%	56%	40%	26%	15%	48%	21%	11%	19%
total modèles erronés et non réponses (mentale, D.)	17	0	13	0	35	16	17	5	38	13	16	15
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale , D.)	35%	0%	27%	0%	73%	34%	36%	10%	81%	28%	33%	32%
différence de modèles erronés en pourcentage	**-31%**	**0%**	**-6%**	**4%**	**-17%**	**6%**	**-11%**	**5%**	**-33%**	**-6%**	**-22%**	**-13%**
total autres erreurs(résolution écrite, D.)	5	6	4	3	11	7	9	2	1	13	15	11
pourcentages autres erreurs (écrite, D.)	20%	26%	16%	12%	48%	28%	36%	9%	4%	52%	65%	44%
total autres erreurs (mentale, D.)	0	9	4	10	10	14	4	6	2	13	16	13
pourcentages autres erreurs (mentale, D.)	0%	36%	16%	42%	40%	56%	17%	24%	8%	54%	64%	52%
différence autres erreurs en pourcentage	**20%**	**-10%**	**0%**	**-30%**	**8%**	**-28%**	**19%**	**-15%**	**-4%**	**-2%**	**1%**	**-8%**
test du $\chi 2$ (0,05)	12,88	-2,774	-2,932	1,755	1,832	-2,072	-3,84	-3,497	19,33	-3,074	6,663	2,361
	n°1			**n°2**	**n°5**				**n°12**		**n°8**	**n°11**
différence d'erreurs en pourcentages	**-21%**	**-5%**	**-6%**	**-11%**	**-14%**	**-10%**	**0%**	**-3%**	**-35%**	**-6%**	**-23%**	**-18%**

C- Conclusion portant sur les écarts de performances entre résolution mentale et résolution écrite pour un échantillon témoin

Les deux analyses précédentes montrent que les performances sont meilleures en résolution écrite.

La nature des erreurs concernées dépend du degré de complexité du problème :

Dans le cas des structures simples additives : les erreurs responsables de l'écart sont des erreurs de calcul et de tri de données.
Dans le cas des structures simples multiplicatives ainsi que des structures complexes additives : tous les types d'erreurs sont concernés.
Dans le cas des structures complexes multiplicatives : il s'agit de non reconnaissance du modèle.

III-2-2) Analyse des écarts de performances dans deux classes entraînées (D en 91/92 et G en 92/93)

A. Structures simples

Cette étude ne concerne qu'une seule classe (Madame D. 91/92 ; cf. tableau n°11).

Cette étude portant sur un échantillon de 25 élèves, nous n'avons pas fait de test du $\chi 2$.

Structures additives

Nous n'observons pas d'écart significatif ; toutefois les résultats sont meilleurs en résolution écrite qu'en résolution mentale.

Structures multiplicatives

Les résultats sont systématiquement meilleurs en résolution écrite. Les écarts sont significatifs (écarts supérieurs à 18%) pour 4 problèmes sur 6 ; ils portent sur les erreurs de calculs et de tri de données.

Tableau n°11 : écart de performances entre résolution écrite et résolution mentale des problèmes à structure simple (classe D entraînée 91/92)

STRUCTURES	**ADDITIVES**						**MULTIPLICATIVES**					
problèmes **type d'erreurs**	**n°4 (+,2,s)**	**n°6 (-,3,s)**	**n°10 (+,di,s)**	**n°11 (-,di,s)**	**n°12 (+,3,s)**	**n°15 (-,2,s)**	**n°1 (x,2,s)**	**n°2 (x,di,s)**	**n°9 div-rest**	**n°17 (:,2,s)**	**n°20 (x,3,s)**	**n°23 (:,di,s)**
total des erreurs (résolution mentale)	3	3	1	8	5	2	5	5	9	11	11	22
total des erreurs (résolution écrite)	1	2	1	7	2	3	1	4	5	7	3	2
différence résolution mental/écrite	-2	-1		-1	-3	1	-4	-1	-4	-4	-8	-20
% d'erreurs (résolution mentale, sur 22 élèves)	14%	14%	5%	36%	23%	9%	23%	23%	41%	50%	50%	100%
% d'erreurs (résolution écrite, sur 20-21 élèves)	5%	9%	5%	32%	9%	14%	5%	18%	23%	33%	14%	10%
différence résolution mentale/écrite	**-9%**	**-5%**	**0%**	**-5%**	**-14%**	**5%**	**-18%**	**-5%**	**-18%**	**-17%**	**-36%**	**-90%**
total modèles erronés ou des non réponses (résol. ment.)	0	1	1	6	2	0	0	0	4	2	0	6
total modèles erronés ou des non réponses (résol. écrite)	0	1	1	7	1	0	0	1	2	2	3	2
différence résolution mental/écrite	0	0	0	1	-1	0	0	1	-2	0	3	-4
% modèles erronés ou non réponses (réso. ment.) (22 él)	0%	5%	5%	27%	9%	0%	0%	0%	18%	9%	0%	27%
% modèles erronés ou non réponses (réso. écrite) (20-21 él)	0%	5%	5%	35%	5%	0%	0%	5%	10%	10%	14%	10%
différence résolution mentale/écrite	**0%**	**0%**	**0%**	**8%**	**-4%**	**0%**	**0%**	**5%**	**-8%**	**0%**	**14%**	**-18%**
total autres erreurs (résol. ment.)	3	2	0	2	3	2	5	5	5	9	11	16
total autres erreurs (résol. écrite)	1	1	0	0	1	3	1	3	3	5	0	0
différence résolution mental/écrite	-2	-1	0	-2	-2	1	-4	-2	-2	-4	-11	-16
% autres erreurs (réso. ment.) (22 él)	14%	9%	0%	9%	14%	9%	23%	23%	23%	41%	50%	73%
% autres erreurs (résolution écrite) (20-21 él)	5%	4%	0%	-3%	4%	14%	5%	13%	13%	24%	0%	0%
différence autres erreurs résolution mental/écrite	**-9%**	**-5%**	**0%**	**-12%**	**-10%**	**5%**	**-18%**	**-10%**	**-10%**	**-17%**	**-50%**	**-73%**

B. Structures complexes

Cette étude concerne deux classes (classe D. 91/92 et classe G. 92/93).

Classe D (cf. tableau n°12)

Structures additives

Les résultats ne sont pas toujours meilleurs en résolution écrite ; en particulier, les problèmes soustractifs n°19 et 21 (calcul d'un état initial, composition de transformations de signes contraires) sont mieux réussis en résolution mentale qu'en résolution écrite.
Nous pouvons expliquer les résultats au problème n°21 par un effet d'apprentissage à court terme et éphémère. Ainsi, le problème n°7, de même type (composition de transformations de signes contraires) a été proposé en résolution mentale en deuxième séance et le problème 21 à la sixième séance. On peut faire l'hypothèse qu'entre les deux, il y a eu apprentissage de la structure du problème. Mais cet apprentissage étant fragile, il n'a plus le même effet sur la résolution écrite qui s'est déroulé deux mois après.
On ne constate donc pas d'écart significatif entre les deux modes de résolution.

Structures multiplicatives

Les écarts sont significatifs pour quatre problèmes sur 6 (calcul d'aires, division avec donnée inutile, produit cartésien). Ils portent essentiellement sur les erreurs de modèle.
On constate donc un net écart entre les deux modes de résolution.

Conclusion portant sur la classe D.

Dans cette classe entraînée au calcul mental, nous constatons de meilleurs résultats en résolution écrite bien que ce soit moins net pour les problèmes à structure additive, en particulier pour les "jeux de l'autobus".
La diminution significative du nombre des erreurs s'observe toujours dans des problèmes à structure multiplicative. Dans le cas des structures simples, elle concerne surtout les calculs ou le tri de données ; dans le cas des structures complexes, elle concerne principalement les erreurs de modèle.

Tableau n°12 : écart de performances entre résolution écrite et résolution mentale des problèmes à structures complexes (classe D entraînée 91/92)

STRUCTURES	**ADDITIVES**						**MULTIPLICATIVES**					
problèmes type d'erreurs	**n°3 (+,di,c)**	**n°5 (+,2,c)**	**n°7 (-,3,c)**	**n°16 (+,3,c)**	**n°19 (-,2,c)**	**n°21 (-,di,c)**	**n°8 (x,2,c)**	**n°13 (x,3,c)**	**n°14 div-reste**	**n°18 (:,di,c)**	**n°22 (:,2,c)**	**n°24 (x,di,c)**
total des erreurs (résolution mentale)	5	1	19	3	3	5	8	6	8	10	14	22
total des erreurs (résolution écrite)	5	1	16	1	5	12	3	6	8	5	4	17
différence résolution mental/écrite			-3	-2	-2	7	-5			-5	-10	-5
% d'erreurs (résolution mentale, sur 22 élèves)	23%	5%	86%	14%	14%	23%	36%	27%	36%	45%	64%	100%
% d'erreurs (résolution écrite, sur 20-21 élèves)	23%	5%	73%	5%	24%	57%	14%	29%	38%	24%	19%	81%
différence résolution mentale/écrite	**0%**	**0%**	**-14%**	**-9%**	**10%**	**34%**	**-23%**	**1%**	**2%**	**-22%**	**-45%**	**-19%**
total modèles erronés ou des non réponses (résol. ment.)	5	1	15	1	3	1	6	6	5	5	10	21
total modèles erronés ou des non réponses (résol. écrite)	4	1	15	1	0	11	2	4	4	3	3	16
différence résolution mental/écrite	-1	0	0	0	-3	10	-4	-2	-1	-2	-7	-5
% modèles erronés ou non réponses (réso. ment.) (22 él)	23%	5%	68%	5%	14%	5%	27%	27%	23%	23%	45%	95%
% modèles erronés ou non réponses (réso. écrite) (20-21 él)	20%	5%	75%	5%	0%	52%	10%	19%	19%	14%	14%	76%
différence résolution mentale/écrite	**-3%**	**0%**	**7%**	**0%**	**-14%**	**48%**	**-17%**	**-8%**	**-4%**	**-8%**	**-31%**	**-19%**
total autres erreurs (résol. ment.)	0	0	4	2	0	4	2	0	3	5	4	1
total autres erreurs (résol. écrite)	1	0	1	0	5	1	1	2	4	2	1	1
différence résolution mental/écrite	1	0	-3	-2	5	-3	-1	2	1	-3	-3	0
% autres erreurs (réso. ment.) (22 él)	0%	0%	18%	9%	0%	18%	9%	0%	14%	23%	18%	5%
% autres erreurs (résolution écrite) (20-21 él)	3%	0%	-2%	0%	24%	5%	4%	10%	19%	10%	5%	5%
différence autres erreurs résolution mental/écrite	**3%**	**0%**	**-20%**	**-9%**	**24%**	**-13%**	**-5%**	**10%**	**5%**	**-13%**	**-13%**	**0%**

Classe G (cf. tableau n°13)

Globalement les résultats sont meilleurs en résolution écrite, sauf pour deux problèmes additifs (n°1 et 6). Sept problèmes présentent des écarts significatifs en faveur de l'écrit s'étalant de 23% à 81%.

Structures additives

Les écarts les plus significatifs s'observent aux problèmes n°5, 9 et 10 qui sont des "jeux de l'autobus". On ne retrouve pas la particularité de ces problèmes, observée dans la classe de Mme D, où la résolution mentale était mieux réussie que la résolution écrite.
Les diminutions d'erreurs concernent tous les types.

Structures multiplicatives

Les résultats sont systématiquement meilleurs en résolution écrite. Les écarts sont significatifs pour 4 problèmes (de 23 % à 81 % d'erreurs en moins à l'écrit). La diminution concerne tous les types d'erreurs avec une prédominance pour les erreurs de modèle.

Conclusion portant sur la classe G

Dans cette deuxième classe entraînée, les écarts de performances entre résolution écrite et résolution mentale sont nettement plus marqués. Ils portent sur tous les types d'erreurs avec une prédominance pour les erreurs de modèle dans le cas des structures multiplicatives.

Tableau n°13 : écarts des performances entre résolution écrite et mentale de problèmes à structure complexe (classe G entraînée 92/93)

STRUCTURES	**STRUCTURES ADDITIVES**						**STRUCTURES MULTIPLICATIVES**					
TYPE DE PROBLÈME / **TYPE D'ERREURS**	n°1 (+,di,c)	n°6 (+,3,s)	n°9 (+,3,c)	n°2 (-,3,s)	n°5 (-,3,c)	n°10 (-,di,c)	n°4 (x,2,c)	n°7 (x,3,c)	n°12 (x,di,c)	n°3 (/,di,c)	n°8 (/,res,c)	n°11 (/,2,c)
total d'erreurs (résolution écrite , G)	5	1	0	1	14	0	3	11	0	5	6	0
pourcentages d'erreurs (résolution écrite , G)	23%	4%	0%	5%	58%	0%	14%	46%	0%	23%	25%	0%
total d'erreurs (résolution mentale , G)	3	0	6	2	20	9	6	11	17	11	10	11
pourcentages d'erreurs (résolution mentale , G)	14%	0%	29%	10%	95%	43%	29%	52%	81%	52%	48%	52%
différence d'erreurs	**2**	**1**	**-6**	**-1**	**-6**	**-9**	**-3**	**0**	**-17**	**-6**	**-4**	**-11**
différence d'erreurs en pourcentages	**8%**	**4%**	**-29%**	**-5%**	**-37%**	**-43%**	**-15%**	**-7%**	**-81%**	**-30%**	**-23%**	**-52%**
total modèles erronés et non réponses(résolution écrite , G)	5	0	0	0	11	0	1	8	0	3	2	0
pourcentages modèles erronés et non réponses (écrite , G)	23%	0%	0%	0%	46%	0%	5%	33%	0%	14%	8%	0%
total modèles erronés et non réponses (mentale , G)	1	0	1	0	17	2	5	9	16	1	5	5
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale , G)	5%	0%	5%	0%	81%	10%	24%	43%	76%	5%	24%	24%
différence du nombre de modèles erronés	**4**	**0**	**-1**	**0**	**-6**	**-2**	**-4**	**-1**	**-16**	**2**	**-3**	**-5**
différence de modèles erronés en pourcentage	**18%**	**0%**	**-5%**	**0%**	**-35%**	**-10%**	**-19%**	**-10%**	**-76%**	**9%**	**-15%**	**-24%**
total autres erreurs(résolution écrite , G)	0	1	0	1	3	0	2	3	0	2	4	0
pourcentages autres erreurs (écrite , G)	0%	4%	0%	5%	13%	0%	9%	13%	0%	9%	17%	0%
total autres erreurs (mentale , G)	2	0	5	2	3	7	1	2	1	10	5	6
pourcentages autres erreurs (mentale , G)	9%	0%	21%	9%	13%	29%	5%	8%	4%	45%	21%	25%
différence du nombre autres erreurs	**-2**	**1**	**-5**	**-1**	**0**	**-7**	**1**	**1**	**-1**	**-8**	**-1**	**-6**
différence autres erreurs en pourcentage	**-9%**	**4%**	**-21%**	**-5%**	**0%**	**-29%**	**5%**	**4%**	**-4%**	**-36%**	**-4%**	**-25%**

C. Conclusion portant sur les écarts de performances entre résolution écrite et résolution mentale de problèmes numériques "classiques" (cf. tableau R3)

Globalement, les résultats sont meilleurs en résolution écrite.

Les analyses précédentes nous conduisent à prendre en compte le degré de complexité des problèmes. *Notons que pour les structures simples, nous n'avons qu'une seule classe entraînée*

Dans le cas des structures simples : les différences de performances entre résolution écrite et résolution mentale **ne sont pas les mêmes** pour la classe entraînée et pour l'échantillon témoin. Pour la classe entraînée, l'impact ne concerne que les structures multiplicatives et porte sur les erreurs de calcul et de données.

Pour l'échantillon témoin, l'impact s'observe dans le cas des problèmes additifs où il porte sur les erreurs de calcul et de données et dans le cas des problèmes multiplicatifs où il porte sur tous les types d'erreurs.

Dans le cas des structures complexes : (voir tableau R3) les différences de performances entre résolution écrite et mentale sont **globalement de même nature** pour les deux classes entraînées et l'échantillon témoin.

Pour les structures additives, elles concernent **tous les types d'erreurs.** On peut noter une différenciation entre les deux classes entraînées : alors que l'échantillon témoin et la classe G présentent tous les deux des écarts significatifs portant sur **tous les types d'erreurs**, la classe entraînée D ne présente pas de différences significatives entre résolution mentale et écrite dans le cas de structures additives complexes.

Pour les structures multiplicatives, elles concernent essentiellement **les erreurs de modèle.**

Tableau R3 : comparaison des performances entre résolution mentale et résolution écrite des mêmes problèmes pour deux classes entraînées (structures complexes)

STRUCTURES	**STRUCTURES ADDITIVES**						**STRUCTURES MULTIPLICATIVES**					
TYPE DE PROBLÈME / **TYPE D'ERREURS**	n°1 (+,di,c)	n°6 (+,3,s)	n°9 (+,3,c)	n°2 (-,3,s)	n°5 (-,3,c)	n°10 (-,di,c)	n°4 (x,2,c)	n°7 (x,3,c)	n°12 (x,di,c)	n°3 (/,di,c)	n°8 (/,rest,c)	n°11 (/,2,c)
total d'erreurs (résolution écrite , classes entraînées)	10	3	1	3	30	12	6	17	17	10	14	4
pourcentages d'erreurs (résolution écrite , classes entraînées)	23%	7%	2%	7%	65%	27%	14%	38%	38%	23%	31%	9%
total d'erreurs (résolution mentale , classes entraînées)	8	5	9	5	39	14	14	17	39	21	18	25
pourcentages d'erreurs (résolution mentale , classes entraînées)	19%	12%	21%	12%	91%	33%	33%	40%	91%	48%	42%	58%
différence d'erreurs en pourcentages	**4%**	**-5%**	**-19%**	**-5%**	**-25%**	**-6%**	**-19%**	**-2%**	**-53%**	**-24%**	**-11%**	**-49%**
total modèles erronés et non réponses(résolution écrite , classes entraînées)	9	1	1	1	26	11	3	12	16	6	6	3
pourcentages modèles erronés et non réponses (écrite , classes entraînées)	20%	2%	2%	2%	57%	24%	7%	27%	36%	14%	13%	7%
total modèles erronés et non réponses (mentale , classes entraînées)	6	2	3	1	32	3	11	15	37	6	10	15
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale , classes entraînées)	14%	5%	7%	2%	74%	7%	26%	35%	86%	14%	23%	35%
différence de modèles erronés en pourcentage	**7%**	**-2%**	**-5%**	**0%**	**-18%**	**17%**	**-19%**	**-8%**	**-50%**	**0%**	**-10%**	**-28%**
total autres erreurs(résolution écrite , classes entraînées)	1	2	0	2	4	1	3	5	1	4	8	1
pourcentages autres erreurs (écrite , classes entraînées)	2%	4%	0%	5%	9%	2%	7%	11%	2%	9%	18%	2%
total autres erreurs (mentale , classes entraînées)	2	3	6	4	7	11	3	2	2	15	8	10
pourcentages autres erreurs (mentale , classes entraînées)	5%	7%	14%	10%	16%	26%	7%	5%	5%	34%	19%	23%
différence autres erreurs en pourcentage	**-2%**	**-3%**	**-14%**	**-5%**	**-8%**	**-23%**	**0%**	**6%**	**-2%**	**-25%**	**-1%**	**-21%**
test du $\chi 2$ (0,05)	-3,424	-2,001	65,55	-2,13	8,467	-3,077	8,556	-3,784	47,39	10,92	-1,522	124,9
problèmes présentant une différence significative			**n°9**		**n°5**		**n°4**		**n°12**	**n°3**		**n°11**
différence d'erreurs en pourcentages	**4%**	**-5%**	**-19%**	**-5%**	**-25%**	**-6%**	**-19%**	**-2%**	**-53%**	**-24%**	**-11%**	**-49%**

IV- INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

Nous proposons une interprétation de nos résultats en faisant référence au modèle de fonctionnement de la mémoire que nous avons adopté.
En utilisant les résultats de psychologie cognitive, nous considérons qu'une pratique régulière de calcul mental peut réduire l'espace des opérations au profit de l'espace consacré au stockage des données et à la représentation du problème.
Toutefois, l'impact du calcul mental peut aussi être le résultat d'un "échauffement", au sens d'une mise en forme, d'une mise en condition intellectuelle pour faire des calculs, des rapprochements, des corrélations, des essais...
Notons enfin qu'il est difficile à priori de déterminer ce qui relève de l'effet d'une simple pratique de calcul mental et ce qui relève des apprentissages plus généraux, en particulier de l'apprentissage de la résolution de problèmes. Cela rend difficile l'appréciation de la part spécifique du calcul mental dans les différences éventuelles de performances.
En effet, dans notre étude, une amélioration de performances en résolution de problèmes peut s'expliquer par un impact du calcul mental mais aussi par un apprentissage de la résolution de problèmes non lié au calcul mental ou encore par un effet de l'institutionnalisation de procédures de calcul mental et/ou de procédures de résolution de problèmes.

1) IMPACT DU RECOURS À L'ÉCRIT SUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES NUMÉRIQUES CLASSIQUES

L'analyse des écarts de performances entre résolution mentale et écrite des problèmes dans un échantillon de deux classes non entraînées confirme l'idée qu'en résolution écrite, la permanence des données, le temps de résolution en général plus long et le recours à un algorithme écrit amènent à de meilleurs résultats.

Toutefois ces écarts ne sont pas dus à des erreurs de même nature selon la complexité du problème.

Nous constatons une évolution de l'impact du recours à l'écrit sur les performances et la nature des erreurs en fonction du niveau de complexité des problèmes traités :
- structures simples additives : écart significatif portant sur la diminution du nombre des erreurs de calcul et de données
- structures simples multiplicatives et structures complexes additives : écart significatif portant sur la diminution de tous les types d'erreurs
- structures complexes multiplicatives : écart significatif portant sur la reconnaissance du modèle.

Ainsi, **dans le cas des structures simples additives**, on peut penser que la reconnaissance du modèle étant aisée, le recours à l'écrit ne se traduit que par une meilleure maîtrise des calculs et des données.

Dans le cas des structures simples multiplicatives ainsi que des structures complexes additives, le modèle est moins familier aux élèves. Le recours à l'écrit se traduit par une diminution de tous les types d'erreurs. Nous pouvons interpréter cela comme une réduction de l'espace des opérations au profit de l'espace réservé à la représentation du problème. En effet, à l'écrit, les calculs sont plus sûrs, moins coûteux et les données restent présentes ; l'espace mental réservé à la représentation du problème est donc plus important. Les élèves peuvent bénéficier de ce transfert car le modèle n'est pas trop familier.

Enfin, **dans le cas des structures complexes multiplicatives**, le modèle est peu familier aux élèves, voire totalement nouveau. Le recours à l'écrit se traduit par une diminution sensible des erreurs de modèle. Comme précédemment, nous pouvons interpréter ce résultat comme la réduction de l'espace des opérations et du stockage des données au profit de l'espace des représentations. Les élèves bénéficient davantage de ce transfert que dans le cas précédent car le modèle leur est peu familier. Nous ne pouvons pas conclure à propos des erreurs de calculs ou de tri de données car notre mode de dépouillement ne nous permet de les prendre en compte dès lors que le modèle est erroné.

Nous pouvons donc illustrer cette interprétation par les schémas ci-dessous :

Schéma n° 1 : résolution standard

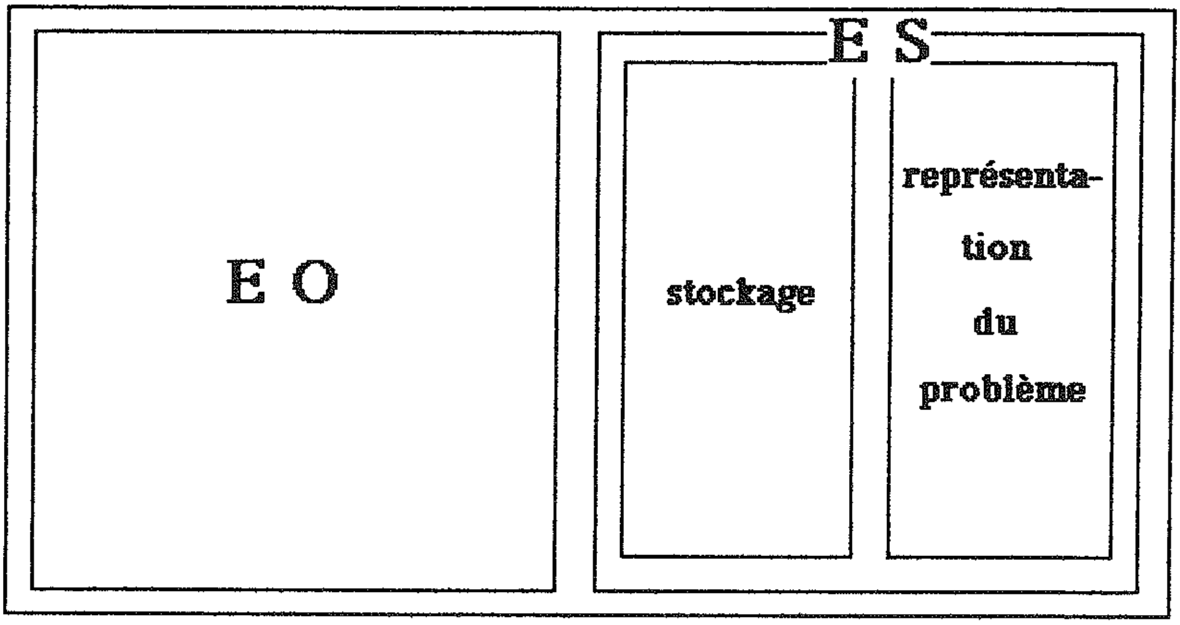
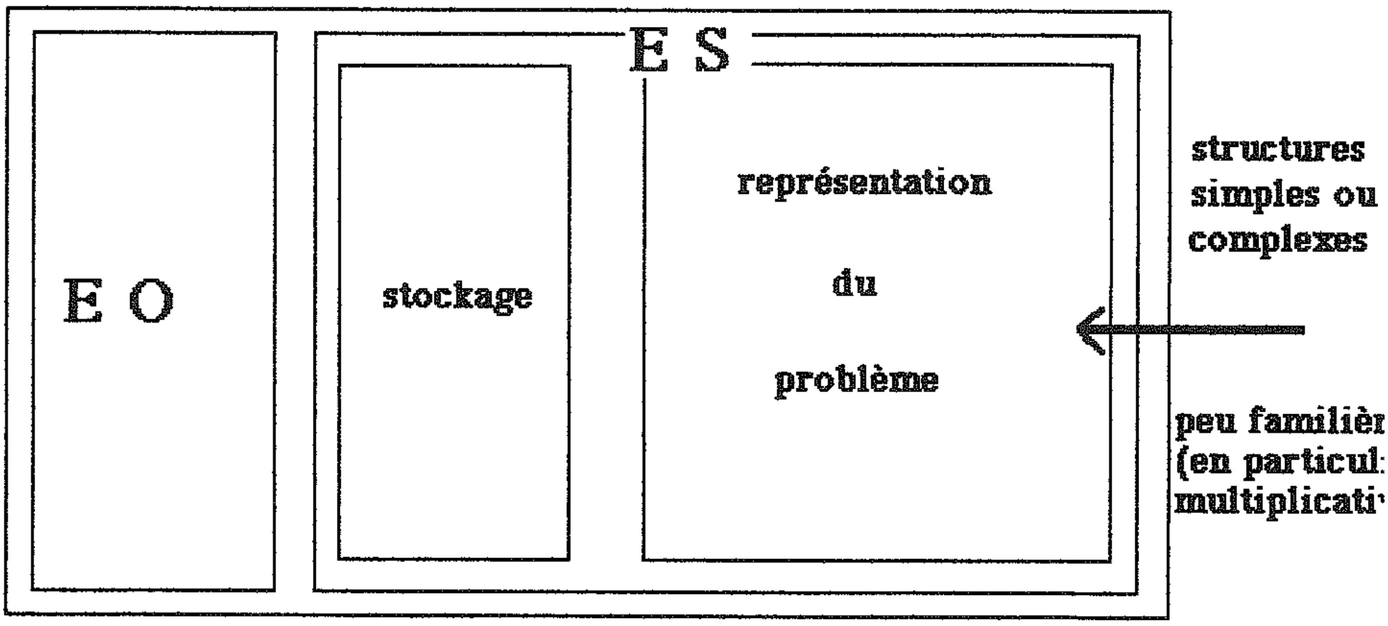


Schéma n° 2 : impact du recours à l'écrit sur la résolution de problèmes, comparaison résolution écrite et résolution mentale, échantillon témoin



Ce schéma rend compte d'une diminution de l'espace des opérations au profit de l'espace réservé au stockage des données et à la construction de représentations du problème. Nous ne pouvons déduire *de façon certaine de nos expérimentations l'existence d'une diminution de l'espace de stockage des données. Nous pouvons toutefois faire l'hypothèse que le recours permanent au texte écrit a cet effet.*

2) IMPACT DU CALCUL MENTAL SUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES NUMÉRIQUES CLASSIQUES

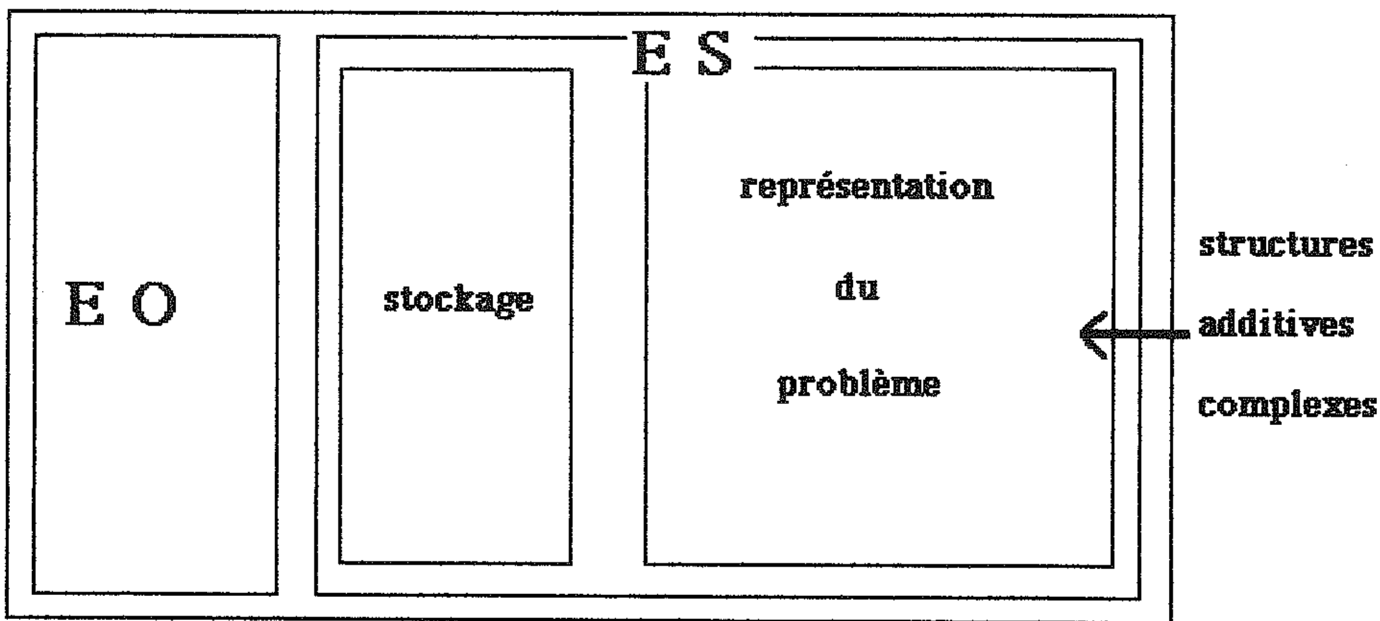
2.1) Résolution mentale

Les analyses précédentes font apparaître **des résultats diversifiés en fonction du degré de complexité et de familiarité** du problème posé.

Dans le cas des structures simples, les écarts de performances sont **faibles** et les erreurs des deux types de classes sont essentiellement des **erreurs de calculs ou de données.**
On peut donner de ces résultats l'interprétation suivante : les élèves reconnaissant facilement le modèle, l'impact d'un entraînement au calcul mental ne peut porter que sur une meilleure maîtrise des calculs et des données. Dans le cas de notre expérimentation, **l'entraînement au calcul mental n'est pas suffisant pour permettre une réduction significative de l'espace des opérations. De plus, dans le cas d'un modèle simple, il n'y a pas nécessité d'accroître l'espace consacré à la représentation du problème.**

Dans le cas des structures complexes, on observe un impact de l'entraînement au calcul mental pour les problèmes additifs. Les erreurs concernées sont des erreurs de modèle.
On peut donner l'interprétation suivante : **le modèle étant moins familier aux élèves, un entraînement régulier au calcul mental libère de l'espace mental et permet, de ce fait, une meilleure reconnaissance du modèle quand celui-ci n'est pas trop nouveau (cas des structures additives complexes).**
On peut illustrer cet effet par le schéma ci-dessous :

Schéma n°3 : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur la résolution mentale de problèmes, cas des structures complexes



Comme dans le cas du schéma précédent, nous faisons l'hypothèse qu'un entraînement au calcul mental réduit à la fois l'espace des opérations et l'espace consacré au stockage des données.

2.2) Résolution écrite

Comme en résolution mentale, **les résultats sont diversifiés en fonction du degré de complexité et de familiarité du problème posé.**

Dans l'analyse de la comparaison entre résolution écrite et résolution mentale de problèmes dans une classe non entraînée, nous avons constaté que l'impact du recours à l'écrit dépend du degré de complexité du problème posé. L'impact du calcul mental sur la résolution écrite de problèmes dépend lui aussi de ce facteur.

Dans le cas des **structures simples,** l'impact du calcul mental n'existe que pour les problèmes multiplicatifs et porte alors sur les erreurs de calcul et de données. **Un entraînement en calcul mental semble donc renforcer l'effet du recours à l'écrit dans le domaine de la maîtrise des calculs uniquement dans le cas des problèmes multiplicatifs.**

Dans le cas des **structures complexes additives,** l'impact du calcul mental est de **même nature que le recours à l'écrit** : il concerne tous les types d'erreurs. **Un entraînement en calcul mental semble donc renforcer l'effet du recours à l'écrit à la fois pour la maîtrise des calculs et la reconnaissance du modèle.**

Enfin, l'entraînement au calcul mental n'a pas le même effet que le recours à l'écrit pour les problèmes relevant **d'une structure complexe multiplicative** : l'écrit favorise la reconnaissance du modèle alors que pour le calcul mental, il faut distinguer entre les structures multiplicatives complexes relativement familières (calcul d'aire, division) et les structures multiplicatives complexes très peu familières (calcul de volume ou du cardinal d'un produit cartésien). Dans le premier cas, l'impact existe et se traduit par une diminution de tous les types d'erreurs ; dans le second cas, un entraînement au calcul mental n'a pas d'effets significatifs. **Un entraînement en calcul mental semble donc renforcer l'effet du recours à l'écrit, uniquement dans le cas des structures relativement familières, pour la maîtrise des calculs comme pour la reconnaissance du modèle.**

En conclusion, il semble qu'un entraînement régulier au calcul mental vienne renforcer le recours à l'écrit pour une certaine catégorie de problèmes seulement : ils doivent être assez familiers aux élèves mais pas trop.
L'effet se traduit par :
- une diminution des erreurs de calcul et de données dans le cas de problèmes familiers (structures simples multiplicatives)
- une diminution de tous les types d'erreurs dans le cas de problèmes un peu moins familiers (composition de transformations additives, calcul d'aire et division).

Nous pouvons donner une interprétation de ces résultats en terme d'espace mnésique : un entraînement régulier au calcul mental réduit l'espace des opérations ; cela se traduit soit par une meilleure maîtrise des calculs et des données quand le modèle est familier, soit par une meilleure reconnaissance du modèle qui s'ajoute à une meilleure maîtrise des calculs quand le modèle est moins familier.

On voit ainsi se dessiner une zone d'influence d'un entraînement au calcul mental sur la résolution écrite de problèmes numériques "classiques" : les problèmes concernés ne doivent être ni trop simples, ni trop complexes. Entre ces deux degrés extrêmes de complexité, nous constatons que l'entraînement au calcul mental vient renforcer graduellement certains effets du recours à l'écrit. Dans les limites définies précédemment, lorsque la structure se complexifie, l'effet porte davantage sur la reconnaissance du modèle.

Notons de plus que cet impact sur la reconnaissance du modèle est renforcé à l'écrit quand la passation s'inscrit dans une pratique régulière du calcul mental.

Nous pouvons illustrer cette interprétation par le schéma suivant :

schéma n°4 : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur la résolution écrite de problèmes

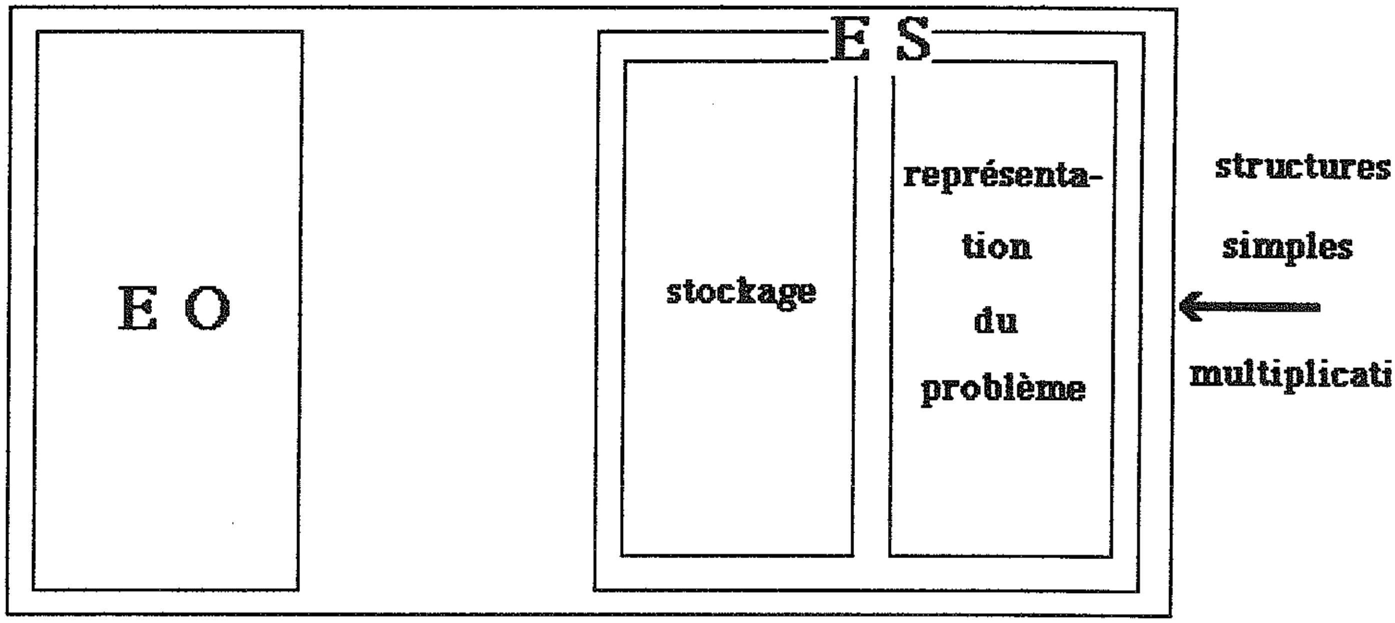
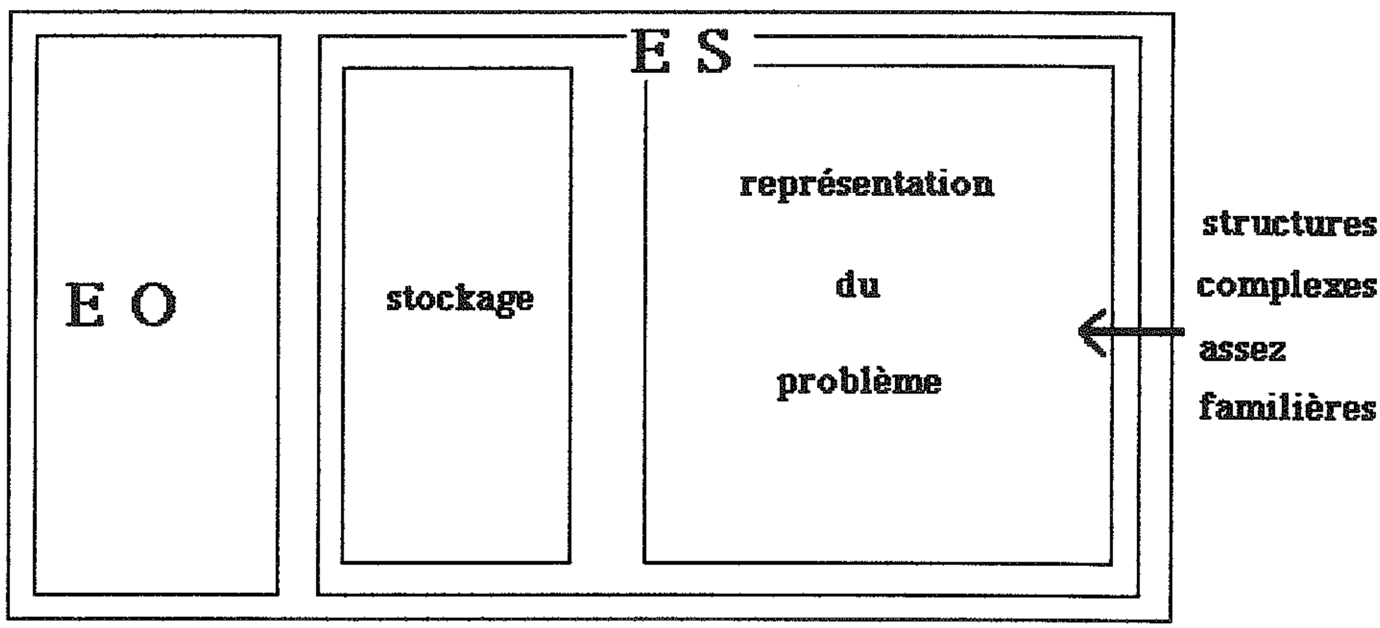


schéma n°4 bis : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur la résolution écrite de problèmes



Même remarque que pour les schémas n°2 et 3.

2.3) Résolution mentale et écrite des mêmes problèmes dans le cas d'un entraînement au calcul mental (analyse qualitative)

Si nous comparons les écarts de performances entre résolution mentale et écrite dans les classes entraînées et non entraînées, nous constatons que les résultats dépendent encore du degré de complexité du problème posé.

Dans le cas des structures simples : les écarts entre résolution mentale et résolution écrite ne sont pas analogues dans la classe entraînée et dans les classes non entraînées : les différences de performances sont plus importantes dans l'échantillon témoin et ne sont pas de même nature que dans la classe entraînée.
Dans le cas des structures additives, alors que l'écart n'est pas significatif dans la classe entraînée, il l'est dans les classes témoins et porte sur les erreurs de calcul et de données.
Dans le cas des structures multiplicatives, l'écart est significatif dans les deux types de classes, mais il porte sur les erreurs de calcul et de tri de données dans la classe entraînée et sur tous les types d'erreurs pour l'échantillon témoin.

Dans le cas des structures complexes : on observe des différences entre les deux types de classes.
Pour les structures additives, l'écart des performances dans les classes entraînées est moins marqué que dans l'échantillon témoin (2 problèmes sur 6 au lieu de 3 sur 6) ; il porte, dans les deux types de classes, sur tous les types d'erreurs.
Pour les structures multiplicatives, l'écart est plus marqué dans les classes entraînées que dans l'échantillon témoin (4 problèmes sur 6 au lieu de 3 sur 6) ; dans le cas des classes entraînées, il porte sur tous les types d'erreurs avec une prédominance pour les erreurs de modèle alors que, dans le cas de l'échantillon témoin, il porte essentiellement sur les erreurs de modèle.

Ces résultats peuvent s'interpréter ainsi :

- **dans le cas des structures simples,** l'écart entre résolution mentale et résolution écrite étant moins important dans la classe entraînée, on peut en conclure **que le calcul mental "rapproche" en quelque sorte l'écrit du mental** en réduisant les écarts. De plus, pour la classe entraînée, dans le cas des structures multiplicatives, l'écart entre écrit et mental ne concerne pas la reconnaissance du modèle (alors que c'est plus le cas dans l'échantillon témoin). Il semble donc qu'un entraînement en **calcul mental favorise la reconnaissance d'un modèle simple multiplicatif.**

- **dans le cas des structures complexes additives,** l'écart entre résolution mentale et résolution écrite étant légèrement moins marqué dans les classes entraînées, on peut en conclure là aussi que le **calcul mental "rapproche" en quelque sorte l'écrit du mental** en réduisant les écarts.

- **dans le cas des structures complexes multiplicatives,** les résultats obtenus ne nous permettent pas de conclure à un effet sur les différences de performances entre résolution écrite et mentale.

Un entraînement au calcul mental semble donc “ rapprocher ” les modes de résolution mentale et écrite dans un type bien particulier de problèmes relevant ici d'une structure simple ou d'une structure complexe additive. Ce jugement est qualitatif, les différences de pourcentages sont trop faibles pour pouvoir conclure de façon quantitative.

V- INFLUENCE DE L'INSTITUTIONNALISATION SUR L'IMPACT D'UN ENTRAINEMENT AU CALCUL MENTAL

Pour cerner le rôle de l'institutionnalisation de procédures de calcul mental sur les performances des élèves lors de résolution de problèmes, nous allons dans un premier temps nous assurer que le poids des institutionnalisations n'est pas le même dans les deux classes entraînées, puis nous comparerons les performances de ces deux classes en prenant en compte ce nouveau critère.

V-1) DIFFÉRENCE DE PRATIQUES DES MAÎTRES DES DEUX CLASSES ENTRAÎNÉES (CLASSE D. 91/92 ET CLASSE G. 92/93)

Pour expliciter ces différences, nous avons proposé aux maîtres des deux classes, en entretien individuel, un questionnaire portant sur les pratiques en calcul mental et en résolution de problèmes (voir annexe n°3). Le dépouillement de ces entretiens a donné les résultats suivants.

Pratiques habituelles comparées de calcul mental par les deux institutrices

Mme G. fait du calcul mental tous les jours à raison de 5 à 10 mn et occasionnellement lors de la résolution de problèmes où elle incite les élèves à calculer si possible mentalement. De plus, elle consacre toutes les semaines un temps spécifique (environ une demi-heure) au calcul mental qui constitue une leçon de mathématiques.
Par contre, Mme D. pratique le calcul mental seulement deux à trois fois par semaine à raison de 5 à 15 mn.

Mme G. fait systématiquement expliciter les procédures de calcul mental utilisées, elle juge cette explicitation indispensable. Elle met en valeur des procédures particulières liées aux valeurs numériques et aux propriétés des opérations (distributivité simple, décomposition additive ou soustractive des nombres...). Par contre, Mme D. fait essentiellement une correction des calculs, elle ne met en valeur que des procédures générales (exemple : comment multiplier un nombre par 10^n).

Pratiques habituelles comparées de résolution de problèmes par les deux institutrices

Mme G. fait de la résolution mentale de problèmes contrairement à Mme D. qui n'en fait jamais.

Dans les deux classes, il n'y a pas vraiment de travail sur la reconnaissance de problèmes types ; les deux institutrices travaillent plutôt sur la mise en place de problèmes de référence lors de la construction du sens des opérations.
Mme G., contrairement à Mme D. essaie à l'aide de schémas, de dessins, de faciliter la construction de représentations des problèmes.
Les deux institutrices n'ont pas les mêmes exigences au sujet de la rédaction de la solution : Mme G demandant une disposition "classique" solutions-opérations alors que Mme D. n'impose aucune rédaction type.
Les deux classes travaillent le tri et le classement des données lors de séances spécifiques.
A chaque fois que c'est mathématiquement possible, Mme G. explicite ou fait expliciter au moins deux procédures différentes alors que cette pratique n'est pas systématique chez Mme D.

Pratiques pendant l'expérience de calcul mental

En calcul mental

Les changements occasionnés par notre expérimentation ne portent pas sur les mêmes points dans les deux classes. Mme G. a instauré un temps spécifique de 30 mn de calcul mental une fois par semaine en plus de sa pratique quotidienne. Mme D. n'a pas modifié la fréquence des séances mais par contre a modifié ses méthodes d'enseignement : elle déclare faire expliciter davantage les procédures des élèves.

En résolution de problèmes

Mme G. n'a pas changé ses pratiques alors que Mme D. déclare par la suite utiliser davantage le cahier de brouillon pour avoir accès aux procédures et erreurs des élèves. De plus, elle fait maintenant de la résolution mentale de problèmes.
Mme G. revient plus systématiquement sur les exercices faits lors de l'expérimentation (reprise de schémas ou reprise du problème de façon détaillée) tandis que ces rappels ne sont pas systématiques chez Mme D. qui se sert toutefois des activités faites plutôt comme situation de référence.

En conclusion, les pratiques des deux institutrices sont très différentes.
Mme G. fait nettement plus de calcul mental que Mme D. tant en exercices spécifiques qu'en résolution de problèmes. Elle explicite systématiquement différentes procédures et exige une disposition précise lors d'une résolution écrite contrairement à Mme D. qui fait preuve de moins d'exigences. Les institutionnalisations de Mme G. sont donc plus fortes, plus fréquentes et plus explicites que celles de Mme D.

V-2) COMPARAISON DES PERFORMANCES DES DEUX CLASSES ENTRAÎNÉES (MME D. 91 / 92 ET MME G. 92/93) AUX RÉSOLUTIONS MENTALE ET ÉCRITE DES MÊMES PROBLÈMES

Les comparaisons quantitatives ne portent que sur les problèmes à structure complexe.

1- Résolution mentale

Les populations testées ne sont pas assez importantes pour justifier un test du $\chi 2$ (cf. tableau n°14).

Structures additives

Le premier problème du jeu de l'autobus portant sur la composition de transformations est celui qui déroute le plus les élèves chaque année (86% d'erreurs chez Mme D et 95% chez Mme G). On constate par la suite, dans les deux classes, un phénomène d'apprentissage sur ce type de problème. Les problèmes de composition de transformations sont mieux réussis dans la classe D. que dans la classe G. ; par contre les problèmes de recherche d'un état initial ou d'un état initial sont mieux réussis dans la classe G. Nous pouvons donner un élément d'explication de cet écart de performances en prenant en compte les conditions de l'institutionnalisation : dans la classe D., l'institutionnalisation a été faite tout de suite après l'activité par l'un des expérimentateurs, alors que celle-ci était souvent différée dans la classe G. et faite par l'institutrice. Toutefois il n'existe pas d'écart significatif entre les deux classes

Structures multiplicatives

Mis à part le cas du problème portant sur un calcul de volume, mieux réussi dans la classe D, sans doute pour des raisons de progression, **il semble que les modèles soient mieux reconnus par les élèves de Mme G. Toutefois les résultats sont meilleurs, tantôt dans la classe de Mme D** (calcul d'un volume, calcul de division avec reste, avec ou sans donnée inutile) **tantôt dans la classe G** (calcul d'aire, calcul d'une dimension d'un rectangle connaissant l'aire et l'autre dimension, calcul du cardinal d'un produit cartésien). Notons que pour le problème de division avec donnée inutile, il y a nettement plus d'erreurs de modèle dans la classe D bien que les résultats à ce problème soient meilleurs dans cette classe, compte tenu du nombre important d'erreurs de calcul dans la classe G. Enfin, les écarts les plus significatifs, pour les erreurs de modèle (écarts de 20-25%), portent sur 3 des problèmes les plus complexes.

Tableau n°14 : comparaison des performances des deux classes entraînées (Mme D 1991/92 et Mme G 1992/93) en résolution mentale

STRUCTURES	ADDITIVES						MULTIPLICATIVES					
TYPE DE PROBLÈME NOM	n°1 (+,di,c)	n°6 (+,3,s)	n°9 (+,3,c)	n°2 (-,3,s)	n°5 (-,3,c)	n°10 (-,di,c)	n°4 (x,2,c)	n°7 (x,3,c)	n°12 (x,di,c)	n°3 (/,di,c)	n°8 (/,rest,c)	n°11 (/,2,c)
total d'erreurs (résolution mentale classe entraînée G)	3	0	6	2	20	9	6	11	17	11	10	11
pourcentages d'erreurs (résolution mentale classe entraînée G)	14%	0%	29%	10%	95%	43%	29%	52%	81%	52%	48%	52%
total d'erreurs (résolution mentale classe entraînée D.)	5	5	3	3	19	5	8	6	22	10	8	14
pourcentages d'erreurs (résolution mentale classe. entraînée D)	23%	23%	14%	14%	86%	23%	36%	27%	100%	45%	36%	64%
différence d'erreurs	-2	-5	3	-1	1	4	-2	5	-5	1	2	-3
différence d'erreurs en pourcentages	**-8%**	**-23%**	**15%**	**-4%**	**9%**	**20%**	**-7%**	**25%**	**-19%**	**7%**	**12%**	**-12%**
total modèles erronés et non réponses(mentale classe entraînée G)	1	0	1	0	17	2	5	9	16	1	5	5
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale classe entraînée G)	5%	0%	5%	0%	81%	10%	24%	43%	76%	5%	24%	24%
total modèles erronés et non réponses (mentale classe entraînée D)	5	2	1	1	15	1	6	6	21	5	5	10
pourcentages modèles erronés et non réponses (mentale classe entraînée D)	23%	9%	5%	5%	68%	5%	27%	27%	95%	23%	23%	45%
différence du nombre de modèles erronés	-4	-2	0	-1	2	1	-1	3	-5	-4	0	-5
différence de modèles erronés en pourcentage	**-18%**	**-9%**	**0%**	**-5%**	**13%**	**5%**	**-3%**	**16%**	**-19%**	**-18%**	**1%**	**-21%**
total autres erreurs(mentale classe entraînée G)	2	0	5	2	3	7	1	2	1	10	5	6
pourcentages autres erreurs (mentale classe entraînée G)	10%	0%	24%	10%	14%	33%	5%	10%	5%	48%	24%	29%
total autres erreurs (mentale classe entraînée D)	0	3	2	2	4	4	2	0	1	5	3	4
pourcentages autres erreurs (mentale classe entraînée D)	0%	14%	9%	9%	18%	18%	9%	0%	5%	23%	14%	18%
différence du nombre des autres erreurs	2	-3	3	0	-1	3	-1	2	0	5	2	2
différence des autres erreurs en pourcentage	**10%**	**0%**	**15%**	**1%**	**-4%**	**15%**	**-4%**	**10%**	**0%**	**25%**	**10%**	**11%**

2- Résolution écrite (cf. tableau n°15)

Structures additives

Globalement, les résultats sont plutôt meilleurs dans la classe G. Les écarts les plus significatifs (écarts de 18 et 40%) **s'observent dans les problèmes de composition de transformations de signes contraires.** Ces résultats sont inversés par rapport à la résolution mentale où l'avantage était en faveur de la classe D.. Nous pouvons donner un élément d'explication prenant en compte les conditions de l'institutionnalisation : dans la classe D, elle a été faite par un des deux expérimentateurs immédiatement après la résolution ; on peut donc estimer qu'elle a été efficace à court terme comme le confirment les résultats de la résolution mentale. Par contre, à long terme, c'est l'institutionnalisation faite dans la classe G par l'institutrice qui s'est révélée la plus efficace. En effet, cette institutionnalisation s'est déroulée sur un temps plus long et a été assortie d'exercices d'entraînement.

Structures multiplicatives

Comme pour la résolution mentale, nous mettons à part le problème du volume, toujours mieux réussi dans la classe D que dans la classe G. **Pour les autres problèmes, les résultats sont toujours meilleurs dans la classe G, mais les écarts sont très faibles sauf pour le calcul du nombre d'éléments d'un produit cartésien** (35%). Dans ce dernier cas, on peut penser que l'institutionnalisation a été nettement plus forte dans la classe G que dans la classe D.

Nous constatons, entre les deux classes, un écart de performances plus faible à l'écrit qu'en résolution mentale, sauf pour le calcul du cardinal d'un produit cartésien. **Il semble donc que, dans le cas des structures multiplicatives, le recours à l'écrit égalise les performances des deux classes.**

Tableau n°15 : comparaison des performances des deux classes entraînées (Mme D 1991/92 et Mme G 1992/93) en résolution écrite

STRUCTURES	ADDITIVES						MULTIPLICATIVES					
TYPE DE PROBLÈME NOM	n°1 (+,di,c)	n°6 (+,3,s)	n°9 (+,3,c)	n°2 (-,3,s)	n°5 (-,3,c)	n°10 (-,di,c)	n°4 (x,2,c)	n°7 (x,3,c)	n°12 (x,di,c)	n°3 (/,di,c)	n°8 (/,rest,c)	n°11 (/,2,c)
total d'erreurs (résolution écrite , classe entraînée G)	5	1	3	1	14	4	3	11	11	5	6	2
pourcentages d'erreurs (résolution écrite , classe entraînée G)	23%	4%	13%	5%	58%	17%	14%	46%	46%	23%	25%	8%
total d'erreurs (résolution écrite , classe entraînée D)	5	2	1	2	16	12	3	6	17	5	8	4
pourcentages d'erreurs (résolution écrite , classe entraînée D)	23%	9%	5%	9%	76%	57%	14%	29%	81%	24%	38%	19%
différence d'erreurs	0	-1	2	-1	-2	-8	0	5	-6	0	-2	-2
différence d'erreurs en pourcentages	**0%**	**-5%**	**8%**	**-5%**	**-18%**	**-40%**	**-1%**	**17%**	**-35%**	**-1%**	**-13%**	**-11%**
total modèles erronés et non réponses(écrite , classe entraînée G)	5	0	1	0	11	1	1	8	11	3	2	1
pourcentages modèles erronés et non réponses (écrite , classe entraînée G)	23%	0%	4%	0%	46%	4%	5%	33%	46%	14%	8%	4%
total modèles erronés et non réponses (écrite , classe entraînée D)	4	1	1	1	15	11	2	4	16	3	4	3
pourcentages modèles erronés et non réponses (écrite , classe entraînée D)	20%	5%	5%	5%	71%	52%	10%	19%	76%	14%	19%	14%
différence du nombre de modèles erronés	1	-1	0	-1	-4	-10	-1	4	-5	0	-2	-2
différence de modèles erronés en pourcentage	**3%**	**-5%**	**-1%**	**-5%**	**-25%**	**-38%**	**-5%**	**14%**	**-30%**	**0%**	**-11%**	**-10%**
total autres erreurs (écrite , classe entraînée G)	0	1	2	1	3	3	2	3	0	2	4	1
pourcentages autres erreurs (écrite , classe entraînée G)	0%	4%	8%	5%	13%	13%	9%	13%	0%	9%	17%	4%
total autres erreurs (écrite , classe entraînée D)	1	1	0	1	1	1	1	2	1	2	4	1
pourcentages autres erreurs (écrite , classe entraînée D)	3%	4%	0%	4%	5%	5%	4%	10%	5%	10%	19%	5%
différence du nombre des autres erreurs	-1	0	2	0	2	2	1	1	-1	0	0	0
différence des autres erreurs en pourcentage	**-3%**	**0%**	**8%**	**0%**	**7%**	**7%**	**5%**	**3%**	**-5%**	**-1%**	**-2%**	**-1%**

3 - Conclusion

On peut donner une interprétation des écarts de performances entre les deux classes en tenant compte des conditions de l'institutionnalisation pratiquée. L'institutionnalisation a été plus longue, plus régulière et plus consistante dans la classe G. Son impact est plus sensible dans deux cas :

- en résolution mentale, grâce en particulier à une meilleure reconnaissance de modèles multiplicatifs

- en résolution écrite, grâce à de meilleures performances dues à une meilleure reconnaissance du modèle dans 3 problèmes à structure complexe (composition de transformations de signes contraires et calcul du cardinal d'un produit cartésien).

Globalement, les résultats sont donc plutôt meilleurs dans la classe de Mme G. ayant bénéficié d'une institutionnalisation forte. Toutefois, ces écarts ne sont marqués que pour certains problèmes à structure complexe (additive pour la résolution écrite, multiplicative pour la résolution mentale) et portent sur une meilleure reconnaissance du modèle.

Ainsi, une institutionnalisation forte de procédures de calcul mental n'influe pas systématiquement sur les performances des élèves en résolution de problèmes. Elle a un effet plus sensible dans le cas des problèmes les plus complexes et conduit dans ce cas à une meilleure reconnaissance du modèle ; cet effet est plus net à l'écrit qu'en résolution mentale.

Si nous comparons l'effet d'un entraînement au calcul mental (par rapport à une classe témoin) et l'effet d'une institutionnalisation forte (dans une classe entraînée), il semble que l'institutionnalisation renforce l'impact d'un entraînement au calcul mental en accroissant les capacités de reconnaissance des modèles les plus complexes.

Un entraînement régulier au calcul mental ne suffit pas pour permettre aux élèves de reconnaître certains modèles trop complexes. Par contre, ceux-ci sont mieux reconnus quand cet entraînement s'accompagne d'une institutionnalisation forte. Il semble donc que dans ce cas, **les conditions créées par cet entraînement ne portent leurs fruits que si une médiation plus importante de l'adulte intervient.**
Nous rejoignons ici les résultats de travaux de Vygotsky portant notamment sur le rôle d'assistance et de médiation de l'adulte lors des apprentissages de l'enfant et sur la "zone de proche développement" [25].

De plus, l'inversion des résultats des deux classes entre résolution mentale et résolution écrite de problèmes de composition de transformations additives montre **qu'une institutionnalisation locale est efficace à court terme alors qu'une institutionnalisation régulière et continue se révèle efficace à long terme.**

VI- CONCLUSION

Le tableau ci-dessous résume nos observations. Nous constatons **qu'un entraînement régulier au calcul mental améliore les performances des élèves pour une certaine catégorie de problèmes** : ces problèmes doivent être **assez familiers aux élèves mais pas trop.** Les problèmes concernés relèvent des **structures additives complexes et des structures multiplicatives simples ou relativement familières** aux élèves. L'exemple type semble être celui des problèmes additifs complexes faisant intervenir des compositions de transformations. Dans ce dernier cas, l'impact est sensible en résolution mentale comme en résolution écrite. On observe aussi un impact, toutefois moins marqué, dans le cas des structures multiplicatives quand elles sont simples ou complexes mais relativement familières aux élèves de CM2.

Dans le cas des **structures simples**, cet impact porte sur **la maîtrise des calculs et le tri des données** : le modèle étant suffisamment familier aux élèves, on peut pensé que sa reconnaissance est quasi automatisée. Un accroissement de l'espace consacré à la représentation du problème n'est pas utile dans ce cas.

Par contre, dans le cas **des structures complexes**, l'impact porte **sur tous les types d'erreurs, voire essentiellement sur la reconnaissance du modèle.** Ce dernier étant moins familier aux élèves, on peut interpréter l'effet d'un entraînement au calcul mental comme la réduction de l'espace des opérations au profit de l'espace consacré à la représentation du problème.

Si nous comparons les écarts entre résolution écrite et mentale pour un l'échantillon témoin et pour les classes entraînées, il semble qu'un entraînement régulier au calcul mental **"rapproche"** les modes de résolution mentale et écrite dans le cas des **structures simples et des structures complexes additives** en réduisant les écarts de performances enregistrés entre ces deux types de résolution.

Une **institutionnalisation forte** de procédures de calcul mental **n'influe pas systématiquement** sur les performances des élèves en résolution de problèmes. Elle est surtout **sensible dans le cas des problèmes les plus complexes** et **permet,** dans ce cas, **une meilleure reconnaissance du modèle.** L'effet est plus sensible **à l'écrit** qu'en résolution mentale. Une **médiation de l'adulte** semble donc nécessaire pour permettre à l'enfant de **mieux capitaliser** les effets d'un entraînement au calcul mental.

Pour conclure, nous dirons qu'un entraînement au calcul mental, en améliorant les habiletés calculatoires des élèves, favorise une "prise de sens" dans le cas de problèmes relevant de modèles relativement familiers mais dont la reconnaissance par les élèves n'est pas encore automatisée. Cet effet est renforcé, dans le cas de modèles complexes, par l'institutionnalisation.

type de problèmes		impact du recours à l'écrit (échantillon témoin)	impact du calcul mental sur la résolution mentale	impact du calcul mental sur la résolution écrite	impact du recours à l'écrit (cas des classes entraînées)	impact de l'institutionnalisation sur la résolution mentale	impact de l'institutionnalisation sur la résolution écrite
structures simples	structures additives	**OUI** (erreurs de calculs ou de données)	TRÈS FAIBLE (erreurs de calculs ou de données)	NON	NON	non testé	non testé
	structures multiplicatives	**OUI** (tous les types d'erreurs)	TRÈS FAIBLE (erreurs de calculs ou de données)	**OUI** (erreurs de calculs ou de données)	**OUI** (erreurs de calcul ou de données)	non testé	non testé
structures complexes	structures additives	**OUI** (Tous les types d'erreurs)	**OUI** (erreurs de modèle)	**OUI** (Tous les types d'erreurs, erreurs de modèle si pratique régulière)	FAIBLE (Tous les types d'erreurs)	NON	**OUI** (à long terme, erreurs de modèle)
	structures multiplicatives	**OUI** (erreurs de modèle)	NON	**OUI** pour les problèmes les plus familiers (Tous les types d'erreurs)	**OUI** **(plus marqué)** tout type d'erreurs, prédominance pour erreurs de modèle	FAIBLE portant sur la reconnaissance du modèle	NON

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] ALLARDICE B.S et GINSBURG H.P. Children's psychological difficulties in mathematics. In H.P. Ginsburg (Ed), the development of mathematical thinking. (1983). New-York Academic Press.

[2] BAUTIER E. CHARLOT B. et ROCHEX J.Y. "École et savoir dans les banlieues... et ailleurs" Armand Colin

[3] BRISSIAUD R. "Comment les enfants apprennent à calculer". ÉDITIONS RETZ. (1989).

[4] BUTLEN D. et PEZARD M. " Calcul mental, calcul rapide, "Brochure n° 78 de l'I.R.E.M. de Paris 7. .(1989).

[5] BUTLEN D. et PEZARD M. "Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté", cahier de DIDIREM n° 13, IREM de Paris VII, Université de Paris VII.

[6] BUTLEN D. et PEZARD M. "Calcul mental et résolutions de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2" *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 12-2-3

[7] BUTLEN D. et PEZARD M. "Rapport intermédiaire de recherche", (1996), IUFM de Créteil

[8] CONNE F. "Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problème d'arithmétique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 5-3

[9] DENIS M. "Représentation imagée et résolution de problèmes". *Revue Française de Pédagogie* n° 60. (1982).

[10] FAYOL M. "Nombre, numération et dénombrement. Que sait-on de leur acquisition ?". *Revue Française de Pédagogie* n° 70. (1985).

[11] FAYOL M. "L'enfant et le nombre". Delachaud / Niestle. (1990).

[12] FAYOL M. et MAURY S. "Combinatoire et résolution de problèmes aux cours moyens 1 et 2 ". *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Volume 7-1 (1986). Éditions "la Pensée Sauvage".

[13] FAYOL M. HABDI H. et GOMBERT J.E. "Arithmetic Problems Formulation and Working Memorie Load" (1987) Laboratoire de Psychologie Université de Bourgogne - Dijon.

[14] FISCHER J.P. "Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de trois à six ans" *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 2-3 (1981). Editions "la Pensée Sauvage".

[15] FISCHER J.P. "Complexité de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires" (1988). *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 9-2. Editions "la Pensée Sauvage".

[16] FISCHER J.P. "L'automatisation des calculs élémentaires à l'école". (1987). *Revue Française de Pédagogie* n°80

[17] LEONTIEV A.N. "Principles of mental development and the problem of intellectual backwardness. In B.J. Simon (Ed), Educational Psychology in the USSR. (1959). London : Routledge Kegan.

[18] PERRIN-GLORIAN M.J. (1992) *Aires et surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*. Thèse de Doctorat d'État, Université de Paris VII

[19] RESNICK L.B. "A developmental theory of nomber understanding. In H.P. Ginsburg (Ed), The development of mathematical thinking. (1983). New-York Academic Press.

[20] RICHARD J.F. "Mémoire et résolution de problèmes". (1982). *Revue Française de Pédagogie* n° 60.

[21] ROGALSKI. J. "A propos de l'acquisition de la bidimensionnalité chez les élèves d'âge pré-scolaire et scolaire." et "Enseignement et acquisition de la bidimensionnalité." Cahiers de didactique des mathématiques n° 12 et 13. I.R.E.M de Paris VII. (1984).

[22] SENSEVY G. "Institutions didactiques, Régulation, Autonomie. Une étude des Fractions au Cours Moyen" Thèse de Doctorat, Université de Provence (1994)

[23] VERGNAUD G. "L'enfant, la mathématique et la réalité" (1981). Editions Peter Lang.

[24] VERGNAUD G. "Questions de représentation et de formulation dans la résolution de problèmes mathématiques", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, Vol 2 (1989)

[25] VYGOTSKY "Pensée et langage", Editions sociales (1985)

ANNEXE N°1

Problème 1 : (x,2,s) :

Pour réaliser un pull, Sylvie achète 18 pelotes de laine à 20F la pelote ; calcule le montant de la dépense.

Problème 2 : (x,di,s) :

Une famille de 3 personnes séjourne pendant 6 jours à la résidence "des 3 îles" ; le tarif journalier de la pension est de 200F par personne ; calcule le montant de la dépense.

Problème 3 : (+,di,s) :

Marie fête son anniversaire le 22 septembre : elle a 11 ans.
Elle dit à sa maman : "j'ai exactement 32 ans de moins que toi !"
Quel est l'âge de Maman ?

Problème ( ) :

Pour reboiser une parcelle de forêt, on a planté 28 rangées de 50 sapins ; mais 20 petits arbres sont morts ; combien reste-t-il d'arbres dans la parcelle ?

Problème 4 : (+,2,s) :

Hier, j'ai lu jusqu'à la page 134 de mon livre ; aujourd'hui, j'ai lu 27 pages ; à quelle page en suis-je maintenant ?

Problème 5 : (+,2,c) :

Pierre a perdu 15 billes à la récréation ; il lui en reste 20 ; combien avait-il de billes avant ?

Problème 6 : (-,3,s) :

Dans un autobus, il y a 38 personnes ; au premier arrêt, 8 personnes descendent ; au second arrêt, 6 personnes descendent ; combien y-a-t-il de personnes dans l'autobus quand il repart ?

Problème 7 : (-,3,c) :

Au premier arrêt d'un autobus, 12 personnes montent ; au second arrêt, 4 personnes descendent ; au troisième arrêt, 5 personnes descendent ; y-a-t-il plus ou moins de voyageurs dans l'autobus quand il repart ? combien en plus ou en moins ?

Problème 8 : (x,2,c) :

Un quadrillage rectangulaire comporte 34 carreaux sur la longueur et 20 carreaux sur la largeur ; combien ce quadrillage a-t-il de carreaux ?

Problème 9 : division avec reste

On doit répartir 50 pommes dans des corbeilles de 8 pommes chacune ; combien peut-on remplir de corbeilles ? combien reste-t-il de pommes ?

Problème 10 : (+,di,s) :

Dans une ville, il y a 3 écoles ; dans la première, on compte 150 élèves ; dans la seconde, 58 élèves ; dans la troisième, 70 élèves ; combien y-a-t-il d'élèves dans cette ville ?

Problème 11 : (-,di,s)

Jean part de Paris, doit passer par Melun et être à Fontainebleau à 10 heures ; la distance Paris-Fontainebleau est de 65 km et il y a 15 km de Melun à Fontainebleau ; quelle est la distance entre Paris et Melun ?

Problème 12 : (+,3,s)

Dans un autobus, il y a 36 personnes ; au premier arrêt, 3 personnes montent ; au second arrêt, 12 personnes montent ; combien y-a-t-il de personnes dans l'autobus quand il repart ?

Problème 13 : (x,3,s)

Dans une boîte, on dispose 5 morceaux de sucre sur la longueur, 3 morceaux sur la largeur et 4 morceaux sur la hauteur ; combien de morceaux de sucre y-a-t-il dans la boîte ?

Problème 14 : division avec reste :

Avec ses bottes de sept lieux, le petit Poucet se déplace de ville en ville ; il fait des pas de 8 km ; s'il parcourt 50 km, combien de pas va-t-il faire ?

Problème 15 : (-,2,s) :

Dans un parking, il y a 100 places ; ce matin, 67 places sont occupées, combien reste-t-il de places libres ?

Problème 16 : (+,3,c) :

Au premier arrêt d'un autobus, 10 personnes montent ; au second arrêt, 3 personnes montent ; au troisième arrêt, 8 personnes montent ; y-a-t-il des personnes en plus ou en moins dans l'autobus quand il repart après le troisième arrêt ? Combien en plus ou en moins ?

Problème 17 : (:, 2, s) :

On répartit 126 oeufs dans des boîtes de 6 ; combien de boîtes peut-on remplir ?

Problème 18 : (:, di, c) :

Pour Noël, Jean, qui dispose de 250F, a décidé d'offrir le même livre à ses 4 amis ; il paye 208F ; quel est le prix d'un livre ?

Problème 19 : (-, 2, c) :

J'ai maintenant 200F dans ma tirelire ; on vient de me donner 50F en cadeau ; combien avais-je avant ?

Problème 20 : (x, 3, s) :

Une famille de 3 personnes part à la montagne pendant 6 jours ; le tarif journalier de la pension est de 200F par personne ; quel est le montant de la dépense ?

Problème 21 : (-, di, c) :

La distance entre chaque arrêt d'un autobus est d'environ 1500m ; au premier arrêt, 10 personnes montent ; au second arrêt, 3 personnes descendent ; au troisième arrêt, 5 personnes montent ; y-a-t-il plus ou moins de voyageurs dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt? combien en plus ou en moins ?

Problème 22 : (:, 2, c) :

Un quadrillage rectangulaire comporte 168 carreaux en tout ; il y a 4 carreaux sur la largeur ; combien y-a-t-il de carreaux sur la longueur ?

Problème 23 : (:, di, c) :

Un rallye cycliste comporte 105 km ; le départ est à 7 heures le matin ; les relais sont distants de 5 km ; chaque participant doit pointer au départ, à chaque relais, et à l'arrivée ; combien de fois doit-il pointer ?

Problème 24 : (x, di , c) :

Un restaurant propose un menu du jour à 70F ; il y a 4 choix possibles pour l'entrée, 3 choix possibles pour le plat principal et 2 choix possibles pour le dessert ; combien de menus différents peut-on constituer ?

ANNEXE 2

Problèmes à résoudre mentalement

Problème 1 (+,di,c) : Marie fête son anniversaire le 22 septembre : elle a 11 ans. Elle dit à sa maman : "j'ai exactement 32 ans de moins que toi !"
Quel est l'Age de Maman ?

Problème 2 (-,3,s) : Dans un autobus, il y a 38 personnes ; au premier arrêt, 8 personnes descendent ; au second arrêt, 6 personnes descendent ; combien y-a-t-il de personnes dans l'autobus quand il repart ?

Problème 3 (:,di,c) : Pour Noël, Jean, qui dispose de 250F, a décidé d'offrir le même livre à ses 4 amis ; il paie 208F ; quel est le prix d'un livre ?

Problème 4 (x,2,c) : Un quadrillage rectangulaire comporte 34 carreaux sur la longueur et 20 carreaux sur la largeur ; combien ce quadrillage a-t-il de carreaux ?

Problème 5 (-,3,c) : Au premier arrêt d'un autobus, 12 personnes montent ; au second arrêt, 4 personnes descendent ; au troisième arrêt, 5 personnes descendent ; y-a-t-il plus ou moins de voyageurs dans l'autobus quand il repart ? combien en plus ou en moins ?

Problème 6 (+,3,s) : Dans un autobus, il y a 36 personnes ; au premier arrêt, 3 personnes montent ; au second arrêt, 12 personnes montent ; combien y-a-t-il de personnes dans l'autobus quand il repart ?

Problème 7 (x,3,c) : Dans une boîte, on dispose 5 morceaux de sucre sur la longueur, 3 morceaux sur la largeur et 4 morceaux sur la hauteur ; combien de morceaux de sucre y-a-t-il dans la boîte ?

Problème 8 (division avec reste, c) : Avec ses bottes de sept lieux, le petit Poucet se déplace de ville en ville ; il fait des pas de 8 km ; s'il parcourt 50 km, combien de pas va-t-il faire ?

Problème 9 (+,3,c) : Au premier arrêt d'un autobus, 10 personnes montent ; au second arrêt, 3 personnes montent ; au troisième arrêt, 8 personnes montent ; y-a-t-il des personnes en plus ou en moins dans l'autobus quand il repart après le troisième arrêt ? Combien en plus ou en moins ?

Problème 10 (-,di,c) : La distance entre chaque arrêt d'un autobus est d'environ 1500m ; au premier arrêt, 10 personnes montent ; au second arrêt, 3 personnes descendent ; au troisième arrêt, 5 personnes montent ; y-a-t-il plus ou moins de voyageurs dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt? combien en plus ou en moins ?

Problème 11 (:,2,c) : Un quadrillage rectangulaire comporte 168 carreaux en tout ; il y a 4 carreaux sur la largeur ; combien y-a-t-il de carreaux sur la longueur ?

Problème 12 (x,di,c) : Un restaurant propose un menu du jour à 70F ; il y a 4 choix possibles pour l'entrée, 3 choix possibles pour le plat principal et 2 choix possibles pour le dessert ; combien de menus différents peut-on constituer ?

ANNEXE N°2 bis

Problèmes à résoudre par écrit

Problème 1 (+,di,c) : Depuis 15 jours, Pierre collectionne les pin's ;il en a déjà 11. Il dit à Paul : "j'ai exactement 32 pin's de moins que toi ! ". Combien Paul a-t-il de pin's ?

Problème 2 (-,3,s) : Claude a 38 billes ; il joue deux parties ; à la première, il perd 8 billes ; à la seconde, il perd 6 billes ; combien a-t-il de billes après ces deux parties ?

Problème 3 (:,di c) : Jean dispose de 250F ; il décide de faire le même cadeau d'anniversaire à ses 4 amis ; il paie 208F ; combien coûte chaque cadeau ?

Problème 4 (x,2,c) : Pour carreler le mur d'une salle de bains, il faut 34 carreaux sur la longueur et 20 carreaux sur la largeur. Combien faut-il de carreaux en tout ?

Problème 5 (-,3,c) : Vincent joue trois parties de billes ; à la première, il gagne 12 billes ; à la seconde, il perd 4 billes ; à la troisième, il perd 5 billes ; que s'est-il passé en tout ?

Problème 6 (+,3,s) : Jacques a 36 billes ; il joue deux parties ; à la première, il gagne 3 billes ; à la seconde, il gagne 12 billes ; combien a-t-il de billes après ces deux parties ?

Problème 7 (x,3,c) : Julie range ses cubes dans une boîte ; elle en met 5 sur la longueur, 3 sur la largeur, 4 sur la hauteur ; combien de cubes y-a-t-il dans la boîte ?

Problème 8 (division avec reste, c) : La légende raconte que, dans les grandes plaines de Russie, le géant Tneitok ne se déplaçait que par bonds de 8 km ; il se trouve à 50 km de son château : va-t-il l'atteindre et en combien de bonds ?

Problème 9 (+,3,c) : Paul joue 3 parties de billes ; à la première, il gagne 10 billes ; à la seconde, il gagne 3 billes ; à la troisième, il gagne 8 billes ; que s'est-il passé en tout ?

Problème 10 (-,di,c) : Michel, qui a 11 ans aujourd'hui, joue 3 parties de billes ; à la première, il gagne 10 billes ; à la seconde, il perd 3 billes ; à la troisième, il gagne 5 billes ; que s'est-il passé en tout ?

Problème 11 (:,2,c) : Un carrelage rectangulaire comporte 168 carreaux en tout ; il y a 4 carreaux sur la largeur ; combien y-a-t-il de carreaux sur la longueur ?

Problème 12 (X,di,c) : Les 28 élèves d'une classe de CM2 se déguisent pour le carnaval ; il y a 4 choix possibles pour le chapeau, 3 choix possibles pour l'habit et 2 choix possibles pour les chaussures ; combien de déguisements différents peut-on constituer ?

ANNEXE N°3

QUESTIONNAIRE

On peut distinguer deux temps : en temps normal et pendant l'expérience.

PREMIÈREMENT : PRATIQUES HABITUELLES

1- Calcul mental

Faites-vous du calcul mental ? OUI NON
Si oui.

- tous les jours
- une fois par semaine
- une fois par thème de travail (type d'opérations...)
- occasionnellement
- très rarement

Comment se fait la correction ?

- corrections simples des calculs
- explicitations des procédures
    - systématiques
    - occasionnelles (à chaque type de calcul nouveau)
    - rarement
    - jamais

mettez-vous en valeur des procédures particulières ?
Si oui, lesquelles ?

- les procédures généralement économiques (exemple : distributivité simple)
- les procédures économiques selon les variables numériques (nombres particuliers)
- autres...

Insistez-vous sur certains choix de procédures ?

- jamais
- très rarement (donner une exemple)
- peu
- beaucoup
- systématiquement

Consacrez-vous un temps spécifique au calcul mental (séance spéciale) ? OUI NON
Si oui, combien de temps ?

Intégrez-vous le calcul mental les leçons de maths ? OUI NON

2- RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Faites-vous de la résolution mentale de problèmes ? OUI NON

Si oui, quels types de problèmes proposez-vous ?

Comment présentez-vous l'activité ?

Sur quoi insistez-vous lors de la correction ?

Qu'est-ce qui distingue votre intervention (formes, contenus) dans ce cas particulier de résolution mentale par rapport à la résolution écrite?

En général, comment travaillez-vous la résolution de problèmes ?

Travaillez-vous la reconnaissance de problèmes types ? OUI NON
Si OUI, comment et lesquels ? (repérage de mots clés, constructions de représentations imagées...)

Entraînez-vous vos élèves à repérer, trier les données (activités spécifiques ou non)

Quelle(s) disposition(s) demandez-vous de respecter pour la rédaction de la solution ?

Demandez-vous systématiquement que figurent les traces de opérations effectuées ?

Insistez-vous sur l'explicitation des différentes procédures ? OUI NON
Si oui, comment ? (fréquence, explicitation systématique d'au moins deux procédures différentes quand c'est mathématiquement possible, ou seulement quand les élèves les ont produites)

Insistez-vous plus particulièrement sur un type de procédures ?
Si oui, lequel et dans quelles conditions ?

DEUXIÈMEMENT : PENDANT L'EXPÉRIENCE (DE CALCUL MENTAL)

Avez-vous changé votre pratique en calcul mental ? OUI NON
Si oui, sur quoi portent ces changements ?

- fréquence des séances
- explicitation plus grande de règles de calcul
- insistance plus grande sur le choix de procédures

Reveniez-vous sur les exercices, sur les activités de calcul mental faites dans le cadre de notre intervention ?

- quelquefois
- souvent
- toujours

Comment procédiez-vous ?(exercices d'entraînement, exercices supplémentaires, indications de procédures, reprise du même exercice avec les mêmes données....)

Avez-vous changé votre pratique concernant la résolution de problèmes ?
OUI NON

Si oui, sur quoi portent ces changements ?

- fréquence des séances
- explicitation plus grande de procédures de résolution
- insistance plus grande sur le choix de procédures
- résolution mentale de problèmes
- activités spécifiques de tris de données
- reconnaissance de problèmes types
- autres

Reveniez-vous sur les exercices, sur les problèmes faits dans le cadre de notre intervention

- quelquefois
- souvent
- toujours

Comment procédiez-vous ? (corrections des problèmes ou indications supplémentaires de corrections, exercices d'entraînement, indications de procédures générales de résolution pour un type de problème donné, reprise du problème avec le même habillage et les mêmes données ou avec un habillage et/ou des données différentes...)

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :
Rapports entre habileté calculatoire et " prise de sens " dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire

AUTEUR (S) :
Butlen Denis - Pezard Monique

RESUME :
Cet article est le compte rendu d'un complément de recherche effectué de 1992 à 1996. Après quelques rappels de psychologie cognitive (MLT, MCT; ET= ES + EO), les auteurs se demandent comment faire pour alléger la charge mentale des élèves lors de la résolution de problèmes numériques. Ils émettent une hypothèse: la pratique du calcul mental diminue le coût mental des opérations, et augmente l'espace de construction, de représentation d'un problème donc augmente les performances de résolution. Pour vérifier cette hypothèse des tests comparatifs sont organisés entre classes entraînées et classes non entrainées: existe -t- il un écart entre ces deux catégories? Sur quoi porte-t-il? De quoi dépend-il? Ils se posent les mêmes questions entre les performances orales et écrites. Les auteurs s'interrogent aussi sur le rôle du maître dans l'institutionnalisation, quelle soit totalement à sa charge ou bien partagée avec les élèves par le biais de la construction d'une mémoire collective. Le dispositif méthodologique est décrit: éléments de différenciation, choix des problèmes en fonction de trois variables didactiques. Les résultats de l'expérience et la conclusion suivent : un entraînement régulier au calcul mental favorise une "prise de sens", cet effet est renforce par l'institutionnalisation.

MOTS CLES :
Didactique-mathématiques-recherche-enseignement-apprentissage-école élémentaire
calcul mental-représentation d'un problème-problèmes numériques-charge mentale-psychologie cognitive-institutionnalisation-mémoire collective

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1996
ISBN : 2-86612-125-2