

**Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 12**



SYLVESTRE-FRANÇOIS LACROIX
Traité

du Calcul différentiel et du Calcul Intégral

Préfaces

**suivies de l'introduction au livre 1
et de la table des matières**

UNIVERSITE PARIS VII

DENIS DIDEROT

**Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 12**



SYLVESTRE-FRANÇOIS LACROIX
Traité
du Calcul différentiel et du Calcul Intégral
Préfaces
suivies de l'introduction au livre 1
et de la table des matières

Table des matières

Présentation de l'ouvrage	p. 1 à VIII
Préface du tome 1	p.1
Préface du tome 2	p.49
Préface du tome3	p.75
Complément	p.91
Introduction au Tome 1	p. 99 à 168
Table des matières de la fin du Tome 3	p. 169

Prospectus publicitaire de Librairie
pour le "Traité" de Lacroix 2^{de} édition

Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral : par S. F. LACROIX ; seconde édition revue et augmentée, tom. III, contenant un *Traité des différences et des séries*. In-4.^o de près de 800 pag., plus deux planches ; chez Madame veuve Courcier, à Paris.

Prix des trois volumes, 66 fr.

Et de ce volume pris séparément, 26 fr.

Le mérite de cet ouvrage qui peut tenir lieu de tant d'autres, et qu'aucun autre ne saurait suppléer, est aujourd'hui trop bien apprécié pour que nous entreprenions de le recommander à nos lecteurs. Les immenses et pénibles recherches qu'a dû exiger sa composition, auraient eu certainement de quoi effrayer et décourager tout autre qu'un géomètre qui, faisant pour ainsi dire abnégation entière de sa gloire personnelle, semble n'avoir été mu, dans toute sa longue et laborieuse carrière, que par la seule pensée de faire connaître et valoir les travaux d'autrui, et de se rendre également utile à tous.

La science s'enrichissant sans cesse de nouveaux procédés, on conçoit sans peine que cette édition doit avoir une supériorité marquée sur la première, commencée il y a vingt-trois ans. On sent même que, durant l'impression d'un ouvrage d'aussi longue haleine, diverses branches d'analyse ont dû recevoir encore des améliorations plus ou moins importantes ; et c'est ce qui a déterminé l'auteur à placer à la suite du troisième volume de nombreuses additions aux deux premiers. Cette nouvelle édition est d'ailleurs, comme la première, terminée par une ample table alphabétique des matières, singulièrement propre à faciliter les recherches.

Après le *Traité élémentaire de calcul des probabilités* de Lacroix (reproduction de textes anciens, nouvelle série : brochure n°7) ce sont les préfaces et l'introduction du *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (2ème édition) que nous rééditions.

Pour mémoire :

L'auteur **François Sylvestre Lacroix** (1765-1843), issu d'une famille modeste, fait des études au collège des quatre nations à Paris. Monge remarque cet étudiant passionné par les sciences exactes et qui de plus fait preuve d'un très vif intérêt et d'un sens aigu pour la pédagogie. Lacroix a toujours le souci de "*permettre l'accès des mathématiques à un vaste auditoire*". Ses ouvrages nombreux témoignent de son immense culture. Ils connaissent plusieurs rééditions au cours du XIX^{ème} siècle et sont traduits en diverses langues. (voir l'introduction de la brochure n°7).

Le Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral :

La première édition, de ce monumental ouvrage parait en deux volumes, le premier consacré au Calcul différentiel (1797) et le second au Calcul intégral (1793). Elle est complétée en 1800 par un troisième volume "*Traité des différences et des séries Faisant suite au Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*".

La seconde édition est formée de trois volumes qui paraissent respectivement en 1810, 1814, 1819. C'est cette seconde édition en trois volumes dont nous proposons des extraits significatifs.

Lacroix lui-même précise les raisons de ces ajouts : "*la réunion des nombreux matériaux relatifs au Calcul différentiel et au Calcul intégral, épars dans les collections académiques , pouvait seule faire connaître toutes les richesses de cette*

branche importante de l'analyse et réduire à un petit nombre de méthodes générales une foule de procédés particuliers...". Le texte qui suit se présente comme une histoire très complète de l'analyse " *... je crois devoir remettre sous les yeux du lecteur l'origine et les progrès du Calcul différentiel et du Calcul intégral.*" Telle est la démarche de Lacroix qui dès 1787 rassemblait des matériaux pour former un traité complet de calcul différentiel et intégral ; démarche que M. Laplace *"voit avec beaucoup de plaisir"*. Le souci constant de l'auteur reste de réaliser un ouvrage accessible à un plus grand nombre de lecteurs. Cette préoccupation le conduit à rédiger, *"afin de préparer l'exposition des principes du Calcul différentiel"* une introduction dans *"laquelle je m'occupais du développement des fonctions soit algébriques soit logarithmiques soit circulaires .."* Cette introduction se présente comme un traité de l'analyse intermédiaire entre les éléments d'algèbre proprement dits, et le calcul différentiel.

La préoccupation de ce pédagogue d'être accessible par un grand nombre de lecteurs nous est rappelée en ces termes : *"je n'ai jamais perdu de vue que ceux qui étudient les mathématiques ont souvent besoin de revenir sur les connaissances acquises."* En conséquence l'introduction ne suffit pas : elle rappelle les notions essentielles pour aborder le Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Le texte de ce très important ouvrage est rédigé *"en sorte que chaque chapitre forme autant que cela se pouvait, une sorte de traité particulier, ne dépendit en général de ceux qui le précèdent..."* et *"Uniquement animé du désir de faire un livre utile aux jeunes gens j'ai dû nécessairement mettre beaucoup d'auteurs à contribution."* Ainsi dans chaque tome figure une table des sommaires dans laquelle, pour chaque article, Lacroix a mentionné le titre de chaque ouvrage consulté.

Dans le troisième volume de la seconde édition, Lacroix, par des corrections et additions qui occupent 132 pages tient compte des résultats les plus récents obtenus en Analyse par ses contemporains. La table des matières de l'ensemble des trois volumes qui termine l'édition de 1819 est une table analytique détaillée.

La seconde édition du grand traité de Lacroix n'est pas rare en bibliothèque et il est exclu de la rééditer actuellement vu le nombre de pages (plus de 2300 pages et 10 planches) ; mais nous pensons que la table des matières rééditée ici mettra en lumière l'immense richesse mathématique et historique de l'ouvrage et sera un guide utile pour le consulter.

La présente brochure présente donc trois aspects :

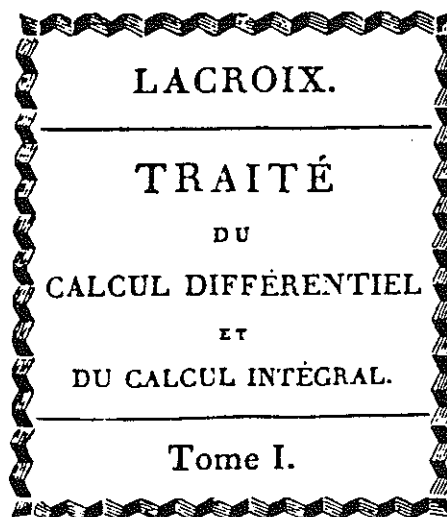
- une histoire du calcul différentiel et intégral,
- une liste très précise des ouvrages, articles et mémoires parus que Lacroix avait consultés ou dont il avait connaissance⁽¹⁾,
- une introduction mise à la disposition de l'étudiant et qui contient les pré-requis pour aborder le Traité.

Aussi constitue-t-elle donc un document précieux pour l'historien des sciences et l'enseignant⁽²⁾.

Michèle LACOMBE

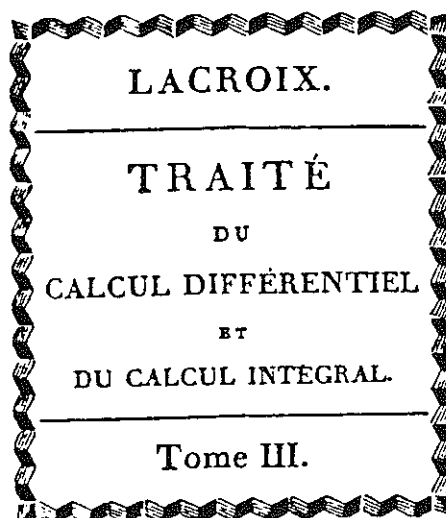
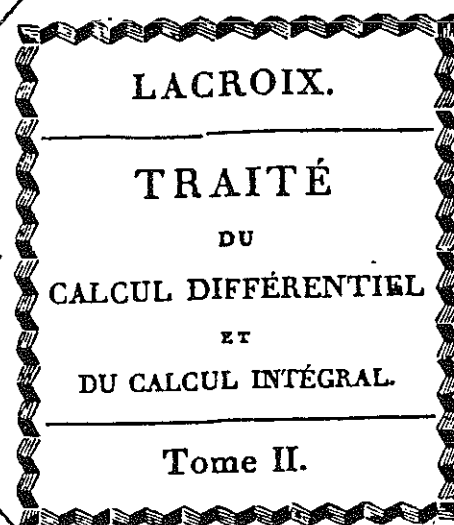
(1) Vous trouverez ci après un index où figurent les noms cités et le nombre de citations pour chaque chapitre.

(2) Si vous désirez des photocopies de passages **bien déterminés** vous pouvez écrire à Jean-Luc VERLEY, IREM de Paris Sud, tour 56 3ème étage, 4 place Jussieu Paris



TRAITÉ
DU
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DU CALCUL INTÉGRAL,
PAR S. F. LACROIX.
SECONDE ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

Tantum series juncturaque pollet.
HORAT.



Etiquettes imprimées à coller au dos des exemplaires brochés

**Index des noms cités dans les notes bibliographiques
qui figurent à la fin de chaque tome**

	i	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	A
	TOME 1						TOME 2										TOME 3								
AGNESI					1																				
AMPERE				1														1			1		1		2
ANDREWS																	1	1							
ARBOGAST			1												1		1	1	1	1					
ARCHIMEDE								1																	
BABBAGE																								1	
BAERMANN																								1	
BERARD																		1							1
BERNOULLI	2							2																	2
BERNOULLI Daniel										1								1							
BERNOULLI Jacques					1		2	1		1			1			1		2							
BERNOULLI Jean				1	1		5	1		5			2			1								1	1
BERNOULLI Nicolas										1															
BESSEL							1															1			
BEZOUT								1										1	1						
BIDONE																					2				
BINET																									1
BIOT						1									1				1					2	
BORDA																1									
BOUGAINVILLE							1																		
BRET																									1
BRIANCHON																									1
BRINCKLEY																		1	1						
BRISSON															1										
BROWNER								1																	
BRUNACCI										1										4					
BURMANN																									1
CAGNOLI	1																								
CALUSO							1															1			2
CANTERZANI																									1
CARDINALI															1										1
CARNOT		1				1																			
CAUCHY																						1			1
CAVALIERI								1																	
CHARLES																		3		2					
CLAIRAUT						1	1	3	1	1	1														2
CONDORCET									1	5		1			1				3	3				1	

i désigne l'introduction

A l'additif en fin du tome 3

Dans chaque case figure le nombre de textes de l'auteur auxquels Lacroix fait référence pour le chapitre considéré

	i	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	A
	TOME 1						TOME 2										TOME 3								
CÔTES	2						2																		
COUSIN		1																							
CRAMER	1				1																				
D'ALEMBERT	4						2	2		6					2				1		1				2
de PRASSE																									1
DE SAINT VINCENT								1																	
de STAINVILLE																									2
DEGUA	1				1																				
DELAGRAVE																		1							
DELAMBRE																	2								
DESCARTES	1				1			1																	3
DESNANOT																	1								
DU SEJOUR					1																				
DUPIN																									1
EMERSON																	1								
EULER	6	2	4	3	1	5	10	7	2	13	2	2	2	3	9	4	3	9	3	1	4	9	2	5	6
FAGNANO								1																	
FERMAT								1																	1
FERRONI								1																	
FONCENEX	1																		1						
FONTAINE									1	1			1			2									
FONTANA																		1							
FOURIER																							1		
FRANÇAIS																									1
FRANCHINI																								1	
FRULLANI																		1							
FUSS	1		1																						1
GAUSS																		2							
GERGONNE																		1							
GIANELLA																		1							
GOLDBACH										1							1			1					
GOUDIN					1																				
GREGORI								1																	1
GRUSON		2																							
HACHETTE						1																			
HALLEY	1																								
HELLINS							1																		
HERMANN										2															1
HERSCHEL																		1	1						
HINDENBURG	1																			1					

	i	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	A
	TOME 1						TOME 2										TOME 3								
HUYGENS					1			1																	1
KÆSTNER																								1	
KAUSLER																									1
KNIGHT																		1							
KRAMP	1	2	1															5				2			
L'HOPITAL		1			2																				
L'HUILLIER	2	1				1																2			
LA HIRE					1																				
LAGRANGE	4	8	3	6	3	4	3	2	2	4	3	5		2	5	5	5		6	1	2				1
LAMBERT			1																			1			
LAME																									1
LANCRET						1																			
LANDEN		2					3	1										2							1
LAPLACE			1				1			2	1	6			2	1	3	3	11	4	3	4	4	2	
LAVERNEDE	1																								1
LEFRANCAIS						1																			
LEGENDRE							1	2		2	1			1	2	3	1	1	1			4	1		3
LEIBNIZ	1				2		2	4		2															
LEXELL								1	1	1								1							
LHUILLIER	2						1									1	1			1					
LORGNA										1							1	3	1		3				
MACLAURIN		1		1	2		2	2																	
MALFATTI								1											1						
MANFREDI										1			1												
MARGUERIE																		1							
MASCHERONI							1											1				1			
MAUDUIT	1																								
MAUPERTUIS								1																	
MAURICE																									1
Maurice de Prasse																	1								
MERCATOR								1																	
MEUSNIER						1																			
MOIVRE	3						1											4			1				
MONGE						9				1					7				5						
MONTMAUR																		2							
MOUTON																	1								
MULLER																									1
MULTEDO																		1							
NEIL								1																	
NEWTON	1	1			1		4	1				1					1	1							

	i	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	A
		TOME 1						TOME 2										TOME 3							
NICOLE																	1	2							1
NIEUPORT															2										
OECHLITIUS																								1	
PAOLI		1	3												2				4			2		2	
PARSEVAL															1						1		1	1	
PASCAL					1			1																	
PASQUICH		2																							
PETIT																									1
PEZZI										1					1										
PFAFF	1									1								1							4
PLANA													1		1							1	1		
POISSON		1			1	1					1	1			3	1			3			3	2	2	6
PRICE																			1						
PRONY																	4		2				1		
PUISSANT						1																			
RICCATI										1			1												
ROBERVAL					1			1																	
RUFFINI																									1
SAURIN				1																					
SCHUBERT	1												1												
SERVOIS																	1	1				1			2
SIMPSON							3			1						1	1	1							
SOLDNER																						1			
STIRLING	1				1												1	3							
TAYLOR	1	1										1	1				2	2							1
TINSEAU								1																	
TORRICELLI								1																	
TREMBLEY											1	1			2					1					1
VAN-HEURAET								1																	
VANDERMONDE																		1			1				
VARIGNON								2																	
VEGA							1																		1
VINCE																			1						
VIVIANI								2																	
WALLIS					1			3													1				
WALMESLEY																	1	1		1					
WARING		2																1							
WREN								1																	
YVORY								1																	1

TRAITÉ
DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET
DU CALCUL INTÉGRAL,
PAR S. F. LACROIX.

Tantum series juncturaque pollet.
HORAT.

TOME PREMIER.

A P A R I S

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour
quai des Augustins.

AN V. = 1797.

TRAITÉ
DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET
DU CALCUL INTÉGRAL,
PAR S. F. LACROIX.

Tantum series juncturaque pollet.
HORAT.

TOME SECOND.

A P A R I S,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins.

AN VI. = 1798.

TRAITÉ DES DIFFÉRENCES

ET

DES SÉRIES,

Faisant suite au Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral,

PAR S. F. LACROIX.

Tantum series juncturaque pollet.
HORAT.

A P A R I S,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins.

AN VIII. = 1800.

TRAITÉ
DU
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DU CALCUL INTÉGRAL,

PAR S. F. LACROIX.

SECONDE ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

Tantum series juncturaque pollet.
HORAT.

TOME PREMIER.

PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques
quai des Augustins, N° 57.

1810.

Wm McCormick
Alger

PRÉFACE.

EN reculant les bornes de l'Analyse, les grands Géomètres de notre siècle ont donné à sa marche une perfection qui devait influencer nécessairement sur la manière de présenter les vérités connues avant eux. On remarque en effet dans l'histoire des Mathématiques certaines époques où, sans que la vérité des propositions particulières ait souffert aucune atteinte, leur enchaînement systématique a changé par les rapprochemens auxquels les nouvelles découvertes ont donné lieu : les principes sont devenus plus féconds, les détails moins nécessaires, et la généralité des Méthodes a permis encore d'embrasser la science en entier, malgré les pas immenses qu'elle avait faits. On était à l'une de ces époques, lorsque je publiai (en 1797) la première édition du Traité que je mets de nouveau sous les yeux du Public : la réunion des nombreux matériaux, relatifs au Calcul différentiel et au Calcul intégral, épars dans les collections académiques, pouvait seule faire connaître toutes les richesses de cette branche importante de l'Analyse, et réduire à un petit nombre de méthodes générales, une foule de procédés particuliers qui tenaient à l'enfance de ces calculs ; mais une simple compilation n'aurait pas atteint ce but. Les mêmes découvertes s'étant présentées à plusieurs Géomètres, sous des points de vue très-différens, il en est résulté plusieurs méthodes entre lesquelles il fallait faire un choix, ou qu'il fallait exposer dans un ordre qui mît en évidence les rapports par lesquels elles se lient les unes aux autres ; enfin, il n'était pas moins nécessaire de donner, pour ainsi dire, à toutes, une teinte uniforme, qui ne laissât point appercevoir de différence entre ce qu'on devait à un auteur et ce qu'on avait emprunté d'un autre, et répandît sur le tout un égal degré de précision et de clarté. Telle est la tâche que je me suis imposée ; j'ai senti toutes les difficultés que j'aurais à vaincre pour la remplir avec succès ; mais l'importance de la matière et le désir d'être utile, m'ont soutenu dans cette pénible carrière, et surtout la persuasion qu'un essai dans ce genre, quelque éloigné qu'il pût être de la perfection, contribuerait néanmoins à l'avancement de la science. Avant de rendre compte du plan que j'ai suivi, je crois devoir remettre sous les yeux du lecteur l'origine et les progrès du Calcul différentiel et du Calcul intégral, afin qu'il puisse mieux apprécier les raisons qui ont déterminé l'ordre que j'ai adopté.

La découverte du Calcul différentiel et du Calcul intégral ne remonte

qu'au 17^e siècle, mais les questions par lesquelles on y a été conduit s'étaient présentées dès les premiers temps de la Géométrie. Lorsque les anciens Géomètres ont voulu comparer les figures curvilignes, soit entre elles, soit avec des figures rectilignes, ils ont été obligés de donner un tour nouveau à leurs démonstrations. La deuxième proposition du Livre XII des Éléments d'Euclide, offre le premier essai de ce genre, qui soit parvenu jusqu'à nous. Elle a pour objet, de prouver que les surfaces des cercles sont entre elles comme les quarrés des diamètres. Il y a ici un passage du fini à l'infini; car dans la proposition précédente, Euclide montre que ce rapport est celui des polygones semblables, inscrits dans deux cercles différens, et il me paraît évident que le Géomètre, quel qu'il soit, qui découvrit cette vérité, voyant qu'elle était indépendante du nombre de côtés du polygone, et qu'en même temps ces polygones différaient d'autant moins des cercles, qu'ils avaient plus de côtés, a dû nécessairement conclure de là, en vertu de la loi de continuité, que la propriété des premiers convenait aux seconds. On regarderait aujourd'hui comme suffisamment prouvée par ces raisonnemens, la proposition qui en est l'objet, et la plupart des livres élémentaires n'en donnent pas même d'aussi complets; mais les Anciens ont été plus difficiles que nous à cet égard : ils n'ont jamais voulu se permettre de confondre entre elles deux quantités qui avaient une différence, si petite qu'elle fût. Pour mettre donc hors d'atteinte la proposition dont ils avaient, pour ainsi dire, deviné l'existence par les considérations que je viens d'indiquer, ils ont cherché à prouver que le rapport des cercles entre eux ne pouvait être ni plus grand ni plus petit que celui des quarrés de leurs diamètres; et pour y parvenir, ils ont commencé par montrer qu'on pouvait toujours trouver un polygone inscrit, qui ne différât du polygone correspondant circonscrit, et à plus forte raison du cercle lui-même, que d'une quantité moindre qu'une grandeur donnée.

Archimède s'éleva, par des moyens à peu près semblables, à des propositions beaucoup plus difficiles, telles que les rapports des surfaces et des volumes du cylindre et de la sphère, la quadrature de la parabole et les propriétés des spirales : mais ne croyons pas qu'il les ait découvertes ainsi qu'il nous les a transmises. Ces vérités d'une espèce avec laquelle les esprits n'étaient pas encore familiarisés, ont dû rencontrer beaucoup de contradicteurs, et l'homme de génie qui les avait dérobées pour ainsi dire à l'obscurité qui les cachait, sentit que l'exposition des idées qui l'avaient dirigé dans ses recherches ne suffirait pas pour convaincre ces hommes, que l'ignorance, souvent jointe à l'envie,

soulève contre tout ce qui leur est supérieur. Ceci n'est point une conjecture : Archimède, en adressant à son ami Dosithée, son *Traité de la quadrature de la Parabole*, répond d'avance, en s'autorisant de l'exemple des Géomètres qui l'ont précédé, à ceux qui voudraient élever des doutes sur ses démonstrations (*).

Lorsqu'après de longues ténèbres, le flambeau des sciences vint à se rallumer, que les écrits d'Euclide et d'Archimède furent traduits et commentés, on chercha à retrouver le fil qui avait pu les diriger dans leurs découvertes; mais on ne tarda point à s'apercevoir qu'ils s'étaient beaucoup plus occupés de convaincre que d'éclairer leurs contemporains : on fut donc obligé de quitter leurs traces, et de penser à se frayer des routes nouvelles. Telles furent sans doute les raisons qui portèrent Cavalleri à se départir de cette extrême rigueur, et le conduisirent à la *méthode des indivisibles*, par laquelle il regarda les lignes comme composées de points, les surfaces comme composées de lignes, et les corps comme composés de surfaces. Le soin qu'il eut de vérifier sa méthode, recommandable par la brièveté qu'elle apportait aux démonstrations, en comparant les résultats qu'elle donnait avec ceux que les Anciens avaient prouvés à leur manière, lui inspira le courage de s'aventurer pour ainsi dire dans un pays nouveau. Il fut attaqué sur ses principes, mais il se défendit, en montrant qu'ils pouvaient être traduits dans ceux d'Archimède. « Ces surfaces et ces lignes dont Cavalleri » examine les rapports, » dit Montucla, « ne sont autre chose que les » petits solides ou les triangles inscrits et circonscrits d'Archimède, » poussés à un si grand nombre, que leur différence avec la figure qu'ils » environnent, soit moindre que toute grandeur donnée; mais tandis » qu'Archimède, à chaque fois qu'il entreprend de démontrer les rap- » ports d'une figure curviligne avec une autre connue, emploie un long » circuit de paroles et un tour indirect de démonstrations; le Géomètre » s'élançant en quelque sorte dans l'infini, va saisir par l'esprit le dernier » terme de ces divisions et de ces soudivisions continuelles, qui doivent » enfin anéantir (**) la différence entre les figures rectilignes inscrites

(*) *Usi autem sunt eodem lemmate etiam Geometræ, qui antè nos floruerunt..... contigit autem, ut unicuique horum, quæ diximus, theorematum non minor quàm iis, quæ sine hoc lemmate demonstrata sunt, fides adhibita sit; pari fide nuper iis, quæ à nobis edita sunt conciliatâ.* (Archimed. oper. Oxoniæ, 1792, p. 18.)

(**) Ou plus exactement, qui tendent à anéantir.....

» et circonscrites, et les figures curvilignes. Le mot d'*indivisible* est » impropre si l'on veut, mais il n'en résulte aucun danger pour la » Géométrie » ; j'ajouterai, lorsqu'il est rappelé à sa juste valeur, et qu'on a fait voir qu'il ne doit être regardé que comme une expression abrégée.

Roberval courut en France la même carrière que Cavalleri s'était ouverte en Italie : en cherchant par la lecture des ouvrages d'Archimède, à se former une méthode pour résoudre les problèmes concernant les figures curvilignes, il trouva celle qu'il a laissée dans son *Traité des indivisibles*, et qui ne diffère de la méthode de Cavalleri, que dans les termes. Le désir de se ménager des triomphes sur ses rivaux, le porta à cacher ses découvertes, dont la publication du livre de Cavalleri vint lui ravir les avantages, et le punit justement d'avoir écouté le conseil d'un amour-propre mal-entendu.

Roberval trouva encore pour mener les tangentes aux courbes, une méthode fort ingénieuse à la vérité dans son principe ; mais quoique plusieurs personnes aient voulu la mettre en parallèle avec celle de Descartes, elle lui est cependant inférieure de beaucoup ; car dans le plus grand nombre de cas, elle ne fait que reculer la difficulté du problème. La méthode de Descartes au contraire offre pour toutes les courbes algébriques un procédé dont l'esprit est facile à saisir, et dont l'application conduit toujours au but désiré. Il me semble qu'elle ne fut point estimée tout ce qu'elle valait dans le temps où elle parut : sans doute les écrits des Anciens offrent des exemples de recherches qui demandent une bien plus grande force de tête, et qui par cette raison ont été plus admirées ; mais ne devrait-on pas préférer à la difficulté vaincue, les méthodes fécondes qui diminuent le travail et rendent accessible à tous ce qui n'était que le partage d'un petit nombre d'esprits transcendans ?

Les obligations que la Philosophie et les Mathématiques ont à Descartes, sont trop connues pour qu'on puisse rien ajouter à ce qui a été dit à cet égard ; mais on a trop négligé peut-être de faire observer un point par lequel ce grand homme a un avantage marqué sur les Géomètres de son temps. Quelque soigneux qu'il fût de sa gloire, il paraissait encore plus fortement occupé de la propagation des sciences, et ce qui le prouve, c'est que ses ouvrages présentent toujours l'histoire de ses pensées, et mettent sur la voie ceux qui voudraient essayer de pousser plus loin les recherches qu'il a entamées. On peut dire qu'il était le seul qui écrivît alors avec cette netteté et cette simplicité que doit toujours avoir le style des ouvrages scientifiques. Il aurait pu ce-

P R E F A C E.

v

pendant profiter des méthodes générales qu'il possédait, pour résoudre les problèmes les plus difficiles, et n'en publier que les résultats démontrés à la manière des Anciens; il ne s'en serait pas moins assuré un rang distingué parmi ceux qui cultivaient alors les Mathématiques: mais il aurait sûrement beaucoup moins de droits à la reconnaissance de la postérité.

Fermat était en possession avant Descartes, d'une méthode des tangentes; mais il ne la publia qu'après que Descartes eut fait connaître la sienne, et il y joignit une méthode de *Maximis et Minimis*. Ces méthodes sont plus simples que celles de Descartes; mais elles ne furent, pour ainsi dire, qu'indiquées par Fermat, qui, loin d'imiter la noble franchise de Descartes, ne laissa point appercevoir, du moins pour celle de *Maximis et Minimis*, quelle route avait pu l'y conduire, et de quelle manière on pouvait la démontrer. Descartes crut d'abord que ces deux méthodes étaient fausses: dans l'emploi qu'il avait voulu faire de celle des tangentes, il généralisait mal-à-propos les considérations particulières à l'exemple dont Fermat s'était servi, et il ne fut pas possible de le faire revenir sur cette règle, qu'il rectifia à sa manière. Il persista même à croire que ce n'était que d'après lui que Fermat en avait connu le défaut.

Par une foule de découvertes, dont plusieurs relatives aux nombres ont exercé les plus célèbres Analystes de ce siècle et du précédent, Fermat a donné les preuves d'un grand génie. On a dit qu'il eût remplacé Descartes, si Descartes n'eût point existé: oui, si on en juge par l'importance de ses travaux et par les difficultés qu'il a vaincues; mais j'en pense qu'il est permis de douter qu'il eût autant contribué à la propagation de la science, que le fit son rival par son caractère communicatif et la manière simple dont il présente le résultat de ses recherches.

Fermat avait sur Descartes, engagé continuellement dans une multitude de querelles que lui suscitait l'envie, et occupé d'une foule d'objets différents, l'avantage de pouvoir se livrer à l'étude de la Géométrie, sans autres distractions que celles que lui donnaient les devoirs de sa place. Cette continuité de méditations sur un seul objet, a dû nécessairement aider son génie à surmonter de plus grandes difficultés, et contribuer à la perfection des méthodes qu'il avait inventées; car on doit faire entrer la considération du temps dans l'évaluation du produit des puissances morales, comme dans celle des effets des forces physiques: Leibnitz et Newton nous offriront bientôt l'occasion de répéter cette remarque.

Huygens démontra le premier les deux règles de Fermat, Sluze en

proposa ensuite une très-simple pour mener les tangentes, et qui n'est au fond que l'énoncé du calcul qu'exige celle de Fermat, dégagé de tout ce qu'il a d'inutile : enfin Barrow imagina son triangle caractéristique, qui est la même chose que le triangle différentiel, et atteignit ainsi le dernier degré de simplicité que pût recevoir la méthode des tangentes par rapport aux courbes algébriques.

Pour ne point interrompre l'histoire du problème des tangentes, j'ai laissé de côté les pas qui avaient été faits depuis Cavalleri, vers la solution générale de celui des quadratures. Grégoire de S. Vincent, Roberval et Pascal obtinrent dans cette matière des succès importants, dont l'énumération n'est point de mon sujet, parce qu'ils ne sont dûs qu'à l'application de la méthode des Anciens ou de celle des indivisibles : il faut pourtant en excepter la considération des polygones *à échelles*, de Grégoire de S. Vincent, ou de la suite des rectangles inscrits ou circonscrits à une même courbe, qui a pu donner l'idée de l'application du Calcul intégral aux quadratures.

C'est dans l'*Arihtmétique des infinis* de Wallis, qu'on voit les premières traces de l'application du calcul algébrique à la quadrature des espaces, application qui est fondée sur la méthode des indivisibles. Wallis considère les suites, et cherche à en exprimer la somme par leurs premiers et leurs derniers termes ; il parvient ainsi à connaître cette somme, ou plutôt sa limite, dans le cas où le nombre des termes à sommer est infini, et où le dernier de ces termes ne l'est pas. Envisageant alors les surfaces comme formées de lignes dont les longueurs varient suivant une certaine loi, il trouve l'expression de ces surfaces, en sommant la suite des lignes dont elles sont composées. Cette méthode fait dépendre, par exemple, l'évaluation de l'aire du triangle de la sommation de la progression, par différences (ou arithmétique).

Wallis démontra par sa méthode la règle fondamentale de la quadrature des courbes dont l'ordonnée est proportionnelle à une puissance quelconque de l'abscisse ; et il eut alors l'aire de toutes les courbes dans lesquelles l'ordonnée est exprimée par une suite de monomes. La méthode d'interpolation qu'il imagina encore pour quarrer certaines courbes dont l'équation se trouvait en quelque sorte comprise entre deux autres que sa première méthode pouvait atteindre, mérite surtout de fixer l'attention de ceux qui parcourront ses ouvrages, parce qu'elle contient le germe des plus belles découvertes de Newton, et qu'elle forme encore aujourd'hui la partie la plus importante de la théorie des suites. Cette méthode conduisit Wallis à des expressions très-remarquables de l'aire du cercle.

P R E F A C E.

vi

Wallis doit être mis au rang des géomètres qui ont le plus influé sur les progrès de l'Analyse; indépendamment des découvertes qui lui sont propres, il a encore des droits sur la plus grande partie de celles que la considération des suites, dont il est l'inventeur, fit faire presque en même temps à la plupart des Géomètres de son temps.

Neil et Van-Heuraet donnèrent, dans l'une des paraboles cubiques, le premier exemple d'une courbe rectifiée; et le moyen dont Van-Heuraet fit usage, ramène le problème des rectifications à celui des quadratures. Bronwker et Mercator poussèrent plus loin les découvertes de Wallis, et parvinrent aux premières suites connues pour la quadrature du cercle et de l'hyperbole: le premier découvrit, dans les fractions continues, une nouvelle espèce de suites infinies. Il faut remarquer que le principe fondamental de la rectification des courbes dont s'est servi Neil, et celui de la réduction des fractions composées en suites infinies, qui mit Mercator en possession de la quadrature de l'hyperbole, se trouvent dans les ouvrages de Wallis.

Tel était à peu près l'état connu de la science, lorsqu'en 1669 il s'établit entre Newton et Collins, par l'entremise de Barrow, un commerce de lettres. Ce dernier communiqua à Collins, au mois de juillet de cette année, l'écrit de Newton, qui a pour titre : *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas*; et Barrow trace lui-même, dans une de ses lettres, le caractère de la méthode de Newton, qu'il regarde comme une extension de celle de Mercator, extension qui est marquée au coin du génie, et ne laisse rien à désirer dans ce genre. Newton observe à la fin de l'écrit cité, mais sans en donner aucun exemple, qu'il est en état de mener des tangentes aux courbes mécaniques; et plus bas il ajoute : *Sed ista narrandi non est locus*.

Barrow, Collins et Oldembourg répandirent, par leur correspondance, les découvertes analytiques de Newton; ils en firent connaître l'objet à plusieurs Géomètres du continent, tels que Sluze et Borelli.

C'est en 1672 que Leibnitz paraît pour la première fois sur la scène. Il se trouvait alors à Londres, et communiqua à plusieurs membres de la Société royale, quelques recherches sur la théorie des différences des nombres, dans lesquelles on lui montra qu'il s'était rencontré avec Mouton, géomètre lyonnais: il quitta bientôt ce genre de travail pour s'instruire dans la doctrine des séries, qui fixait l'attention de tous les Géomètres. En 1674, il annonça à Oldembourg, avec qui il s'était lié pendant son voyage en Angleterre, qu'il possédait des théorèmes très-importans, relativement à la quadrature du cercle par les séries, et

surtout qu'il avait des méthodes analytiques très-générales. Oldembourg répondit à ses lettres, qu'il croyait devoir le prévenir que Gregory et Newton avaient aussi trouvé des méthodes qui donnaient la quadrature des courbes, soit géométriques, soit mécaniques, et s'étendaient au cercle. Je passe sur toutes les lettres qui furent écrites relativement aux séries, parce qu'il n'y a aucun doute que les Géomètres anglais n'aient à cet égard l'avantage sur Leibnitz; mais il paraîtra à tous ceux qui auront quelque impartialité, que Leibnitz, prévenu par eux, ne leur doit que l'émulation qu'éveillent toujours dans les hommes de génie les travaux remarquables de leurs contemporains, et qu'il trouva de son côté, par des moyens qu'il s'était créés, les séries qu'on a tant revendiquées sur lui.

La première communication directe que Newton ait eue avec Leibnitz, se trouve dans la lettre qu'il adressa à Oldembourg, le 15 juin 1676. Les termes honorables dans lesquels il parle de Leibnitz au commencement de cette lettre, prouvent qu'il avait su l'apprécier. Newton, dans cet écrit, qu'il avait rédigé pour passer sous les yeux de Leibnitz, ne traite que des séries; et il en est de même de la réponse que Leibnitz fit à Newton par la voie d'Oldembourg.

J'arrive à la seconde lettre de Newton à Oldembourg: le commencement offre encore, de la part de Newton à Leibnitz, des témoignages de l'estime la plus vraie et la mieux méritée; on y trouve ensuite l'indication de la route qui conduisit Newton à son théorème pour l'élévation d'un binôme à une puissance quelconque. C'est dans cette lettre qu'il décrit les propriétés de la méthode des fluxions, soit pour la recherche des tangentes, soit pour les quadratures; mais il la cache sous une anagramme de lettres transposées. Il faut bien observer, que tout le reste ne roule encore que sur les séries; que la description des avantages de la méthode de Newton n'offrait que l'énumération de ce que doivent naturellement désirer ceux, qui, connaissant les méthodes des tangentes et des quadratures publiées jusqu'alors, avaient remarqué les cas où elles devenaient insuffisantes, et qu'on ne pouvait tirer de là aucune notion positive.

Le 21 juin 1677, Leibnitz fit passer à Oldembourg, pour la communiquer à Newton, une lettre contenant les premiers essais d'une méthode qui s'étendait à tout ce que comprenait celle de Newton: c'était le Calcul différentiel. La mort d'Oldembourg, arrivée peu de temps après, mit fin à ce commerce épistolaire, et Leibnitz attendit jusqu'en 1684, pour faire jouir le public de sa découverte, qu'il inséra alors dans les Actes de Leipsig.

PRÉFACE.

ix

L'exposé fidèle que je viens de faire de la naissance du Calcul différentiel, d'après le *Commercium Epistolicum* imprimé par ordre de la Société royale de Londres, ne peut laisser aucun doute sur les droits incontestables de Leibnitz à la découverte de ce calcul; et comme il est le premier qui l'ait rendue publique, tandis que Newton, préférant son repos à sa gloire et à l'intérêt de ses contemporains, semblait avoir oublié sa Méthode, n'est-il pas aussi celui qu'on doit nommer le premier dans cette découverte?

Leibnitz recueillit sans contradiction jusqu'en 1699, les honneurs que méritait la beauté et la fécondité de son invention. Newton lui-même, en donnant dans son livre des *Principes*, qui parut en 1687, un essai de la méthode des fluxions, rendit à Leibnitz toute la justice qui lui était due. Les choses seraient restées dans cet état, sans une brusque incartade de Fatio de Duillier, qui le premier voulut jeter des doutes sur la propriété que Leibnitz avait au Calcul différentiel, et si les Journalistes de Leipsig eussent mis un peu plus de politesse dans l'extrait qu'ils firent d'un ouvrage de Newton; car il faut convenir qu'ils n'avaient dit que la vérité, et que si Keil, par un amour-propre national excessif, n'avait pas détourné le sens de leurs expressions, Newton n'aurait pu s'en plaindre. Mais le tort de ces Journalistes fut de n'avoir pas répété ce concert d'éloges, bien mérités, que les Anglais donnaient à leur illustre compatriote; et de là naquit une querelle qui fixa l'attention de l'Europe savante. Newton n'y prit d'abord par lui-même aucune part: Keil attaqua vivement Leibnitz, qui s'en plaignit à la Société royale de Londres avec beaucoup de modération; mais le premier porta hautement l'accusation de plagiat, et ses cris engagèrent la Société à nommer des commissaires pour examiner les papiers de Collins et d'Oldembourg, et reconnaître les indices que Leibnitz avait pu recevoir d'eux.

Les commissaires se contentèrent de prononcer sur la priorité que Newton avait dans la découverte de la Méthode des fluxions, qui est au fond la même que le Calcul différentiel. Mais s'ils ne déclarèrent pas Leibnitz plagiaire, comme le desirait Keil, celui-ci tâcha d'y suppléer lui-même, en accompagnant de notes et d'observations aussi partiales qu'injurieuses pour Leibnitz, le recueil des pièces qui avaient servi au jugement du procès, et que la Société fit imprimer sous le titre de *Commercium Epistolicum de analysi promotâ* (*).

(*) Il doit paraître étonnant de voir, dans la préface de la traduction française de la Méthode des fluxions, Buffon, qui n'était point encore connu, se rendre, on ne

Cette querelle, comme toutes les querelles littéraires, eut beaucoup moins pour objet l'intérêt de la vérité, que les passions et l'amour-propre de quelques hommes médiocres, dont l'existence aurait été absolument nulle, sans les dissensions qu'ils ont excitées; j'observerai cependant qu'il n'est pas vrai, comme l'a dit Fontenelle, que Newton ait gardé sur ce sujet une entière impassibilité: il descendit enfin dans l'arène; et les efforts que firent Chamberlayne et l'abbé de Conti pour réunir ces deux illustres rivaux, demeurèrent inutiles. Newton persista à refuser à Leibnitz, même après sa mort, la justice qu'il lui avait autrefois rendue; il affecta de confondre la Méthode de Leibnitz avec celle des tangentes donnée par Barrow, et se mit ainsi dans le cas de se voir appliquer ce dilemme qu'on proposait à Keil: « Ou la Méthode des fluxions, que vous dites être la même chose que » le Calcul différentiel, ne diffère point de celle de Barrow, ou cette dernière n'est pas le Calcul différentiel. » Enfin il fit supprimer, ou du moins laissa supprimer, dans la troisième édition de ses *Principes*, le Scholie qui contenait l'aveu des droits de Leibnitz. (Voyez la note de la page précéd.) (*)

sait pourquoi, l'écho de toutes les calomnies de Keil, et parler d'un homme tel que Leibnitz, avec une légèreté vraiment impardonnable. Pour donner un exemple de la mauvaise foi qui règne dans cet écrit, rempli d'ailleurs d'inexactitudes, je rapprocherai du texte du Scholie, placé par Newton dans la première édition de son livre des *Principes*, la traduction qu'en a donnée Buffon.

In litteris quæ mihi cum Geometrà peritissimo G. G. Leibnitio annis ab hinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi maximas et minimas, ducendi tangentes, et similia peragendi, quæ in terminis surdis æquæ ac in rationalibus procederet, et litteris transpositis hanc sententiam involventibus [Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, et vice versâ] eandem CELAREM: rescripsit Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, et methodum suam COMMUNICAVIT à meâ vix abludentem præterquam in verborum et notarum formulis, et idea generationis quantitatum. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate, Ph. nat. princ. mat. Cantabrid. 1713, vel Amstel. 1714, p. 226.

« J'ai autrefois COMMUNIQUÉ par lettres, au très-habile Géomètre M. Leibnitz, ma » Méthode; il m'a répondu qu'il avait une Méthode semblable, et qui ne diffère presque » point du tout de la mienne, etc. » *La Méthode des Fluxions*. Préface, page xxiv.

Cette traduction est en tout contraire au texte, qui dit formellement que Newton avait *caché* sa méthode et que Leibnitz *communiqua* la sienne.

(*) Suivant ce qu'a appris M. de Montucla (*Hist. des Math.* T. III, page 108), Newton supprima ce Scholie de sa main, sur les épreuves de la troisième édition de son livre, et joignit aussi de sa main des notes au *Commercium Epistolicum*.

PRÉFACE.

xj

Les circonstances donnèrent encore à Newton sur Leibnitz, plus d'avantage que Fermat n'en eut sur Descartes. Rien ne vint interrompre le fil de ses méditations, qu'il avait tournées vers la Géométrie dès sa plus grande jeunesse; le pays où il reçut le jour, était alors le berceau des plus brillantes découvertes; enfin il eut pour maître Barrow, qui s'était placé avec distinction parmi les inventeurs. Si de telles circonstances ne peuvent rien sans le génie, il faut du moins convenir qu'elles l'aident puissamment à se développer.

Le genre d'étude qu'avait d'abord embrassé Leibnitz, le peu de secours que l'Allemagne, sa patrie, pouvait lui offrir pour les Mathématiques, tout semblait l'éloigner de la culture d'une science à laquelle il doit maintenant la partie la plus solide de sa gloire; aussi n'est-ce qu'après son voyage en Angleterre, qu'on le voit sur la route des découvertes : c'est là qu'il apprit, par ce que les autres avaient fait, ce qui restait à faire. Lui-même raconte, dans plusieurs de ses lettres, avec autant d'ingénuité que de modestie, l'origine de ses progrès, les secours qu'il reçut d'Huygens; et cet illustre Géomètre, qui fut le véritable maître de Leibnitz, devint un de ses admirateurs.

Qu'on ne m'accuse point ici de vouloir régler les rangs parmi les hommes qui ont fait la gloire de leur siècle : Newton a laissé dans son ouvrage *des Principes*, un monument qui lui assure à jamais l'admiration de la postérité; mais l'éclat de ses titres commande la plus sévère équité envers son rival, qui, sans cesse emporté par une succession rapide d'objets divers, accablé d'une correspondance très-étendue, et n'ayant jamais eu le loisir d'exécuter un grand ouvrage, partagea néanmoins l'honneur d'une découverte qui a changé la face des Mathématiques, et sema dans un petit nombre de lettres et d'écrits, une foule de vues ingénieuses qui renfermaient le germe des plus belles théories.

La découverte du Calcul différentiel demeura quelque temps stérile; et Leibnitz, pour réveiller l'attention des Géomètres, leur proposa, en 1687, de déterminer la nature de la courbe que devrait parcourir un corps grave, pour descendre également en temps égaux. Huygens donna le premier la solution du problème, mais sans indiquer la méthode dont il avait fait usage; Jacques Bernoulli le résolut aussi par l'application du Calcul différentiel, et publia son analyse dans les Actes de Leipsig, en 1690.

Jean Bernoulli, frère puîné du précédent, et qui avait été son disciple, entra presque en même temps que lui dans la carrière, et lia avec Leibnitz, une correspondance qui dura jusqu'à la mort de ce dernier.

Il fit aussi connaître en France le Calcul différentiel, dont il donna des leçons au Marquis de l'Hôpital. Leibnitz et les Bernoulli résolurent un grand nombre de problèmes aussi neufs que difficiles, qu'ils proposèrent ensuite à tous les Géomètres; ils reprirent aussi ceux de la chaînette et de la courbe de la plus vîte descente, qui avaient résisté à Galilée.

Jacques Bernoulli, sans cesse harcelé par son frère, dont il avait été jadis le maître, lui proposa, comme un défi, le problème des isopérimètres, problème d'un ordre supérieur à tous ceux dont on s'était occupé jusqu'alors. Il faut cependant convenir qu'avant lui, Newton en avait résolu un de ce genre, puisqu'il donna, dans son livre *des Principes*, publié en 1687, la construction du solide qui éprouve la moindre résistance d'un fluide dans lequel il se meut; mais il a laissé ignorer la route qu'il avait suivie, et n'a montré nulle part qu'il eût une méthode générale pour résoudre ces sortes de problèmes, tandis que celle qu'inventa Jacques Bernoulli, offre un morceau d'Analyse précieux par son élégance, et beaucoup au-dessus de tout ce qui a été fait à cette époque.

Le Calcul différentiel recevait chaque jour de nouveaux accroissemens : on l'avait appliqué à la théorie des développées, l'une des découvertes les plus remarquables qui soient dues à Huygens; mais il n'existait encore aucun ouvrage où l'on pût s'en instruire, lorsqu'en 1699, l'Hôpital, qui était du petit nombre des Géomètres qui avaient pris part aux progrès de ce calcul, donna son *Analyse des Infinitement Petits*. Ce livre a été long-temps le meilleur qu'on eût sur cette matière; mais il laissait toujours à désirer un traité de Calcul intégral, dans lequel l'Hôpital ne voulut point s'engager, parce qu'il savait que Leibnitz préparait un grand ouvrage, qu'il devait publier sous le titre : *De Scientiâ infiniti*, et qu'il n'a point achevé. Le Calcul intégral présentait beaucoup plus de difficultés que le Calcul différentiel : la première méthode générale qu'on trouva dans ce calcul, fut celle de l'intégration des fractions rationnelles, que Jean Bernoulli donna en 1702; mais dès 1694 il avait indiqué le moyen d'intégrer les équations différentielles par la séparation des variables. En 1707, Gabriel Manfredi, géomètre italien, donna un traité entier sur les équations, dans lequel il se rencontra avec le géomètre de Bâle.

Il faut observer que pendant que le Calcul différentiel et le Calcul intégral faisaient de grands progrès entre les mains des Géomètres du continent, Newton semblait oublier ses découvertes : ce ne fut qu'en 1706 que parut son Traité de la quadrature des courbes; et son Traité des fluxions ne vit le jour qu'en 1756, long-temps après sa mort.

Le génie mathématique se montra héréditaire dans la famille des Bernoulli; Nicolas et Daniel, fils de Jean, devinrent bientôt aussi habiles que leur père; ils eurent pour condisciples Hermann et Euler: ce dernier ne tarda point à faire prendre au Calcul intégral des accroissemens rapides. Par une telle succession de disciples célèbres, l'école de Leibnitz acquit la supériorité sur celle de Newton, dans laquelle on voit cependant Côtes, qui mourut fort jeune, reculer par la découverte de son théorème, les bornes de la méthode des quadratures; Moivre, que la France a droit de revendiquer, parvenir encore sur ce sujet à quelques résultats importans; Taylor, en développant la méthode des *Incrémens*, dont Newton avait jeté les bases dans celui de ses ouvrages qui a pour titre *Methodus differentialis*, donner, pour ainsi dire, par le théorème qui porte son nom, le complément du Calcul différentiel; enfin, Sterling enrichir considérablement la théorie des suites.

Les Géomètres du continent ne négligèrent point non plus l'emploi des Suites; mais ils n'allèrent pas jusqu'à en abuser, comme firent les Géomètres anglais du second ordre, qui les appliquèrent souvent à des problèmes dont on pouvait avoir la solution par des équations finies, ainsi que le leur fit voir Jean Bernoulli: il eut même à cet égard un reproche fondé à faire à Newton, qui parut méconnaître la vraie difficulté d'un problème proposé par Leibnitz aux Géomètres anglais, après qu'ils lui eurent contesté ses droits à la découverte du Calcul différentiel. Ce n'était point dans la recherche de l'équation différentielle de laquelle dépendait ce problème, mais dans son intégration générale, que consistait le mérite de la solution: Newton, possédant des méthodes pour résoudre par les séries, soit les équations algébriques, soit les équations contenant des fluxions, c'est-à-dire les équations différentielles, crut en avoir fait assez en indiquant la manière de trouver celle qui résultait du problème de Leibnitz; et c'est sur quoi Jean Bernoulli, profondément affecté de l'injustice des Anglais envers ce dernier, se récria beaucoup.

L'École de Newton proposa à son tour un problème à résoudre aux disciples de Leibnitz: le choix de la question donne lieu à des remarques qui semblent avoir échappé aux historiens des nouveaux calculs, et qui jettent cependant quelque lumière sur le point qu'ils ont eu à débattre. Quand on fait attention au soin que Newton avait mis dans la composition de son immortel ouvrage *des Principes*, pour le porter aussi en avant qu'il était possible de l'état de la science au moment où il l'écrivait, qu'il y a même inséré des résultats dont il n'a pas donné de démonstration, on doit être étonné de la manière incomplète dont il y traite

le mouvement des projectiles dans les milieux résistant comme le carré de la vitesse, cas le plus conforme à ce qui se passe dans la nature. Il n'ose attaquer la question directe; et pour la première fois, appelant à son secours l'analyse algébrique, il quitte la synthèse, qu'il regardait cependant comme la seule voie par laquelle il fût convenable de présenter une proposition nouvelle (*).

Lors donc qu'on voit Keil faire de cette question directe le sujet d'un défi qu'il porte aux Géomètres du continent, n'est-on pas en droit de conclure que non-seulement il la regardait comme un problème des plus difficiles, mais qu'en cela il était guidé par l'opinion qu'en avait conçue Newton lui-même : quelle apparence que le promoteur de la querelle qui divisait les deux Écoles, eût osé s'aventurer contre Bernoulli, sans prendre ses suretés ? Il est bien évident néanmoins que le problème n'est pas le plus difficile de ceux qui ont été proposés et résolus à la naissance du Calcul différentiel; mais pour le traiter avec succès, il fallait le ramener à une équation différentielle, car la méthode des séries n'y apporte pas la facilité qu'elle donne pour beaucoup d'autres, et c'est par cette raison que Newton n'en vint pas à bout. Quant à Keil, il ne pensait pas apparemment qu'une chose qui avait échappé à l'auteur du livre des *Principes*, fût possible; et il se trouva couvert de ridicule, lorsque J. Bernoulli le somma de justifier sa provocation, en produisant la solution du problème qu'il avait proposé.

On objecterait en vain que, sous le rapport de l'application à la pratique, la solution de Bernoulli est à peu près inutile; elle était trop remarquable du côté analytique et géométrique, pour que Newton eût négligé de s'en faire honneur, s'il avait pu y atteindre par sa méthode: son défaut de succès à cet égard et l'exposition de ses tentatives prouvent, ce me semble, que c'était uniquement par le développement en séries qu'il était arrivé aux nouveaux calculs, à peu près comme il l'indique lui-même dans la proposition X du livre II de ses *Principes*, et que cette voie ne lui donnait point un accès aussi facile à l'emploi des équations différentielles, que la considération immédiate des accroissemens en eux-mêmes, à laquelle s'était attaché Leibnitz. Ainsi, plus on rapproche toutes les circonstances des premiers progrès du Calcul différentiel, et plus elles me paraissent montrer jusqu'à l'évidence, que Leibnitz n'a pas, moins que Newton, travaillé sur ses propres idées.

(*) *Ut Theorema fiat concinnum et elegans, ac lumen publicum sustinere valeat* Voy. *Isaaci Newtoni Opuscula. Lausanæ et Genevæ. 1744, T. I, page 170.*

Il envisagea les grandeurs comme variant par des différences successives ou par sauts, ce qui le conduisit à substituer des polygones aux courbes, et dès-lors toutes les questions qu'on pouvait se proposer sur elles, furent ramenées au calcul des triangles rectilignes; mais pour faire coïncider ensemble le polygone et la courbe, il supposa les différences infiniment petites. En vain quelques Géomètres médiocres de ce temps, pour se consoler de l'impuissance où ils étaient d'entendre et d'appliquer les nouveaux calculs, déclamaient sans cesse contre leur principe; la conformité des résultats avec ceux qui étaient connus antérieurement, et les démonstrations synthétiques qu'on pouvait donner des nouveaux, faisaient retomber sur les adversaires du Calcul différentiel, les coups qu'ils voulaient lui porter.

Leibnitz crut sans doute que ceux qui seraient en état de faire usage du Calcul différentiel, en saisiraient facilement l'esprit, en le rapprochant de la méthode des Anciens; car il négligea d'entrer dans aucun détail à cet égard, et son silence fut imité par les Bernoulli et par l'Hôpital; mais quand il fut attaqué sur ce sujet, il prouva par ses réponses, qu'il y avait mûrement réfléchi. Dans toutes les occasions, il compare sa méthode avec celle d'Archimède, et fait voir qu'elle n'en est en quelque sorte qu'un abrégé, plus approprié aux recherches, mais qu'au fond elle revient au même; car au lieu de supposer les différentielles infiniment petites dans le fait, il suffit seulement de concevoir qu'on puisse toujours les prendre assez petites, pour que l'erreur qui résultera des omissions faites dans le calcul, soit moindre qu'une grandeur donnée; et pour aider l'imagination de ses lecteurs, il apporte quelques exemples sensibles (*). Cette manière de raisonner, à laquelle il semble qu'on n'ait rien à reprocher, a été regardée de la part de Leibnitz, comme un aveu de l'insuffisance de ses principes, par Fontenelle, qui voyait s'écrouler ainsi tout l'édifice qu'il avait bâti sur les infinis. Les plaintes qu'il en porte dans la préface de sa Géométrie, et qui ont été répétées dans plusieurs ouvrages, offrent un exemple de la facilité avec laquelle les erreurs passent de livre en livre, et montrent combien peu de gens prennent soin de se former une opinion indépendante de celle des autres.

Newton supposa les lignes engendrées par le mouvement d'un point, et les surfaces par celui d'une ligne; et il appela fluxions les vitesses qui réglaient ces mouvemens. Ces notions, quoique très-rigoureuses, sont

(*) Voyez la note de la page 486 de ce volume et le tome III des Oeuvres de Leibnitz, pages 369, 370 et 511.

étrangères à la Géométrie, et leur application peut être difficile. Il est bien vrai qu'en imaginant un point qui se meuve sur une ligne, pendant qu'elle est emportée parallèlement à elle-même, avec une vitesse uniforme, on peut représenter une courbe quelconque ; mais la vitesse du point décrivant étant variable à chaque instant, on ne peut la déterminer qu'en recourant soit à la méthode des Anciens ou d'exhaustion, soit à celle des premières et dernières raisons, et c'est presque toujours de celle-ci que Newton s'est servi ; ensorte que les fluxions n'étaient, à proprement parler pour lui, qu'un moyen de donner un objet sensible aux quantités sur lesquelles il opérait. Il entendait par la *méthode des premières et dernières raisons*, la recherche du rapport qu'ont entre elles, au premier ou au dernier instant de leur existence, des quantités qui naissent ou qui s'évanouissent ensemble, ou plutôt, comme il le dit aussi, celle de la limite dont ce rapport approche sans cesse ; et il trouvait dans la première raison des espaces parcourus par l'ordonnée sur la ligne des abscisses et par le point décrivant sur l'ordonnée, espaces qu'il nommait *momens*, le rapport de la fluxion de l'abscisse à celle de l'ordonnée, d'où il tirait la direction de la tangente. Le calcul n'était que celui dont Barrow faisait usage pour sa méthode des tangentes, mais que Newton, par le moyen de sa formule du binôme et de la réduction en séries, avait étendu aux expressions irrationnelles. Il me semble donc que l'avantage de la Méthode des fluxions sur le Calcul différentiel, du côté de la Métaphysique, ne consiste qu'en ce que les fluxions étant des quantités finies, leurs momens ne sont que des infiniment petits du premier ordre, et leurs fluxions sont encore finies : par ce moyen on évite les infiniment petits des ordres supérieurs.

D'Alembert et Euler ont cherché à donner au Calcul différentiel, une base qui leur parut plus solide que la subordination des infiniment petits ; le premier se servit de la méthode des limites, et le second considéra les infiniment petits comme des zéros absolus, mais qui conservaient un rapport dérivé de celui qu'avaient entre elles les quantités évanouies qu'ils remplaçaient. On se demandera sans doute, ce qu'on peut entendre par le rapport des quantités qui ont cessé d'exister, et cette objection qu'on fait contre la Métaphysique d'Euler, s'applique également à celle de la Méthode des premières et dernières raisons ; car il n'y a point de milieu entre être et ne pas être, et du moment où les accroissemens sont quelque chose, leur rapport n'est ni celui des fluxions, ni celui des limites. M. Carnot, dans ses *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal* (ou *différentiel*), où il discute avec beaucoup de soin les principes de

ce calcul, observe que c'est en vertu de la loi de continuité, que les quantités évanouissantes gardent encore le rapport dont elles se sont approchées par degrés, avant de s'évanouir.

Cet écrit prouve que si on avait créé des mots lorsqu'il en était besoin, on aurait eu des idées plus claires. En appelant *équations imparfaites*, les équations différentielles, M. Carnot jette un grand jour sur leur théorie. En effet, lorsque l'on considère les différentielles qu'elles contiennent, comme représentant les accroissemens des variables, elles n'ont lieu que d'une manière approchée; mais leur degré d'exactitude est en quelque sorte indéfini, car il dépend de la petitesse qu'on suppose aux changemens des variables; et puisque rien ne limite cette petitesse, les équations différentielles peuvent donc être aussi près de la vérité qu'on le voudra: voilà les idées de Leibnitz traduites en Analyse. M. Carnot fait voir ensuite, comment les équations imparfaites deviennent rigoureuses à la fin du calcul, et à quel signe on reconnaît leur légitimité; ce signe est la disparition totale des quantités différentielles, dont pouvait provenir l'erreur, s'il y en avait. On ne doit pas juger le travail de M. Carnot, par le peu que j'en ai dit; et ce n'est pas seulement dans la manière d'envisager le Calcul différentiel qui lui est propre, que consiste le mérite de son Mémoire, mais encore dans la comparaison qu'il fait des divers points de vue sous lesquels on a présenté ce calcul.

Je ne dois pas oublier de rapporter ici que dès 1758, Landen proposa, pour se passer de la considération de l'infini et de celle du mouvement ou des fluxions, une Méthode qui revient au fond à celle des limites; mais le calcul s'appuie sur un théorème algébrique qui lui donne une forme particulière. La franchise avec laquelle Landen se dépouille des préjugés nationaux, imprime un caractère remarquable à son ouvrage; car il est peut-être le seul des Géomètres anglais qui soit convenu des inconvéniens de la Méthode des fluxions.

C'est l'application du Calcul différentiel à la Géométrie, qui lui a donné un caractère différent de celui de l'Algèbre ordinaire; car M. Lagrange a fait voir, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1772, qu'il pouvait être traité analytiquement, d'une manière indépendante des considérations de l'infini. L'expression des changemens qui arrivent dans une fonction, lorsqu'on augmente ou qu'on diminue une ou plusieurs des quantités dont elle dépend, peut toujours être réduite en série ordonnée suivant les puissances des différences de ces quantités; les coefficients qui sont indépendans de ces différences, pré-

sentent de nouvelles fonctions dérivées de la proposée, d'après une loi régulière.

C'est dans la recherche de ces coefficients et dans celle de leurs propriétés que consiste le Calcul différentiel : les fonctions d'une seule variable ne donnent qu'un coefficient dans chaque ordre; les fonctions de deux ou plusieurs variables, ayant une différence qu'on peut ordonner comme un polynome, suivant les produits homogènes des accroissemens, ont plusieurs coefficients pour un même ordre. On peut chercher, ou chaque coefficient en particulier, ou les relations qu'ils ont entre eux, et avec la fonction dont ils dérivent : voilà le Calcul différentiel. Il sera aux différentielles ordinaires, s'il ne s'agit que d'une fonction d'une seule variable, et aux différentielles partielles, s'il est question d'une fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables.

Le Calcul intégral a pour objet de remonter des coefficients aux fonctions, c'est-à-dire de résoudre les questions inverses.

Il est étonnant que cette manière si simple de donner une origine analytique au Calcul différentiel, ait été si long-temps à trouver; il semble qu'elle aurait dû se présenter à Euler, qui le premier sépara ce Calcul de son application aux courbes, et qui, en exprimant par des lettres les rapports des différentielles, avait délivré des quantités infiniment petites, les équations qui en contenaient.

Newton même était déjà sur la voie de cette manière d'envisager le Calcul différentiel; car il a aussi considéré les ordonnées successives d'une même courbe, développées en séries, suivant les puissances des accroissemens de l'abscisse, et il a indiqué les principales propriétés de ces coefficients relativement à l'application géométrique : il lui manquait seulement une manière de les dériver les uns des autres; et il paraît que c'est Taylor qui montra le premier leur formation successive par les fluxions, formation qui n'est autre chose que son Théorème.

Frappé des difficultés que présentait l'étude de l'Analyse et de la Géométrie transcendante, par l'intervalle qui séparait les ouvrages élémentaires les plus étendus, des Mémoires où se trouvaient consignées les nouvelles découvertes, et ayant senti combien la nécessité de recourir à des livres peu répandus ou à des collections académiques dont on est privé dès qu'on n'habite pas la Capitale, pouvait arrêter les jeunes gens, dès 1787, je rassemblais des matériaux pour former un Traité complet de Calcul différentiel et de Calcul intégral; et à la première lecture que je fis alors du Mémoire de M. Lagrange, je me proposai de prendre pour base de ce Traité, les idées lumineuses qu'il avait subs-

tituées à celles des infiniment petits. Je communiquai à quelques personnes les premières ébauches de mon travail; j'en écrivis à plusieurs Géomètres célèbres, pour qu'ils voulussent bien m'indiquer les sources où je pourrais puiser, et m'aider de leurs conseils; voici ce que M. Laplace me répondit en janvier 1792 : « Je vois avec beaucoup de plaisir que vous travaillez à un grand ouvrage sur le Calcul intégral... » Le rapprochement des Méthodes que vous comptez faire, sert à les éclairer mutuellement, et ce qu'elles ont de commun renferme le plus souvent leur vraie métaphysique; voilà pourquoi cette métaphysique est presque toujours la dernière chose que l'on découvre. L'homme de génie arrive comme par instinct aux résultats; ce n'est qu'en réfléchissant sur la route que lui et d'autres ont suivie, qu'il parvient à généraliser les Méthodes, et à en découvrir la métaphysique. »

J'ai rapporté ce passage, plus encore pour les réflexions qu'il contient, que pour indiquer l'époque à laquelle j'avais déjà conçu le plan que j'ai suivi dans la première édition de mon Ouvrage, dont l'impression fut commencée en frimaire an 4 (novembre 1795), et suspendue par des raisons particulières, pendant quelques mois. Depuis cette époque, M. Lagrange est revenu sur ses premières idées, à l'occasion d'un Cours qu'il a fait à l'École Polytechnique, et j'ai suivi ses leçons avec tout l'intérêt qu'elles devaient inspirer; mais l'état où était mon ouvrage et la marche de l'impression ne m'ont permis alors de profiter que d'un petit nombre de ses remarques que j'ai eu soin de rapporter à leur Auteur.

Afin de rendre mon Ouvrage accessible à un plus grand nombre de lecteurs, je crus devoir préparer l'exposition des principes du Calcul différentiel par une Introduction, dans laquelle je m'occupai du développement des fonctions soit algébriques, soit logarithmiques ou circulaires, après avoir réduit les idées d'infini et d'infiniment petit à ce qu'elles ont de réel, c'est-à-dire à l'exclusion de toute limite, soit en grandeur, soit en petitesse, ce qui n'offre qu'une suite de négations, et ne saurait jamais constituer une notion positive (*). La méthode dont j'ai fait usage pour le développement des fonctions, ne s'appuie sur aucune

(*) Assez souvent on a substitué le mot *indéfini* au mot *infini*, croyant par là éluder les difficultés que faisait naître ce dernier; mais je ne vois en cela qu'une faute d'expression; car l'*indéfini* peut avoir des limites, mais on en fait abstraction pour le moment, tandis que l'*infini* est nécessairement ce dont on affirme que les limites ne peuvent être atteintes par quelque grandeur concevable que ce soit.

★

considération de ce genre ; aucun terme n'y est négligé ; toutes les équations de condition y sont vérifiées en quelque nombre qu'elles soient , par un calcul fondé sur les indices des quantités à déterminer , et très-propre , je crois , à faire sentir les avantages de la symétrie dans les calculs , et la puissance d'une notation quand elle est analogue aux idées qu'elle représente.

Les *Éléments d'Algèbre* laissaient à désirer beaucoup de choses sur la théorie des équations , lorsque la première édition de mon Ouvrage parut , et ne me proposant pas alors d'en rédiger de nouveaux , je dus faire entrer ces théories dans mon plan ; mais craignant que l'étendue de l'Introduction , devenue par là très-considérable , ne parût retarder trop long-temps l'entrée dans le Calcul différentiel , sujet principal du *Traité* , je pris le parti d'insérer , dans le corps même de ce *Traité* , un chapitre contenant une *digression sur les équations*. Depuis , ayant publié mes *Éléments d'Algèbre* et leur *Complément* , et les matières qu'ils contiennent faisant partie de l'enseignement ordinaire , j'ai supprimé ce chapitre qui , à tous égards , nuisait à l'ordre ; mais la résolution des équations à deux termes par les formules trigonométriques , la réduction des imaginaires à la forme $A + B\sqrt{-1}$, au moyen de ces formules , les considérations sur les logarithmes et les sinus imaginaires , ont passé dans l'Introduction , avec plusieurs articles nouveaux qui font de cette Introduction , si je ne me trompe , un *Traité* assez complet , de l'analyse intermédiaire entre les *Éléments d'Algèbre* proprement dits , et le Calcul différentiel.

Le premier chapitre est , dans cette édition comme dans la précédente , consacré à l'exposition des principes du Calcul différentiel. A l'exemple d'Euler , je donne d'un seul jet l'exposition purement analytique et complète des principes de ce Calcul , dans toute l'étendue qu'il doit avoir pour correspondre aux diverses branches du Calcul intégral. Dans un livre élémentaire , cette marche retarderait trop les applications , si nécessaires pour soutenir le courage d'un lecteur qui s'engage pour la première fois dans une carrière dont il n'apperçoit pas le but ; mais un *Traité* aussi volumineux que celui-ci , ne peut guère être consulté que par des personnes auxquelles le sujet n'est pas tout-à-fait étranger , ou qui ont un goût décidé pour ce genre d'étude ; et de tels lecteurs cherchent principalement à classer les matériaux de la science , pour en mieux saisir l'ensemble et la liaison , afin de se les rappeler plus aisément lorsqu'ils pourront en avoir besoin.

Aussi ai-je rassemblé dans ce même chapitre tout ce qui concerne la

différentiation des fonctions d'une ou de plusieurs variables, celle d'un nombre quelconque d'équations, la notion des différentielles partielles et le changement de variables indépendantes, qui revient, dans les idées de Leibnitz, à rendre variable une différentielle que l'on regardait comme constante, *et vice versa*. Cette manière d'envisager la transformation dont il s'agit, ne pouvait plus convenir lorsqu'on cessait de regarder les différentielles comme des différences; les considérations qui la remplacent se trouvaient déjà dans la première édition de mon Ouvrage, où les amenait nécessairement le plan que j'avais adopté. Quand ce plan fut mis en œuvre par son auteur, M. Lagrange, les mêmes idées durent se présenter à lui; et il y a en effet un passage analogue dans la *Théorie des Fonctions analytiques*; mais redevable d'ailleurs de tant de choses à cet illustre Géomètre, je ne le suis pas de celle-là, voilà pourquoi l'on ne trouve aucune citation dans cet endroit de mon Ouvrage. Je l'ai développé, et j'ai tâché de l'étendre et de l'éclaircir, comme beaucoup d'autres, dans l'édition actuelle; cela m'a été d'autant plus aisé, que par ses derniers écrits, M. Lagrange a non-seulement beaucoup enrichi la théorie du développement des fonctions, considérée comme base du Calcul différentiel, mais qu'il l'a rendue presque populaire, et a fixé sur elle l'attention de la plupart des Géomètres. J'ai pu aussi mettre à profit une démonstration du théorème de Taylor, due à M. Poisson, d'après laquelle on découvre la loi des exposans des termes de la série; mais malgré cette facilité, je n'ai pas cru devoir entrer en matière par l'énoncé de ce théorème; car quelque ingénieuses que soient les diverses démonstrations qu'on en a données jusqu'ici, toutes laissent entrevoir plus ou moins, qu'il est sujet à exception, et répandent de l'obscurité sur les premières notions, toujours un peu abstraites lorsqu'elles sont le mieux circonscrites. Ces propositions, si générales en apparence, ont plus d'éclat que d'utilité, puisqu'elles ne dispensent pas de l'examen des cas où elles sont en défaut; il vaut mieux ne montrer ces cas que successivement, à mesure qu'ils se présentent d'eux-mêmes, que de les faire prévoir d'avance et comme des accessoires, au moment où le lecteur n'embrasse qu'avec peine le petit nombre d'idées principales que vous lui présentez. Une semblable marche rend l'esprit difficile, et jette sur les fondemens de la théorie, des nuages qui ne se seraient pas formés, si l'on avait conservé la trace de l'induction par laquelle on est arrivé à l'énoncé général.

Voilà pourquoi j'ai continué à établir, par une énumération de cas particuliers, la forme générale du développement du second état que

prend une fonction dont la variable a reçu un accroissement : c'est ainsi qu'Euler y est parvenu ; et par là j'ai pu exposer le mécanisme de la différentiation, avant de m'engager dans aucune discussion abstraite. La notation se trouvant alors bien connue, je m'en suis servi pour abréger la démonstration générale du théorème de Taylor. Dans cette démonstration, il se présente plus d'équations qu'il n'en faut pour déterminer les coefficients de la série ; je n'ai cependant pas supprimé la vérification de ces équations surabondantes, que j'avais insérée dans ma première édition, quoique cette vérification devînt moins nécessaire lorsque la forme de la série était légitimée *à priori* ; mais n'exigeant presque point de calcul, elle conserve l'analogie entre la formule de Taylor et les développemens obtenus dans l'Introduction, et ne laisse rien à désirer sur une proposition qui est la base du Calcul différentiel.

Je n'ai pas cru non plus devoir terminer ce chapitre, sans donner une idée des diverses manières dont on a proposé d'amener le Calcul différentiel et de le lier à l'Algèbre. Dans la première édition, je m'étais borné à faire sortir des principes que j'avais suivis, les suppositions établies par Leibnitz, auxquelles il est si commode de revenir dans le plus grand nombre de recherches : ici, j'en ai fait le rapprochement avec la méthode de Landen dont j'ai parlé plus haut, et qui se lie bien avec la considération des limites. J'ai indiqué deux nouvelles théories qui ont été proposées depuis la première impression de mon Ouvrage ; mais sans m'établir juge de ces théories, j'ai insisté sur l'embarras que les nouvelles notations dont elles sont accompagnées, ne sauraient manquer de jeter dans l'analyse, et qu'il me semble d'autant plus à propos d'éviter, que la notion des différences ou des accroissemens que prennent les fonctions, se prête à tous les points de vue ; qu'elle repose sur les idées les plus simples, les plus naturelles, et qu'elle conduit à une notation qui demeure toujours juste et expressive, quand même on rejetterait les idées de l'infini dont elle est absolument indépendante : c'est du moins ce que je crois avoir prouvé dans l'endroit que je cite.

Je ne dois pas omettre de dire ici, comme un point d'histoire assez important, que l'idée de démontrer en toute rigueur, par la seule analyse, les principes et les méthodes du Calcul différentiel, a été mise d'abord à exécution par Condorcet, dans un ouvrage dont l'impression, commencée en 1786, a été interrompue par la révolution. Les vingt-quatre premières feuilles, qui sont entre les mains de plusieurs personnes, donnent une idée suffisante du plan de l'Auteur, puisqu'elles contiennent toute l'exposition des principes du Calcul différentiel. Cette exposition paraît d'abord un

peu compliquée, par l'usage que l'Auteur y fait de la caractéristique affectée aux différences (finies), et par les détails où il entre sur la manière d'ordonner les développemens des différences des fonctions, suivant les accroissemens des variables, qu'il suppose successifs et inégaux. C'est en montrant que le premier terme, ou le premier rang de ce développement, selon qu'il s'agit des fonctions d'une ou de plusieurs variables, sert à former les termes ou les rangs suivans, que Condorcet parvient au Calcul différentiel. Il fait dériver les équations différentielles, des équations qui ont lieu entre les accroissemens complets, en prouvant que le développement de celles-ci se vérifie terme par terme ou rang par rang, quelle que soit la valeur de l'accroissement de la variable indépendante, qui doit rester indéterminé. Il déduit de ces considérations très-ingénieuses, les théorèmes sur l'analogie des puissances avec les différences, simplement énoncés par M. Lagrange, et qui n'avaient encore été démontrées que par M. Laplace, mais en suivant une voie très-différente. Enfin, pour obtenir les différentielles des fonctions logarithmiques et circulaires, il forme le développement de ces fonctions par des procédés dégagés des considérations de l'infini, procédés fort répandus aujourd'hui, mais dont on n'avait alors aucun exemple (*).

(*) On reprochait avec assez de raison à Condorcet, de ne s'être livré qu'à des aperçus dans son premier *Traité de Calcul intégral*, imprimé en 1765 ; et c'est en grande partie pour cesser de mériter ce reproche, qu'il a composé l'ouvrage dont j'ai parlé ci-dessus. On dit que le manuscrit a été quelque temps égaré, mais qu'ensuite il a été retrouvé, et imprimé en entier aux frais d'un libraire de Hambourg, qui l'ensevelit depuis plus de six ans dans son magasin, avec une édition complète des œuvres du même auteur. Pourquoi ne le met-on pas au jour ? c'est ce que j'ignore ; car la publication de ce traité n'importait pas moins à la mémoire de Condorcet qu'à l'avancement de la science. Pour apprécier avec équité ses travaux connus dans ce genre, il faut plutôt y voir ce qu'il était capable de faire, que ce qu'il a fait. A l'époque où ils ont paru, ses premiers essais annonçaient un Géomètre très-distingué, dont la science devait attendre beaucoup de progrès ; et quoiqu'entraîné par le talent qu'il avait pour écrire sur les matières philosophiques, ou plutôt par sa philanthropie qui lui montrait dans la propagation générale des lumières, un moyen bien plus efficace de concourir à l'avancement de l'esprit humain que le succès de quelques recherches abstraites ; cependant, à diverses reprises il s'est occupé des points les plus épineux de l'Analyse transcendante. S'il ne donna guère que des vues sur ces matières, ces vues sont souvent profondes : sans doute en les faisant passer au creuset de l'application, il aurait pu les étendre encore, les perfectionner, les rectifier quelquefois ; mais, tels qu'ils sont, les Mémoires de Condorcet le montrent toujours à la hauteur des découvertes les plus récentes, des théories les plus diffi-

L'attention particulière que l'on a donnée depuis quelque temps aux principes sur lesquels doivent reposer le Calcul différentiel et le Calcul intégral, a, comme je viens de le dire, introduit un assez grand nombre de considérations nouvelles ; et l'on peut maintenant demander laquelle de ces considérations doit être préférée aux autres dans l'enseignement. La réponse à cette question n'est pas sans difficulté dans l'état actuel de la science, puisqu'une route dont on ne fait qu'apercevoir l'entrée ; peut conduire à des découvertes importantes, et que chacun des points de vue sous lequel on a envisagé le passage de l'Algèbre au Calcul différentiel, donne à ce calcul des formes qui, pour le moins, offrent des facilités particulières dans la solution de certains problèmes ; cependant lorsqu'on veut concilier la rapidité de l'exposition avec l'exactitude dans le langage, la clarté dans les principes, et marcher dans une direction telle, que l'on puisse les rapprocher sans peine, soit de la métaphysique de Leibnitz, soit de la théorie du développement des fonctions proposée par M. Lagrange, je pense qu'il convient d'employer la méthode des limites. Cette opinion est appuyée sur les réflexions suivantes que j'ai déjà consignées dans plusieurs ouvrages.

ciles. Parvenir à ce point, et s'y maintenir, en suivant la carrière à laquelle il paraissait s'être entièrement voué, c'est montrer à-la-fois une grande facilité et une grande pénétration. L'emploi qu'il fit de ces heureuses qualités pour réunir la culture des sciences à celle des lettres, et répandre sur les unes le charme des autres, justifie bien la considération et le crédit qu'il s'était acquis ; et cependant avec quelle facilité il savait oublier tous ses avantages et descendre aux ménagemens les plus délicats, vis-à-vis de ceux mêmes qui ne faisaient qu'entrer dans la carrière où il était aux premiers rangs ; il ne cherchait point à faire prévaloir ses opinions auprès des personnes que la supériorité de ses talens et l'influence que son estime pouvait avoir sur leur sort, rendaient ses inférieurs ou ses obligés. En accueillant les jeunes gens, il ne les protégeait pas, il les servait avec zèle ; et par un ton simple et modeste, par une civilité vraiment affectueuse, par l'agrément et l'instruction qu'il répandait dans son commerce familial, il leur inspirait à-la-fois une reconnaissance aussi douce que profonde, et un attachement aussi durable que respectueux. Ses derniers momens, employés à tracer l'*Esquisse des progrès de l'esprit humain*, prouvent l'inaltérable fermeté avec laquelle il avait embrassé ses principes, et que sa conviction ne tenait pas à des intérêts du jour. S'il eût pu échapper autrement que par une mort volontaire, à la proscription dans laquelle il était enveloppé, il n'est pas douteux qu'il n'eût rassemblé et mûri ses travaux sur le calcul des probabilités, qu'il n'a cessé de rappeler aux déterminations qui intéressent le plus l'ordre social ; et il en aurait déduit de très-beaux résultats. Les questions qu'il a agitées sur ce sujet marquent toutes par leur nouveauté, par leur importance ; et le plan qu'il a donné d'un *Traité de Mathématique sociale* (Voy. le *Journal de l'Instruction sociale*, n° IV, ou les *Œuvres de Condorcet*, T. XXI), offre un cadre qu'il serait bien utile de remplir.

La propriété commune à toutes les fonctions, d'admettre une limite, dans le rapport de leurs accroissemens à ceux de la variable dont elles dépendent, limite différente pour chaque fonction, mais constamment la même pour une même fonction et toujours indépendante des valeurs absolues des accroissemens, est un *fait analytique* bien constaté. On le retrouve sous quelque point de vue que l'on envisage les variations d'une fonction, et la science du Calcul n'en offre pas qui soit plus remarquable en lui-même, puisque cette limite caractérise d'une manière qui lui est propre, la *marche* de la fonction dans les divers états par lesquels elle peut passer; car plus les accroissemens de la variable indépendante sont petits, ou plus les valeurs successives de la fonction sont resserrées, plus enfin cette fonction approche d'être soumise à la loi de continuité dans ses changemens, plus leur rapport à ceux de la variable indépendante, approche d'être égal à la limite assignée par le calcul. Le passage à cette limite est ici l'expression même de la loi de continuité, c'est-à-dire de la loi qui s'observe dans la description des lignes par le mouvement, et d'après laquelle les points consécutifs d'une même ligne se succèdent sans aucun intervalle. En effet, la manière d'envisager les grandeurs dans le calcul, n'admet pas immédiatement cette loi; car dès que l'on considère deux valeurs distinctes de la même quantité, il y a nécessairement un intervalle entre elles; mais plus il est petit, plus on se rapproche de la loi dont il s'agit, à laquelle la limite seule convient parfaitement. La Géométrie confirme ces conceptions, puisque toute fonction peut être représentée par l'ordonnée d'une courbe dont cette variable est l'abscisse, et que l'on ne saurait appliquer le calcul à la marche de cette courbe, par quelque théorie que ce soit, sans y considérer au moins deux points distincts. Il faut ensuite que les résultats qu'on en tire puissent être vrais, quelque rapprochés que soient ces points, ou d'autant plus vrais, qu'ils seront plus près de coïncider. N'est-ce pas toujours en revenir, pour le fonds, à la coïncidence des points, qui, par le fait analytique déjà cité, n'annule pas les rapports que l'on considère? Si l'on assignait un terme quelconque au rapprochement de ces points, on n'aurait que des polygones, et non pas des courbes. Quand, par exemple, deux points étant pris sur une courbe, on conçoit que l'un de ces points s'approche sans cesse de l'autre qui demeure fixe, peut-on nier que la *sousécante* s'approche continuellement de la *soutangente*, et de telle manière, que la différence entre ces deux grandeurs peut être rendue aussi petite que l'on veut? La seconde, qui ne varie pas avec la distance supposée entre les points, est évidemment

la *limite* de la première, si toutefois l'on n'insère pas dans la définition de ce mot, une condition inutile (*Voy.* les nos 10 et 11 de l'*Introduction*).

La difficulté que présentent les *mouvements variés*, est la même que celle qui a lieu à l'égard des courbes; car, excepté pour le mouvement uniforme, qui est dans cette partie des mathématiques, ce que la ligne droite est dans la Géométrie, on ne peut pas plus introduire dans le calcul la continuité des changemens de vitesses que celle des lignes. Il faut toujours partager ces mouvements en plusieurs temps, et descendre soit par voie d'exclusion, soit autrement, à des portions de plus en plus petites; en sorte que c'est toujours dans un dernier terme purement intellectuel, que résident les déterminations caractéristiques des grandeurs cherchées.

Comme toutes les autres, la méthode des limites aurait aussi ses longueurs, si l'on s'attachait plus aux détails qu'à l'esprit de la chose; et beaucoup d'auteurs ne s'en sont servis que pour arriver à quelques résultats simples et marquans, dont la conformité avec ceux que donne le Calcul différentiel, pût justifier *à posteriori*, les procédés de celui-ci, tandis qu'il aurait fallu conclure immédiatement ses principes de ceux mêmes de la méthode des limites: c'est ce que j'ai tâché de faire, en conciliant la brièveté avec l'exactitude, dans mon *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral*. J'ai supprimé ici des détails qui appartiennent exclusivement au plan de cet Ouvrage, je n'ai conservé que ce qui était nécessaire pour ramener à leur véritable sens les expressions où l'on suppose les grandeurs infinies ou infiniment petites, montrer ce qu'on doit entendre par les divers ordres de ces quantités, et comment ils ont en effet la subordination qu'on leur suppose. Cette subordination, dont la connaissance est on ne peut pas plus utile dans les applications géométriques, se manifeste alors avec la plus grande netteté, et indépendamment de toute construction, par l'emploi du théorème de Taylor, comme on le verra dans l'ouvrage que je viens de citer, et dans celui-ci: néanmoins ce théorème, regardé avec raison par Condorcet, comme la base naturelle du Calcul différentiel, était demeuré long-temps oublié dans l'ouvrage de son auteur. Euler l'avait employé dans ses *Institutions de Calcul différentiel*; mais ce n'est que de nos jours qu'il est passé dans l'enseignement élémentaire, et son introduction, qui est également le résultat de toutes les méthodes nouvelles, doit être regardée comme formant époque dans les progrès de l'analyse.

L'application analytique la plus féconde et la plus importante du Calcul différentiel, est le développement des fonctions; j'en ai fait le sujet du second chapitre de mon Ouvrage. Elle se lie immédiatement au théorème

de Taylor, qui n'est lui-même que la formule générale du développement des fonctions de quantités binomes ; mais ce n'est pas ainsi qu'elle fut présentée d'abord par Maclaurin : il parvint au théorème qui porte aujourd'hui son nom, par un usage des différentiations successives qui dut paraître très-adroit et très-simple, et qui cependant est demeuré presque inconnu jusqu'en 1777, que M. Laplace s'en est servi dans un très-beau Mémoire sur le développement des fonctions en séries (*). Euler fit remarquer dans ses *Institutions de Calcul différentiel*, le parti qu'on pouvait tirer de la différentiation des équations, pour en éliminer soit des puissances, soit des fonctions transcendantes, et se procurer ainsi de nouvelles équations, au moyen desquelles on exprime les uns par les autres, avec la plus grande facilité, les coefficients du développement cherché : ce procédé n'est, à proprement parler, que l'application du Calcul différentiel à la *Méthode des coefficients indéterminés*, imaginée par Descartes, et si féconde en beaux résultats. La résolution des équations littérales et celle de quelques équations transcendantes, ont fait sentir le besoin de formules pour développer la valeur d'une fonction engagée avec sa variable, dans une équation soit algébrique, soit transcendante. Dans ces recherches, une formule, remarquée en premier lieu par Lambert, s'est aussi présentée à M. Lagrange, qui l'a généralisée en une série très-élégante, nommée aujourd'hui le *Théorème de Lagrange*. Enfin M. Laplace a démontré ce théorème, qui n'était encore appuyé que sur une sorte d'induction, et en a augmenté l'étendue dans le Mémoire que j'ai déjà cité.

Tels étaient les matériaux les plus importants parvenus à ma connaissance, lorsque je travaillai à la première édition de mon Ouvrage ; ils forment encore la base du chapitre que j'analyse. J'ai tâché de les présenter dans l'ordre qui convient à l'état actuel de la science, en offrant au lecteur les méthodes les plus simples, liées de la manière la plus directe : voilà pourquoi j'ai commencé par l'emploi du théorème de Taylor ; de là je suis passé à l'usage des équations différentielles à deux variables ; et le procédé de Maclaurin se trouve, dans mon Ouvrage comme dans

(*) C'est dans le second livre du *Traité des Fluxions* de Maclaurin, qu'a paru ce théorème. Le premier livre, consacré à la démonstration géométrique des principes et des résultats du Calcul des fluxions, est digne de l'attention de ceux qui aiment la méthode des Anciens ; mais le second livre, qui renferme la partie analytique, est très-remarquable pour le temps de sa publication : il est bien supérieur aux traités qu'on avait alors sur le même sujet.

le Mémoire de M. Laplace, précéder l'usage heureux que cet illustre géomètre a fait des équations différentielles partielles, pour développer les fonctions en séries; et le théorème de Taylor vient ici se présenter de nouveau. Je n'entrerai pas dans le détail des questions résolues par ces formules; je ne citerai que la recherche des divers développemens des sinus et des cosinus d'arcs multiples en puissances de ces mêmes fonctions, *et vice versâ*. Ces développemens, obtenus d'abord par induction, présentaient, dans certains cas, des anomalies singulières, qui ont attiré l'attention d'Euler, celle de plusieurs de ses disciples, et que M. Lagrange a aussi complètement expliquées dans ses *Leçons sur les fonctions analytiques*. Ce que j'en ai dit ici, joint à ce qui est contenu dans l'Introduction, semble ne rien laisser à désirer sur ce sujet.

La Méthode du retour des suites, due à Newton, et qui a rendu de si grands services dans les premiers temps de l'invention des nouveaux calculs, perdait de son importance, à mesure que les combinaisons analytiques s'étendant et se multipliant, faisaient sentir les avantages de la symétrie des calculs et de la connaissance de la loi qui enchaîne tous les termes d'un même développement. Celle qui règne dans les formules du retour des suites, est masquée par des réductions, et ne se montre qu'après qu'on a mis en évidence celle des puissances du polynome ordonné par rapport à une variable, ainsi que je l'ai indiqué dans mon Introduction. Le théorème de Lagrange donne bien une forme symétrique aux formules du retour des suites; mais les puissances du polynome indéfini s'y retrouvent, et pour en former les coefficients, on n'avait que les règles données par Moivre, ou les relations successives obtenues par Euler, au moyen de la différentiation. Le premier de ces procédés n'est fondé que sur l'induction; le second ne mène qu'à déterminer les coefficients les uns par les autres, en sorte que pour parvenir à celui d'un terme, il faut passer par tous ceux qui le précèdent. Tels sont les motifs qui ont donné naissance à l'*Analyse combinatoire*, très-cultivée en Allemagne, déduite de quelques vues que Leibnitz a proposées, sur l'emploi des nombres ordinaux à la place des lettres pour indiquer les coefficients des inconnues ou des variables, et au moyen de laquelle on forme, par des opérations régulières, les coefficients des termes du développement des puissances d'un polynome (*). Sans doute, dans ces recherches,

(*) Ce fragment de Leibnitz est très-curieux; il se trouve dans les *Acta Eruditorum*, année 1700, page 206, et dans les *Œuvres de Leibnitz*, T. III, page 365. La force des choses a conduit plusieurs géomètres français à se servir des nombres, au

qui paraissent avoir été commencées par M. Hindenburg, et qui ont été suivies avec constance par des hommes de mérite, il y a des procédés ingénieux et utiles; mais on ne saurait se dissimuler qu'ils ne sont encore par rapport à l'analyse, que ce qu'étaient le triangle arithmétique de Pascal, pour former les puissances du binôme, et les tableaux employés par Viète et par l'Hôpital, pour continuer les formules relatives à la division des arcs de cercle.

Ayant remarqué que le théorème de Taylor était, comme je l'ai déjà dit, la formule générale du développement des fonctions de quantités binomes, et que ses termes se déduisaient successivement l'un de l'autre par un procédé uniforme, Arbogast imagina de modifier ce procédé, de manière à l'étendre aux développemens des fonctions de polynomes; et de là naquit une nouvelle espèce de différentiation dont l'objet est de déduire, les uns des autres, les coefficients des puissances de la variable suivant laquelle est ordonné un polynome quelconque, ou même de calculer l'un quelconque de ces coefficients, en dérivant de son premier terme tous ceux dont il doit être composé. J'observerai en passant, que le nom de *calcul des dérivations* par lequel il désigne sa méthode, est trop général pour en donner une idée; car toute quantité qui tire son origine d'une autre, de quelque manière que ce soit, en est une dérivée; et quoique le procédé d'Arbogast renferme celui de la différentiation, il n'offre encore qu'un cas particulier du nombre infini de lois d'après lesquelles on peut enchaîner les unes aux autres, des quantités ou des fonctions. Je crois qu'il est permis d'en dire autant de la dénomination de *fonctions dérivées*, appliquée aux *coefficients différentiels*, que cette dernière expression caractérise seule d'une manière spéciale. Quoi qu'il en soit des termes, il faut convenir que le calcul des dérivations atteint le but que l'auteur s'est proposé, et qu'il conduit à des résultats fort généraux et élégamment exprimés; mais les premiers Géomètres de notre temps n'ont vu, dans ce calcul, qu'un artifice particulier de différentiation, appliqué à la formation des différentielles des fonctions de quantités qui sont elles-mêmes fonctions d'autres quantités, et ainsi de suite;

moins comme *indices*; mais aucun n'en a fait un usage aussi étendu et aussi ingénieux que Vandermonde. Il faut voir comment il les emploie pour combiner les fonctions des racines des équations algébriques, comment il exprime, par leur moyen, les conditions d'une tresse, d'un nœud ou d'un réseau, et il ouvre un nouvel accès à la solution des problèmes de la *Géométrie de situation*, enfin, comment il abrège les formules d'élimination, et en facilite la combinaison. (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, année 1771, pages 370, 366, et année 1772, 2^e partie, page 516.

et ils ont pensé qu'en suivant cette marche on pouvait parvenir aux mêmes résultats, sans employer ce grand nombre de notations nouvelles et de considérations particulières qui rendent l'ouvrage d'Arbogast difficile à lire. M. Paoli a composé dans cette vue un Mémoire dont j'ai donné la traduction dans mon Ouvrage, et dont l'objet est, dit-il, « de montrer » comment, sans nous charger l'esprit de principes nouveaux et de nouvelles manières d'envisager l'état varié des quantités, nous trouvons » dans le Calcul différentiel les secours nécessaires pour la solution de » tous les problèmes relatifs au développement des fonctions en série (*). » Cependant, le calcul des dérivations a peut-être été jugé un peu trop défavorablement ; car M. Français, géomètre distingué, qui s'est rendu familier ce calcul, à la naissance duquel il a pour ainsi dire assisté, en a tiré un très-grand parti dans un Mémoire inédit sur le mouvement des projectiles soumis à la résistance de l'air. Le nombre de séries que renferme cet écrit, et l'étendue de leur développement, sembleraient excéder les forces d'un calculateur, s'il fallait les obtenir par les procédés ordinaires, qui d'ailleurs n'en laisseraient pas appercevoir la loi.

Un point remarquable de la formation de tous les développemens, c'est que la série de Taylor seule suffit pour dégager ce qui tient à la nature de la fonction. Qu'elle soit irrationnelle ou transcendante, cette circonstance ne porte que sur le premier terme de la quantité dont elle dépend, et les autres n'entrent plus que dans des puissances entières et positives de polynomes. M. Kramp, saisissant cette observation faite par Arbogast, a imaginé une méthode qui semble la réunion des premiers principes du calcul des dérivations, avec les procédés fondamentaux de l'analyse combinatoire, et dont il a déduit plusieurs formules nouvelles et remarquables, qui sont insérées dans son *Arithmétique universelle*. Avant que cet ouvrage et celui d'Arbogast aient paru, M. Burmann avait donné aussi quelques formules générales pour développer les fonctions en séries ; et dès 1779, M. Laplace avait présenté aux Géomètres son *Calcul des fonctions génératrices* ; qui remplit ce but d'une manière très-élégante, et qui se lie avec plusieurs branches de l'analyse, à propos desquelles nous en exposerons les principes dans le troisième volume de cet

(*) L'unico oggetto propostomi in questa Memoria è stato quello di accennare, come senza caricarci la mente di nuovi principj e nuovi modi di considerare lo stato variato delle quantità, troviamo nel Calcolo differenziale i sussidi necessarij alla soluzione di tutti i problemi relativi allo sviluppo delle funzioni in serie. (*Mém. de la Société italienne*, T. XIII, page 31).

Ouvrage, en y ajoutant l'extension que l'auteur lui a donnée depuis : nous remettons aussi à ce volume ce qui regarde la *séparation des échelles*, dénomination imaginée par Arbogast, pour indiquer une sorte de calcul que l'on pourrait faire sur les caractéristiques des différentielles, des différences et des intégrales, en partant de l'analogie qui lie les développemens de ces fonctions à ceux des puissances, analogie que je fais remarquer dès le premier chapitre de mon Ouvrage.

En voyant un si grand nombre de Géomètres, surtout en Allemagne, réunir tous leurs efforts pour créer de nouvelles méthodes propres à développer les *fonctions polynomiales*, on est naturellement porté à rechercher quelles espérances on peut concevoir de leurs travaux pour les progrès de la science; mais le grand nombre de découvertes inattendues doit rendre circonspect celui qui se livre à ce genre de conjectures. Le Calcul différentiel, par exemple, semblait dans le principe n'avoir pour objet que de mener des tangentes aux courbes dont l'équation était irrationnelle; et sans la détermination des lois du mouvement, il demeurerait restreint à la seule Géométrie. Cependant, en considérant avec attention l'état actuel de la science, on ne peut s'empêcher de remarquer qu'elle est véritablement surchargée par des procédés, très-ingénieux sans doute, mais dont la puissance, renfermée dans des limites étroites et à peu près pareilles, ne dédommage pas celui qui les étudie des efforts qu'ils lui coûtent, et dont il ne pourrait être payé que par une abondante moisson de conséquences, et surtout d'applications nouvelles; c'est du moins ainsi, ce me semble, qu'on doit en juger, lorsque, ne cédant pas à un goût particulier pour les spéculations des Mathématiques pures, on ne voit dans ces sciences que ce qu'elles sont aux yeux du philosophe, un instrument sûr et fécond pour combiner les lois des phénomènes, ou les déduire des observations. Le luxe de l'analyse, si on peut parler ainsi, est devenu presque effrayant; et plus il augmente, plus il laisse voir sa pauvreté réelle dans tout ce qui tient aux méthodes inverses, les seules dont la Physique puisse à présent retirer des avantages. Les problèmes sont mis en équation; mais comment traiter ces équations avec toutes les circonstances qu'elles renferment? Comment se dégager de ces hypothèses qui rendent illusoires tant de solutions où le calcul est étalé avec profusion? Comment rendre praticables et sûres ces approximations fondées sur des séries qui se ramifient de plus en plus, à mesure qu'on les pousse plus loin, ou cet enchaînement de corrections successives qui réagissent les unes sur les autres, et constituent des méthodes dont le succès ne tient qu'à des rapports particuliers de

grandeurs données par les observations, et qui semblent déterminées ainsi par le hasard. Voilà ce qu'on ne peut s'empêcher de voir, quand on se forme le tableau de l'ensemble des méthodes analytiques; et tout porte à croire que les difficultés qui les arrêtent ne peuvent être vaincues qu'à l'aide d'un calcul nouveau, fondé principalement sur les fonctions qu'on appelle aujourd'hui transcendentes, et qu'on exprime quelquefois si heureusement par des *intégrales définies*. Ces derniers mots m'avertissent que je dois terminer la digression dans laquelle je suis entré, et reprendre l'analyse de l'Ouvrage que je présente au Public.

Le troisième chapitre a maintenant pour objet l'examen des valeurs particulières que prennent dans certains cas les coefficients différentiels; et en séparant cette matière du second chapitre où elle était comprise dans la première édition, je me suis rapproché du plan qu'Euler a suivi. Un chapitre des *Institutions de Calcul différentiel* est consacré au même sujet; mais la place qu'il occupe montre assez que l'auteur pensait qu'on devait écarter ces exceptions des commencemens sur lesquels, ainsi que je l'ai déjà dit, elles peuvent jeter une obscurité dangereuse. C'est par des cas de cette espèce, que Rolle et quelques autres ont attaqué le Calcul différentiel à sa naissance. Saurin leur répondit avec beaucoup de succès, dans plusieurs *Mémoires* insérés parmi ceux de l'Académie; mais il s'agissait principalement dans ces disputes, de l'application du Calcul différentiel aux courbes. Euler est le premier, à ce que je crois, qui ait envisagé le sujet du côté purement analytique; et les explications que M. Lagrange en a données depuis, les ont dépouillées de la forme paradoxale qu'elles avaient au premier coup-d'œil. Loin de paraître aujourd'hui un défaut dans le Calcul différentiel, on reconnaît qu'elles sont un développement nécessaire des lois de la génération des fonctions, sans lequel il y aurait contradiction dans ces lois; et c'est ce qui arrive toujours aux paradoxes analytiques, quand on est parvenu à leur véritable origine; mais pour y arriver, il faut considérer un grand ensemble, et saisir le fil qui lie entre elles les diverses parties de ce tout. Ce n'est donc que lorsque la science est avancée, que l'on peut atteindre à ces éclaircissemens; par cette raison on ne doit les présenter aux lecteurs que lorsqu'ils ont acquis déjà une assez grande instruction; et qu'on ne dise pas qu'en retardant ces notions, on pêche contre la rigueur de la méthode. Il ne faut pas outrer cette rigueur: ce n'est jamais dans leurs premières études que les géomètres les plus célèbres se sont livrés à ces discussions épineuses; un sentiment très-fin, et la grande masse de résultats qui s'appuient les uns sur les autres, ne laissent pas lieu aux esprits bien faits, de douter de la vérité de

ce qu'ils apprennent. Telle est sans doute la cause pour laquelle les Bernoulli ne nous ont rien laissé sur la métaphysique du Calcul différentiel qu'ils ont enrichi de tant de découvertes.

J'ai cru devoir placer dans ce chapitre la théorie des maximums et des minimums (*), parce que non-seulement ils répondent à des valeurs particulières des coefficients différentiels, mais parce qu'en cherchant à les déterminer, on tombe très-souvent sur ces valeurs singulières dont il faut connaître le sens. Depuis l'emploi fréquent du théorème de Taylor, presque partout on a fondé la recherche des maximums et des minimums sur ce théorème, à l'exemple de Maclaurin. Cette marche, très-lumineuse sans doute, ne mène cependant qu'à un résultat incomplet; car lorsqu'on envisage les fonctions d'une manière purement analytique, il y a de véritables maximums ou minimums qui correspondent à des valeurs infinies du coefficient différentiel du premier ordre, puisque dans ces circonstances l'accroissement de ces fonctions se change en décroissement, ou *vice versa*; et le caractère qui les distingue des maximums ou minimums correspondans à des valeurs nulles du coefficient différentiel, est purement géométrique, puisqu'il repose sur la forme que prend la courbe dont la fonction proposée représente l'ordonnée. Cette observation m'a engagé à les comprendre dans la théorie que j'ai donnée; et je pense que par là elle est devenue non-seulement plus complète, mais plus claire.

C'est dans cette circonstance qu'on fait pour la première fois usage du principe de la convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une quantité prête à s'évanouir, et d'après lequel un terme de ces séries peut être rendu plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent. Ce principe, qu'on peut justifier en peu de mots d'une manière satisfaisante (voy. la note, page 562), était généralement admis depuis long-temps par les analystes et par Maclaurin lui-même, quelque partisan qu'il fût de la rigueur géométrique; mais lorsque M. Lagrange s'en est servi dans sa *Théorie des Fonctions*, il en a donné une démonstration qui repose sur la sommation de la série de Taylor. D'Alembert, dans ses *Recherches sur différens points importants du Système du Monde* (T. II, page 52), était parvenu à cette série par une voie qui ne la développe que successivement; mais l'expression du reste est engagée sous des signes d'intégration qui se compliquent de plus en plus, et ne permettent pas de l'employer ici; c'est pourquoi M. Lagrange

(*) Voy. les motifs de cette dénomination dans la note page 560.

a cherché à mettre ce reste sous une autre forme. Dans le cours qu'il fit à l'École Polytechnique, en l'an iv (1795), où ses auditeurs ont eu la satisfaction de voir pour ainsi dire naître ses idées et de suivre pied à pied le fil de ses méditations sur ce sujet, il avait remarqué que les limites d'une portion quelconque de la série s'obtiennent avec la plus grande facilité, quand tous ses termes sont positifs. Leur expression, dans ce cas, convient aussi à tous les autres; mais pour s'en assurer, M. Lagrange a été forcé de recourir à des considérations qui tiennent au Calcul intégral; et quoiqu'il les ait beaucoup simplifiées dans ses *Leçons sur le Calcul des fonctions*, je n'ai pu les employer encore sous cette forme, d'après la loi que je m'étais imposée de renvoyer au second volume tout ce qui tient au Calcul intégral. J'ai donc présenté ces considérations dans un ordre inverse, en indiquant les premiers pas faits par M. Lagrange, pour parvenir au but qu'il s'était proposé, et dont la connaissance répand, ce me semble, beaucoup de lumières sur ce sujet. Si l'on ne peut s'empêcher de convenir que la possibilité de comprendre ainsi la série de Taylor, à partir d'un terme quelconque, entre deux limites qu'on peut resserrer autant qu'on veut, est bien propre à fixer les idées dans plusieurs applications du Calcul différentiel, on ne saurait cependant se dissimuler qu'au fond elle n'est pas plus évidente que le principe de la convergence des séries que j'ai rappelé plus haut; car il faut nécessairement s'appuyer sur ce principe, pour montrer que le signe d'une fonction quelconque dépend de la somme des valeurs que prend le premier terme de la série qui exprime son accroissement, ou, ce qui est la même chose, des valeurs de sa différentielle, puisque cela suppose que l'on reconnaisse qu'un terme multiplié par la première puissance d'une quantité susceptible de diminuer continuellement, jusqu'à s'évanouir, peut surpasser la somme de tous les termes qui sont multipliés par des puissances plus élevées de la même quantité; or cette dernière remarque suffit pour fonder les applications géométriques de la série de Taylor, dans lesquelles il ne s'agit que de la possibilité intellectuelle de rendre un terme supérieur à la somme de tous ceux qui le suivent.

Ces applications sont le sujet du quatrième chapitre de mon Ouvrage; elles sont encore précédées, comme dans la première édition, d'une théorie algébrique des courbes, mais dont j'ai supprimé à peu près toute la partie élémentaire qui se trouve dans mon *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'Algèbre à la Géométrie*. Ces méthodes algébriques, reposant sur des idées qui sont au fond les mêmes que

celles qui servent de base à l'application du Calcul différentiel, de quelque manière qu'on le présente, préparent très-naturellement à cette application. Je l'ai traitée sous deux points de vue : l'un, qui n'emprunte *explicitement* aucune notion de l'infini, est dû à M. Lagrange; Arbogast y était aussi parvenu de son côté, en suivant les traces de Newton et de Maclaurin, qui, comme on l'a vu plus haut, considéraient le développement en série du second état de l'ordonnée.

En rendant justice à l'évidence de cette marche, j'ai cru ne pas devoir négliger la considération des infiniment petits, qui abrège et facilite considérablement la mise en équation des problèmes de géométrie et de mécanique ; et le rapprochement que j'ai fait des deux méthodes, prouvera, je pense, aux lecteurs attentifs, qu'elles ne diffèrent que dans les expressions. La subordination des différentielles des divers ordres sur laquelle repose tout l'édifice des infiniment petits, et qui paraît au premier coup-d'œil si difficile à admettre, s'explique avec la plus grande clarté, par les développemens que fournit la série de Taylor, soit pour les différences successives d'une fonction quelconque, soit pour celles des lignes qui représentent ces différences dans les courbes. Si je ne me trompe, la manière dont j'ai présenté cette théorie sous le point de vue analytique dans le premier chapitre, et sous le point de vue géométrique dans celui-ci, ne doit laisser aucun nuage dans l'esprit : car tout se réduit à concevoir que le rapport de deux séries ascendantes ordonnées par rapport à la même grandeur, s'évanouit lorsque celle qui est au numérateur, commence par une puissance plus élevée de la variable que celle qui est au dénominateur.

Ceci ramène naturellement à la théorie des limites, qui me paraît toujours celle qui concilie le mieux la brièveté avec l'exactitude du raisonnement, qui, tenant pour ainsi dire le milieu entre les considérations les plus éloignées, met à portée de les saisir toutes et de les rapprocher entre elles. Si j'ai retranché ici à peu près tout ce qui concernait cette théorie, c'est parce que j'en ai fait la base de mon *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral* ; mais j'ai laissé subsister, comme l'indication d'un fait remarquable, la détermination des courbes osculatrices, par la coïncidence des points d'intersection de toutes celles de même espèce qui rencontrent la proposée. L'usage que j'ai fait du théorème de Taylor dans cette circonstance, dispensant de toute construction géométrique, distingue ce procédé de plusieurs autres qui ont eu le même objet, et qui étaient appuyés sur la même considération. A tous on peut objecter sans doute, que lorsque les divers points d'intersection

sont réunis en un seul, l'œil n'aperçoit plus de différence dans les contacts considérés isolément ; mais en convenant de la vérité de l'observation, je ne crois pas qu'on puisse écarter cette théorie d'un ouvrage de la nature du mien, dans lequel il est à propos de montrer partout les traces de la loi de continuité, et d'indiquer toutes les notions métaphysiques de quelque importance.

L'existence des points singuliers des courbes se lie aux changemens de forme que subit dans certains cas le développement de la différence des ordonnées ; et la détermination de ces points a toujours été incomplète et fautive, tant qu'on a voulu la fonder sur des règles particulières à chaque espèce de points. Maclaurin a ouvert une meilleure route, en introduisant dans cette recherche, comme dans celle des maximums et des minimums, la considération de deux ordonnées entre lesquelles soit comprise celle du point singulier ; mais il n'a pas complété l'énumération des cas qui peuvent se présenter. J'ai suivi sa marche dans la première édition de mon Ouvrage ; et en l'examinant avec attention, j'ai, le premier, à ce que je crois, réduit la question à ses véritables termes, dans mon *Traité élémentaire*, par une règle générale et simple, qu'on trouvera également dans celui-ci, accompagnée de quelques explications qui font bien voir que les points singuliers, n'étant que le passage d'une forme à une autre, ne sont pas indiqués par un caractère spécial, et ne peuvent être distingués sûrement que par la discussion des parties de courbe qu'ils séparent.

Descartes avait indiqué dans sa *Géométrie*, le moyen d'appliquer l'analyse aux surfaces et aux courbes considérées dans l'espace ; et, d'après ses idées, plusieurs problèmes importants soit sur les courbes à double courbure, soit sur les surfaces courbes, avaient été résolus par Clairaut, Hermann, Jean Bernoulli et Euler : ce dernier avait même reconnu les deux courbures principales des surfaces courbes, et l'expression analytique du caractère qui distingue les surfaces développables de celles qui ne le sont pas ; mais toutes ces belles découvertes n'étant pas présentées par une analyse uniforme, n'offraient pas encore un ensemble satisfaisant. M. Monge, en y introduisant la symétrie et l'élégance, qu'il a poussées si loin dans tous ses calculs, a changé la face de cette branche des Mathématiques, qu'il a d'ailleurs considérablement enrichie par ses propres découvertes. De son côté, M. Lagrange, par son *Mémoire sur la Théorie des Pyramides* (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1773), qui est un chef-d'œuvre dans ce genre, faisait sentir qu'on pouvait découvrir les propriétés de l'étendue, par des calculs analytiques, fondés

seulement sur les données de la question, sans faire aucune construction préparatoire, ni même s'aider d'aucune figure. La *Mécanique analytique* offre également beaucoup de détails qui tiennent à cette manière d'envisager la Géométrie, que l'on pourrait appeler aussi *Géométrie analytique*, et d'après laquelle on considère, au lieu des points et des triangles qui les déterminent, les lignes dont ils sont les intersections, et au lieu des lignes, les plans ou les surfaces qui les contiennent simultanément. Aucun ouvrage élémentaire n'avait été publié sur ce sujet avant la première édition de ce Traité; je fus obligé d'insérer dans le chapitre IV, les principales déterminations de la ligne droite suivant des conditions données, pour servir d'introduction au chap. V, où je présentais les découvertes de M. Monge, rapprochées des travaux d'Euler et des autres Géomètres. Depuis, ces préliminaires ayant servi de base à mon Traité d'application de l'Algèbre à la Géométrie, et ayant passé ensuite dans beaucoup d'autres ouvrages, je les ai supprimés dans cette nouvelle édition; mais j'ai donné plus de développement à la partie qui embrasse les trois dimensions de l'espace, et qui forme toujours le V^{ème} chapitre. J'ai tâché de le rendre encore plus indépendant des considérations géométriques, en m'appuyant sur des notions du plan et de la ligne droite, proposées par M. Fourier, dans une des séances de l'École normale, et au moyen desquelles toute la Géométrie ne reposerait que sur la considération de la propriété fondamentale du triangle rectangle. On pourrait encore remonter plus haut, car M. Legendre a donné, dans les notes de ses *Éléments de Géométrie*, un moyen de tirer immédiatement la théorie des triangles semblables, des conséquences de la superposition, et M. Corancez, dans un Mémoire fondé sur des principes analogues, est parvenu aux théorèmes les plus importants de la Géométrie élémentaire. Ces recherches pourraient ne paraître que curieuses; mais il est incontestable que la Mécanique a retiré les plus grands avantages de l'analyse appliquée à la Géométrie dans l'espace: aussi ai-je cru devoir insérer dans mon Ouvrage tout ce qui pouvait préparer à l'intelligence des formules générales relatives et à l'équilibre et au mouvement des corps, et c'est pour cela que j'ai introduit explicitement les angles dans les équations du plan et de la ligne droite, que j'ai déterminé la position du plan que M. Laplace a fait connaître sous la dénomination de *plan invariable*, et que je me suis beaucoup étendu sur la transformation des coordonnées dans l'espace. On remarquera peut-être le moyen par lequel je passe des formules données par M. Monge (page 556), et si faciles à obtenir par un principe fécond dû à M. Carnot,

à celles d'Euler, qui jouent un rôle si important dans la théorie du mouvement de rotation des corps solides.

J'ai éclairci et développé l'énumération des surfaces du second degré, l'élimination des fonctions arbitraires, dans les équations qui expriment les principales générations des surfaces; et après avoir exposé la théorie des développées des courbes à double courbure donnée par M. Monge, j'ai cru devoir indiquer quelques moyens d'exprimer analytiquement les transformations que subit une courbe qu'on enveloppe sur une surface, ou qu'on aplanit en développant cette surface. Ces recherches, que j'avais présentées à l'Académie des Sciences en 1790, se lient avec celles de feu M. Lancret, et peuvent concourir à compléter l'édifice de la Géométrie analytique dont M. Malus a fait une heureuse application à l'optique considérée dans toute sa généralité.

Lorsque les principes du Calcul différentiel sont bien établis, le Calcul intégral, qui en est l'inverse, n'offre plus qu'une collection de procédés analytiques, qu'il faut ordonner de manière à faire ressortir le petit nombre de rapports qui existent entre eux, car ils sont très-souvent isolés. Comme je l'ai dit plus haut, il a été cultivé dès la naissance du Calcul différentiel; mais ses méthodes sont restées long-temps éparses dans les Journaux scientifiques et dans les Mémoires des Académies. Le premier traité complet pour le temps où il a paru, et dans lequel on put appercevoir l'étendue de cette branche des nouveaux calculs, est celui que M. Bougainville publia en 1756, pour servir de suite à l'*Analyse des infiniment petits* de l'Hôpital. On y trouve, outre ce qui a été découvert par les Bernoulli et par quelques géomètres italiens qui se sont occupés spécialement du Calcul intégral, l'extrait des beaux Mémoires que d'Alembert a donné dans les années 1746, 47 et 48 des *Mém. de l'Acad. de Berlin*, et qui font époque dans cette branche des mathématiques. Peu d'années après, Euler commença la publication de son Traité de Calcul intégral, faisant suite à ses *Institutions de Calcul différentiel*, à son *Introduction à l'analyse des infinis*, et formant avec ces importants traités, le plus beau cours d'analyse qui eût encore paru.

Cependant en 1768, époque où le dernier des sept volumes dont ce cours est composé fut mis au jour, l'ouvrage avait cessé d'être complet; on n'y trouvait rien sur les équations aux différences, et il y manquait d'ailleurs l'application du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes : on doit juger par là de ce qu'il fallait y ajouter pour faire connaître l'état de la Science en 1798, où a paru le second volume de mon Ouvrage, comprenant le Calcul intégral proprement dit.

Dans ce volume, je me suis à peu près conformé au plan suivi par Euler, qui classe les méthodes d'après la forme des fonctions auxquelles elles s'appliquent. Lorsqu'il s'agit de remonter d'un coefficient différentiel à la fonction dont il dérive, ce coefficient peut être donné explicitement par la variable indépendante, ou bien, lié avec cette fonction par une équation différentielle; le premier cas, que l'on appelle aussi la *méthode des quadratures*, parce qu'on y ramène la recherche de l'aire d'une courbe, occupe le premier chapitre, dans lequel je passe des fonctions rationnelles entières aux fonctions fractionnaires et aux fonctions irrationnelles. La nécessité de recourir dans le plus grand nombre de cas aux moyens approximatifs, mène à l'intégration par les séries; mais celle qui s'opère par le développement de la différentielle, donne rarement une formule convergente, ce qui est cependant indispensable toutes les fois qu'il s'agit d'applications numériques; aussi renvoyait-on alors à ce qu'on appelait la *quadrature mécanique* des courbes. Ce moyen consistait sans doute, dans les premiers temps, à tracer la courbe qui a pour ordonnée le coefficient différentiel, et à déterminer son aire par une approximation graphique. C'est du moins ainsi qu'on peut expliquer comment les premiers géomètres qui se sont occupés du Calcul intégral, regardaient comme résolu, un problème réduit à la quadrature d'une courbe; mais bientôt on a construit des formules pour déduire des valeurs d'un certain nombre d'ordonnées, cette quadrature mécanique: celles d'Euler se présentent naturellement ici, et les autres seront indiquées dans cette nouvelle édition, lorsqu'il sera question des principes sur lesquels elles reposent. On doit mettre aussi au rang des acquisitions les plus remarquables du Calcul intégral, dans la partie des méthodes d'approximation, ce que M. Lagrange a fait, en 1784, sur la différentielle qui contient un radical quarré affectant un polynôme du quatrième degré.

En parlant dans le second chapitre, des applications du Calcul différentiel à la quadrature et à la rectification des courbes, j'ai déduit du procédé que je viens de citer, les théorèmes concernant la transformation des arcs d'ellipse, auxquels M. Legendre est parvenu en 1786. La quadrature et la cubature des surfaces courbes quelconques, amenant les problèmes où l'on s'est proposé de trouver, sur les surfaces, soit des lignes rectifiables algébriquement, soit des espaces quarrables, conduisait naturellement à parler de l'espèce de *Calcul intégral indéterminé*, où il s'agit d'assigner la forme que doit avoir la fonction différentielle pour que l'intégrale soit d'une nature donnée. On n'a encore résolu dans ce genre, qui comprend la fameuse énigme de Florence proposée par Viviani, que des

problèmes curieux ; mais cette recherche , qu'Euler a le premier tenté de réduire en méthode régulière , était trop remarquable pour la passer sous silence , et j'en ai indiqué les bases dès ma première édition.

Le troisième chapitre est consacré aux équations différentielles à deux variables , c'est-à-dire à la détermination des fonctions d'une seule variable , au moyen d'une relation donnée entre cette variable , la fonction qui en dépend et ses coefficients différentiels. Cette branche de l'analyse renferme un grand nombre de procédés , mais qui malheureusement n'ont guère de succès que dans des cas très-particuliers , et à peu près les mêmes pour tous. C'est ainsi qu'on ne vient guère à bout de déterminer le facteur propre à rendre une équation différentielle intégrable , que dans le cas où l'on sait séparer les variables ; et cette dernière méthode , qui remonte à l'origine du Calcul intégral , est encore une des plus fécondes ; mais son application ne présente qu'un petit nombre de résultats tant soit peu généraux : les autres sont l'effet de substitutions heureuses , que le tact qui s'acquiert par une longue pratique suggère à des analystes exercés , et dont on ne saurait rendre raison *à priori*. Je donne plusieurs exemples de ces cas ; mais comme ils offrent peu d'intérêt quand ils ne se rapportent à aucune question physique , je passe aux équations où les coefficients différentiels et la fonction ne montent qu'au premier degré , et que j'appelle pour cette raison , *équations du premier degré* , la dénomination de *linéaires* qu'on leur a donnée étant très-impropre , puisqu'elles n'appartiennent point à une ligne droite. Ce que l'on sait sur ces équations , compose la seule théorie que l'on ait dans cette branche du Calcul intégral , et sert de base à toutes les méthodes d'approximation employées dans les recherches physico-mathématiques. C'est à M. Lagrange qu'on est redevable des deux propositions générales que comprend cette théorie , comme aussi de celles qui expriment la liaison qui existe entre une intégrale et les solutions particulières d'une équation différentielle , et qui tiennent à la manière d'étendre une équation à des cas qu'elle ne comprend pas explicitement , en faisant varier les constantes qu'elle renferme ; procédé dont M. Lagrange vient de faire les plus belles applications aux problèmes de la mécanique , concernant le mouvement des corps célestes.

Quant à la détermination des solutions particulières , par la seule connaissance de l'équation différentielle , de nouvelles recherches ont montré que le procédé le plus sûr était celui qu'avait donné Euler dans son Calcul intégral , que M. Laplace a ensuite étendu et perfectionné , et dont M. Poisson s'est servi pour compléter cette détermination par

PRÉFACE.

xij

rapport à toutes les espèces d'équations différentielles. Voilà l'exposé rapide des matériaux que j'ai dû employer dans le chapitre que j'ai en vue dans ce moment ; plusieurs n'étaient pas encore publiés lors de la première édition. A ces matériaux il faut joindre quelques questions géométriques, résolues pour indiquer l'usage des équations différentielles dans la détermination des courbes d'après leurs propriétés. En passant en revue les méthodes, dans une partie de l'analyse qui laisse tant à désirer, il était naturel de présenter quelques vues sur les moyens de la perfectionner ; et c'est à quoi m'a conduit l'examen de l'intégration de ces équations formées de deux différentielles semblables, dont aucune n'est séparément intégrable. Elles n'ont été remarquées, d'abord par Fagnano, qu'à l'égard des arcs elliptiques ; mais elles ont lieu par rapport aux logarithmes et aux arcs de cercle, et pourraient bien donner naissance à une théorie très-féconde, ainsi que je l'ai indiqué dans un article contenant quelques réflexions sur les transcendentes en général.

J'ai, dans ce chapitre et dans le précédent, choisi mes exemples parmi les plus remarquables de ceux qu'on trouve dans le *Traité de Calcul intégral* d'Euler ; et je crois n'avoir laissé de côté que ce que tous les bons esprits s'accordent à regarder comme des longueurs. Je passe ensuite aux fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables : ce chapitre, qui est le quatrième, commence par l'intégration des différentielles totales comprenant un nombre quelconque de variables, et satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, dont je donne à cette occasion la théorie générale. Dans la première édition, cette théorie venait à la suite de l'exposition des principes du Calcul différentiel, et en cela, j'avais suivi l'exemple d'Euler ; mais le développement qu'elle exige aujourd'hui, ne permet plus qu'on la place aussi loin de ses applications.

La considération immédiate des équations différentielles totales contenant plus de deux variables, se présente bien plus rarement que celle des équations différentielles partielles. C'est Euler qui le premier a intégré une de celles-ci, en résolvant un problème de géométrie pure ; mais d'Alembert, en les introduisant dans la théorie du mouvement des fluides, a le mérite d'en avoir fait sentir toute l'importance. Il en a intégré plusieurs par des méthodes fort ingénieuses ; mais sa manière de les présenter sous la forme de différentielles à rendre exactes, jetait beaucoup de complication sur le sujet ; tandis qu'Euler, en écrivant l'équation même à laquelle cette condition donne lieu, en indiquait le véritable sens, qui est d'offrir une relation entre les variables primitives et un certain nombre de coefficients différentiels, relation qui est en général

insuffisante pour déterminer entièrement la fonction cherchée, puisque cette fonction a, dès le premier ordre, plus d'un coefficient différentiel : et il faut dire ici que la définition du Calcul différentiel donnée par M. Lagrange, dans son Mémoire de 1772, déjà cité, rend bien évidente la liaison de ces équations, ou du *Calcul différentiel partiel* dont elles sont l'objet, avec le Calcul des différentielles totales, le seul dont on s'était d'abord occupé. Quoique les bases du premier de ces calculs puissent être considérées comme implicitement comprises dans le second, son usage dans les recherches physico-mathématiques est tel, qu'on l'a regardé avec raison comme formant une découverte digne d'occuper dans l'Histoire littéraire du 18^e siècle, le rang que tient la découverte de Leibnitz dans celle du 17^e. Les méthodes que l'on emploie aujourd'hui dans ce calcul, sont dues principalement aux travaux d'Euler, à ceux de M. Lagrange, sur les équations différentielles du premier ordre, combinés fort heureusement par Charpit, géomètre mort à la fleur de l'âge, au beau Mémoire de M. Laplace, sur les équations du premier degré (ou linéaires), et aux recherches de M. Monge qui, considérant ce calcul par rapport à la génération des surfaces courbes, l'a pour ainsi dire inventé de nouveau, ou du moins ne doit qu'à lui seul tout ce qu'il en a publié dans ses divers Mémoires. En cherchant à retrouver par des considérations purement analytiques, l'intégrale de l'équation de la surface dont l'aire est un *minimum*, donnée pour la première fois par M. Monge, M. Legendre a aussi ajouté quelque chose à ce qu'on savait sur les équations différentielles partielles du second ordre.

Malgré les recherches de ces géomètres célèbres, le Calcul intégral aux différentielles partielles est encore bien peu avancé, puisque, passé le premier ordre, on ne sait pas même le nombre et la nature des arbitraires que doit contenir l'intégrale d'une équation, pour être générale. J'ai fait voir dans la première édition de mon Ouvrage, la fausseté de l'analogie qu'on avait voulu établir entre les fonctions arbitraires et les constantes qui complètent les intégrales des équations différentielles totales, et s'éliminent une à une à chaque différentiation. Depuis, plusieurs Géomètres ont repris ces considérations ; mais je ne crois pas qu'on sache encore rien de positif à ce sujet : tout ce qui semble prouvé, c'est que la division des équations différentielles partielles en ordres, ne paraît pas conforme à leur nature ; car la difficulté de les intégrer et l'étendue des équations primitives dont elles dérivent, ne correspondent pas avec cette division. Pareille chose peut s'observer par rapport aux équations différentielles à deux variables, si l'on fait attention aux équations du premier degré à coefficients constans, qui s'intègrent de la même manière dans

tous les ordres; on a vu aussi que la classification par le degré dans un même ordre, n'était pas plus en rapport avec les difficultés de l'intégration, et cette circonstance a lieu aussi dans les équations différentielles à deux variables, comme le montre l'équation $y - x \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ qui s'intègre toujours par le même procédé, quelle que soit la forme de la fonction désignée par f . On pourrait faire de semblables remarques pour les équations algébriques mêmes, par rapport à la correspondance entre la forme des racines et le degré des équations auxquelles elles appartiennent. Établir dans toutes ces espèces de fonctions une classification meilleure, et qui mette en évidence les transcendentes fondamentales ou indépendantes, c'est peut-être le plus grand pas à faire maintenant dans l'analyse.

En exposant ce que l'on doit à M. Monge, sur le Calcul intégral aux différentielles partielles, je ne pouvais pas omettre l'interprétation lumineuse qu'il a donnée des équations différentielles à trois variables qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, et qui représentent des courbes assemblées en famille par des propriétés qui ne permettent pas qu'elles soient toutes sur la même surface. Considérées sous le point de vue analytique, les intégrales que M. Monge a données de ces équations différentielles, viennent se rattacher au Calcul intégral indéterminé, dont j'ai parlé dans le deuxième chapitre, puisqu'on peut très-souvent choisir dans l'ensemble de ces intégrales celles qui sont algébriques; et pour en rendre l'existence indépendante des considérations géométriques qui les avaient fait connaître à M. Monge, j'ai montré leur liaison avec la théorie des solutions particulières due à M. Lagrange.

Le *Calcul des variations*, fruit des premiers travaux de M. Lagrange, et qu'Euler s'empressa d'étudier, de commenter, et de substituer au bel ouvrage où il avait résolu le problème des *isopérimètres* (*), est l'objet du cinquième chapitre, le dernier de ce volume. Outre son usage pour déterminer les courbes ou les surfaces qui, relativement à leurs aires, leurs arcs, leurs volumes, etc. jouissent de *maximums* ou de *minimums*, ce calcul est devenu indispensable dans la Mécanique, depuis que M. Lagrange l'a appliqué au développement des conséquences du principe des *vitesse virtuelles*; mais pour ne pas lui ôter de sa simplicité et de son élégance dans ces nouvelles recherches, il fallait lui conserver la forme sous laquelle son inventeur l'a présenté d'abord, et qui est sem-

(*) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.*

blable à celle que la métaphysique de Leibnitz donne à la différentiation : c'était aussi la marche que j'avais suivie dans la première édition de mon Ouvrage. Cependant il était à désirer qu'on pût, sans lui rien faire perdre de ses avantages, lier le calcul des variations avec le développement des accroissemens des fonctions ; et M. Lagrange y est parvenu dans la seconde édition in-8° de ses *Leçons sur le Calcul des fonctions*, en se rapprochant de la manière dont Euler avait déduit du Calcul différentiel partiel celui des variations. Cet illustre analyste, ayant l'habitude d'éliminer les différentielles, en indiquant les coefficients différentiels de la fonction, désirait pouvoir faire la même chose par rapport à la variation de l'ordonnée, sans pourtant se priver des termes que la variation de l'abscisse introduit dans les équations délivrées du signe f , au moyen desquelles la méthode des variations donne la solution complète de tous les problèmes qui s'y rapportent : on voit même, par ses différens Mémoires sur cette matière, qu'il eut toujours quelque peine à concevoir l'existence de ces équations. Au reste, M. Poisson a montré qu'elles sont implicitement comprises dans la partie de la variation affectée du signe f , lorsqu'on introduit dans cette partie les constantes arbitraires que comportent les intégrales des équations différentielles de la courbe cherchée. J'ai profité de toutes ces recherches pour perfectionner ce chapitre dans l'édition présente.

Le développement des fonctions en séries conduit au Calcul différentiel ; le Calcul intégral fait connaître de nouvelles fonctions qu'on ne peut exprimer que par des suites, et la considération de ces dernières fait naître le *Calcul aux différences finies*, que j'appelle simplement *Calcul aux différences*. Telles sont les raisons qui m'ont porté à le séparer du Calcul différentiel, qu'il comprend cependant implicitement comme cas particulier. Cet ordre présente, selon moi, un avantage assez important ; c'est celui de réunir, dans un seul corps de doctrine toute la théorie des suites, morcelée dans la plupart des livres qui en traitent, ce qui n'a point été fait depuis Jacques Bernoulli et Stirling, quoique la matière se soit prodigieusement accrue par les travaux d'Euler, de MM. Lagrange et Laplace. Le Calcul aux différences forme donc le premier chapitre du troisième volume de cet Ouvrage, volume qui porte le titre particulier de *Traité des différences et des séries*. Dans l'exposition de la partie directe de ce calcul, je rapporte plusieurs formules élégantes que M. Prony a données dans son *Traité de la Méthode des différences*, ainsi que diverses méthodes d'interpolation, et leur application à la quadrature des courbes. Dans le Calcul

inverse des différences se présentent les produits des facteurs équi-différens, que Vandermonde a désignés par une notation qui met en évidence les analogies curieuses et très-utiles que ces produits ont avec les puissances. Ses vues sur ce sujet, qui peuvent, à ce que je crois, mener beaucoup plus loin, comme plusieurs autres qui rendent très-remarquables le petit nombre de Mémoires qu'il a donnés, après être restées long-temps dans l'oubli, se sont présentées à M. Kramp, à l'occasion de ses recherches sur les réfractions astronomiques. Ce géomètre désigne les produits de facteurs équi-différens, sous le nom de *facultés numériques*; Arbogast, qui les ramène à ses *dérivations*, les appelle *factorielles*; et M. Multedo, qui a repris ces considérations dans la forme proposée par Vandermonde, ce qui en fait une sorte de Calcul particulier, donne à ces mêmes produits le nom de *quantités hyper-géométriques*.

Les formules qui expriment l'analogie des puissances avec les différences et avec les intégrales, mènent très-simplement aux séries qui donnent l'intégrale aux différences d'une fonction quelconque. J'ai fait usage de la première démonstration que M. Laplace a donnée de ces formules, et j'ai tiré d'un beau Mémoire du même géomètre, l'expression du terme général des nombres de Bernoulli, qui jouent un si grand rôle dans la sommation des suites. Le soin que j'ai pris de rapprocher, autant qu'il était possible, les diverses méthodes qui avaient le même objet, multiplie trop les détails dans cette partie, pour que j'en puisse donner l'analyse.

Parmi plusieurs digressions qu'amène la grande variété de sujets qu'embrasse le Calcul aux différences, se présente la détermination du nombre des termes des polynomes, et l'emploi que Bézout en a fait pour donner la première démonstration que l'on ait eue du plus haut degré auquel peut s'élever l'équation finale résultante de l'élimination d'un nombre quelconque d'inconnues entre des équations algébriques. La détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales aux équations différentielles partielles, l'examen de la nature de celles qui complètent les intégrales des équations aux différences, les diverses sortes d'intégrales qu'admettent ces dernières, ainsi que leurs solutions particulières, sont des sujets que j'ai traités dans cette édition plus exactement que dans la première, en m'aidant des travaux de MM. Biot et Poisson.

En regardant les valeurs successives d'une fonction, comme les divers coefficients des puissances d'une variable dans le développement d'une autre fonction de cette variable, ce qui rentre tout-à-fait dans l'origine

que j'ai assignée ci-dessus au Calcul aux différences, on retrouve, par des procédés simples, uniformes et élégans, la plupart des formules obtenues par ce calcul, et d'autres encore plus générales : c'est en cela que consiste le *Calcul des fonctions génératrices*, donné pour la première fois en 1779, par M. Laplace, et qu'il a enrichi de nouveaux résultats non moins remarquables que les premiers. S'il fallait à présent faire un choix entre les méthodes propres au développement et à la transformation des suites, le Calcul des fonctions génératrices pourrait mériter la préférence sur la plupart des moyens connus ; mais dans l'état actuel de la science, où elle est circonscrite de tous côtés par des limites qu'on cherche à franchir, on ne sait sur quoi doivent s'appuyer les considérations qui leveront les difficultés où l'on est maintenant arrêté ; et d'ailleurs les principes du Calcul des différences sont si naturels, si directs, qu'on ne peut pas les omettre : voilà pourquoi j'ai exposé les méthodes de M. Laplace, dans un chapitre à part, le second, que l'on peut regarder en grande partie comme un abrégé du premier.

Arrêtés à tout moment par les difficultés dont j'ai parlé ci-dessus, les Géomètres ont varié leurs méthodes autant qu'il était possible ; après avoir employé les suites pour suppléer aux imperfections du Calcul intégral, ils ont appliqué le Calcul intégral à la théorie des suites et à leur sommation. Euler a fait sur ce sujet de nombreuses recherches qui ne pouvaient pas trouver place dans un traité de Calcul intégral, non-seulement sans lui donner trop d'étendue, mais encore sans y causer une espèce de désordre, par le mélange continu de procédés trop différens de ceux de l'intégration proprement dite, tels que des interpolations, des déterminations d'intégrales pour des valeurs particulières de la variable, c'est-à-dire, des *intégrales définies*. Toutes ces méthodes, que l'on pourrait appeler *anormales*, du moins pour le présent, m'ont paru bien placées après un Traité des suites, et avec d'autant plus de raison, que la plupart peuvent être envisagées, pour ainsi dire, comme des pierres d'attente destinées à se lier avec un nouvel édifice dont la construction s'annonce chaque jour : de ce nombre est sûrement l'emploi des intégrales définies pour exprimer les fonctions données par des équations différentielles. Euler en a offert le premier exemple sur l'équation de Riccati ; M. Laplace a, par ce moyen, intégré un cas fort singulier des équations différentielles partielles du second ordre ; et M. Poisson en a pareillement usé dans un Mémoire sur le son. M. Parseval a aussi intégré de cette manière une équation très-générale du mouvement des fluides et celle de la propagation du son, en sup-

posant à l'air trois dimensions; mais la forme des résultats auxquels il est parvenu semble se refuser à toute application spéciale. Avant d'exposer ces méthodes, j'ai donné un extrait des principaux résultats obtenus par Euler sur les intégrales définies. Ce sujet, auquel il s'était particulièrement attaché, a fourni la matière d'un supplément posthume à son *Traité de Calcul intégral*, et M. Legendre s'en est occupé dans deux *Mémoires*. J'y ai rattaché ce que l'on sait de plus important sur les séries de produits; et après avoir déduit du Calcul intégral les expressions de sinus et de cosinus en produits dont le nombre des facteurs est infini, je les ai tirées de la considération des limites, que M. l'Huillier a substituée à celle de l'infini par laquelle Euler y était parvenu: enfin dans ce même chapitre, les produits de facteurs équi-différens se sont présentés comme valeurs d'intégrales définies.

Dès les premiers temps de l'invention du Calcul différentiel, on se proposa de déterminer des courbes par des conditions qui se rapportaient en même temps à plusieurs points placés à des distances finies: tel est le problème des *trajectoires réciproques*, où l'on considère deux courbes parallèles, dont l'une, se mouvant parallèlement à elle-même sur l'axe des abscisses, coupe toujours la première sous le même angle. Euler, qu'il faut nommer dans presque toutes les recherches mathématiques, résolut d'autres questions du même genre, soit par des artifices analytiques très-ingénieux, soit en les ramenant, par le moyen de la série de Taylor, à des équations différentielles d'un ordre indéfini. Mais depuis on a reconnu que ces problèmes se rapportaient à un nouveau genre d'équations que Condorcet et M. Laplace avaient considérées sous le nom d'*équations aux différences mêlées* (finies et infiniment petites). M. Biot a repris, le premier, ce genre de calcul pour l'appliquer aux questions géométriques. J'ai inséré un extrait de son travail dans le quatrième chapitre de la première édition de mon *Traité des Différences et des Séries*, et j'aurai à y joindre, dans la seconde, de nouvelles recherches faites par M. Poisson, sur la théorie analytique de ce calcul.

Après avoir donné l'indication sommaire des grandes divisions de mon Ouvrage, je dirai quelques mots sur son exécution. Je n'ai jamais perdu de vue qu'au point où les Mathématiques sont parvenues de nos jours, ceux qui les étudient ont souvent besoin de revenir sur leurs pas pour classer les connaissances qu'ils ont acquises; qu'on leur épargne beaucoup de peine, et que leurs idées s'ordonnent mieux, lorsqu'on leur présente de grandes divisions auxquelles les diverses méthodes viennent ensuite se rattacher. J'ai donc fait ensorte que chaque chapitre, formant,

autant que cela se pouvait, une sorte de traité particulier, ne dépendît en général de ceux qui le précèdent, que par la nature du sujet et non pas par les détails; et pour tâcher d'atteindre à la clarté si desirable, surtout dans les livres qu'on est obligé d'étudier seul, je me suis imposé la loi de ne mettre sous les yeux du lecteur aucun calcul, sans en avoir exposé le but et fait connaître l'esprit : enfin j'ai apporté le plus grand soin à donner aux formules cette symétrie qui les fait presque deviner, et dont les écrits de M. Lagrange offrent tant d'exemples.

Uniquement animé du désir de faire un livre utile aux jeunes gens, j'ai écarté toutes les prétentions de l'amour-propre, et je ne me suis point arrêté à relever les détails qui peuvent m'appartenir, dans un travail pour lequel j'ai dû nécessairement mettre beaucoup d'auteurs à contribution. Dans les citations, j'ai tâché de ne rien omettre des obligations de quelque importance que je puis avoir aux géomètres dont les ouvrages m'ont servi à enrichir le mien; et pour la commodité des lecteurs qui débutent dans la carrière des Mathématiques, ou qui veulent approfondir un sujet que je n'ai pu qu'indiquer, j'ai rapporté à côté des articles de la Table des sommaires, placée à la tête de chaque volume, le titre des Ouvrages et des Mémoires que j'ai consultés pour la rédaction de ces articles, ou qui y ont quelque rapport, et qui sont venus à ma connaissance. A la suite du troisième volume j'ai mis une ample table des matières, qui forme du livre entier, du moins je l'espère, une sorte de dictionnaire d'analyse et de géométrie transcendante. On sent que j'ai dû penser à cet usage de mon livre, puisque son étendue est devenue telle, qu'on n'en peut entreprendre la lecture continue, et qu'il faut y revenir à plus d'une fois. Si cependant j'étais obligé de demander grace pour cette étendue, je prierais le lecteur de penser à celle des objets qui s'y trouvent traités, et au nombre de volumes dont les trois qui composent mon Ouvrage peuvent tenir lieu, du moins pour le présent, et tant qu'on ne s'engage pas dans des recherches particulières.

TABLE.

INTRODUCTION.

<i>Sommaires des Articles.</i>	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Notions générales sur les fonctions et les séries, page 1	<i>Introductio in analysin infinitorum</i> , ch. I, T. I, (Euler) (*). <i>Opuscles mathématiques</i> , T. V, p. 171, (d'Alembert).
Des limites des fonctions, et de ce qu'on entend par les infinis et les infiniment petits, 13	<i>Encyclopédie</i> , art. DIFFÉRENTIEL, LIMITE, (d'Alembert). <i>Principiorum Calculi differentialis et inte- gralis expositio</i> , cap. I, (l'Huillier).
Développement des fonctions en séries, 19	<i>Philosophical Transactions</i> , année 1697, n° 230, (Moivre).
1°. Des fonctions algébriques, <i>ibid.</i>	<i>Infinitorum dignitatum exponentis inde- terminati historia, leges ac formulæ</i> , (Hindenburg).
	N. B. Beaucoup d'autres auteurs allemands ont écrit ensuite sur l'Analyse combina- toire. On peut consulter sur ce sujet le premier volume des <i>Disquisitiones analy- tycæ</i> de M. Pfaff, page 260, et l' <i>Arith- métique universelle</i> de M. Kramp.
2°. Des fonctions transcendantes, 32	<i>Theorie des fonctions analytiques</i> , n° 22, (Lagrange).
Fonctions exponentielles, <i>ibid.</i>	<i>Philosophical Transactions</i> , année 1796, page 143, (l'Huillier).

(*) M. Labey, professeur d'un mérite distingué, a donné une traduction française de cet ouvrage, à laquelle il a joint des notes intéressantes.

1	TABLE.	
<i>Sommaires des Articles.</i>		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Développement des fonctions transcendentes. Fonctions logarithmiques, 39		<i>Transactions philosophiques</i> , n° 216, (Halley). <i>Harmonia mensurarum</i> , (Côtes). <i>Annales des Mathématiques pures et appliquées</i> , n°s 1 et 2, (Lavernède). <i>Introductio in analysin infinitorum</i> , T. I, (Euler). <i>Novi Commentarii Academiæ Petropolit.</i> T. V, page 164, (Euler). <i>Principes d'Astronomie sphérique</i> , (Mauduit). <i>Leçons sur le Calcul des fonct.</i> (Lagrange). <i>Opuscula analytica</i> , T. I, p. 345, (Euler). <i>Acta Academiæ Petropolitane</i> , T. IX, page 205, (Fuss).
Développement des fonctions transcendentes. Fonctions circulaires, 58 Relations des fonctions circulaires et des fonctions exponentielles ou logarithmiques, 66		<i>Isaaci Newtoni Opuscula</i> , T. I, pag. 352. <i>Philosophical Transactions</i> , 1698, (Moivre). <i>Trigonométrie de Cagnoli</i> , traduct. française, 2 ^e édition. <i>Methodus incrementorum</i> , p. 28, (Taylor). <i>Lineæ tertii ordinis Newtonianæ</i> , (Stirling) (*). <i>Usage de l'Analyse de Descartes</i> , (de Gua). <i>Introd. à l'Anal. des lig. courbes</i> , (Cramer). <i>Mémoires de l'Acad. de Berlin</i> , an. 1776, page 238, (Lagrange).
Du retour des suites, 95		<i>Introductio in analysin infinitorum</i> , pars I, cap. IX, (Euler). <i>Leçons sur le Calcul des fonct.</i> (Lagrange). <i>Harmonia mensurarum</i> , (Côtes). <i>Miscellanea analytica</i> , (Moivre). <i>Œuvres de Jean Bernoulli</i> , T. IV, p. 67. <i>Mémoires de l'Acad. de Berlin</i> , an. 1746, page 182, (d'Alembert); année 1749, pages 122 et 139, (Euler). <i>Miscellanea Taurinensia</i> , T. I et T. II, (Foncenex).
Développement des fonctions données par des équations où les inconnues sont mêlées entre elles, 102		
Résolution de plusieurs classes d'équations, par les tables de sinus, 114		
De la forme des fonctions imaginaires, 131		

(*) En 1797, on a réimprimé cet ouvrage devenu très-rare, et on l'a joint à celui de Newton, dont il est le Commentaire.

TABLE.

lj

Sommaires des Articles.

Liste des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

Opuscles Mathém. T. V, (d'Alembert).
Commercium Epistolicum, (Leibnitz et Jean Bernoulli).
Nova Acta Pétrop. T. XIII, page 172, (Schubert).

TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE. DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Sommaires des Articles.

Liste des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

CHAP. I. *Exposition analytique des principes du Calcul différentiel*, page 139

Analyse des infiniment petits, (l'Hôpital).
Méthode des fluxions, (Newton).
Methodus incrementorum, (Taylor).
Traité des fluxions, (Maclaurin).
Institutiones Calculi differentialis, (Euler).
The Residual Analysis, 1758 et 1764, (Landen).
Mémoires de l'Acad. de Berlin, an. 1772; page 185, (Lagrange).
Théorie des fonct. analytiq., (Lagrange).
Leçons sur le Calcul des fonct. (Lagrange).
Elementi d'Algebra, T. II, (Paoli).
Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral, (Cousin).
Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio, (l'Huillier).
Elementa Analyseos et Geometriæ sublimioris, (Pasquich).
Arithmétique universelle, (Kramp).
Mémoires sur le Calcul d'exposition, Acad. de Berlin, 1798—99 et 1800, (Gruson).

Sommaires des Articles.
Liste des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

Des changemens qu'éprouve une fonction de x , lorsque x devient $x + h$, 140
De la différentiation des fonctions explicites d'une seule variable. 145
Formation du développement général de $f(x + h)$, ou *théorème de Taylor*, 160

De la différentiation des fonctions explicites de deux variables, 169
Différentiation des fonctions explicites renfermant un nombre quelconque de variables, 185

Différentiation des équations où il n'entre que des fonctions d'une seule variable, 188

Du changement de variable indépendante dans les équations, 203

De l'élimination entre les équations différentielles, 224

De la différentiation des fonctions implicites d'un nombre quelconque de variables, 226

De l'élimination des fonctions indéterminées ou arbitraires, 230

Réflexions sur la métaphysique du Calcul différentiel et sur sa notation, 237

N. B. Voyez les ouvrages déjà cités pour l'exposition des principes du Calcul différentiel, et le n° 3 de la Correspondance sur l'École Polytechnique. (Poisson).

Théorie des fonctions analytiq. (Lagrange).

Leçons sur le Calcul des fonct. (Lagrange).

Meditationes analyticæ, (Waring).

The Residual analysis, (Landen).

Réflexions sur la métaphysique du Calcul différentiel, (Carnot).

Elementa Analyseos et Geom. (Pasquich).

Mémoires sur le Calcul d'exposition, Acad. de Berlin, 1798, 99 et 1800, (Gruson).

Arithmétique universelle, (Kramp).

Théorie des fonctions analytiq. (Lagrange).

Traité de la Résolution des équations numériques, note X, (Lagrange).

Leçons sur le Calcul des fonct. (Lagrange).

Meditationes analyticæ, (Waring).

Institutiones Calculi differentialis, prefat. et pars I, cap. IV, (Euler).

CHAP. II. *Usage du Calcul différentiel pour développer les fonctions,* 249

TABLE.

liij

Sommaires des Articles.

Liste des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

Application du théorème de Taylor, aux développemens des fonctions en séries, 249

Usages des équations différentielles pour développer les fonctions, 258

Usages des équations différentielles partielles pour développer les fonctions, 275
Théorème de M. Lagrange, et ses usages, 285

Formules différentielles pour la résolution numérique des équations, 299

Recherches sur le développement des fonctions de polynomes, 315

CHAP. III. Examen des valeurs particulières que les coefficients différentiels prennent dans certains cas, 327

Des cas où les coefficients différentiels deviennent infinis. *ibid.*

De la vraie valeur des fonctions qui deviennent, dans certains cas, 344

Des *maximums* et des *minimums* des fonctions d'une seule variable, 360

Des *maximums* et des *minimums* des fonctions de plusieurs variables, 374

Institutiones Calculi differentialis, pars II, cap. IV, (Euler).

Institutiones Calculi differentialis, pars II, cap. VIII, (Euler).

Nova Acta Petrop. T. IX, p. 54, (Euler), et page 205, (Fuss).

Leçons sur le Calcul des fonct. (Lagrange).

Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1777, page 99, (Laplace).

Mémoires de l'Acad. de Berlin, an. 1768, page 275, (Lagrange); an. 1770, p. 225, (Lambert).

Traité de la Résolution des Équations numériques, note XI, (Lagrange).

Institutiones Calculi differentialis, pars II, cap. IX, (Euler).

Elementi d'Algebra, T. II et III, (Paoli).
Memorie della Società ital. T. IV, (Paoli).

Traité des Dérivations, (Arbogast).

Arithmétique universelle, (Kramp).

Memorie della Società italiana, T. XIII, (Paoli).

Institutiones Calculi differentialis, pars II, cap. XIV, (Euler).

Théorie des fonctions analytiq. (Lagrange).

Leçons sur le Calcul des fonct. (Lagrange).

Œuvres de Jean Bernoulli, T. I, p. 401.

Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1716, pages 59 et 276; 1723, page 222, (Saurin).

Traité des fluxions, T. II, art. 858, (Maclaurin).

Institutiones Calculi differentialis, pars II, cap. X, (Euler).

Institutiones Calculi differentialis, pars II, cap. XI, (Euler).

<i>Sommaires des Articles.</i>		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
		<i>Miscellanea Taurinensia</i> , Tome I, (Lagrange).
		<i>Mécanique analytique</i> , 1 ^{re} partie, 1 ^{re} sec- tion, (Lagrange).
Des limites de la série de Taylor,	380	<i>Theorie des fonct. anal.</i> n° 53, (Lagrange). <i>Leçons sur le Calcul des fonct.</i> (Lagrange). <i>Journal de l'École Polytechniq.</i> 13 ^e cahier, (Ampère).
CHAP. IV. <i>Théorie des lignes courbes</i> ,	389	<i>Géométrie de Descartes.</i> <i>Enumeratio linearum tertii ordin.</i> (Newton et Stirling). <i>Geometria organica</i> , (Maclaurin). <i>Usages de l'Analyse de Descartes</i> , (de Gua). <i>Introductio in analysin infinitorum</i> , T. II, (Euler). <i>Introduction à l'analyse des lignes courbes</i> , (Cramer). <i>Traité des courbes algébriques</i> , (du Séjour et Goudin).
Comment les diverses circonstances d'une ligne sont indiquées par son équation, <i>ib.</i>		
De la transformation des coordonnées et de ses principaux usages,	397	
Application du développement des fonctions en séries à la théorie des courbes,	414	
Usage du Calcul différentiel pour trouver les tangentes des courbes,	423	<i>Analyse des infiniment petits</i> , (l'Hôpital).
Expressions des différentielles de l'arc et de l'aire d'une courbe,	431	
Des contacts des courbes ; des lignes oscu- latrices,	436	<i>Mémoires de l'Acad. de Berlin</i> , an. 1779, page 121, (Lagrange). <i>Theorie des fonct. analytiques</i> , 2 ^e partie, (Lagrange). <i>Leçons sur le Calcul des fonct.</i> (Lagrange). <i>Horologium Oscillatorium</i> , pars III, (Huygens). <i>Traité des flux</i> . L. II, chap. V, (Maclaurin). <i>Journal de l'École Polytechniq.</i> 14 ^e cahier, (Poisson).
Des propriétés du cercle osculateur, et des développées des courbes,	445	
Détermination des points singuliers,	456	<i>Voyez</i> , pour l'histoire de ces courbes et leurs principales propriétés, le <i>Traité des</i>
Des courbes transcendantes, et des coor- données polaires,	470	

TABLE.

iv

Sommaires des articles.

Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

Des courbes considérées comme des polygones, 485	<i>Spirales d'Archimède</i> , ceux de la <i>Cycloïde</i> de Pascal, Roberval et Wallis, les <i>Œuvres</i> de Leibnitz, de Jacques et de Jean Bernoulli, le <i>Traité des Épicycloïdes</i> de la Hire, dans les <i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i> , année 1706.
CHAP. V. <i>Théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure</i> , 501	<i>Acta eruditorum</i> , année 1684, pages 270 et 585, (Leibnitz).
Du point, du plan et de la ligne droite, <i>ibid.</i>	<i>Analyse des infiniment petits</i> , (l'Hôpital). <i>Traité du Calcul différentiel</i> , (Agnesi).
De la transformation des coordonnées dans l'espace, 528	<i>Introductio in analysin infinitorum</i> , T. II, append. (Euler).
Des surfaces du second ordre, 542	<i>Applicat. de l'Analys. à la Géom.</i> (Monge). <i>Mémoires de l'Acad. de Berlin</i> , ann. 1773, (Lagrange).
Application du Calcul différentiel à la théorie du contact des surfaces, 563	<i>Éléments d'Analyse géométrique</i> . (l'Huillier). <i>Journal de l'École Polytechnique</i> . 15 ^e cahier, page 68 (Monge).
Théorie de la courbure des surfaces, 572	<i>Introductio in analysin infinitorum</i> , T. II, appendix, chap. IV, (Euler).
	<i>Mécanique analytique</i> , (Lagrange).
	<i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i> , année 1784, page 114, (Monge).
	<i>Mémoires sur les relations qui existent entre les distances de cinq points</i> , faisant suite à la <i>Géométrie de position</i> , (Carnot).
	<i>Journal de l'École Polytechnique</i> . 13 ^e cahier, (Lefrançais).
	<i>Recueil de diverses propositions de Géométrie</i> . 2 ^e édition, (Puissant).
	<i>Introductio in analysin infinitorum</i> , T. II, appendix, cap. V, (Euler).
	<i>Essai de géométrie analytique</i> , (Biot).
	<i>Application de l'Analyse à la Géométrie de M. Monge</i> , 1 ^{re} partie, note, (Poisson et Hachette).
	<i>Théorie des fonct. analytiques</i> . (Lagrange).
	<i>Application de l'Analyse à la Géométrie</i> , (Monge).
	<i>Mémoires de l'Acad. de Berlin</i> , ann. 1760, (Euler).

TABLE.

Sommaires des Articles.

Liste des principaux ouvrages qui
ont rapport aux articles ci-joints.

De la génération des surfaces ,	588	<i>Recueil des Savans étrang.</i> T. IX, (Monge); T. X, (Meusnier).
		<i>Novi Commentarii Acad. Pétrop.</i> T. XVI; page 3, (Euler).
Application du Calcul différentiel aux courbes à double courbure ,	615	<i>Recueil des Savans étrang.</i> T. IX, (Monge), <i>Mémoires de l'Acad. de Berlin</i> , ann. 1779; page 148, (Lagrange).
		<i>Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris</i> , année 1784, (Monge).
		<i>Applicat. de l'Anal. à la Géom.</i> (Monge); <i>Recherches sur les courbes à double courbure</i> , (Clairaut).
		<i>Recueil des Savans étrang.</i> T. X, (Monge). <i>Mémoires présentés à l'Institut par des Sa-</i> <i>vans étrangers</i> , T. I et II, (Lancret).
Du développement des courbes tracées sur des surfaces ,	636	

N. B. Ceux des lecteurs qui voudraient prendre une connaissance générale des principaux Ouvrages et Mémoires concernant les Mathématiques pures et appliquées, pourront recourir à la *Bibliotheca mathematica*, publiée par M. Murhard. La grande fécondité d'Euler rend aussi très-bon à consulter le catalogue de ses Œuvres, placé à la fin de son Éloge, par Fuss, et à celle du second volume de l'édition de ses *Institutiones Calculi differentialis*, imprimée à Pavie, en 1787.

FIN DE LA TABLE.

OBSERV. Plus convaincu que jamais de la difficulté d'éviter les fautes d'impression dans un livre de Mathématiques de quelque étendue, j'avais prié deux jeunes gens fort instruits de lire en particulier les épreuves du mien, et je les revoyais aussi moi-même avec toute l'attention dont je suis capable; malgré ces soins, j'ai déjà reconnu un assez grand nombre de fautes que j'ai indiquées à la fin du volume, et que je prie les lecteurs de vouloir bien corriger d'avance.

9 A Stett
College
S.F. 17

TRAITÉ
DU
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DU CALCUL INTÉGRAL,

PAR S. F. LACROIX.

SECONDE ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

Tantum series juncturaque pollet.
HORAT.

TOME SECOND.

PARIS,

M^{ME} V^E COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins, N^o 57.

1814.

AVERTISSEMENT.

JE n'ai pas suivi exactement pour ce volume, le plan que j'avais indiqué dans le Discours préliminaire du premier ; en voici les raisons : 1°. après y avoir mûrement réfléchi, il m'a semblé que la théorie générale des conditions d'intégrabilité devait suivre immédiatement les méthodes relatives à l'intégration des fonctions d'une seule variable, puisque c'est à cette intégration que se réduit celle des fonctions différentielles quelconques, lorsqu'elles satisfont aux conditions d'intégrabilité, et que, dans le cas contraire, elles sont absolument insignifiantes ; 2°. le Calcul intégral se composant de beaucoup de méthodes diverses et de détails qui n'ont pas toujours des rapports bien évidens, j'ai cru que pour soulager l'esprit, il fallait multiplier les divisions ; c'est ce qui a rendu le nombre des chapitres plus considérable que je ne l'avais annoncé d'abord. Du reste, je me suis peu écarté de l'ordre que j'avais suivi dans la première édition, si ce n'est dans ce qui regarde les équations différentielles partielles, où j'ai fait quelques transpositions assez considérables, afin d'éviter un double emploi et faire mieux ressortir les propriétés et la liaison des divers procédés proposés par les grands géomètres de notre temps, pour traiter ce genre d'équations. J'ose espérer que la nouvelle disposition de ces matériaux, jointe aux remarques sur les intégrales, déjà indiquées dans la première édition de cet Ouvrage et développées dans celle-ci, jetteront quelque lumière sur un sujet qui n'avait pas encore été suffisamment éclairci, ou du moins montreront bien le point de la difficulté.

Dans le chapitre des méthodes d'approximation, j'ai plutôt retranché qu'ajouté ; parce que le géomètre qui traite d'une application importante de l'analyse, créant lui-même ou arrangeant

AVERTISSEMENT.

les méthodes d'après ses vues et le genre d'analyse qu'il cultive de préférence, c'était ne rien faire que de s'attacher à un seul procédé, et alonger inutilement le livre, que de les embrasser tous, dépouillés de l'intérêt qu'ils reçoivent de leurs applications. Exposer quelques principes fondamentaux pour marquer la place que ces procédés doivent tenir dans le système général des méthodes de l'analyse, et renvoyer aux sources, c'est tout ce qu'il convient de faire dans cette circonstance.

Le chapitre concernant la *Méthode des variations*, au contraire, a été beaucoup augmenté : peut-être trouvera-t-on que je lui ai donné trop d'étendue ; mais la singularité que cette méthode présente à ceux qui l'étudient pour la première fois, ne rendait-elle pas indispensable dans un ouvrage de la nature du mien, l'exposition des principales tentatives qui ont été faites pour en éclaircir l'esprit, et la lier avec les principes sur lesquels on a établi le Calcul différentiel ? D'un autre côté, il ne fallait pas moins présenter le Calcul des variations dans toute l'étendue et la symétrie que lui donne la notation qui lui est propre ; et comment éviter les doubles emplois ? j'ai tâché de les restreindre autant qu'il m'a été possible. Les lecteurs qui ne voudraient connaître que le Calcul des variations proprement dit, pourront commencer la lecture du dernier chapitre, à la page 755.

TABLE.

TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE PARTIE. DU CALCUL INTÉGRAL.

<i>Sommaires des Articles.</i>		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
CHAP. I. <i>De l'intégration des fonctions- d'une seule variable,</i>	page 1	<i>De quadraturâ curvarum</i> , (Newtoni opus- cula, T. I). <i>Méthode des fluxions</i> , (Newton). <i>Lectiones de methodo integral. aliisque, conscriptæ in usum ill. Marchionis Hospitalii</i> , (Joh. Bernoulli, op. T. III). <i>Traité des fluxions</i> , Liv. II, (Maclaurin). <i>Traité du Calcul intégral</i> , (Bougainville). <i>Institutiones Calculi integralis</i> , (Euler). <i>Encycl. méthod. Dictionn. de Mathém.</i> , T. II, pag. 695, 2 ^e col.
Intégration des fonctions rationnelles et entières,	2	<i>Specimen novum analyseos</i> , (Leibnitii opera, T. III, pag. 373). <i>Johan. Bernoulli opera</i> , T. I, pag. 393. III, 389, 397, 399. IV, 132. <i>Harmonia mensurarum</i> , (Côtes). <i>Miscellanea analytica de seriebus et qua- draturis</i> , (Moivre). <i>Essays on several subjects</i> , pag. 118. (Thomas Simpson). <i>Traité des fluxions</i> , n° 776. (Maclaurin). <i>Mémoires de l'Académ. de Berlin</i> , 1746, (d'Alembert). <i>Commentarii Academ. Petrop.</i> , T. XIV, (Euler).
De l'intégration des fonctions fraction- naires,	4	

Sommaires des Articles.	TABLE.	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
De l'intégration des fonctions irrationnelles , 28		<i>Mathematical Lucubrations</i> , Part. VII , (Landen).
De l'intégration des différentielles binomes , 33		<i>Institutiones Calculi integralis</i> , T. I , Sect. I , cap. I.
		N. B. Pour la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples , voyez <i>Institutiones Calculi differentialis</i> , Pars post. Cap. XVIII.
Des différentielles irrationnelles polynomes , 46		<i>Acta Academiæ Petrop.</i> , 1780 , Pars I , (Euler).
		<i>Jacobi Bernoulli opera</i> , T. II , pag. 1007.
		<i>Johan. Bernoulli opera</i> , T. IV , pag. 52.
		<i>Encycl. method. Dictionn. de Mathém.</i> , T. II , pag. 700 , 1 ^{re} col.
		<i>Mém. de l'Acad. de Berlin</i> , 1746 et 1748 , (d'Alembert).
		<i>Novi Commentarii Acad. Petropolitane</i> ; T. VIII , p. 129 , (Euler).
		<i>Institutiones Calculi integralis</i> , T. I , Sect. I , Cap. II , (Euler).
		<i>Acta Acad. Petrop.</i> , 1780 , Pars I , (Euler).
		<i>Landen's mathematical Memoirs</i> .
		<i>Mém. de l'Acad. des Sciences de Turin</i> , années 1784 — 1785 , Seconde Partie , (Lagrange).
		<i>Exercices de Calcul intégral</i> , (Legendre).
De l'intégration par les séries , 60		<i>Méthode des fluxions</i> , (Newton).
		<i>Supplementum Geometriæ practicæ</i> , (Leibnitii op. , T. III , p. 279).
		<i>Tractatus de seriebus infinitis</i> , (Jac. Bernoulli , ad calcem <i>Artis conjectandi</i>).
		<i>Institutiones Calculi integralis</i> , T. I , Sect. I , Cap. III.
		<i>Mathematical dissertations</i> , pag. 119 , (Thomas Simpson).
		<i>Opuscula varii argumenti</i> , T. II , p. 121 , (Euler).

TABLE.

ix

<i>Sommaires des Articles.</i>		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
De l'intégration des fonctions logarithmiq. et exponentielles,	83	<i>Mémoires de Turin</i> , 1784—85, seconde partie, (Lagrange). <i>Johan. Bernoulli opera</i> , T. III, p. 376. <i>Institutiones Calculi integr.</i> , T. I, Sect. I, Cap. IV. <i>Adnotationes ad Calculum integralem Euleri</i> , (Mascheroni). <i>N. B.</i> Sur l'expression $\int \frac{dx}{1x}$, voyez aussi <i>Mem. della Società italiana</i> , T. XII, (Caluso). <i>Archives naturelles et mathém. de Kænigs- berg</i> , année 1811, 1 ^{re} part. (en alle- mand), (Bessel).
De l'intégration des fonctions circulaires,	95	<i>Institutiones Calculi integralis</i> , T. I, Sect. I, Cap. V et VI, (Euler).
Développement de la fonction ($a + b \cos z$) ^m ,	112	<i>Institutiones Calculi integralis</i> , Cap. VI, (Euler). <i>Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris</i> , 1754, pag. 545, (Clairaut). <i>Mém. de l'Acad. de Berlin</i> , 1782, p. 252, (Lagrange). <i>Mécanique céleste</i> , Tome I, pag. 267, (Laplace.) <i>Philosophical Transactions</i> , 1798, 2 ^e part. (Hellins). <i>Mathematical dissertations</i> , page 109, (Thomas Simpson). <i>Institutiones Calculi integralis</i> , Tom. I, Sect. I., Cap. VII, (Euler). Voyez pour la série générale de la page 149, <i>Johannis Bernoulli opera</i> , T. I, pag. 125, et <i>Principiorum calc. diff. et int. Expositio</i> , pag. 156, (Lhuillier).
Méthode générale pour obtenir des valeurs approchées des intégrales,	130	<i>N. B.</i> Les collections académiques ren- ferment un grand nombre de Mémoires qui ont pour objet l'intégration de for- mules particulières, de peu d'import- tance par elles-mêmes, et dont l'énu-
Intégration des différentielles des ordres supérieurs,	150	

TABLE.

Sommaries des Articles.

Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

		mération serait trop longue pour trouver place ici. Quant aux tables contenant des formules intégrées, on en trouve dans le <i>Traité de quadraturâ curvarum</i> de Newton, dans l'<i>Harmonia mensurarum</i> de Côtes, dans les <i>Mathematical Memoirs</i> de Landen, et dans le T. II des <i>Tabulæ logarithmico-trigonometricæ</i> de Vega.
CHAP. II. Application du Calcul intégral à la quadrature des courbes et à leur rectification, à la quadrature des surfaces courbes et à l'évaluation des volumes qu'elles comprennent,	156	N. B. Ces matières ont été traitées d'abord synthétiquement par Archimède, Cavalieri, Grégoire de Saint-Vincent, Torricelli, Viviani, Roberval, Pascal, Fermat et Wren. On trouve les premières traces de l'application de l'Analyse au même sujet, dans l'<i>Arithmetica infinitorum</i> de Wallis, et la <i>Logarithmotechnia</i> de Mercator. Brownker donna, dans le n° 34 des <i>Transactions philosophiques</i>, une série pour exprimer l'aire des segmens hyperboliques. On doit à Jacques Gregori et à Huygens, des procédés approximatifs pour la quadrature du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole. Enfin parurent, la <i>Méthode des fluxions</i>, le <i>Traité de quadraturâ curvarum</i> de Newton, et divers écrits de Leibnitz et des Bernoulli, dans les <i>Acta eruditorum</i> de Leipsick, qu'on a réunis ensuite dans leurs œuvres respectives, et qui contiennent les premières applications du Calcul intégr. à la Géométrie.
De la quadrature des courbes,	156	<i>OEuvres de Wallis.</i> <i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris</i>, 1706, page 13, (Varignon). <i>Traité des fluxions</i>, Liv. II, Chap. III, (Maclaurin).
De la rectification des courbes,	173	N. B. Van-Heuraet et Neil donnèrent les premiers exemples de la rectification

TABLE.

xj

Sommaires des Articles.

Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

d'une courbe. Voyez à la fin des éditions latines de la Géométrie de Descartes.

Traité des fluxions, Liv. II, C. III, (Macl.).

Opuscula varii argumenti, T. II, p. 121, (Euler).

Produzioni Mathematiche,
T. II, page 317.
Nova Acta eruditorum,
1766, } (Fagnano).

Commentarii Academ. Petrop., T. VIII, (Euler).

Novi Commentarii Acad. Petrop., T. X, T. XVIII, (Euler).

Opuscles mathématiques, T. IV, p. 275, T. V, page 231, (d'Alembert).

Mathematical Memoirs, p. 23, (Landen).

Memorie della Società Italiana, T. II, Part. II, (Malfatti).

Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1786, et *Exercices de Calcul intégral*, (Legendre).

De Calculo integralium exercitatio Mathematica, (Ferroni).

Acta Acad. Petrop., 1778, Part. I, II, (Lexell).

Recherches sur les Courbes à double courbure, (Clairaut).

Miscellanea Berolinensia, T. II, (Varignon et Leibnitz).

Leibnitii opera, T. III, p. 505.

Novi Commentarii Acad. Petrop., T. I, (Euler).

Opuscles mathémat., T. I, (d'Alembert).

Novi Commentarii Acad. Petrop. T. XIV, Pars I, (Euler).

Savans Étrangers, T. IX, (Tinseau).

Mémoires de l'Académie de Berlin, 1773, p. 121, (Lagrange).

Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1788, (Legendre).

De la cubature des volumes terminés par des surfaces courbes, et de la quadrature de leurs aires, 185

Sommaires des Articles.

De la rectification des courbes à double courbure, 210

Des fonctions qui rendent algébriques des intégrales données, ou recherche des courbes quarrables, rectifiables, etc. 210

CHAP. III. *De l'intégration des fonctions différentielles à plusieurs variables*, 225

De l'intégration des fonctions différentielles du premier ordre, 225

De l'intégration des fonctions différentielles des ordres supérieurs au premier, 232

CHAP. IV. *De l'intégration des équations différentielles à deux variables*, 250

Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

Théorie des Fonctions analytiques, 2^e édition, pag. 305, (Lagrange).

N. B. C'est l'application de la transformation donnée par M. Yvory, dans les *Trans. Phil.*, ann. 1809, 2^e part. p. 350.

Recherches sur les Courbes à double courbure, (Clairaut).

Exercitatio mathematica de formatione et mensurâ fornicum, (Viviani).

Leibnitii opera, T. III, page 267.

Jacobi Bernoulli opera, T. I, p. 511, T. II, p. 739.

Joan. Bernoulli opera, T. III, p. 230.

Comment. Acad. Petrop., T. V et VI, (Euler).

Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1732, (Bernoulli, Maupertuis, Clairaut), et 1758, (Bézout).

Novi Commentarii Acad. Petrop., T. V, XIV, Pars I, et T. XV, (Euler).

Mémoires de l'Académie des Sciences, 1759 et 40, (Clairaut).

Novi Commentarii Acad. Petrop., T. VIII, pag. 3, (Euler).

Institutiones Calculi differentialis, T. I, Cap. VII, (Euler).

Mémoires donnés à l'Acad. des Sciences, pag. 24, (Fontaine).

Mécanique analytique, 2^e édition, T. I, p. 319, n° 15, (Lagrange).

Du Calcul intégral, (Condorcet).

Novi Commentarii Acad. Petrop., T. XV et XVI, (Lexell).

Leçons sur le Calcul des Fonct. 3^e édition, 21^e leçon, (Lagrange).

Sommaries des Articles.	TABLE.	xiii
De la séparation des variables dans les équations différentielles du premier ordre, 250	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.	
	<i>Leibnitii et Joh. Bernoulli commercium epistolicum</i> , T. I, p. 7 et 10.	
	<i>Leibnitii opera</i> , T. III, p. 536.	
	<i>Johannis Bernoulli opera</i> , T. I, p. 123.	
	<i>Jacobi Bernoulli opera</i> , T. II, p. 731.	
	<i>De constructione æquationum differentialis primi gradus</i> , (Manfredi).	
	<i>Acta eruditorum, suppl.</i> , T. VIII, p. 66, (Com. Riccati).	
	<i>Danielis Bernoulli, Basileensis, Johan. fil. Exercitationes quædam mathematicæ</i> , p. 77.	
	<i>Commentarii Acad. Petropolitanæ</i> , T. I, (Hermann, Johan. Bernoulli, Nicol. Bernoulli, Goldbach).	
	<i>Johannis Bernoulli opera</i> , T. III, p. 108.	
	<i>Commentarii Acad. Petropolitanæ</i> , T. II, VI, IX, (Hermann, Euler).	
	<i>Institutiones Calculi integr.</i> , T. I, Sect. II, Cap. I, (Euler).	
Recherche du facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du premier ordre, 260	<i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris</i> , 1739 et 1740, (Clairaut).	
	<i>Novi Commentarii Acad. Petrop.</i> , T. VIII, p. 3, T. XVII, p. 105, (Euler).	
	<i>Opusculæ mathématiques</i> , T. IV, page 254, (d'Alembert).	
	<i>Institutiones Calculi integr.</i> , T. I, Sect. II, Cap. II et III, (Euler).	
	<i>Mémoires donnés à l'Académie</i> , pag. 24 et 84, (Fontaine).	
	<i>Du Calcul intégral</i>, 2^e Sect. <i>Sur le Système du Monde et le Calcul intégral</i>, <i>Miscellanea Taurinensia</i>, T. IV, <i>Mém. de l'Ac. des Sciences de Paris</i>, 1771, p. 693, 1772, prem. Partie, p. 61, <i>Notes sur l'Éloge de Fontaine</i>, 1771,	

<i>Sommaires des Articles.</i>	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Des équations du premier ordre dans lesquelles les différentielles passent le premier degré, 279	<i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1748, p. 275, (d'Alembert).
Des intégrales successives des équations différentielles des ordres supérieurs, 292	<i>Inst. Calc. integr.</i> , T. I, sect. III, (Euler.) <i>Théorie des Fonctions analytiques</i> , 2 ^e édition, pag. 75, (Lagrange).
Des équations différentielles les plus simples, dans les ordres supérieurs, 298	<i>Leçons sur le Calcul des Fonctions</i> , 12 ^e Leçon, (Lagrange). <i>Johan. Bernoulli opera</i> , T. IV, p. 77 et 79. <i>Commentarii Acad. Petropolitanae</i> , T. III, X, (Euler). <i>Novi Commentarii Acad. Petropolitanae</i> , T. VIII, p. 150, (Euler). <i>Institutiones Calculi integr.</i> , T. II, Sect. I, Cap. I, IV, IX, (Euler).
Des équations du premier degré et d'un ordre quelconque, 313	<i>Pièce qui a partagé le prix proposé par l'Académie des Sciences, en 1740, sur le flux et reflux</i> , (Euler). <i>Miscell. Berolinensia</i> , T. VII, 1743, (Euler). <i>Réflexions sur la cause générale des vents</i> , n° 80, (d'Alembert). <i>Mémoires de l'Acad. de Berlin</i> , 1748, pag. 283, (d'Alembert). <i>Novi Commentarii Acad. Petropolitanae</i> , T. III, (Euler). <i>Miscellaneous Tracts</i> , p. 76, (Simpson). <i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris</i> , 1767 et 1769, (d'Alembert). <i>Inst. Calc. integr.</i> , T. II, Sect. II, (Euler). <i>Miscellanea Taurinensia</i> , T. III, p. 179, (Lagrange), et p. 381, (d'Alembert). <i>Miscellanea Taurinensia</i> , T. IV, (Laplace). <i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1775, p. 190, (Lagrange). <i>Acta Acad. Petrop.</i> , 1777, Pars I, et 1779, Pars II, (Lexell). <i>Opusculs mathématique.</i> , T. VII, p. 377, (d'Alembert). <i>Memorie della Società Italiana</i> , T. II, page 177, (Lorgna).

TABLE.

xv

Sommaires des Articles.

Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

Des équations simultanées du premier degré, 337

Des facteurs qui rendent intégrables les équations différentielles des ordres supérieurs, 343

Recherche du facteur pour certaines équations du second ordre, 353

Des équations où les différentielles sont élevées, 365

CHAP. V. Des solutions particulières des équations différentielles, 373

Liaison des solutions particulières avec les intégrales, 374

Comment les solutions particulières se tirent des équations différentielles, 383

Saggio sul Calcolo integrale delle equazioni lineari, (Brunacci).

Disquisitiones analyticae, Vol. I, Sect. II, (Pfaff).

Mémoires de l'Académie des Sciences, 1787, p. 336, (Legendre).

Voyez les ouvrages cités sur l'article précédent.

Voyez ces mêmes ouvrages, et *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, pag. 168, (Lagrange).

Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris, 1777, pag. 392, et *Mécanique Céleste*, T. I, page 235, (Laplace).

Mémoires de l'Académie de Turin, 1790-91, (Pezzi).

Voyez les ouvrages cités pour les trois articles précédens, et *Novi Commentarii Acad. Petrop.*, T. VII, (Euler).

Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1783, p. 719, (Monge).

Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1734, page 209, (Clairaut).

Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1756, (Euler).

Inst. Calc. integ., T. I, Sect. II, Cap. IV, (Euler).

Mémoires de l'Académie de Berlin, 1774, p. 198, et *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, Leç. 14^e, (Lagrange).

Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1772, première partie, p. 343 et 651, (Laplace); 1790, (Legendre).

Théorie des Fonctions analytiques, 2^e édit., p. 92, (Lagrange).

Leçons sur le Calcul des Fonctions, 15^e, 16^e et 17^e Leç., (Lagrange).

Journal de l'École Polytechnique, XIII^e cahier, (Poisson).

<i>Sommaires des Articles.</i>	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Application de ce qui précède à l'intégration, 401	<i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin</i> , 1790—91, (Trembley).
CHAP. VI. Des Méthodes pour intégrer par approximation les équations différentielles, 409	<i>Méthode des fluxions</i> , (Newton). <i>Methodus incrementorum</i> , (Taylor). <i>Inst. Calc. integr.</i> , T. I, Sect. II, Cap. VII, (Euler). <i>Novi Commentarii Acad. Petrop.</i> , T. IX, T. XVII, p. 125, (Euler). <i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris</i> , ann. 1769, p. 193, 1770, p. 191, et 1771, p. 281, (Condorcet). <i>Mémoires de l'Acad. de Berlin</i> , 1776, p. 236, (Lagrange). <i>Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris</i> , 1772, seconde Partie, p. 267, et 1777, page 373, (Laplace). <i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1783, (Lagrange). <i>Mémoires de l'Acad. de Berlin</i> , 1786-87, 1792, 1803, (Trembley). N. B. Pour l'emploi de la variation des constantes arbitraires, voy. <i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1781, p. 122, (Lagrange), <i>Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut</i> , 1808 et 1809, (Lagrange), <i>Journal de l'École Polytechnique</i> , XV ^e cahier, (Poisson), <i>Mécanique analytique</i> , 2 ^e édition, T. I, p. 323, (Lagrange). <i>Johannis Bernoulli opera</i> . <i>Jac. Bernoulli opera</i> . <i>Methodus incrementorum</i> , (Taylor). <i>De constructione AEuationum differentialium primi gradus</i> , (Gab. Manfredi). <i>De usu motûs tractorii in constructione AEuationum differentialium</i> , (Vincent Riccati).
Développemens en fractions continues, 427	
Usage des équations différentielles du premier degré pour intégrer par approximation, 435	
CHAP. VII. Application géométrique des équations différentielles à deux variables, 447	

TABLE.		xvij
<i>Sommaires des Articles.</i>		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Problèmes du premier ordre, 447		<i>Commentarii Acad. Petrop.</i> , T. VIII. <i>Novi Comment. Acad. Petrop.</i> , T. XIV, Pars I, p. 26, T. XVII, p. 205, (Euler). N. B. Pour l'histoire du problème des trajectoires orthogonales, voyez les T. I et II des <i>OEuvres de Jean Bernoulli</i> ; pour la construction de l'équation $s = f(p)$, voy. les <i>Exercices de Calcul intégral</i> , pag. 320, (Legendre), et <i>Mem. della Società Ital.</i> , T. XVI, (Plana).
Problèmes des ordres supérieurs, 457		<i>Nova Acta Petrop.</i> , T. IX, p. 178, (Schubert). <i>Commentarii Acad. Petrop.</i> , T. XII, pag. 3, (Euler). <i>Mémoires de Fontaine</i> , p. 12. N. B. J'ai indiqué à la pag. 470 quelques problèmes curieux, et particulièrement celui des <i>courbes de poursuite</i> , dont on a parlé de nouveau dans le T. II de la <i>Correspondance sur l'École polytechnique</i> , p. 275.
Signification des solutions particulières, 465		Voyez les écrits cités pour le chapitre des solutions particulières.
CHAP. VIII. De la comparaison des transcendantes, <i>ibid.</i>		
Des logarithmes et des arcs de cercle, 471		
Des transcendantes elliptiques, 475		<i>Produzioni Mathematiche di Fagnano</i> , T. II, p. 336. <i>Novi Commentarii Acad. Petrop.</i> , T. VI, VII, XII, (Euler). <i>Institutiones Calc. integr.</i> , T. I, Sect. II, Cap. V, VI, et T. III. Suppl., (Euler). <i>Miscellanea Taurinensia</i> , T. IV, p. 98, (Lagrange). <i>Acta Acad. Petropolitane</i> , 1778, Pars II, (Euler). <i>Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris</i> , 1786, (Legendre). <i>Théorie des Fonct. anal.</i> , 2 ^e éd., p. 110, (Lagrange). <i>Exercices de Calcul intégr.</i> (Legendre).

<i>Sommaires des Articles.</i>	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
CHAP. IX. <i>De l'intégration des équations contenant trois ou un plus grand nombre de variables,</i> 503	
Intégration des équations différentielles to- tales à trois variables, <i>ibid.</i>	<i>Institutiones Calculi integralis</i> , T. III, Pars I, Sect. I, Cap. I, (Euler).
Des équations différentielles totales à plus de trois variables, 515	
Des équations différentielles totales des ordres supérieurs, 520	<i>Mém. Acad. de Turin</i> , 1790-91, (Pezzi).
Intégration des équations différentielles parti- ielles du premier ordre, 527	<i>Commentarii Acad. Petropolitanae</i> , T. VII, p. 174, (Euler). <i>Novi Commentarii Acad. Petropolitanae</i> , T. IX, page 170, (Euler). <i>Institutiones Calculi integralis</i> , T. III, Pars I, Sect. I, Cap. II-VI, (Euler). <i>Mémoires de l'Acad. de Berlin</i> , 1772, p. 35, 1774, p. 239, 1779, p. 152, 1785, p. 176, (Lagrange). <i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris</i> , 1784, p. 118, et <i>Application de l'Analyse à la Géométrie</i> , (Monge). <i>Théorie des Fonctions analytiq.</i> 2 ^e édition, p. 152, et <i>Leçons sur le Calcul des Fonctions</i> , Leçon 20 ^e , (Lagrange). <i>Nova acta Acad. Petrop.</i> , T. IX et XIV, (Trembley). <i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris</i> , 1787, pag. 337, (Legendre), et les citations de l'article précédent.
Des équations dans lesquelles les coefficients différentiels passent le premier degré, 547	<i>Réflexions sur la cause générale des vents</i> , p. 164 et suiv. (d'Alembert).
De l'intégration des équations différentielles partielles des ordres supérieurs au pre- mier, 575	<i>Opusculs mathématiques</i> , T. IV. p. 225, (d'Alembert). <i>Miscellanea Taurinensia</i> , 1760-61, p. 19, 55, 81, 104, (Lagrange). <i>Institutiones Calculi integralis</i> , T. III, Pars I, Sectio II, III, et pars altera, (Euler).

TABLE.

xix

Sommaires des Articles.

Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

		<i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris</i> , 1770, p. 151, 1772, première Partie, p. 1, (Condorcet).
		<i>Miscell. Taurin.</i> 1770-73, p. 79, (Morge).
		<i>Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris</i> , 1784, p. 126, <i>Application de l'Analyse à la Géométrie</i> , (Morge).
		<i>Mélanges mathématiques</i> , (Nieuport).
		<i>Nova Acta Acad. Petropolitanae</i> , T. X, XI, XIII, (Trembley).
		<i>Sul Calcolo integrale dell'equazioni di differenze partiali</i> , (Cardinali).
		<i>Institutiones Calculi integralis</i> , T. III, pag. 186, 258 et 261, (Euler).
Transformations des équations différentielles partielles des ordres supérieurs au premier,	604	<i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris</i> , 1773, p. 355, (Laplace), et 1787, p. 309, (Legendre).
		<i>Mémoires présentés à l'Institut par des Savans étrang.</i> , T. I, p. 478, (Parseval).
		<i>Mém. de l'Acad. de Turin</i> , 1809-1810, part. Phvs. et Mathém., (Plana).
Des équations différentielles partielles du second ordre élevées,	631	Voyez le Mémoire de M. Legendre, cité plus haut, et la <i>Correspondance sur l'École Polytechnique</i> , T. II, p. 410, (Poisson).
Intégration des équations différentielles partielles, par les séries,	637	<i>Miscellanea Taurinensia</i> , 1762-65, p. 27 et 60, (Euler).
		<i>Institutiones Calculi integralis</i> , T. III, page 262, (Euler).
		<i>Mécanique analytique</i> , 1 ^{re} éd., p. 474, (Lagrange).
		<i>Mem. della Società Ital.</i> , T. X, part. I, p. 249, (Paoli).
		<i>Mémoires de l'Institut, classe de Mathém.</i> , T. IV, (Biot).
		<i>Journal de l'École Polytechnique</i> , XIII ^e cahier, page 107, (Poisson), XIV ^e cahier, (Brisson).

<i>Sommaires des Articles.</i>		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Des diverses formes d'intégrales des équations différentielles partielles ,	658	<i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin</i> , 1774, p. 266, (Lagrange).
Des solutions particulières des équations différentielles partielles ,	667	Voyez le dernier Mémoire cité plus haut, et le <i>Journal de l'École Polytechnique</i> , XIII ^e cahier, p. 113, (Poisson).
De la construction géométrique des équations différentielles partielles, et de la détermination des fonctions arbitraires que renferment leurs intégrales ,	672	<i>Novi Commentarii Acad. Petrop.</i> , T. XI, page 1, (Euler). <i>Miscellanea Taurinensia</i> , 1770-73, p. 16, (Monge). <i>Savans Étrangers</i> , 1773, p. 267, (Monge). <i>Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires</i> , etc. couronné en 1790, par l'Acad. de Pétersbourg, (Arbogast). <i>Supplément à l'Application de l'Analyse à la Géométrie</i> , (Monge).
Des équations différentielles totales qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité ,	690	<i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris</i> , année 1773, p. 395, (Laplace). <i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris</i> , année 1784, p. 502, (Monge). <i>Memorie della Società Italiana</i> , T. VI, (Paoli). <i>Mélanges mathémat.</i> , p. 211, (Nieuport).
CHAP. X. <i>De la méthode des variations.</i>	721	
Notions préliminaires ,	<i>ibid.</i>	<i>Johan. Bernoulli opera</i> , T. I et II, (Probl. des Isopérimètres). <i>Jacobi Bernoulli opera</i> , T. II, p. 895. <i>Mémoires de Fontaine</i> , page 1. <i>Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes</i> , (Euler). <i>Miscellaneous tracts</i> , p. 98, (Simpson). <i>Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris</i> , 1767, (Borda, Fontaine), <i>Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio elementaris</i> , Cap. XX, (Lhuillier). <i>Novi Commentarii Acad. Petrop.</i> , T. XVI, page 35, (Euler).

TABLE.

xxj

<i>Sommaires des Articles.</i>		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
		<i>Théorie des Fonctions analytiq.</i> , 2 ^e édition, page 272, (Lagrange).
		<i>Leçons sur le Calcul des Fonct.</i> , 3 ^e édition, 21 ^e et 22 ^e Leçons, (Lagrange).
		<i>Traité de Mécanique.</i> , T. I, pag. 433, (Poisson).
Principes du <i>Calcul des variations</i> proprement dit,	755	<i>Miscellanea Taurinensia</i> , 1760-61, p. 175, 1766-69, p. 163, (Lagrange).
		<i>Novi Commentarii Acad. Petrop.</i> , T. X, page 51, (Euler).
		<i>Institutiones Calculi integralis</i> , T. III, Appendix, (Euler).
		<i>Mécanique analytique</i> , 2 ^e édition, T. I, page 88 et 97, (Lagrange).
Application du Calcul des variations à la recherche des maximums et des minimums,	788	Voyez les écrits cités pour les articles précédens.
Des caractères qui distinguent un maximum d'un minimum,	807	<i>Nova Acta eruditorum</i> , 1772, pag. 193, (Laplace).
		<i>Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris</i> , 1786, p. 7, et 1787, p. 348, (Legendre).
		<i>Théorie des Fonctions analytiques</i> , 2 ^e éd., p. 276, (Lagrange).

N. B. Outre la *Bibliotheca Mathematica* de M. Murrhardt, que j'ai citée à la fin du premier volume du présent Ouvrage, on pourra consulter le tome VII du *Repertorium Commentationum à Societatibus litterariis editarum*, publié par M. Reuss. Ce volume, qui se vend à part, contient les titres de tous les Mémoires de Mathématiques insérés dans les Collections académiques, et classés par ordre de matières.

FIN DE LA TABLE.

TRAITÉ
DU
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DU CALCUL INTÉGRAL,

PAR S. F. LACROIX.

SECONDE ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

Tantum series juncturaque pollet.
HORAT.

TOME TROISIÈME,

CONTENANT UN TRAITÉ DES DIFFÉRENCES ET DES SÉRIES.

PARIS,
M^{re} V^e COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES SCIENCES,
RUE DU JARDINET-SAINT-ANDRÉ-DES-ARCS.
1819.

Y A. Stott
College

S. F. M.

AVERTISSEMENT.

DANS ce volume, comme dans le précédent, je ne me suis pas borné aux divisions indiquées dans la Préface du premier; j'en ai augmenté le nombre, afin de mieux séparer les matières qui sont ici très-variées. Après l'exposition du Calcul direct et inverse aux différences, renfermée dans les trois premiers chapitres, et la *Théorie des Fonctions génératrices*, qui remplit le quatrième, se présentent les applications réciproques des séries et du Calcul intégral, comprenant ces méthodes, pour ainsi dire, anormales, par lesquelles on a tâché de remplir quelques-unes des grandes lacunes que laisse l'imperfection des méthodes directes.

Cette dernière partie ne prouvera pas moins que les deux autres, combien la richesse réelle de l'Analyse est loin de répondre au grand nombre et à la diversité de ses procédés : cependant il est moins permis ici qu'ailleurs de négliger ceux qui paraissent faire un double emploi; parce qu'il s'agit des dernières limites de la Science, et qu'ignorant de quel côté viendront les progrès ultérieurs, il faut conserver tout ce qui tient à des idées nouvelles ou peut en suggérer. C'est dans cette vue que j'ai multiplié les indications sur la théorie et les usages des intégrales définies, pour sommer les suites et intégrer les équations différentielles, mais sans entrer dans les détails; car leur réunion pourrait former un volume plus gros que celui-ci. Ce seul exemple montrera suffisamment combien de sacrifices j'ai dû faire pour ne pas outrepasser des limites déjà trop reculées, et fera voir en même temps que la longueur de mon ouvrage, et les omissions qu'on y peut trouver ne sont pas tout-à-fait sans excuse. Par rapport à ces dernières, je prierai qu'on veuille bien se rappeler aussi ce que, dans l'Avertissement du deuxième volume, j'ai dit de l'inutilité qu'il y aurait à s'appesantir sur les méthodes relatives aux grandes applications. J'ai terminé celui-ci par des éclaircissemens ou des corrections pour quelques articles des volumes précédens, et par des additions concernant l'application de l'Analyse à la Géométrie dans l'espace.

Le titre de *Monsieur* ne se joignant pas au nom des savans illustres pour lesquels la postérité a commencé, j'ai dû ne plus le placer devant ceux de Lagrange et de Monge, et rappeler ainsi la perte récemment faite de deux hommes qui ont enrichi la Science d'un grand nombre de beaux résultats, et qui par l'élégance de leurs méthodes ont porté l'écriture

analytique au plus haut degré de perfection. Créateur d'une branche très remarquable et très utile de la Géométrie, Monge, en y appliquant l'Analyse, a poussé plus loin que tous ses devanciers, le sentiment et le goût de la symétrie qui a tant d'influence sur la clarté des calculs et souvent sur le succès des recherches. Ces avantages, il les dut peut-être au talent éminent avec lequel il a professé, et qu'il tirait autant de la bonté de son cœur que de la sagacité de son esprit. Sa tenue était simple et modeste, son amour de la science si vrai, si fort, si désintéressé, qu'il ne laissait pas soupçonner dans le professeur le moindre retour sur son mérite personnel; et lorsque, animé par l'intérêt que lui témoignait son auditoire, il s'abandonnait à une sorte d'admiration, je dirais presque d'enthousiasme pour les résultats qu'il semblait créer à l'instant même, jamais on n'apercevait la moindre trace du juste sentiment d'orgueil qu'auraient pu faire naître dans tout autre les difficultés qu'il avait vaincues. L'expression de la plus aimable bienveillance marquée dans tous ses traits, dans l'accent de sa voix, dans les regards pénétrants avec lesquels il cherchait sans cesse dans les yeux de ses auditeurs, s'il avait été compris; une complaisance et un zèle inépuisable pour multiplier et varier ses explications; enfin la plus heureuse facilité pour peindre par le geste ce que le crayon ne pouvait exprimer sur le tableau : de tels dons et de tels soins pouvaient-ils manquer d'inspirer aux disciples un amour que leur maître sollicitait d'une manière si touchante, et qui les entraînait irrésistiblement avec lui à travers les plus grandes difficultés ?

Long-temps avant la fondation de la première École Polytechnique, institution sans modèle comme sans rivale, à laquelle il eut la plus grande part, Monge était adoré déjà par de nombreux élèves qu'il avait formés dans le corps du Génie militaire. En étendant ses soins à la jeunesse destinée à peupler tous les services publics, et dont il ne s'est pas moins montré l'ami que le professeur, il s'est formé une immense famille d'hommes reconnaissans qui ont senti vivement sa perte et les chagrins qui l'ont avancée (*).

(*) Voyez la *Notice* publiée par M. Brisson, Ingénieur des Ponts et Chaussées, et l'*Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, par M. Dupin, Capitaine au corps du Génie maritime et Membre de l'Institut.

TABLE.

TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL.

TROISIÈME PARTIE. DES DIFFÉRENCES ET DES SÉRIES.

<i>Sommaires des Articles.</i>	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
CHAP. I. <i>Du Calcul direct aux différences,</i> page 1	<i>Methodus differentialis</i> , (Newtoni Opuscula, T. I). <i>Methodus incrementorum</i> , (Taylor). <i>Philosophical Transactions</i> , (n° 353, année 1717, p. 676). <i>Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris</i> , années 1717, 1723, 1724, (Nicole). <i>Methodus differentialis, sive Tractatus de summatione et interpolatione Serierum</i> , (Stirling). <i>Essays on Several curious and useful subjects</i> , p. 87, (Th. Simpson). <i>Institutiones Calculi differentialis</i> , pars I, cap. I et II, (Euler). <i>The method of increments</i> , (Emerson). <i>Théorie générale des Equations algébriques, Introduction</i> , (Bezout). <i>Méthode directe et inverse des différences, ou Leçons d'Analyse données à l'Ecole Polytechnique</i> , (Prony).
Formation des différences, 2	Voyez les Ouvrages cités plus haut.
Formation des Tables par les différences, 10	<i>Mémoires de l'Institut, classe des Sciences mathématiques et physiques</i> , T. V, p. 49, (Prony). <i>Tables trigonométriques décimales, calculées par Borda, Préface</i> , (Delambre).

Sommaires des Articles.

		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
		<i>Mém. de l'Acad. de Turin</i> , 1790-1791, p. 143, (Delambre).
De l'Interpolation,	21	<i>Mém. de l'Acad. de Berlin</i> , 1758, (Walm-sley). <i>Leonardi Euleri Opuscula analytica</i> , T. I, p. 157. <i>Encyclopédie méthod.</i> , Dict. de Mathém., article INTERPOLATION, (Charles). <i>Mémoires de l'Acad. des Sciences</i> , 1788, p. 582, (Charles). <i>Journal des séances de l'École Normale</i> , T. IV; p. 417 de la 1 ^{re} édit., ou <i>Journal de l'Ecole Polytechnique</i> , VII ^e et VIII ^e cahiers, p. 276, (Lagrange). <i>Mécanique céleste</i> , T. II, p. 221, (Laplace). <i>Observationes diametrorum solis et lunæ apparentium</i> , cop. de nonnullis numerorum proprietatibus, (Mouton). <i>Mém. de l'Acad. de Berlin</i> , 1792-1793, p. 271, (Lagrange). <i>Méthode directe et inverse des différences</i> , etc., p. 264, (Prony). <i>Connaissance des Temps</i> pour 1819, p. 305, (Legendre). <i>Commentarii Acad. Petrop.</i> T. III, (Goldbach). <i>Commentationes Mathematicæ fasciculus I</i> , p. 16, (Maurice de Prasse). <i>Complément de la théorie des équations du premier degré</i> , p. 269, (Desnanot). Voyez en outre les Ouvrages cités au commencement du chapitre.
Différences et Interpolation des fonctions de plusieurs variables,	44	<i>Mém. de l'Acad. de Berlin</i> , 1772, p. 206, (Lagrange).
Remarques sur diverses expressions de u_n ,	54	<i>Encyclopédie méthod.</i> , Dict. de Mathém., T. II, p. 234, 2 ^e col., (Charles).
Développement des différences par les différentielles,	60	<i>Methodus incrementorum</i> , p. 21, (Taylor). <i>Mém. de l'Acad. de Berlin</i> , 1772, (Lagrange). <i>Savans étrangers</i> , T. VII, p. 534, (Laplace).

TABLE.

ix

<i>Sommaires des Articles.</i>	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
	<i>Mém. de l'Acad. des Sciences</i> , 1777, 1779, (Laplace).
	<i>Mém. de l'Acad. de Turin</i> , 1786-1787, (Lorgna).
	<i>Mém. de l'Acad. de Berlin</i> , 1792-1793, (Lagrange).
	<i>Méthode directe et inverse des différences</i> , etc., p. 259, (Prony).
	<i>Du Calcul des dérivations</i> , p. 343, (Arbogast).
	<i>Philosophical Transactions</i> , 1807, 1 ^{re} partie, (Brinckley et Andrews).
	<i>Annales de Mathématiques</i> , T. V, p. 116, (Servois).
Développement des différentielles par les différences, 69	<i>Mém. de l'Acad. de Berlin</i> , 1763, p. 223, (Euler), et les écrits cités dans l'article précédent.
CHAP. II. <i>Du Calcul inverse des différences par rapport aux fonctions explicites</i> , 75	Tous les Auteurs cités pour le commencement du chap. I.
Intégration des fonctions algébriques, <i>ibid.</i>	Pour les nombres de Bernoulli, <i>Jacobi Bernoulli Ars conjectandi</i> , p. 97-98. <i>Miscellanea analytica, supplementum</i> , p. 6, (Moivre). <i>Institutiones Calc. diff.</i> , pars II, cap. V, (Euler). <i>Novi Comm. Acad. Petrop.</i> T. XIV, (Euler).
Intégration des fonctions transcendantes, 87.	<i>Encyclopédie méthod.</i> , <i>Dict. de Math.</i> , art. SINUS, (Delagrave). Pour l'intégration par parties, <i>Philosophical Transactions</i> , n° 353, ann. 1717, (Taylor). <i>Mém. de l'Acad. des Sciences</i> , 1772, 1 ^{re} partie, (Condorcet); 1778, (Laplace). <i>Essai sur la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix</i> , p. 163, (Condorcet).
Développement des intégrales Σ par les différentielles et les intégrales $\int$, 96	Tous les Auteurs cités pour le développement des différences par les différentielles.

TABLE.

<i>Sommaires des Articles.</i>		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Développement de l'expression précédente de $\Sigma^n u$,	106	D'abord les Auteurs indiqués ci-dessus, puis <i>Mém. de l'Acad. des Sciences</i> , 1777, p. 10, (Laplace). <i>Philosophical Transactions</i> , 1807, 1 ^{re} partie, (Brinkley et Andrews); 1816, 1 ^{re} partie, (John F. W. Herschel); 1817, 2 ^e partie, p. 234, (Thomas Knight).
Digression sur les puissances du second ordre, ou factorielles,	119	<i>Methodus differentialis</i> , etc., p. 5, (Stirling). <i>Mém. de l'Acad. des Sciences</i> , 1772, 1 ^{re} partie, p. 489, (Vandermonde). <i>Analyse des réfractions astronomiques</i> , chap. III; <i>Elémens d'Arithmétique universelle</i> ; <i>Annales de Mathématiques</i> , T. III; } (Kramp). <i>Du Calcul des dérivations</i> , p. 364, (Arbogast).
Application du Calcul des différences à la sommation des suites,	133	<i>Memorie dell' Istituto Ligure</i> , T. I, p. 1, 2 ^e pagin., et T. II, p. 230, (Maltedò). <i>Tractatus de seriebus infinitis</i> , (Jac. Bernoulli). <i>Methodus differentialis</i> , etc., pars prima, (Stirling). <i>Analyse des jeux de hasard</i> , (Montmaur). <i>De seriebus infinitis Tractatus Philosophical Transactions</i> , 1717) (Montmaur). <i>Appendix ad Tract. de seriebus infinitis</i> , <i>ibid.</i> , (Taylor). <i>Mém. de l'Académie des Sciences</i> , 1727, (Nicole). <i>Tractatus de mensura sortis</i> ; <i>Miscellanea analytica</i> ; <i>Doctrine of chances</i> ; } (Moiyre). <i>Essais on several... subjects; Mathematical Essays</i> , (Th. Simpson). <i>Observations on reversionary payments, etc., third additionnal Essay</i> , notes, (Price).

TABLE.

xj

Sommaires des Articles.

Titres des principaux Ouvrages qui
ont rapport aux articles ci-joints.

- Commentarii Academicæ Petropolitanae*, T. VI, VII, VIII, XII ;
Novi Commentarii Acad. Petr., T. V, IX, XIII, XIV, XX, *Nova acta*, T. II ;
Institutiones Calculi diff., pars post., cap. VI, VII ;
Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1761 ;
Opuscula analytica ;
Mémoires de l'Académie des Sciences, 1717, 1727, (Nicole).
Mémoires de l'Académie de Berlin, 1758 ; (Walmesley).
Mémoires de l'Académie de Marine, T. I ; (Marguerie).
Memorie della Società Italiana, T. I, (Lorgna) ; T. II, part. I, (Fontana).
Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin, T. I, (Gianella).
Trattato delle Serie di M. A. Lorgna.
Mathematical Lucubrations by Landen ; part. IX.
Mathematical Memoirs by Landen, T. I, Mém. 5.
Disquisitiones analyticæ, etc. volumen I, (Pfaff).
Philosophical Transactions, 1782, 2^e partie, (Vince) ; 1784, 2^e partie ; 1786, 1^{re} partie, (Waring).
 Pour la sommation des séries de *sinus* et *cosinus*, voyez *Novi Commentarii Acad. Petrop.*, T. XVII, T. XVIII, (Daniel Bernoulli, Euler et Lexell).
Commentationes Societatis Scientiarum Gottingensis, 1808-1811 ; (Gauss).
Ricerche sopra le serie e sopra la integrazione delle equazioni a differenze parziali, (Giuliano Frullani).

<i>Sommaires des Articles.</i>	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Application de la sommation des suites à l'interpolation, 163	<i>Inst. Cal. diff.</i> , pars post., cap. XVI et XVII, (Euler). Pour les fonctions nommées par Euler, <i>Functiones inexplicabiles</i> ; voyez <i>Acta Acad. Petropolitanae</i> , 1777, pars I, (Condorcet). <i>Supplementum ad institutiones Calc. differ. ad calcem voluminis II</i> , Ticini, 1787, (Mascheroni).
Formules pour obtenir les valeurs approchées des intégrales aux différentielles, 179	<i>Methodus differentialis (Newtoni opuscula) in fine.</i> <i>De Methodo differentiali (Cotesii Harmonia mensurarum).</i> <i>Methodus differentialis</i> , etc., p. 146, (Stirling). <i>Mathematical dissertations</i> , p. 109, (Th. Simpson). <i>Mém. de l'Acad. de Turin</i> , 1786-1787, p. 447, (Lorgna). <i>Mécanique cél.</i> , T. IV, p. 206, (Laplace). <i>Exercices de Calcul intégral</i> , T. I, p. 308, (Legendre). <i>Annales de Mathématiques</i> , T. VI, (Kramp, Gergonne); T. VII, (Bérard, Kramp); T. VIII, (Servois, Ampère). <i>Commentationes societatis Gottingensis</i> , 1814-1815, p. 39, (Gauss). <i>Théorie des équations algébriques</i> , (Bezout).
Digression sur l'élimination dans les équations algébriques, 186	
CHAP. III. <i>De l'intégration des équations aux différences</i> , 195	
Des Equations aux différences à deux variables et du premier degré, ou <i>linéaires</i> , <i>ibid.</i>	<i>Mélanges de la Société de Turin</i> , T. I, (Lagrange); T. V, (Laplace). <i>Savans étrangers</i> , T. VI, VII, IX. (Laplace, Monge). <i>Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris</i> , 1770, 1771, 1772, (Condorcet). <i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1775, (Lagrange).

<i>Sommaires des Articles.</i>	TABLE.	xiiij
	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.	
	<i>Petri Paoli Liburnensis Opuscula analytica</i> , Opusc. I.	
	<i>Memorie della Società Italiana</i> , T. I, (Lorgna); T. IV, (Paoli).	
	<i>Opuscolo analytico del Dott. Vincenzo Brunacci.</i>	
	<i>Méthode directe et inverse des différences, etc.</i> , (Prony).	
	<i>Calcolo integrale delle equazioni lineari</i> , (Brunacci).	
	<i>Mécanique céleste</i> , T. IV, p. 254, (Laplace).	
	<i>Philosophical Transactions</i> , 1818, (John F. W. Herschel).	
Des équations où la difference de la variable indépendante n'est pas constante, 223	<i>Savans étrangers</i> , T. VII, p. 71, (Laplace), T. IX, p. 357, (Monge).	
	<i>Mélanges de la Société de Turin</i> , T. II, p. 320, (Foncenex).	
	<i>Petri Paoli Opuscula analytica</i> , Opusc. I.	
	<i>Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut</i> , 1811, 2 ^e art., p. 172, (Poisson).	
Détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations différentielles partielles, 228	<i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1753, p. 213, (Euler).	
	<i>Novi Commentarii, Acad. Petrop.</i> T. XI, (Euler).	
	<i>Opuscules de d'Alembert</i> , T. I.	
	<i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i> , 1771, (Condorcet).	
	<i>Savans étrangers</i> , T. VII, (Laplace); même volume, (Monge).	
	<i>Mémoires de l'Acad. des Sciences</i> , 1779, (Laplace).	
	<i>La pièce qui a remporté le prix de l'Acad. de Pétersbourg</i> , en 1790, (Arbogast).	
	<i>Mélanges de la Société de Turin</i> , T. I, (Lagrange).	
	<i>Théorie analytique des probabilités</i> , p. 73, (Laplace).	

<i>Sommaires des Articles.</i>	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Des équations simultanées du premier degré, 238	<i>Savans étrangers</i> , T. VII, (Laplace).
Des facteurs qui rendent intégrables les équations du premier degré aux différences, 242	<i>Elementi d'Algebra di Pietro Paoli (Capitolo dell'equazioni a differenze finite)</i> .
De la nature des arbitraires introduites par l'intégration des équations aux différences, et de la construction de ces quantités, 244	<i>Novi Commentarii Acad. Petrop.</i> , T. III, (Euler). <i>Savans étrangers</i> , T. VII, (Laplace); T. IX, (Monge).
De la multiplicité des intégrales dont les équations aux différences sont susceptibles, 250	<i>Savans étrangers</i> , T. X, (Charles). <i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i> , 1783, (Monge); 1788, (Charles). <i>Méthode directe et inverse des différences</i> , etc., (Prony). <i>Journal de l'Ecole Polytechnique</i> , XI ^e cahier, (Biot, Poisson); XIII ^e cahier, (Poisson).
De l'intégration des équations aux différences à trois et à un plus grand nombre de variables, 267	<i>Savans étrangers</i> , T. VI, VII, (Laplace). <i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1775, (Lagrange). <i>Memorie della Società Italiana</i> , T. II, part. II, (Paoli); T. III, (Malfatti). <i>Opuscolo analytico del Dott. Vincenzo Brunacci</i> . <i>Calcolo integrale delle equazioni lineari</i> , (Brunacci).
Sur la nature des fonctions arbitraires des intégrales des équations aux différentielles partielles, 307	Voyez les articles cités vis-à-vis du sommaire de la page 228. <i>Supplément à la Géométrie analytique</i> , (Monge). <i>Théorie analytique des probabilités</i> , p. 73, (Laplace). <i>Mécanique analytique</i> , T. I, 2 ^e édition, p. 418, (Lagrange).
Des équations de condition relatives à l'intégrabilité des fonctions aux différences, 311	<i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i> , 1770, (Condorcet). Pour les <i>maximums</i> et <i>minimums</i> des intégrales définies aux différences, voyez <i>Mélanges de la Société de Turin</i> , T. II, (Lagrange).

TABLE.

xv

<i>Sommaires des Articles.</i>		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
CHAP. IV. <i>Théorie des suites, tirée de la considération de leurs fonctions génératrices,</i>	322	<i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i> , 1779, (Laplace). <i>Mécanique céleste</i> , T. IV, p. 204, (Laplace). <i>Théorie analytique des probabilités</i> , 1 ^{re} partie, (Laplace).
Des fonctions d'une seule variable, <i>ibid.</i>		Pour le développement des fractions rationnelles en séries, voyez <i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1758, (Walmsley). <i>Traité de la résolution des équations numériques</i> , 2 ^e édit., p. 215, (Lagrange). <i>Du Calcul des dérivations</i> , p. 162 et 182, (Arbogast). <i>Infinitorum dignitatum... historia ac leges</i> , p. 120, (Hindenburg). <i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1797, p. 84, (Trembley).
Transformation des suites,	342	<i>Commentarii Acad. Petropolitane</i> , T. II, (Goldbach). <i>Institutiones Calculi diff.</i> , pars post., cap. I, (Euler).
Développemens des différences, des différentielles et des intégrales,	349	Voyez les citations du commencement du chapitre, et le <i>Journal de l'Ecole Polytechnique</i> , XV ^e cahier, p. 229, (Laplace).
Des fonctions de deux variables,	357	
CHAP. V. <i>Application du Calcul intégral à la théorie des suites,</i>	374	
De la sommation des séries, <i>ibid.</i>		<i>Commentarii Acad. Petropolitane</i> , T. V, VI, (Euler). <i>Miscellanea analytica</i> , p. 110, (Moivre). <i>Memorie della Società Italiana</i> , T. I, (Lorgna). <i>Mémoires de l'Académie de Turin</i> , T. III, (Lorgna). <i>Novi Commentarii Acad. Petropolitane</i> , T. V, (Euler). <i>Specimen de seriebus convergentibus</i> , (Lorgna). <i>Théorie des fonctions analytiques</i> , 2 ^e édition, chap. X, n ^o 65, (Lagrange).

<i>Sommaires des Articles.</i>	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Interpolation des séries,	<i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i> , 1782, p. 66, (Laplace).
	<i>Mémoires présentés à l'Institut par divers Savans</i> , T. I, p. 638, (Parseval).
	Pour la sommation de la série de Taylor, voyez <i>Recherches sur différens points importants du Système du monde</i> , T. I, p. 50, (D'Alembert).
	<i>Théorie des fonctions analytiques</i> , 2 ^e édit., chap. VI, (Lagrange).
	<i>Journal de l'Ecole Polytechnique</i> , XIII ^e cahier, (Ampère).
	<i>Théorie analytique des probabilités</i> , p. 176, (Laplace).
	402 <i>Arithmetica infinitorum</i> , (Wallis).
	<i>Commentarii Acad. Petropolitane</i> , T. V, (Euler).
	Pour les séries hypergéométriques, voy. <i>Novi Commentarii Acad. Petrop.</i> , T. XIII; <i>Nova Acta Acad. Petrop.</i> , T. VII, VIII, (Euler).
	<i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i> , 1772, 1 ^{re} partie, p. 489, (Vandermonde).
CHAP. VI. Recherche des valeurs des intégrales définies,	412 <i>Théorie analytique des probabilités</i> , 2 ^e édit., p. 462, (Laplace).
Recherche des valeurs des intégrales définies,	412 <i>Miscellanea Berolinensia</i> , T. VII, p. 129; <i>Mélanges de la Société de Turin</i> , T. III; <i>Institutiones Calculi integralis</i> , vol. I, sect. I, cap. VII, IX; <i>Acta Acad. Petropolitane</i> , T. I; <i>Nova Acta Acad. Petropolitane</i> , T. V; <i>Leonhardi Euleri Institutionum Calculi integralis</i> , volum. quartum continens supplementa; <i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i> , 1782, p. 13, (Laplace); 1786, p. 676, (Legendre).

TABLE.

xvij

Sommaires des Articles.

Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

Digression sur les expressions des sinus et cosinus en produits infinis, 438	<i>Mémoire sur les Transcendantes elliptiques</i>, p. 91, (Legendre). <i>Exercices de Calcul intégral</i>, (Legendre). <i>Introductio in Analysin infinitorum</i>, T. I, cap. IX, XI, (Euler). <i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i>, 1787-1788, (L'Huillier). <i>Principiorum Calculi differentialis et integralis Expositio elementaris</i>, (L'Huillier). Pour la partition des nombres, voyez <i>Introductio in Analysin infinitorum</i>, T. I, cap. XV, XVI, (Euler).
Continuation de la recherche des valeurs des intégrales définies, 467	<i>Petri Paoli Opuscula</i>, Opusc. II. <i>Memorie della Società italiana</i>, T. I, part. II, (Paoli). <i>Essai d'Architectonique</i>, p. 507, (Lambert). <i>Annales de Mathématiques</i>, T. V, p. 166, (Servois). <i>Novi Commentarii Acad. Petropolitance</i>, T. XVI, XIX, (Euler). <i>Analyse des réfractions astronomiques</i>, chap. III, (Kramp). <i>Théorie analytique des Probabilités</i>, 1^{re} partie, (Laplace). <i>Journal de l'École Polytechnique</i>, XVI^e, XVII^e et XVIII^e cahiers, (Poisson). <i>Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut</i>, 1811, 2^e partie, p. 212, (Poisson). <i>Mémoires de l'Académie de Turin</i>, 1812; T. XXIII, p. 295, (Georges Bidone); T. XXIII, p. 7, (Plana). <i>Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique</i>, 1814, p. 185; 1817, p. 121; 1818, p. 178, (Cauchy); 1815, p. 165, ou <i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i>, 1816, p. 85, (Poisson).
Des séries propres à évaluer les intégrales qui sont des fonctions de grands nombres, 502	<i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i>, 1778, 1782, (Laplace).

Sommaires des Articles.

Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

Examen de la transcendante $\int \frac{e^x dx}{x}$, 512	<i>Analyse des réfractions astronomiques</i>, p. 37, (Kramp). <i>Théorie analytique des Probabilités</i>, (Laplace). <i>Exercices de Calcul intégral</i>, T. I, p. 348, (Legendre). <i>Adnotationes ad Calculum integralem Euleri</i>, (Mascheroni). <i>Mém. de l'Académie de Turin</i>, 1805-1808, Sciences physiques et mathématiques, p. 19 des Mémoires présentés, (Bidone). <i>Memorie della Società italiana</i>, T. XII, p. 268, (Caluso). <i>Théorie et Tables d'une nouvelle transcendante</i>, (Soldner). <i>Archives naturelles et mathématiques de Kœnigsberg</i>, janvier, 1811, (Bessel).
CHAP. VII. Des intégrales définies, appliquées à la résolution des équations différentielles et des équations aux différences, 529	<i>Commentarii Acad. Petropolitane</i>, T. VI, (Euler). <i>Institutiones Calculi integralis</i>, vol. II, cap. X et XI, (Euler). <i>Mém. de l'Acad. des Sciences</i>, année 1779, (Laplace). <i>Mécanique philosophique</i>, p. 344, (Prony). <i>Mémoires présentés à l'Institut par divers Savans</i>, T. I, p. 484, (Parseval). <i>Journal de l'Ecole Polytechnique</i>, XV^e cahier, (Laplace); XVII^e, p. 587, (Ampère); p. 360, (Plana). <i>Mémoires de l'Acad. des Sciences</i>, 1816, p. 85; 1818, (Poisson). <i>Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique</i>, 1818, p. 125, (Poisson); 129 (Fourier).
Applications des formules $\int e^{-ux} v du$, ... $\int u^x v du$, etc., à l'intégration des équations aux différences et différentielles, 567	<i>Mémoires de l'Acad. des Sciences</i>, 1782, (Laplace).

TABLE.

XIX

<i>Sommaires des Articles.</i>	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
	<i>Théorie analytique des Probabilités</i> , p. 110, (Laplace).
	<i>Exercices de Calcul intégral</i> , T. II, p. 131, (Legendre).
CHAP. VIII. <i>Des équations aux différences mêlées</i> , 575	<i>Mémoires de l'Acad. des Sciences</i> , 1771, (Condorcet); 1779 et 1782, (Laplace).
<i>Théorie analytique des équations aux différences mêlées</i> , <i>ibid.</i>	<i>Mémoires présentés à l'Institut par divers Savans</i> , T. I, p. 296, (Biot).
	<i>Journal de l'Ecole Polytechnique</i> , XIII ^e cahier, p. 128, (Poisson).
<i>Application des équations aux différences mêlées, à des questions géométriques</i> , 585	<i>Johannis Bernoulli opera</i> , Trajectoriarum reciprocarum Problema, T. II.
	<i>Euleri Opuscula varii argumenti</i> , T. III.
	<i>Commentarii Academiae Petropolitanae</i> , T. II;
	<i>Novi Comm. Acad. Petropolit.</i> } (Euler).
	T. X, XI, XVI;
	<i>Acta eruditorum</i> ,
	1745, p. 523,
	1746, pag. 230, 1748, pag. 27, 61, 169, (Euler);
	1746, pag. 617, 1747, pag. 665, (Kästner);
	1747, pag. 225, 601, 1749, pag. 236, (Oechlitiu);
	1748, pag. 225, (Baermann).
	<i>Encyclopédie méthodique</i> , art. INTÉGRAL, et les <i>Mémoires</i> de MM. Biot et Poisson, déjà cités.
	<i>Philosophical Transactions</i> , 1815, 1816, 1817, (Babbage).
<i>Des équations aux différences mêlées et partielles</i> , 598	<i>Mémoires présentés à l'Institut par divers Savans</i> , T. I, p. 478, (Parseval).
	<i>Memorie della Società italiana</i> , T. VIII, 2 ^e partie, p. 575, (Paoli).
	<i>Supplemento agli Elementi d'Algebra</i> , p. 199, (Paoli).
	<i>Théorie analytique des Probabilités</i> , p. 65, (Laplace).
	<i>Memorie della Società italiana</i> , T. XI, p. 254, (Franchini).

CORRECTIONS ET ADDITIONS.

PREMIER VOLUME.

PRÉFACE,	pag. 601
INTRODUCTION,	603
CHAPITRE I,	613
CHAPITRE II,	615
CHAPITRE III,	629
CHAPITRE IV,	632
CHAPITRE V,	646

DEUXIÈME VOLUME.

CHAPITRE I,	678
CHAPITRE II,	684
CHAPITRE III,	690
CHAPITRE IV,	691
CHAPITRE VII,	699
CHAPITRE IX,	701
CHAPITRE X,	716

TROISIÈME VOLUME.

CHAPITRE I,	722
CHAPITRE II,	724

TABLE DES MATIÈRES,

ADDITION au n° 1248,	733
	771

SUPPLÉMENT à la seconde colonne de la Table initiale du premier volume.

<i>Sommaires des Articles.</i>	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Ajoutez à la suite des citations, à côté du sommaire indiqué à la page	19 <i>Annales de Mathématiques</i> , T. IX, p. 229, (de Stainville).
	<i>Usus logarithmorum infinitomii in theoria æquationum</i> , (Maurice de Prasse).
	39 <i>Traité analytique des fluxions et fluentes</i> , (Muller), traduction française, p. 112.

TABLE.

xxj

Sommaires des Articles.

Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.

Ajoutez à la suite des citations, à côté du sommaire indiqué à la page

- | | |
|-----|---|
| 39 | <i>Annales de Mathématiques</i> , T. I, p. 18, (Lavernède). |
| | <i>Mathematical Memoirs</i> , (Landen), T. I, p. 69. |
| 66 | <i>Nova acta</i> , <i>Acad. Petrop.</i> , T. IX, p. 41, (Vega); T. XI, p. 133, (Euler). |
| | <i>Correspondance sur l'Ecole Polytechnique</i> , T. II, p. 212, (Poisson). |
| 95 | <i>Memorie della Società italiana</i> , T. V, (Canterzani). |
| 203 | <i>Joh. Bernoulli Opera</i> , T. IV, p. 77. |
| | <i>Methodus incrementorum</i> , p. 8, (Taylor). |
| 237 | <i>Mémoires de l'Acad. de Turin</i> , 1784-85, p. 141, 2 ^e pagination, (Bernoulli); 1786-1787, p. 489, (Caluso). |
| | <i>Memorie della Società italiana</i> , T. XIV, p. 244, (Caluso). |
| | <i>Nova acta Acad. Petrop.</i> , 1786, p. 17, (Euler). |
| | <i>Annales de Mathématiques</i> , T. V, p. 93, (Servois). |
| 285 | <i>Mémoires de la classe des Sciences Mathématiques et Physiques de l'Institut</i> , T. II, p. 14, (Burmman). |
| | <i>Exercices de Calcul intégral</i> , T. II, 5 ^e partie, p. 224 et suiv., (Legendre). |
| | <i>Annales de Mathématiques</i> , T. V, p. 127, (Servois). |
| 299 | <i>Nouveaux Mémoires de l'Académie de Pétersbourg</i> , T. III, 1809-1810, p. 109, (Pfaff). |
| 374 | <i>Annales de Mathématiques</i> , T. III, p. 132 et 197, (Français). |
| 389 | <i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i> , 1729, p. 194, (Nicole). |
| | <i>Memorie della Società italiana</i> , T. XVIII, p. 69, (Paolo Ruffini). |
| 431 | <i>Petri Fermatii Opera varia</i> , p. 89. |
| 456 | <i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1749, p. 203, (Euler). |

TABLE.

Sommaires des Articles.

Ajoutez à la suite des citations, à côté du sommaire indiqué à la page		Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
		<i>Journal de l'Ecole Polytechnique</i> , XIV ^e cahier, p. 131, (Poisson).
	470	<i>Discours sur la pesanteur</i> , (Huygens).
		<i>Geometriæ pars universalis</i> , (Jacques Gré- gori).
		<i>Mémoires de l'Académie des Sciences</i> , 1740, p. 148, (Clairaut).
		<i>Lettres de Descartes</i> , T. III, Lettre 57, p. 213, de l'édition latine, ou lettre 65, p. 350 de l'édition française in-4°.
485		<i>Mélanges de la Société de Turin</i> , T. II, 172, note, (Lagrange).
501		<i>Recherches sur les courbes à double cour- bure</i> , (Clairaut).
		<i>Commentarii Acad. Petrop.</i> , T. III, (1728), p. 110, (Euler), et T. VI, 1732-33, p. 36, (Hermann).
		<i>Nova acta Acad. Petrop.</i> , T. VIII, p. 191, (Euler).
		<i>Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géomé- trie</i> , p. 106, (Lamé).
542		<i>Correspondance sur l'Ecole Polytechnique</i> , T. I, II et III, (Binet, Bret, Brianchon, Petit, etc.).
		<i>Annales de Mathématiques</i> , T. III, p. 105, (Bérard).
		<i>Philosophical Transactions</i> , 1809, 2 ^e par- tie, p. 350, (Yvory).
572		<i>Développemens de Géométrie</i> , (Dupin).
615		<i>Géométrie de Descartes</i> , fin du 2 ^e livre.
		<i>Opuscules de d'Alembert</i> , T. VIII, p. 213.
		<i>Mémoires de l'Académie de Pétersbourg</i> , T. III, (1809-1810), p. 91, (Fuss).

SUPPLÉMENT à la seconde colonne de la Table initiale du deuxième volume.

<i>Sommaires des Articles.</i>	Titres des principaux Ouvrages qui ont rapport aux articles ci-joints.
Ajoutez à la suite des citations, à côté du sommaire indiqué à la page	
4	<i>Annales de Mathématiques</i> , T. III, p. 279, (de Stainville).
83	<i>Nova acta Acad. Petrop.</i> , T. XI, p. 37, (Pfaff). <i>Mémoires de l'Académie de Pétersbourg</i> , T. III (1809-1810), p. 138, (Kausler).
185	<i>Exercices de Calcul intégral</i> , T. I, p. 182, (Legendre).
292	<i>Journal de l'Ecole Polytechnique</i> , XVII ^e cahier, p. 554, (Ampère).
313	<i>Annales de Mathématiques</i> , T. III, p. 46, (Maurice).
447	Pour le problème proposé par de Beaune, voyez les <i>Lettres de Descartes</i> , T. III; lettre 71, p. 295, de l'édit. latine, ou lettre 79, p. 458, de l'édition française in-4 ^e .
457	Pour les développées successives, voy. <i>Joh. Bernoulli Opera</i> , T. IV, p. 98; <i>Novi Commentarii, Acad. Petrop.</i> , T. X, (Euler). <i>Exercices de Calcul intégral</i> , T. II, p. 541, (Legendre). <i>Annales de Mathématiques</i> , T. IX, p. 73.
547	<i>Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique</i> , 1815, p. 183, ou <i>Correspondance sur l'Ecole Polytechnique</i> , T. III, p. 291, (Poisson). <i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1814-1815, p. 70, (Pfaff). <i>Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique</i> , 1819, p. 10, (Cauchy).
575	<i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1747, p. 216, (D'Alembert).

TABLE.

Sommaires des Articles.

Ajoutez à la suite des citations, à côté du
sommaire indiqué à la page

Titres des principaux Ouvrages qui
ont rapport aux articles ci-joints.

- | | |
|-----|--|
| 604 | <i>Sul Calcolo integrale dell' equazioni di
differenze partiali con applicazioni</i> ,
(Francesco Cardinali). |
| 631 | <i>Journal de l'Ecole Polytechnique</i> , XIV ^e
cahier, p. 367, (Poisson). |
| 658 | <i>Bulletin des Sciences, par la Société Phi-
lomatique</i> , 1817, p. 180, (Poisson). |
| | <i>Nova acta Acad. Petrop.</i> , T. IX, X et
XIII, (Trembley). |
| | <i>Journal de l'Ecole Polytechnique</i> , XVII ^e
cahier, p. 551, (Ampère). |
| 690 | <i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , 1814-
1815, p. 70, (Pfaff). |
| 755 | <i>Bulletin des Sciences, par la Société Phi-
lomatique</i> , 1816, p. 82, (Poisson). |

FIN DE LA TABLE.

N. B. En achevant la réimpression de cet Ouvrage, je dois faire des remerciemens publics à MM. Defflers, Maître de Conférences à l'Ecole Normale, et Moret, Maître de Mathématiques, qui, depuis le commencement, ont apporté un zèle soutenu dans la pénible tâche de la révision des épreuves, et m'ont fourni beaucoup de remarques utiles.

INTRODUCTION.

CETTE Introduction a pour but de présenter dans leur ensemble, des théories qu'on ne trouve qu'en partie dans les Éléments d'Algèbre, ou qui n'y sont pas développées avec toute l'étendue qu'il convient de leur donner pour ne rien laisser à désirer sur la généralité des démonstrations. En effet, dans ces Éléments, on a dû s'attacher principalement à considérer l'Algèbre dans ses rapports avec la résolution des équations déduites des problèmes relatifs aux nombres; mais ce n'est là que le moins important de ses usages. La propriété que possède ce genre d'écriture, d'exprimer, de combiner et de transformer les relations que les grands nombres ont entre eux, a conduit à des résultats très-remarquables, et dont la connaissance répand beaucoup de lumière sur l'objet principal de cet Ouvrage. Avant de les exposer, je vais rappeler quelques notions essentielles, et éclaircir le sens de plusieurs expressions qui peuvent paraître obscures et même fausses, lorsqu'on ne remonte pas à leur origine.

Notions générales sur les fonctions, et les séries.

1. Les anciens Analystes comprenaient en général sous la dénomination de *fonctions* d'une quantité, toutes les puissances de cette quantité. Dans la suite on a étendu le sens de ce mot, en l'appliquant aux résultats des diverses opérations algébriques: ainsi on a encore appelé *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression algébrique renfermant d'une manière quelconque des sommes, des produits, des quotiens, des puissances et des racines de ces quantités. Enfin de nouvelles idées, amenées par les progrès de l'analyse, ont donné lieu à la définition suivante des fonctions.

Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.

La racine d'une équation du cinquième degré, par exemple, dont on ne saurait assigner l'expression dans l'état actuel de l'Algèbre, est néanmoins une fonction des coefficients de l'équation, parce que sa valeur dépend de celles de ces coefficients.

On distingue les fonctions suivant le nombre de quantités dont elles

1.

2 dépendent ; ainsi la puissance quelconque, mais déterminée, d'une quantité, n'est fonction que de cette seule quantité. Si on prend la chose sous un point de vue plus général, qu'on envisage à-la-fois toutes les puissances possibles d'une quantité susceptible de valeurs quelconques, alors l'expression générale de ces puissances sera fonction de la quantité primitive et de l'exposant, puisque la valeur particulière de chacune d'elles dépend de ces deux choses.

2. C'est la considération des équations indéterminées qui a conduit à généraliser l'idée des fonctions. Lorsqu'on a voulu exprimer qu'une quantité ne pouvait être assignée sans que préalablement on n'eût donné des valeurs particulières à d'autres quantités, qui pouvaient en recevoir un nombre infini dans une même question, on s'est servi du mot *fonction* pour désigner cette dépendance. Il suit de là que si on avait, par exemple, l'une ou l'autre de ces équations,

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = axz + bx^2 + cz^2, \end{cases}$$

on dirait que y est, dans la première, une fonction de x , ou qu'il est, dans la seconde, une fonction de x et de z . Il faut remarquer qu'on fait abstraction des quantités a , b , c , parce qu'elles sont déterminées, c'est-à-dire parce qu'on les regarde comme devant conserver la même valeur dans toutes les solutions dont chacune des équations précédentes est susceptible.

On pourrait, au lieu de ces équations, en rencontrer d'autres dans lesquelles les quantités inconnues se trouvaient engagées de façon qu'il ne fût pas possible de déterminer, sans quelques opérations préliminaires, la valeur de l'une d'elles : telles seraient les équations,

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = axy \\ x^3 + y^3 + z^3 = axz + byz + cxy. \end{cases}$$

Dans ce cas l'inconnue y sera toujours une fonction de x , en vertu de la première, ou une fonction de x et de z , en vertu de la seconde; parce que cette inconnue ne saurait être déterminée, à moins qu'on n'ait donné des valeurs particulières à x dans l'une, ou à x et à z dans l'autre.

Si dans les équations de cet exemple on se proposait de déterminer x en conséquence des valeurs particulières données à y , ou à y et à z , on dirait que x serait dans la première une fonction de y , ou dans la seconde une fonction de y et de z . On voit par là que dans une équation

tion qui renferme plusieurs inconnues, l'une quelconque d'entre elles est toujours une fonction de toutes les autres ; et c'est l'énoncé de la question qui fait connaître celle qu'on doit envisager ainsi. Lorsqu'on a une équation entre deux quantités, elles sont réciproquement fonction l'une de l'autre.

Nous venons de mettre sous les yeux du lecteur deux sortes d'exemples qui donnent lieu à une distinction remarquable. Dans les premiers on voit tout de suite comment avec la valeur de x , ou celles de x et de z , on parviendrait à former la valeur de y ; dans les seconds, au contraire, il faudrait encore résoudre une équation algébrique par rapport à y , pour trouver cette quantité, en supposant qu'on connaît les valeurs de x , ou de x et de z . Nous dirons donc que dans le premier cas y est une fonction *explicite* de x , ou de x et de z , et dans le second une fonction *implicite* des mêmes quantités.

Il n'est pas nécessaire qu'on ait une équation entre plusieurs quantités, pour qu'on dise que l'une d'elles est une fonction implicite des autres. Il suffit qu'on sache que sa valeur dépend de leurs valeurs particulières; ainsi dans un cercle, le sinus est une fonction implicite de l'arc, quoique l'analyse algébrique n'offre aucun moyen d'exprimer la relation de ces deux quantités, parce qu'en effet l'une d'elles est déterminée lorsque l'autre l'est, et réciproquement. Il est bon d'observer qu'ici nous avons fait abstraction du rayon, quoique la grandeur du sinus dépende aussi de cet élément, parce que nous n'avions en vue qu'un seul cercle.

On comprend sous la dénomination de *fonctions algébriques*, toutes celles qui résultent des opérations algébriques, ou dont la relation avec les quantités indéterminées dont elles dépendent peut être exprimée par une équation algébrique.

5. Les fonctions algébriques ne renferment jamais qu'un nombre limité de termes, lorsqu'on les exprime sous la forme qui leur est propre. Cette restriction est nécessaire; car si on veut évaluer par un assemblage de monomes, une fraction proprement dite, ayant un dénominateur binome ou polynome, on tombe alors dans une suite infinie.

La fraction $\frac{a}{a-x}$, par exemple, étant développée par la division ou autrement, donne la suite :

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.}$$

sans qu'on trouve jamais un quotient qui s'arrête. Il en est de même des racines des polynômes qui ne sont pas des puissances parfaites, lorsqu'on veut les exprimer d'une manière rationnelle, ou par une suite de monômes.

On sait que la formule donnée par Newton, pour développer les puissances du binôme, ne se termine pas lorsque l'exposant est un nombre négatif ou fractionnaire.

Mais il existe des fonctions qu'on ne saurait, dans aucun cas, exprimer par un nombre limité de termes, de l'espèce de ceux qui constituent les quantités algébriques : tels sont, par exemple, les logarithmes qu'on ne peut obtenir que par approximation, et qui dépendent de l'extraction d'un nombre infini de racines ; les sinus et cosinus qu'on ne saurait évaluer au moyen de leurs arcs, sans concevoir un nombre infini d'opérations algébriques : on a donné à ces fonctions le nom de *transcendantes*. Celles que nous venons d'indiquer ne sont pas les seules de ce genre ; les progrès que l'analyse a faits en ont introduit beaucoup d'autres, et peuvent en fournir indéfiniment. Telle est l'origine des séries. Quoiqu'elles ne donnent la valeur exacte des fonctions auxquelles elles appartiennent, que lorsqu'elles s'arrêtent, ou qu'on sait obtenir la somme de tous leurs termes, comme cela arrive dans les progressions par quotiens (ou géométriques) décroissantes ; cependant elles peuvent toutes, à l'instar de celles qu'on déduit des fonctions algébriques, être regardées comme le développement des fonctions inconnues dont elles dérivent.

4. Il est à propos de faire attention au mot *développement*, que l'on emploie ici au lieu de celui de *valeur* ; car une série ne donne pas toujours la valeur de la fonction à laquelle elle appartient : quelquefois même au lieu d'en approcher davantage, à mesure qu'on prend plus de termes, elle s'en éloigne sans cesse, ainsi qu'on peut le remarquer sur la fraction $\frac{a}{a-x}$, développée suivant les puissances de x . La série

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.}$$

qui en résulte, ne donne des résultats convergens vers la vraie valeur que dans le cas où $x < a$: ce n'est donc que dans ce cas qu'il est permis de l'employer à déterminer par approximation cette vraie valeur ; mais cependant l'expression

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.}$$

considérée en faisant abstraction du dernier terme, c'est-à-dire, comme contenant toujours des termes de la même forme, quelque loin qu'on la prolonge, est tellement liée avec la fraction $\frac{a}{a-x}$, que si une question nous conduisait à la série

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.}$$

nous serions en droit d'en conclure que la fonction cherchée n'est autre que $\frac{a}{a-x}$; ou si nous découvriions quelque propriété relative à une suite de termes tels que $1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \text{etc.}$, nous pourrions affirmer qu'elle appartient à la fonction $\frac{a}{a-x}$.

Pour sentir la vérité de cette assertion, il suffit d'observer que le développement régulier d'une fonction, considéré dans toute son étendue, vérifie l'équation qui caractérise cette fonction. Dans l'exemple que j'ai choisi, si on fait $\frac{a}{a-x} = y$, on en conclura l'équation

$$a - (a - x)y = 0,$$

et si l'on substitue au lieu de la fonction y , son développement

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.},$$

on verra que, quelque loin qu'on pousse le calcul, les termes se détruiront toujours. On conçoit sans peine qu'il en serait de même de tout autre exemple, et d'ailleurs il s'en présentera un grand nombre dans la suite de ce Traité.

5. Si, pour employer avec sécurité un développement analytique, il n'est besoin que de s'assurer de la régularité de la série qui l'exprime, c'est-à-dire, de bien constater la loi suivant laquelle se forment tous ses termes, il faut discuter avec soin la convergence des séries numériques, pour en tirer des valeurs approchées de la quantité dont elles dérivent ; et même on ne doit compter entièrement sur ces déterminations que lorsqu'on est en état d'assigner les limites de la différence qui peut se trouver entre elles et la vraie valeur. Pour que l'approximation soit commode et sûre, il est nécessaire que cette différence décroisse rapidement à mesure qu'on embrasse un plus grand nombre de termes, et qu'elle puisse être rendue moindre qu'aucune grandeur donnée,

INTRODUCTION.

quelque petite que soit cette grandeur. Il est évident que ces conditions ne sauraient être remplies à moins que les termes de la série proposée n'aillent en diminuant, puisqu'il faut que chaque terme ne change le résultat que par des différences de plus en plus petites. La discussion où je vais entrer, d'après D'Alembert, sur la convergence des séries résultantes du développement des puissances d'un binôme, éclaircira suffisamment les remarques précédentes.

Son expression analytique étant mise sous la forme

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2\dots(n-1)}x^{n-1} + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}x^n + \text{etc.}$$

fait voir que le rapport entre deux termes consécutifs quelconques est $\frac{m-n+1}{n}x$ (*Élém. d'Algèbre*); ainsi, pour que ces termes aillent en diminuant, il faut, abstraction faite du signe des nombres $m-n+1$ et x , que l'on ait

$$\frac{m-n+1}{n}x < 1.$$

Il est à propos de remarquer que le nombre n demeure le même dans toute l'étendue de la série, mais que le nombre n , nécessairement entier, augmente d'un terme à l'autre, et peut devenir aussi grand que l'on voudra, quand la série ne se termine point, ce que je suppose ici, où j'ai principalement en vue le développement des puissances négatives ou fractionnaires.

La première conséquence qui s'offre, c'est que la quantité

$$\frac{m-n+1}{n} = \frac{m+1}{n} - 1,$$

qui exprime le rapport des coefficients consécutifs des puissances de x , s'approche sans cesse de -1 , puisque la fraction $\frac{m+1}{n}$ ayant un numérateur constant et un dénominateur de plus en plus grand, devient de plus en plus petite. Il suit de là que le rapport des termes consécutifs de la série précédente tend sans cesse à se réduire à $-x$, et que par conséquent, quels que soient ses premiers termes, cette série doit toujours finir par être divergente, quand la valeur de x surpasse l'unité; on ne peut donc s'en servir que lorsque $x < 1$.

INTRODUCTION.

6. Considérons d'abord le cas où m est positif, et faisons $x = \frac{1}{a}$, $a > 1$; la convergence ne commencera que lorsque le rapport des deux termes consécutifs devenant < 1 , les termes formeront une progression décroissante : ce sera donc lorsque

$$\frac{m-n+1}{na} < 1, \text{ ou } 1 > \frac{m-n+1}{na},$$

condition qui se transforme successivement en

$$na > m-n+1, \quad na+n > m+1, \quad \text{ou } n(u+1) > m+1,$$

et enfin

$$n > \frac{m+1}{a+1}.$$

Mais comme au second terme, $n=1$, la convergence se manifestera dès le commencement de la série, quand on aura $a > m$, puisqu'alors le nombre $\frac{m+1}{a+1}$ sera une fraction.

Soit pour exemple,

$$m = \frac{9}{2}, \quad x = \frac{10}{11},$$

d'où

$$a = \frac{11}{10}, \quad \frac{m+1}{a+1} = \frac{\frac{9}{2}+1}{\frac{11}{10}+1} = \frac{55}{21};$$

ici la convergence n'a lieu que lorsque $n > 2$, c'est-à-dire au quatrième terme.

Si m était négative, la quantité $\frac{m-n+1}{na}$ deviendrait $\frac{-m-n+1}{na}$, et en faisant abstraction du signe du nombre $-m-n+1$, la condition relative à la convergence se changerait en

$$1 > \frac{m+n-1}{na}, \quad na > m+n-1,$$

$$na-n > m-1, \quad \text{d'où } n > \frac{m-1}{a-1}.$$

Dans ce cas la convergence peut ne commencer que très-tard.

Soit pour exemple, $m=2$, $x=\frac{99}{100}$, il vient

$$a = \frac{100}{99}, \quad \text{et } n > 99;$$

les 100 premiers termes de la série formeront donc une progression croissante.

7. Après avoir trouvé le terme où la série commence à être convergente, et avant lequel il n'est pas permis de s'arrêter, il faut chercher les limites de l'approximation; on y parvient assez simplement pour les séries qui nous occupent, par un procédé que D'Alembert a mis le premier en usage.

Je ferai d'abord observer que le rapport de deux termes consécutifs de la série proposée,

$$\frac{m-n+1}{n} x = \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) x = -\left(1 - \frac{m+1}{n}\right) x.$$

Les deux dernières expressions montrant que ce rapport change de signe quand on est parvenu au terme, où $\frac{m+1}{n} < 1$, je ne considérerai la série qu'au-delà de ce terme, afin de n'embrasser que la partie où la loi des signes est définitivement fixée; et je supposerai encore que x soit négatif, afin que le rapport des termes consécutifs ayant le signe +, tous soient de même signe. Cela posé, en désignant par N le terme $\frac{m(m-1) \dots m-n+2}{1 \cdot 2 \dots n-1} x^{n-1}$, qui est le $n^{i\text{ème}}$, la série proposée prendra la forme

$$N + N \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) x + N \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) x \cdot \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) x + \text{etc.} \quad (f)$$

d'après laquelle il est évident que tous ses termes, excepté les deux premiers, seront plus grands que ceux de la progression par quotiens

$$N + N \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) x + N \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) x \cdot \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) x + \text{etc.}$$

et que tous, excepté le premier, seront moindres que ceux de la progression

$$N + Nx + Nx \cdot x + \text{etc.}$$

La somme des termes de la série (f) sera donc comprise entre les sommes ou plutôt les limites (*Élém. d'Algèbre*) de ces deux progressions; et comme la raison de la première est $\left(1 - \frac{m+1}{n}\right) x$, et celle de la seconde, x , leurs limites respectives sont:

$$\frac{N}{1 - \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) x} \quad \text{et} \quad \frac{N}{1 - x}.$$

Telles sont les limites, en plus et en moins, des diverses approximations que fournit la série (f); l'erreur sera par conséquent, au-dessous

de leur différence, exprimée par

$$\frac{N \left(\frac{m+1}{n}\right) x}{(1-x) \left(1 - \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) x\right)} = \frac{N(m+1) x}{(1-x)(n + (m-n+1)x)}.$$

On voit assez facilement, dans la première forme de cette expression, qu'elle peut se réduire à tel degré de petitesse qu'on voudra, en prenant n de plus en plus grand; car le numérateur est susceptible de diminuer indéfiniment, par le décroissement du facteur $\frac{m+1}{n}$, et le dénominateur, en y supprimant même cette dernière fraction, ne peut pas tomber au-dessous de $(1-x)^2$, quantité invariable pour tous les termes de la série.

En employant, par exemple, la formule du binôme, pour extraire la racine du nombre 2 mis sous cette forme: $\frac{9-1}{4}$, on aura

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2} \sqrt{9-1} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans ce cas, $m = \frac{1}{2}$; x étant déjà supposé négatif, il suffit d'y substituer $\frac{1}{2}$, et si l'on veut s'arrêter au terme où $n = 10$, il viendra

$$N = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20} \cdot \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = 0,000000000003;$$

les limites du reste de la série qui exprime la valeur de $\left(1 - \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$, seront donc

$$\frac{N}{1 - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{9}\right)}; \quad \frac{N}{1 - \frac{1}{9}};$$

et l'erreur commise, sera moindre que

$$\frac{N \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}}{(1 - \frac{1}{9}) \left(10 + \left(1 - \frac{1}{9}\right) \frac{1}{9}\right)} = \frac{3 \cdot 9 \cdot N}{8 \cdot 163} = 0,0000000000006.$$

Il ne reste plus qu'à multiplier ce nombre par $\frac{1}{2}$, pour obtenir la limite de l'approximation, relativement à la valeur de $\sqrt{2}$.

Si m était négative et > 1 , l'ordre de grandeur des deux progressions par quotiens, auxquelles j'ai comparé la série (f), serait inverse; car le rapport du terme N à celui qui le suit, étant alors $\left(\frac{m-n+1}{n} + 1\right) x$, surpasserait le rapport exprimé seulement par x ; mais la série (f) demeurerait

* $\frac{m+1}{n} - 1$ or it equal $-(1 - \frac{m+1}{n})$ is subtract negative, $\frac{m+1}{n} < 1$.
 Here $\frac{m+1}{n} - 1$ becomes (in m is negative) $-\frac{m+1}{n} - 1 = -(\frac{m+1}{n} + 1)$ which is negative
 when $m > 1$, $\frac{m+1}{n}$ is more than absolute positive number of m .
 10

INTRODUCTION.

toujours comprise entre les progressions, et l'on en trouverait les limites comme ci-dessus.

8. J'ai supposé que tous les termes de la série (f) étaient de même signe, parce que c'est le cas le plus simple; mais il n'a plus lieu lorsque les quantités $\frac{m+1}{n} - 1$ et x sont de signes différents, quand m est positive, et les quantités $-\left(\frac{m+1}{n} + 1\right)$ et x , lorsque m est négative. Dans ces deux circonstances, les termes de la série (f) sont alternativement affectés du signe $+$ et du signe $-$.

Pour abrégé, je représenterai alors la série (f) par

$$N - Px + Qx^2 - Rx^3 + Sx^4 - Tx^5 + \text{etc.};$$

elle se partage dans les suivantes :

$$N + Qx^2 + Sx^4 + \text{etc.} = K$$

$$-(Px + Rx^3 + Tx^5 + \text{etc.}) = L,$$

dont tous les termes sont de même signe, et dont on trouverait les limites, de la même manière qu'on a trouvé celles de la série (f), en substituant au rapport $\left(1 - \frac{m+1}{n}\right)x$, le rapport $\left(1 - \frac{m+1}{n}\right)x^2$, à cause que les termes sont pris ici de deux en deux.

Soient k et k' les limites de la série K , l et l' celles de la série L ; ensuite que

$$K > k \text{ et } < k', \quad L > l \text{ et } < l';$$

si on retranche de la plus petite des limites de K , la plus grande de celles de L , on aura évidemment

$$K - L < k' - l;$$

et en faisant le contraire, on trouvera

$$K - L > k - l'.$$

Je ne m'arrêterai point à développer le calcul; mais je ferai observer que quand les termes d'une série sont en partie positifs et en partie négatifs, on ne peut rien conclure de la comparaison des limites correspondantes de chacune de ses parties; il ne servirait de rien de savoir ici que $k' > k$ et $l' > l$; car, ignorant la grandeur des excès, on ne saurait pas non plus si $k' - l'$ est au-dessus ou au-dessous de

$$K - L, \quad K - k' - l' - L, \quad K - l' - k - L,$$

$K - L$. Au reste, dans ce cas, la série proposée étant équivalente à

$$N - [(Px - Qx^2) + (Rx^3 - Sx^4) + \text{etc.}], \text{ laquelle est}$$

et à $N - Px + [(Qx^2 - Rx^3) + (Sx^4 - Tx^5) + \text{etc.}]$, laquelle est

est visiblement $> N$ et $< N - Px$, si elle est convergente.

9. Quand on peut disposer à volonté de la quantité x , il est facile de rendre aussi convergente qu'on le veut une série

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

dans laquelle le rapport des coefficients consécutifs A et B , B et C , etc. n'est pas susceptible de croître à l'infini, quoique d'ailleurs ces coefficients aillent sans cesse en augmentant. Cela se voit en comparant la série proposée avec une progression par quotiens, comme on l'a fait dans les n^{os} précédens; et on prouve par ce moyen qu'il existe toujours une valeur de x qui peut rendre le premier terme supérieur à la somme de tous les autres.

En effet, soient $Ax^p + Px^{p+1}$, les termes dans lesquels le rapport des coefficients consécutifs, $\frac{P}{A}$, a la plus grande valeur; si r désigne ce rapport, et que l'on forme la progression par quotiens

$$A + Arx + Ar^2x^2 + Ar^3x^3 + \text{etc.},$$

tous les coefficients Ar , Ar^2 , etc. des puissances de x , surpasseront les coefficients B , C , D , etc., puisque r surpassera $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, etc.; et mettant à part le premier terme, A , on trouvera que la somme des termes

$$Arx + Ar^2x^2 + Ar^3x^3 + \text{etc.}$$

surpassera celle des termes

$$Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

de la série proposée. Or

$$Arx + Ar^2x^2 + Ar^3x^3 + \text{etc.} = \frac{Arx}{1 - rx},$$

expression dont on peut rendre la valeur aussi petite que l'on voudra, en donnant à x une valeur convenable; car si on prend $x = \frac{1}{rq}$, il viendra

$$\frac{Arx}{1 - rx} = \frac{A}{q - 1},$$

INTRODUCTION.

quantité qui décroîtra sans cesse, à mesure que l'on donnera à q des valeurs de plus en plus considérables.

La somme de tous les termes de la série proposée, à partir du second, étant moindre que $\frac{A}{q-1}$, pourra donc être rendue aussi petite que l'on voudra, et dans tel rapport que l'on voudra, avec le premier terme A .

Si on avait, par exemple, la série

$$2(10)^1x + 4(10)^1x^2 + 6(10)^1x^3 + 8(10)^1x^4 + \text{etc.},$$

dont la loi est telle, que deux termes consécutifs sont exprimés en général par

$$2n(10)^nx^n + 2(n+1)(10)^{n+1}x^{n+1},$$

on trouverait que le rapport des coefficients de ces termes est

$$\frac{n+1}{n}(10); \quad \frac{n+2}{n+1}(10); \quad \frac{n+3}{n+2}(10); \quad \text{etc.}$$

or en faisant successivement

$$n = 1, \quad n = 2, \quad n = 3, \quad \text{etc.},$$

la quantité $\frac{n+1}{n}$ devient

$$2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \text{etc.} :$$

sa plus grande valeur est donc 2, et 200 est par conséquent le plus considérable des rapports qu'il y ait entre deux termes consécutifs.

Prenant $r = 200$, $x = \frac{1}{200}$, et désignant toujours par A le premier terme, la somme de tous les autres sera moindre que $\frac{A}{200-1}$, et par conséquent moindre que le premier terme A , dès qu'on fera seulement $q = 2$, ce qui suppose $x = \frac{1}{400}$.

Quelqu'étendu que soit le succès du procédé ci-dessus, pour rendre les séries convergentes, il y en a néanmoins dont il ne saurait corriger la divergence; ce sont celles dans lesquelles le rapport des coefficients va toujours croissant. La série

$$1 + 1.2x + 1.2.3x^2 + 1.2.3.4x^3 + \text{etc.}$$

offre un exemple de ce cas.

INTRODUCTION.

Deux termes consécutifs quelconques y sont exprimés par

$$1.2.3 \dots (n+1)x^n + 1.2.3 \dots (n+2)x^{n+1},$$

et leur rapport, égal à $(n+2)x$, augmente sans cesse avec le nombre n , qui n'admet aucune limite: quelle que fût donc la petitesse de la valeur qu'on assignerait à x , comme cette valeur serait la même dans toute la série, la quantité $(n+2)x$ finirait toujours par surpasser l'unité et croîtrait même indéfiniment.

Cet exemple suffit pour faire voir qu'on ne doit s'appuyer qu'avec beaucoup de réserve sur les séries, lorsqu'on a pour but de parvenir à des valeurs approchées.

10. Les calculs précédents et la sommation des progressions par quotiens, décroissantes, font voir qu'il y a des quantités qui, quoique formées par l'addition d'un nombre illimité de termes, ne peuvent s'élever au-delà d'un certain degré de grandeur, et cela, parce que les fonctions dont elles sont le développement, ne sont point susceptibles d'un accroissement sans bornes: il est aisé de reconnaître cette dernière circonstance dans les fonctions dont on a l'expression algébrique.

Soit d'abord la fonction très-simple $\frac{ax}{x+a}$, dans laquelle on suppose que x soit positif et augmente indéfiniment; en divisant par x les deux termes de cette fraction, le résultat

$$\frac{a}{1 + \frac{a}{x}},$$

montre évidemment que la fonction demeure toujours moindre que a , mais qu'elle en approche sans cesse, puisque la partie $\frac{a}{x}$ de son dénominateur diminue de plus en plus et peut être réduite à tel degré de petitesse que l'on voudra. La différence entre a et la fraction proposée, étant exprimée en général par

$$a - \frac{ax}{x+a} = \frac{a^2}{x+a},$$

devient d'autant plus petite que x est plus grand, et peut être rendue moindre qu'aucune grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur: ensuite que la fraction proposée peut approcher de a aussi près que l'on voudra: a est donc la limite de la fonction $\frac{ax}{x+a}$, relativement à l'augmentation indéfinie que peut recevoir x .

Des limites des fonctions, et de ce qu'on entend par les infinis et les infiniment petits.

C'est dans les caractères que je viens d'énoncer, que consiste la véritable acception qu'il faut donner au mot *limite*, pour y comprendre tout ce qui peut s'y rapporter.

Si l'on s'attachait à remarquer, dans l'exemple précédent, qu'en posant aussi loin qu'on voudra l'augmentation de x , on ne pourra jamais regarder comme nulle la fraction $\frac{a^2}{x+a}$, on en conclurait avec raison que la fonction $\frac{ax}{x+a}$, quoique pouvant s'approcher indéfiniment de la limite a , ne saurait jamais l'atteindre, et à plus forte raison la surpasser; mais ce serait à tort qu'on insérerait cette circonstance, comme une condition dans la définition générale du mot *limite*: on en exclurait par là les rapports de quantités évanouissantes, rapports dont l'existence est incontestable, et dont on tire un grand parti dans l'analyse.

11. En effet, lorsque l'on compare les fonctions ax et $ax+x^2$, on trouve que leur rapport, réduit à sa plus simple expression, est $\frac{a}{a+x}$, et qu'il approche de plus en plus de l'unité, à mesure que x diminue. Il devient rigoureusement 1, quand $x=0$; mais les quantités ax et $ax+x^2$, qui sont alors rigoureusement nulles, peuvent-elles avoir un rapport déterminé? C'est ce qui ne paraît pas aisé à concevoir; et l'on n'en donne une notion claire, qu'en présentant la quantité 1 comme une limite dont le rapport des fonctions ax et $ax+x^2$ peut approcher aussi près que l'on voudra, puisque la différence

$$1 - \frac{a}{a+x} = \frac{x}{a+x},$$

peut être rendue moindre qu'aucune grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur.

D'un autre côté, le rapport $\frac{a}{a+x}$, des quantités ax et $ax+x^2$, peut non-seulement atteindre l'unité, quand on y fait $x=0$, mais la surpasser, lorsque l'on suppose x négatif, puisqu'il devient alors $\frac{a}{a-x}$, quantité qui surpasse 1, lorsque x est $< a$. Cette circonstance ne me paraît point contraire à l'idée de limite; car on peut regarder la valeur 1, qui répond à $x=0$, comme un terme vers lequel tend le rapport des fonctions ax et $ax+x^2$, par la diminution des valeurs de x , soit positives, soit négatives.

Dans la suite, les considérations géométriques feront encore mieux

saisir le but de cette observation; mais il est d'ailleurs évident que les objections qu'on pourrait élever à cet égard n'auraient aucun fondement, puisqu'une définition de mots étant toujours arbitraire, doit être accordée toutes les fois qu'on n'emploie ces mots que suivant l'acception qui leur a été donnée: or l'application des limites se fait par des principes dont la vérité ne repose que sur la possibilité de prouver qu'une quantité variable peut approcher de sa limite aussi près que l'on voudra. Voici les plus importants:

1°. Deux grandeurs qui sont la limite d'une même fonction sont égales entre elles.

Car si cela n'était pas, ces deux grandeurs auraient une différence, et par conséquent la fonction proposée ne saurait approcher en même temps de l'une et de l'autre de ces grandeurs, de plus près que d'une quantité donnée, ce qui est contre la définition des limites.

2°. La limite du rapport de deux fonctions est égale au rapport de leurs limites.

Soient p et q les limites correspondantes des fonctions P et Q , on aura en général

$$P = p + \alpha, \quad Q = q + \beta,$$

α et β désignant des quantités qui décroissent ensemble, et s'évanouissent en même temps; et il viendra

$$\frac{P}{Q} = \frac{p + \alpha}{q + \beta} \quad \text{et} \quad \frac{p + \alpha}{q + \beta} - \frac{p}{q} = \frac{q\alpha - p\beta}{(q + \beta)q},$$

fraction dont le dénominateur ne peut tomber au-dessous de q^2 , tandis que le numérateur diminue sans cesse à mesure que α et β deviennent plus petits, ou à mesure que les fonctions P et Q approchent de leurs limites. $\frac{P}{Q}$ est donc (10) la limite de $\frac{P}{Q}$.

12. L'expression très-générale

$$\frac{Ax^a + Bx^b + Cx^c + \dots}{Ax'^a + B'x'^b + C'x'^c + \dots}$$

comprend une infinité de cas où le rapport de deux fonctions peut demeurer fini ou assignable, quoique chacune en particulier soit ou nulle ou infinie.

Pour en trouver la limite, lorsque x devient de plus en plus petit,

il faut que les termes du numérateur et du dénominateur soient ordonnés de manière à commencer par le moindre des exposants de x , et alors on lui donnera la forme

$$\frac{x^{\alpha} \left\{ A + Bx^{\beta-\alpha} + Cx^{\gamma-\alpha} + \dots \right\}}{x^{\alpha'} \left\{ A' + B'x^{\beta'-\alpha'} + C'x^{\gamma'-\alpha'} + \dots \right\}}.$$

Cela fait, on distinguera trois cas, savoir :

$$\alpha > \alpha', \quad \alpha = \alpha', \quad \alpha < \alpha'.$$

Dans le premier, le rapport étant réduit à sa plus simple expression, devient

$$\frac{x^{\alpha-\alpha'} \left\{ A + Bx^{\beta-\alpha} + Cx^{\gamma-\alpha} + \dots \right\}}{A' + B'x^{\beta'-\alpha'} + C'x^{\gamma'-\alpha'} + \dots};$$

et son numérateur seul s'évanouit, lorsque $x = 0$; il tend donc à devenir nul à mesure que x diminue.

Il n'en est pas de même lorsque $\alpha = \alpha'$; car il se change en

$$\frac{A + Bx^{\beta-\alpha} + Cx^{\gamma-\alpha} + \dots}{A' + B'x^{\beta'-\alpha'} + C'x^{\gamma'-\alpha'} + \dots},$$

et si le nombre des termes de son numérateur et de son dénominateur est fini, ou s'il est possible, par des valeurs convenables de x , de rendre de plus en plus petites (9) les sommes des séries

$$\begin{aligned} Bx^{\beta-\alpha} + Cx^{\gamma-\alpha} + \dots, \\ B'x^{\beta'-\alpha'} + C'x^{\gamma'-\alpha'} + \dots, \end{aligned}$$

ce rapport approchera sans cesse de la fraction déterminée $\frac{A}{A'}$, qui en sera la limite. Il est à remarquer qu'on tombe immédiatement sur cette limite, en faisant $x = 0$.

Pour le troisième cas, où $\alpha < \alpha'$, on écrirait le rapport proposé ainsi qu'il suit :

$$\frac{A + Bx^{\beta-\alpha} + Cx^{\gamma-\alpha} + \dots}{x^{\alpha'-\alpha} \left\{ A' + B'x^{\beta'-\alpha'} + C'x^{\gamma'-\alpha'} + \dots \right\}};$$

et comme alors son dénominateur s'évanouit dans la supposition de $x = 0$, tandis que son numérateur se réduit à A , il devient infini et n'a donc pas de limite.

13. Quand on veut découvrir les limites de la fonction proposée, relatives à l'accroissement de x , il faut en ordonner les termes en commençant par l'exposant le plus élevé, et l'écrire ainsi :

$$\frac{x^{\alpha} \left\{ A + \frac{B}{x^{\alpha-\beta}} + \frac{C}{x^{\alpha-\gamma}} + \dots \right\}}{x^{\alpha'} \left\{ A' + \frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}} + \frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}} + \dots \right\}};$$

ensuite la réduire à sa plus simple expression; et l'on aura, quand $\alpha > \alpha'$,

$$\frac{x^{\alpha-\alpha'} \left\{ A + \frac{B}{x^{\alpha-\beta}} + \frac{C}{x^{\alpha-\gamma}} + \dots \right\}}{A' + \frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}} + \frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}} + \dots}.$$

Considérant alors que les termes de la forme

$$\frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}}, \quad \frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}}, \quad \dots$$

diminuent à mesure que x augmente, on verra que la fonction proposée tend à devenir infinie, puisque son dénominateur ne tombe pas au-dessous de A' , tandis que son numérateur augmente sans cesse, à cause du facteur $x^{\alpha-\alpha'}$ et de la quantité déterminée A .

Si l'on avait $\alpha = \alpha'$, le numérateur et le dénominateur tendraient à se réduire à leurs premiers termes A et A' , et la fonction proposée aurait encore pour limite $\frac{A}{A'}$.

Quand $\alpha < \alpha'$, il vient

$$\frac{A + \frac{B}{x^{\alpha-\beta}} + \frac{C}{x^{\alpha-\gamma}} + \dots}{x^{\alpha'-\alpha} \left\{ A' + \frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}} + \frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}} + \dots \right\}};$$

dans ce cas le numérateur a seul une limite A , tandis que le dénominateur augmente à l'infini; la fonction proposée tend donc à devenir nulle, et n'a par conséquent point de limite assignable.

14. Tout ce qu'on vient de lire peut se résumer en très-peu de mots, si l'on observe que la limite de la fonction proposée ne dépend

INTRODUCTION.

que du rapport de ses premiers termes,

$$\frac{Ax^{\alpha}}{Ax^{\alpha'}}$$

rapport qui devient

$$\frac{Ax^{\alpha-\alpha'}}{A}, \text{ ou } \frac{A}{A'}, \text{ ou } \frac{A}{Ax^{\alpha'-\alpha}},$$

selon que $\alpha > \alpha'$, $\alpha = \alpha'$, $\alpha < \alpha'$.

Il est donc permis et même nécessaire, quand on ne cherche que ce rapport, de négliger tous les autres termes de la fonction proposée.

On exprime d'une manière abrégée cette circonstance, en se servant des dénominations d'*infini* et d'*infiniment petit*, et en établissant pour principe que toute puissance d'une quantité infinie disparaît devant celle d'un exposant plus élevé, et qu'au contraire, toute puissance d'une quantité infiniment petite s'évanouit vis-à-vis de celle d'un exposant moindre.

En appliquant immédiatement ces principes à l'expression

$$\frac{Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \dots}{Ax^{\alpha'} + Bx^{\beta'} + Cx^{\gamma'} + \dots},$$

on la réduit sur-le-champ à

$$\frac{Ax^{\alpha}}{Ax^{\alpha'}};$$

lorsqu'elle est ordonnée en commençant par le plus haut exposant, dans la supposition de x infini, ou par le plus petit, dans la supposition de x infiniment petit.

Ce langage, très-commode par sa brièveté, et exact quant au fond, a été le prétexte d'un grand nombre d'objections, parce qu'il semble attribuer une existence actuelle à l'infini mathématique, qui n'est, à proprement parler, qu'une idée négative, puisqu'on appelle infinie ou infiniment petite une quantité parvenue au plus haut degré de grandeur ou au dernier degré de petitesse; et on ne conçoit pas alors comment il peut y avoir différents ordres d'infinis ou d'infiniment petits, ni même qu'une quantité puisse jamais être considérée comme actuellement infinie ou infiniment petite. En effet, il n'y a d'énonciation exacte que dans les axiomes suivants, sur lesquels se sont toujours appuyés les Géomètres anciens :

INTRODUCTION.

1°. *Quelque grande que soit une quantité, on peut en concevoir une autre qui la surpasse autant qu'on voudra.*

2°. *Quelque petite que soit une quantité, on peut en concevoir une qui soit encore au-dessous de celle-là.*

Si l'on rencontre quelquefois des expressions qui paraissent contraires à ces axiomes, il suffira de les analyser, avec quelque attention, pour se convaincre que l'infini ou l'infiniment petit ne s'y trouvent jamais considérés d'une manière absolue, mais qu'il s'agit toujours réellement de rapports qui tendent vers des limites assignables et dont l'existence est facile à concevoir; cette remarque paraîtra de plus en plus évidente, à mesure qu'on avancera dans la lecture de ce Traité. (Voyez d'ailleurs le Discours préliminaire.)

15. Passons maintenant au développement des fonctions en séries, et commençons par celui de $(p+x)^m$. Quoiqu'il se trouve dans presque tous les livres élémentaires, la manière dont on y parvient ne pouvant s'appliquer rigoureusement qu'au cas où m est un nombre entier positif, nous croyons devoir le démontrer de nouveau par un procédé qui ne soit pas sujet à cette restriction. D'ailleurs, pour peu qu'on soit versé dans l'Analyse, on sait que l'expression de $(p+x)^m$, due à Newton, sert au développement de presque toutes les fonctions : il est donc convenable, en traitant ce sujet, de commencer par là.

L'inspection des premières puissances de $(1+x)$, savoir :

$$\left. \begin{aligned} (1+x) &= 1+x \\ (1+x)^2 &= 1+2x+x^2 \\ (1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3 \\ (1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4 \\ &\text{etc.} \dots \end{aligned} \right\}$$

conduit à supposer en général

$$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.};$$

les coefficients A, B, C, D , etc. étant des nombres indépendants de x , ensuite qu'ils demeurent les mêmes, quelque valeur qu'on donne à cette quantité; mais on a $(p+x)^m = p^m \left(1 + \frac{x}{p}\right)^m$: mettant donc dans la série proposée $\frac{x}{p}$ au lieu de x , on aura

$$(p+x)^m = p^m \left(1 + A \frac{x}{p} + B \frac{x^2}{p^2} + C \frac{x^3}{p^3} + D \frac{x^4}{p^4} + \text{etc.}\right),$$

INTRODUCTION.

et en effectuant la multiplication par p^n , il viendra

$$(p+x)^n = p^n + Ap^{n-1}x + Bp^{n-2}x^2 + Cp^{n-3}x^3 + Dp^{n-4}x^4 + \text{etc.} \dots (1),$$

équation qui doit se vérifier indépendamment d'aucune valeur particulière de p et de x , lorsque les coefficients A, B, C, D , etc. seront déterminés convenablement.

Supposons maintenant que x se change en $x+u$, il faudra qu'on ait alors

$$(p+x+u)^n = p^n + Ap^{n-1}(x+u) + Bp^{n-2}(x+u)^2 + Cp^{n-3}(x+u)^3 + Dp^{n-4}(x+u)^4 + \text{etc.} \dots (2);$$

mais on peut encore présenter cette équation sous une autre forme, en posant $p+x=q$: alors $(p+x+u)^n$ deviendra $(q+u)^n$, et en substituant q à p et u à x , dans l'équation (1), il en résultera

$$(q+u)^n = q^n + Aq^{n-1}u + Bq^{n-2}u^2 + Cq^{n-3}u^3 + Dq^{n-4}u^4 + \text{etc.} \dots (3)$$

Les seconds membres des équations (2) et (3) n'étant que les expressions d'une même quantité mise sous deux formes différentes, on peut les égaux, ce qui donnera

$$\begin{aligned} p^n + Ap^{n-1}(x+u) + Bp^{n-2}(x+u)^2 &= \left\{ \begin{aligned} q^n + Aq^{n-1}u + Bq^{n-2}u^2 \\ + Cp^{n-3}(x+u)^3 + Dp^{n-4}(x+u)^4 \\ + \text{etc.} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} q^n + Aq^{n-1}u + Bq^{n-2}u^2 \\ + Cq^{n-3}u^3 + Dq^{n-4}u^4 \\ + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

mais pour comparer entre eux les deux membres de cette dernière équation, il faut développer dans le premier les puissances de $(x+u)$ qui s'y trouvent: or en imitant l'équation (1), on verra qu'on peut supposer,

$$\begin{aligned} x+u &= x + a'u \\ (x+u)^2 &= x^2 + a'xu + b'u^2 \\ (x+u)^3 &= x^3 + a'x^2u + b'xu^2 + c'u^3 \\ (x+u)^4 &= x^4 + a'x^3u + b'x^2u^2 + c'xu^3 + d'u^4 \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

les lettres a, b, c, d , etc. désignant des nombres indépendants de x et de u , et l'accent qui les affecte, marquant à quelle puissance elles appartiennent. En substituant ces valeurs et en ordonnant de manière que tous les termes affectés d'une même puissance de u se trouvent dans

INTRODUCTION.

une même colonne, nous aurons;

$$\begin{aligned} p^n &+ \left\{ \begin{aligned} + Ap^{n-1}a' \\ + Bp^{n-2}a''x \\ + Cp^{n-3}a'''x^2 \\ + Dp^{n-4}a^{(4)}x^3 \\ + \text{etc.} \end{aligned} \right\} + \left\{ \begin{aligned} + Bp^{n-2}b''x \\ + Cp^{n-3}b'''x^2 \\ + Dp^{n-4}b^{(4)}x^3 \\ + \text{etc.} \end{aligned} \right\} + \left\{ \begin{aligned} + Cp^{n-3}c''' \\ + Dp^{n-4}c^{(4)}x \\ + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} u \\ u^2 \\ u^3 + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \\ &= q^n + Aq^{n-1}u + Bq^{n-2}u^2 + Cq^{n-3}u^3 + \text{etc.} \dots (4) \end{aligned}$$

Puisque la valeur de x doit rester indéterminée dans l'équation (1), il est aisé de voir qu'il faut en dire autant de x et de u dans l'équation (4), qui n'est qu'une suite de la première; or une telle condition ne peut être remplie, à moins que l'équation (4) ne devienne identique indépendamment de u ; c'est-à-dire, à moins que les quantités qui multiplient la même puissance de u dans l'un et l'autre membre, ne se détruisent mutuellement.

En comparant d'abord la première colonne de chaque membre, on trouve $p^n + Ap^{n-1}x + Bp^{n-2}x^2 + Cp^{n-3}x^3 + Dp^{n-4}x^4 + \text{etc.} = q^n$, résultat identique par l'hypothèse même, puisque $q^n = (p+x)^n$. Passant à la seconde colonne on trouve:

$$Ap^{n-1}a' + Bp^{n-2}a''x + Cp^{n-3}a'''x^2 + Dp^{n-4}a^{(4)}x^3 + \text{etc.} = Aq^{n-1},$$

équation qui nous suffira pour déterminer les coefficients A, B, C, D , etc.:

En effet, $q^{n-1} = \frac{q^n}{q} = \frac{(p+x)^n}{p+x}$; mettant au lieu de $(p+x)^n$, son expression, on aura, en chassant le dénominateur,

$$\begin{aligned} (Ap^{n-1}a' + Bp^{n-2}a''x + Cp^{n-3}a'''x^2 + Dp^{n-4}a^{(4)}x^3 + \text{etc.}) (p+x) \\ = Ap^n + Ap^{n-1}x + Bp^{n-2}x^2 + Cp^{n-3}x^3 + Dp^{n-4}x^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

et en effectuant la multiplication indiquée,

$$\begin{aligned} Ap^n a' + Bp^{n-1}a'' \left\{ \begin{aligned} x \\ + Ap^{n-1}a' \end{aligned} \right\} + Cp^{n-2}a''' \left\{ \begin{aligned} x^2 \\ + Bp^{n-2}a'' \end{aligned} \right\} + Dp^{n-3}a^{(4)} \left\{ \begin{aligned} x^3 \\ + Cp^{n-3}a''' \end{aligned} \right\} + \text{etc.} \dots \\ = Ap^n + Ap^{n-1}x + Bp^{n-2}x^2 + Cb^{n-3}x^3 + \text{etc.} \dots \end{aligned}$$

Dans tous ces calculs il ne faut pas perdre de vue que A, B, C, D , etc. sont des nombres dans lesquels ni p , ni x , ni u ne sauraient entrer; on doit donc traiter cette équation comme la précédente, et en comparant les coefficients de chaque puissance de x , dans l'un et

l'autre membre, on trouve :

$$\left. \begin{aligned} A &= Ad' \\ A' &= Ba'' + Ad' \\ AB &= Ca'' + Ba'' \\ AC &= Da'' + Ca'' \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \text{d'où l'on tire} \left\{ \begin{aligned} A &= Ad' \\ B &= \frac{A(A-a')}{a''} \\ C &= \frac{B(A-a')}{a''} \\ D &= \frac{C(A-a')}{a''} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right.$$

La manière dont se forment ces équations est assez évidente pour qu'on puisse les pousser aussi loin qu'on voudra; et on voit aisément que si $Pp^{m-n}x^n$ et $Qp^{m-n-1}x^{n+1}$ représentent deux termes consécutifs du développement de $(p+x)^m$, on aura

$$AP = Qa'' \dots (a'+1) + Pa'' \dots (a'), \text{ ce qui donne } Q = P \left\{ \frac{A-a'' \dots (a')}{a'' \dots (a'+1)} \right\},$$

expression dans laquelle n ne désigne pas une puissance de a , mais le nombre des accents que doit porter cette lettre.

Nous remarquerons que les coefficients B, C, D , etc. seraient tous déterminés si on connaissait a', a'', a''' , etc. A ; mais ces derniers ne sont autre chose que les coefficients du second terme dans les puissances du binôme qui ont pour exposant les nombres 1, 2, 3, etc., m .

Il suit de là que du second terme du développement de $(p+x)^m$, on peut déduire tous les autres; car A étant le coefficient de ce second terme, on en doit tirer, comme des cas particuliers, ceux des seconds termes de $(p+x)$, $(p+x)^2$, $(p+x)^3$, etc.

16. On sait déjà que les seconds termes de ces premières puissances sont $x, 2px, 3p^2x$, etc.; il paraît naturel d'en conclure par analogie, que celui de $(p+x)^m$ sera $mp^{m-1}x$: il ne nous reste donc qu'à vérifier cette assertion, pour être en état d'assigner tous les coefficients du développement cherché.

Parmi un assez grand nombre de moyens d'y parvenir, je choisirai le suivant, qui se lie avec une des plus ingénieuses démonstrations qu'on ait donnée du binôme, due à Euler, et que j'ai rapportée ailleurs (*Complément des Éléments d'Algèbre*).

Quel que soit le coefficient de x dans le second terme du développement de $(1+x)^m$, il est nécessairement une fonction du seul exposant m , et je le désignerai en conséquence par $f(m)$, la lettre f étant

INTRODUCTION.

l'abréviation du mot fonction. D'après cette convention, il vient

$$(1+x)^m = 1 + x f(m) + \text{etc.}$$

et de même

$$(1+x)^r = 1 + x f(r) + \text{etc.}$$

En multipliant, membre à membre, ces deux équations, on en conclut

$$(1+x)^{m+r} = 1 + x \{ f(m) + f(r) \} + \text{etc.};$$

mais par la notation établie on a aussi

$$(1+x)^{m+r} = 1 + x f(m+r) + \text{etc.},$$

$f(m+r)$ étant formée de $m+r$, comme $f(m)$ et $f(r)$ le sont respectivement de m et de r ; et en comparant les deux développemens ci-dessus, il en résulte

$$f(m+r) = f(m) + f(r),$$

équation qui exprime la propriété caractéristique de la fonction représentée par f .

Si l'on change r en $r+s$, l'équation précédente devient

$$f(m+r+s) = f(m) + f(r+s);$$

mais la même équation donnant aussi

$$f(r+s) = f(r) + f(s),$$

il en résultera

$$f(m+r+s) = f(m) + f(r) + f(s).$$

En écrivant $s+t$ au lieu de s , on parviendrait à

$$f(m+r+s+t) = f(m) + f(r) + f(s) + f(t),$$

et ainsi de suite.

Cela posé, 1°. si on fait d'abord $r=1$, on obtient

$$f(m+1) = f(m) + f(1), \text{ ou } f(m+1) = f(m) + 1;$$

car r étant 1, $(1+x)^r$ se réduit à $1+x$, où le coefficient de x est 1, ensuite que $f(1) = 1$.

Posant alors successivement

$$m=1, \quad m=2, \quad m=3, \quad \text{etc.},$$

INTRODUCTION.

17. Reprenons les équations

$$\left. \begin{aligned} A &= Aa' \\ B &= \frac{A(A-a')}{a''} \\ C &= \frac{B(A-a')}{a''} \\ D &= \frac{C(A-a')}{a''} \\ &\dots\dots\dots \\ Q &= \frac{P(A-a')}{a^{(n+1)}} \end{aligned} \right\};$$

en y faisant

$$a' = 1, a'' = 2, a''' = 3, a^{(4)} = 4, \dots\dots A = m,$$

elles donneront

$$\begin{aligned} A &= m \\ B &= A \frac{(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2} \\ C &= B \frac{(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ D &= C \frac{(m-3)}{4} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &\dots\dots\dots \\ Q &= P \frac{(m-n)}{n+1} \end{aligned}$$

L'expression de Q contient la loi générale des coefficients, et fait voir comment chacun d'eux se déduit de celui qui le précède.

En substituant les valeurs qu'on vient de trouver, on aura

$$(1+x)^m = \left\{ 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots\dots \right.$$

et pour le terme général, où l'exposant de x, restant indéterminé, est représenté par n, il viendra

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots n} x^n.$$

1.

INTRODUCTION.

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) + 1 = 2, \\ f(3) &= f(2) + 1 = 3, \\ &\dots\dots\dots \\ f(m-1) &= f(m-2) + 1 = m-1, \\ f(m) &= f(m-1) + 1 = m; \end{aligned}$$

voilà pour le cas où l'exposant m est un nombre entier.

2°. Soit $m = r = s = t$; l'équation

$$f(m+r+s+t) = f(m) + f(r) + f(s) + f(t)$$

devenant

$$f(4m) = 4f(m);$$

on en tirera

$$f(m) = \frac{1}{4}f(4m);$$

d'où il suit que si 4m est un nombre entier que je représenterai par i,

on aura

$$f(4m) = i \text{ et } f\left(\frac{i}{4}\right) = \frac{1}{4}i;$$

on s'élèverait de la même manière au cas où le nombre m serait une fraction quelconque $\frac{i}{k}$, et on trouverait $f\left(\frac{i}{k}\right) = \frac{i}{k}$.

3°. Enfin si l'on suppose $m+r=0$, cas dans lequel $f(m+r)=0$, et $(1+x)^0=1$, il en résulte que $f(0)$ est nécessairement nulle; on aura donc alors

$$f(m) + f(r) = 0, \text{ ou } f(r) = -f(m);$$

mais aussi $m+r=0$ conduit à $r=-m$; donc

$$f(-m) = -f(m) = -m.$$

On peut donc affirmer que, quel que soit le nombre représenté par m, pourvu qu'il soit rationnel, les deux premiers termes de $(1+x)^m$ sont $1+mx$. Je montrerais dans la suite, que quand l'exposant m serait irrationnel et même imaginaire, la proposition précédente serait toujours vraie.

INTRODUCTION.

18. Nous n'avons employé pour trouver les coefficients A, B, C, D , etc. que les termes affectés de la première puissance de u dans l'équation (4); mais cependant nous serions en droit d'en conclure que les autres sont identiques dans chaque membre; car si cela n'était pas, il en résulterait de nouvelles équations auxquelles il serait impossible de satisfaire, puisque les quantités A, B, C, D , etc. sont déjà déterminées, et par conséquent il ne serait pas vrai de dire qu'on peut représenter le développement de $(1+x)^m$ par une série $1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{etc.}$, qui conviendrait à toutes les valeurs de x .

Quoique ces raisonnemens paraissent prouver d'une manière suffisante la légitimité du développement que nous avons obtenu, cependant pour ne rien laisser à désirer, je vais montrer que les autres termes de l'équation (4) se détruisent mutuellement.

Pour cela je reprendrai, dans l'équation (2), l'expression

$$p^m + Ap^{m-1}(x+u) + Bp^{m-2}(x+u)^2 + Cp^{m-3}(x+u)^3 + Dp^{m-4}(x+u)^4 + \text{etc.},$$

dont le développement compose le premier membre de l'équation (4), et j'observerai qu'on peut effectuer ce développement à l'aide de ce qui précède, puisque les coefficients A, B, C, D , etc. sont déterminés. Je vais donc chercher par quelle quantité la puissance quelconque u^n serait multipliée. Il est aisé de voir qu'on ne saurait rencontrer u^n avant le terme affecté de $(x+u)^n$, mais qu'à partir de celui-là on le trouve dans tous, ensuite que si on développe les puissances de $(x+u)^n, (x+u)^{n+1}$, etc. en commençant par u au lieu de commencer par x , ce qui est indifférent, u^n sera au premier terme dans la première, au second terme dans la seconde, et ainsi de suite.

Supposons donc qu'on ait dans la série proposée, les termes suivans :

$$Pp^{m-n}(x+u)^n + Qp^{m-n-1}(x+u)^{n+1} + Rp^{m-n-2}(x+u)^{n+2} + Sp^{m-n-3}(x+u)^{n+3} + \text{etc.};$$

il en résultera pour le coefficient de u^n ,

$$Pp^{m-n} + \frac{(n+1)}{1} Qp^{m-n-1}x + \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2} Rp^{m-n-2}x^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Sp^{m-n-3}x^3 + \text{etc.};$$

mais d'après la loi que nous avons trouvée dans les coefficients du déve-

INTRODUCTION.

loppement de $(p+x)^m$, on doit avoir

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(m-n)}{n+1} P \\ R &= \frac{(m-n-1)}{(n+1)} \frac{(m-n)}{(n+2)} P \\ S &= \frac{(m-n-2)}{(n+3)} \frac{(m-n-1)}{(n+2)} \frac{(m-n)}{(n+3)} P \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

en substituant ces valeurs et faisant les réductions qui s'offrent d'elles-mêmes, on obtiendra

$$P \left\{ p^{m-n} + \frac{(m-n)}{1} p^{m-n-1}x + \frac{(m-n)(m-n-1)}{1 \cdot 2} p^{m-n-2}x^2 + \frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{m-n-3}x^3 + \text{etc.} \right\}.$$

Il est aisé de reconnaître que la quantité renfermée dans la parenthèse n'est autre chose que le développement de $(p+x)^{m-n}$; le coefficient de u^n sera donc, dans le premier membre de l'équation (4), $P(p+x)^{m-n}$; l'identité dans le second, il sera évidemment $Pq^{m-n} = P(p+x)^{m-n}$; l'identité est donc prouvée.

Quelque longs que paraissent les calculs précédens, ils méritent néanmoins une attention particulière, parce qu'ils ne sont fondés que sur des principes de la plus grande rigueur, et qu'ils conduisent, comme on le verra bientôt, à un grand nombre de résultats aussi utiles qu'élégans.

19. On pourrait faire usage des formules précédentes pour développer $(a+bx+cx^2+dx^3+\dots)^m$ suivant les puissances de x ; mais on peut y parvenir d'une manière plus simple, ainsi qu'on va le voir. Il est évident qu'on peut supposer

$$(a+bx+cx^2+dx^3+\dots)^m = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.};$$

car si on met le premier membre de cette équation sous la forme d'un binôme $(a+k)^m$ et qu'on le développe, le résultat, quel que soit m , ne contiendra que des puissances entières et positives de k , depuis la première inclusivement; et par conséquent si on remettait au lieu de cette dernière lettre sa valeur, cette substitution n'introduirait que des

INTRODUCTION.

En calculant d'après cette valeur, celles des lettres B, C, D , etc., on trouvera facilement que la puissance n du polynome.....

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc. a pour expression}$$

$$\begin{aligned}
& a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \left\{ x^3 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \right\} x^2 \\
& + \frac{m}{1} a^{m-1} c + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} bc + \left\{ + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^2 c \right\} x \\
& + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 \\
& + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-3} b^2 c + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^3 c \\
& + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 d + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^2 c d \\
& + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} c^2 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b c^2 + \text{etc.} \\
& + \frac{m}{1} a^{m-1} e + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b e + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b c e \\
& + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} c d + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b c d + \frac{m}{1} a^{m-1} f
\end{aligned}$$

20. Moivre, qui a le premier indiqué ce développement, a aussi donné des règles pour en former successivement tous les termes; mais elles sont peu commodes et ne reposent que sur des inductions; je ne m'y arrêterai point, parce que je dois exposer dans la suite des procédés plus féconds. Je ne puis cependant quitter ce sujet sans montrer sa liaison avec le développement de la puissance m du polynome dont les termes sont indépendans.

On parvient sans peine, par la formule du binôme de Newton (Voyez le *Compl. des Élémt. d'Alg.*, ou plus bas, n° 24), à prouver que tous les termes du développement de $(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.})^m$ se tirent de l'expression

$$\frac{m(m-1) \dots m-n'+1}{1.2.3 \dots q \times 1.2.3 \dots r \times 1.2.3 \dots s \times \text{etc.}} \alpha^{m-n'} \beta^r \gamma^s \text{ etc.,}$$

en prenant pour q, r, s , etc. tous les nombres entiers positifs (y compris zéro) qui satisfont à l'équation

$$q + r + s + \text{etc.} = n',$$

et donnant successivement à n les valeurs 0, 1, 2, 3, etc. Maintenant

INTRODUCTION.

si on fait

$$a \equiv a, \quad \beta \equiv bx, \quad \gamma \equiv cx^2, \quad \delta \equiv dx^3, \quad \text{etc.,}$$

le polynome à développer deviendra

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.})^n;$$

l'expression qui comprend tous ses termes sera

$$\frac{m(m-1) \dots (m-n'+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s} \times \text{etc.} \quad a^{m-n'} b^r c^s d^i \text{ etc.} \quad x^{a+r+3i+\dots}.$$

Mais comme on se propose toujours d'ordonner, suivant les puissances de x , le développement cherché, on doit, parmi les différents termes que donne l'expression ci-dessus, rassembler ceux qui sont affectés de la même puissance de x ; c'est-à-dire que si l'exposant de la puissance dont on veut avoir le coefficient, est n , il faut, pour trouver les termes dont il se compose, donner aux lettres q, r, s , etc., toutes les valeurs entières et positives qui rendent

$$q + 2r + 3s + \text{etc.} = n,$$

et déterminer alors n' par l'équation

$$q + r + s + \text{etc.} = n'.$$

Voici le tableau de ces valeurs dans les premiers termes :

pour	$n = 0,$	on trouve	$q = 0, r = 0, s = 0,$ etc.	$n' = 0$
	$n = 1,$		$q = 1, r = 0, s = 0,$	$n' = 1$
	$n = 2,$		$\left\{ \begin{array}{l} q = 2, r = 0, s = 0, \dots \\ q = 0, r = 1, s = 0, \dots \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} n' = 2 \\ n' = 1 \end{array} \right\}$
	$n = 5,$		$\left\{ \begin{array}{l} q = 5, r = 0, s = 0, \dots \\ q = 1, r = 1, s = 0, \dots \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} n' = 5 \\ n' = 2 \end{array} \right\}$
			$q = 0, r = 0, s = 1, \dots$	$n' = 1$
				etc.

Quand on a déterminé les exposans des lettres a, b, c , etc. pour chaque terme, le coefficient numérique qui doit les multiplier s'obtient tout de suite, en ayant l'attention de supprimer dans son dénominateur, les facteurs qui se rapportent à celles des lettres q, r, s , etc. qui sont nulles, ou pour mieux dire, qui n'entrent pas dans ce terme. Lorsque

INTRODUCTION.

A_0, A_1, A_2 , etc. sont des coefficients indépendants de x , et les chiffres inférieurs 0, 1, 2, etc. marquent l'exposant de la puissance de x qui multiplie la lettre à laquelle ils sont attachés; ainsi A_m sera le coefficient de x^m . Cette notation, qui d'abord paraît un peu compliquée, est néanmoins très-commode, et très-propre à faire reconnaître la loi qui règne entre les valeurs des coefficients.

On demandera peut-être quelle considération a déterminé le choix de la série, et pourquoi elle procède suivant les puissances ascendantes de x : il sera facile de répondre à ces questions. En effet la fonction a^x devient égale à l'unité lorsqu'on y fait $x=0$, et si on eût supposé à la série la forme suivante $A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \text{etc.}$, on voit que dans la même circonstance tous les termes de cette série seraient devenus infinis; elle n'aurait donc pu représenter la fonction proposée. En général, si la forme de la série ne convenait pas au développement cherché, le calcul conduirait à des relations contradictoires entre les coefficients. Il suit de là que pour pouvoir compter sur les résultats de la méthode des *coefficients indéterminés* que nous employons ici, il faut s'être assuré qu'on ne rencontrera pas de semblables relations, quelque loin qu'on pousse le calcul; or c'est ce dont on ne saurait répondre, dans le cas où la série est infinie, que lorsqu'on peut assigner la loi que suivent ses termes.

(Cela posé, si x devient $x+u$, la fonction a^x se changera en a^{x+u} ; mais puisque les coefficients A_0, A_1, A_2 , etc. sont indépendants de toute valeur particulière de x , il faut qu'on ait également

$$a^x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{etc.},$$

$$a^{x+u} = A_0 + A_1 (x+u) + A_2 (x+u)^2 + A_3 (x+u)^3 + \text{etc.},$$

enfin

$$a^{x+u} = A_0 + A_1 (x+u) + A_2 (x+u)^2 + A_3 (x+u)^3 + \text{etc.};$$

et à cause de $a^x \times a^u = a^{x+u}$, il faut que le produit des deux premières séries soit égal à la dernière. Pour ordonner les différents produits partiels, il suffira de reculer d'un rang à mesure qu'on changera de multiplicateur dans la seconde série, et de placer dans une même colonne tous les termes résultants d'une même puissance de $(x+u)$ dans la troisième série; on aura ainsi

INTRODUCTION.

$n=5$, par exemple, on a les trois termes

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3, \quad \frac{m(m-1)}{1 \cdot 1} a^{m-1} b c, \quad \frac{m}{1} a^{m-1} d,$$

qui multiplient en effet x^3 (page 50).

La difficulté ne consiste, comme l'on voit, qu'à former toutes les combinaisons de nombres entiers et positifs qui peuvent satisfaire à l'équation

$$q + 2r + 3s + \text{etc.} = n,$$

suivant les diverses valeurs de n ; on a imaginé pour cela divers procédés dont plusieurs sont très-ingénieux; c'est là spécialement le but de l'*Analyse combinatoire*, dont la première idée appartient à Leibnitz, et qui est très-cultivée en Allemagne; mais on s'en est beaucoup moins occupé dans les autres pays, et l'on y a substitué des méthodes plus analogues aux formes du calcul analytique (*).

21. La plus simple de toutes les fonctions transcendentes est celle qu'on connaît sous le nom d'*exponentielle*, et à laquelle on est conduit en considérant la relation qui existe entre un terme quelconque d'une progression par quotiens et le rang qu'il occupe. Si l'on nomme a le premier terme, a la raison, y le terme cherché et x le nombre de ceux qui le précèdent, on a, comme on sait, $y = a a^x$; et dans cette équation, où a et a sont des quantités invariables, pour chaque progression, y est une fonction de x , et réciproquement x est une fonction de y ; mais ces fonctions sont l'une et l'autre d'un ordre supérieur aux fonctions algébriques; car pour obtenir y , il faut effectuer un nombre indéterminé de multiplications et mêmes d'extractions de racines, si on donne à x des valeurs fractionnaires. L'équation $y = a a^x$ changeant de degré à chaque valeur que prend x , Jean Bernoulli, qui s'en est occupé le premier, la nomma *équation parcourante*. Quant à la détermination de x en y , elle ne peut avoir lieu qu'en employant les logarithmes.

Nous allons donner les moyens de développer la fonction y , et nous ferons, pour plus de simplicité, $a=1$, d'où il résultera $y = e^x$. Nous supposons que a^x soit représenté par la série

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{etc.}$$

(*) En effet, l'*Analyse combinatoire* ne paraît, à l'égard des puissances des polynômes, que ce qu'était le *Triangle arithmétique de Pascal*, à l'égard de celles des binômes; mais on n'a point encore pour les premiers, l'équivalent de la formule donnée par Newton pour les seconds. (Voyez le Discours préliminaire.)

INTRODUCTION.

$$\begin{aligned}
 & A_0 A_0 + A_0 A_1 x + A_0 A_2 x^2 + A_0 A_3 x^3 + A_0 A_4 x^4 + \text{etc.} \\
 & + A_1 A_0 u + A_1 A_1 u x + A_1 A_2 u x^2 + A_1 A_3 u x^3 + A_1 A_4 u x^4 + \text{etc.} \\
 & + A_2 A_0 u^2 + A_2 A_1 u^2 x + A_2 A_2 u^2 x^2 + A_2 A_3 u^2 x^3 + A_2 A_4 u^2 x^4 + \text{etc.} \\
 & + A_3 A_0 u^3 + A_3 A_1 u^3 x + A_3 A_2 u^3 x^2 + A_3 A_3 u^3 x^3 + A_3 A_4 u^3 x^4 + \text{etc.} \\
 & + A_4 A_0 u^4 + A_4 A_1 u^4 x + A_4 A_2 u^4 x^2 + A_4 A_3 u^4 x^3 + A_4 A_4 u^4 x^4 + \text{etc.} \\
 & \left\{ \begin{aligned} & A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \text{etc.} \\ & + A_1 u + 2 A_2 u x + A_3 u x^2 + 3 A_4 u x^3 + \text{etc.} \\ & + A_2 u^2 + 5 A_3 u^2 x + 6 A_4 u^2 x^2 + \text{etc.} \\ & + A_3 u^3 + 5 A_4 u^3 x + 4 A_4 u^3 x^2 + \text{etc.} \\ & + A_4 u^4 + \text{etc.} \end{aligned} \right\} =
 \end{aligned}$$

Cette équation devant avoir lieu quels que soient u et x , il s'ensuit nécessairement que ces quantités ne doivent pas entrer dans la détermination des coefficients, et que par conséquent chacun des termes du premier membre doit être détruit par celui qui lui correspond dans l'autre membre; on aura donc $A_0 A_0 = A_0$, ce qui donne $A_0 = 1$, valeur qu'on mettra partout au lieu de A_0 , et qui dispensera d'écrire cette lettre dans les termes où elle se rencontre. Il résultera de cette omission, que la première ligne du premier membre sera identique avec la première du second membre; ce sera par conséquent dans la deuxième que nous chercherons les équations qui donnent les coefficients, et nous aurons

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 &= A_1 \\ A_1 A_1 &= 2 A_2 \\ A_1 A_2 &= 3 A_3 \\ A_1 A_3 &= 4 A_4 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \text{ d'où on tire } \left\{ \begin{aligned} A_1 &= \frac{A_1}{1} \\ A_2 &= \frac{A_1^2}{1.2} \\ A_3 &= \frac{A_1^3}{1.2.3} \\ A_4 &= \frac{A_1^4}{1.2.3.4} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right.$$

et en général

$$A_1 A_{m-1} = m A_m, \quad A_m = \frac{A_1^m}{1.2.3 \dots m}.$$

Les coefficients étant tous déterminés par ces équations, à l'exception du deuxième, A_1 , il s'ensuit que si la forme que nous avons supposée au développement de a^x est légitime, la troisième ligne du premier membre

INTRODUCTION.

et les suivantes doivent devenir identiques d'elles-mêmes avec celles qui leur correspondent dans le deuxième membre (*).

Pour vérifier cette condition nous prendrons, dans le premier membre, un terme quelconque $u^m x^n$; son coefficient sera évidemment $A_m A_n$, ou $\frac{A_1^m}{1.2.3 \dots m} \times \frac{A_1^n}{1.2.3 \dots n} = \frac{A_1^{m+n}}{1.2 \dots m \times 1.2 \dots n}$. Le même terme $u^m x^n$ faisant partie de la puissance $m+n$ de $x+u$, dans le second membre, a pour coefficient

$$\frac{(m+n)(m+n-1) \dots (m+1) A_{m+n}}{1.2.3 \dots m+n};$$

mais

$$A_{m+n} = \frac{A_1^{m+n}}{1.2.3 \dots (m+n)};$$

substituant cette valeur et effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, savoir : tous les nombres depuis $m+n$ jus-

(*) J'aurais pu me dispenser de faire la vérification indiquée; car ayant effacé de part et d'autre, dans la première équation, les termes identiques, et divisé ensuite les deux membres par u , j'aurais trouvé

$$\left\{ \begin{aligned} & A_1 + A_1^2 x + A_1 A_2 x^2 + A_1 A_3 x^3 + \text{etc.} \\ & + A_2 u + A_2 A_1 u x + A_2 A_2 u x^2 + 4 A_4 x^3 + \text{etc.} \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} & A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 + \text{etc.} \\ & + A_2 u + 3 A_3 u x + 6 A_4 u x^2 + \text{etc.} \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\} =$$

mais comme cette équation doit avoir lieu quel que soit u , on peut y faire $u=0$, alors chacun des membres se réduit à la première ligne, et l'on n'a que les équations trouvées plus haut. Cependant, quoique cette marche soit plus courte que celle que j'ai suivie, j'ai cru devoir préférer la dernière, parce qu'elle ne laisse rien à désirer sur l'exactitude du développement, et que par cette raison elle satisfera davantage ceux qui n'ont pas encore une grande habitude de l'analyse.

Ce que je viens de dire s'applique également aux numéros 57 et 58, et je me dispenserai de le répéter.

J'aurais pu partir aussi d'une propriété plus simple pour déterminer le développement de a^x , employer, par exemple, l'équation $a^x = a^x \times a^x$; mais l'équation $a^x \times a^x = a^{2x}$, qui comprend la précédente, est plus générale, et renferme toutes les propriétés dont la fonction a^x est susceptible, parce qu'elle en exprime la définition la plus étendue, et la seule qui présente un sens lorsque la variable x est imaginaire.

qu'à $n+1$ inclusivement, on a pour résultat

$$\frac{A_1^{n+1}}{1.2.3\dots n.1.2.3\dots m},$$

c'est-à-dire le même que précédemment. L'identité est donc démontrée, et nous pouvons en conclure que

$$a^x = 1 + \frac{A_1 x}{1} + \frac{A_1^2 x^2}{1.2} + \frac{A_1^3 x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

22. Il reste encore à déterminer A_1 ; pour cela nous ferons $x = \frac{1}{A_1}$, et nous aurons

$$\frac{1}{a^{1/A_1}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

série, dont la convergence devient de plus en plus rapide, puisque le rapport des termes consécutifs diminue sans cesse. En la poussant jusqu'au dixième terme, elle donne 2,7182818, et en désignant par e sa valeur exacte, dont on peut approcher aussi près que l'on voudra, il viendra

$$\frac{1}{a^{1/A_1}} = e.$$

Prenant le logarithme de chaque membre de cette équation, on obtiendra

$$\frac{1}{A_1} \log a = \log e, \quad \text{d'où } A_1 = \frac{\log a}{\log e};$$

et avec cette valeur de A_1 , on trouvera

$$a^x = 1 + \frac{\log x}{\log e} + \left(\frac{\log x}{\log e}\right)^2 \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{\log x}{\log e}\right)^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Ce développement se simplifie quand on prend les logarithmes dans le système dont la base est le nombre e , puisqu'alors $\log e = 1$; et en distinguant par la caractéristique l'espèce de logarithmes, il vient

$$a^x = 1 + (V a) \frac{x}{1} + (V a)^2 \frac{x^2}{1.2} + (V a)^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Enfin si l'on suppose $a = e$, on a simplement

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Les diverses séries rapportées ci-dessus finissent toujours par devenir convergentes, quelque valeur que l'on donne à x , car dans la série

$$1 + \frac{A_1 x}{1} + \frac{A_1^2 x^2}{1.2} + \frac{A_1^3 x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

qui les comprend toutes, deux termes consécutifs étant de la forme

$$\frac{A_1^n x^n}{1.2\dots n} + \frac{A_1^{n+1} x^{n+1}}{1.2\dots(n+1)},$$

leur rapport sera $\frac{A_1 x}{n+1}$; or en prolongeant la série, on doit nécessairement rencontrer un terme dans lequel le nombre $n+1$ surpassera la quantité $A_1 x$; et à partir de ce terme, la série deviendra de plus en plus convergente.

23. Voici une propriété bien remarquable du développement de a^x . Puisque $(a')^x = a^{x'}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{A_1 x}{1} + \frac{A_1^2 x^2}{1.2} + \frac{A_1^3 x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right)^m \\ &= 1 + \frac{m A_1 x}{1} + \frac{m^2 A_1^2 x^2}{1.2} + \frac{m^3 A_1^3 x^3}{1.2.3} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

et l'on obtient ainsi avec la plus grande facilité le développement d'une puissance quelconque de la série qui exprime a^x , développement qui serait très-long à calculer par les formules du n° 19.

24. Le développement de e^x (22) conduit aussi très-simplement à l'expression du terme général de la puissance m d'un polynôme quelconque. Soit $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \text{etc.}$ ce polynôme; si l'on substitue à x la quantité $(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \text{etc.})x$, on aura d'abord

$$e^{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \text{etc.})x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x} \cdot e^{\gamma x} \cdot e^{\delta x} \cdot \text{etc.};$$

et remplaçant les exponentielles par leurs développemens, on formera l'équation

INTRODUCTION.

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{(a+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})x}{1} + \frac{(a+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^2x^2}{1.2} \\
& + \frac{(a+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.} \\
& = \left(1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right) \\
& \times \left(1 + \frac{\beta x}{1} + \frac{\beta^2x^2}{1.2} + \frac{\beta^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right) \\
& \times \left(1 + \frac{\gamma x}{1} + \frac{\gamma^2x^2}{1.2} + \frac{\gamma^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right) \\
& \times \left(1 + \frac{\delta x}{1} + \frac{\delta^2x^2}{1.2} + \frac{\delta^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right) \\
& \times \text{etc.}
\end{aligned}$$

Le terme général du premier membre étant

$$\frac{(a+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^m x^m}{1.2 \dots m},$$

il faudra, pour obtenir les termes correspondants du second membre, choisir dans le produit indiqué, ceux qui sont affectés de la puissance m de x ; or un terme quelconque de ce produit sera composé de facteurs pris, un à un, dans chacune des séries dont la multiplication est indiquée, et sera par conséquent de la forme

$$\frac{a^p x^p}{1.2.3 \dots p} \times \frac{\beta^q x^q}{1.2.3 \dots q} \times \frac{\gamma^r x^r}{1.2.3 \dots r} \times \frac{\delta^s x^s}{1.2.3 \dots s} \times \text{etc.},$$

qui revient à

$$\frac{a^p \beta^q \gamma^r \delta^s \text{etc. } x^{p+q+r+s+\dots}}{1.2.3 \dots p \times 1.2.3 \dots q \times 1.2.3 \dots r \times 1.2.3 \dots s \times \text{etc.}};$$

ainsi l'ensemble des combinaisons dans lesquelles on aura

$$p + q + r + s + \text{etc.} = m,$$

donnera tous les termes affectés de x^m , et sera par conséquent le développement de $\frac{(a+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^m}{1.2.3 \dots m}$. En multipliant ces termes par le produit $1.2.3 \dots m$, on aura le développement de $(a+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})^m$; ce dernier résultera donc de l'expression

$$\frac{1.2.3 \dots m a^p \beta^q \gamma^r \delta^s \text{etc.}}{1.2.3 \dots p \times 1.2.3 \dots q \times 1.2.3 \dots r \times 1.2.3 \dots s \times \text{etc.}},$$

INTRODUCTION.

en donnant aux nombres entiers p, q, r, s , etc. toutes les valeurs positives, en commençant par zéro, qui peuvent satisfaire à l'équation

$$p + q + r + s + \text{etc.} = m.$$

Cette manière d'obtenir le terme général de la puissance indéfinie du polynôme, est due à M. Lagrange. Elle suppose que l'exposant m est entier et positif; mais pour l'étendre aux autres cas, il suffit de décomposer le polynôme en deux parties.

En l'écrivant ainsi :

$$\{a + (\beta + \gamma + \delta + \text{etc.})\}^n,$$

on tire d'abord de la formule du binôme, la série

$$a^n + \frac{na^{n-1}}{1} (\beta + \gamma + \delta + \text{etc.}) + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} (\beta + \gamma + \delta + \text{etc.})^2 + \text{etc.},$$

dont le terme général est

$$\frac{n!}{1.2.3 \dots n} \frac{(n-m)!}{n!} a^{n-m} (\beta + \gamma + \delta + \text{etc.})^m \dots (1)$$

et où le nombre n' est entier et positif; le terme général du polynôme $(\beta + \gamma + \delta + \text{etc.})^{n'}$ sera donc, d'après la dernière formule de la page précédente,

$$\frac{1.2.3 \dots n' \beta^q \gamma^r \delta^s \text{etc.}}{1.2.3 \dots q \times 1.2.3 \dots r \times 1.2.3 \dots s \times \text{etc.}},$$

sous la condition que $q + r + s + \text{etc.} = n'$; si on le met dans la formule (1), en observant de supprimer les facteurs $1.2.3 \dots n'$, communs au numérateur et au dénominateur, on aura l'expression

$$\frac{n(m-n+1)(m-n+2) \dots (m-n'+1) a^{m-n'} \beta^q \gamma^r \delta^s \text{etc.}}{1.2.3 \dots q \times 1.2.3 \dots r \times 1.2.3 \dots s \times \text{etc.}},$$

employée déjà, n° 20, et dans laquelle il faut remarquer que les exposants fractionnaires ou négatifs ne porteront que sur le premier terme a du polynôme proposé.

25. Puisque $A = \frac{1}{10}$, si on pouvait trouver une expression de A , Développement

INTRODUCTION.

qui ne contiennent que des termes algébriques en a , on aurait par là le développement de la fonction logarithmique; mais en faisant $a = 1 + b$, la fonction a^x devient $(1 + b)^x$, et peut se développer par le moyen de la formule du binôme; on a alors :

$$(1 + b)^x = 1 + \frac{x b}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^4 + \text{etc.}$$

Pour comparer ce développement à celui que nous avons trouvé, n° 21, il faut l'ordonner par rapport aux puissances de x , ce qui lui donnera la forme suivante :

$$1 + \left\{ b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.} \right\} x \\ + \left\{ b^2 - \frac{3b^3}{3} + \frac{11b^4}{3 \cdot 4} + \text{etc.} \right\} \frac{x^2}{2} \\ + \text{etc.}$$

La loi du coefficient de x est facile à saisir; et comme c'est le seul dont nous ayons besoin pour déterminer A_1 , nous aurons sur-le-champ $A_1 = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.}$, ou en mettant au lieu de b sa valeur $a - 1$,

$$A_1 = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.};$$

et de là on tirera

$$1a = 1e \left\{ (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.} \right\}.$$

Cette série n'est convergente que dans le cas où la quantité $a - 1$ est très-petite; mais on peut toujours la rendre telle par un artifice très-simple. En substituant $\sqrt[n]{a}$ au lieu de a , il viendra

$$1 \sqrt[n]{a} = 1e \left\{ (\sqrt[n]{a}-1) - \frac{(\sqrt[n]{a}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[n]{a}-1)^3}{3} - \frac{(\sqrt[n]{a}-1)^4}{4} + \text{etc.} \right\};$$

mais on sait que $1a = m1 \sqrt[n]{a}$: on aura donc

$$1a = m1e \left\{ (\sqrt[n]{a}-1) - \frac{(\sqrt[n]{a}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[n]{a}-1)^3}{3} - \frac{(\sqrt[n]{a}-1)^4}{4} + \text{etc.} \right\};$$

INTRODUCTION.

or en prenant pour m un nombre de plus en plus grand, on peut faire ensorte que $\sqrt[n]{a}$ diffère aussi peu qu'on voudra de l'unité; et comme la quantité $\sqrt[n]{a} - 1$ diminue bien plus rapidement que m n'augmente, l'expression de $1a$ peut devenir aussi convergente qu'on le voudra.

Pour rendre les opérations plus faciles, il faudra choisir le nombre m parmi ceux de la progression 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2ⁿ, afin de n'avoir que des racines quarrées à extraire. Il est à remarquer qu'on peut tous jours faire ensorte que le premier terme de la série proposée, donne une valeur suffisamment approchée du logarithme de a . En effet, si on prend l'exposant n assez considérable pour qu'il y ait entre l'unité et le premier chiffre significatif de la racine extraite, au moins autant de zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux dans le résultat final, le quarré, contenant un nombre de décimales double de celui de sa racine, tombera hors des limites qu'on s'est prescrites.

Soit pour exemple $a = 10$: Briggs, en extrayant 54 fois de suite la racine quarrée de ce nombre, a trouvé pour résultat

$$1,00000 \ 00000 \ 00000 \ 12781 \ 91493 \ 20032 \ 35 :$$

si on retranche l'unité, il viendra une fraction telle que le premier chiffre significatif de son quarré aura 51 zéros avant lui; la quantité $\sqrt[n]{a} - 1$, donnera donc, dans ce cas, les 51 premiers chiffres décimaux de la valeur de toute la série; et quand le nombre $m1e$, par lequel il faut la multiplier, aurait 20 chiffres dans sa partie entière, les 11 premiers chiffres décimaux du produit seraient encore ceux de la valeur exacte de $1a$; sur quoi il faut observer que m , qui est ici 254, n'a que 17 chiffres, et que dans le système des logarithmes ordinaires, le est une fraction.

26. M. Lagrange, qui le premier a donné la série précédente, a encore remarqué qu'on peut en déduire une autre dont tous les termes soient de signe +, en prenant m négative, puisque

$$\sqrt[n]{a} - 1 = \frac{1}{m} \sqrt[n]{a} - 1 = - \left(1 - \frac{1}{m \sqrt[n]{a}} \right),$$

et que quand a surpasse 1, on a $\sqrt[n]{a} > 1$, et $\frac{1}{m \sqrt[n]{a}} < 1$. Par ce changement,

INTRODUCTION.

et en observant que $la = -m \sqrt[n]{a}$, on obtient

$$la = mle \left\{ \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \right)^3 + \text{etc.} \right\}.$$

Cette dernière série présente immédiatement une limite de la ; car tous ses termes étant additifs, il s'ensuit que

$$la > mle \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \right).$$

La limite en sens contraire se conclut de l'autre série, en faisant attention que puisque ses termes sont décroissants, le second qui est négatif, combiné avec le troisième, qui est positif, donnera nécessairement un résultat négatif; qu'il en sera de même du quatrième et du cinquième, et de tous les autres termes de la série réduits deux à deux de cette manière; le premier est donc à lui seul plus grand que la vraie valeur: ainsi

$$la < mle \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right).$$

La différence entre les deux limites de la est

$$mle \left\{ \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \right) \right\} = mle \frac{(\sqrt[n]{a} - 1)^2}{\sqrt[n]{a}},$$

et peut être rendue de plus en plus petite, à mesure que l'on augmente le nombre m .

27. Pour que la soit déterminé, il faut faire une hypothèse sur le . La plus simple sans doute est de prendre $le = 1$, auquel cas on tombe sur l'espèce particulière de logarithmes indiquée ci-dessus (22) par la caractéristique V et nommés jusqu'ici *logarithmes hyperboliques*, parce qu'on peut les déduire de la quadrature des espaces compris entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes; mais cette dénomination est vicieuse, car on peut également tirer de la quadrature de l'hyperbole en général, tous les systèmes de logarithmes. Il serait donc plus convenable d'appliquer aux premiers le nom de l'inventeur, et de consacrer ainsi la mémoire de celui qui a rendu un aussi grand service aux Mathématiques: on pourrait les appeler logarithmes de Néper, ou logarithmes *Népériens*.

INTRODUCTION.

Briggs changea le système de logarithmes adopté par Néper, et pour se conformer à celui de la numération, il établit pour base le nombre 10; il eut donc alors $10 = 1$: mais en se bornant au premier terme de la série, on trouvera $le = -\frac{1}{m} \sqrt[n]{a}$; et mettant au lieu de a le nombre

$$10, \text{ il viendra } le = -\frac{1}{m} \left(\sqrt[10]{10} - 1 \right).$$

On a vu précédemment que Briggs avait extrait cinquante-quatre fois de suite la racine quarrée du nombre 10; par conséquent, il eut $m = 2^4 = 2^5$, et pour trouver le quotient $\frac{1}{2^5}$, il divisa l'unité cinquante-quatre fois de suite par 2, ce qui lui donna

$$0,00000000000000005551151231257827.$$

Substituant cette valeur au lieu de $\frac{1}{m}$ ainsi que celle de $\sqrt[n]{a}$, que nous avons rapportée plus haut, on aura, en supprimant dans le numérateur et dans le dénominateur, quinze zéros:

$$le = \frac{0,551151231257827}{1,37849149320032} = 0,4342944819032518.$$

Ce nombre est celui par lequel il faut multiplier les logarithmes calculés dans l'hypothèse de $le = 1$, pour avoir ceux de Briggs, ou des Tables ordinaires.

Si au contraire on voulait passer des logarithmes tabulaires à ceux de Néper, il faudrait diviser les premiers par le nombre que nous venons de trouver, ou, ce qui revient au même, les multiplier par $\frac{1}{le} = 2,302585092994045$. Il est bon d'observer que ce dernier résultat n'est autre chose que le logarithme de 10 dans le système de Néper; car en faisant $le = 1$ on trouve $V10 = m(\sqrt[10]{10} - 1)$, ce qui est précisément l'inverse de la valeur trouvée précédemment pour le .

Dans quelque système que ce soit, le est désigné par le nom de *module*; nous le représenterons en général par M ; et puisque dans le système de Néper on a $M = 1$, nous en concluons $la = M \sqrt[n]{a}$, ou $M = \frac{la}{\sqrt[n]{a}}$. Il suit de là que pour trouver le module d'un système quelconque de logarithmes, il faut évaluer le rapport qu'ont entre eux les

logarithmes du même nombre, calculés l'un dans ce système, et l'autre dans celui de Néper.

Pour calculer le logarithme de 2, Briggs chercha celui de 1,024; nombre qui est égal à la dixième puissance de 2 divisée par 1000, parce que l'extraction des racines de l'un lui parut plus facile que celle de l'autre. Ayant pris 47 fois de suite la racine quarrée de 1,024, il opéra sur le résultat comme sur celui qu'il avait déduit du nombre 10, et parvint ainsi au logarithme népérien de 1,024, qu'il multiplia ensuite par le module, et dont il tira facilement le logarithme de 2, en observant que $1,024 = \frac{2^{10}}{1000}$. Nous ne pousserons pas plus loin l'exposition des calculs de Briggs, dont nous n'avons voulu donner qu'une légère idée.

28. Si dans la série qui exprime la valeur de a^x (21) on met au lieu de $1/a$ sa valeur $\frac{1}{M}$, elle deviendra

$$a^x = 1 + \left(\frac{1}{M}\right)x + \left(\frac{1}{M}\right)^2 \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{1}{M}\right)^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \left(\frac{1}{M}\right)^4 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

résultat qui s'étend à un système quelconque de logarithmes.

En faisant $x = 1$ on trouve

$$a = 1 + \left(\frac{1}{M}\right) + \left(\frac{1}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2} \left(\frac{1}{M}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4} \left(\frac{1}{M}\right)^4 + \text{etc.}$$

Cette suite donne le nombre a , lorsqu'on connaît son logarithme et le module du système auquel il appartient.

29. Nous allons maintenant passer aux principales transformations que l'on a fait subir à la série qui exprime $1/a$, pour la rendre plus convergente et par conséquent plus propre à la construction des Tables de logarithmes.

Soit d'abord $a = 1 + u$; il viendra

$$1(1+u) = M \left\{ u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \text{etc.} \right\};$$

série qui est assez commode pour calculer les logarithmes des nombres très-peu différens de l'unité. Quand $u = 1$, sa marche est si lente, qu'il faudrait calculer un grand nombre de termes pour arriver à un résultat un peu exact; car alors

$$1(1+1) = 12 = M \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} \right),$$

et si on fait $M = 1$, il vient $12 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$

En mettant $-u$ à la place de u , dans l'expression précédente de $1(1+u)$, on trouve

$$1(1-u) = M \left(-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \text{etc.} \right);$$

d'où on tire

$$1(1+u) - 1(1-u) = 1 \left(\frac{1+u}{1-u} \right) = 2M \left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \text{etc.} \right),$$

série dont la marche est plus rapide que celle de la première.

Soit fait $\frac{1+u}{1-u} = z$; on aura

$$u = \frac{z-1}{z+1},$$

et

$$12 = 2M \left\{ \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \text{etc.} \right\}.$$

Si, pour donner un exemple, on pose $z = 2$, il viendra

$$12 = 2M \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{etc.} \right\},$$

série beaucoup plus convergente que celle que nous avions obtenue d'abord.

Lorsqu'on évalue en décimales, chacune des fractions qui la composent, on trouve, en se bornant à sept chiffres décimaux,

$$12 = 0,6931472M;$$

et dans le cas où $M = 1$, il vient

$$12 = 0,6931472.$$

Pour connaître M , relativement au système de Briggs, il suffit de calculer le logarithme népérien de 10 et de le comparer à l'unité qui désigne le logarithme du même nombre, d'après Briggs: or la série précédente, en y faisant $z = 10$, donne

$$12 = 2 \left\{ \frac{9}{11} + \frac{1}{3} \left(\frac{9}{11} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{9}{11} \right)^5 + \text{etc.} \right\};$$

série qui est encore convergente, mais moins que la précédente; c'est pourquoi j'indiquerai une autre voie pour arriver plus promptement au 10, lorsque j'aurai fait quelques remarques sur l'expression de 12.

50. Il faut d'abord observer que la convergence de cette série diminue à mesure que z augmente, parce que la fraction $\frac{z-1}{z+1}$ approche de plus en plus de devenir égale à l'unité, valeur sur laquelle on tombe en faisant z infini (13). Il suit de là que la série

$$2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.} \right\}$$

qu'on trouve en faisant

$$\frac{z-1}{z+1} = 1, \quad \text{et} \quad M = 1;$$

répond au logarithme d'un nombre infini, et a par conséquent une valeur infinie.

La série $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.}$, n'est pas la seule série décroissante dont la somme n'ait aucune limite : celle qui suit :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$$

est encore dans le même cas (*), ainsi que l'on peut s'en convaincre en faisant attention qu'elle résulte de

$$l(1-u) = -M \left(u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + \text{etc.} \right),$$

lorsque l'on fait $u = 1$, $M = 1$, et qu'elle répond à $-\log 0$; or on sait que le logarithme de 0 est infini négativement, dans les systèmes dont la base surpasse l'unité. (*Élém. d'Algèbre*.)

On parvient immédiatement à cette conclusion par la série qui exprime $l(1-u)$, en y supposant $1-u = \frac{1}{z}$, ce qui donne

$$u = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z},$$

et

$$l \frac{1}{z} = - \left\{ \frac{z-1}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{z-1}{z} \right)^4 + \text{etc.} \right\};$$

car $l \frac{1}{z}$ étant $-\log z$, devient infini négativement quand z est infini; mais

(*) On la nomme *série harmonique*, parce qu'on en fait quelque usage dans le calcul des vibrations des cordes sonores.

alors la série se change en

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$$

cette dernière n'a donc aucune limite.

Une conséquence assez importante se présente ici, c'est que toute série dont les termes décroîtront plus rapidement que ceux de

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$$

aura nécessairement une limite; car $l \left(\frac{1}{z} \right)$ étant une quantité finie, tant que z n'est pas infini, il faut nécessairement que la suite des fractions

$$\frac{z-1}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{z-1}{z} \right)^4 + \text{etc.},$$

qui forme une série convergente et susceptible de l'application du procédé indiqué dans le n° 9, ait une limite, quelque approchante de l'unité que soit d'ailleurs la fraction $\frac{z-1}{z}$.

31. Pour retourner à mon sujet, qui était d'obtenir les logarithmes des nombres, par des suites d'autant plus convergentes que ces nombres sont plus grands, je ferai en premier lieu,

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{m}{n}, \quad \text{d'où} \quad u = \frac{m-n}{m+n},$$

et

$$l \frac{m}{n} = 2M \left\{ \frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^5 + \text{etc.} \right\};$$

à cause de $l \frac{m}{n} = l m - l n$, on tire de là

$$l m - l n = 2M \left\{ \frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^5 + \text{etc.} \right\},$$

série qui fera connaître la différence de deux logarithmes par le moyen de la somme et de la différence des nombres auxquels ils appartiennent.

En écrivant $n+z$ au lieu de m , le résultat ci-dessus prend la forme

$$l(z+n) = l n + 2M \left\{ \frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^5 + \text{etc.} \right\},$$

et quand $z = 1$, il devient

$$l(n+1) = l n + 2M \left\{ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^5 + \text{etc.} \right\},$$

INTRODUCTION.

séries d'autant plus convergentes que n est plus grand. La seconde donne avec beaucoup de facilité les logarithmes des nombres consécutifs, et on peut l'appliquer utilement à la recherche du module. En y faisant d'abord $n=1$, on trouve pour 12 la même valeur que dans le n° 29; mais comme en doublant le logarithme de 2 on a celui de 4, on peut prendre $n=4$, et il vient $\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{9}$, d'où

$$1/5 = 1/4 + 2 \left\{ \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{9} \right)^5 + \text{etc.} \right\};$$

série très-convergente. Ayant calculé, par son moyen, le logarithme népérien du nombre 5, on y ajoutera celui du nombre 2, et on aura le logarithme népérien de 10.

Quant à la série

$$1(n+z) = 1n + 2M \left\{ \frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^5 + \text{etc.} \right\},$$

elle est très-propre à calculer le logarithme d'un nombre qui sort des limites des Tables.

En effet supposons que ces Tables ne comprennent pas les nombres au-dessus de 1000, et que l'on demande le logarithme de 125283, il faudra décomposer ce nombre en deux parties, dont l'une se trouve dans les Tables, ce qui peut se faire en le considérant comme 125200+83, puisque le logarithme ordinaire de 1252 donne immédiatement celui de 125200: on prendra donc $n=125200$, et $z=83$. La série procèdera alors suivant les puissances impaires de $\frac{83}{250483}$, fraction plus petite que $\frac{1}{5000}$.

32. L'expression de $1 \frac{m}{n}$ qui dépend des puissances impaires de $\frac{m-n}{m+n}$ est la source d'un nombre indéfini de formules propres à calculer, par des approximations de plus en plus rapides, un logarithme, au moyen de plusieurs de ceux qui le précèdent. Ces formules s'obtiennent, ainsi qu'on va le voir, en prenant pour m et pour n des fonctions qui se décomposent en facteurs.

Soit d'abord

$$m = x', \quad n = (x-1)(x+1) = x^2-1;$$

INTRODUCTION.

il viendra

$$1 \frac{m}{n} = 1 \frac{x^2}{x^2-1} = 21x - 1(x-1) - 1(x+1),$$

$$\frac{m-n}{m+n} = \frac{1}{2x^2-1},$$

$$21x - 1(x-1) - 1(x+1) = 21e \left\{ \frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(2x^2-1)^3} + \text{etc.} \right\};$$

d'où l'on tirera

$$1(x+1) = 21x - 1(x-1) - 21e \left\{ \frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(2x^2-1)^3} + \text{etc.} \right\}.$$

Cette formule est très-convergente; car lorsque $x=1000$, elle procède suivant les puissances impaires de $\frac{1}{1999999}$.

La forme à donner aux fonctions m et n était assez facile à deviner, dans le cas précédent; le point essentiel étant que l'indéterminée x n'entre point dans le numérateur, afin que le dénominateur seul augmente de plus en plus avec les valeurs de x . Pour le troisième degré, on supposera

$$m = x^3 + px^2 + qx + r, \quad n = x^3 + px^2 + qx + r',$$

afin d'avoir seulement $m-n=r-r'$; et il faudra déterminer les coefficients p , q , r et r' , de manière que les quantités m et n soient décomposables en facteurs commensurables. M. Delambre, dans l'Introduction dont il a enrichi les Tables trigonométriques de Borda, réduit les fonctions m et n à la forme

$$m = x^3 + px + q, \quad n = x^3 + px - q,$$

et suppose en conséquence

$$\begin{aligned} m &= (x-a)(x-b)(x+a+b), \\ n &= (x+a)(x+b)(x-a-b), \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\begin{aligned} p &= -(ab+a^2+b^2), & q &= a^2b+ab^2, \\ \frac{m-n}{m+n} &= \frac{2q}{2(x^2+px)}, & 1 \frac{m}{n} &= 1m - 1n = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1(x-a) + 1(x-b) + 1(x+a+b) - 1(x+a) - 1(x+b) - 1(x-a-b) \\ = 21e \left\{ \frac{q}{x^2+px} + \frac{1}{3} \left(\frac{q}{x^2+px} \right)^3 + \text{etc.} \right\}, \end{aligned}$$

INTRODUCTION.

équation qui fera connaître le logarithme du nombre $x + a + b$, au moyen de ceux de cinq nombres inférieurs.

On peut faire diverses hypothèses sur a et sur b ; je ne m'arrêterai qu'à celle de $a = b = 1$, qui donne $p = -3$, $q = 2$, et

$$2l(x-1) + l(x+2) - 2l(x+1) - l(x-2) = 2le \left\{ \frac{2}{x^3-3x} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{x^3-3x} \right)^3 + \text{etc.} \right\},$$

formule très-simple, qui fait connaître le logarithme du nombre $x+2$, par ceux de trois nombres inférieurs seulement. J'ai montré ailleurs (*Compl. des Élém. d'Alg.*) son usage pour obtenir promptement les logarithmes des plus petits nombres premiers, et M. Delambre a remarqué dans l'Introduction déjà citée, qu'on pouvait encore en tirer un parti plus avantageux. Cette formule, due à Borda, est remarquable en ce qu'elle a ramené l'attention sur toutes celles de son espèce, qu'on semblaient ignorer tout-à-fait, quoiqu'il s'en trouvât une fort analogue dans le *Traité des Fluents* de Muller, ouvrage publié il y a plus de 60 années.

Il est visible qu'en prenant pour m et pour n des fonctions d'un degré plus élevé que le troisième, on pourra parvenir à des formules encore plus convergentes, et que le choix de ces fonctions est assujéti aux conditions suivantes :

Trouver deux équations numériques qui, ne différant que par leur dernier terme, aient, l'une et l'autre, leurs racines commensurables et entières.

Tel est l'objet des recherches de M. Lavernède, citées dans la Notice des travaux de l'Académie du Gard, et dont M. Gergonne, professeur distingué à Nîmes, m'a fait connaître trois résultats curieux, que j'insérerai ici à la suite de la formule de M. Haros, qui se rapporte au quatrième degré. Celle-ci s'obtient en faisant

$$\begin{aligned} m &= x^2(x-5)(x+5) &= x^4 - 25x^2, \\ n &= (x-3)(x+3)(x-4)(x+4) &= x^4 - 25x^2 + 144; \end{aligned}$$

et il en résulte

$$\begin{aligned} \frac{m-n}{m+n} &= \frac{144}{2x^4 - 50x^2 + 144} &= \frac{72}{x^2 - 25x^2 + 72}, \\ 2lx + l(x-5) + l(x+5) &= 2le \left\{ \frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72} + \text{etc.} \right\}, \\ -l(x-3) - l(x+3) - l(x-4) - l(x+4) & \end{aligned}$$

expression qui donne le logarithme de $x+5$ par ceux de six des nombres précédents.

INTRODUCTION.

La première formule de M. Lavernède, quoique du quatrième degré seulement, est encore un peu plus convergente, et ne comprend que six logarithmes : elle suppose

$$\begin{aligned} m &= x^2(x+5)^2 &= x^4 + 10x^2 + 25x^2, \\ n &= (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) &= x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 36, \end{aligned}$$

et conduit à

$$\begin{aligned} \frac{m-n}{m+n} &= \frac{36}{2x^4 + 20x^3 + 50x^2 - 36} &= \frac{18}{x^2 + 10x^3 + 25x^2 - 18}, \\ 2lx + 2l(x+5) &= 2le \left\{ \frac{18}{x^2 + 10x^3 + 25x^2 - 18} + \text{etc.} \right\}, \\ -l(x-1) - l(x+2) - l(x+3) - l(x+6) & \end{aligned}$$

d'où l'on déduirait $l(x+6)$ par ceux de 5 des nombres précédents.

La seconde formule de M. Lavernède dérive des hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} m &= (x+2)(x+4)(x+10)(x-7)(x-9) &= x^5 - 125x^3 + 3004x + 5040, \\ n &= (x-2)(x-4)(x-10)(x+7)(x+9) &= x^5 - 125x^3 + 3004x - 5040, \end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{aligned} \frac{m-n}{m+n} &= \frac{5040}{x^5 - 125x^3 + 3004x} \\ l(x+2) + l(x+4) + l(x+10) + l(x-7) + l(x-9) &= 2le \left\{ \frac{5040}{x^5 - 125x^3 + 3004x} + \text{etc.} \right\}, \\ -l(x-2) - l(x-4) - l(x-10) - l(x+7) - l(x+9) & \end{aligned}$$

et le logarithme $l(x+10)$ par ceux de 9 des nombres précédents.

La troisième formule est du sixième degré et répond à

$$\begin{aligned} m &= x^2(x-7)^2(x+7)^2 &= x^6 - 98x^4 + 2401x^2, \\ n &= (x-5)(x+5)(x-8)(x+8)(x+8)(x+8) &= x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 14400, \end{aligned}$$

d'où il suit

$$\begin{aligned} \frac{m-n}{m+n} &= \frac{14400}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 14400}, \\ 2lx + 2l(x-7) + 2l(x+7) &= 2le \left\{ \frac{14400}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 14400} + \text{etc.} \right\}, \\ -l(x-5) - l(x+5) - l(x-8) - l(x+8) - l(x+8) - l(x+8) & \end{aligned}$$

Cette dernière formule est remarquable en ce que le premier terme de la série devient d'une telle petitesse, quand le nombre x est un peu grand, qu'on peut n'en pas tenir compte, supprimer ainsi la série, et

INTRODUCTION.

former par de simples additions et soustractions le logarithme de $x+8$, par ceux de 8 des nombres précédens. En effet la fraction $\frac{x^2-98x^4+2401x^6-7200}{x^2-98x^4+2401x^6-7200}$ est au-dessous de 0,000 000 01, quand $x=100$, et au-dessous de 0,000 000 000 01, quand $x=1000$.

Cependant quelque rapide que soit cette approximation, les calculateurs trouveraient peut-être plus commode encore, s'il s'agissait de former des Tables, d'employer la méthode des *différences successives*, dont il sera parlé dans le troisième volume de cet ouvrage.

53. Dans les divers développemens que j'ai rapportés pour les logarithmes, il ne s'en est trouvé aucun qui procédât suivant les puissances du nombre; et l'on n'a point d'expression de cette forme :

$$1u = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + \text{etc.} :$$

la raison en est facile à appercevoir. Lorsque $u=0$, $1u$ devient infini et négatif, ce à quoi la série précédente, ni toute autre qui ne contiendrait que des puissances positives de u , ne saurait se prêter; on ne peut pas non plus faire

$$1u = A + \frac{B}{u} + \frac{C}{u^2} + \frac{D}{u^3} + \text{etc.} ,$$

parce qu'un semblable développement, ayant une valeur finie quand u est infini, ne saurait convenir à $1u$, qui devient infini dans cette circonstance. Il est cependant possible de trouver un développement qui satisfasse à ces deux conditions; à la vérité, il ne peut exprimer, dans aucun cas, d'une manière commode, la valeur de $1u$; mais comme il est remarquable par sa forme, et qu'il conduit à des analogies intéressantes entre les fonctions logarithmiques et circulaires, je ne le passerai pas sous silence.

$$\text{On a } 1(1+u) = M \left\{ u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \text{etc.} \right\} ,$$

$$1\left(1+\frac{1}{u}\right) = M \left\{ \frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{3u^3} - \frac{1}{4u^4} + \frac{1}{5u^5} - \text{etc.} \right\} ;$$

en retranchant la seconde série de la première, on trouvera, à cause de $1\left(1+\frac{1}{u}\right) = 1(1+u) - 1u$,

$$1(1+u) - 1\left(1+\frac{1}{u}\right) = 1u = M \left\{ \left(u - \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{2}\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right) + \frac{1}{3}\left(u^3 - \frac{1}{u^3}\right) - \text{etc.} \right\} ;$$

ou $1u = M \left\{ (u - u^{-1}) - \frac{1}{2}(u^2 - u^{-2}) + \frac{1}{3}(u^3 - u^{-3}) - \text{etc.} \right\} .$

INTRODUCTION.

54. Quoique la manière dont nous sommes parvenus au développement de $1a$ (25) soit très-rigoureuse, et semble ne rien laisser à désirer, on verra peut-être encore avec plaisir comment la transformation qui nous a conduit jusqu'à présent au développement des fonctions, s'applique à la fonction logarithmique.

D'après ce qui a été dit dans l'article précédent, nous devons supposer au développement du logarithme, une forme qui se réduise à zéro, lorsque le nombre auquel il appartient, devient égal à l'unité : or toute fonction rationnelle et entière de $z-1$ satisfait à cette condition : on pourra donc poser

$$1z = A_1(z-1) + A_2(z-1)^2 + A_3(z-1)^3 + \text{etc.}$$

Pour simplifier la série, nous ferons $z-1=x$, d'où $z=1+x$, et par conséquent $1(1+x) = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \text{etc.}$

Si nous supposons, comme à l'ordinaire, que x se change en $x+u$, il viendra

$$1(1+x+u) = A_1(x+u) + A_2(x+u)^2 + A_3(x+u)^3 + \text{etc.} ;$$

mais en faisant $1+x=p$, $1(1+x+u)$ devient $1(p+u)$, puis à cause de $p+u=p\left(1+\frac{u}{p}\right)$, on a $1(1+x+u) = 1\left(1+\frac{u}{p}\right) + 1p$, et, par l'hypothèse,

$$1\left(1+\frac{u}{p}\right) = A_1\frac{u}{p} + A_2\frac{u^2}{p^2} + A_3\frac{u^3}{p^3} + \text{etc.} :$$

donc

$$1(1+x+u) = 1p + A_1\frac{u}{p} + A_2\frac{u^2}{p^2} + A_3\frac{u^3}{p^3} + \text{etc.}$$

Comparant ensemble les deux valeurs de $1(1+x+u)$, qui doivent être identiques, quel que soit u , on trouvera, en se bornant de part et d'autre aux termes qui multiplient la première puissance de cette quantité,

$$A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \text{etc.} = \frac{A_1}{p} ;$$

remettant au lieu de p sa valeur $(1+x)$, il viendra

$$(A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \text{etc.})(1+x) = A_1.$$

Si on effectue la multiplication indiquée, et qu'on détermine séparément les coefficients de chaque puissance de x , on aura

INTRODUCTION.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A, & A_1 &= A, \\
 2A_1 + A_2 &= 0, & A_2 &= -\frac{A_1}{2}, \\
 3A_2 + 2A_3 &= 0, & A_3 &= -\frac{A_2}{2} = \frac{A_1}{3}, \\
 4A_3 + 3A_4 &= 0, & A_4 &= -\frac{A_3}{2} = -\frac{A_1}{4}, \\
 & & & \text{etc.}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{d'où on tire} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = A, \\ A_2 = -\frac{A_1}{2}, \\ A_3 = \frac{A_1}{3}, \\ A_4 = -\frac{A_1}{4}, \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

résultats bien conformes à ceux qu'on a déjà trouvés, et dans lesquels il faut remarquer que le premier coefficient A_1 reste indéterminé, parce qu'il tient la place du module.

Il reste à prouver que toutes les équations qu'on tirerait de la comparaison des termes affectés de u^2 et des puissances supérieures, sont identiques. Pour cela je reprends l'équation

$$1(1+x+u) = A_1(x+u) + A_2(x+u)^2 + \dots + A_n(x+u)^n + A_{n+1}(x+u)^{n+1} + \text{etc.}$$

Il est aisé de voir que le coefficient de u^2 dans le développement du second membre de cette équation sera

$$A_2 + (n+1)A_3x + \frac{(n+2)(n+1)}{2}A_{n+2}x^2 + \frac{(n+5)(n+2)(n+1)}{2 \cdot 3}A_{n+3}x^3 + \text{etc.};$$

et, d'après la loi trouvée précédemment, on a

$$\begin{aligned}
 (n+1)A_{n+1} &+ nA_n = 0 \\
 (n+2)A_{n+2} &+ (n+1)A_{n+1} = 0
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{etc.} \end{array} \right\},$$

$$\text{d'où il suit} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{n+1} = -\frac{nA_n}{n+1} \\ A_{n+2} = -\frac{nA_{n+1}}{n+2} \\ A_{n+3} = -\frac{nA_{n+2}}{n+3} \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Substituant ces valeurs, il vient,

$$A_n \left\{ 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.} \right\},$$

série qui n'est autre chose que le développement de $A_n(1+x)^{-n}$; mais

INTRODUCTION.

le coefficient de u^n dans l'équation

$$1\left(1+\frac{u}{p}\right) = A_1\frac{u}{p} + A_2\frac{u^2}{p^2} + \dots + A_n\frac{u^n}{p^n} \text{ etc.},$$

est $\frac{A_n}{p^n} = \frac{A_n}{(1+x)^n} = A_n(1+x)^{-n}$, résultat identique avec le précédent.

35. Nous pouvons maintenant prouver, comme nous l'avons annoncé (16), que, quand même l'exposant n serait irrationnel ou imaginaire, les deux premiers termes de $(1+x)^n$ n'en seraient pas moins $1+nx$.

En effet supposons $(1+x)^n$ développé dans la série $1+Ax+Bx^2+\text{etc.}$, et faisons, pour abrégér, $Ax+Bx^2+\text{etc.} = px$, nous aurons $1(1+x)^n = 1(1+px)$; mais $1(1+x)^n = n1(1+x)$: donc $1(1+px) = n1(1+x)$, ou, en développant

$$px - \frac{p^2x^2}{2} + \frac{p^3x^3}{3} - \text{etc.} = nx - \frac{nx^2}{2} + \frac{nx^3}{3} - \text{etc.};$$

et comme cette équation doit avoir lieu indépendamment de x , on aura, en mettant pour p sa valeur, et en se bornant aux termes affectés de la première puissance de x , $A=n$.

Il est facile de voir que cette démonstration est tout-à-fait indépendante de la nature du nombre n , et qu'elle ne renferme point de cercle vicieux, en se rappelant que nous n'avons rencontré dans la recherche de $1(1+x)$ que des puissances entières du binôme.

36. La considération des limites conduit aussi très-bien aux développemens des fonctions exponentielles et logarithmiques : c'est ce que je vais montrer, en commençant par les dernières.

La méthode la plus élémentaire pour calculer les logarithmes, consiste à extraire de la base une racine d'un degré très-élevé, et qui, tombant fort près de l'unité, forme la raison d'une progression par quotiens dont les termes croissent par des différences assez petites pour qu'on puisse y trouver, au moins d'une manière suffisamment approchée, le nombre dont on cherche le logarithme. Ce nombre est alors exprimé par une puissance fractionnaire de la base, et l'exposant de cette puissance est le logarithme demandé. Afin d'appliquer sûrement la formule du binôme à l'extraction de la racine de la base, il faut supposer que cette base soit peu différente de l'unité, ce qui est toujours permis,

INTRODUCTION.

puisque dès qu'on connaît les logarithmes dans un système particulier, on les trouve aisément dans tout autre. (*Élém. d'Alg.*)

Soit donc $1 + \beta$ cette base; il viendra

$$(1 + \beta)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)\beta^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\beta^3 + \text{etc.},$$

série toujours convergente quand $m > 1$, et $\beta < 1$ (9). En l'écrivant ainsi:

$$1 + \frac{1}{m}\left\{\beta + \frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)}{2}\beta^2 + \frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{6}\beta^3 + \text{etc.}\right\},$$

on voit que

$$(1 + \beta)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{k}{m},$$

k désignant la série comprise entre les accolades, et dont la limite correspondante à m infinie (13) est

$$\beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \text{etc.}$$

Cela posé, si on représente par a un nombre quelconque, par A son logarithme, et que l'on fasse $A = \frac{n}{m}$, il en résultera d'abord

$$a = (1 + \beta)^A = (1 + \beta)^{\frac{n}{m}} = \left(1 + \frac{k}{m}\right)^n,$$

puis

$$1 + \frac{k}{m} = a^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{k}{m} = a^{\frac{1}{n}} - 1, \quad \text{ou} \quad \frac{kA}{n} = a^{\frac{1}{n}} - 1;$$

à cause que $m = \frac{n}{A}$: on aura donc $A = \frac{n}{k}(a^{\frac{1}{n}} - 1)$; et si on pose

$a = 1 + u$, en développant $(1 + u)^{\frac{1}{n}}$ au moyen de la formule du binôme, on obtiendra :

$$(1 + u)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}u + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}u^2 + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{6}u^3 + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)}{24}u^4 + \text{etc.},$$

d'où

$$A = \frac{1}{k}\left\{u - \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}u^2 + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{6}u^3 - \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)}{24}u^4 + \text{etc.}\right\}.$$

INTRODUCTION.

Mais plus on suppose le nombre m grand, plus n doit l'être, puisque A , qui est $\frac{n}{m}$, demeure le même tant que a et β ne changent point; la limite de l'accroissement de n correspond donc à celle de l'accroissement de m , et dans cette dernière circonstance, k se réduit à la série $\beta - \frac{\beta^2}{2} + \text{etc.}$, que, pour abrégé, je remplacerai par k' . Faisant ensuite n infinie, il viendra

$$A = \frac{1}{k'}\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \text{etc.}\right).$$

Voilà l'expression du logarithme de a , ou de $1 + u$, dégagée des nombres arbitraires m et n : elle ne se rapporte encore qu'au système dont la base est $1 + \beta$; mais pour une base quelconque a , le logarithme cherché sera $\frac{A}{L a}$ (*Élém. d'Alg.*), L étant la caractéristique particulière au premier système: on aura donc dans le second, en faisant $\frac{1}{k' L a} = M$,

$$1(1 + u) = M\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \text{etc.}\right),$$

résultat conforme à celui que nous avons trouvé par une voie bien différente.

Le problème inverse, où il s'agit d'exprimer le nombre par son logarithme, se résout en renversant l'équation $A = \frac{n}{k}(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ qui donne $a = \left(1 + \frac{kA}{n}\right)^n$. En développant la puissance indiquée, on trouve

$$a = 1 + \frac{n k A}{n} + \frac{n(n-1)k^2 A^2}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)k^3 A^3}{6n^3} + \text{etc.};$$

prenant la limite relative à l'accroissement de n , c'est-à-dire supposant que les produits $n, n(n-1), n(n-1)(n-2)$, etc. se réduisent chacun à leur premier terme n^2, n^3 , etc., et changeant k en k' , on aura

$$a = 1 + \frac{k'A}{1} + \frac{k'^2 A^2}{1.2} + \frac{k'^3 A^3}{1.2.3} + \frac{k'^4 A^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Mais puisque dans le système dont la base est a , on a $1 a = \frac{A}{L a}$, il s'ensuit que

$$A = L a. 1 a, \quad k' A = k' L a. 1 a = \frac{1 a}{M}, \quad \text{à cause que } M = \frac{1}{k' L a};$$

et substituant cette valeur de $k' A$ dans la série précédente, il vient

$$a = 1 + \left(\frac{1 a}{M}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{1 a}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{1 a}{M}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{1 a}{M}\right)^4 + \text{etc.},$$

comme dans le n° 28.

Pour déterminer M , il suffit de chercher le nombre dont il exprime le logarithme. En représentant ce nombre par e , on fera $a = e$, $1a = 1e = M$, et l'on aura

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.},$$

de même que dans le n° 22.

Enfin on passera du développement de a à celui de a^x , en substituant à $1a$, le logarithme de a^x , qui est $x \cdot 1a$; et il en résultera, ainsi que dans le n° 22,

$$a^x = 1 + \frac{1}{1} \frac{x}{e} + \left(\frac{1}{1e}\right)^2 \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{1}{1e}\right)^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.} (*)$$

57. La Trigonométrie a fait connaître un genre de fonctions non moins utiles que celles dont nous venons de nous occuper; ce sont

Développement
des fonctions
transcendantes.
Fonctions cir-
culaires.

(*) Il n'est peut-être pas inutile, dans un Traité de la nature de celui-ci, d'expliquer ce qu'entendait Côtés, en désignant les logarithmes comme la *mesure des raisons ou des rapports*, dénomination qu'on rencontre encore quelquefois dans les ouvrages anglais. Elle est tirée d'un usage des Géomètres anciens, qui nommaient *rapport double*, *rapport triple*, etc. le produit d'un rapport multiplié une fois, deux fois, etc., par lui-même, et mesuraient ainsi par l'exposant du rapport simple, ce genre de rapports composés. Or, en observant qu'un nombre quelconque n'est autre chose que le rapport de la quantité qu'il exprime, comparée à l'unité, l'équation $a = \left(1 + \frac{k}{m}\right)^{\frac{n}{m}}$ décompose le nombre a , ou le rapport $\frac{a}{1}$, en un

nombre n de rapports $\frac{1}{1} + \frac{k}{m}$. Pour un autre nombre a' , on aurait de même $a' = \left(1 + \frac{k}{m}\right)^{\frac{n'}{m}}$; le rapport $\frac{a'}{a}$ serait exprimé par $\left(1 + \frac{k}{m}\right)^{\frac{n'-n}{m}}$, et comparé par conséquent au rapport simple $1 + \frac{k}{m}$. Les exposants n , n' et $n'-n$, marquent donc le degré de multiplicité respectif des rapports $\frac{a}{1}$, $\frac{a'}{1}$, $\frac{a'}{a}$; mais A , A' et $A'-A$, désignant les logarithmes des nombres a , a' et $\frac{a'}{a}$, on a

$$A = \frac{n}{m}, \quad A' = \frac{n'}{m}, \quad A' - A = \frac{n' - n}{m};$$

ces logarithmes sont donc proportionnels aux nombres n , n' , $n'-n$, qui expriment les degrés respectifs de multiplicité des rapports $\frac{a}{1}$, $\frac{a'}{1}$, $\frac{a'}{a}$.

En prenant pour exemple les logarithmes ordinaires des nombres 2 et 3, on trouve

$$\frac{n}{m} = \frac{3010300}{1000000}, \quad \frac{n'}{m} = \frac{4771213}{1000000};$$

les sinus et les cosinus des arcs de cercle. Je vais montrer qu'on peut non-seulement les développer en série, mais encore trouver leurs propriétés les plus remarquables, en partant des formules données dans presque tous les livres élémentaires, pour calculer les sinus et les cosinus de la somme et de la différence de deux arcs.

Je commence par la recherche de $\cos x$, et je suppose que x se change en $x+u$ et en $x-u$; les formules citées donnent dans ces deux cas,

$$\begin{aligned} \cos(x+u) &= \cos x \cos u - \sin x \sin u \quad (*) \\ \cos(x-u) &= \cos x \cos u + \sin x \sin u. \end{aligned}$$

Si on ajoute ces deux équations, il viendra

$$\cos(x+u) + \cos(x-u) = 2 \cos x \cos u.$$

Soit maintenant

$$\cos x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \text{etc.},$$

on aura

$$\begin{aligned} \cos u &= A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + A_4 u^4 + \text{etc.} \\ \cos(x+u) &= A_0 + A_1(x+u) + A_2(x+u)^2 + A_3(x+u)^3 + A_4(x+u)^4 + \text{etc.} \\ \cos(x-u) &= A_0 + A_1(x-u) + A_2(x-u)^2 + A_3(x-u)^3 + A_4(x-u)^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

En substituant ces séries dans l'équation

$$\cos(x+u) + \cos(x-u) = 2 \cos x \cos u,$$

tous les termes affectés des puissances impaires de u disparaîtront dans

$$\text{d'où il suit} \quad \frac{2}{1} = \left\{ (10) \frac{1}{10000000} \right\}^{2010300}, \quad \frac{3}{1} = \left\{ (10) \frac{1}{10000000} \right\}^{4771213}$$

C'est au rapport $(10) \frac{1}{10000000}$ que sont comparés les rapports composés $\frac{2}{1}$ et $\frac{3}{1}$. Ils ne sont encore mesurés que par approximation; car, quelque peu différent de l'unité que soit le nombre $(10) \frac{1}{10000000}$, il y a toujours un intervalle entre chacune de ses diverses puissances; mais cet intervalle diminue sans cesse à mesure qu'on augmente le degré de la racine extraite de la base, ou le nombre m ; et par conséquent la limite de l'équation générale $a = \left(1 + \frac{k}{m}\right)^n$ convient rigoureusement au système de logarithmes caractérisé par le nombre k' . L'inverse $\frac{1}{k'}$, ou M , est appelé par Côtés la *raison modulaire*.

(*) Dans tout ce qui va suivre je suppose le rayon égal à l'unité: si on voulait lui donner une autre valeur, il suffirait d'introduire la lettre qui le représente, de manière à rendre homogènes les formules trouvées dans la première hypothèse.

INTRODUCTION.

le développement du premier membre; il est donc inutile de les faire entrer dans le second, et par conséquent on peut, sans diminuer la généralité des suppositions, faire A_1, A_3, A_5 , etc. égaux à zéro, ce qui réduira l'expression de $\cos x$ à ne contenir que des puissances paires de x . Il suit de là que $\cos x$ ne change point lorsqu'on écrit $-x$ au lieu de x ; or c'est ce qu'il est facile de voir *a priori*, 1°. par les équations d'où nous sommes partis, dans lesquelles $\cos u$ reste le même, quoique l'arc u soit positif dans la première et négatif dans la seconde; 2°. en observant que le cosinus d'un arc ne change point, soit qu'on prenne cet arc au-dessus ou au-dessous du diamètre.

$$\begin{aligned} \text{Nous aurons} \quad \begin{cases} \cos x &= A_0 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \text{etc.} \\ \cos u &= A_0 + A_2 u^2 + A_4 u^4 + A_6 u^6 + \text{etc.} \\ \cos(x+u) &= A_0 + A_2(x+u)^2 + A_4(x+u)^4 + A_6(x+u)^6 + \text{etc.} \\ \cos(x-u) &= A_0 + A_2(x-u)^2 + A_4(x-u)^4 + A_6(x-u)^6 + \text{etc.} \end{cases} \end{aligned}$$

et l'équation $\cos(x+u) + \cos(x-u) = 2\cos x \cos u$ donnera, en divisant ses deux membres par 2,

$$\begin{aligned} A_0 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \dots + A_n x^n + \text{etc.} \\ + A_2 u^2 + 6A_4 u^2 x^2 + 15A_6 u^2 x^4 + \dots + \frac{n(n-1)}{2} A_n u^2 x^{n-2} + \text{etc.} \\ + A_4 u^4 + 15A_6 u^4 x^2 + \dots + \dots + \dots + \text{etc.} \\ + A_6 u^6 + \dots + \dots + \dots + \text{etc.} \\ \left\{ \begin{aligned} &+ A_0 A_2 x^2 + A_0 A_4 x^4 + A_0 A_6 x^6 + \dots + \dots + A_n A_2 x^n + \text{etc.} \\ &+ A_2 A_0 u^2 + A_2 A_2 u^2 x^2 + A_2 A_4 u^2 x^4 + \dots + \dots + A_n A_0 u^2 x^{n-2} + \text{etc.} \\ &+ A_4 A_0 u^4 + A_4 A_2 u^4 x^2 + A_4 A_4 u^4 x^4 + \dots + \dots + \dots + \text{etc.} \\ &+ A_6 A_0 u^6 + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \text{etc.} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

En comparant les termes affectés des mêmes puissances de x et de u , on aura d'abord $A_0 = A_0$ ou $A_0 = 1$, valeur qui rend la première ligne du premier membre, identique avec celle du second; passant ensuite aux secondes lignes, on trouve

$$\begin{aligned} A_2 &= A_2, \\ 6A_4 &= A_2 A_2, \\ 15A_6 &= A_2 A_4, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{n(n-1)}{2} A_n &= A_2 A_{n-2}, \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} A_4 &= A_2, \\ A_6 &= \frac{2A_2^2}{3.4}, \\ &\dots \dots \dots \\ A_n &= \frac{\frac{n}{2}-1}{3.4.5 \dots n} A_2^{\frac{n}{2}} \end{aligned} \right. \quad \text{d'où il suit} \quad \left\{ \begin{aligned} A_2 &= A_2, \\ A_4 &= \frac{2A_2^2}{3.4}, \\ A_6 &= \frac{4A_2^3}{3.4.5.6}, \\ &\dots \dots \dots \\ A_n &= \frac{\frac{n}{2}-1}{3.4.5 \dots n} A_2^{\frac{n}{2}} \end{aligned} \right.$$

INTRODUCTION.

Tous les coefficients sont déterminés à l'exception de A_0 , et les équations qui résulteraient de la comparaison des autres lignes sont satisfaites par les valeurs précédentes. En effet on peut donner à l'expression du coefficient A_n

la forme suivante : $A_n = \frac{2^{\frac{n}{2}} A_2^{\frac{n}{2}}}{2.3 \dots n}$, en multipliant son numérateur et son dénominateur par 2; et il sera facile d'en déduire

$$\begin{aligned} A_{m+n} &= \frac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{2.3 \dots (m+n)} \\ A_m A_n &= \frac{2^{\frac{m}{2}} A_2^{\frac{m}{2}}}{2.3 \dots m} \times \frac{2^{\frac{n}{2}} A_2^{\frac{n}{2}}}{2.3 \dots n} \end{aligned}$$

Mais le produit $u^m x^n$ faisant partie, dans le premier membre, du développement de $(x+u)^{m+n}$, a pour coefficient

$$\frac{(m+n)!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+n-1) \cdot (m+n)} A_{m+n},$$

ou bien, en mettant pour A_{m+n} sa valeur, et en effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur,

$$\frac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{1.2.3 \dots m \times 1.2.3 \dots n},$$

or ce résultat est précisément la valeur que nous avons trouvée plus haut pour $A_m A_n$, coefficient de $u^m x^n$ dans le second membre.

Il est donc rigoureusement prouvé que

$$\cos x = 1 + \frac{2A_2 x^2}{1.2} + \frac{2^2 A_2^2 x^4}{1.2.3.4} + \frac{2^3 A_2^3 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

58. Nous trouverons d'une manière semblable l'expression du sinus; car en retranchant l'une de l'autre les équations

$$\begin{cases} \cos(x+u) = \cos x \cos u - \sin x \sin u \\ \cos(x-u) = \cos x \cos u + \sin x \sin u, \end{cases}$$

nous aurons $\cos(x+u) - \cos(x-u) = -2 \sin x \sin u$.

Si on met au lieu de $\cos(x+u)$ et de $\cos(x-u)$ les valeurs déduites de l'article précédent, on verra que tous les termes affectés des puissances paires de u se détruisent mutuellement. Il suit de là qu'elles ne

INTRODUCTION.

doivent pas entrer dans l'expression du sinus; et on le voit bien d'ailleurs, puisqu'il change de signe sans changer de valeur, lorsqu'on prend le même arc négativement, c'est-à-dire d'un autre côté du diamètre, propriété qui ne saurait convenir qu'aux puissances impaires.

On supposera donc $\sin x = B_1x + B_3x^3 + B_5x^5 + B_7x^7 + \text{etc.}$

$$\sin u = B_1u + B_3u^3 + B_5u^5 + B_7u^7 + \text{etc.};$$

à l'aide de ces valeurs et des réductions qui s'offriront naturellement, l'équation $\cos(x+u) - \cos(x-u) = -2\sin x \sin u$ deviendra

$$\begin{aligned} & 2A_2ux + 4A_4u^2x^3 + 6A_6u^4x^5 + \dots + nA_nu^{n-1}x^{n-1} + \text{etc.} \\ & + 4A_4u^3x + 20A_8u^5x^3 + \dots + \text{etc.} \\ & + 6A_6u^5x + \dots + \text{etc.} \\ & \left\{ \begin{aligned} & B_1B_1ux + B_1B_3ux^3 + B_1B_5ux^5 + \dots + B_1B_{n-1}ux^{n-1} + \text{etc.} \\ & + B_3B_1u^3x + B_3B_3u^3x^3 + \dots + B_3B_{n-3}u^3x^{n-3} + \text{etc.} \\ & + B_5B_1u^5x + \dots + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \\ & = - \end{aligned}$$

La première ligne du premier membre, comparée terme à terme avec celle du second, donne

$$\left\{ \begin{aligned} B_1B_1 &= -2A_2 \\ B_1B_3 &= -4A_4 \\ B_1B_5 &= -6A_6 \\ &\dots\dots\dots \\ B_1B_{n-1} &= -nA_n \end{aligned} \right\} \text{ et par conséquent } \left\{ \begin{aligned} B_1 &= -\frac{2A_2}{B_1} \\ B_3 &= -\frac{4A_4}{B_1} \\ B_5 &= -\frac{6A_6}{B_1} \\ &\dots\dots\dots \\ B_{n-1} &= -\frac{nA_n}{B_1} \end{aligned} \right.$$

Les autres lignes ne fournissent plus que des équations identiques; car le produit $u^n x^n$ aura pour coefficient dans le premier membre, d'après l'article précédent, $\frac{m+n}{2} \cdot \frac{A_m}{2} \times 1.2.3\dots n$, et il sera multiplié dans le second membre par $-B_m B_n = -\frac{(m+1)(n+1)A_{m+1}A_{n+1}}{B_1 B_1}$; en mettant pour A_{m+1} , A_{n+1} et B_1 leur valeur, et en effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on trouve encore comme plus haut,

$$\frac{\frac{m+n}{2} \cdot \frac{A_m}{2}}{1.2.3\dots m \times 1.2.3\dots n}.$$

INTRODUCTION.

Nous aurons donc $\sin x = -\frac{2A_2x}{B_1} - \frac{4A_4x^3}{B_1} - \frac{6A_6x^5}{B_1} - \text{etc.}$, le coefficient B_1 étant déterminé par l'équation $B_1B_1 + 2A_2 = 0$.

Si on met au lieu de A_1 , A_3 , A_5 , etc., leurs valeurs en A_2 , tirées de l'article précédent, on trouvera

$$\sin x = -\frac{2A_2x}{B_1} - \frac{2^3A_2^3x^3}{1.2.3.B_1} - \frac{2^5A_2^5x^5}{1.2.3.4.5.B_1} - \frac{2^7A_2^7x^7}{1.2.3.4.5.6.7.B_1} - \text{etc.};$$

et en substituant pour A_2 sa valeur $-\frac{B_1^2}{2}$, il viendra, après les réductions,

$$\sin x = B_1x - \frac{B_1^3x^3}{1.2.3} + \frac{B_1^5x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{B_1^7x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

59. Nous voici donc arrêtés, comme dans le cas des fonctions exponentielles, par la détermination du premier coefficient; car B_1 étant connu, il donnera la valeur de A_2 et réciproquement. De plus, si on examine la série trouvée pour $\cos x$, on verra qu'elle surpasse le rayon, ce qui ne saurait avoir lieu dans le cercle; on est donc porté à croire que A_2 doit être une quantité négative, et cela avec d'autant plus de raison que la valeur de B_1 , tirée de l'équation $B_1^2 + 2A_2 = 0$, sera imaginaire tant que A_2 sera positif. Ces difficultés vont être éclaircies par la détermination de B_1 ; et nous aurons occasion de montrer dans la suite qu'elles tiennent à ce que les équations dont nous avons fait usage pour déduire les développemens de $\cos x$ et $\sin x$, expriment des propriétés communes au cercle et à l'hyperbole.

Archimède a démontré le premier que la circonférence d'un cercle est plus petite que le contour du polygone circonscrit, et plus grande que celui du polygone inscrit d'un pareil nombre de côtés; il suit de là qu'un arc de cercle est toujours plus petit que sa *tangente trigonométrique*, et plus grand que son *sinus*; mais on sait que

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}};$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} &> x \\ \sin x &< x. \end{aligned} \right.$$

on aura donc

Pour dégager $\sin x$ dans la première des *inégalités* posées ci-dessus, on multipliera les deux membres par $\sqrt{1 - \sin^2 x}$; il viendra

$\sin x > x \sqrt{1 - \sin x^2}$, et en élevant au carré, $\sin x^2 > x^2(1 - \sin x^2)$; ajoutant de part et d'autre $x^2 \sin x^2$, on aura $(1 + x^2) \sin x^2 > x^2$; divisant par $1 + x^2$, et extrayant la racine quarrée de chaque membre, il en résultera $\sin x > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Si on développe $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ par le moyen de la formule du binôme, on aura $x \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \text{etc.} \right)$; il faudra donc, d'après ce qui précède, qu'en retranchant cette série de la valeur de $\sin x$, le résultat

$$x \left\{ \left(B_1 - \frac{B_1^3 x^2}{1.2.3} + \frac{B_1^5 x^4}{1.2.3.4.5} - \text{etc.} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 - \text{etc.} \right) \right\},$$

soit une quantité positive. Mais il suit aussi de ce qu'on a $\sin x < x$, que la différence $x \left\{ 1 - \left(B_1 - \frac{B_1^3 x^2}{1.2.3} + \frac{B_1^5 x^4}{1.2.3.4.5} - \text{etc.} \right) \right\}$, doit être positive; or ces deux conditions ne sauraient être remplies dans tous les cas, à moins qu'on n'ait $B_1 = 1$. En effet, on peut toujours donner à x une valeur assez petite pour que le premier terme de chacune des séries $1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 - \text{etc.}$,

$$B_1 - \frac{B_1^3 x^2}{1.2.3} + \frac{B_1^5 x^4}{1.2.3.4.5} - \text{etc.},$$

surpasse la somme de tous les autres, et que cette somme devienne moindre qu'une quantité donnée, quelque petite qu'elle soit, puisque le rapport des termes consécutifs est toujours décroissant (5): on pourra donc représenter la première série par $1 - d$, et la seconde par $B_1 - d'$, d et d' étant des quantités aussi petites qu'on voudra; et en vertu des conditions énoncées ci-dessus, il faudra que les valeurs de $B_1 - 1 + d - d'$ soient toutes deux positives. Maintenant supposons qu'on ait $B_1 = 1 + d$, les expressions précédentes deviendront $d + d - d'$; mais d et d' peuvent toujours être moindres que d : c'est donc alors du signe de cette quantité que dépend celui des différences que nous considérons, et par conséquent la première étant positive, la seconde sera négative, ce qui ne s'accorde pas avec l'état de la question.

B_1 ne saurait non plus être au-dessous de l'unité; car si on avait

$B_1 = 1 - d$, d deviendrait négatif dans la première formule, positif dans la seconde, et en raisonnant sur l'hypothèse actuelle comme sur la précédente, on trouverait encore deux résultats de signes différents; or comme cette circonstance ne peut pas avoir lieu, il faut en conclure que B_1 ne peut être ni plus grand ni moindre que 1, et que par conséquent $B_1 = 1$.

Puisqu'on a $B_1 = 1$, on trouvera, en vertu de l'équation $B_1 B_1 + 2A_1 = 0$, $A_1 = -\frac{1}{2}$, d'où

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Telles sont les expressions du sinus et du cosinus, développées suivant les puissances de l'arc; je montrerais plus loin comment on en peut tirer la valeur de l'arc lui-même.

40. Les considérations qui nous ont servi à déterminer B , ne sont pas particulières aux expressions dont nous nous sommes occupés dans l'article précédent; on en peut déduire un principe général, très-remarquable par ses applications à la théorie des courbes et à la mécanique.

Voici l'énoncé de ce principe :

Soient trois expressions $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{etc.}$$

$$A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + \text{etc.}$$

telles que les valeurs de la seconde se trouvent toujours comprises entre celles de la première et de la troisième : si ces deux dernières expressions ont le même premier terme, il sera nécessairement égal à celui de la seconde; c'est-à-dire qu'ayant $A = A''$, on en pourra conclure $A = A'$.

Pour le prouver, supposons qu'on ait assigné à x une valeur propre à rendre d'une petitesse donnée, la somme de tous les termes qui suivent le premier de chacune des séries proposées, et que dans cet état on les représente par $A' + d'$; si on retranche la

première de la seconde, et celle-ci de la troisième, on aura....

$A' - A + \delta' - \delta'$, résultats qui, en vertu de l'énoncé de la proposition, doivent être positifs l'un et l'autre. Mais si on pose $A'' = A$, et qu'on fasse successivement $A' = A + d$, $A'' = A - d$, on prouvera, comme précédemment, que tant que d ne sera pas nul, les valeurs des formules ci-dessus seront de signe différent : il faudra donc qu'on ait $A' = A$.

Les notions que nous avons données des limites (11 et 14) rendent encore cette proposition bien évidente et en abrègent un peu la démonstration ; car si on prend le rapport entre la première série et la troisième, on trouvera $\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}}{A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + \text{etc.}}$, fraction dont la limite est $\frac{A}{A'}$ et devient 1, si $A' = A''$. Mais puisque la seconde série est toujours comprise entre celles-ci, qui tendent sans cesse vers l'égalité, lorsque $A' = A''$, et que x va en décroissant, elle doit pouvoir s'approcher indéfiniment de l'une et de l'autre, ainsi que de leur limite commune. Il suit de là que les rapports de ces trois séries, comparées deux à deux, doivent tendre sans cesse vers l'unité ; or en divisant la seconde par la première, on a

$$\frac{A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{etc.}}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}}$$

dont la limite est $\frac{A'}{A}$: donc $\frac{A'}{A} = 1$, ou $A' = A$.

41. Les fonctions circulaires ont avec les fonctions exponentielles et logarithmiques, des relations purement analytiques, à la vérité, mais d'autant plus intéressantes qu'on en déduit avec beaucoup de facilité les propriétés les plus curieuses et les plus utiles des sinus et des cosinus. Ces relations se présentent pour ainsi dire d'elles-mêmes, quand on rapproche les séries qui expriment e^x , $\sin x$ et $\cos x$.

En effet, si l'on place ces développemens comme il suit :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.} \\ \sin x &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.} \end{aligned}$$

on verra que tous les termes compris dans les deux derniers réunis,

sont les mêmes, aux signes près, que ceux qui leur correspondent dans le premier ; mais si on substitue dans celui-ci $x\sqrt{-1}$ au lieu de x ,

$$\text{on aura, à cause de } \begin{cases} (x\sqrt{-1})^2 = -x^2 \\ (x\sqrt{-1})^3 = -x^3\sqrt{-1} \\ (x\sqrt{-1})^4 = +x^4 \\ (x\sqrt{-1})^5 = +x^5\sqrt{-1} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \text{etc.};$$

et en séparant, dans le second membre, les termes réels, des termes imaginaires, cette équation deviendra

$$\begin{aligned} e^{x\sqrt{-1}} &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} \\ &+ \left\{ \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.} \right\} \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

où l'on retrouve les développemens de $\cos x$ et de $\sin x$: il en résulte donc

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x.$$

On pourrait également substituer $-x\sqrt{-1}$ au lieu de x , dans e^x ; cela reviendrait à changer ci-dessus le signe de $\sqrt{-1}$, et donnerait

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x.$$

Si maintenant on ajoute les deux dernières équations, on obtiendra

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x, \text{ d'où } \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2};$$

et en retranchant la seconde de la première, il viendra

$$e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \sin x, \text{ d'où } \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Il serait facile de trouver les expressions analogues des autres lignes trigonométriques. On aurait celle de $\tan x$, par exemple, en substituant au lieu de $\sin x$ et $\cos x$, leur valeur dans l'équation $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$;

il viendrait alors $\operatorname{tang} x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left\{ \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} \right\}$, ou bien, en multipliant le numérateur et le dénominateur du second membre par $e^{x\sqrt{-1}}$, $\operatorname{tang} x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} \right)$.

42. La manière dont nous venons de parvenir aux expressions du sinus et du cosinus, en exponentielles imaginaires, réunit à la simplicité, l'avantage de montrer le vrai sens de ces formules : elle prouve que ce ne sont que des symboles purement algébriques, par lesquels on exprime en abrégé une suite d'opérations, ou un développement à effectuer, pour parvenir à celui du sinus ou du cosinus, et non pas une vraie valeur, puisque les termes $e^{x\sqrt{-1}}$ et $e^{-x\sqrt{-1}}$ ne sont que des expressions *analogiques* formées sur le modèle de e^x et de e^{-x} , par la substitution de $x\sqrt{-1}$ à x , et qui, n'ayant par elles-mêmes aucune valeur, ne peuvent être conçues et traduites que par leur développement.

Ce qu'on vient de lire renferme, ce me semble, la seule définition qu'on en puisse donner : on voit par là ce qu'on doit entendre des puissances dont l'exposant est imaginaire. Il n'est pas possible de les interpréter, soit par des multiplications successives, comme les puissances entières, soit par une combinaison de multiplications, d'extractions de racines, ou de divisions, comme les puissances fractionnaires et négatives ; mais seulement comme ce que devient le développement général de $(1+x)^m$, lorsqu'on y écrit, au lieu de m , un symbole imaginaire. Cette généralisation conserve encore à la fonction proposée sa propriété fondamentale, savoir, que

$$(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n},$$

puisque cette propriété a lieu dans le développement, quels que soient les symboles m et n , dès que l'on prend $A=m$, dans le n° 16. En considérant les choses sous ce point-de-vue, le seul qui soit susceptible de quelque évidence, on voit que l'on pourrait se dispenser de démontrer en particulier que la loi du coefficient du second terme du binôme a lieu dans le cas où l'exposant est imaginaire, puisque ce n'est plus alors qu'une vérité de définition. Il n'en est pas de même pour les exposants irrationnels ou transcendans ; mais outre la démonstration du n° 35, appropriée à ces cas, on peut toujours concevoir l'exposant remplacé par un nombre fractionnaire qui en différera aussi peu que l'on voudra, et par ce moyen la démonstration du n° 16 subsiste dans son entier.

45. Revenons maintenant aux équations

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x \\ e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x.$$

En prenant les logarithmes de chaque membre, on trouvera

$$x\sqrt{-1} = 1(\cos x + \sqrt{-1} \sin x), \\ -x\sqrt{-1} = 1(\cos x - \sqrt{-1} \sin x);$$

si de la première de celles-ci, on retranche la seconde, on aura

$$2x\sqrt{-1} = 1(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) - 1(\cos x - \sqrt{-1} \sin x) \\ = 1 \left\{ \frac{\cos x + \sqrt{-1} \sin x}{\cos x - \sqrt{-1} \sin x} \right\};$$

divisant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $\cos x$, et mettant pour $\frac{\sin x}{\cos x}$, sa valeur $\operatorname{tang} x$, il viendra

$$2x\sqrt{-1} = 1 \left\{ \frac{1 + \sqrt{-1} \operatorname{tang} x}{1 - \sqrt{-1} \operatorname{tang} x} \right\}.$$

Faisons maintenant $\sqrt{-1} \operatorname{tang} x = u$, nous aurons, en vertu de la série trouvée pour $1 \left(\frac{1+u}{1-u} \right)$ (29),

$$2x\sqrt{-1} = 2 \left\{ u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \text{etc.} \right\},$$

ou en remettant pour u sa valeur,

$$2x\sqrt{-1} = 2 \left\{ \sqrt{-1} \operatorname{tang} x - \frac{\sqrt{-1} \operatorname{tang}^3 x}{3} + \frac{\sqrt{-1} \operatorname{tang}^5 x}{5} - \text{etc.} \right\}$$

En supprimant le facteur commun $2\sqrt{-1}$, on obtient

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{\operatorname{tang}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tang}^5 x}{5} - \text{etc.},$$

série très-remarquable, tant par la simplicité de sa loi, que par la nature de la relation qu'elle renferme, puisqu'elle est le développement d'un arc de cercle, au moyen de sa tangente.

Représentons $\operatorname{tang} x$ par t , et nous aurons

$$x = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \text{etc.}$$

INTRODUCTION.

Si on prend pour x l'arc de 45° , dans la division de la circonférence en 360, sa tangente étant égale au rayon ou à l'unité, on trouvera

$$\text{arc de } 45^\circ = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$

Cette série n'est pas très-convergente: on en obtient une qui l'est davantage, lorsqu'on descend à l'arc de 30° dont le sinus est $\frac{1}{2}$ et par conséquent la tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$. Substituant cette valeur au lieu de t , on trouvera

$$\text{arc de } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^3} - \frac{1}{7 \cdot 3^5} + \frac{1}{9 \cdot 3^7} - \text{etc.} \right\};$$

et connaissant la longueur de l'arc de 30° , on aura celle de la circonférence, en multipliant la première par 12. C'est par la série précédente que Lagny a calculé le rapport de la circonférence au diamètre, avec 127 décimales; et il a trouvé que le diamètre étant $= 1$, la circonférence était exprimée par 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 57510 58209 74944 59250 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 52825 06647 09384 46.

Ce rapport, qui a paru pour la première fois dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1719, renfermait une faute d'impression à la 115^{me} décimale, que j'ai corrigée ici d'après l'indication donnée par M. Véga.

44. Il était possible de former des séries plus convergentes encore que celle qui exprime l'arc de 30° , en employant des arcs plus petits, dont la tangente fût donnée exactement par le calcul, celle de l'arc de 15° , par exemple; mais on tombait alors sur des nombres irrationnels de plus en plus compliqués: on en revint donc à l'arc de 45° ; mais au lieu de le calculer en une seule fois, on imagina de le décomposer en plusieurs parties, dont les tangentes fussent des nombres rationnels.

Parmi plusieurs déterminations de ce genre, on remarque d'abord celle d'Euler, qui a trouvé que l'arc de 45° est égal à la somme de deux arcs dont les tangentes respectives sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. Cette conclusion peut se vérifier en faisant $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$, dans la formule connue

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B},$$

INTRODUCTION.

qui donne alors $\tan(A+B) = 1$, d'où $A+B = 45^\circ$; et comme on a

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{etc.};$$

on en conclut

$$A+B = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 4^3} - \frac{1}{7 \cdot 4^5} + \text{etc.} \right\} \\ &+ \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^3} - \frac{1}{7 \cdot 9^5} + \text{etc.} \right\}, \end{aligned} \right.$$

formule très-aisée à mettre en nombres.

Avant qu'Euler eût publié les séries précédentes, le géomètre anglais, Machin, avait eu une idée semblable, et était parvenu dès 1706, à une valeur beaucoup plus convergente de l'arc de 45° , mais qui est restée long-temps dans l'oubli, quoique l'auteur fût connu pour avoir calculé avec cent chiffres décimaux, le rapport de la circonférence au diamètre, que Lerdolphe Van Ceulen n'avait encore poussé que jusqu'à 55. Le procédé de Machin consiste à prendre une fraction assez petite pour la tangente d'un premier arc, et à répéter cet arc autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir celui de ses multiples qui approche le plus de l'arc de 45° , puis à calculer la tangente de la différence de ces deux derniers arcs, tangente qui n'est aussi qu'une petite fraction, et dont par conséquent on obtient l'arc par une série très-convergente. On sent que ce moyen peut conduire à plusieurs résultats, aussi ne m'arrêterai-je que sur celui qui réunit le plus de simplicité et de convergence. (On peut trouver les autres dans le troisième volume des *Scriptores logarithmici*, publiés par M. Masères, et dans le deuxième volume du *Développement de la partie élémentaire des Mathématiques*, par M. Bertrand de Genève.)

En prenant $a = \frac{1}{5}$, et formant successivement

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4a = \frac{2 \tan 2a}{1 - (\tan 2a)^2} = \frac{120}{119},$$

on voit que l'arc $4a$ excède très-peu celui de 45° , puisque la tangente de l'un surpasse celle de l'autre de $\frac{1}{119}$ seulement. Faisant ensuite

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
 $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$
 $\frac{1}{256} \times \frac{1}{256} = \frac{1}{65536}$
 $\frac{1}{65536} \times \frac{1}{65536} = \frac{1}{4294967296}$

INTRODUCTION.

$\angle a = A$, et $\angle 5 = B$, on trouve pour l'arc $A - B$, que je représente par b ,

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \tan b:$$

ainsi l'arc de $45^\circ = 4a - b$; mais la tangente de a étant $\frac{1}{3}$, et celle de b , $\frac{1}{239}$, il vient

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.5} - \frac{1}{7.5} + \frac{1}{9.5} - \text{etc.}$$

$$b = \frac{1}{25q} - \frac{1}{5(25q)^3} + \frac{1}{5(25q)^5} - \frac{1}{7(25q)^7} + \text{etc.},$$

d'où il résulte

$$45, \text{ ou } 0,5 = \left\{ 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} - \text{etc.} \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \frac{1}{7(239)^7} + \text{etc.} \right) \right\}$$

Le calcul de la première série est très-facile, quand on fait attention qu'elle équivaut à

$$\frac{1}{\epsilon} \left\{ 1 - \frac{1}{3 \cdot 05} + \frac{1}{5(0.5)^2} - \frac{1}{7(0.5)^3} + \frac{1}{9(0.5)^4} - \text{etc.} \right\}$$

puis à

$$\frac{1}{5} \left\{ 1 - \frac{4}{3(100)} + \frac{4^2}{5(100)^2} - \frac{4^3}{7(100)^3} + \frac{4^4}{9(100)^4} - \text{etc.} \right\};$$

et la convergence de la seconde série paraît bien quand on la met sous la forme

$$\frac{1}{250} \left\{ 1 - \frac{1}{5(57121)} + \frac{1}{5(57121)^2} - \frac{1}{7(57121)^3} + \text{etc.} \right\}.$$

La comparaison de ces séries, avec les procédés laborieux fournis par la considération des polygones inscrits et circonscrits au cercle, est bien propre à faire sentir l'avantage de l'analyse et des calculs modernes sur les méthodes anciennes; aussi les Géomètres ne s'en sont pas tenus au rapport donné par Lagny: M. Véga, que j'ai déjà cité, auquel on doit des Tables de logarithmes très-complètes et très-intéressantes, en a calculé un autre jusqu'à 140 chiffres décimaux, et au moyen duquel il a reconnu l'erreur qui se trouvait dans le premier.

Quand on connaît la longueur de la circonférence du cercle, on en déduit aisément celle d'un arc quelconque; et avec ce secours, on peut obtenir par les formules du n° 39, qui sont très-convergentes pour de petits arcs, les sinus et les cosinus de ces arcs. On passe ensuite aux sinus

INTRODUCTION.

et aux cosinus de leurs multiples, par les formules rigoureuses trouvées dans la Trigonométrie. On peut aussi n'employer que les séries, en les préparant de manière à les rendre convergentes, ce qui se fait par des procédés souvent très-ingénieux, mais qui ne sont pas de nature à troubler place ici.

45. Les arcs de cercle sont susceptibles de deux formes d'expressions qu'il faut soigneusement distinguer. Quand on les désigne par les degrés de l'ancienne et de la nouvelle division, on ne fait qu'indiquer leurs rapports avec la circonférence, qu'on regarde comme une unité partagée en 360 parties, ou avec le quart de cercle divisé en 100. C'est ainsi qu'on en use dans tous les calculs où il n'entre que des lignes trigonométriques; mais dès que les arcs entrent par eux-mêmes dans ces calculs, c'est alors de leur longueur absolue dont il s'agit : il est donc nécessaire de savoir revenir de cette longueur, qui est exprimée en parties du rayon, à la valeur de l'arc exprimée en parties aliquotes de la circonférence. De simples proportions suffiraient pour cela, puisqu'en désignant par 2π la longueur de la circonférence, et par a celle d'un arc, le nombre de degrés de cet arc sera, dans l'ancienne division,

$$\frac{a.360^\circ}{0.8}$$

dans la nouvelle,

$$\frac{a.400^\circ}{2\pi};$$

mais les Astronomes rapportent tous les arcs à celui qui est égal en longueur au rayon du cercle, et que, par cette raison, il est bon de connaître. On en trouve la valeur par les formules ci-dessus, en y faisant $a = 1$: il vient, dans l'ancienne division,

$$\frac{360^\circ}{2\pi} = 206264.8062470964;$$

dans la nouvelle,

$$\frac{400^\circ}{2\pi} = 0,63661\ 97723\ 67581.$$

Pour l'usage ordinaire, on se borne aux valeurs suivantes :

Anc. div. $57^{\circ}17'44''$, 81; nouvelle $63^{\circ}59'66''$, 98.

Connaissant ensuite la longueur d'un arc quelconque en parties décimales du rayon, il suffit de la multiplier par l'un des deux nombres pré-

cédens, pour en déduire sa valeur soit dans l'ancienne, soit dans la nouvelle division.

On trouvera de cette manière, que l'arc égal à 0,972 du rayon, équivaut à

$0,972 \times 206264'',81 = 200489'',39$, ou $55^\circ 41'29''4$, ancienne division, $0,972 \times 63'',66198 = 61'',87944$, nouvelle division.

Ce qu'on vient de voir fournit le moyen de mesurer un angle ou arc, lorsqu'on est dépourvu d'instrumens divisés en degrés et même de tables trigonométriques; car si l'on ferme cet angle par une perpendiculaire à l'un de ses côtés, le rapport de ces deux lignes donnera la tangente; et si cette tangente est petite, la longueur de l'arc auquel elle répond se déduira facilement de la formule

$$x = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \text{etc.},$$

si aisée à retenir, et qui s'applique aussi bien aux angles voisins de l'angle droit qu'aux petits angles, parce qu'on calcule alors le complément de l'angle cherché, dont la tangente est inverse de la tangente donnée. On peut voir dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1724, l'usage que fait Lagny, de cette formule, pour l'objet proposé. Dans le cas où l'angle à mesurer ne serait pas très-petit, il serait exprimé plus commodément par son sinus ou son cosinus, au moyen de séries qu'on trouvera dans la suite; et une fois qu'on en aurait la longueur, on le convertirait en parties de la circonférence, comme il vient d'être dit.

46. Reprenons les deux équations

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

si l'on y met nx au lieu de x , on aura

$$\cos nx = \frac{e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin nx = \frac{e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

ce qui conduit aux valeurs des cosinus et des sinus d'arcs multiples.

En général ces formules donnent le moyen d'appliquer le calcul

INTRODUCTION.

algébrique aux fonctions de sinus et de cosinus; et avec leur secours on parvient aux mêmes résultats qu'on obtiendrait par les voies trigonométriques.

Comme cette matière n'est pas entièrement de notre sujet, on n'en trouvera ici que quelques exemples, mais ils suffiront pour montrer l'usage qu'on peut faire de ces formules.

Supposons qu'on demande ce que signifie le produit $\sin x \cos x$, on trouvera, en l'effectuant,

$$\sin x \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}},$$

ou

$$2 \sin x \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

mais il est aisé de voir que le second membre n'est autre chose que la valeur de $\sin 2x$, puisqu'on y parviendrait en mettant $2x$ au lieu de x , dans l'expression de $\sin x$: on aura donc $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Si on s'était proposé $\sin x \cos z$, on aurait eu

$$\sin x \cos z = \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right) \left(\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} \right),$$

d'où

$$\sin x \cos z = \frac{e^{(x+z)\sqrt{-1}} - e^{-(x+z)\sqrt{-1}} + e^{(x-z)\sqrt{-1}} - e^{-(x-z)\sqrt{-1}}}{2 \cdot 2\sqrt{-1}};$$

mais il est évident que

$$\frac{e^{(x+z)\sqrt{-1}} - e^{-(x+z)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin(x+z),$$

$$\frac{e^{(x-z)\sqrt{-1}} - e^{-(x-z)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin(x-z);$$

par conséquent

$$\sin x \cos z = \frac{1}{2} \{ \sin(x+z) + \sin(x-z) \}.$$

Cette formule se tire très-simplement, à la vérité, des valeurs connues de

$$\sin(x+z) = \sin x \cos z + \sin z \cos x,$$

$$\sin(x-z) = \sin x \cos z - \sin z \cos x,$$

en les ajoutant ensemble; mais le moyen que nous venons d'employer conduit plus aisément aux formules générales, ainsi qu'on le verra bientôt.

INTRODUCTION.

47. Puisqu'on a

$$e^{xz\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x,$$

$$e^{-xz\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x,$$

en élevant à la puissance n , les deux membres de ces équations, on trouvera

$$e^{nx\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n$$

$$e^{-nx\sqrt{-1}} = (\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n;$$

d'où

$$\cos nx = \frac{e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}}{2} = \frac{(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n + (\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n}{2}.$$

Nous voilà donc parvenus à l'expression du cosinus d'un arc multiple, d'une manière fort simple; et il faut bien faire attention que quoiqu'elle soit affectée de signes imaginaires, elle n'en est pas moins réelle; car ces signes disparaissent tous dans le développement des puissances indiquées. En effet on a

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n = \cos^n x + \frac{n}{1} \sqrt{-1} \cos^{n-1} x \sin x - \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \text{etc.}$$

$$(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n = \cos^n x - \frac{n}{1} \sqrt{-1} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \text{etc.};$$

en ajoutant le second développement au premier, et divisant par 2, on trouvera

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \text{etc.}$$

Il n'est pas besoin d'avertir que cette série sera terminée toutes les fois que n exprimera un nombre entier positif; elle suit à cet égard les mêmes lois que la formule du binôme, dont elle est tirée.

En mettant pour $e^{xz\sqrt{-1}}$ et $e^{-xz\sqrt{-1}}$ leur valeur, dans l'équation

$$\sin nx = \frac{e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$\sin nx = \frac{\{ \cos x + \sqrt{-1} \sin x \}^n - \{ \cos x - \sqrt{-1} \sin x \}^n}{2\sqrt{-1}};$$

et en développant il viendra, après avoir effacé les termes qui se dé-

INTRODUCTION.

truisent, qui sont alors les termes réels, et divisé par $2\sqrt{-1}$,

$$\sin nx = n \cos^{n-1} x \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cos^{n-3} x \sin^3 x$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^{n-5} x \sin^5 x - \text{etc.}$$

48. Dans les équations

$$e^{nx\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n$$

$$e^{-nx\sqrt{-1}} = (\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n,$$

qui servent de fondement aux résultats précédents, on peut éliminer immédiatement les exponentielles, en y mettant pour ces fonctions les valeurs que donnent les deux premières équations du n° 47, lorsqu'on y écrit nx au lieu de x ; et il vient alors

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1} \sin nx,$$

$$(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n = \cos nx - \sqrt{-1} \sin nx,$$

équations que l'on déduit immédiatement des suivantes :

$$\sin(x \pm z) = \sin x \cos z \pm \cos x \sin z,$$

$$\cos(x \pm z) = \cos x \cos z \mp \sin x \sin z,$$

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

qui renferment toute la théorie des sinus.

En décomposant dans ses facteurs le second membre de la dernière, on a

$$1 = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)(\cos x - \sqrt{-1} \sin x);$$

mais en développant le produit $(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)$, on trouve

$$\cos x \cos x - \sin x \sin x + \{\cos x \sin x + \sin x \cos x\} \sqrt{-1},$$

résultat qui donne, en vertu des deux premières équations,

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)(\cos x - \sqrt{-1} \sin x) = \cos(x+z) + \sqrt{-1} \sin(x+z).$$

On obtiendra de même

$$(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = \cos(x+z) - \sqrt{-1} \sin(x+z)$$

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)(\cos x - \sqrt{-1} \sin x) = \cos(x-z) + \sqrt{-1} \sin(x-z)$$

$$(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = \cos(x-z) - \sqrt{-1} \sin(x-z);$$

INTRODUCTION.

on peut comprendre ces quatre formules dans les deux suivantes :

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)(\cos 2x \pm \sqrt{-1} \sin 2x) = \cos(x+2) \pm \sqrt{-1} \sin(x+2)$$

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)(\cos 2x \mp \sqrt{-1} \sin 2x) = \cos(x-2) \pm \sqrt{-1} \sin(x-2).$$

Si dans la première de celles-ci, on fait successivement $2=x, 2x, 3x, \dots (n-1)x$, il en résultera

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^2 = \cos 2x \pm \sqrt{-1} \sin 2x$$

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)(\cos 2x \pm \sqrt{-1} \sin 2x) = \cos 3x \pm \sqrt{-1} \sin 3x$$

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)(\cos 3x \pm \sqrt{-1} \sin 3x) = \cos 4x \pm \sqrt{-1} \sin 4x$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)(\cos(n-1)x \pm \sqrt{-1} \sin(n-1)x) = \cos nx \pm \sqrt{-1} \sin nx;$$

et comme le second membre de chacune de ces équations est précisément le second facteur du premier membre de l'équation suivante, si l'on met, au lieu de ce facteur, la quantité qui lui est égale, on trouvera

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^2 = \cos 2x \pm \sqrt{-1} \sin 2x$$

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^3 = \cos 3x \pm \sqrt{-1} \sin 3x$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^n = \cos nx \pm \sqrt{-1} \sin nx;$$

on aura donc, comme ci-dessus, les équations

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1} \sin nx$$

$$(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n = \cos nx - \sqrt{-1} \sin nx;$$

mais alors elles ne seront prouvées que pour les cas où le nombre n est entier.

49. Les développemens de $\sin nx$ et de $\cos nx$, trouvés n° 47, résolvent complètement le problème où l'on n'a pour but que d'obtenir la valeur du sinus ou du cosinus d'un arc multiple, au moyen des puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple; et de plus, ils ne cessent pas d'être vrais, quel que soit le nombre n : seulement, ils ne se terminent pas quand ce nombre est négatif ou fractionnaire, inconvénient qui tient à la nature de la chose; mais ces mêmes développemens contiennent à-la-fois les puissances du sinus et celles du cosinus, ce qui semble une complication inutile, puisque l'une de ces quantités étant donnée par l'autre, on peut, avec le secours de l'élimination, parvenir à des formules qui ne dépendent que du sinus, ou du cosinus. Le moyen qui s'offre d'abord pour les obtenir, est de remplacer $\sin x$ par

INTRODUCTION.

$\sqrt{1 - \cos x^2}$, dans l'expression de $\cos nx$, et $\cos x$ par $\sqrt{1 - \sin^2 x}$, dans celle de $\sin nx$. La première de ces substitutions conduira toujours à une expression rationnelle, puisque $\cos nx$ ne renferme que des puissances paires de $\sin x$; et la seconde produira le même effet sur $\sin nx$, lorsque n sera un nombre impair; mais dans le cas où n serait pair, il y aurait, à tous les termes, un facteur irrationnel que l'on peut mettre tout de suite en évidence, en écrivant le développement de $\sin nx$ comme il suit :

$$\sin nx = \cos x \left\{ n \cos x^{n-2} \sin x - \frac{n(n-1)}{2} \cos x^{n-4} \sin x^3 + \text{etc.} \right\}.$$

On évite cette distinction de deux cas, en mettant l'expression de $\sin nx$ sous la forme

$$\sin nx = \sin x \left\{ n \cos x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2} \cos x^{n-3} \sin^2 x + \text{etc.} \right\},$$

dans laquelle la série renfermée entre les accolades peut toujours être dérivée rationnellement des puissances du sinus. Il serait actuellement peu commode de substituer dans cette dernière expression et dans celle de $\cos nx$, au lieu des puissances de $\sin x$, celles du binôme $1 - \cos x^2$, même pour ne former qu'un tableau des valeurs particulières de $\cos 2x$, $\cos 3x, \dots, \sin 2x, \sin 3x, \dots$; on y arrivera plus promptement au moyen de formules très-simples que je vais rapporter.

Les valeurs connues de $\cos a \cos b$ et $\cos a \sin b$ (*Traité élém. de Trigon. et d'Appl.*, etc.), lorsqu'on fait $a=x$ et $b=nx$, deviennent

$$\cos x \cos nx = \frac{1}{2} \{ \cos(n+1)x + \cos(n-1)x \},$$

$$\cos x \sin nx = \frac{1}{2} \{ \sin(n+1)x + \sin(n-1)x \},$$

d'où l'on tire

$$\cos(n+1)x = 2 \cos x \cos nx - \cos(n-1)x \dots (1),$$

$$\sin(n+1)x = 2 \cos x \sin nx - \sin(n-1)x \dots (2);$$

et prenant successivement $n=1, n=2, n=3$, etc., on déduira de ces deux dernières formules, les tables suivantes :

I.

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= 2 \cos x^2 - 1 \\
\cos 3x &= 4 \cos x^3 - 3 \cos x \\
\cos 4x &= 8 \cos x^4 - 8 \cos x^2 + 1 \\
\cos 5x &= 16 \cos x^5 - 20 \cos x^3 + 5 \cos x \\
\cos 6x &= 32 \cos x^6 - 48 \cos x^4 + 18 \cos x^2 - 1 \\
\cos 7x &= 64 \cos x^7 - 112 \cos x^5 + 56 \cos x^3 - 7 \cos x \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= \sin x (2 \cos x) \\
\sin 3x &= \sin x (4 \cos x^2 - 1) \\
\sin 4x &= \sin x (8 \cos x^3 - 4 \cos x) \\
\sin 5x &= \sin x (16 \cos x^4 - 12 \cos x^2 + 1) \\
\sin 6x &= \sin x (32 \cos x^5 - 32 \cos x^3 + 6 \cos x) \\
\sin 7x &= \sin x (64 \cos x^6 - 80 \cos x^4 + 24 \cos x^2 - 1) \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Euler, qui forma le premier ces deux tables par la méthode exposée plus haut, en exprima la loi par les formules ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\cos nx &= 2^{n-1} \cos x^n - \frac{n}{1} 2^{n-3} \cos x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} 2^{n-5} \cos x^{n-4} \\
&\quad - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{n-7} \cos x^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^{n-9} \cos x^{n-8} - \text{etc.} \\
\sin nx &= \sin x \left\{ 2^{n-1} \cos x^{n-1} - \frac{n-2}{1} 2^{n-3} \cos x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} 2^{n-5} \cos x^{n-5} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{n-7} \cos x^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^{n-9} \cos x^{n-9} - \text{etc.} \right\}
\end{aligned}$$

Il paraît que ces formules ont été trouvées d'abord par une sorte de tâtonnement, en essayant les fonctions les plus simples de l'indice n , qui, en y faisant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., pussent se changer dans les coefficients numériques des puissances correspondantes de $\cos x$; et ceux des premiers termes, qui ne sont que des puissances du nombre 2, ont d'ailleurs fait voir la nécessité d'introduire ces puissances dans les formules générales. Ces formules peuvent se vérifier facilement *a posteriori*, en substituant, dans les équations (1) et (2) (page précéd.) les suites qu'elles donnent pour $\cos(n-1)x$ et $\cos nx$,

$\sin(n-1)x$ et $\sin nx$. Il en résultera des suites précisément de même forme pour $\cos(n-1)x$ et $\sin(n+1)x$, ce qui montre que si la loi est vraie pour les nombres $n-1$ et n , elle est encore vraie pour le nombre $n+1$, et que par conséquent il suffit qu'elle soit établie par deux résultats consécutifs, dans les Tables I et II, pour qu'on puisse l'employer à continuer ces tables aussi loin qu'on voudra.

Les derniers développemens de $\cos nx$ et de $\sin nx$ doivent être bien distingués des premiers (47) : l'usage des uns exige une attention supérieure dans l'emploi des autres. Pour conduire à un résultat exact, ceux du n° 47, semblables à la formule du binôme de Newton, ne demandent que la simple substitution de la valeur assignée à n , et leurs termes s'annulent d'eux-mêmes, dès qu'on a passé ceux qui conviennent à l'expression cherchée, tandis que dans tous les cas, les formules de la page précédente se continuent à l'infini et donnent un résultat faux, à moins qu'on ne rejette les termes où l'exposant de $\cos x$ est négatif, ce que l'expression analytique ne dit pas expressément.

On en a un exemple bien simple, en faisant $n=1$, dans l'expression de $\cos nx$, qui donne la suite infinie

$$\cos x = \cos x - \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{16 \cos^3 x} - \frac{1}{32 \cos^5 x} - \text{etc.},$$

équation que les termes du second membre qui suivent le premier rendent fausse, et il en est de même dans tous les autres cas; de sorte qu'on doit toujours joindre à ces formules la restriction de ne les employer que pour des nombres entiers, et de s'arrêter aux termes où $\cos x$ est affecté d'un exposant négatif.

Cette imperfection mérite d'être remarquée, parce qu'elle prouve bien clairement le peu de fonds que l'on doit faire sur l'induction tirée de l'examen de valeurs particulières, dont le nombre, toujours limité, ne présente souvent que d'une manière incomplète la loi qui règne dans l'ensemble de toutes les valeurs de la fonction cherchée; et on voit par là combien est inexacte la marche des auteurs qui veulent établir de cette manière le développement des puissances du binôme, quoiqu'il soit assez probable que c'est d'abord ainsi que Newton y est parvenu. En effet, tant que l'on ne considère que des valeurs particulières, elles peuvent introduire dans le calcul des réductions ou des simplifications dont on ne s'aperçoit pas, et qui n'ayant pas lieu en général, changent entièrement la nature de l'expression. C'est ce qui arrive ici; et Euler, qui a

indiqué le premier cette sorte de paradoxe, en a donné aussi l'explication, en trouvant pour les développemens généraux de $\cos nx$ et de $\sin nx$, deux séries infinies, combinées de manière que dans les cas où n est entier positif, il ne reste que les expressions rapportées ci-dessus. MM. Fuss et Lagrange, en revenant sur ce sujet important, ont confirmé et simplifié beaucoup les recherches d'Euler, par des considérations qui trouveront naturellement leur place dans ce Traité, lorsque je parlerai de l'usage du calcul différentiel, pour développer les fonctions en séries.

En effet, si l'on remonte aux équations

$$\cos nx = \frac{\{\cos x + \sqrt{-1} \sin x\}^n + \{\cos x - \sqrt{-1} \sin x\}^n}{2},$$

$$\sin nx = \frac{\{\cos x + \sqrt{-1} \sin x\}^n - \{\cos x - \sqrt{-1} \sin x\}^n}{2\sqrt{-1}},$$

trouvées indépendamment d'aucune valeur particulière de x et de n ; on voit que toutes les questions qu'on peut se proposer sur le développement de $\cos nx$ et de $\sin nx$, reposent sur celui de la fonction $\{\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x\}^n$, qui prend les formes :

$$\{\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x\}^n = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x}^n,$$

$$\{\sqrt{1 - \sin^2 x} \pm \sqrt{-1} \sin x\}^n,$$

lorsqu'on en élimine $\sin x$ ou $\cos x$, et peut alors se développer en série, de quatre manières, savoir : en série descendante ou ascendante, suivant les puissances de $\cos x$, et en série descendante ou ascendante, suivant les puissances de $\sin x$.

50. Telles sont les circonstances qui ont donné lieu à la variété de formules que l'on rencontre sur ce sujet dans les différens auteurs qui s'en sont occupés, à commencer par Viète; et le premier ouvrage élémentaire où l'on a pris soin d'en rassembler le plus grand nombre, est, à ma connaissance, celui que M. Mauduit a publié en 1765, sous le titre de *Principes d'Astronomie sphérique* : on les trouve aussi presque toutes dans les *Leçons sur le Calcul des fonctions*, par M. Lagrange. Comme le lecteur pourrait être curieux de rapprocher ces diverses formules, je les ai rassemblées dans le tableau ci-joint, où

$$p = \cos x, \quad q = \sin x.$$

INTRODUCTION.

Séries descendantes.

I. n étant indifféremment impair ou pair,

$$\begin{aligned} \cos nx &= \frac{1}{2} \left\{ (2p)^n - n(2p)^{n-2} + \frac{n(n-2)}{2} (2p)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-6)}{2 \cdot 3} (2p)^{n-6} + \text{etc.} \right\} \\ \sin nx &= q \left\{ (2p)^{n-1} - (n-2)(2p)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{2} (2p)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2 \cdot 3} (2p)^{n-7} + \text{etc.} \right\} \end{aligned}$$

II. Lorsque n est impair,

$$\begin{aligned} \pm \sin nx &= \frac{1}{2} \left\{ (2q)^n - n(2q)^{n-2} + \frac{n(n-2)}{2} (2q)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-6)}{2 \cdot 3} (2q)^{n-6} + \text{etc.} \right\} \\ \pm \cos nx &= p \left\{ (2q)^{n-1} - (n-2)(2q)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{2} (2q)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2 \cdot 3} (2q)^{n-7} + \text{etc.} \right\} \end{aligned}$$

III. Lorsque n est pair,

$$\begin{aligned} \pm \cos nx &= \frac{1}{2} \left\{ (2q)^n - n(2q)^{n-2} + \frac{n(n-2)}{2} (2q)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-6)}{2 \cdot 3} (2q)^{n-6} + \text{etc.} \right\} \\ \mp \sin nx &= p \left\{ (2q)^{n-1} - (n-2)(2q)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{2} (2q)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2 \cdot 3} (2q)^{n-7} + \text{etc.} \right\} \end{aligned}$$

Séries ascendantes.

I. Lorsque n est impair,

$$\begin{aligned} \pm \cos nx &= \left\{ np - \frac{n(n^2-1)}{2 \cdot 3} p^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} p^7 + \text{etc.} \right\} \\ \sin nx &= \left\{ nq - \frac{n(n^2-1)}{2 \cdot 3} q^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} q^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} q^7 + \text{etc.} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pm \sin nx &= q \left\{ 1 - \frac{(n^2-1)}{2} p^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^4 - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} p^6 + \text{etc.} \right\} \\ \cos nx &= p \left\{ 1 - \frac{(n^2-1)}{2} q^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^4 - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} q^6 + \text{etc.} \right\} \end{aligned}$$

II. Lorsque n est pair,

$$\pm \cos nx = \left\{ 1 - \frac{n^2}{2} p^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} p^6 + \text{etc.} \right\}$$

$$\cos nx = \left\{ 1 - \frac{n^2}{2} q^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} q^6 + \text{etc.} \right\}$$

$$\mp \sin nx = q \left\{ np - \frac{n(n^2-4)}{2 \cdot 3} p^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^5 - \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} p^7 + \text{etc.} \right\}$$

$$\sin nx = p \left\{ nq - \frac{n(n^2-4)}{2 \cdot 3} q^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} q^5 - \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} q^7 + \text{etc.} \right\}$$

Ces quatorze séries peuvent se réduire à six; car toutes les séries descendantes se déduisent des deux premières, et, parmi les séries ascendantes, la première, la troisième, la cinquième et la septième donnent respectivement la deuxième, la quatrième, la sixième et la huitième. Cette transformation s'opère en introduisant au lieu de l'arc x , son complément.

Si, en désignant le quart de cercle par 1^q , on écrit $1^q - b$, au lieu de x , il viendra d'abord

$$\cos(1^q - b) = \sin b, \quad \sin(1^q - b) = \cos b;$$

mais pour savoir à quoi répondent alors $\cos nx$ et $\sin nx$, qui se changent en

$$\cos n(1^q - b) \text{ et } \sin n(1^q - b),$$

il faut distinguer les diverses formes du nombre n .

Dans le cas où ce nombre est impair, il ne peut avoir que l'une ou l'autre de ces formes: $4m+1$, ou $4m+3$. En multipliant par ces nombres l'arc $1^q - b$, et retranchant les circonférences entières, qui ne doivent compter pour rien, on trouvera (*Traité élém. de Trigonometrie et d'Appl.*),

$$\begin{aligned} \cos\{1^q - (4m+1)b\} &= \sin(4m+1)b, & \sin\{1^q - (4m+1)b\} &= \cos(4m+1)b, \\ \cos\{3^q - (4m+3)b\} &= -\sin(4m+3)b, & \sin\{3^q - (4m+3)b\} &= -\cos(4m+3)b. \end{aligned}$$

Lorsque le nombre n est pair, ses formes sont $4m$, ou $4m+2$, et produisent les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \cos(4^q - 4mb) &= \cos 4mb, & \sin(4^q - 4mb) &= -\sin 4mb, \\ \cos\{2^q - (4m+2)b\} &= -\cos(4m+2)b, & \sin\{2^q - (4m+2)b\} &= \sin(4m+2)b. \end{aligned}$$

En substituant ces expressions, classant les résultats suivant les diverses formes du nombre n , et remettant x et nx au lieu de l'arc b et de son multiple, on obtiendra les transformations citées, qui s'opèrent, comme on le voit, par le changement de $\cos x$ en $\sin x$, ou, *vice versa*, dans le second membre de chaque formule, et par celui de $\cos nx$ en $\sin nx$ dans le premier membre, mais seulement quand n est impair.

Les tables de la page 80, qui ont donné par induction les deux premières séries descendantes, donnent aussi les séries ascendantes. Il suffit pour cela d'écrire, en commençant par le dernier terme, chacun des résultats qu'elles contiennent. La première table conduit à la première et à la cinquième séries ascendantes, et la seconde table, à la troisième et à la septième séries ascendantes. Quant aux signes, le

supérieur, dans les séries où n est impair, répond au cas où ce nombre est de la forme $4m+1$, l'inférieur, au cas où il est de la forme $4m+3$; dans les formules où n est paire, cette alternative se rapporte aux formes $4m$ et $4m+2$.

51. Les développemens de $\cos nx$ et de $\sin nx$, trouvés dans le n° 47, prennent une forme très-simple quand on y introduit les puissances de la tangente; ce qui se fait en mettant $\cos x^n$ en facteur commun, d'où il résulte

$$\begin{aligned} \cos nx &= \cos x^n \left\{ 1 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{\sin x^2}{\cos x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\sin x^4}{\cos x^4} - \text{etc.} \right\}, \\ \sin nx &= \cos x^n \left\{ \frac{n \sin x}{1 \cdot \cos x} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\sin x^3}{\cos x^3} + \text{etc.} \right\}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \cos nx &= \cos x^n \left\{ 1 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \tan x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \tan x^4 - \text{etc.} \right\}, \\ \sin nx &= \cos x^n \left\{ \frac{n}{1} \tan x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \tan x^3 + \text{etc.} \right\}; \end{aligned}$$

en remplaçant $\frac{\sin x}{\cos x}$ par $\tan x$.

Si l'on divise la dernière expression de $\sin nx$ par celle de $\cos nx$, on obtiendra

$$\tan nx = \frac{\frac{n}{1} \tan x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \tan x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \tan x^5 - \text{etc.}}{1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \tan x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \tan x^4 - \text{etc.}}$$

d'où l'on conclura sans peine le développement de $\cot nx$, qui serait applicable aux valeurs quelconques du nombre n , ainsi que le précédent.

52. Si dans les expressions de $\sin nx$ et de $\cos nx$ du n° 47, on fait $x = \frac{v}{n}$, elles deviendront

$$\begin{aligned} \sin v &= n \left(\cos \frac{v}{n} \right)^{n-1} \left(\sin \frac{v}{n} \right) - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \left(\cos \frac{v}{n} \right)^{n-3} \left(\sin \frac{v}{n} \right)^3 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\cos \frac{v}{n} \right)^{n-5} \left(\sin \frac{v}{n} \right)^5 - \text{etc.} \\ \cos v &= \left(\cos \frac{v}{n} \right)^n - \frac{n(n-1)}{2} \left(\cos \frac{v}{n} \right)^{n-2} \left(\sin \frac{v}{n} \right)^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\cos \frac{v}{n} \right)^{n-4} \left(\sin \frac{v}{n} \right)^4 - \text{etc.} \end{aligned}$$

INTRODUCTION.

Les séries qui forment leurs seconds membres sont susceptibles de limites, relativement à l'accroissement de n ; car lorsque ce nombre augmente, l'arc $\frac{v}{n}$ diminue et se rapproche de plus en plus de son sinus, tandis que son cosinus converge vers le rayon ou l'unité : en écrivant donc $\frac{v}{n}$ au lieu de $\sin \frac{v}{n}$, 1 au lieu de $\cos \frac{v}{n}$, et en réduisant les produits $n, n(n-1), n(n-1)(n-2)$, etc. à leur premier terme, on aura pour la limite

$$\sin v = n \frac{v}{n} - \frac{n^3 v^3}{2 \cdot 3 \cdot n^3} + \frac{n^5 v^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 n^5} - \text{etc.} \dots = v - \frac{v^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{v^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc.}$$

$$\cos v = 1 - \frac{n^2 v^2}{2 n^2} + \frac{n^4 v^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 n^4} - \text{etc.} \dots = 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{etc.}$$

Nous voilà donc retombés dans les séries de la page 65; et on voit par là comment se vérifient l'une par l'autre, les différentes marches que nous avons suivies pour y arriver.

53. La considération des limites mène de même très-promptement à la série qui exprime l'arc par sa tangente. Pour cela, on observe que la limite du rapport de l'arc à son sinus étant l'unité, celle de $\frac{nx}{\sin nx}$, prise par rapport au décroissement de n , sera aussi l'unité; mais en vertu de l'équation

$$\sin nx = \cos x^n \left\{ \frac{n}{1} \tan x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \tan x^3 + \text{etc.} \right\} \quad (51),$$

on aura

$$\frac{nx}{\sin nx} = \frac{nx}{\cos x^n \left\{ \frac{n}{1} \tan x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \tan x^3 + \text{etc.} \right\}},$$

ou, en divisant le second membre par n ,

$$\frac{nx}{\sin nx} = \frac{x}{\cos x^n \left\{ \tan x - \frac{(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \tan x^3 + \text{etc.} \right\}}.$$

Cela posé, en passant aux limites, il faudra mettre 1, pour le premier membre, et faire $n = 0$ dans le second, en observant que $(\cos x)^n = 1$;

INTRODUCTION.

il viendra

$$1 = \frac{x}{\left\{ \tan x - \frac{\tan x^3}{3} + \text{etc.} \right\}},$$

d'où il suit, comme dans le n° 43,

$$x = \tan x - \frac{\tan x^3}{3} + \text{etc.}$$

54. Dans les articles 47 et 49, on a développé les sinus et les cosinus des arcs multiples, suivant les puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple; voici comment on peut résoudre la question inverse, c'est-à-dire celle où il s'agit d'exprimer les puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple, par les sinus et les cosinus de ses multiples :

Soit

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x = u,$$

$$\cos x - \sqrt{-1} \sin x = v,$$

on aura

$$\cos x = \frac{1}{2} (u + v), \quad \sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} (u - v),$$

et de là on tirera d'abord

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n} (u + v)^n.$$

En développant la puissance indiquée dans le second membre de cette équation, il viendra

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n} \left\{ u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2} u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} u^{n-3}v^3 + \text{etc.} \right\};$$

mais dans l'expression $(u + v)^n$ on peut changer v en u , et réciproquement, ce qui donnera

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n} \left\{ v^n + nv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{2} v^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} v^{n-3}u^3 + \text{etc.} \right\},$$

et en ajoutant ces deux résultats, on aura

$$2\cos x^n = \frac{1}{2^n} \left\{ u^n + v^n + n(u^{n-1}v + v^{n-1}u) + \frac{n(n-1)}{2} (u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} (u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3) + \text{etc.} \right\}.$$

INTRODUCTION.

On peut donner à cette équation la forme suivante :

$$2^{n+1} \cos x^n = \left\{ u^n + v^n + nuv(u^{n-1} + v^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{2} u^2 v^2 (u^{n-4} + v^{n-4}) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} (u^3 v^3 (u^{n-6} + v^{n-6}) + \text{etc.}) \right\};$$

mais en vertu du n° 47, on a

$$\cos nx = \frac{1}{2} (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n + \frac{1}{2} (\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n = \frac{1}{2} u^n + \frac{1}{2} v^n,$$

et cela, quelle que soit n : on en pourra conclure que

$$u^n + v^n = 2 \cos nx,$$

et en général

$$u^{n-m} + v^{n-m} = 2 \cos (n-m)x;$$

et de plus, il est aisé de voir que $uv = 1$: par conséquent on aura

$$2^{n+1} \cos x^n = \left\{ 2 \cos nx + 2n \cos (n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4)x + \frac{2n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cos (n-6)x + \text{etc.} \right\},$$

ou bien, en divisant tout par 2,

$$2^n \cos x^n = \left\{ \cos nx + \frac{n}{1} \cos (n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4)x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos (n-6)x + \text{etc.} \right\}.$$

En continuant cette formule comme celle du binôme de Newton, on arrivera à des cosinus d'arcs négatifs; mais ils sont précisément les mêmes que ceux des arcs positifs qui leur correspondent : on écrira donc $\cos(m-n)x$ au lieu de $\cos(n-m)x$.

La valeur que nous venons de trouver pour $\cos x^n$ n'est pas restreinte au seul cas où n est un nombre entier; elle conviendrait également à ceux où n serait fractionnaire ou négatif. Cependant dans le premier elle est susceptible d'une simplification que nous allons faire connaître.

Dans le développement de $(u+v)^n$, lorsque n est un nombre entier, les termes placés à égale distance des extrêmes ont le même coefficient; pareille chose aura lieu dans l'expression

$$\cos nx + \frac{n}{1} \cos (n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4)x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos (n-6)x + \text{etc.},$$

INTRODUCTION.

et de plus, les cosinus placés à égale distance des extrêmes de cette formule appartiennent à des arcs égaux. En effet, le terme placé à une distance m du premier étant affecté de $\cos(n-2m)x$, le dernier l'est lui-même de $\cos(n-2n)x$, ou $\cos -nx$; et en remontant vers le premier d'un nombre de rangs marqué par m , on trouvera nécessairement $\cos(-n+2m)x$, ou $\cos -(n-2m)x$: mais d'après ce qui a été dit ci-dessus, $\cos(n-2m)x$ et $\cos -(n-2m)x$ sont égaux. Il suit de là qu'il est inutile d'étendre la formule aux termes multipliés par des sinus d'arcs négatifs, puisqu'il suffit, pour en tenir compte, de prendre le double de chacun de ceux qui en contiennent de positifs.

On pourra donc, en s'arrêtant au terme où les arcs deviennent négatifs, écrire

$$2^n \cos x^n = \left\{ 2 \cos nx + \frac{n}{1} \cos (n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4)x + \text{etc.} \right\}.$$

Il faut néanmoins observer que dans le cas où n est un nombre pair, la formule a un terme moyen, également éloigné de l'un et de l'autre

$$\frac{n(n-1) \dots \left(n - \frac{n}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{n}{2}} \cos \left(n - \frac{n}{2}\right)x : \text{ce terme extrême, et représenté par}$$

$$\frac{n(n-1) \dots \left(\frac{n}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{n}{2}};$$

à cause de $\cos 0 = 1$, se réduit à 1; et parce qu'il est

unique, il ne doit pas être multiplié par 2 comme les autres, à moins qu'on n'en prenne préalablement la moitié, ou que l'on n'écrive

$$\frac{1}{2} \frac{n(n-1) \dots \left(\frac{n}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{n}{2}}.$$

On aura donc pour dernier résultat

$$2^{n-1} \cos x^n = \left\{ \cos nx + \frac{n}{1} \cos (n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4)x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos (n-6)x + \text{etc.} \right\},$$

en observant de s'arrêter, dans cette formule, lorsqu'on rencontrera 1.

INTRODUCTION.

90

un arc négatif, et de ne prendre que la moitié du coefficient du cosinus de l'arc nul qu'on trouvera, si n est pair. Avec cette attention, il sera facile de former les valeurs de la table ci-jointe :

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos x \\ 2 \cos x^2 &= \cos 2x + 1 \\ 4 \cos x^3 &= \cos 3x + 3 \cos x \\ 8 \cos x^4 &= \cos 4x + 4 \cos 2x + 3 \\ 16 \cos x^5 &= \cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x \\ 32 \cos x^6 &= \cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10 \\ 64 \cos x^7 &= \cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

55. Pour développer $\sin x^n$ on fera usage de l'équation

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} (u - v),$$

et on trouvera

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} (u - v)^n,$$

ou

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} \left\{ u^n - \frac{n}{1} u^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-2} v^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{n-3} v^3 + \text{etc.} \right\}.$$

1°. Soit n un nombre pair ou une fraction de numérateur pair; dans ce cas, $(u - v)^n = (v - u)^n$, et par conséquent on aura encore

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} (v - u)^n.$$

En développant le second membre de cette équation, qu'on ajoutera à la première, il viendra

$$2 \sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} \left\{ u^n + v^n - \frac{n}{1} (u^{n-1} v + v^{n-1} u) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (u^{n-2} v^2 + v^{n-2} u^2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (u^{n-3} v^3 + v^{n-3} u^3) + \text{etc.} \right\},$$

ou bien

$$2 \sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} \left\{ u^n + v^n - \frac{n}{1} u v (u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^2 v^2 (u^{n-4} + v^{n-4}) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 v^3 (u^{n-6} + v^{n-6}) + \text{etc.} \right\},$$

INTRODUCTION.

91

résultat qui est le même, aux signes près, que celui du n° précédent: nous pouvons donc écrire tout de suite:

$$(2\sqrt{-1})^n \sin x^n = \left\{ \cos n x - \frac{n}{1} \cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos(n-6)x + \text{etc.} \right\}.$$

L'imaginaire disparaît parce que n est un nombre pair; et on a $(2\sqrt{-1})^n = \pm 2^n$, le signe supérieur ayant lieu si n est doublement pair, c'est-à-dire multiple de 4, et le signe inférieur, s'il est simplement divisible par 2.

On fera sur le second membre de cette équation les mêmes raisonnemens que dans l'article précédent; et quand n sera un nombre entier, on en conclura qu'on peut se borner aux termes qui ne renferment que des arcs positifs, pourvu qu'on prenne le double de chacun d'eux. De plus, comme alors n est paire, il y aura un terme dégagé de cosinus qu'il ne faudra pas doubler; et en divisant tout par 2, on aura

$$\pm 2^{n-1} \sin x^n = \left\{ \cos n x - \frac{n}{1} \cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos(n-6)x + \text{etc.} \right\},$$

en observant de s'arrêter lorsqu'on trouvera un arc nul, et de ne prendre que la moitié du coefficient de ce terme.

2°. Si n est un nombre impair, il vient alors

$$(v - u)^n = -(u - v)^n;$$

par conséquent

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} (u - v)^n = -\frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} (v - u)^n,$$

ou en développant,

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} \left\{ -v^n + \frac{n}{1} v^{n-1} u - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} v^{n-2} u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^{n-3} u^3 - \text{etc.} \right\}.$$

En ajoutant ce développement de $\sin x^n$ à celui de la page 90, et faisant les réductions nécessaires, on trouvera

INTRODUCTION.

$$2 \sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} \left\{ u^n - v^n - \frac{n}{1} u v (u^{n-2} - v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^2 v^2 (u^{n-4} - v^{n-4}) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 v^3 (u^{n-6} - v^{n-6}) + \text{etc.} \right\};$$

mais par le n° 47,

$$\begin{aligned} \sin nx &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \{ (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n - (\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n \} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} (u^n - v^n), \end{aligned}$$

quelle que soit n ; ainsi on aura en général

$$u^n - v^n = 2\sqrt{-1} \sin(n-m)x,$$

et quant au produit uv , il est toujours égal à l'unité : on obtiendra par conséquent

$$2 \sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^{n-1}} \left\{ \sin nx - \frac{n}{1} \sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin(n-4)x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin(n-6)x + \text{etc.} \right\}.$$

L'imaginaire n'affecte pas plus cette formule que les précédentes; car, n étant un nombre impair,

$$(2\sqrt{-1})^{n-1} = \pm 2^{n-1},$$

le signe supérieur ayant lieu si $n-1$ est un multiple de 4, et le signe inférieur si $n-1$ est simplement un multiple de 2.

On peut encore ici se borner aux termes affectés de sinus d'arcs positifs, en doublant ces termes; car il est d'abord évident, par les mêmes raisons que précédemment, que les termes placés à égale distance des extrêmes, ont le même coefficient, et que l'un est affecté d'un arc positif, et l'autre d'un arc négatif. A la vérité, comme le nombre des termes de la formule est pair, et qu'ils sont alternativement positifs et négatifs, les termes correspondants seront de signe contraire; mais aussi le sinus de l'arc négatif est lui-même négatif, par conséquent cette différence de signe se trouve corrigée, et les termes dont il s'agit se réunissent dans un seul.

INTRODUCTION.

D'après ces considérations, et en divisant par 2, il viendra

$$\pm 2^{n-1} \sin x^n = \left\{ \sin nx - \frac{n}{1} \sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin(n-4)x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin(n-6)x + \text{etc.} \right\}.$$

On déduira aisément des deux formules de cet article, les valeurs contenues dans la table suivante :

$$\begin{array}{lcl} \sin x & = & \sin x \\ 2 \sin x^2 & = & -\cos 2x + 1 \\ 4 \sin x^3 & = & -\sin 3x + 3 \sin x \\ 8 \sin x^4 & = & \cos 4x - 4 \cos 2x + 3 \\ 16 \sin x^5 & = & \sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x \\ 32 \sin x^6 & = & -\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + 10 \\ 64 \sin x^7 & = & -\sin 7x + 7 \sin 5x - 21 \sin 3x + 35 \sin x \\ & & \text{etc.} \end{array}$$

Voilà pour les cas où n serait un nombre entier; s'il était fractionnaire, il faudrait avoir recours à la première formule du n° précédent. On y ferait $x = r^2 - z$, ce qui donnerait $\cos x = \sin z$, et par conséquent l'expression de $\cos x^n$ par les cosinus des multiples de x , serait celle de $\sin z^n$ par les cosinus des multiples de $r^2 - z$, ou du complément de l'arc z .

56. Le développement de $1u$, trouvé, n° 53, nous conduira à celui d'un arc de cercle, ordonné par rapport aux sinus de ses multiples. En effet, si dans

$$1u = u - u^{-1} - \left(\frac{u^2 - u^{-2}}{2} \right) + \left(\frac{u^3 - u^{-3}}{3} \right) - \left(\frac{u^4 - u^{-4}}{4} \right) + \text{etc.},$$

on fait $u = e^{\sqrt{-1}x}$, on aura

$$\begin{aligned} 1e^{\sqrt{-1}x} &= e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x} - \left(\frac{e^{2\sqrt{-1}x} - e^{-2\sqrt{-1}x}}{2} \right) + \left(\frac{e^{3\sqrt{-1}x} - e^{-3\sqrt{-1}x}}{3} \right) \\ &\quad - \left(\frac{e^{4\sqrt{-1}x} - e^{-4\sqrt{-1}x}}{4} \right) + \text{etc.}; \end{aligned}$$

mais $1 e^{\sqrt{-1}} = z \sqrt{-1}$, et par conséquent,

$$z = \frac{e^{\sqrt{-1}} - e^{-\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\sqrt{-1}} - e^{-\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{e^{3\sqrt{-1}} - e^{-3\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{e^{4\sqrt{-1}} - e^{-4\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} \right) + \text{etc.}$$

divisant les deux membres de cette équation par 2, on trouvera

$$\frac{1}{2} z = \frac{e^{\sqrt{-1}} - e^{-\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\sqrt{-1}} - e^{-\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{e^{3\sqrt{-1}} - e^{-3\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{e^{4\sqrt{-1}} - e^{-4\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right) + \text{etc.}$$

et à cause que $\begin{cases} \frac{e^{\sqrt{-1}} - e^{-\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin z \\ \frac{e^{3\sqrt{-1}} - e^{-3\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin 3z \\ \frac{e^{5\sqrt{-1}} - e^{-5\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin 5z \\ \text{etc.} \end{cases}$

il en résultera

$$\frac{1}{2} z = \sin z = \frac{1}{2} \sin 2z + \frac{1}{3} \sin 3z - \frac{1}{4} \sin 4z + \text{etc.}$$

Si l'on fait $z = 1^{\circ}$, alors $\sin 2z$, $\sin 4z$, et en général tous les sinus des multiples pairs, sont égaux à zéro; il ne reste que ceux qui sont impairs; mais il faut observer qu'ils sont alternativement positifs et négatifs: c'est-à-dire que $\sin 1^{\circ}$ étant positif, $\sin 3^{\circ}$ est négatif, $\sin 5^{\circ}$ est positif, $\sin 7^{\circ}$ est négatif, et ainsi de suite. En vertu de ces considérations, on trouvera que l'arc de

$$45^{\circ} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.},$$

résultat conforme à celui du n° 43.

57. La considération des sinus des arcs multiples conduit encore à un développement de l'arc de cercle, d'une forme très-différente du précédent, et qui est dû à Euler ainsi que la plus grande partie de ce qui concerne le calcul analytique de fonctions circulaires.

Puisqu'on a $\sin(x+z) = \sin x \cos z + \cos x \sin z$, on trouvera en faisant $z = x$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Substituant $\frac{1}{2}x$ à x , il viendra $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$. Faisant de nouveau la même substitution, on obtiendra $\sin \frac{1}{2}x = 2 \sin \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{4}x$; mettant cette valeur de $\sin \frac{1}{2}x$ dans celle de $\sin x$, il en résultera $\sin x = 4 \sin \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{4}x$; mais on

aura, en opérant comme tout-à-l'heure, $\sin \frac{1}{4}x = 2 \sin \frac{1}{8}x \cos \frac{1}{8}x$; par conséquent $\sin x = 8 \sin \frac{1}{8}x \cos \frac{1}{8}x \cos \frac{1}{8}x \cos \frac{1}{8}x$. On pourra chasser $\sin \frac{1}{8}x$ au moyen de l'équation $\sin \frac{1}{8}x = 2 \sin \frac{1}{16}x \cos \frac{1}{16}x$; par conséquent il viendra $\sin x = 16 \sin \frac{1}{16}x \cos \frac{1}{16}x \cos \frac{1}{16}x \cos \frac{1}{16}x \cos \frac{1}{16}x$.

On voit qu'en continuant de la même manière, on introduira chaque fois un nouveau cosinus, et qu'on aura en général

$$\sin x = 2^n \sin \frac{1}{2^n}x \cos \frac{1}{2^n}x \cos \frac{1}{2^n}x \cos \frac{1}{2^n}x \dots \cos \frac{1}{2^n}x.$$

Mais plus n sera grand, plus l'arc $\frac{1}{2^n}x$ sera petit, et par conséquent, moins il différera de son sinus, et plus son cosinus approchera du rayon ou de l'unité; la limite de l'expression précédente sera donc

$$\sin x = x \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \text{ etc.}$$

On tirera de là

$$x = \frac{\sin x}{\cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \text{ etc.}};$$

et à cause que $\frac{1}{\cos z} = \sec z$, on en conclura aussi

$$x = \sin x \sec \frac{1}{2}x \sec \frac{1}{4}x \sec \frac{1}{8}x \text{ etc.}$$

Ce produit converge toujours vers une valeur finie; car à mesure que l'arc devient moindre, la sécante approche du rayon ou de l'unité, ainsi les facteurs vont toujours en diminuant.

En prenant les logarithmes, on ramènerait ce résultat à la forme d'une suite ordinaire, car on trouverait

$$1x = 1 \sin x + 1 \sec \frac{1}{2}x + 1 \sec \frac{1}{4}x + 1 \sec \frac{1}{8}x + \text{etc.}$$

Ce n'est pas ici le seul exemple d'un développement exprimé par un produit composé d'une infinité de facteurs; on en connaît un assez grand nombre d'autres, dérivés des séries obtenues ci-dessus pour e^x , $\sin x$, $\cos x$, etc.; on les trouvera dans le troisième volume de cet Ouvrage, où ils seront vérifiés par divers procédés.

58. Lorsqu'on a obtenu l'expression d'une quantité par une suite ordonnée suivant les puissances d'une autre quantité, on peut renverser

suivie.

INTRODUCTION.

la question en regardant la seconde comme une fonction de la première, et chercher son développement. C'est ainsi qu'après avoir trouvé la valeur du cosinus et du sinus, au moyen des puissances de l'arc, on peut demander celle de l'arc lui-même. Les problèmes de ce genre sont l'objet du *retour des suites*. Je vais exposer d'abord le procédé que Newton, qui les résolut le premier, nous a transmis dans une de ses lettres à Oldenbourg, parce qu'il me paraît le plus naturel.

Soit x un arc de cercle, et y son sinus, on aura (59)

$$y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \text{etc.};$$

si on pouvait éliminer toutes les puissances de x , excepté la première, on obtiendrait la valeur de x en y ; or c'est à quoi on parviendra facilement de la manière suivante :

On calculera d'abord la troisième puissance de y , soit directement, soit à l'aide des formules du n° 19, et on trouvera, après les réductions, $y^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13}{120}x^7 - \text{etc.}$; éliminant, entre cette équation et la proposée, x^3 comme une inconnue particulière, il viendra

$$y + \frac{y^3}{6} = x - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{120}\right)x^5 + \left(\frac{13}{720} - \frac{1}{5040}\right)x^7 - \text{etc.},$$

ce qui donne, en réduisant,

$$y + \frac{y^3}{6} = x - \frac{5x^5}{40} + \frac{x^7}{56} - \text{etc.}$$

Formant ensuite la cinquième puissance de y , on aura $y^5 = x^5 - \frac{5x^7}{6} + \text{etc.}$; et chassant x^5 du dernier résultat, on trouvera

$$y + \frac{y^3}{6} + \frac{5y^5}{40} = x - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{56}\right)x^7 + \text{etc.},$$

ou

$$y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} = x - \frac{5x^7}{112} + \text{etc.};$$

mais on a $y^7 = x^7 - \text{etc.}$: par conséquent

$$y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \frac{5y^7}{112} = x + \text{etc.}$$

Nous voilà donc parvenus au développement de x en y , poussé

INTRODUCTION.

jusqu'à la septième puissance de y , et la marche que nous avons suivie pour y arriver est assez claire pour qu'on puisse la continuer aussi loin qu'on voudra. En calculant encore deux termes de plus, on aura

$$y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{35}{1152}y^9 + \frac{63}{2816}y^{11} + \text{etc.} = x.$$

Quoiqu'on ne voie pas tout de suite la loi des différents termes de la série précédente, on la découvrira en décomposant les coefficients et les diviseurs numériques dans leurs facteurs simples, et il viendra

$$y + \frac{y^3}{2.3} + \frac{3.y^5}{2.4.5} + \frac{3.5.y^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.y^9}{2.4.6.8.9} + \frac{3.5.7.9.y^{11}}{2.4.6.8.10.11} + \text{etc.} = x;$$

telle est l'expression de l'arc x développé suivant les puissances de son sinus y .

Cet exemple suffirait, en quelque sorte, pour faire connaître l'esprit de la méthode; nous remarquerons cependant que si on avait

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$

il faudrait, pour plus de commodité, passer la quantité déterminée a dans l'autre membre, et faire $y - a = z$, ce qui donnerait

$$z = bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$

et le résultat procéderait alors suivant les puissances de z . Sans cette précaution, chaque puissance de y produirait de nouveaux termes indépendans de x ; et il n'aurait de là une suite indéfinie pour le premier terme du développement cherché.

Si la série proposée ne renfermait pas la première puissance de x , on n'aurait que la valeur de la puissance la moins élevée, et par conséquent il faudrait extraire du résultat une racine du degré marqué par l'exposant de cette puissance, ce qui serait facile, au moyen des formules du n° 19.

Un des avantages les plus remarquables du procédé qui nous occupe, c'est de conduire directement à la forme de la série cherchée. Soit pour exemple

$$z = ax^3 + bx^2 + cx^4 + \text{etc.} :$$

il faut éliminer d'abord x^2 ; or pour cela on doit élever z à une puissance telle que le premier terme soit affecté de x^3 . Supposons que cette

condition soit remplie par le développement de z^m ; on aura nécessairement $z^m = a^m x^m + \text{etc.}$, il faudra par conséquent que $2m = 5$, ou que $m = \frac{5}{2}$. On élèvera donc la série qui exprime z à la puissance $\frac{5}{2}$, ce qu'on pourra faire commodément en lui donnant la forme suivante :

$$z = x^3 \{ a + bx + cx^2 + \text{etc.} \}, \text{ et on trouvera } z^{\frac{5}{2}} = a^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2} a^{\frac{3}{2}} b x^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{2} a^{\frac{1}{2}} b^2 x^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}$$

On chassera x^3 par cette équation; il ne restera plus que $x^{\frac{5}{2}}, x^{\frac{7}{2}}, x^{\frac{9}{2}}$, et des puissances supérieures. En élevant z au carré, on aura un résultat qui servira à l'élimination de x^4 . Cette opération peut être continuée actuellement sans difficulté, quand même il serait encore nécessaire d'élever la valeur de z à des puissances fractionnaires.

La quantité représentée par z pourrait être elle-même une série ordonnée suivant les puissances de y , sans que pour cela le procédé changât; il serait seulement nécessaire d'ordonner les développemens des différentes puissances de z par rapport à y , en repassant de la manière de ces quantités à la seconde.

Enfin si on avait deux séries telles que

$$\begin{cases} z = ax + bx^2 + cx^3 + \text{etc.} \\ t = a'x + b'x^2 + c'x^3 + \text{etc.} \end{cases}$$

on pourrait, par la même méthode, trouver le développement de z en t , et réciproquement.

Pour avoir z , par exemple, on prendra la valeur de x en t dans la seconde série, et on la substituera dans la première. Le résultat de cette opération ne contiendra plus que le carré et les puissances supérieures de x . On élèvera ensuite la seconde série au carré, et on en tirera une valeur de x^2 en t^2, x^3, x^4 , etc., qui donnera le moyen de chasser x^2 du résultat précédent: on continuant de la même manière, on se débarrassera successivement des diverses puissances de x . Le procédé que je viens d'indiquer revient à celui qu'on suit ordinairement pour l'élimination, mais avec cette différence qu'au lieu de commencer par chasser les termes dont l'exposant est le plus haut, on opère d'abord sur ceux où il est le plus petit.

Voici maintenant une formule générale qui renferme tous les cas où les exposans des puissances de x forment une progression par différences. Soit

$$y = k + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

En transposant k , et faisant, pour abrégér, $y - k = z$, on aura

$$z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.} \dots (1).$$

Calculant les valeurs de z^2, z^3, z^4, z^5 , etc., on pourra éliminer successivement x^2, x^3, x^4 , etc., comme nous l'avons pratiqué dans les exemples précédens, et on trouvera

$$x = \frac{1}{a} z - \frac{b}{a^2} z^2 + \left(\frac{2b^2 - ac}{a^3} \right) z^3 - \left(\frac{5b^3 - 5abc + a^2d}{a^4} \right) z^4 + \left(\frac{14b^4 - 21a^2b^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^2e}{a^5} \right) z^5 + \text{etc.}$$

59. On peut encore arriver au même résultat par la méthode des coefficients indéterminés, en supposant

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.},$$

et en calculant, par le moyen des formules du n° 19, les valeurs de x^2, x^3, x^4, x^5 , etc. pour les substituer dans l'équation (1). Ces opérations étant exécutées, on transposera le premier membre dans le second, et on égalera à zéro tous les termes affectés d'une même puissance de z , ce qui fournira les équations nécessaires pour déterminer les coefficients A, B, C , etc. Je ne m'arrêterai pas sur les détails de ces calculs, dont on a déjà vu un assez grand nombre d'exemples; mais je tracerai la marche de l'opération propre à tirer la valeur de z de l'équation

$$az + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.} = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{etc.},$$

formée par deux suites infinies.

Si, après avoir supposé

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.},$$

on développait actuellement les puissances de cette dernière série, soit par la formule de la page 50, soit par des multiplications successives, la substitution immédiate de ces puissances ne conduirait qu'à des résultats dépourvus de symétrie, comme celui qui termine l'article précédent, et d'après lequel il serait impossible de prolonger la valeur de x , au-delà des termes déjà trouvés. Voici un procédé qui, à la vérité, a l'inconvénient de laisser encore beaucoup de calculs à effectuer, mais qui du moins met en évidence la loi qui les lie entre eux, et le moyen de les pousser aussi loin que l'on voudra, par des formules symétriques.

Que l'on fasse d'abord

$$\begin{aligned}x &= A_1z + B_1z^2 + C_1z^3 + D_1z^4 + \text{etc.}, \\x^2 &= A_2z^2 + B_2z^3 + C_2z^4 + D_2z^5 + \text{etc.}, \\x^3 &= A_3z^3 + B_3z^4 + C_3z^5 + D_3z^6 + \text{etc.}, \\&\dots\dots\dots \\x^n &= A_nz^n + B_nz^{n+1} + C_nz^{n+2} + D_nz^{n+3} + \text{etc.},\end{aligned}$$

ensorte que les lettres A_n, B_n, C_n , etc., désignent les coefficients de la puissance n du polynome

$$A_1z + B_1z^2 + C_1z^3 + D_1z^4 + \text{etc.} = z(A_1 + B_1z + C_1z^2 + D_1z^3 + \text{etc.}),$$

et que l'on substitue dans l'équation proposée les développemens des puissances de x . En passant tous les termes dans un seul membre, il viendra

$$\begin{aligned}aA_1z + aB_1z^2 + aC_1z^3 + aD_1z^4 + \text{etc.} \\+ bA_2z^2 + bB_2z^3 + bC_2z^4 + \text{etc.} \\+ cA_3z^3 + cB_3z^4 + cD_3z^5 + \text{etc.} \\+ dA_4z^4 + \text{etc.} \\- az - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{etc.}\end{aligned} = 0;$$

d'où l'on tirera

$$\begin{aligned}aA_1 - a &= 0, \\aB_1 + bA_2 - \beta &= 0, \\aC_1 + bB_2 + cA_3 - \gamma &= 0, \\aD_1 + bC_2 + cB_3 + dA_4 - \delta &= 0, \\&\text{etc.}\end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned}A_1 &= \frac{a}{a}, \\B_1 &= \frac{\beta - bA_2}{a}, \\C_1 &= \frac{\gamma - bB_2 - cA_3}{a}, \\D_1 &= \frac{\delta - bC_2 - cB_3 - dA_4}{a},\end{aligned} \right. \text{etc.}$$

équations dont la loi est évidente et qui déterminent d'abord A_1 ; puis

B_1 par A_1 , C_1 par B_1 et A_2 , D_1 par C_1 , B_2 et A_3 ,

et ainsi de suite, de manière que chaque coefficient de la valeur de x dépend des coefficients précédens, calculés pour les puissances dont le plus haut exposant est égal au rang qu'occupe le coefficient cherché.

Les coefficients précédens se calculent par les équations placées au

bas de la page 29. Il suffit pour cela d'y changer

a, b, c, d , etc. en A_1, B_1, C_1, D_1 , etc.

puisqu'on veut former le développement de

$$(A_1 + B_1z + C_1z^2 + D_1z^3 + \text{etc.})^n = A_n + B_nz + C_nz^2 + D_nz^3 + \text{etc.} :$$

écrivant donc

A_n, B_n, C_n, D_n , etc. au lieu de A, B, C, D , etc.,

dans les équations citées, elles deviennent

$$\begin{aligned}A_n &= A_1^n, \\A_1B_n &= nB_1A_n, \\2A_1C_n &= (n-1)B_1B_n + 2nC_1A_n, \\5A_1D_n &= (n-2)B_1C_n + (2n-1)C_1B_n + 5nD_1A_n, \\4A_1E_n &= (n-3)B_1D_n + (2n-2)C_1C_n + (5n-1)D_1B_n + 4nE_1A_n, \\5A_1F_n &= (n-4)B_1E_n + (2n-5)C_1D_n + (5n-2)D_1C_n + (4n-1)E_1B_n + 5nF_1A_n, \\&\text{etc.}\end{aligned}$$

En y faisant successivement $n=2, n=3, n=4$, etc., on en tirera la valeur de A_n pour la substituer dans celle de B_n (pag. précéd.); celles de B_n et de A_n , pour les substituer dans celle de C_n , et ainsi des autres. Si l'on effectue ces calculs, en laissant, pour abréger, dans l'expression de chacun des coefficients A_1, B_1, C_1 , etc. les lettres qui désignent les coefficients précédens, et en omettant les chiffres 1, puisqu'il n'en reste pas d'autres, on trouvera

$$\begin{aligned}x &= \frac{a}{a}z + \frac{\beta - bA^2}{a}z^2 + \frac{\gamma - 2bAD - cA^3}{a}z^3 \\&+ \frac{\delta - bB^2 - 2bAC - 3cA^2B - dA^4}{a}z^4 \\&+ \frac{\epsilon - 2bBC - 2bAD - 3cAB^2 - 3cA^2C - 4dA^3B - cA^5}{a}z^5 \\&+ \frac{\zeta - 2bBD - bC^2 - 2bAE - cB^3 - 6cABC - 3cA^2D - 4dA^2B^2 - 4dA^3C - 5cA^4B - fA^6}{a}z^6 \\&+ \text{etc.},\end{aligned}$$

développement inséré par Moivre dans les *Transactions philosophiques* pour 1698 (page 190), et dont il a indiqué la loi.

La forme donnée ci-dessus aux équations d'où dépend le retour des suites, montre combien on simplifierait le calcul, par l'emploi d'un procédé propre à dériver aisément les uns des autres, les divers coefficients des puissances du polynôme $A_1 + B_1x + \text{etc.}$; et c'est aussi ce qu'ont fait les Analystes allemands qui ont tourné leurs recherches sur le développement de ces puissances; mais antérieurement à leurs travaux, on avait déduit du calcul différentiel plusieurs formules régulières pour passer d'une série à son inverse; c'est pourquoi je ne m'étendrai pas davantage, pour le moment, sur cette matière. Ceux qui voudraient faire des applications particulières, trouveront poussée jusqu'à neuf termes, dans la seconde édition de la *Trigonométrie* de M. Cagnoli (page 46), la série que j'ai rapportée page 99, et dans laquelle rentre celle de Moivre, lorsqu'on prend $\alpha = 1$, et qu'on suppose nulles les quantités β, γ, δ , etc.

Lacroix

Développement
des fonctions
données par des
équations où les
inconnues sont
radicales entre elles.

60. Jusqu'ici la forme de la série à coefficients indéterminés, propre à représenter d'abord le développement cherché, était aisée à prévoir, soit par l'examen des cas particuliers, soit par la simplicité de l'équation à laquelle il fallait satisfaire; mais quand cette équation contient des termes où la fonction et la variable dont elle dépend sont combinées entre elles, la loi que doivent suivre, dans les différens termes, les exposans de la variable, ne se découvre que par une recherche spéciale. On parviendrait bien à la trouver, en résolvant, par rapport à la fonction proposée, l'équation donnée, et en développant les radicaux compris dans l'expression de ses racines; mais ce moyen ne serait plus praticable si elle passait le quatrième degré, et deviendrait déjà très-peu commode pour le troisième, à cause de la complication des radicaux. Voyons donc comment on a surmonté cette difficulté.

Quelle que soit la forme du développement cherché, d'abord qu'on le suppose composé d'une suite de monomes, un quelconque de ses termes pourra être représenté par Ax^α , ensuite qu'on aura en général

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{etc.},$$

les exposans α, β, γ , etc. pouvant être des nombres quelconques. Cependant, lorsqu'on développe une fonction, on a presque toujours pour but d'en trouver une valeur approchée, ce qui exige que la série à laquelle on parvient soit convergente : or on ne peut remplir en général cette dernière condition que lorsque la quantité x est très-petite ou très-

grande. Dans le premier cas, il est évident que les exposans α, β, γ , etc. doivent être positifs et rangés suivant l'ordre de leurs grandeurs respectives, en commençant par le plus petit; dans le second, au contraire, ils doivent être négatifs, ou du moins finir par devenir tels, et par conséquent s'il y en a de positifs il faudra les écrire les premiers, en commençant par le plus grand.

Les méthodes analytiques d'approximation ont la plus grande analogie avec celles que l'usage des fractions décimales a introduites en Arithmétique, et qui consistent à chercher successivement les chiffres de l'espèce la plus haute, et à négliger ceux des espèces inférieures. Les nombres, par l'arrangement même des chiffres qui les expriment, sont ordonnés suivant les puissances de 10 (*); on juge de la valeur des chiffres qu'on trouve et celle des chiffres qui restent à trouver, ou qu'on néglige, par le rang qu'ils occupent, et les plus considérables se présentent les premiers : on ordonnera donc aussi les expressions algébriques afin de trouver d'abord les plus grands termes et ensuite ceux qui sont inférieurs; mais cela ne peut se faire à moins qu'on n'assigne un degré de grandeur à l'une des quantités qui entrent dans l'expression que l'on considère.

Il ne paraît pas facile de discerner les plus grands termes dans une expression qui renferme à la fois deux variables données implicitement l'une par l'autre; telle serait, par exemple, l'équation

$$ax^{\alpha}y^{\alpha'} + bx^{\beta}y^{\beta'} + cx^{\gamma}y^{\gamma'} + \text{etc.} = 0.$$

Les quantités x et y sont liées entre elles d'une manière qui, quoique déterminée, ne permet pas de juger, à la simple inspection, comment les changemens de l'une influent sur l'autre; et il arrivera souvent qu'elles marcheront en sens inverse, ensuite que la première étant très-petite, la seconde sera très-grande, et réciproquement; ou bien que l'une décroissant très-rapidement, l'autre n'éprouvera pendant ce temps que fort peu de diminution.

Les Géomètres ont imaginé différens moyens pour distinguer parmi les termes d'une équation, ceux qui sont les plus grands. Newton inventa le parallélogramme analytique que de Gua réduisit ensuite à un

(*) Le nombre 369, 537, par exemple, n'est autre chose que

$$3(10)^3 + 4(10)^2 + 9(10)^1 + 5(10)^0 + 5(10)^{-1} + 7(10)^{-2}.$$

INTRODUCTION.

triangle : Taylor a employé une construction géométrique ; mais M. Lagrange a donné un procédé analytique très-simple et très-commode, que nous allons faire connaître.

61. Soit une équation quelconque

$$ax^m y^n + a' x^{m'} y^{n'} + a'' x^{m''} y^{n''} + a''' x^{m'''} y^{n'''} + \text{etc.} = 0;$$

on représentera par Ax^a le premier terme du développement de y , et en supposant x très-petite, il suffira d'avoir égard à ce terme qui composera la plus grande partie de la valeur de y . En le substituant à la place de cette variable, dans l'équation proposée, on trouvera

$$aA^n x^{m+na} + a'A^{n'} x^{m'+n'a} + a''A^{n''} x^{m''+n''a} + a'''A^{n'''} x^{m''' + n'''a} + \text{etc.} = 0.$$

Cette équation ne devant avoir lieu que d'une manière approchée, il faut en classer les termes suivant l'ordre de leur grandeur, marqué par l'exposant dont ils sont affectés, et ne conserver que ceux qui sont du degré le moins élevé : or cela ne se peut tant que l'exposant a est inconnu. Pour le déterminer on remarquera que l'équation que nous considérons ne saurait être satisfaite, en n'ayant égard qu'aux puissances inférieures de x , quelle que soit d'ailleurs cette variable, s'il ne s'y trouve deux termes comparables entre eux, c'est-à-dire du même degré, et dont l'exposant soit plus petit que ceux des autres.

Il s'agit donc maintenant de trouver pour a une valeur qui rende deux des nombres

$$m+na, m'+n'a, m''+n''a, m''' + n'''a, m^{iv} + n^{iv}a, \text{ etc.}$$

égaux entre eux et plus petits que tous les autres.

Chaque équation qu'on formerait en égalant deux à deux les nombres proposés, donnerait une valeur de a qui satisferait à la première condition, et qu'il faudrait substituer dans $m+na, m'+n'a, \text{ etc.}$, pour s'assurer si elle remplit la seconde ; mais en opérant ainsi, on ferait souvent beaucoup de combinaisons inutiles qu'on peut éviter, comme on va le voir.

En égalant seulement le premier terme à chacun de ceux qui le suivent, pour en tirer diverses valeurs de a , qu'on désignera par $a', a'', a''', \text{ etc.}$, il en résultera

$$a' = \frac{m'-m}{n-n'}, \quad a'' = \frac{m''-m}{n-n''}, \quad a''' = \frac{m'''-m}{n-n'''}, \quad \text{etc.}$$

INTRODUCTION.

Au lieu d'essayer ces valeurs chacune en particulier, cherchons dans la série

$$m+na, m'+n'a, m''+n''a, m''' + n'''a, \text{ etc.} \dots (1)$$

l'expression des différences entre le premier terme et chacun des autres : il viendra

$$m'-m+(n'-n)a, m''-m+(n''-n)a, m'''-m+(n'''-n)a, \text{ etc.};$$

mais au moyen des valeurs de a trouvées précédemment, on aura

$$m'-m = -a'(n'-n), \quad m''-m = -a''(n''-n), \quad m'''-m = -a'''(n'''-n), \text{ etc.}$$

et par conséquent les différences ci-dessus pourront être exprimées comme il suit :

$$(n'-n)(a-a'), \quad (n''-n)(a-a''), \quad (n'''-n)(a-a'''), \text{ etc.}$$

Si, pour abrégér, on fait $m+na = \pi$, la série (1) prendra la forme

$$\pi, \pi+(n'-n)(a-a'), \pi+(n''-n)(a-a''), \pi+(n'''-n)(a-a'''), \text{ etc.} \dots (2);$$

et comme on peut toujours ranger dans l'ordre qu'on voudra, les termes de l'équation proposée, on les écrira de manière que les nombres $n, n', n'', \text{ etc.}$ forment une progression croissante, ce qui rendra positives toutes les quantités $n'-n, n''-n, n'''-n, \text{ etc.}$ Dans cet état de choses, on voit évidemment que si on donne à a la plus grande des valeurs représentées par $a', a'', a''', \text{ etc.}$, le terme qui répond à cette valeur deviendra égal au premier π et plus petit que tous les autres. En effet, si pour fixer les idées on suppose qu'elle soit a'' , le quatrième terme de la série (2) se réduira à π , et on verra en même temps que les quantités $(n'-n)(a-a'), (n''-n)(a-a''), \text{ etc.}$ seront toutes positives.

La plus grande des quantités $a', a'', a''', \text{ etc.}$ satisfera donc aux deux conditions demandées.

Si la question proposée a encore d'autres solutions, ce ne peut être que des nombres plus petits que celui qu'on vient de trouver, car si dans la série (2) on substituait au lieu de a un nombre plus grand que a'' , qui par hypothèse surpasse les autres valeurs $a', a'', a''', \text{ etc.}$, le premier terme deviendrait moindre que tous ceux qui le suivent, et par conséquent la première condition ne serait plus remplie.

Supposons donc qu'on prenne pour α un nombre plus petit que α'' , alors les termes π , $\pi + (n' - n)(\alpha - \alpha')$, $\pi + (n'' - n)(\alpha - \alpha'')$ seront plus grands que $\pi + (n' - n)(\alpha - \alpha'')$, car la différence $\alpha - \alpha''$ sera négative et surpassera toutes les différences négatives qui pourraient se trouver parmi les précédentes; de plus elle est multipliée par la quantité $n'' - n$ qui surpasse aussi les quantités $n' - n$ et $n'' - n$, puisque les nombres n , n' , n'' forment une progression croissante. Il suit de là qu'on doit faire abstraction de tous les termes qui précèdent celui dans lequel se trouve la plus grande des valeurs α' , α'' , etc. En considérant ceux qui le suivent, on verra que les plus petits d'entre eux peuvent devenir moindres que les premiers, parce que si dans les différences $\alpha - \alpha'$, $\alpha - \alpha''$, etc. il s'en trouve qui soient négatives, comme elles seront multipliées par des nombres $n'' - n$, $n' - n$, etc. plus grands que leurs correspondants dans l'autre partie de la série, elles donneront des résultats négatifs qui surpasseront ceux qu'on aurait trouvés dans les termes qui précèdent le quatrième.

On conclura donc de là que pour obtenir une seconde solution, il ne faut avoir égard qu'au terme qui contient la plus grande valeur de α , et à ceux qui viennent après lui. Dans l'hypothèse que nous avons établie, α'' étant la plus grande valeur, le terme qui la donne est représenté par $m'' + n''\alpha$ dans la série (1); on considérera donc la nouvelle série $m'' + n''\alpha$, $m'' + n''\alpha$, $m'' + n''\alpha$, etc., et on opérera sur celle-ci comme nous avons fait sur la proposée.

Il pourrait arriver qu'une même valeur de α rendit plusieurs termes égaux au premier, dans la série (2): alors il ne faudrait partir, pour la recherche d'une nouvelle solution, que de celui de ces termes qui se trouve le plus éloigné du premier; car il est aisé de voir que tous ceux qui sont avant lui le surpasseront, lorsqu'on prendra pour α un nombre moindre que la plus grande valeur trouvée dans l'opération précédente.

Les détails de la méthode que nous venons d'exposer sont renfermés dans la règle suivante:

On égalera le premier terme de la série à chacun des suivants; on prendra la plus grande des valeurs de α , qui résulteront des équations qu'on aura formées ainsi, et ce sera la première solution de la question proposée. On partira ensuite du dernier des termes, qui, par sa comparaison avec le premier, a donné cette plus grande valeur, pour l'égalier à chacun des suivants, ce qui fera connaître de nouvelles valeurs de α , parmi lesquelles on

choisira la plus grande, qui résoudra encore la question. On partira de nouveau du terme le plus avancé de ceux qui ont donné la solution précédente, et on le comparera avec les termes ultérieurs, comme on l'a indiqué ci-dessus.

En continuant ainsi, on parviendra à trouver toutes les valeurs de α qui rendent deux ou un plus grand nombre de termes de la série (1) égaux entre eux et moindres que tous les autres.

62. Prenons pour exemple l'équation

$$a - a'x^3y + a''x^2 - a''x^2y^4 + a''x^2y^5 - a''x^2y^6 = 0.$$

En y substituant Ax^a au lieu de y , elle deviendra

$$a - a'Ax^{3+a} + a''A^2x^{2+2a} - a''A^2x^{2+4a} - 5a''A^2x^{2+5a} + a''A^2x^{2+6a} = 0;$$

et pour en connaître les plus grands termes, dans la supposition de x très-petite, il faudra déterminer a de manière à rendre deux des nombres 0 , $3+a$, $-1+2a$, $-5+4a$, $2+5a$, $-3+6a$, égaux entre eux et plus petits que les autres.

On égalera, d'après la règle, le premier terme à tous les autres, ce qui donnera successivement pour a les nombres -3 , $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{6}$, dont le plus grand, $\frac{5}{4}$, satisfait à la question. En effet, en substituant $\frac{5}{4}$ à a , les nombres proposés deviennent 0 , $\frac{17}{4}$, 0 , $\frac{6}{4}$, 0 , $\frac{33}{4}$, et les deux termes égaux sont plus petits que les autres.

On prendra ensuite le terme $-5+4a$, d'où on a tiré la solution précédente, pour le comparer aux deux suivants, $2+5a$ et $-3+6a$; il résultera de là $a = -7$ et $a = -1$. En regardant comme la plus grande de ces valeurs celle qui s'éloigne le moins du positif, on prendra $a = -1$, et on aura les six nombres 0 , 2 , -3 , -9 , -5 , -9 , parmi lesquels -9 est le plus petit. Ici l'opération est achevée, puis-que la solution qu'on vient d'obtenir est déduite de la comparaison du quatrième terme avec le dernier.

En substituant les deux valeurs de a dans l'équation proposée, elle deviendra, en vertu de la première,

$$x - a'Ax^{\frac{17}{4}} + a''A^2x^{\frac{5}{4}} - a''A^2x^{\frac{6}{4}} + a''A^2x^{\frac{33}{4}} - a''A^2x^{\frac{33}{4}} = 0;$$

et en vertu de la seconde,

$$a - d'Ax^3 + a^2A^2x^{-3} - a^3A^3x^{-9} + a^{17}A^5x^{-3} - a^7A^6x^{-9} = 0.$$

Dans le premier de ces résultats, les deux plus grands termes sont a et a^7A^6 ; dans le second, ce sont $a^7A^5x^{-3}$ et $a^7A^6x^{-9}$.

63. Pour connaître les termes les plus considérables d'une équation, dans la supposition de x très-grande, on substituera $\frac{1}{t}$ à x , et on cherchera parmi les termes de l'équation transformée ceux qui deviennent les plus grands lorsqu'on suppose la valeur de t fort petite, hypothèse qui rend celle de x très-grande.

On parviendrait directement au même but en observant qu'après la substitution de Ax^a pour y , dans l'équation proposée, les plus grands termes seront ceux qui renfermeront la plus haute puissance de x , et que par conséquent on les trouvera en déterminant a , de manière que deux des nombres de la suite $m+na, m'+n'a, m''+n''a$, etc. deviennent égaux entre eux et surpassent tous les autres. Cette dernière question se résoudra en prenant parmi les quantités a', a'', a''' , etc. du n° 61, celle qui est la plus petite, et en continuant à choisir dans chaque nouvelle série la plus petite des valeurs de a .

Dans l'exemple du numéro précédent, la plus petite des valeurs de a que nous avons trouvées d'abord, est -3 ; et elle donne les six nombres $0, 0, -7, -17, -15, -21$, dont les deux premiers, égaux entre eux, doivent être regardés comme les plus grands, puisque les autres sont négatifs. La solution -3 ayant été déduite de la comparaison du second terme de la suite proposée avec le premier, on égalera, conformément à la règle, ce second terme à chacun de ceux qui le suivent, pour obtenir une autre solution. La plus petite valeur de a tirée de cette opération sera $\frac{1}{4}$, d'où résultera cette série : $0, \frac{13}{4}, -\frac{2}{4}, -4, \frac{13}{4}, -\frac{6}{4}$, dans laquelle $\frac{13}{4}$ remplira les conditions imposées. Enfin comparant le cinquième terme de la suite proposée avec le sixième, on trouvera $a = 5$, d'où il viendra $0, 8, 9, 15, 27, 27$; et 27 satisfera encore à la question.

La substitution des trois valeurs de a dans l'équation

$$a - d'x^3y + \frac{a''y^2}{x} - \text{etc.} = 0,$$

donnera autant de résultats, qui renfermeront chacun deux termes affectés du même exposant et susceptibles de devenir plus grands que tous les autres, lorsqu'on donnera à x une valeur très-grande.

Le procédé dont nous venons de faire usage pour trouver a , dérive trop simplement de ce qui a été dit dans le n° 61, pour qu'il soit besoin de le démontrer en particulier; nous observerons que si dans la série des exposans $m+na, m'+n'a$, etc., il s'en trouvait qui renfermassent le même multiple de a , leur grandeur respective ne dépendrait que du nombre m , et que par conséquent il ne faudrait considérer que celui de ces termes dans lequel m est le plus petit, si on cherchait les moindres exposans, et au contraire celui où il est le plus grand, si on cherchait les plus hauts exposans.

64. L'exposant a du terme Ax^a , étant connu, il est facile de trouver le coefficient A ; il suffit pour cela d'égaliser à zéro tous les termes affectés du plus petit exposant, si on suppose x très-petite, ou du plus élevé, si on suppose x très-grande. Dans le premier cas, l'équation

$$a - d'Ax^{\frac{17}{4}} + a^2A^2x^{\frac{13}{4}} - a^3A^3x^{\frac{9}{4}} + a^{17}A^5x^{\frac{3}{4}} - a^7A^6x^{\frac{1}{4}} = 0 \quad (62)$$

donne $a - a^7A^6 = 0$, d'où $A = \sqrt[6]{\frac{a}{a^7}}$.

Ceux qui auront saisi l'esprit de ce qui précède, verront aisément que la supposition de x très-petite rend les termes affectés de cette variable, dans l'équation ci-dessus, si petits, qu'aucun d'eux ne peut entrer en comparaison avec les deux autres a et a^7A^6 , qui doivent par conséquent se détruire entre eux. Si on conservait quelque doute à cet égard, on le dissiperait en substituant $\frac{1}{q}$ au lieu de x , car alors on s'apercevrait qu'on peut toujours prendre le nombre q assez grand pour que la somme des termes où il entre comme diviseur, devienne d'une petitesse telle qu'on voudra.

En employant l'équation

$$a - d'Ax^a + d''A^2x^{-3} - a^2A^3x^{-9} + a^{17}A^5x^{-3} - a^7A^6x^{-9} = 0,$$

donnée par la seconde valeur de a , on aura de la même manière

$$-a^7A^6 - a^7A^6 = 0, \quad \text{d'où} \quad A = \sqrt[6]{\frac{a^7}{a^7}}.$$

cette valeur sera imaginaire tant que les deux quantités a'' et a' seront de même signe. On voit par cet exemple, qu'on obtiendra, en général, autant de développemens particuliers de y que α aura de valeurs différentes.

Ayant le premier terme Ax^α , pour trouver le second on substituera $Ax^\alpha + Bx^\beta$ au lieu de y , ou, ce qui revient au même, on changera d'abord y en $Ax^\alpha + y'$, dans l'équation proposée, puis après les réductions on écrira Bx^β pour y' , et on déterminera β et B comme on a déterminé α et A . On obtiendra le troisième en mettant $Bx^\beta + y''$ à la place de y' , dans l'équation qui contient cette nouvelle variable; les réductions étant faites, on remplacera y'' par Cx^γ , et on trouvera γ et C , comme on a trouvé α et A , β et B : l'opération, continuée de la même manière, fera connaître les termes suivans.

Cette manière de trouver, un à un, les différens termes de la valeur approchée de la fonction y , est semblable, quant au fond, à la méthode donnée par Newton pour résoudre par approximation les équations numériques. On l'emploie, avec des modifications convenables, dans beaucoup d'autres circonstances, et elle constitue ce qu'on appelle la *méthode des substitutions successives*.

65. Je prendrai pour exemple, et afin d'éclaircir quelques difficultés qu'on pourrait rencontrer dans l'application de la méthode qui nous occupe, l'équation $ax^3 + x^3y - ay^3 = 0$.

En y mettant Ax^α au lieu de y , elle deviendra

$$ax^3 + Ax^{3+\alpha} - aA^3x^{3\alpha} = 0;$$

et en déterminant α dans la supposition de x très-petite, on trouvera $\alpha = 1$, $a - aA^3 = 0$; d'où $A = 1$: le premier terme du développement de y sera donc x .

On fera ensuite $y = x + y'$, ce qui donnera la transformée

$$x^4 - 5ax^2y' + x^3y' - 5axy'^3 - ay'^3 = 0,$$

dans laquelle on changera y' en Bx^β . En cherchant toutes les valeurs dont β est susceptible, on trouvera $\beta = 2$ et $\beta = 1$; mais on voit ai-

sément qu'il faut rejeter la seconde, car dans l'hypothèse de x très-petite la série cherchée doit être ascendante, et cette condition exige que β surpasse α . La première valeur de β donne $1 - 3aB = 0$, d'où l'on tire

$$B = \frac{1}{3a} \quad \text{et} \quad Bx^\beta = \frac{x^2}{3a}.$$

Posant $y' = \frac{x^2}{3a} + y''$, on obtiendra une seconde transformée

$$\begin{aligned} \frac{x^6}{27a^2} + 3ax^2y'' + x^3y'' + \frac{x^4}{3a}y'' \\ + 5axy''^3 + x^2y''^3 + ay''^3 = 0, \end{aligned}$$

dans laquelle on changera y'' en Cx^γ , et on trouvera $\gamma = 4$, $\gamma = 1$. Il faudra, par la même raison que ci-dessus, s'en tenir à la première de ces valeurs, d'où il résultera

$$C = -\frac{1}{81a^2}, \quad Cx^\gamma = -\frac{x^4}{81a^2}.$$

Ces calculs peuvent être poussés maintenant aussi loin qu'on voudra, sans qu'il s'élève de nouvelles difficultés, et on aura pour dernier résultat

$$y = x + \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81a^2} + \frac{x^5}{243a^3} - \text{etc.}$$

L'équation proposée fournit encore trois autres séries qui naissent de la supposition de x très-grande, et qui par conséquent sont descendantes. Pour y parvenir on déterminera α dans l'équation

$$ax^5 + Ax^{3+\alpha} - aA^3x^{3\alpha} = 0,$$

de manière que les exposans qui deviennent égaux surpassent tous les autres; les valeurs de cette quantité seront alors 0 et $\frac{5}{2}$. La première donnera $A = -a$, et en cherchant les termes suivans, elle conduit à la série

$$y = -a - a^2x^{-3} - 5a^2x^{-6} - 12a^3x^{-9} - 55a^4x^{-12} - \text{etc.}$$

La seconde donne $A - aA^3 = 0$, d'où on tire $A = \pm a^{-\frac{1}{3}}$. En employant séparément chacune des deux valeurs de A , dans les opérations subséquentes, on trouvera les deux séries suivantes, qui ne diffèrent

INTRODUCTION.

que par les signes de leurs termes :

$$\begin{aligned} y &= a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}a^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} - \text{etc.}, \\ y &= -a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{8}a^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Il faut, dans la recherche de ces séries, qui sont descendantes, avoir l'attention de ne prendre parmi les valeurs qu'on trouve pour chacun des exposans β , γ , δ , etc. que celles qui sont moindres que l'exposant précédent.

Ces détails doivent suffire pour montrer comment on peut trouver les divers développemens d'une fonction implicite donnée par une équation algébrique. Il arrivera souvent que la détermination d'un ou de plusieurs coefficients A , B , C , etc. demandera qu'on résolve une équation d'un degré supérieur au premier; mais cet obstacle n'arrêtera point la méthode, parce que l'équation à résoudre ne renfermera que des quantités constantes: on pourra donc, dans les applications particulières, obtenir la valeur numérique du coefficient cherché, au moins par approximation, et dans le cas général on continuera d'opérer sur la lettre qui le représente, comme sur une quantité connue. Si on avait l'équation

$$2ax^3 + x^3 - ay^3 - axy - y^3 = 0,$$

en y supposant x très-petite, le coefficient A serait donné par l'équation

$$2a^3 - aA^3 - A^3 = 0.$$

Dans cet exemple, l'équation à résoudre étant d'un degré impair, a au moins une racine réelle; le premier terme du développement cherché se présentera donc aussi sous une forme réelle; mais si on était conduit à une équation de degré pair, soit au commencement, soit dans le cours d'un développement, il faudrait d'abord s'assurer si cette équation a des racines réelles ou non, pour connaître si ce développement est réel ou imaginaire.

Cette précaution est importante; et pour l'avoir négligée, de Gua est tombé dans une grande erreur. Elle montre avec quelle circonspection il faut traiter les séries, et combien peu on doit compter sur les conclusions qu'on en tire, lorsque la loi que suivent leurs termes n'est pas évidente, puisqu'on doit toujours craindre qu'ils ne changent de forme

INTRODUCTION.

dans la partie de la série qu'on n'a pas calculée, et que même ils n'y deviennent imaginaires.

La méthode ci-dessus peut sembler incomplète, à quelques égards, puisqu'on n'y entre dans aucun détail sur le nombre des développemens qu'on doit tirer d'une équation, d'après son degré, et sur les cas où ces développemens peuvent acquérir des termes imaginaires; mais ce détail aurait peu d'intérêt, puisqu'on emploie rarement la méthode dont il s'agit; et d'ailleurs on peut consulter le chapitre VII de l'*Introduction à l'Analyse des lignes courbes*, par Cramer, qui mettra sur la voie de ces recherches.

66. La même méthode ferait aussi connaître le développement de y sous la forme d'une fraction continue; car, après avoir trouvé le premier terme Ax^a , on pourrait supposer $y = \frac{Ax^a}{1+y}$, y' étant une quantité fort petite, puisque par l'hypothèse le terme Ax^a forme la plus grande partie de la valeur de y . Ayant substitué cette expression au lieu de y , dans l'équation proposée, et fait disparaître les dénominateurs, on obtiendra une première transformée en x et y' , dans laquelle on remplacera y' par Bx^β , et on déterminera ensuite β et B conformément à l'hypothèse établie sur le degré de grandeur de x .

On fera $y' = \frac{Bx^\beta}{1+y'}$ dans la première transformée, et il en résultera une seconde en x et y' , dans laquelle on mettra Cx^γ au lieu de y' . Ayant déterminé γ et C , comme à l'ordinaire, on posera $y'' = \frac{Cx^\gamma}{1+y''}$, ce qui donnera une troisième transformée, sur laquelle on opérera comme sur les précédentes.

En remontant des valeurs de y' , y'' , y''' , etc. à celle de y , on trouvera

$$y = \frac{Ax^a}{1 + \frac{Bx^\beta}{1 + \frac{Cx^\gamma}{1 + \frac{Dx^\delta}{1 + \text{etc.}}}}}$$

On voit qu'il doit y avoir deux espèces de développemens de cette forme: les uns ascendans, c'est-à-dire dans lesquels les exposans des puissances de x vont en augmentant, convergent vers la valeur de a

fonction y , lorsque x est très-petite; les autres, au contraire, qui sont descendants, parce que les exposants de x diminuent suivant le progrès de la fraction, ne sont convergens que dans le cas où x a une très-grande valeur.

Je laisse aux lecteurs familiarisés avec la théorie des fractions continues, le soin de s'exercer sur quelques exemples : mon but dans ce moment n'est que d'indiquer une application intéressante, sur laquelle je reviendrai avec plus de détail dans le second volume de cet Ouvrage, parce qu'elle offre un moyen très-élégant pour trouver les valeurs approchées et quelquefois exactes, des fonctions données par un genre d'équations plus difficile à résoudre que celles qui sont purement algébriques, moyen qu'on doit à M. Lagrange, ainsi que tout ce qui précède.

67. Les formules du n° 48 donnent un moyen facile de trouver, par les tables de sinus, toutes les racines des équations à deux termes. Ces équations, comprises dans la formule générale $x^n \mp a^n = 0$, se transformant en $x^n(y^n \mp 1) = 0$, lorsqu'on y fait $x = ay$, il suffit de considérer la suivante :

$$y^n \mp 1 = 0,$$

qui revient à

$$y^n = \pm 1.$$

L'expression $y = \cos z + \sqrt{-1} \sin z$ satisfait à cette équation par une détermination très-simple de l'arc z ; car on a

$$y^n = (\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n = \cos nz + \sqrt{-1} \sin nz;$$

et comme, en désignant par π la demi-circonférence, et par m un nombre entier quelconque, il vient

$$\sin m\pi = 0, \quad \cos m\pi = \pm 1,$$

selon que m est un nombre pair ou impair, on n'aura qu'à supposer $nz = m\pi$, pour obtenir $y^n = \pm 1$.

Afin de distinguer plus particulièrement le cas où m est pair, de celui où il est impair, on écrit pour le premier $2m$ au lieu de m , et pour le second $2m+1$; et on fait

$$nz = 2m\pi \quad \text{et} \quad nz = (2m+1)\pi.$$

Dans la première hypothèse, il vient

$$y = \cos \frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2m\pi}{n} \quad \text{et} \quad y^n = +1;$$

dans la seconde,

$$y = \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2m+1)\pi}{n} \quad \text{et} \quad y^n = -1.$$

Au moyen du nombre indéterminé m , chacune des expressions de y fournit toutes les valeurs dont cette quantité est susceptible; car on peut prendre successivement

$$m = 0, \quad m = 1, \quad m = 2, \quad m = 3, \quad \text{etc.}$$

La première formule donnera

$$\begin{aligned} y &= \cos 0 \cdot \pi = 1, \\ y &= \cos \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{n}, \\ y &= \cos \frac{4\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{4\pi}{n}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

et il est visible qu'on trouvera toujours des résultats différens, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à $m = n-1$; car, en supposant $m = n$, on a $y = \cos 2\pi = 1$, et on retombe sur la première des valeurs déjà obtenues; puis, en prenant $m = n+1$, il vient

$$\begin{aligned} \cos \frac{(2n+2)\pi}{n} &= \cos \left(2\pi + \frac{2\pi}{n} \right) = \cos \frac{2\pi}{n}, \\ \sin \frac{(2n+2)\pi}{n} &= \sin \left(2\pi + \frac{2\pi}{n} \right) = \sin \frac{2\pi}{n}, \end{aligned}$$

ce qui ramène à la deuxième valeur, et ainsi des autres.

La seconde expression générale de y , relative à l'équation $y^n + 1 = 0$, ne donne de même des valeurs différentes que depuis $m = 0$, jusqu'à $m = n-1$ inclusivement, puisque si on prend $m = n$, il vient

$$\begin{aligned} \cos \frac{(2n+1)\pi}{n} &= \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{n} \right) = \cos \frac{\pi}{n}, \\ \sin \frac{(2n+1)\pi}{n} &= \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{n} \right) = \sin \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

68. Non-seulement on trouvera par ce procédé, précisément les n racines de l'équation $y^n \mp 1 = 0$, mais on reconnaitra, avec un peu d'attention, que ces racines peuvent s'arranger par couples, eu réunis-

INTRODUCTION.

sant celles qui ne diffèrent que par le signe du radical $\sqrt{-1}$. En effet, puisque

$$\cos(2\pi - p) = \cos p \quad \text{et} \quad \sin(2\pi - p) = -\sin p,$$

il en résulte que

$$y = \cos \frac{(n+q)\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{(n+q)\pi}{n} = \cos \frac{(n-q)\pi}{n} - \sqrt{-1} \sin \frac{(n-q)\pi}{n};$$

or il est facile de voir que les nombres $n+q$ et $n-q$ sont tous deux pairs ou impairs en même temps : on peut donc, dans les expressions de y , rapportées ci-dessus, se borner aux multiples de π qui ne surpassent point $n\pi$, pourvu qu'on prenne le radical $\sqrt{-1}$ alternativement en $+$ et en $-$; et elles deviendront en conséquence,

$$y = \cos \frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2m\pi}{n},$$

$$y = \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2m+1)\pi}{n}.$$

Lorsque n est paire, les valeurs de m dans la première doivent être tous les nombres entiers depuis 0 jusqu'à $\frac{n}{2}$ inclusivement, et seulement jusqu'à $\frac{n-2}{2}$ dans la seconde; et quand n est impaire, l'une et l'autre doivent être poussées jusqu'à $\frac{n-1}{2}$.

Les deux valeurs comprises dans la formule

$$y = \cos \frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2m\pi}{n},$$

donnent pour facteurs du premier degré de la quantité $y^n - 1$, les deux expressions imaginaires

$$(y - \cos \frac{2m\pi}{n}) - \sqrt{-1} \sin \frac{2m\pi}{n},$$

$$(y - \cos \frac{2m\pi}{n}) + \sqrt{-1} \sin \frac{2m\pi}{n};$$

et en les multipliant, on obtient l'expression

$$y^n - 2y \cos \frac{2m\pi}{n} + 1,$$

qui comprend tous les facteurs réels du second degré.

INTRODUCTION.

On trouve de même que les facteurs du second degré de la quantité $y^n + 1$ sont

$$y^2 - 2y \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} + 1.$$

69. Voici pour servir d'exemple de la formule

$$y = \cos \frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2m\pi}{n},$$

le tableau des facteurs du premier degré contenus dans la fonction $y^6 - 1$:

$$y - 1,$$

$$y - \left(\cos \frac{2\pi}{6} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{6} \right),$$

$$y - \left(\cos \frac{4\pi}{6} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{4\pi}{6} \right),$$

$$y + 1.$$

La formule

$$y^3 - 2y \cos \frac{2m\pi}{n} + 1$$

donne les facteurs du second degré

$$y^3 - 2y + 1,$$

$$y^3 - 2y \cos \frac{2\pi}{6} + 1,$$

$$y^3 - 2y \cos \frac{4\pi}{6} + 1,$$

$$y^3 + 2y + 1.$$

Le premier et le dernier des facteurs du second degré sont les carrés des facteurs du premier degré $y - 1$ et $y + 1$, qui n'entrent qu'une fois dans la proposée; il faudra donc, lorsqu'on emploiera les facteurs du second degré, remplacer le premier et le dernier par

$$(y - 1)(y + 1), \quad \text{ou} \quad y^2 - 1.$$

On a pour la fonction $y^5 - 1$ les facteurs du premier degré

$$y - 1$$

$$y - \left(\cos \frac{2\pi}{5} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{5} \right),$$

$$y - \left(\cos \frac{4\pi}{5} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{4\pi}{5} \right).$$

Ceux du second degré sont

$$y^2 - 2y + 1,$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{2\pi}{5} + 1;$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{4\pi}{5} + 1;$$

mais il faut encore observer que le premier facteur du second degré est le carré du facteur $y - 1$, qui n'entre qu'une fois dans la fonction proposée.

Par la formule

$$y = \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2m+1)\pi}{n},$$

les facteurs du premier degré de $y^5 + 1$ sont

$$y - \left(\cos \frac{\pi}{5} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{5} \right),$$

$$y - \left(\cos \frac{3\pi}{5} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{3\pi}{5} \right),$$

$$y + 1;$$

et la formule $y^4 - 2y \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} + 1$ conduit à

$$y^2 - 2y \cos \frac{\pi}{5} + 1,$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{3\pi}{5} + 1,$$

$$y^2 + 1.$$

La fonction $y^6 + 1$ a pour facteurs du premier degré

$$y - \left(\cos \frac{\pi}{6} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{6} \right),$$

$$y - \left(\cos \frac{5\pi}{6} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{5\pi}{6} \right), \text{ ou } y \mp \sqrt{-1},$$

$$y - \left(\cos \frac{5\pi}{6} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{5\pi}{6} \right),$$

et pour facteurs du second,

$$y^2 - 2y \cos \frac{\pi}{6} + 1,$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{5\pi}{6} + 1, \text{ ou } y^2 + 1,$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{5\pi}{6} + 1.$$

70. On retrouve dans les expressions ci-dessus des valeurs de y , la propriété dont jouissent les racines imaginaires de l'unité, de se reproduire toutes par l'élevation d'une seule à ses diverses puissances. (*Compl. des Éléments d'Alg.*) En effet on a, par le n° 48,

$$\left(\cos \frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2m\pi}{n} \right)^p = \cos \frac{2pm\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2pm\pi}{n},$$

et l'expression $\cos \frac{2pm\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2pm\pi}{n}$, rentrera successivement dans chacune des valeurs particulières de $\cos \frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2m\pi}{n}$, puisque l'arc $\frac{2pm\pi}{n}$ ne pourra jamais être que la somme d'un certain nombre de circonférences et de quelqu'un des arcs $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}$, etc. La même propriété se prouverait d'une manière semblable, à l'égard de l'expression $\cos \frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2m+1)\pi}{n}$.

71. Puisque, d'après ce qui précède, la détermination des racines imaginaires de l'équation $y^n \mp 1 = 0$ dépend de la division de la circonférence du cercle dans un nombre n de parties égales, ou de l'inscription d'un polygone régulier d'un nombre n de côtés, il s'ensuit que l'on pourra obtenir rigoureusement ces racines, toutes les fois que l'exposant n sera compris dans l'une des trois progressions

$$\div 2 : 4 : 8 : 16 : \text{etc.}, \div 3 : 6 : 12 : 24 : \text{etc.}, \div 5 : 10 : 20 : 40 : \text{etc.};$$

car alors on saura construire avec la règle et le compas, ou calculer, avec des radicaux quarrés seulement, les sinus et les cosinus des arcs $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}$, etc., $\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}$, etc. Réciproquement, dans tous les cas où l'on saura trouver, par des équations du second degré, les racines imaginaires de l'équation $y^n \mp 1 = 0$, on en déduira la construction géométrique de la division de la circonférence du cercle en n parties égales; et le beau théorème découvert par M. Gauss, sur les équations à deux termes, montre que lorsque l'exposant n est un des nombres premiers compris dans la formule $2^p + 1$, ces équations se ramènent à une combinaison d'équations du second degré, ce qui fournit d'abord le cas où $n = 17$, qui n'avait point été reconnu par la géométrie élémentaire, quoiqu'il soit possible de le démontrer *à posteriori* par les cosinus. (Voyez le n° 61 du *Bulletin des Sciences*, par la Société Philomatique, et le 1^{er} cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.)

INTRODUCTION.

Mais sans sortir des considérations précédentes, on peut montrer que la connaissance des racines des équations

$$y^n - 1 = 0, \quad y^{n'} - 1 = 0$$

mène à celle des racines de l'équation

$$y^{nn'} - 1 = 0,$$

lorsque les nombres n et n' sont premiers entre eux.

Pour cela, il faut observer que

$$\begin{aligned} & \left(\cos \frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2m\pi}{n} \right) \left(\cos \frac{2m'\pi}{n'} + \sqrt{-1} \sin \frac{2m'\pi}{n'} \right) \\ &= \cos \left(\frac{2m\pi}{n} + \frac{2m'\pi}{n'} \right) + \sqrt{-1} \sin \left(\frac{2m\pi}{n} + \frac{2m'\pi}{n'} \right), \end{aligned} \quad (48)$$

et comparer ce résultat avec l'expression

$$\cos \frac{2m''\pi}{nn'} + \sqrt{-1} \sin \frac{2m''\pi}{nn'},$$

qui donne les racines de l'équation $y^{nn'} - 1 = 0$. En faisant

$$\frac{2m\pi}{n} + \frac{2m'\pi}{n'} = \frac{2m''\pi}{nn'},$$

on en déduit

$$nm + n'm' = m'';$$

et donnant à m' les valeurs 0, 1, 2, 3, etc., on parviendra nécessairement, d'après la théorie des équations indéterminées du premier degré (*Compl. des Élém. d'Alg.*), à trouver pour m et m' les valeurs entières correspondantes : on pourra par conséquent conclure $\cos \frac{2m'\pi}{nn'}, \sin \frac{2m'\pi}{nn'}$, de $\cos \frac{2m\pi}{n}, \sin \frac{2m\pi}{n}, \cos \frac{2m'\pi}{n'}, \sin \frac{2m'\pi}{n'}$.

A l'égard de l'équation $y^{nn'} + 1 = 0$, les calculs ci-dessus deviennent

$$\begin{aligned} & \left(\cos \frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2m+1)\pi}{n} \right) \left(\cos \frac{(2m'+1)\pi}{n'} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2m'+1)\pi}{n'} \right) \\ &= \cos \left(\frac{(2m+1)\pi}{n} + \frac{(2m'+1)\pi}{n'} \right) + \sqrt{-1} \sin \left(\frac{(2m+1)\pi}{n} + \frac{(2m'+1)\pi}{n'} \right) \\ &= \cos \frac{(2m''+1)\pi}{nn'} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2m''+1)\pi}{nn'}, \end{aligned}$$

INTRODUCTION.

et on a pour déterminer m et m' , l'équation

$$n'(2m+1) + n(2m'+1) = 2m'' + 1.$$

2. Les fonctions de la forme $x^{2n} - 2px^n + q$ peuvent être traitées comme celles qui ne renferment que deux termes. En les résolvant à la manière des équations du second degré, on en tirera les valeurs

$$p \pm \sqrt{p^2 - q},$$

qui seront réelles, tant que p^2 surpassera q ; et en faisant alors

$$p + \sqrt{p^2 - q} = \pm a^n,$$

$$p - \sqrt{p^2 - q} = \pm a'^n,$$

suivant le signe de ces quantités, il viendra des fonctions de la forme

$$x^n \mp a^n, \quad x^n \mp a'^n,$$

à décomposer en facteurs.

Lorsqu'on aura $p^2 < q$, on fera $p = a^n$, $q = \beta^{2n}$, $x = \beta y$, et il viendra

$$\beta^{2n} y^{2n} - 2a^n \beta^n y^n + \beta^{2n} = \beta^{2n} \left(y^{2n} - \frac{2a^n}{\beta^n} y^n + 1 \right);$$

mais la condition $p^2 < q$, ou $a^{2n} < \beta^{2n}$ donnant $a^n < \beta^n$, la quantité $\frac{a^n}{\beta^n}$ sera une fraction et pourra être représentée par le cosinus d'un arc donné δ : la fonction proposée reviendra donc à

$$\beta^{2n} (y^{2n} - 2y^n \cos \delta + 1),$$

et il ne s'agira plus que de résoudre l'équation

$$y^{2n} - 2y^n \cos \delta + 1 = 0.$$

On en tire d'abord

$$y^n = \cos \delta \pm \sqrt{-1} \sin \delta;$$

puis, prenant

$$y = \cos z \pm \sqrt{-1} \sin z,$$

il vient (48)

$$y^n = \cos nz \pm \sqrt{-1} \sin nz;$$

et en comparant avec l'autre valeur de y^n , on obtient

$$\cos nz = \cos \delta, \quad \sin nz = \sin \delta.$$

INTRODUCTION.

On satisfait en général à ces relations, en supposant $n\delta = 2m\pi + \delta$, m étant un nombre entier quelconque, puisque

$$\cos(2m\pi + \delta) = \cos \delta, \quad \sin(2m\pi + \delta) = \sin \delta;$$

on aura donc

$$z = \frac{2m\pi + \delta}{n}, \quad y = \cos \frac{2m\pi + \delta}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2m\pi + \delta}{n};$$

les facteurs du premier degré de la fonction

$$y^{2n} - 2y^n \cos \delta + 1$$

seront par conséquent compris dans la formule

$$y - \left\{ \cos \frac{2m\pi + \delta}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2m\pi + \delta}{n} \right\}.$$

Si on avait $x^{2n} + 2px^n + q = 0$, on ferait encore $\frac{x^n}{y} = \cos \delta$; mais on prendrait

$$y^{2n} - 2y^n \cos(\pi - \delta) + 1,$$

puisque $\cos(\pi - \delta) = -\cos \delta$. Cela fait, il viendrait

$$\cos n\delta = \cos(\pi - \delta), \quad \sin n\delta = \sin(\pi - \delta);$$

et par conséquent

$$n\delta = 2m\pi + \pi - \delta = (2m + 1)\pi - \delta.$$

75. Quoiqu'il n'y ait rien à objecter contre la marche qui nous a conduit aux formules des racines des équations

$$y^n \mp 1 = 0, \quad y^{2n} - 2y^n \cos \delta + 1 = 0.$$

Cependant pour compléter ce sujet, nous allons exposer l'élégante méthode qu'a donnée M. Lagrange, pour parvenir aux mêmes formules, sans s'appuyer sur la considération des expressions imaginaires. Si l'on change x en z dans l'équation (1) de la page 79, et qu'on en multiplie tous les termes par 2, elle deviendra

$$2 \cos(n+1)\delta = 2 \cos z \cdot 2 \cos n\delta - 2 \cos(n-1)\delta; \quad (1)$$

INTRODUCTION.

en y supposant

$$2 \cos z = y + \frac{1}{y};$$

et faisant $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, etc., on en déduira

$$2 \cos 2z = y^2 + \frac{1}{y^2},$$

$$2 \cos 3z = y^3 + \frac{1}{y^3},$$

etc.

d'où l'analogie portera à conclure que

$$2 \cos n\delta = y^n + \frac{1}{y^n}. \quad (2)$$

Cette dernière équation se vérifie, comme les formules générales de la page 80, en montrant que si elle a lieu pour les nombres $n-1$ et n , elle aura pareillement lieu pour le nombre $n+1$; car en faisant

$$2 \cos(n-1)\delta = y^{n-1} + \frac{1}{y^{n-1}}, \quad 2 \cos n\delta = y^n + \frac{1}{y^n},$$

l'équation (1) donne

$$2 \cos(n+1)\delta = \left(y + \frac{1}{y}\right)\left(y^n + \frac{1}{y^n}\right) - y^{n-1} - \frac{1}{y^{n-1}} = y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}};$$

et étant exacte pour les valeurs $n=1$, $n=2$, elle a donc lieu dans toute l'étendue de la suite des nombres entiers.

Cela posé, les équations

$$2 \cos z = y + \frac{1}{y}, \quad 2 \cos n\delta = y^n + \frac{1}{y^n};$$

peuvent se mettre sous la forme

$$y^2 - 2y \cos z + 1 = 0, \quad y^{2n} - 2y^n \cos n\delta + 1 = 0,$$

et dans cet état, elles ont d'abord une racine commune, puisque, d'après leur formation, il doit exister une valeur de y qui satisfasse à toutes deux en même temps. De plus ces équations étant réciproques (*Compl. des Élémt. d'Alg.*), elles seront encore satisfaites par la valeur $y = \frac{1}{a}$; mais la première équation n'étant que du second degré et n'ad-

INTRODUCTION.

mettant que les deux racines $y = a$, $y = \frac{1}{a}$, a donc ses deux racines communes avec la deuxième équation: elle est donc un des facteurs de cette dernière.

Maintenant si on prend

$$nz = 2m\pi + \delta,$$

il viendra

$$\cos nz = \cos \delta, \text{ et } z = \frac{2m\pi + \delta}{n},$$

d'où il résulte encore que les facteurs du second degré de l'équation

$$y^{2n} - 2y^m \cos \delta + 1 = 0,$$

sont compris dans la formule

$$y^2 - 2y \cos \frac{(2m\pi + \delta)}{n} + 1 = 0.$$

Pour en déduire ceux des équations

$$y^n \mp 1 = 0,$$

il suffit de faire $\delta = 0$ et $\delta = \pi$. Dans le premier cas, on a

$$\cos \delta = 1, \quad y^{2n} - 2y^n + 1 = (y^n - 1)^2;$$

et par conséquent,

$$y^n - 1 = 0, \\ y^2 - 2y \cos \frac{2m\pi}{n} + 1 = 0.$$

Dans le second cas, on a

$$\cos \delta = -1, \quad y^{2n} + 2y^n + 1 = (y^n + 1)^2,$$

d'où,

$$y^n + 1 = 0, \\ y^2 - 2y \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} + 1 = 0,$$

ce qui s'accorde avec le n° 68.

74. En remettant au lieu de y sa valeur $\frac{x}{a}$ (67) dans les équations

$$y^n \mp 1 = 0 \quad \text{et} \quad y^{2n} \mp 2y^n \cos \delta + 1 = 0,$$

INTRODUCTION.

elles deviennent

$$x^n \mp a^n = 0 \quad \text{et} \quad x^{2n} \mp 2a^n x^n \cos \delta + a^{2n} = 0;$$

et faisant la même substitution dans leurs facteurs du second degré on a pour ceux de la première (68)

$$x^2 - 2ax \cos \frac{2m\pi}{n} + a^2,$$

ou

$$x^2 - 2ax \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} + a^2;$$

et, d'après le n° 72, on trouverait que ceux de la seconde sont

$$x^2 - 2ax \cos \frac{2m\pi}{n} + a^2,$$

ou

$$x^2 - 2ax \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} + a^2.$$

Ces expressions peuvent être considérées comme homogènes, en observant que les cosinus tabulaires doivent être pris pour de simples coefficients numériques: d'ailleurs on les rendrait telles en prenant les cosinus dans le cercle dont le rayon est a , et en divisant par ce rayon les cosinus indiqués; mais on trouve le plus souvent ces mêmes expressions sous la forme que je leur ai donnée ici.

75. La décomposition de la fonction $x^n \mp a^n$, en facteurs du second degré, répond à une propriété du cercle, connue sous la dénomination de *théorème de Côtes*, parce qu'elle fut annoncée par ce géomètre. Voici en quoi elle consiste:

Si on divise la circonférence d'un cercle en un nombre $2n$ de parties égales MM_1, M_1M_2, M_2M_3 , etc., fig. 1, et que d'un point O placé sur FIG. 1. le diamètre MCM_3 , on mène aux différents points de division des droites OM, OM_1, OM_2, OM_3 , etc., le produit de toutes celles qui passeront par des points de division marqués d'un nombre pair, sera égal à $\overline{CM} - \overline{CO}$, si le point O est situé dans l'intérieur du cercle, et à $\overline{CO} - \overline{CM}$, si ce point est situé au-dehors; et le produit de toutes les droites passant par des points de division marqués d'un nombre impair, sera égal à $\overline{CM} + \overline{CO}$.

Je ne démontrerai que le cas où le point O se trouve au-dedans du cercle, parce qu'il sera aisé de prouver l'autre de la même manière.

En abaissant, du point M_1 , la perpendiculaire M_1P , sur le diamètre MM_6 , on aura, par le triangle rectangle M_1PO ,

$$\overline{OM_1} = \overline{OP} + \overline{PM_1};$$

mais $OP = CP - CO$, et dans le cercle proposé, CP est le cosinus de l'arc MM_1 , PM , en est le sinus; on aura donc, en employant les cosinus et les sinus tabulaires, calculés pour un rayon égal à l'unité,

$$CP = CM \cos MM_1, \quad PM_1 = CM \sin MM_1;$$

et faisant $CM = a$, $CO = x$, il en résultera

$$OP = a \cos MM_1 - x, \quad PM_1 = a \sin MM_1, \\ \overline{OM_1} = a^2 - 2ax \cos MM_1 + x^2.$$

Les valeurs de $\overline{OM_2}$, $\overline{OM_3}$, etc., se déduiront de la précédente, en substituant à l'arc MM_1 , les arcs MM_2 , MM_3 , etc. Si l'on ne prend que ceux qui répondent aux points de division pairs, en désignant la circonférence par 2π , et en observant que $MM_1 = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$, il viendra

$$MM_2 = \frac{2\pi}{n}, \quad MM_4 = \frac{4\pi}{n}, \text{ etc.};$$

d'où

$$\overline{OM_2} = a^2 - 2ax \cos \frac{2\pi}{n} + x^2, \quad \overline{OM_4} = a^2 - 2ax \cos \frac{4\pi}{n} + x^2, \text{ etc.};$$

mais les lignes OM_2 , OM_4 , etc., placées d'un côté du diamètre, ont leurs correspondantes OM_3 , OM_5 , etc., qui leur sont respectivement égales, ensuite que l'on pourra écrire

$$\overline{OM_2} \times \overline{OM_3} \text{ au lieu de } \overline{OM_2}, \quad \overline{OM_4} \times \overline{OM_5} \text{ au lieu de } \overline{OM_4},$$

et ainsi de suite, quand les divisions seront en plus grand nombre : on remarquera en même temps que la ligne OM représente la quantité $a - x$. Cela posé, il résulte du n° 74, que n étant impair,

$$a^n - x^n = (a - x) \left(a^2 - 2ax \cos \frac{2\pi}{n} + x^2 \right) \left(a^2 - 2ax \cos \frac{4\pi}{n} + x^2 \right) \text{ etc.};$$

mettant au lieu des facteurs du second membre leurs expressions en

lignes, on aura

$$a^n - x^n = \overline{CM} - \overline{CO} = \overline{OM} \times \overline{OM_2} \times \overline{OM_4} \times \overline{OM_6}.$$

Les arcs MM_1 , MM_3 , MM_5 , etc., qui correspondent aux points de division impairs, étant égaux à

$$\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}, \quad \frac{6\pi}{2n} = \frac{3\pi}{n}, \quad \frac{10\pi}{2n} = \frac{5\pi}{n}, \text{ etc.},$$

on trouvera

$$\overline{OM_1} = a^2 - 2ax \cos \frac{\pi}{n} + x^2, \quad \overline{OM_3} = a^2 - 2ax \cos \frac{3\pi}{n} + x^2, \text{ etc.},$$

et $OM_5 = a + x$; mais comme on a

$$a^n + x^n = (a + x) \left(a^2 - 2ax \cos \frac{\pi}{n} + x^2 \right) \left(a^2 - 2ax \cos \frac{3\pi}{n} + x^2 \right) \text{ etc.},$$

il viendra

$$a^n + x^n = \overline{CM} + \overline{CO} = \overline{OM_1} \times \overline{OM_3} \times \overline{OM_5} \times \overline{OM_7}.$$

Lorsque n est un nombre pair, comme dans la fig. 2, les deux parties OM et OM_6 du diamètre répondent l'une et l'autre à des points de division marqués d'un chiffre pair, et donnent les deux facteurs réels du premier degré, $a - x$ et $a + x$, que la fonction $a^n - x^n$ a dans ce cas, tandis que toutes les lignes de numéro impair ne répondent qu'à des facteurs du second degré, les seuls réels pour la fonction $a^n + x^n$.

76. Côtes, qui mourut fort jeune, laissa sans démonstration, parmi ses papiers, le théorème précédent. Moivre et Bernoulli y suppléèrent; mais le premier donna à l'énoncé une extension au moyen de laquelle il comprend la décomposition de l'expression $a^{2n} - 2a^n x^n \cos \frac{\pi}{n} + x^{2n}$ en facteurs réels du second degré. Voici cette extension :

Au lieu de placer le point M , origine de la division du cercle, à l'extrémité du rayon MC , fig. 1, on prend d'abord un arc AM , fig. 3, qui soit la n^{me} partie de l'arc δ , représenté par AB ; ensuite on partage la circonférence du cercle en un nombre n de parties égales, à commencer du point M , et on a alors

$$a^{2n} - 2a^n x^n \cos \frac{\pi}{n} + x^{2n} = \overline{AC}^n - 2\overline{AC}^n \times \overline{OC}^n \cos \frac{\pi}{n} + \overline{OC}^{2n} \\ = \overline{OM} \times \overline{OM_1} \times \overline{OM_2} \times \overline{OM_3} \times \overline{OM_4} \text{ etc.}$$

INTRODUCTION.

Pour s'assurer de la vérité de cette équation, il faut observer que

$$AM = \frac{\delta}{n}, \quad AM_1 = \frac{\sigma\pi + \delta}{n}, \quad AM_2 = \frac{4\pi + \delta}{n}, \text{ etc.},$$

et chercher, comme dans le n° précédent, les valeurs de $\overline{OM}$, $\overline{OM_1}$, etc.; on trouvera par ce moyen les mêmes facteurs que ceux que les formules du n° 74 donneraient pour l'expression

$$a^n - 2a^n x^n \cos \delta + x^{2n}.$$

77. Il y a encore dans chaque degré de grandes classes d'équations qui se résolvent avec beaucoup de facilité, par les *Tables trigonométriques*; elles font partie de celles qui admettent une racine de la forme

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B},$$

et dont la composition est indiquée dans le *Complément des Éléments d'Algèbre*. Leur expression générale est

$$x^n = \frac{n}{1} x^{n-1} \sqrt[n]{b} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} \sqrt[n]{b^2} + \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-8} \sqrt[n]{b^3} \\ + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-8} \sqrt[n]{b^4} - \text{etc.} = a,$$

en faisant

$$A + B = a, \quad AB = b.$$

Elle rentre dans l'expression de $\cos nx$ rapportée à la page 80; car si l'on y change x en $2r \cos z$, et qu'on divise ensuite les deux membres par r^n , on obtiendra l'équation

$$(2 \cos z)^n - \frac{n}{1} (2 \cos z)^{n-2} \frac{\sqrt[n]{b}}{r^2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} (2 \cos z)^{n-4} \frac{\sqrt[n]{b^2}}{r^4} - \text{etc.} = \frac{a}{r^n};$$

puis, écrivant z au lieu de x , dans le développement cité de $\cos nx$, et le multipliant par 2, on en tirera l'équation

$$(2 \cos z)^n - \frac{n}{1} (2 \cos z)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} (2 \cos z)^{n-4} + \text{etc.} = 2 \cos nz,$$

qui sera la même que la précédente, si

$$\frac{\sqrt[n]{b}}{r^n} = 1, \quad 2 \cos nz = \frac{a}{r^n}.$$

INTRODUCTION.

d'où il résulte

$$r = \sqrt[n]{b}, \quad \cos nz = \frac{a}{2 \sqrt[n]{b}};$$

mais $\cos nz$ ne pouvant jamais surpasser l'unité, il faudra que a ne soit pas $>$ que $2 \sqrt[n]{b}$, ou $a^2 > 4b$.

Lorsque cette condition sera remplie, si on représente par δ l'arc dont le cosinus est $\frac{a}{2 \sqrt[n]{b}}$, on aura

$$z = \frac{2m\pi + \delta}{n}, \quad \text{et} \quad x = 2 \sqrt[n]{b} \cdot \cos \left(\frac{2m\pi + \delta}{n} \right).$$

Le même résultat se déduit de l'expression algébrique de la racine

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B},$$

qui revient à

$$x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}} + \sqrt[n]{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}},$$

quand on y met, au lieu de A et B , leur valeur en a et b .

Dans l'hypothèse $a^2 < 4b$, la quantité $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ est imaginaire et peut se mettre sous la forme $\sqrt{b - \frac{1}{4}a^2} \cdot \sqrt{-1}$: supposant alors que

$$\frac{1}{2}a = r^n \cos \delta \quad \text{et} \quad \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2} = r^n \sin \delta,$$

on obtient

$$x = r \left\{ (\cos \delta + \sqrt{-1} \sin \delta)^{\frac{1}{n}} + (\cos \delta - \sqrt{-1} \sin \delta)^{\frac{1}{n}} \right\},$$

ce qui revient à $x = 2r \cos \frac{\delta}{n}$ (47).

Pour déterminer r^n , il suffit de quarer les valeurs de $r^n \cos \delta$, $r^n \sin \delta$;

on trouve par ce moyen $r^n = b$, d'où, comme ci-dessus, $r = \sqrt[n]{b}$.

78. Il est à remarquer que c'est précisément lorsque la valeur de x , quoique réelle, se présente sous une forme composée d'expressions imaginaires, que les *Tables trigonométriques* la donnent avec facilité; aussi y a-t-on recours pour l'équation du troisième degré $x^3 - px = q$, lorsqu'elle tombe dans le cas irréductible. En y faisant $x = 2r \cos z$,

elle devient

$$8r^3 \cos^3 z - 2pr \cos z = q, \quad \text{puis} \quad 4 \cos^3 z - \frac{p}{r} \cos z = \frac{q}{2r};$$

et comparant avec la formule

$$4 \cos^3 z - 5 \cos z = \cos 5z,$$

tiré du premier tableau de la page 80, on a

$$\frac{p}{r^2} = 3, \quad \frac{q}{2r^3} = \cos 5z,$$

d'où il suit,

$$r = \sqrt{\frac{p}{3}}, \quad \cos 5z = \frac{q}{\frac{2p}{3} \sqrt{\frac{p}{3}}};$$

et la condition pour que la valeur de $\cos 5z$ soit moindre que l'unité est $q < \frac{2p}{3} \sqrt{\frac{p}{3}}$, ou, en élevant les deux membres au carré,

$$q^2 < \frac{4p^3}{27}, \quad \text{ou enfin} \quad \frac{1}{4} q^2 < \frac{1}{27} p^3,$$

la même que celle qui constitue le cas irréductible.

Dans ce cas, en désignant par δ , l'arc dont le cosinus est

$$\frac{q}{\frac{2p}{3} \sqrt{\frac{p}{3}}}, \quad \text{les valeurs de } x \text{ sont}$$

$$2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos \frac{\delta}{3}, \quad 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi + \delta}{3} \right), \quad 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos \left(\frac{4\pi + \delta}{3} \right).$$

On se sert aussi des formules trigonométriques pour abréger le calcul des racines dans les autres cas de l'équation du troisième degré, et dans tous ceux des équations du second et du quatrième; mais ces applications sont moins spéciales que la précédente, qui donne en même temps toutes les racines, et leur exposition passerait les bornes que j'ai dû me prescrire. Ces bornes ne me permettent pas non plus de m'étendre sur les autres formes d'équations que l'on tirerait des expressions du sinus, de la tangente, etc. des arcs multiples, non plus que sur les propriétés du cercle qui répondent à ces équations. Dans l'état actuel de la science, ces propriétés ne sont, ainsi que les théorèmes de Cotes et de Moivre, que des objets de pure curiosité, dont il suffit d'indiquer l'existence et de marquer la place.

79. On prouve aisément que les fonctions algébriques des quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$ sont aussi de la même forme (*Compl. des Élé-m. d'Alg.*); mais les résultats de ces calculs s'expriment avec élégance par les sinus et les cosinus, et on en tire des formules qui sont d'une grande utilité dans l'analyse. Si on compare l'expression $a + b\sqrt{-1}$ avec $r(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)$, on trouvera $a = r \cos z$, $b = r \sin z$; en ajoutant les carrés de ces équations, il viendra $a^2 + b^2 = r^2$. La valeur de r étant connue, on aura

$$\cos z = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{b}{r};$$

faisant de même

$$a' + b'\sqrt{-1} = r'(\cos z' + \sqrt{-1} \sin z'),$$

il en résultera (48)

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1}) &= rr'(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)(\cos z' + \sqrt{-1} \sin z') \\ &= rr'[\cos(z + z') + \sqrt{-1} \sin(z + z')]. \end{aligned}$$

La fraction $\frac{a + b\sqrt{-1}}{a' + b'\sqrt{-1}}$ devient $\frac{r(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)}{r'(\cos z' + \sqrt{-1} \sin z')}$; multipliant ses deux termes par $(\cos z' - \sqrt{-1} \sin z')$, on obtiendra (48),

$$\frac{r}{r'} [\cos(z - z') + \sqrt{-1} \sin(z - z')].$$

La fonction $(a + b\sqrt{-1})^n$ devient sur-le-champ

$$r^n (\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n = r^n (\cos nz + \sqrt{-1} \sin nz),$$

et en changeant n en $\frac{1}{n}$, il vient

$$(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{z}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{z}{n} \right).$$

80. Par la transformation précédente on introduit les lignes trigonométriques dans la recherche des racines imaginaires d'une équation algébrique quelconque. Au lieu de substituer à l'inconnue de l'équation proposée la formule $a \pm b\sqrt{-1}$ (*Complém. des Élé-m. d'Algèbre*), on y met $r(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)$, et on remplace en conséquence une puissance quelconque de l'inconnue par $r^m (\cos mz \pm \sqrt{-1} \sin mz)$; ensorte que

si cette équation est représentée par

$$x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \dots + \zeta x + \eta = 0,$$

elle deviendra

$$r^n \cos n\varphi + \alpha r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \beta r^{n-2} \cos(n-2)\varphi + \dots + \zeta r \cos \varphi + \eta \left\{ \sqrt{-1} \right\} = 0,$$

et ne pourra se vérifier qu'en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire. On obtient ainsi les deux équations

$$r^n \cos n\varphi + \alpha r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \beta r^{n-2} \cos(n-2)\varphi + \dots + \zeta r \cos \varphi + \eta = 0, \quad (1)$$

$$r^n \sin n\varphi + \alpha r^{n-1} \sin(n-1)\varphi + \beta r^{n-2} \sin(n-2)\varphi + \dots + \zeta r \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

au moyen desquelles il faut déterminer les quantités r et φ .

Il est à remarquer qu'elles se déduisent immédiatement de l'équation proposée, en substituant à une puissance quelconque x^m , d'abord $r^m \cos m\varphi$, et ensuite $r^m \sin m\varphi$, et en observant pour le dernier terme, que $r^0 \cos 0 = 1$, $r^0 \sin 0 = 0$. On les ramène à ne contenir toutes deux que des cosinus : pour cela, on multiplie d'abord la première par $\cos \varphi$, la seconde par $\sin \varphi$; on ajoute et on retranche les produits, en observant que

$$\cos m\varphi \cos \varphi \pm \sin m\varphi \sin \varphi = \cos(n \mp 1)\varphi;$$

on trouve

$$r^n \cos(n-1)\varphi + \alpha r^{n-1} \cos(n-2)\varphi + \beta r^{n-2} \cos(n-3)\varphi + \dots + r\zeta + \eta \cos \varphi = 0,$$

$$r^n \cos(n+1)\varphi + \alpha r^{n-1} \cos n\varphi + \beta r^{n-2} \cos(n-1)\varphi + \dots + r\zeta \cos 2\varphi + \eta \cos \varphi = 0,$$

et on peut alors, par les formules du n° 50, changer les cosinus des multiples de l'arc φ , en puissance du cosinus de l'arc simple; par ce moyen les inconnues à trouver seront r et $\cos \varphi$.

En prenant pour facteurs respectifs des mêmes équations (1) et (2), les quantités $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, et en opérant du reste comme ci-dessus, on transformerait ces équations en d'autres qui ne contiendraient que des sinus des arcs multiples de φ ; mais elles ne seraient pas plus faciles à traiter sous cette forme que sous la première, puisqu'elles conserveraient le même degré, et en effet on ne sait guère les résoudre pour d'autres cas que ceux dont nous nous sommes occupés dans les n° 67 et 72; c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage.

INTRODUCTION.

81. Nous allons examiner maintenant la forme que prennent les fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires, lorsqu'elles renferment des quantités imaginaires.

Soit d'abord $l(a \pm b\sqrt{-1})$: en faisant $\sqrt{a^2 + b^2} = r$, $\frac{a}{r} = \cos \varphi$, $\frac{b}{r} = \sin \varphi$, il viendra $a \pm b\sqrt{-1} = r(\cos \varphi \pm \sqrt{-1} \sin \varphi)$, et par conséquent

$$l(a \pm b\sqrt{-1}) = l r + l(\cos \varphi \pm \sqrt{-1} \sin \varphi);$$

$$\text{mais } l(\cos \varphi \pm \sqrt{-1} \sin \varphi) = \pm i\varphi \sqrt{-1} \quad (43);$$

$$\text{donc } l(a \pm b\sqrt{-1}) = l r \pm i\varphi \sqrt{-1}.$$

Les données étant seulement r , $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$, on pourra prendre au lieu de l'arc φ , les arcs $2\pi + \varphi$, $4\pi + \varphi$, $\dots$, $2i\pi \pm \varphi$, i étant un nombre entier; ensuite qu'on aura pour $l(a \pm b\sqrt{-1})$ une infinité de valeurs, comprises dans la formule $l r \pm (2i\pi + \varphi) \sqrt{-1}$.

Si on fait $b = 0$, on aura $r = a$, $\sin \varphi = 0$, $\varphi = 0$ et $l a = l a \pm 2i\pi \sqrt{-1}$. Ce résultat, qui paraît d'abord paradoxal, indique qu'une quantité réelle a , pour le même module, une infinité de logarithmes, dont un seul est réel, savoir celui qu'on obtient en faisant $i = 0$, et que nous distinguerons par la caractéristique L ; nous écrirons donc

$$l a = L a \pm 2i\pi \sqrt{-1}.$$

L'équation $\pm x \sqrt{-1} = l(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)$ conduit immédiatement à la même conclusion; car en y faisant successivement $x = 0$, $x = 2\pi$, $\dots$, $x = 2i\pi$, elle donne $0 = L 1$, $\pm 2\pi \sqrt{-1} = L 1$, $\dots$, $\pm 2i\pi \sqrt{-1} = L 1$, d'où on voit que l'unité a un nombre infini de logarithmes imaginaires; mais puisque $a = 1 \times a$, on doit avoir aussi $l a = L 1 + l a$: substituant à $l a$ le logarithme réel $L a$, et mettant au lieu de $L 1$, sa valeur générale $\pm 2i\pi \sqrt{-1}$, on trouvera, de même que tout-à-l'heure,

$$l a = L a \pm 2i\pi \sqrt{-1}.$$

Pour bien entendre ceci, il faut se rappeler que la nature des logarithmes dépend uniquement de l'équation $l(ab) = l a + l b$. Si on met dans cette équation pour $l a$ et $l b$ leurs valeurs générales $L a \pm 2i\pi \sqrt{-1}$ et $L b \pm 2i\pi \sqrt{-1}$, son second membre devenant $L a + L b \pm 2(i + i')\pi \sqrt{-1}$,

sera nécessairement un des logarithmes de ab compris dans la formule

$$l(ab) = L(ab) \pm 2i^r \pi \sqrt{-1} = La + Lb \pm 2i^r \pi \sqrt{-1}.$$

Quels que soient donc les logarithmes de a et de b qu'on ajoute entre eux, leur somme sera toujours égale à l'un des logarithmes du produit ab .

En faisant $x = 180^\circ = \pi$, on a $\cos x = -1$, et mettant $(2i+1)\pi$ à la place de $2i\pi$, on trouvera $l(-1) = \pm (2i+1)\pi \sqrt{-1}$; ce qui nous fait voir que tous les logarithmes de -1 sont imaginaires : il en sera de même de ceux de $-a$; car $-a = a \times -1$ et $l(-a) = La + l(-1)$; donc $l(-a) = La \pm (2i+1)\pi \sqrt{-1}$.

82. C'est à l'aide des considérations précédentes qu'Euler a résolu la difficulté sur les logarithmes des nombres négatifs, qui avait été l'objet d'une très-longue discussion entre Leibnitz et Jean Bernoulli. Le premier soutenait que ces logarithmes étaient imaginaires; le second, qu'ils étaient réels, et les mêmes que ceux des nombres positifs. Nous ne pouvons entrer dans le détail des raisons qui furent données de part et d'autre; mais une des preuves les plus fortes qu'on apportait en faveur de la réalité des logarithmes des nombres négatifs, consistait à dire que puisque $(-a)^2 = a^2$, on devait avoir $l(-a)^2 = la^2$, $2l(-a) = 2la$, et enfin $l(-a) = la$. La théorie d'Euler confirme la première conséquence, et prouve que les deux autres sont fausses.

En effet, on a $l(-a)^2 = 2l(-a) = 2La \pm 2(2i+1)\pi \sqrt{-1}$; et à cause que le nombre $2(2i+1)$ est pair, cette expression se trouve comprise dans la formule $2La \pm 2i^r \pi \sqrt{-1}$, qui représente tous les logarithmes de a^2 : on a donc, dans un certain sens, $l(-a)^2 = la^2$.

Si on compare les expressions $2l(-a) = 2La \pm 2(2i+1)\pi \sqrt{-1}$ et $2la = 2La \pm 4i^r \pi \sqrt{-1}$, on verra qu'elles ne peuvent jamais rentrer l'une dans l'autre, puisque tous les nombres de la forme $4i+2$, sont essentiellement différents de la forme $4i$; mais l'expression générale des logarithmes de a^2 doit comprendre tous les logarithmes qu'on trouverait, en ajoutant indistinctement ceux des facteurs de cette quantité (n° précéd.): elle renferme donc, outre les doubles de chacun des logarithmes de $-a$ et de a , les sommes qu'on obtiendrait en ajoutant ensemble deux des premiers ou deux des seconds, qui seraient inégaux.

Ainsi $l(-a)^2 = 2La \pm 2(2i+1)\pi \sqrt{-1}$ et $la^2 = 2La \pm 2(2i+1)\pi \sqrt{-1}$.

C'est dans ces dernières expressions que se trouvent les logarithmes qui satisfont à l'équation $l(-a)^2 = la^2$, parce que $2(2i+1)$ peut toujours désigner un nombre pair quelconque.

Bernoulli tirait encore de la quadrature de l'hyperbole une autre objection d'un grand poids, qu'Euler laissa subsister; mais on y a répondu depuis, ainsi que nous le ferons voir en parlant de la quadrature des courbes; et quoique d'Alembert, qui avait embrassé l'opinion de Bernoulli, n'ait point voulu admettre l'explication d'Euler, elle a reçu aujourd'hui l'assentiment des Analystes les plus distingués. Malgré cela, il faut convenir que la question des logarithmes des nombres négatifs, n'est peut-être pas encore exempte de nuages, à cause de la difficulté de vérifier rapportée à la considération des courbes, à cause de la difficulté de vérifier la loi de continuité, lorsqu'il y a un passage par l'infini; mais il serait néanmoins très-inutile de s'appesantir ici sur ce sujet, parce que le peu d'obscurité qu'il conserve n'entraîne aucune conséquence fâcheuse à l'égard des théories utiles des Mathématiques et des principes de cette science vraiment féconds. Les usages généraux des logarithmes, et leur emploi dans le calcul numérique, les supposent essentiellement réels; dans le petit nombre de cas où l'on en considère d'imaginaires, ce n'est que pour former des expressions analogues bien vérifiées d'ailleurs: ainsi je renvoie aux écrits cités à ce sujet dans la Table.

83. Nous avons cherché précédemment l'expression du logarithme de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1} = r(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)$, et nous avons obtenu pour résultat $l r + (2i\pi + z) \sqrt{-1}$: en renversant la question, on voit que si le logarithme est représenté par $m + n\sqrt{-1}$, on aura $m = l r$, $n = 2i\pi + z$; et en désignant par e le nombre dont le logarithme népérien est l'unité, on trouvera

$$r = e^m, \quad z = n, \quad \text{d'où} \quad \sin z = \sin n, \quad \cos z = \cos n;$$

et enfin $e^m (\cos n + \sqrt{-1} \sin n)$ sera l'expression de la quantité cherchée: cette quantité sera réelle si n est ou nulle, ou un multiple quelconque de la demi-circonférence.

84. L'expression $(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ peut se mettre sous la forme $e^{(m+n\sqrt{-1})(\log(a+b\sqrt{-1}))}$, puisqu'en général $x^y = e^{y \log x}$, comme on peut s'en assurer en prenant les logarithmes. Si on substitue au lieu de $l(a+b\sqrt{-1})$

sa valeur $1r+z\sqrt{-1}$, il en résultera

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n}\sqrt{-1} = e^{m(1-r-nz)}e^{(m+n)z}\sqrt{-1} = e^{m(1-r-nz)}e^{(m+n)z}\sqrt{-1} \\ = e^{m(1-r-nz)}[\cos(mz+nlr) + \sqrt{-1}\sin(mz+nlr)];$$

et à cause que $e^{m(1-r-nz)} = r^m$, on aura enfin

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n}\sqrt{-1} = r^m e^{-nz} [\cos(mz+nlr) + \sqrt{-1}\sin(mz+nlr)],$$

résultat qui est de la forme $A+B\sqrt{-1}$. On se rappellera que pour donner à ce résultat toute la généralité qu'il comporte, il faut mettre $2i\pi+z$ à la place de z .

85. Supposons qu'on ait $b=0$, il viendra $r=a$, $z=0$, $\cos z=1$ et

$$a^{m+n}\sqrt{-1} = a^m e^{-2in\pi} [\cos(2im\pi+nl\dot{a}) + \sqrt{-1}\sin(2im\pi+nl\dot{a})].$$

Si a était une quantité négative, comme r doit toujours être positive, on prendrait $z=\pi$, d'où $\cos z=-1$, et on écrirait $(2i+1)\pi$ au lieu de $2i\pi$, ce qui donnerait

$$(-a)^{m+n}\sqrt{-1} = r^m e^{-(2i+1)\pi} [\cos((2i+1)m\pi+nl\dot{a}) + \sqrt{-1}\sin((2i+1)m\pi+nl\dot{a})].$$

Lorsque a et m seront nuls, on aura

$$r=b, \quad \cos z=0, \quad z=90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad 2i\pi+z = \frac{(4i+1)\pi}{2}$$

et

$$(b\sqrt{-1})^n\sqrt{-1} = e^{-\frac{(4i+1)\pi}{2}} (\cos nlb + \sqrt{-1}\sin nlb);$$

si b était négatif, on prendrait $z=\frac{3\pi}{2}$ et $2i\pi+z = \frac{(4i+3)\pi}{2}$.

Cette expression deviendrait réelle, dans le cas où on supposerait $b=1$; et si l'on faisait $n=1$ et $i=0$, elle donnerait

$$(\sqrt{-1})\sqrt{-1} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,207\ 879,$$

résultat qui, par sa singularité, mérite d'être confirmé. Pour cela, j'observe qu'en substituant $\sqrt{-1}$ à la place de u , dans la série

$$u = u - u^{-1} - \frac{1}{2}(u^2 - u^{-2}) + \frac{1}{3}(u^3 - u^{-3}) - \text{etc.}, \quad (55)$$

il vient

$$1\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{2}{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}(-1+1) + \frac{1}{5}(-\sqrt{-1} + \frac{1}{\sqrt{-1}}) - \text{etc.} \\ = \frac{-2}{\sqrt{-1}} \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.} \right\}.$$

La série comprise entre les accolades exprime la valeur de l'arc de 45° dans un cercle dont le rayon $=1$ (43 et 55); ainsi

$$1\sqrt{-1} = \frac{-2}{\sqrt{-1}} \frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{2\sqrt{-1}} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2};$$

mais puisque $u^v = e^{uv}$, on aura

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{1.2.4} - \frac{\pi^3}{1.2.3.8} + \text{etc.}$$

On remarquera que l'équation $1\sqrt{-1} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2}$, à laquelle nous venons de parvenir, donne $\pi = \frac{21\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ et $2\pi = \frac{41\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$. Cette expression de la circonférence du cercle, qui se déduit aussi de l'équation $x\sqrt{-1} = 1(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)$, en y faisant $x = \frac{\pi}{2}$, et qui a été trouvée par Jean Bernoulli, n'est qu'un symbole abrégé représentant une suite infinie (42).

86. Soit la fonction circulaire $\sin(a \pm b\sqrt{-1})$; on aura

$$\sin(a \pm b\sqrt{-1}) = \sin a \cos(b\sqrt{-1}) \pm \cos a \sin(b\sqrt{-1}).$$

Pour obtenir $\sin(b\sqrt{-1})$ et $\cos(b\sqrt{-1})$, on mettra $b\sqrt{-1}$ au lieu de x , dans les formules du n° 41; et il en résultera

$$\sin(b\sqrt{-1}) = \frac{e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \left(\frac{e^b - e^{-b}}{2}\right)\sqrt{-1}, \quad \cos(b\sqrt{-1}) = \frac{e^{b\sqrt{-1}} + e^{-b\sqrt{-1}}}{2}.$$

Substituant ces valeurs, on aura

$$\sin(a \pm b\sqrt{-1}) = \left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right) \sin a \pm \sqrt{-1} \left(\frac{e^b - e^{-b}}{2}\right) \cos a.$$

On trouverait aussi

$$\cos(a \pm b\sqrt{-1}) = \left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right) \cos a \mp \sqrt{-1} \left(\frac{e^b - e^{-b}}{2}\right) \sin a;$$

1.

18

INTRODUCTION.

et l'on parviendrait de même aux expressions des autres fonctions circulaires, telles que la tangente, la sécante, etc.

Lorsque $a = 2i\pi \pm \frac{\pi}{2} = \frac{(4i \pm 1)\pi}{2}$, il en résulte $\sin a = \pm 1$, $\cos a = 0$ et $\sin(a \pm b \sqrt{-1}) = \pm \frac{1}{2}(e^b + e^{-b})$; la supposition de $a = i\pi$ donne aussi $\cos(a \pm b \sqrt{-1}) = \pm \frac{1}{2}(e^b + e^{-b})$, parce que dans ce cas $\sin a = 0$ et $\cos a = \pm 1$, selon que i est pair ou impair: il y a donc des arcs imaginaires dont le sinus, ou le cosinus, a une valeur réelle. Il faut observer cependant que cette valeur est en contradiction avec la nature du cercle; car tant que b n'est pas nul, auquel cas l'arc serait réel, la quantité $\frac{1}{2}(e^b + e^{-b}) = \frac{1}{2} \frac{e^b + 1}{e^b}$ surpasse toujours l'unité ou le rayon, ce qui ne saurait arriver à aucun sinus, ni à aucun cosinus pris dans le cercle (*).

On tirerait encore d'autres conséquences remarquables des résultats que nous avons obtenus dans cet article; et en renversant la question qui nous y a conduits, on parviendrait à l'expression des arcs imaginaires, qui répondent à des sinus ou à des cosinus imaginaires, ou bien à des sinus ou à des cosinus réels plus grands que le rayon: mais nous renverrons pour ces détails, au Mémoire d'Euler, cité dans la Table.

87. Les résultats des n° 79, 81, 85, 84 et 86, prouvent que toutes les fonctions explicites, soit algébriques, logarithmiques, exponentielles ou circulaires, peuvent, lorsqu'elles sont imaginaires, se ramener à la forme $A \pm B \sqrt{-1}$.

(*) On verra dans la suite que l'existence de ces sinus et de ces cosinus appartenant à des arcs imaginaires, tient à la nature de l'hyperbole équilatère, courbe, dont les propriétés ont la plus grande analogie avec celles du cercle.

TABLE DES MATIÈRES.

OBSERVATION. Les chiffres indiquent les numéros et non les pages ; quand un numéro est suivi de la lettre *a*, il faut le chercher dans les *Corrections et Additions* placées à la fin du III^e volume. On n'a rappelé dans cette Table que les noms des Auteurs cités dans le texte ; c'est dans les Tables particulières à chaque volume, qu'on trouvera l'indication détaillée de ce qui a été écrit sur la Science.

A

- AGNÉSI** a démontré la subordination des infiniment petits, 258 *Note*.
- Aire** d'une courbe : expression de sa différentielle en coordonnées rectangles, 217 ; en coordonnées polaires, 252 ; par les infiniment petits, 257, 259. — Détermination de son signe, 488.
- Aire** du cercle : son développement en série, son expression au moyen de l'arc, 493.
- Aire**, note sur ce mot, 514.
- Aire** d'une surface de révolution, 515. — d'une surface quelconque, 523, 523 *a*.
- Ampère** donne des limites des restes de la série de Taylor, 173, 1156 *Note*. — s'occupe des paraboles osculatrices, 223. — propose pour les courbes une forme d'équation indépendante de leur position, 255. — Ses remarques sur l'intégration des fractions rationnelles, 375. — Sa remarque sur les équations différentielles simultanées, 622. — Ses remarques sur l'emploi des facteurs dans le calcul des variations, 870. — Comment il détermine le nombre des constantes arbitraires qui doivent entrer dans les intégrales complètes, 591 *a*. — Ses remarques sur le nombre des fonctions arbitraires contenues dans les intégrales des équations différentielles partielles, 792 *a*.
- Analogie** des puissances avec les différences, 970, 970 *a*.
- Analyse** combinatoire, ce que c'est, *Intr.* 20 ; 122.
- Angle** : multiplication des angles par Newton, 710 et la *Note*.
- Appareil** des voûtes elliptiques, 633.
- Approximation** : réflexions sur l'incertitude des méthodes d'approximation, dont on fait usage dans la solution des problèmes géométriques et mécaniques, 1157.
- Arbogast** : ses notations, 83 *Note*. — Ses procédés pour développer une fonction quelconque de polynômes, 122. — Son Calcul des dérivations, 122, 130. — Sa manière d'appliquer le Calcul différentiel à la recherche des tangentes, 205, 206. — prouve que les fonctions arbitraires des intégrales des équations différentielles partielles peuvent être discontinues, 804, 1103. — Son calcul sur les *Echelles de dérivation*, 970 *a*. — donne aux produits de facteurs équidifférens le nom de *Factorielles*, 981. — Forme qu'il assigne pour les équations aux différences partielles du premier degré, 1084 *Note*. — remarque une faute de calcul échappée à Lagrange, 1121.
- Arcs** de cercle : analogie qui existe entre les arcs de cercle et les logarithmes, *Intr.* 41 ; 389, 389 *a*, 495. — Leur expression par les sinus, au moyen des exponentielles imaginaires, *Intr.* 43 ; 389, 389 *a*. — Leur développement par la tangente, *Intr.* 43, 53 ; 89, 415. — Par les sinus et cosinus, *Intr.* 52. — Par les sinus et sinus verses, *Intr.* 58 ; 88, 89 *Note*, 417, 419. — Leur expression numérique en parties du rayon, *Intr.* 45. — Arc égal au rayon, *ibid.* — Moyen pour obtenir les sinus et les cosinus d'arcs multiples, *Intr.* 47-51. — Expression des puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple, par les sinus et cosinus de ses multiples. *Voy. Sinus et Cosinus*. — Développement des arcs de cercle par les sinus de leurs multiples, *Intr.* 56. — Expression de l'arc par des produits indéfinis de cosinus

- ou de sécantes d'arcs continuellement sous-doubles, *Intr.* 57. — Expression de la différentielle première d'un arc, 58; de celle d'un ordre quelconque, 88; déduite du Calcul aux différences, 1054. — Expression de l'arc de 30 degrés en série, 88. — Usage de la division des arcs en parties égales, pour résoudre les équations, *Intr.* 67-74, 75-80. — Expression d'un arc, en fraction continue, au moyen de sa tangente, 670. — Inconvénient de l'introduction des arcs de cercle dans les intégrales en séries des équations différentielles, 675. — Leurs propriétés déduites de la comparaison de deux différentielles circulaires, 691. — Leur expression en produits indéfinis, 1188. — Séries des arcs dont les tangentes procèdent suivant une loi donnée, 1269.
- Arc d'une courbe* : son rapport avec sa corde a pour limite l'unité, 215. — Limites entre lesquelles est compris un arc de courbe, 215 *seconde Note*, et p. 634 du 3^e volume. — Sa différentielle en coordonnées rectanglées, 216; en coordonnées polaires, 251; par les infiniment petits, 257, 259.
- Arc d'une courbe à double courbure* : sa différentielle, 347.
- Arcs elliptiques* : leur expression en série, 502. — Transformations de leur différentielle, 504, 508. — Leurs propriétés, relativement à leur addition, à leur multiplication, à leur division, 628-708. — Leur détermination par la bissection, 705. — Moyens de trouver deux arcs elliptiques, dont la différence soit égale à une ligne droite, 708. — Construction de leur relation par les triangles sphériques, 709, 710.
- Arc hyperbolique* : transformations de sa différentielle, 504, 509. — Peut s'exprimer par deux arcs d'ellipse, 509.
- Archimède* : son style comparé à celui de Leibnitz, 256 *Note*. — découvre les principales propriétés de la spirale de Conon, 248, 248 a, 250; quarre cette spirale, 499. — quarre la parabole, 500 a. — Rectification de la spirale, 513.
- Arêtes de rebroussement*, 339, 344, 348. — Leur liaison avec la correspondance qui règne entre les équations différentielles partielles du premier ordre, et les équations différentielles qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 823.
- Asymptotes droites*, 198. — Leur détermination par le Calcul différentiel, 214. — courbes, 203. — des surfaces, 312.
- Axes principaux des surfaces courbes*, 307, 307 a.

B

- BABBAGE** : procédé qu'il nomme *Calcul des fonctions*, 1266.
- Base** des logarithmes Népériens, *Intr.* 22, 27. — Propriété remarquable de ce nombre, 162.
- Beaune (de)** : son problème sur la méthode inverse des tangentes, 678.
- Bérard** : sa méthode pour discuter les lignes et les surfaces du second ordre, 307 a, et la *Note*.
- Bernoulli (Jacques)** : résout le problème de Beaune, 678. — résout le problème des isopérimètres qui a conduit à la méthode des Variations, 873. — Nombres qu'il a remarqués le premier, 951. *Voyez Nombre*.
- Bernoulli (Jean)** : s'occupe le premier des exponentielles, *Intr.* 21. — a démontré le théorème de Côtes, *Intr.* 76. — Euler lui attribue les expressions exponentielles des sinus et cosinus, *Intr.* 42 a. — Sa controverse avec Leibnitz sur les logarithmes des nombres négatifs, *Intr.* 82. — Expression de la circonférence du cercle qu'on lui attribue, *Intr.* 85. (*Voyez ses Œuvres*, t. I, p. 400.) — relève une méprise échappée à Newton, 258 a. — Son développement général des intégrales, 482. — Examen de son assertion sur les logarithmes des nombres négatifs, 492. — Sa quadrature d'une courbe du 3^e degré, 496. — s'occupe de la recherche des courbes quarrables, etc., 534. — résout le problème de la courbe rectifiable sur une surface donnée, 539. — a remarqué que par le développement successif d'une courbe quelconque, on approchait sans cesse de la cycloïde, 686 a.
- Bernoulli (les)** ne connaissaient pas bien la nature et l'étendue des intégrales des équations différentielles, 688. — Leur méthode pour trouver les *maximums* et *minimums* des intégrales définies, ne donnait

- pas les équations relatives aux limites, 838. — s'occupent du problème des Trajectoires réciproques, 1263.
- Bernoulli* (Daniel) : discussion entre lui et Euler sur les limites des séries de sinus et de cosinus, 1014.
- Bertrand* (de Genève) rapporte des formules de Machin. Voyez *Machin*.
- Bessel* : ses recherches sur l'intégrale $\int \frac{dx}{1x}$, 1231, 1232.
- Bezout* : sa méthode d'élimination par les polynômes multiplicateurs, 1032. — Son théorème sur le degré auquel peut monter l'équation finale résultante de plusieurs équations algébriques, 1035.
- Bidone* (Georges) : ses travaux sur les intégrales définies, 1215, 1217.
- Binet* (ainé) : démontre un théorème sur les limites, 81 *Note*. — Son théorème sur les intégrales des équations différentielles du premier ordre, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 811 *a*.
- Binet* (J.) : sa remarque sur les différences du sinus, 893 *a*.
- Binome* : convergence du développement des puissances d'un binome, *Intr.* 5-7. — Développement de la puissance m du binome, *Intr.* 15 et suiv., p. 604 du 3^e volume. — Preuve que les deux premiers termes du développement de la puissance n du binome $1+x$ sont $1+nx$, lors même que n est irrationnelle ou imaginaire, *Intr.* 35. — Sa démonstration par le Calcul différentiel, 19. — Son développement en fraction continue, 669. — Démonstration de la formule du binome, par le Calcul intégral aux différences, 961 *Note*. — Formule du binome exprimée par les factorielles, 983. — Développement d'une factorielle à base binome, 987. — Expression approchée du coefficient d'un terme quelconque d'une très haute puissance du binome, 1010. — Du rapport de ce coefficient à la somme de tous les autres, *ibid.* — Expression approchée du terme moyen d'une puissance paire, *ibid.* — Son développement en série, 1152 *Note*.
- Biot* : démontre la transformation de l'équation des surfaces du second ordre, opérée par Euler, 301. — Son mémoire sur les intégrales indirectes des équations aux différences, 1073. — s'occupe des équations aux différences mêlées, 1256, 1264, 1265.
- Bissection* des arcs elliptiques, 703.
- Borda* : sa formule pour calculer les logarithmes, *Intr.* 32. — Ses remarques sur la méthode des Variations, 838.
- Bossut* : ses recherches sur le problème de la voute quarrable, 542, 543.
- Bouguer* détermine les courbes de poursuite, 689.
- Brachystochrone*, 830 *Note*.
- Branches* d'une courbe : leur correspondance avec les diverses racines de son équation, 175, 176.
- Branches* infinies : leur détermination par la transformation des coordonnées, 192-196. — Moyen de reconnaître si elles sont hyperboliques ou paraboliques, 203, 204.
- Branches* paraboliques, 205. — hyperboliques, *ibid.*
- Briggs* : son système de logarithmes, *Intr.* 25, 27. — connaissait la dérivation successive des termes des puissances du binome, p. 604 du 3^e volume. — a le premier eu l'idée de l'interpolation, 910.
- Brinkley* : ses remarques sur l'expression exponentielle de $\Delta^n u$, 930, 932; de $\Sigma^n u$, 977 *a*.
- Brisson* : forme un nouveau genre de séries pour développer les intégrales des équations différentielles partielles, 789.
- Budan* : emploie les sommes successives pour transformer les équations algébriques, 962 *a*.
- Burmah* : son théorème pour développer les fonctions en séries, 113 *a*.

C

- CALCUL** différentiel : sa définition, 5. — Réflexions sur sa métaphysique et sa notation, 80-83. — Inconvénient qu'il y aurait à changer sa notation, 82, 83. — Comparaison de celles qu'a proposées Lagrange, avec celles de Waring, d'Euler, de Fontaine, etc., 82, 83. — Son usage pour trouver les tangentes des courbes, 205-214. — Son application à la théorie des courbes, à la manière d'Arbogast, 206; par les limites, 229; à la manière de Leibnitz, ou par la considération des infiniment petits, 256. — Son application aux surfaces courbes, 313 et suiv. — appliqué aux courbes à double courbure, 344 et suiv. — Comment il se

- déduit du calcul des différences, 929
Note, 942. — Son exactitude envisagée comme la compensation de deux erreurs, p. 643 du 3^e volume. — (Pour l'histoire du Calcul différentiel, voyez la Préface du 1^{er} vol. et les Additions, p. 601-603 du 3^e).
- Calcul intégral* : sa définition, 5, 366.
- Calcul intégral indéterminé*, 534-544. — comprend l'intégration des équations différentielles à plus de deux variables, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 810.
- Calcul intégral des différentielles partielles*, ou *Calcul intégral aux différences partielles* : sa définition, 728.
- Calcul des variations*, 823. — Questions géométriques qui lui ont donné lieu, sa définition analytique, *ibid.* — Manière de le déduire des principes du Calcul différentiel exposés dans cet ouvrage, 823-843.
- Calcul direct des différences* : sa définition, 879. — Ses rapports avec le Calcul différentiel, 929 *Note*, 942.
- Calcul direct des fonctions génératrices*, calcul inverse, 1109.
- Calcul inverse des différences* : sa définition, 943. — Comment ce calcul se distingue du Calcul différentiel, par rapport aux équations, 1037.
- Callet* : ses remarques sur la série $1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$, 1014 *Note*.
- Caluso* : ses recherches sur l'intégrale $\int \frac{dz}{lz}$, 1231 *Note*.
- Caractéristiques* : l'ordre des caractéristiques $d, \delta, f, \Delta, \Sigma$, appliquées les unes sur les autres, peut être interverti, 28, 39, 546 *Note*, 844-846, 963 *Note*.
- Caractéristiques des surfaces limites*, 336, 803. — Leur liaison avec la correspondance des équations différentielles partielles du premier ordre, et des équations différentielles qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 823.
- Carnot* : propose pour les courbes une forme d'équation indépendante de leur situation, 255. — propose une notation pour les angles, et donne une relation entre les côtés d'un polygone plan ou gauche, 294 *Note*.
- Cauchy* : ses recherches sur les intégrales définies, 1216, 1217, 1248.
- Centre des courbes*, 183.
- Centre des surfaces* du second ordre, 299 a, 302. — des surfaces en général, 312.
- Centres absolus de courbure* d'une courbe à double courbure ne sont pas sur ses développées, 350, 355.
- Cercle* : comment il peut se déterminer dans l'espace, 283. — peut avoir une infinité de centres, 349 *Note*. — Son aire, 493. — Analogie entre le cercle et l'hyperbole équilatère, 494, 495. — Sa rectification, 501. — Son équation différentielle générale, 634 a. — renferme sous un périmètre donné le plus grand espace, 874.
- Cercle touchant*, 221.
- Cercle osculateur*, 221, 222. — Ses propriétés, 224, 224 a, 225, 226. — Quand il a un contact du troisième ordre, 230. — Son centre déterminé comme étant à égale distance de trois points consécutifs de la courbe proposée, 261. — déduit de l'intersection de deux normales consécutives, *ibid.* — sert à construire les équations différentielles du second ordre, 680.
- Charles* : sa formule d'interpolation par les sinus et les exponentielles, 908. — Sa méprise sur les solutions particulières des équations différentielles, 1078. — s'occupe des équations aux différences mêlées, 1267.
- Charpit* : réduit l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre à trois variables, où les coefficients différentiels passent le premier degré, à celle de trois équations différentielles simultanées, à quatre variables, 741-745, 747 a. — applique son procédé aux équations à quatre variables, 748, 748 a, 749.
- Circonférence du cercle* : son expression en décimales, *Intr.* 43, 43 a. — Séries pour l'obtenir, *Intr.* 43, 44. — Expression de la circonférence du cercle par les imaginaires, *Intr.* 85. — Celle de ses expressions que l'on doit à Wallis, obtenue par les factorielles, 989 ; par les intégrales définies, 1166. — Usage de cette expression dans la détermination d'une constante arbitraire, 1008 ; dans l'interpolation de certaines suites, 1024. — Ses expressions en produits indéfinis, celles de son logarithme, 1188, 1197.
- Clairaut* a donné un moyen pour décrire des spirales par un mouvement continu,

TABLE DES MATIÈRES.

737

248 a. — emploie les sous-tangentes dans les courbes à double courbure, 344 a. — s'occupe du développement de la fonction $(1 + n \cos z)^m$, 463. — Sa théorie des courbes à double courbure, tom. I, p. 501. — remarque les équations qui s'intègrent après une différentiation, 587. — Ses remarques : r la tractoire, 679 Note.

Coefficient différentiel : sa définition, 4. — Coefficients différentiels de tous les ordres, leur définition, 21. — Les fonctions de deux variables en ont plusieurs dans chaque ordre, 31. — Ils demeurent les mêmes dans quelqu'ordre qu'on effectue les différentiations partielles d'où ils résultent, 28, 39. — Méthode pour trouver ceux d'une fonction implicite donnée par une équation entre deux variables, 41, 44; entre plusieurs variables, 74-76. — Ils ont chacun autant de valeurs que la fonction dont ils dérivent, 45, 47. — Transformation des coefficients différentiels relatifs à y , dans ceux qui se rapportent à x , lorsque les variables x et y sont liées entr'elles par une équation, 59-61. — sont les limites du rapport des accroissemens de la fonction et de sa variable, 81. — Manière de les représenter, 82, 83. — Expression des coefficients différentiels de $\phi(y)$, y étant fonction de x , 129. — Les coefficients différentiels deviennent infinis dans certains cas, 86, 131; pourquoi, 132, 138. — La même fonction peut en avoir dans certains cas de finis, de nuls et d'infinis, 131, 133. — Paraissent quelquefois sous la forme $\frac{0}{0}$, 134. — Comment on en trouve la vraie valeur pour les fonctions implicites, 135, 136. — deviennent quelquefois imaginaires, quoique la fonction primitive soit réelle, 139. — Cas où celui du premier ordre a le même signe que la fonction, 170.

Coefficiens indéterminés (attention qu'il faut avoir dans la méthode des), *Intr.* 21.

Combinatoire (analyse), *Intr.* 20; 122.

Condorcet : comment il présente la formation des équations différentielles, 42 a. — Sa théorie des équations de condition, 551-557. — propose une méthode générale d'intégration, 581. — Son éloge d'Euler, cité, 838 Note. — Forme qu'il donne à l'intégrale aux différences du produit de deux facteurs, 959. — Ses re-

marques sur la détermination des fonctions arbitraires, qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles, 1061, 1103. — détermine les équations de condition relatives à l'intégrabilité des fonctions différentielles et des fonctions aux différences, 1104. — Ses recherches sur les équations aux différences mêlées, 1256.

Cône tangent aux surfaces du second degré, 316 a.

Cône droit : son volume, 521, 521 a, 525. — Son aire a des portions quarrables, 544.

Cône oblique : expression de son aire, 526, 526 a.

Conon (spirale imaginée par), 248.

Constantes : des quantités regardées comme constantes, 1. — disparaissent par la différentiation, 8, 49; et lorsqu'on prend les différences, 881.

Constantes d'une équation : ce qui arrive lorsqu'on les fait varier, 262.

Constantes arbitraires : leur introduction dans les intégrales et leur détermination, 367, 470. — Leur nombre, 590, 591, 591 a, 615 a. — Cas où on les fait varier, 610, 617, 636, 638, 639, 674, 738, 740, 1039, 1064, 1073, 1262. — Usage de leur variation dans les questions de *maximums* et de *minimums* des intégrales définies, 838.

Contact des courbes : condition du contact de deux courbes, 218. — Distinction entre le contact et l'osculation, 222. — considéré comme la réunion d'un certain nombre de points d'intersection, 229; par les infiniment petits, 260.

Contact des surfaces, 315, 318, 821.

Continuité : la loi de continuité se manifeste par la considération des limites, 229. — Expression de la continuité des surfaces, 313. — N'existe pas dans certains passages des aires des courbes du positif au négatif, 492; et des volumes, 517.

Coordonnées : leur transformation et ses principaux usages dans la théorie des lignes courbes, 182.

Coordonnées dans l'espace (les), sont au nombre de trois pour un même point, 266. — Interprétation de leurs signes, *ibid.* — Leur transformation, 290-297, 294 a, 295 a.

Coordonnées polaires, 248. — Passage des

- coordonnées rectangles aux coordonnées polaires, 249-253; dans l'espace, 297.
- Cordes vibrantes* (problème des), 804, 1101, 1103.
- Cosécante* d'un arc de cercle : ses développemens en produits indéfinis, 1188.
- Cosinus* : développement du cosinus suivant les puissances de l'arc, *Intr.* 37, 39; par les limites, *Intr.* 52. — Son expression en exponentielles imaginaires, *Intr.* 41, 42 a. — Expression du cosinus d'un arc multiple, par les puissances du cosinus et du sinus de l'arc simple, *Intr.* 47-51, 48 a; 99-101. — Expression des puissances du cosinus par les cosinus des multiples, *Intr.* 54, 54 a; 102, 102 a. — Sa différentiation, 15. — Développement du cosinus par l'arc, 87. — Ses développemens en produits indéfinis, 1180, 1188. — Celui de son logarithme, 1181. — Série qui exprime son logarithme suivant les puissances du sinus, 896 *Note*.
- Cosinus* d'arcs imaginaires, *Intr.* 86. — hyperboliques, *Intr.* 86 *Note*; 495.
- Cotangente* d'un arc de cercle : ses développemens en produits indéfinis, 1188.
- Côtes* : sa définition des logarithmes, *Intr.* 36 *Note*. — Son théorème, *Intr.* 75. — Usage de ce théorème pour décomposer les exponentielles en facteurs, 1189.
- Courbes algébriques*, 174. — transcendentes, 174, 242-254. — mécaniques, 174. — Division des courbes en genres, *ibid.* — Construction par points, 177. — Examen du cours d'une courbe d'après son équation, 175-181. — Nombre des branches infinies des courbes, 178, 194. — Leurs points singuliers, leurs points multiples, leurs limites, leurs points d'inflexion, 180, 191. — Leurs points de serpentement, 190, 190 a. — Leurs points de rebroussement, 181. — Nœuds, *ibid.* Fenilles, *ibid.* — Leurs points conjugués, *ibid.* — Leur centre, 183. — Leurs diamètres, 183-185. — Leurs axes, 184. — Osculation des branches d'une courbe; leur embrassement, 188, 202, 202a. — Le nombre d'intersections de deux courbes, 196 *Note*. — Détermination des circonstances du cours des courbes par les séries, 197-204. — Préparation de leur équation pour faciliter leur construction par points, au moyen des artifices de l'analyse indéterminée, 199 *Note*. — Leurs branches hyperboliques et paraboliques, 203. — Elles ont pour asymptotes des courbes, 203, 204. — Les ordres de courbes se divisent en genres par la considération des branches infinies, et en espèces par celle des points singuliers, 206. — Expressions générales de leurs sous-tangentes, tangentes, sousnormales et normales, 213; moyen de trouver ces expressions, lorsque les coordonnées font un angle quelconque, *ibid.* — Expression de la différentielle de l'arc d'une courbe. *Voyez* arc; de la différentielle de son aire. *Voyez* aire. — Courbe contenant les centres des cercles osculateurs d'une courbe donnée, 225, 226. — Description des courbes planes par le développement, 226, 228. — Elles ont une infinité de développées, 349. — Les développées des courbes algébriques sont rectifiables, 226. — Équation d'une courbe au moyen de son arc et de sa courbure, 255, 255 a, 686. — Courbes osculatrices déterminées par la considération des polygones touchans et des polygones touchés, 260. *Voyez* lignes osculatrices. — Courbes envisagées comme des polygones, 256-265. — Distinction de la courbe rigoureuse et de la courbe polygone, 258 a. — Trouver l'équation de celles qui en touchent une infinité d'autres d'une nature donnée, et assujéties à se succéder suivant une certaine loi, 262. — Courbe décrite par une courbe donnée roulant sur une autre, 263-265. — Une courbe quelconque étant donnée, on peut toujours en trouver une qui, roulant sur une autre courbe aussi donnée, engendre la première par un de ses points, 265. — Usage des courbes paraboliques, pour évaluer les intégrales aux différentielles, 476, 1025-1028; pour l'interpolation des suites, 898. — Quadrature des courbes, 487-499. — quarrables, 487, 574. — Leur rectification, 500-513. — ayant un nombre donné d'espaces quarrables, 535. — engendrant des volumes dont l'évaluation dépend du cercle, 536. — rectifiables, 537. — Trouver deux courbes algébriques, telles que la somme de leurs arcs dépende d'une différentielle donnée, 538. — Détermination des courbes pour lesquelles on a une équation homogène entre l'arc et les coordonnées rectangles, 586. — Détermination des courbes, dont le rayon de

courbure est constant, 593 ; ou exprimé par une fonction de l'une des coordonnées, 597. — Construction de la courbe dont la soutangente est une fonction donnée de l'abscisse, 677. — Trouver une courbe dans laquelle la soutangente soit à l'ordonnée comme une ligne constante est à la somme ou à la différence de l'ordonnée de cette courbe et de celle d'une autre tracée d'une manière quelconque, 678. — Construction des courbes données par des équations entre l'arc et le coefficient différentiel de l'ordonnée, 679. — Trouver la courbe qui coupe toutes celles d'une espèce donnée sous un angle donné, 681. — Equation de celles dont le rayon de courbure est égal à la normale prise avec le signe + et avec le signe —, 684. — Détermination des courbes qui sont semblables à leurs développées successives, 685, 686. — Une courbe qui en touche une infinité d'autres, représente la solution particulière de l'équation différentielle du premier ordre qui appartient à celle-ci, 687. — Trouver une courbe telle que toutes les perpendiculaires abaissées d'un point donné sur ses tangentes soient égales entre elles, *ibid.* — Trouver l'équation de la courbe où la longueur de la normale et la distance de son pied à l'origine des abscisses, ont entre elles une relation donnée, 688. — Courbes de poursuite, 689. — Courbe décrite par le sommet d'un angle dont les côtés touchent continuellement une courbe donnée, *ibid.* — Courbe de la plus vite descente, 830. *Note.* — Trouver celle dans laquelle la tangente prolongée de part et d'autre du point de contact, jusqu'à deux ordonnées correspondantes à des abscisses données, détermine sur ces ordonnées des parties dont le produit soit un *maximum* ou un *minimum*, 833. — Courbe qui produit par sa révolution la surface qui éprouve la moindre résistance de la part d'un fluide, 867. *Note.* — Détermination de celle dans laquelle l'espace compris entre la courbe, sa développée et deux de ses rayons de courbure, est un *maximum* ou un *minimum*, 868. — Trouver celle le long de laquelle doit descendre un corps soumis à l'action de la pesanteur, et éprouvant de la part du milieu dans lequel il se meut, une résistance proportionnelle à la puissance $2n$ de la vitesse, pour acqué-

rir le *maximum* de vitesse, 872. *Note.* — Courbe élastique ; sa détermination ; elle engendre par sa rotation un solide dont le volume est un *maximum* ou un *minimum* relatif, 874. — Courbe qui, sous un périmètre donné, renferme le plus grand espace, *ibid.* — Déterminer celles qui, par une double réflexion, renvoient un rayon lumineux au point d'où il est parti, 1264. *Note.* — Trouver celles dans lesquelles le carré de la normale surpasse celui de l'ordonnée élevée par son pied d'une quantité constante, 1265. — Trouver celles dans lesquelles la soutangente est dans un rapport constant avec la souscainte correspondante à une différence donnée, 1267. *Courbes à double courbure*, 344 et suiv. — Par l'ensemble de leurs tangentes forment une surface développable, 344. 344 a. — Equations de leurs projections, *ibid.* — Equations de leur tangente, 344, 345. — Leurs soutangentes, 344 a. — Leurs osculations, 345. — Leur contact avec des surfaces, leur plan osculateur, 346, 347, 347 a. — Considérées comme des polygones, 347. — Différentielle de leur arc, *ibid.* — Leur plan normal, la surface des plans normaux, 348. — La sphère osculatrice, 348, 351. — Leurs développées, 350. — Les équations de ces développées, 354. *Courbes à double, triple courbure* ; ce que c'est, 350 a. — Les courbes à double courbure ont deux espèces d'inflexions, 355. — Deux flexions, *ibid.*, 355 a. — Développement ou aplatissement des courbes tracées sur des surfaces, 357-365. — Leur rectification, 533. *Courbes rectifiables sur une surface donnée*, sur la sphère, 539. — qui déterminent sur une surface donnée des aires ou des volumes exprimables algébriquement, sur la sphère, 540-543 ; sur les surfaces coniques, 544. — Trouver l'équation générale de celles dont toutes les tangentes font le même angle avec le plan des xy , 822, 822 a ; qui résultent d'une ligne droite tracée sur un plan, lorsqu'on a roulé ce plan sur un cylindre quelconque, *ibid.* — Intégrale de l'équation de la courbe que produit une ligne droite tracée dans un plan qui enveloppe une surface conique quelconque, 814. — Trouver celles dont le rayon de courbure absolu est constant, 824.

Courbure d'une courbe : sa mesure, 224, 224 a, 255 a, p. 645 du 3^e volume. — Ses variations, avant et après une inflexion, ou un rebroussement, 334. *Voyez Rayon de courbure.*

Courbure des surfaces, 320 et suiv. 327 a, 329 a.

Cousin transforme les équations différentielles ordinaires en équations différentielles partielles, 739

Cramer : sa méthode pour développer les fonctions en série, citée, *Intr.* 65. — Exemples de points singuliers tirés de son ouvrage, 190 a, 202 a. — Sa division

des courbes de même ordre en genres et en espèces, 204.

Cubature des volumes, 514 et suiv.

Cycloïde, 244-247, 244 a. — Sa construction, 244 a. — Son équation déduite de celle des roulettes, 264, 264 a. — Sa quadrature, 498, 498 a. — Sa rectification, 246, 512, 512 a. — est elle-même sa développée, 246, 685. — est la brachystochrone, 830, 866. — renferme entre sa développée et ses rayons de courbure un espace *maximum* ou *minimum*, 868. — accourcie, 564, 512 a. — allongée, *ibid.*

Cylindres, 203 — paraboliques, 310. — projetans, 344.

D

DALEMBERT : ses remarques sur la convergence du développement des puissances du binôme, *Intr.* 5, 6, 7. — Son théorème sur les quantités imaginaires, *Intr.* 79. — prend part à la contestation sur les logarithmes des nombres négatifs, *Intr.* 82. — Sa manière d'envisager le Calcul différentiel par les limites, 80, 81, 256 *Note.* — développe par parties la série de Taylor, 173, 1154, 1155; Condorcet lui attribue mal à propos cette série, 1154 *Note.* — confirme l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce, 234. — Caractère qu'il trouve pour reconnaître si une courbe est plane, 344 a. — Ce qu'il entendait par courbes à double, triple, quadruple courbure, 350 a. — Sa méthode pour compléter les intégrales des équations différentielles du premier degré, dans certains cas, 606 a. — Sa méthode pour intégrer conjointement plusieurs équations différentielles du premier degré, 622. — Comment il intègre l'équation du premier degré d'un ordre quelconque, à deux variables, 623. — Sa dispute avec Euler sur la continuité des fonctions arbitraires des intégrales des équations différentielles partielles, 804. — Sa manière de présenter les équations différentielles partielles, 843 *Note.* — La méthode qu'il a donnée pour intégrer les équations différentielles du premier degré, s'applique aussi aux équations aux différences, 1039.

Définitions : but des définitions, tom. I, p. 140.

Deflers : ses remarques sur le développe-

ment des puissances du cosinus par les sinus et cosinus multiples, 102 a.

Degua : son triangle analytique, *Intr.* 60. — conteste l'existence des rebroussements de la seconde espèce, 234.

Delambre : ses formules pour calculer les logarithmes, *Intr.* 32. — Ses expressions des différences de logarithmes, 890; de celles des sinus, 892, 894; des logarithmes des sinus et des cosinus, 896 et la *Note.*

Descartes : ne croyait pas qu'il fût possible de rectifier une courbe, 226, 500 a.

Développante, 226. — Recherche de la développante par la connaissance de sa développée, 265, 689 a.

Développée d'une courbe, 226, 226 a. — Ce qu'elle devient pour les points singuliers, 234. — La développée de la cycloïde est une autre cycloïde inverse de la première, 246, 685. — La développée de la spirale logarithmique est une spirale semblable, 254, 685, 686. — considérée comme l'intersection des normales consécutives, 261. — Développées imparfaites, 262, 356. — Problème inverse des développées, 265, 689 a. — Une courbe plane a une infinité de développées, 349. — Formation des développées d'une courbe à double courbure, 350. — Leurs équations, 354. — Leur analogie avec les solutions particulières, 689. — Développées successives d'une même courbe; leurs équations, 685. — Tendent vers la cycloïde, 683 a.

TABLE DES MATIÈRES.

741

Développement : distinction établie entre le développement et la valeur d'une fonction, *Intr.* 3, 4. — des puissances du binôme, *Intr.* 15, 18. — des puissances des polynômes, *Intr.* 19, 20, 24; de leurs fonctions, 94-98, 122, 128. — d'une fonction de $x+h$; pourquoi ce développement ne contient point, en général, de puissances négatives de h , 17; de puissances fractionnaires, 137, 137 *a*, 138, 138 *a*; circonstances où ce développement contient des puissances fractionnaires, 132, 231-235; comment on le trouve alors, 140; expression de la limite d'une portion quelconque de ce développement, 169-173, 1154-1156 et la *Note*; expression en lignes de ses différens termes, 218, 219. — en série des fonctions de deux variables, 93, 104, 107. — Remarques sur l'emploi des développemens en série, 102 *a* et la *Note*. — d'une fonction quelconque d'une quantité déterminée par une équation à deux variables, 107, 121. — d'une fonction de deux quantités déterminées par deux équations à trois variables, 108. — des surfaces développables, 350 *Note*. — de la fonction $(1 + n \cos 2)^m$, 456-466.

Développoides, 356.

Diamètres des courbes, 183, 184. — absolu, 185. — plans des surfaces, 298, 302. — Plan diamétral absolu, 312.

Différences : ce que c'est, 4. — Différences finies, appelées simplement *différences*, pourquoi, 879. — Leur usage pour former la table des valeurs d'une fonction, 880, 888. — Formation numérique des différences de divers ordres, 880. — Leur indication générale, 881. — Expression générale d'une différence $\Delta^n u$, 883. — Leur analogie avec les puissances, 884, 930, 933, 934, 935, 940, 941, 970 *a*; déduite des fonctions génératrices, 1126-1133. — des fonctions rationnelles et entières, 885-887. — des fonctions logarithmiques, 889, 890. — des fonctions exponentielles, 891. — des fonctions circulaires, 892, 893 *a*, 894. — des logarithmes de ces fonctions, 896. — des fonctions de plusieurs variables, 913-922. — Différence d'un produit, 920. — Expression des différences d'une fonction lorsque les différences successives des variables indépendantes ne sont pas con-

stantes, 921, 922. — Différence première d'un produit de facteurs équidifférens, 926, 927. — Leur développement en différentielles, par le théorème de Taylor, 930-936; par les fonctions génératrices, 1126, 1127. — Différences où l'exposant de l'ordre est négatif, reviennent à des intégrales, 962. — Expression générale de la différence d'un ordre quelconque d'un produit de deux facteurs, 962, 1129. — partielles : leur définition, 31; leur notation, 913. — Expression des différences totales d'une fonction par ses différences partielles, 919. — Expression par une intégrale définie des différences de x^m , 1255. — mêlées, 1256. — successives, *ibid.*

Differentiatio de curvâ in curvam, 546 *Note*.

Differentiation : règles pour la différentiation des fonctions d'une seule variable, algébriques, 6-12; transcendentes, 13-15. — des fonctions de deux variables, 29, 30. — des fonctions d'un nombre quelconque de variables, 38. — Lorsqu'on dérange l'ordre des différentiations indiquées, et qu'elles restent les mêmes, et en même nombre, le résultat ne change pas, 28. — des équations à deux variables, 41-53. — des équations à trois variables, 74. — à un nombre quelconque, 76. — règle de la différentiation sous le signe $\int$, 546 et la *Note*. — La différentiation peut faciliter l'intégration des équations, 631-634.

Différentielles (définition des), 4. — La différentielle se confond dans un cas avec l'accroissement, *ibid.* — Différentielles logarithmiques, 13. — Formation des divers ordres de différentielles, 21. — partielles (définition des), 31. — totales, 31, 40. — des fonctions à plusieurs variables : leur analogie avec les puissances des polynômes, 32, 40. — Détermination simultanée de toutes les différentielles d'une fonction, par le développement de cette fonction, 35-37. — Différentielle de l'ordre n de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 37, 1054. — d'une fonction de quantités dépendantes de la même variable, 43. — Formules générales des différentielles d'une équation à deux variables, 48. — Change-

ment de différentielle constante, 64, 72. — Loi de l'homogénéité des différentielles, et leur comparaison dans les divers ordres, 80. — Expression générale de la différentielle d'un ordre quelconque d'un produit, 91, 1131. — Différentielles de $\phi(y)$, dy n'étant pas constant, 129, 129 *a*. — Détermination des différentielles, quand la fonction primitive a des racines égales, 133-142. — différentielles considérées dans les polygones d'un nombre infini de côtés, 258, 258 *a*. — binômes, leur intégration, 390-402. — irrationnelles polynômes, 403-412. — des ordres supérieurs, leur intégration, 483, 485. — Intégration de celles du 2^e ordre où dx n'est pas constant, 486. — différentielles exactes ou complètes, leurs caractères pour le premier ordre, 546, 546 *a*, 548, 548 *a*; pour les ordres supérieurs, 549, 550. — Conditions géné-

rales d'intégrabilité, 552-557. — Développement des différentielles par les différences, 957-941; déduit des fonctions génératrices, 1126, 1127. — Différentielles où l'exposant de l'ordre est négatif, sont des intégrales, 966. — Recherche des différentielles des fonctions qu'on ne saurait exprimer autrement qu'en séries dont les termes ont une valeur déterminée, 1016-1022. — interpolées, ou dans lesquelles l'exposant de la caractéristique d est un nombre fractionnaire, 1162. — Expression par une intégrale définie des différentielles de x^m , 1255.

Distance : expression de la distance d'un point à l'origine des coordonnées dans l'espace, 267. — de deux points dans l'espace, *ibid*.

Duséjour et Goudin : leur procédé pour discuter les courbes, 195.

E

ECHELLES de dérivation, ce que c'est, 970 *a*.

Elimination des constantes, des fonctions irrationnelles et des fonctions transcendentes par la différentiation, 49-52, 56. — des variables, entre les équations différentielles, 73, 615, 615 *a*, 635 *a*; entre les équations aux différences, 1062. — des fonctions arbitraires entre les équations différentielles partielles, 77-79, 334, 339, 343, 344, 342 *a*; détermination du nombre de différentiations nécessaires pour faire disparaître un nombre donné de ces fonctions, 79, 792 *a*. — Cas où les fonctions ne peuvent s'éliminer séparément, 790. — Esprit et propriété de l'élimination, 225. — des inconnues des équations algébriques par le moyen des polynômes multiplicateurs, 1032-1035.

Ellipse : sa développée, 228 *a*. — son aire, comparée à celle du cercle, 493. — Sa rectification, série qui exprime le quart de l'ellipse, 502. — Transformations de l'expression de la différentielle de son arc, 504-508. — Liaison des arcs d'une suite d'ellipses dont les excentricités vont en croissant ou en décroissant, 505-507. — Dans cette courbe, la tangente d'un point quelconque coupe sur les perpendiculaires élevées aux extrémités du pre-

mier axe, des parties dont le produit est un *maximum* ou un *minimum*, 833.

Ellipsoïdes, 303, 307, 307 *a*. — de révolution; leur volume, leur aire, 516. — quelconques, 529 *a*. — Equation de la surface qui coupe sous un angle droit tous les ellipsoïdes qui ont un même centre et leurs axes dans la même direction, 800.

Embrassement des branches d'une courbe, 188, 202, 202 *a*.

Epicicloïde, 264.

Equations : développement des fonctions données par des équations où les inconnues sont mêlées, *Intr.* 60-66. — Manière de reconnaître les plus grands termes d'une équation à deux variables, *Intr.* 61. — Equations à deux termes, expression de leurs racines et leur décomposition en facteurs du second degré, au moyen des sinus et des cosinus, *Intr.* 67-71. — Décomposition de l'équation

$$x^m - 2px^m + q = 0$$

en facteurs du second degré, *Intr.* 72, 73. — Formule des racines des équations qui se rapportent à la division de l'arc de cercle, *Intr.* 77. — Résolution des équations du troisième degré dans le cas irréductible par le moyen des sinus et des cosinus, *Intr.* 78. — Recherche des racines imaginaires des équations, *Intr.* 80. —

Différentiation des équations à deux variables, 41-53. — Manière d'avoir les valeurs des coefficients différentiels dans les équations, 41-44, 42 *a*. — Différentiation des équations, dont le nombre est moindre d'une unité que celui des variables qu'elles contiennent, 54. — On peut, dans une équation à deux variables, prendre celle qu'on voudra pour fonction de l'autre, 57 et suiv. — Différentiation des équations à trois variables, 74. — à un nombre quelconque de variables, 76. — Expression de la somme des puissances semblables des racines d'une équation algébrique, 96, 127. — Expression des puissances de leurs racines par le théorème de Lagrange, 110, 111. — Usage du Calcul différentiel, pour résoudre les équations par approximation, 114-117, 116 *a*. — Expression de leurs coefficients par les sommes des puissances de leurs racines, 128. — Détermination de leurs racines égales par le Calcul différentiel, 158. — Formation des valeurs du premier membre d'une équation algébrique par ses différences, 888. — Equation résultante de l'élimination de plusieurs inconnues dans les équations algébriques, degré auquel elle peut monter, 1035.

Equations de condition déduites de la considération des surfaces, 313. — de condition qui doivent avoir lieu dans toute différentielle exacte, 546, 548-557, 851-853. — de condition pour l'intégrabilité des équations différentielles du second ordre à deux variables, déduite de l'intégration, 550. — Equation de condition relative à l'intégration des équations différentielles totales à trois variables, 714; à quatre variables, 722. — *Equations* de condition relatives à l'intégrabilité des fonctions aux différences, 1104. — Leur analogie avec celles qui déterminent les *maximums* et *minimums* des intégrales aux différences, 1105.

Equations qui représentent un système de courbes, 179. — Des divers genres d'équations par lesquelles une même courbe peut être représentée, 255, 255 *a*. — *Equations* d'une courbe exprimées au moyen de quantités inhérentes à la courbe, 255, 255 *a*, 686.

Equations différentielles : leur définition, 44. — Une équation différentielle répond à

une infinité d'équations primitives, et une équation primitive répond aussi à une infinité d'équations différentielles, 53. — Préparer une équation différentielle entre x et y , de manière qu'on y puisse regarder x comme fonction de y , ou y comme fonction de x , 61, 64. — Une équation différentielle, dans laquelle il ne paraît que deux variables et où l'on n'a supposé aucune différentielle constante, peut toujours être regardée comme dérivant de deux équations primitives à trois variables, 70. — Conditions auxquelles doit satisfaire toute équation différentielle à deux variables, dans laquelle on n'a supposé aucune différentielle constante, *ibid.* — Aucune équation homogène, par rapport aux différentielles, ne peut être regardée comme absurde, *ibid.* — Changement de variable indépendante dans les équations différentielles, où plusieurs variables sont fonctions d'une seule, 72. — *Equations* différentielles : leur usage pour développer les fonctions, 94-102. — Une équation différentielle peut représenter une infinité de courbes différentes, 255.

Equations différentielles à deux variables du premier ordre séparées, 558. — homogènes, ou susceptibles de le devenir, 560, 561, 563. — du premier degré et du premier ordre, séparation des variables dans ces équations, 562. — à trois termes, 564. — du premier ordre, intégrables immédiatement, 567. — du premier degré et du premier ordre, leur facteur, 570. — homogènes du premier ordre et leurs analogues, leurs facteurs, 572, 572 *a*, 574. — détermination de l'équation quand le facteur est donné, 575-580. — Leur intégration par la méthode des coefficients indéterminés, en employant des facteurs de forme donnée, 581. — du premier ordre dans lesquelles les différentielles passent le premier degré, 582-589, 582 *a*. — du premier ordre qui s'intègrent après leur différentiation, 587. — du premier ordre, leur construction par les tractoires, 679. — du premier ordre à deux variables, construction qui prouve qu'elles sont toujours possibles, 680.

Equations des ordres supérieurs à deux variables, 590 et suiv. — Leurs intégrales successives, nombre de ces intégrales, 590, 592. — Intégration des équations.

qui ne contiennent que deux coefficients différentiels consécutifs, 593, 594; que deux coefficients différentiels distans de deux ordres, 595, 596; que des coefficients différentiels et une seule variable, 597, 598. — dans lesquelles on change les différentielles prises pour constantes, 598. — homogènes entre les variables et leurs différentielles considérées comme de nouvelles variables, 599-602. — du premier degré à deux variables, sans second membre, 603-609, 604 *a*, 606 *a*. — du premier degré à coefficients constans, leur intégration générale, 604, 607; à coefficients variables, 608, 609. — Lorsqu'elles ont un second membre fonction de x , 610-613. — du premier degré à coefficients variables et d'un ordre quelconque, susceptibles d'intégration générale, 614. — du premier degré en nombre m et renfermant $m + 1$ variables: leur intégration simultanée, 615-619. — Intégration des équations différentielles des ordres supérieurs, par le moyen des facteurs, 620, 621. — Intégration des équations simultanées par des facteurs, 622-624. — du second ordre: leur intégration au moyen du facteur, 625-630. — du premier degré et du second ordre; le facteur qui les rend intégrables peut ne dépendre que d'une seule variable et d'une équation du premier ordre, 627. — du second ordre qui deviennent intégrables par le moyen d'un facteur donné, 628-630. — Lorsque les différentielles passent le premier degré, 631-634, 634 *a*. — Equations qui s'intègrent après une ou plusieurs différentiations, 631-634. — Leurs solutions particulières, 635 et suiv. — Intégration des équations différentielles, par approximation, au moyen de la série de Taylor, 659; par les coefficients indéterminés, 660-666; par les substitutions successives, 667, 672, 673; par les fractions continues, 668-671; par la variation des constantes arbitraires, 674. — Inconvénient de l'introduction des arcs de cercle dans les intégrales en série, 675. — du second ordre et des ordres supérieurs, leur construction par les paraboles osculatrices, 680; par les cercles osculateurs pour le second ordre, *ibid.* — du premier ordre simultanées, leur transformation en équations différentielles partielles, 739; leur facteur, 739 *a*.

— à deux variables du second ordre et des ordres supérieurs, leur transformation en équations différentielles partielles du premier ordre, 739. — à deux variables, leur résolution par les intégrales définies, 1233-1241. — Leur résolution par les intégrales $\int e^{-u} v du$ et $\int u^x v du$, 1251. *Equations* différentielles totales à trois variables du premier ordre, leur intégration, 713, 715-720. — Condition qui doit avoir lieu pour qu'une des variables y soit fonction des deux autres, 714. — dites absurdes, ont une signification réelle, *ibid.* — à trois variables homogènes, leur intégration, 719, 720. — à trois variables où les différentielles passent le premier degré, condition de leur intégrabilité, 721. — totales à quatre variables, leur intégration, 722-724. — du premier ordre à m variables, et nombre des conditions nécessaires pour qu'on puisse y regarder une variable comme fonction de toutes les autres, ou qu'elle ait pour intégrale une seule équation primitive, *ibid.* — à trois variables, des ordres supérieurs, leur transformation par les coefficients différentiels, leur décomposition en équations différentielles partielles, et leur intégration par ce moyen; nombre de constantes qu'on peut faire disparaître, quand on ne fait pas varier dx et dy , 725. — totales à trois variables d'un ordre quelconque, recherche des conditions qui doivent avoir lieu pour qu'elles puissent s'intégrer une ou plusieurs fois de suite, 726, 727. *Equations* différentielles partielles: leur usage pour développer les fonctions, 104-109. — partielles du premier ordre à trois variables, dans lesquelles les coefficients différentiels ne montent qu'au premier degré, leur intégration, 729-734. — à quatre ou un plus grand nombre de variables, 735, 736. — partielles du premier ordre à quatre variables, conditions de l'intégration simultanée de deux équations de ce genre, 737, 748. — partielles à trois variables du premier ordre, leur intégrale générale déduite de l'intégrale complète, renfermant deux constantes arbitraires, 738. — partielles du premier ordre à trois variables qui passent le premier degré par rapport aux coefficients différentiels, leur intégration, 740-747, 741 *a*. — Examen d'un paradoxe que présente ce sujet, 747, 747 *a*. — partielles du premier ordre

à quatre variables qui passent le premier degré par rapport aux coefficients différentiels, 748, 749. — partielles du premier ordre, leur correspondance avec des équations différentielles à trois variables, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 815, 823.

Equations différentielles partielles des ordres supérieurs qui s'abaissent ou se ramènent immédiatement à des équations différentielles, 750, 751. — du second ordre et du premier degré, par rapport aux coefficients différentiels de cet ordre : leur intégration ramenée à celle de deux équations différentielles du premier ordre, 752-757 ; leur intégration lorsqu'elles peuvent avoir une intégrale du premier ordre, 756, 757. — partielles à trois variables qui n'ont point d'intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, 757, 790. — partielles du troisième ordre ou de l'ordre n et du premier degré par rapport aux coefficients différentiels de cet ordre : leur intégration ramenée à celle de deux équations différentielles du premier ordre, 758-761. — partielles du troisième ordre ou de l'ordre n , ne contenant que les coefficients différentiels de cet ordre au premier degré, et multipliés par des constantes : leur intégration, 759, 760. — partielles du second ordre à quatre variables, et du premier degré par rapport aux coefficients différentiels de cet ordre : leur intégration ramenée à celle de trois équations différentielles du premier ordre, et condition sans laquelle cela ne se peut, 762, 763. — partielles du second ordre et du premier degré à trois variables : leur transformation par rapport aux quantités qui entrent dans les fonctions arbitraires, 764, 765, 769, 769 *a* ; leur intégration par ce moyen, 766-768 ; condition d'où elle dépend, 766 et la *Note*. — partielles du premier degré à coefficients variables généralement intégrables, 771. — ne contenant que les coefficients différentiels de cet ordre multipliés par des fonctions de ceux du premier, ou une fonction quelconque de ceux du second ordre : transformations qui conduisent à les intégrer, 772-775, 772 *a*, 773 *a*. — partielles du second ordre à trois variables, qui passent le premier degré par rapport aux coefficients de cet ordre ; remarques sur leur intégration, 775-777. — partielles auxquelles on satisfait par des

séries d'exponentielles, de sinus ou de cosinus, 778. — partielles : leur intégration par les séries, 778-787, 789. — Développement des intégrales par le théorème de Taylor, 779 ; par la méthode des coefficients indéterminés, 780, 781, 783. — par des intégrations successives, 782. — partielles, nombre des fonctions arbitraires qui entrent dans leurs intégrales, 781, 782, 792 *a* ; il ne doit rester sous le signe $\int$ qu'une seule des fonctions arbitraires, 787. — partielles du premier degré, du second ordre et à trois variables, qui n'admettent point d'intégrale générale en termes finis, 786. — partielles du second ordre à trois variables : examen des formes et de l'étendue de leurs intégrales, 788, 790-792, 792 *a*. — partielles à trois variables, dans l'intégrale desquelles on ne peut faire disparaître qu'en même temps les deux fonctions arbitraires, 790. — partielles : leurs intégrales complètes, leurs intégrales générales, 791. — partielles : leurs solutions particulières, 793-795. — partielles du premier ordre : leur construction géométrique par les surfaces courbes, 796. — Construction géométrique des intégrales de quelques unes de ces équations, 798-802, 804, 806. — Interprétation géométrique des intégrales de celles du premier ordre, 803. — partielles du premier degré, du second ordre et à trois variables : détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans leur intégrale, 807. — partielles : manière dont d'Alembert écrivait ces équations, 843 *Note*. — partielles à trois variables, leur résolution par les intégrales définies, 1242-1250. — partielles auxquelles on satisfait par des intégrales définies, dont les limites sont arbitraires, 1248. — partielles à quatre variables, qui se rapportent à la propagation du son, 780, 1246, 1248.

Equations différentielles à trois variables, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité : leur intégration, 808-819. — du premier ordre, dans lesquelles les différentielles ne passent pas le premier degré, 808-811, 811 *a*. — Trouver parmi le nombre infini d'équations primitives qui répondent à une de ces équations, celles qui sont algébriques, 810. — où les différentielles passent le premier degré : leur intégration, 812, 816 *a*, 817.

— du premier ordre : leurs intégrales déduites de la variation des constantes arbitraires et leurs solutions particulières, 813, 814. — du premier ordre correspondant à des équations différentielles partielles du premier ordre, 816, 816 a. — du premier ordre : leur construction par les courbes à double courbure, 820, 820 a, 821 a, 822, 822 a ; leur correspondance avec les équations différentielles partielles, prouvée par la considération des caractéristiques et des arêtes de rebroussement des surfaces, 823. — du second ordre : remarque sur leurs intégrales, 818, 819. — du second ordre répondent à des questions géométriques, 824.

Equations aux différences à deux variables : de quelle manière elles font connaître la fonction cherchée ; combien la série qu'on en déduit doit renfermer de termes arbitraires, 1036. — Cas où on peut les transformer en équations différentielles d'un nombre fini de termes ; elles peuvent toujours être transformées en une équation d'un nombre infini de termes, 1037, 1067. — aux différences du premier degré à deux variables, considérées en général, 1038, 1039, 1065 ; lorsque les coefficients sont constans, 1040-1044 ; lorsque les coefficients sont variables, 1045-1052. — Equations périodiques aux différences : leur intégration, 1051. — Equations aux différences qui se ramènent au premier degré, par le moyen des logarithmes, *ibid.* — Intégration des équations aux différences par les coefficients indéterminés, 1052. — Equation du second ordre aux différences, convertie en fraction continue, 1055. — Intégration des équations où les différences de la variable indépendante ne sont pas constantes, 1056 ; intégration d'une équation de ce genre par les séries, *ibid.* *Note.* — Application aux équations des ordres supérieurs, 1057. — Elimination entre un nombre m d'équations aux différences, contenant $m+1$ variables, 1062. — Equations rentrantes aux différences, 1063. — Intégration simultanée de plusieurs équations aux différences, 1064. — Nature des arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences, 1066-1068 ; détermination de ces arbitraires, 1069 ; leur construction, 1070-1072. — Détermina-

tion des diverses espèces d'intégrales, dont une même équation aux différences est susceptible, 1073-1083. — Intégration des équations aux différences, par les fonctions génératrices, 1116, 1117. — Leur résolution par les intégrales $\int e^{-ux} v du$ et $\int u^x v du$, 1251.

Equations du premier degré aux différences partielles à trois variables et à coefficients constans : leur intégration, 1084-1092 ; à quatre variables, 1093. — aux différences partielles du premier degré à trois variables et à coefficients variables : leur intégration, 1094-1098. — du même genre, dont l'ordre dépend d'une des variables, 1099, 1100. — aux différences partielles à trois variables et à coefficients constans : leur intégration par les fonctions génératrices, 1134-1138.

Equations aux différences mêlées : leur théorie, 1256. — aux différences successives, *ibid.* ; leur intégration, 1257-1261 ; leurs diverses intégrales, 1262. — Leur application à la Géométrie, 1263-1267. — Leur usage dans l'analyse, 1268. — aux différences mêlées et partielles, *ibid.*

Equations linéaires (*Voyez Equations du premier degré*).

Equations parcourantes : *Intr.* 21.

Equations primitives : leur définition, 44.

Equations de Riccati, *voyez Riccati*.

Equations singulières, 635 *Note*, 645.

Euclide donne une proposition contenant le germe de la convergence des séries, *Intr.* 9 a.

Euler : sa démonstration de la formule du binôme, *Intr.* 16. — Série pour calculer l'arc de 45° , par deux tangentes, *Intr.* 44. — remarque un paradoxe dans les formules de sinus et de cosinus d'arcs multiples, *Intr.* 49. — Rectification d'une erreur qu'il a commise sur les développemens des puissances du cosinus et du sinus d'un arc par les cosinus, et les sinus de ses multiples, *Intr.* 54 a, 55 a. — Développemens qu'il donne d'un arc par les sinus de ses multiples, *Intr.* 56 ; par des produits indéfinis de cosinus, de sécantes, *Intr.* 57. — fait connaître la nature des logarithmes des nombres négatifs, *Intr.* 82 ; 492. — Ses idées sur le Calcul différentiel, 81. — Ses notations, 82,

83 a. — Développement de $d^n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

37. — Sa démonstration du théorème de Newton, sur les racines des équations, 96. — Ses remarques sur le développement de $\cos nx$ et $\sin nx$, 99 *Note*. — Formule différentielle qu'il donne pour résoudre les équations numériques par approximation, 116. — s'est occupé des différentielles correspondantes à des valeurs particulières de la fonction, 140. — Ce qu'il entend par *fonctions multiformes*, 164 *Note*. — n'a pas donné toutes les conditions des *maximums* et *minimums* des fonctions de deux variables, 166. — Comment il discute les branches infinies des courbes, 195. — donne l'explication d'une difficulté que présente l'évaluation du nombre des points qui déterminent une courbe d'un ordre quelconque, 196 *Note*. — Sa division des courbes de même ordre en genres et en espèces, 204. — confirme l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce, 234. — Ses travaux sur les surfaces courbes, tom. I, p. 501. — Sa transformation des coordonnées dans l'espace, 294, 295. — Remarques sur sa transformation de l'équation générale des surfaces du second ordre, 301. — détermine les rayons de courbure des surfaces, 324. — donne l'équation des surfaces développables, 339. — Ses recherches sur l'intégration des différentielles dans lesquelles entre un radical du second degré, contenant les quatre premières puissances de la variable, 406; sur le développement de la fonction $(1 + u \cos z)^m$, 462, 463 *Note*. — donne une méthode générale pour obtenir les intégrales par approximation, 467. — transforme le premier les intégrales doubles, 531. — s'occupe de la recherche des courbes quarrables, 534. — résout le problème des deux courbes conjointement rectifiables, 558; celui de la courbe rectifiable sur une surface donnée, 539; celui de la voûte quarrable, 542, 543. — découvre les conditions générales d'intégrabilité des fonctions différentielles, 551, 557, 851-853. — Sa méthode pour intégrer les équations différentielles du premier ordre, en les multipliant par un facteur, 567-574. — renverse le problème de la détermination des facteurs, 575-580. — Equation différentielle du second ordre qu'il a traitée spécialement, 608, 609. — s'occupe de l'intégration des équations différentielles

des ordres supérieurs par des facteurs, 624. — a donné un procédé pour trouver les solutions particulières, 645. — remarque que le facteur d'une équation différentielle du premier ordre, étant égal à zéro, en donne une intégrale ou une solution particulière, 655. — Equations qu'il intègre par approximation, 661-666. — construit une équation entre l'arc d'une courbe et le coefficient différentiel de son ordonnée, 679. — Sa solution du problème des trajectoires, 681-683. — résout le problème de la détermination des courbes qui sont semblables à leurs développées, 685, 686. — démontre le théorème de Jean Bernoulli sur le développement successif des courbes, 686 *a*. — perfectionne la méthode que Lagrange avait donnée pour parvenir à une équation primitive entre les variables des transcendentes elliptiques, 692. — trouve une équation primitive entre les variables de deux transcendentes elliptiques, 694. — Exemple des artifices qu'il emploie pour intégrer les équations différentielles à trois variables, 718. — Idée de la méthode qu'il emploie pour intégrer les équations différentielles partielles du premier ordre à trois variables, 746 *Note*. — trouve une condition nécessaire pour l'intégration des équations différentielles partielles à quatre variables, 762. — transforme les équations différentielles partielles, par rapport aux quantités qui entrent sous les fonctions arbitraires, 764, 765. — satisfait à des équations différentielles partielles du second ordre à trois variables, par une infinité d'équations primitives, sans pouvoir obtenir l'intégrale complète, 778, 1248. — tente l'intégration des équations différentielles partielles par les séries, 783. — trouve une intégrale complète, sans pouvoir obtenir d'intégrale première, *ibid.* — propose la question des surfaces équivalentes, 801. — donne une construction de celles qui répondent au plan, 802. — Sa dispute avec d'Alembert, sur la continuité des fonctions arbitraires des intégrales des équations différentielles partielles, 804, 1103. — donne une théorie nouvelle du calcul des variations, 825. — Sa méthode pour trouver les *maximums* et *minimums* des intégrales définies ne donnait pas les équations relatives aux limites, 838. — se rend le commentateur

de celle de Lagrange, *ibid.* — Sa notation dans les équations différentielles partielles a prévalu, 843 *Note.* — s'occupe du problème des isopérimètres qui a conduit à la méthode des variations, 873. — Formules d'interpolation qu'il donne, 906. — exprime les différentielles par les différences, 937; s'en sert dans la théorie de la lune, 938 *Note.* — fait dépendre les intégrales aux différences des intégrales aux différentielles, et des coefficients différentiels, 963. — Sa méthode pour déterminer les coefficients numériques du développement de $\Sigma a^x y$, 965. — Extrait de ce qu'il a donné dans son Calcul différentiel sur l'intégration approchée des fonctions aux différences, 978, 979. — Formule qu'il a donnée pour la sommation des suites, dans son Calcul différentiel, 993-998. — Remarque sur son interpolation des nombres de Bernoulli, 1006 *a.* — Ses recherches sur les produits de grands nombres, 1010. — Discussion entre lui et Daniel Bernoulli, sur les limites des séries de sinus et de cosinus, 1014. — Applique la sommation des suites à leur interpolation, 1016. — Ce qu'il entend par *fonctiones inexplicabiles*, *ibid.* — remarque la forme des arbitraires qui doivent entrer dans les intégrales des équations aux différences, 1067. — donne le terme général du développement de la fraction rationnelle dont le dénominateur est du second degré et n'a que des facteurs imaginaires, 1121. — trouve les limites de quelques séries divergentes, 1124, 1125. — donne un cas particulier du développement de $\int^m a^x y_x dx^m$, 1127. — détermine par le Calcul différentiel et le Calcul intégral la somme d'un grand nombre de suites, 1140 et suiv. — Séries qu'il désigne sous le nom d'*hyper-géométriques*, 1146. — emploie une intégrale définie pour obtenir la limite de la série divergente

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - \text{etc.},$$

1150. — se sert aussi des fractions continues, 1150 *Note*, *Intr.* 66 *a.* — donne la sommation d'un genre de suites formées par la multiplication des termes correspondans de deux autres, 1153. — Ses travaux sur l'interpolation, 1158. — consi-

dère les différentielles dont l'ordre est désigné par un exposant fractionnaire, 1162. — Ses travaux sur la détermination des valeurs des intégrales définies, 1164. — décompose les exponentielles en facteurs, 1189. — transforme en série le produit d'un nombre de facteurs, soit fini soit infini, 1192. — Ses recherches sur les diverses manières dont on peut former un nombre par l'addition de plusieurs autres, 1193. — Notation qu'il emploie pour indiquer les intégrales définies, 1195. — Mémoire inédit sur ces intégrales, 1202. — applique ces intégrales à la résolution des équations différentielles à deux variables, 1233. — cherche à déterminer les intégrales définies qui répondent à une équation différentielle donnée, 1257. — a résolu des problèmes de Géométrie relatifs aux équations aux différences mêlées, 1263-1265.

Exponentielles : leur origine et leur développement, *Intr.* 21-23. — Leur développement par les limites, *Intr.* 36; par le Calcul différentiel, 85. — Expression des sinus et des cosinus par les exponentielles imaginaires, *Intr.* 41. — Exponentielles imaginaires : sens de ces expressions, *Intr.* 42. — Leur différentiation, 14. — Leur intégration, 431-457. — ont la propriété de satisfaire aux équations différentielles, ou aux différences, du premier degré, à coefficients constans, et sans second membre, de quelque ordre qu'elles soient, 603, 604, 611, 615, 778, 1040, 1067, 1085, 1248, 1255. — e^x exprimée en fraction continue, 669. — Leurs différences, 891; leur intégration aux différences, 955. — Leurs expressions en produits indéfinis, 1182, 1189-1191. — Leur usage sous cette forme pour sommer les séries des puissances négatives, 1183-1186.

Expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$ dans certains cas, 134-136, 143-153. — dont le numérateur et le dénominateur deviennent infinis en même temps, ou qui sont la différence de deux quantités infinies, 149, 150. — qui sont réellement indéterminées, lorsqu'elles deviennent $\frac{0}{0}$, 67, 152, 153.

F

- FACTEURS** : différentiation d'un produit composé d'un nombre quelconque de facteurs, 9. — Quels doivent être ceux qui multiplient les fonctions différentielles pour former des équations qui aient lieu en même temps, 53. — propres à rendre rationnelle une expression irrationnelle, 393. — Facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du premier ordre, 568-586, 569 *a*. — Détermination du facteur quand on a l'équation intégrale, 569; pour les équations du premier ordre, lorsqu'il ne doit renfermer qu'une des variables, 570. — des équations du premier ordre et du premier degré, *ibid.* — d'une équation du premier ordre, composée de deux parties dont on peut trouver séparément le facteur, 571. — des équations homogènes, 572, 572 *a*, 573. — Recherche de ceux qui rendent intégrables simultanément deux équations d'un ordre quelconque à trois variables, 624. — propre à rendre intégrable une équation différentielle du second ordre, lorsqu'il ne doit pas contenir le coefficient différentiel du premier ordre, 625. — des équations du premier ordre : moyen proposé par Trembley, pour les déduire des intégrales et des solutions particulières, 656, 657. — Détermination du facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du premier ordre à trois variables, 713. — Equations qui doivent avoir lieu lorsqu'il existe un tel facteur, 713, 713 *a*. — propre à rendre intégrable une équation différentielle à 4 ou à *m* variables : conditions qui doivent avoir lieu pour que ce facteur existe, 723. — propre à rendre intégrables les équations différentielles à deux et à trois variables : cercle vicieux que présente sa détermination, 737. — des équations différentielles simultanées, 739 *a*. — Leur emploi dans le Calcul des variations, 870. — Recherche du facteur qui rend intégrable l'équation du premier degré d'un ordre quelconque aux différences, 1065. — Recherche de ceux qui rendent intégrables les équations aux différences; formation des équations dont ils dépendent, 1104.
- Factorielles** : leur définition, 981. — Leurs propriétés, 982, 983. — Expression des puissances par les factorielles, 984-986.
- Expression des factorielles par les puissances, 985. — Factorielles à base binome, leur développement, 987. — Leur usage dans l'interpolation de quelques séries, 988, 989, 1160. — Transformation des factorielles pour les interpoler, 988. — donnent l'expression de la circonférence du cercle et de quelques quantités irrationnelles, 989. — Expression approchée de leur logarithme, 1010, 1021; de sa différentielle, 1021. — Expression de leurs différentielles, de leurs différences, 1153. — Leur expression par des intégrales définies, 1160. — Leurs relations déduites des intégrales définies, 1203, 1204. — Comment on peut les évaluer en nombres, 1204.
- Facultés numériques**, ce que c'est, 981 *Note*, 1203 *Note*.
- Fagnani** : sa rectification de la *lemniscate* est l'origine de la comparaison des transcendentes, 711.
- Famille de surfaces courbes**, ce que c'est, 333.
- Fermat** donne des limites entre lesquelles l'arc d'une courbe est compris, p. 634 du tom. III. — Son théorème sur les nombres premiers, 887 *a*.
- Feuilles d'une courbe**, 181.
- Fluxions** (méthode des), voyez la Préface du tom. I.
- Foncenex** (Daviet de) s'occupe de l'équation $\phi(x)^2 = \phi(2x) + 2$, 1056 *Note*.
- Fonctions** : leur définition, *Intr.* 1. — se divisent d'abord en explicites ou implicites, *Intr.* 2; algébriques, ou transcendentes, *Intr.* 2, 3; entières, ou fractionnaires, rationnelles ou irrationnelles, *Intr.* 3 *a*. — Distinction entre leur développement et leur valeur, *Intr.* 4. — dans une fonction ordonnée par rapport aux puissances de *x*, on peut toujours prendre *x* assez grand, pour que le terme affecté de la plus haute puissance soit supérieur à la somme de tous les autres, *Intr.* 9. — susceptibles de limites, *Intr.* 11-13. — Développement des fonctions données par des équations ou les inconnues sont mêlées, *Intr.* 60-65. — Développement des fonctions en fractions continues, *Intr.* 66, 66 *a*. — Changement d'une fonction de *x*, lorsque *x* devient *x* + *h*, 1. — Recherche de

la forme du développement de $f(x+h)$, 2, 137, 137 a, 138, 138 a; fonctions qui en dérivent, 3; formation générale de ce développement, 16, 24; autre manière d'y parvenir 105; ce qu'il devient dans certains cas particuliers, 131, 133. — Moyen d'obtenir les fonctions dérivées de la fonction primitive, 3. — Deux fonctions égales ont leurs différentielles égales, 8. — Différentiation du produit de deux fonctions, 9, 91. — Développement des fonctions de plusieurs variables, suivant les puissances des accroissemens de ces variables, 25, 26, 33, 34, 38, 39; analogie de ces développemens avec ceux des puissances des polynômes 33, 38, 39. — Différentiation des fonctions explicites de deux variables, 25. — Différentiation des fonctions explicites, renfermant un nombre quelconque de variables, 38. — Développement des fonctions en séries, par le théorème de Taylor, 84-93; par les équations différentielles, 94-102; par les équations différentielles partielles, 104-109. — Développement d'une fonction de fonction, 129, 129 a. — d'une seule variable, leurs *maximums* et *minimums*, 154-164. — de deux variables, 165-168, 166 a. — Cas dans lesquels une fonction a le même signe que son coefficient différentiel, 170. — Intégration des fonctions d'une seule variable, 366 et suiv. *Voyez*, pour le détail des formules, le tableau de la page 154 du tome II. — Recherche des fonctions qui rendent algébriques des intégrales données, 534-543. — Intégration des fonctions de plusieurs variables, 545 et suiv.; classification des diverses espèces d'équations différentielles qui peuvent en résulter, 712. — Formation de la table des valeurs d'une fonction par ses différences, 880, 888. — Expression d'une valeur quelconque u_n de cette fonction, par sa valeur primordiale u , et ses différences successives, 882. — Expression de la différence d'un ordre quelconque $\Delta^n u$, au moyen des valeurs successives u_n , u_{n-1} , etc., 883. — Analogie de ces formules avec les puissances du binôme, 884. — Autres formules du même genre, 923-928. — Récapitulation des fonctions que l'on peut intégrer aux différences, 960. — que l'on ne peut exprimer, ainsi que leurs différentielles, que par des suites infinies, 1016.

Fonctions algébriques, leur développement, *Intr.* 15.

Fonctions arbitraires: leur élimination, 77-79, 79 a, 334, 339, 342 a, 343, 344, 790, 791; leur détermination, 331, 338, 339, 341. — Remarques sur le nombre de ces fonctions dans les intégrales des équations différentielles partielles, 781, 782, 787, 791. — arbitraires, des intégrales des équations différentielles partielles, peuvent être discontinues, 804, 1101-1103. — Leur détermination analytique, 806. — Leur détermination par des équations aux différences, 1058-1061; quand elles entrent d'une manière transcendante dans les équations primitives, 1061. — Nature des fonctions arbitraires, qui entrent dans les équations aux différences, 1066-1069. — Leur construction, 1070-1072.

Fonctions circulaires: leur développement, *Intr.* 37-39; par le Calcul différentiel, 87-92; par le Calcul intégral, 415, 417, 419. — Leurs relations avec les fonctions exponentielles ou logarithmiques, *Intr.* 41-48; déduites du Calcul intégral, 389. — Leur différentiation, 15, 58. — Leur intégration, 438-445, 440 a, 446 a, 451 a.

Fonctions commutatives: ce que c'est, 970 a.

Fonctions continues: ce sont celles dont toutes les valeurs sont liées par une même loi, 796.

Fonctions différentielles: toute fonction différentielle est nécessairement homogène par rapport aux différentielles, 69. — Leur transformation lorsqu'on y change l'acception de la fonction, 69, 69 a, 71, 71 a, 72. — Conditions auxquelles doit satisfaire une fonction différentielle, pour avoir une signification réelle, 71, 72. — Conditions qui les rendent des différentielles exactes, pour le premier ordre, 546, 548; pour les ordres supérieurs, 549, 550. — Conditions générales d'intégrabilité, 552-557.

Fonctions discontinues sont celles dont toutes les valeurs ne sont pas liées par une même loi, 796, 1070.

Fonctions distributives: ce que c'est, 970 a.

Fonctions exponentielles. *Voyez Exponentielles*.

Fonctions gamma sont des factorielles, 1203 *Note*.

Fonctions génératrices d'une seule variable

- leur théorie, 1109-1113. — Leur usage pour l'interpolation des séries et l'intégration des équations aux différences, 1114-1119; pour la transformation des séries, 1122; pour déterminer les expressions générales des différences, des différentielles, des intégrales d'un ordre quelconque par des formules analogues aux puissances, 1126-1133. — génératrices de deux variables: leur théorie, 1134. — Leur usage pour l'interpolation des séries, et l'intégration des équations aux différences partielles, 1135-1138; dans la recherche des expressions générales des différences, des intégrales et des différentielles d'un ordre quelconque, 1139.
- Fonctions* homogènes: leur caractère, 69. — Propriétés de leurs différentielles, 551. — intégration de leurs équations différentielles partielles du premier ordre, 731, 736.
- Fonctions* imaginaires: toutes les fonctions qui renferment des quantités telles que $a \pm b\sqrt{-1}$, peuvent se ramener à la forme $A \pm B\sqrt{-1}$, *Intr.* 87.
- Fonctions* impaires (ou de degré impair): ce sont celles qui ne font que changer de signe quand leurs variables passent du positif au négatif, 1249.
- Fonctions* interscendantes: ce que c'est, 586.
- Fonctions* invariables. *Voyez Fonctions symétriques.*
- Fonctions* irrationnelles: leur intégration, 385-412, 386 a, 389 a. — Facteur par lequel il faut multiplier une fonction irrationnelle, pour la rendre rationnelle, 393.
- Fonctions* logarithmiques: leur développement, *Intr.* 25, 26, 33, 34, 36; par le Calcul différentiel, 86; par le Calcul intégral, 414. — Leur différentiation, 13. — Leur intégration, 427, 430, 428 a, 430 a.
- Fonctions* multiformes: ce que c'est, 164 *Note.*
- Fonctions* paires (ou de degré pair): celles qui conservent la même valeur et le même signe, quand leurs variables changent de signe, 1249.
- Fonctions* périodiques: sont celles dont les valeurs reviennent successivement les mêmes à des intervalles égaux, 1066.
- Fonctions* primitives: ce que c'est, 2, 366.
- Fonctions* rationnelles et entières: ont, dans l'ordre dont l'exposant est égal à celui de leur degré, des différentielles constantes, 22; des différences de même, 886, 917. — Leur intégration aux différentielles, 367-370; aux différences, 945. — Leur transformation en produits de facteurs équidifférens, ou en factorielles, 984-986; remarque sur celle des puissances négatives d'un monome en séries de fractions, donnée par Stirling, 986 *Note.*
- Fonctions* symétriques ou invariables sont celles qui ne changent point de valeurs, quand on permute entre elles les quantités dont elles dépendent. *Voyez le Complément des Elémens d'Algebre.*
- Fonctions* transcendentes: leur développement, *Intr.* 21. — Leur élimination par la différentiation, 52-56.
- Fonctions* uniformes: nom donné par Euler à celles qui ne sont susceptibles que d'une seule valeur pour chaque valeur de leur variable, 164 *Note.*
- Fonctions* qui paraissent $\frac{0}{0}$. *Voyez Expressions.*
- Fonctions* de grands nombres, leur évaluation approchée, 1009, 1010, 1218-1223.
- Fontaine*: sa notation différentielle, 82. — indique une équation entre l'arc d'une courbe et sa courbure, 255 a. — Son théorie des fonctions homogènes, 551. — propose une méthode générale d'intégration, 581.
- Fontana* (Grégoire): ses recherches sur l'intégrale $\int \frac{dz}{1z}$, 1224.
- Fontenelle*: ce qu'il nomme *développée imparfaite*, 262.
- Formule*: détermination de la loi que suit une formule, 1052-1054.
- Fourier*: sa définition du plan, 268; de la ligne droite, 269 *Note.* — Ses remarques sur les deux flexions d'une courbe à double courbure, 355. — Ses recherches sur les intégrales définies, 1217, 1249. — Ses recherches sur l'intégration des équations différentielles partielles, par les intégrales définies, 1249, 1250.
- Fractions* qui paraissent $\frac{0}{0}$. *Voyez Expressions.*
- Fractions* continues: développement des fonctions en fractions continues, *Intr.* 66, 66 a. — Leur usage pour intégrer les équations

tions différentielles du premier ordre à deux variables, 668-671. — Fraction continue, déduite d'une équation du second ordre aux différences, 1055. — Usage des fractions continues pour obtenir la limite de la série divergente

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - \text{etc.},$$

1150 *Note*.

Fractions rationnelles, leur développement en séries, *Intr.* 3; par le Calcul différentiel, 94, 1118, 1119. (voyez aussi dans la table l'art. *séries récurrentes*, et dans l'ouvrage, le n° 1050); par la somme des puissances des racines du numérateur et du dénominateur, 1100 *Note*; par le procédé de Lagrange, 1120, 1121; ce procédé appliqué à la fraction dont le dénominateur du second degré n'a que des facteurs imaginaires du premier, 1121. — Leurs limites, *Intr.* 12-14. — Leur décomposition en fractions simples, ou dont le dénominateur est du premier de-

gré, 372, 375-381, 380 *a*; en fractions dont le dénominateur est réel et du second degré, 379; détermination des numérateurs des fractions simples par le Calcul différentiel, 380, 380 *a*, 381. — Leur intégration, 372-384, 375 *a*, 377 *a*, 378 *c*. — peuvent toujours s'intégrer, soit algébriquement, soit par les logarithmes, soit par les arcs de cercle, 379.

Français (de Colmar) : ses travaux sur l'intégration des équations différentielles partielles, 789, 1268. — emploie la séparation des échelles de dérivation, 970 *a*.

Français (frère du précédent) : ses remarques sur les *maximums* et les *minimums* des fonctions de plusieurs variables, 166 *a*.

Fonctions inexplicables : ce qu'*Euler* entend par là, 1016.

Fuss éclaircit un paradoxe dans les formules de sinus et de cosinus d'arcs multiples, *Intr.* 49. — Ses remarques sur le problème de la voûte quarrable, 543.

G

GAMMA (fonctions) : la même chose que les factorielles ou facultés numériques, 1203 *Note*.

Gauss : sa résolution des équations à deux termes, *Intr.* 71; 887 *a*.

Geométrie : motifs pour la séparer de l'Analyse. Voyez la Préface du tom. I^{er}.

Gergonne : sa *Notice des travaux de l'Académie du Gard*, citée, *Intr.* 32. — Ses

Annales de Mathématiques pures et appliquées, citées, p. 604 du tom. III, 83 *a*, 113 *a*, 162 *a*, 306 *a* *Note*, 606 *a*, 636 *a*, 970 *a*, 1028.

Goudin : Voyez *Dusejour*.

Gregory (Jacques) s'occupe le premier de la logarithmique, 242 *a*.

Gruson : son *Calcul d'exposition* et sa notation différentielle, 83, 970 *a*.

H

HACHETTE et *Poisson* démontrent la transformation de l'équation des surfaces du second ordre, par *Euler*, 301.

Harmonique (série), *Intr.* 30.

Haros : sa formule pour calculer les logarithmes, *Intr.* 32.

Hermann s'occupe de la recherche des courbes quarrables, 534.

Herschell (John, F. W.) : ses formules pour développer les différences et les intégrales des fonctions, 977 *a*.

Hindenburg : ses recherches sur le développement des puissances des polynômes, 122.

Huygens démontre plusieurs propriétés de la logarithmique, 242 *a*.

Hyperboles : leur liaison avec les logarithmes, *Intr.* 27; 491. Voyez *Secteurs*. — des de-

grés supérieurs, 204. — Equation nouvelle de l'hyperbole, 228; sa développée, 228 *a*. — Quadrature des hyperboles, cas où leurs espaces asymptotiques sont infinis, 489. — Hyperbole ordinaire et équilatère, sa quadrature, 490. — Examen des cas où leurs segments asymptotiques ne sont pas compris dans la même expression, 492. — Hyperbole rapportée à son axe transverse : son aire, 493. — Rectification des hyperboles, 500. — Hyperbole ordinaire : sa rectification, 503. — Transformation de la différentielle de son arc, 504, 509. — Ses arcs peuvent s'exprimer par deux arcs d'ellipse, 509. — Hyperbole qui engendre un volume dont l'expression offre un défaut de continuité dans le passage des différentielles

TABLE DES MATIÈRES.

753

aux intégrales, 517. — Dans cette courbe, la tangente à un point quelconque coupe, sur les perpendiculaires élevées aux extrémités du premier axe, des parties dont le produit est un *maximum* ou un *minimum*, 833.

Hyperboloïde à une nappe, 304; à deux nappes, 306, 307.

Hypergéométriques (séries), 1146.

Hyper-Logarithme, ce que c'est, 1231 *Note*.

I

IMAGINAIRES : expression des puissances des binômes imaginaires, par les sinus et les cosinus des arcs multiples, *Intr.* 79, 80. — Forme générale des expressions imaginaires, *Intr.* 87. — Passage du réel à l'imaginaire, dans les intégrales définies, 1206, 1207, 1209, 1216.

Indices : leur emploi, *Intr.* 21 et suiv. — Ce qu'ils signifient dans la Théorie des suites, 881. — Une quantité étant donnée, trouver l'indice auquel elle répond dans une série donnée, 912.

Induction : inconvénient de cette méthode, *Intr.* 49.

Infini (de l'), *Intr.* 14. — Le passage des grandeurs par l'infini rompt quelquefois le lien de la continuité, 492, 517, 1229.

Infiniment petit, *Intr.* 14.

Infiniment petits : leur subordination, 80. — Comment il faut les interpréter, 256, et la *Note*, 258. (*Voyez* aussi la Préface du tom. I.)

Inflexion des courbes planes. *Voyez* *Points singuliers*. — de leurs développées, 234. — des surfaces courbes, 329. — des courbes à double courbure, 355, 355 *a*.

Intégrale d'une fonction différentielle à une seule variable : sa définition, 366. — Cas où l'intégrale $ax^m dx$ devient $\frac{0}{0}$, 368. —

Méthode générale pour obtenir les intégrales par approximation, 467-480. — Développement des intégrales par les formules de Taylor et de Jean Bernoulli, 482. — Intégrales successives des fonctions différentielles des ordres supérieurs, 483, 484; leur développement, 485. — Les intégrales aux différentielles reviennent à des différentielles où l'exposant de l'ordre est négatif, 966. — Expression des intégrales aux différentielles, par les différences et les intégrales aux différences, 967, 1126, 1127. — Formules générales

de Bernoulli : peuvent se déduire du développement de l'intégrale aux différences, 980.

Intégrales définies : ce que c'est que prendre une intégrale depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$, 470; sens de la notation $\int X dx \left[\begin{smallmatrix} x=a \\ x=b \end{smallmatrix} \right]$,

par laquelle Euler les indique, 1196. — Formation des intégrales définies, par les valeurs successives de la différentielle, 471. — reviennent à des valeurs moyennes, 471 *a*. — Limites entre lesquelles sont comprises leurs valeurs, 472, 475. — considérées comme représentant l'aire d'une courbe, et calculées par les polygones inscrits et circonscrits à cette courbe, 474-476. — Détermination de leurs *maximums* et de leurs *minimums*, 825-828, 839, 842, 865, 873; caractères qui distinguent les uns des autres, 876-878. — Leurs valeurs approchées par les sommes et les différences, 1025. — Leur usage pour calculer la limite de la série divergente,

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - \text{etc.},$$

1150. — Leur usage pour l'interpolation des séries, 1158-1163. — peuvent exprimer les factorielles, 1160; leurs différentielles et leurs différences, 1163, et celles d'autres fonctions, *ibid.* — Recherche de leur valeur dans certains cas, 1164-1179, 1196-1217. — Leur développement en produits indéfinis, 1180. — Auteurs qui ont donné des tables des intégrales définies, 1217. — Fonctions de grands nombres : leur évaluation, 1218-1223. — Intégrale $\int e^{-t} dt$, 1221 *Note*. — Usage des intégrales définies pour exprimer les fonctions données par des équations différentielles à deux variables, 1233-1241. — Usage des intégrales définies pour la résolution des équations différentielles partielles à trois variables, 1242-1250. — Intégrales définies dont les limites sont arbitraires, qui satisfont à des équations

- différentielles partielles, 1248. — Transformation remarquable d'une fonction quelconque en intégrales définies, contenant des sinus et cosinus, 1249. — $\int e^{-ux} v du$, et $\int u^x v du$: leur usage pour résoudre les équations aux différences, et les équations différentielles, 1251-1255. — Usage des intégrales définies pour exprimer les différences, les différentielles et les intégrales d'un ordre quelconque des fonctions données par des équations aux différences, ou par des équations différentielles, 1255. — Expression en intégrales définies des intégrales de la fonction x^m , tant aux différentielles qu'aux différences, *ibid.*
- Intégrales doubles d'une fonction différentielle à deux variables**, 519; il n'est pas toujours indifférent d'y changer l'ordre des intégrations, 1216. — Paradoxe sur ces intégrales, expliqué par Lagrange, 520 a. — Leur interprétation par la considération des infiniment petits, 522. — Transformation pour effectuer une des intégrations, 528, 529. — Intégrales triples (des fonctions à trois variables), 530, 532. — Intégrales doubles, fonctions de grands nombres : leur évaluation, 1222, 1225.
- Intégrales aux différences** : formation de ces intégrales par les valeurs successives de leurs différences, 943. — Fonctions arbitraires qu'il faut y ajouter, *ibid.* — Expressions générales de l'intégrale d'une fonction par ses différences, 945, 946; passage de ces formules à celles des intégrales aux différentielles, 980. — Intégrales aux différences des fonctions rationnelles, 945-954. — Passage de $\sum x^m$ à $\int x^m dx$ par les limites, 948, 952. — aux différences des fonctions exponentielles, 955. — des fonctions circulaires, 956-958. — Expression générale de l'intégrale aux différences de l'ordre n d'un produit de deux facteurs, 961, 1229. — Les intégrales aux différences, reviennent à des différences où l'exposant de l'ordre est négatif, 962, 962 a. — Leur expression en séries par les intégrales aux différentielles et les coefficients différentiels, 963-970, 976; 978, 979. — Leur analogie avec les puissances, 966, 968, 970, 970 a; déduite des fonctions génératrices, 1126-1133. — Expression générale des intégrales aux différences, pour un ordre quelconque, 971, 977 a. — Intégrale $\sum \frac{1}{x}$, 980; elle conduit à une transcendante analogue aux logarithmes, 1143; son expression par une intégrale définie, *ibid.* — Recherche de la variation des intégrales aux différences, de leurs *maximums* et de leurs *minimums*, 1105-1108.
- Intégrales des équations différentielles** : intégrales premières, secondes, etc., 590. — Intégrales particulières, ce que c'est, 635; cette dénomination a été mal appliquée, 635 *Note*; moyen de déduire l'intégrale complète de l'intégrale particulière, 642, 652. — Intégrale complète des équations différentielles partielles, 791. — Intégrale générale des mêmes équations, *ibid.*; sa relation avec l'intégrale complète, *ibid.*; celle-ci n'est pas comprise dans l'autre, 803.
- Intégrales des équations aux différences** : intégrale directe, particulière, indirecte, 1073-1083. — des équations aux différences mêlées, 1262.
- Intégrales Eulériennes**, 1170 *Note*, 1199 *Note*.
- Intégrales indéfinies**, 470.
- Intégrales singulières** : ce que c'est, 1216.
- Intégration**, 366. — par parties, 394, 394 a. — par les séries, 413-427. — des différentielles du premier ordre à une seule variable. *Voyez le Tableau de la page 154 du tome II.* — des différentielles des ordres supérieurs, 483-485. — des fonctions dans lesquelles dx est regardée comme variable, 486. — des différentielles du premier ordre à plusieurs variables, 545-548; des ordres supérieurs, 549-557. — Règles et formules pour l'intégration des fonctions rationnelles aux différences, 945-954. — aux différences, effectuée par parties, 959; par approximation, 978-980. — des équations. *Voyez Equations.*
- Interpolation des suites à une seule variable**, par le Calcul des différences, 897-912. — est un problème indéterminé, 898. — Son interprétation géométrique, *ibid.* — Formules d'interpolation déduites de la considération des courbes paraboliques, et par les différences, lorsque les valeurs données sont équidistantes, 898-902, 939; lorsqu'elles ne le sont pas, 903-907. — Comment la loi de la suite peut varier entre deux termes consécutifs, 898, 908, 928, 1006 a. — Il existe une infinité de

TABLE DES MATIÈRES.

755

formules d'interpolation, 908. — Interpolation par les fonctions circulaires, *ibid.* — par les fonctions exponentielles, 909. — par la méthode de Monton, 910, 911. — Trouver l'indice correspondant à un nombre compris entre deux termes d'une série, 912. — des tables à double entrée et des séries à plusieurs variables, 915, 918. — par le moyen de la sommation des séries, 1016-1024. — par les fonctions gé-

nératrices d'une seule variable, 1114-1119. — par les fonctions génératrices à deux variables, 1139. — par les intégrales définies, 1158-1163. — entre les différentielles d'une même fonction, 1162.

Interscendantes : ce que c'est, 586.

Irrationnelles : faire disparaître les irrationnelles des équations, 51.

Isopérimètres (problème des), 873.

K

KRAMP : ses idées sur le Calcul différentiel et sa notation, 83, 970 *a.* — Sa méthode de dérivation, 122, 130. — s'occupe des factorielles, d'abord sous le nom

de *facultés numériques*, 981 *Note*, 1163 *Note.* — les évalue en nombres, 1204. — donne une table des valeurs numériques de l'intégrale $\int e^{-x^2} dx$, 1221 *Note.*

L

LAGNY calcule le rapport du diamètre à la circonférence, *Intr.* 43. — mesure les petits angles par leur tangente, *Intr.* 45.

Lagrange : comment il rend convergentes les séries logarithmiques, *Intr.* 25, 26. — éclaircit un paradoxe dans les formules des sinus et cosinus d'arcs multiples, *Intr.* 49. — Sa méthode pour reconnaître les plus grands termes d'une équation à deux variables, *Intr.* 61. — Sa méthode pour développer les fonctions en fractions continues, *Intr.* 66. — a donné un procédé pour reconnaître si une série est récurrente, *Intr.* 66 *a.* — Sa méthode pour résoudre l'équation $y^n - 2y^n \cos \delta + 1 = 0$, *Intr.* 73. — Sa manière d'envisager le Calcul différentiel, 3, 81. — Sa démonstration du théorème de Taylor, 16, 17. — Sa méthode pour trouver toutes les différentielles d'une fonction, 35-37. — Réflexions sur les changemens qu'il propose dans la notation du Calcul différentiel, 82. — Comparaison de celles qu'il a employées avec celles d'*Euler* et de *Waring*, etc., 82, 83. — Ses remarques sur le développement de $\cos nx$ et $\sin nx$, 99-101; de $\cos x^n$, 102. — Son théorème pour développer les fonctions en séries, 109-113. — Ses formules différentielles pour résoudre par approximation les équations numériques à deux inconnues, 117. — ramène au développement des fonctions, la recherche des différentielles de $\phi(y)$, dy n'étant pas constante, 129, 129 *a.* — Ses remarques sur la forme

de la série de Taylor, 137, 137 *a.*, 138, 138 *a.* — Ce qu'il entend par *puissance infinitième*, 151. — donne les conditions des *maximums* et *minimums* des fonctions de plusieurs variables, 166. — assigne les limites des restes de la série de Taylor, 169, 1154, 1155. — Sa manière d'appliquer le Calcul différentiel aux courbes, 205, 206. — indique des limites comprenant l'arc d'une courbe, 215 *seconde Note*, et pag. 634 du tom. III. — envisage l'exactitude du Calcul différentiel, comme la compensation de deux erreurs, p. 643 du tom. III; discute un reproche fait à Newton par Jean Bernoulli, 258 *a.* — donne les formules de la transformation des coordonnées dans l'espace, 291, 292. — Formules qu'il supprime dans la 2^e édition de sa *Mécanique analytique*, 293 *a.* — indique les moyens de déterminer les équations des surfaces composées de lignes d'une nature donnée, 342. — s'occupe de la différentielle dans laquelle entre un radical du second degré, contenant les quatre premières puissances de la variable, 406. — réduit les intégrations des différens termes d'une série à une seule, 421. — s'occupe du développement de la fonction $(1 + n \cos z)^m$, 464. — explique un paradoxe sur les intégrales doubles définies, 520 *a.* — Sa transformation des intégrales triples, 531. — Sa démonstration du théorème des fonctions homogènes, 551. — Ses remarques sur une démonstration des conditions générales

d'intégrabilité des fonctions différentielles, 557 *Note*. — prouve qu'une équation de l'ordre n a un nombre n d'intégrales premières, 592. — Sa théorie des équations différentielles du premier degré, 610, 624. — Sa théorie des solutions particulières, 635-639. — Nom qu'il leur donne, 635 *Note*, 645. — distingue les solutions particulières doubles et triples, 641. — Sa méthode pour trouver les plus grands termes d'une équation, appliquée aux équations différentielles, 667. — a donné une théorie des fractions continues, 669. — Sa méthode de la variation des constantes arbitraires, 674 et la *Note*. — Ses considérations géométriques sur les solutions particulières, 688, 689. — Ses remarques sur le problème inverse des développées, 689 *a*. — donne une méthode pour obtenir une équation primitive entre les variables de deux transcendentes elliptiques, 692-694. — donne un moyen de construire la comparaison des arcs elliptiques par les triangles sphériques, 709, 710. — ramène l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, où les coefficients différentiels ne passent pas le premier degré, à celle d'autant d'équations différentielles du premier ordre, que les premières contiennent de variables, moins une, 732, 735. — donne une méthode pour ramener les équations différentielles partielles du premier ordre qui passent le premier degré par rapport aux coefficients différentiels, à celles de ce degré, 740. — explique un paradoxe que présente ce sujet, 747. — intègre en série une équation différentielle partielle à quatre variables qui se rapporte au mouvement des fluides, 780. — Ses remarques sur la formation des équations différentielles partielles, 791, 792. — fait voir que l'intégrale complète des équations différentielles partielles n'est pas comprise dans l'intégrale générale, 803. — Sa méthode des variations, 825, 844-878. — trouve le premier l'équation de la surface dont l'aire est un *minimum*, entre des limites données, 843 *Note*. — Ses remarques sur les caractères distinctifs du *maximum* et du *minimum* des intégrales définies, 877. — donne une formule d'interpolation, à laquelle on peut appliquer les logarithmes, 908; autre formule, *ibid.* — réduit en calcul la méthode

de Mouton, 911. — Sa méthode pour trouver toutes les différences d'une fonction, 921. — remarque l'analogie des puissances avec les différences et les intégrales, 930, 970. — Ses remarques sur la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

1014 *Note*. — Ses travaux sur les équations aux différences du premier degré à deux variables, 1038-1040. — Sa méthode pour intégrer les équations du premier degré aux différences partielles à trois variables, 1084-1092. — Séries qu'il nomme récurrentes doubles, 1084. — donne les coefficients des puissances de z dans le développement du produit

$$(1 - az)(1 - bz)(1 - cz) \text{ etc.},$$

lorsque les quantités a, b, c , etc., constituent une progression par différences, 1100 *Note*. — Son opinion sur la nature des fonctions arbitraires qui complètent les intégrales des équations différentielles partielles, 1103. — Questions concernant les *maximums* et les *minimums* des polygones, qu'il a résolues par les variations, 1107, 1108. — donne une méthode pour développer le terme général d'une série récurrente, sans décomposer son dénominateur en facteurs simples, 1121. — Ses remarques sur les précautions qu'il faut apporter dans l'emploi des méthodes d'approximation, 1157.

Lahire prouve qu'une courbe quelconque peut toujours être considérée comme une roulette, 265.

Lambert s'occupe des sinus et des cosinus hyperboliques, 495. — Remarque qu'il fait sur les nombres premiers, 1195 *Note*.

Lamé : équations qu'il donne de la parabole et de l'hyperbole, 228 *a*. — Son équation du plan, 270 *a*.

Lancret : ses remarques sur le développement des courbes à double courbure, 355, 355 *a*, 356. — Ce qu'il nomme *surface rectifiante* d'une courbe à double courbure, 364.

Landen donne un développement singulier du logarithme en série, *Intr.* 33 *a*. — Son analyse des résidus citée, 81. — Sa notation, 83. — exprime l'arc hyperbolique par les arcs elliptiques, 509. — Sa table des intégrales définies, 1217.

Laplace : démonstration qu'il donne du théorème de *Lagrange*, 107. — Son théorème pour développer en série une fonction de

deux quantités déterminées par deux équations à trois variables, 108. — Son théorème pour développer une fonction de x donnée par une équation quelconque entre x et y , 121. — Ce qu'il entend par *plan invariable*, 289 *Note*. — Sa démonstration du principe de la composition des forces, citée, 547. — Sa méthode pour intégrer les équations différentielles du premier degré, 621. — nomme *solutions particulières* ce que Lagrange appelle *intégrales particulières*, 635 *Note*. — Comment il détermine les solutions particulières, 645. — Ses recherches sur les inégalités de Jupiter et de Saturne, citées, 675. — Ses transformations successives des équations différentielles partielles du second ordre et du premier degré, 767-769. — Séries générales qu'il emploie pour intégrer les équations différentielles partielles du second ordre et du premier degré, 784-787. — prouve qu'une seule des fonctions arbitraires doit rester sous le signe f , 787. — donne une méthode pour déterminer les fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale de l'équation différentielle partielle du premier degré du second ordre et à trois variables, 806. — Ses démonstrations des théorèmes de Wilson et de Fermat, sur les nombres premiers, 887 *a*. — Notation qu'il emploie dans une formule générale d'interpolation, 903. — donne l'expression de la différence d'un produit, 920. — prouve l'analogie des puissances avec les différences et avec les intégrales, 931, 970. — emploie les expressions des différentielles par les différences, pour déterminer l'orbite des comètes, 938 *Note*. — donne un développement de $\Sigma^* a^x y$, 969. — trouve l'expression générale des coefficients numériques du développement de Σu , 973-975. — Formule qu'il donne pour la quadrature numérique des courbes, 1028. — Sa méthode pour intégrer les équations du premier degré à coefficients variables, 1045-1050. — convertit en fraction continue une équation du second ordre aux différences, 1055. — Son procédé pour intégrer les équations aux différences, dans lesquelles la différence de la variable indépendante n'est pas constante, 1056. — s'occupe des équations rentrantes, 1063. — intègre des équations aux différences partielles à coef-

ficients variables, 1094. — examine la nature des fonctions arbitraires qui complètent les intégrales des équations différentielles partielles, 1101-1103. — Sa théorie des fonctions génératrices, 1109. — donne des formules pour exprimer les différences, les différentielles et les intégrales de la fonction $a^x y$, 1127; des produits, 1128-1133. — Artifice d'analyse par lequel il somme quelques séries, 1152 *Note*. — Comment il exprime les sommes des restes de la série de Taylor, 1156; d'une autre série divergente, 1157. — Ses recherches sur les intégrales définies, 1205-1209, 1211. — Ses recherches sur l'évaluation des fonctions de grands nombres, 1218-1223. — applique les intégrales définies à la résolution des équations différentielles partielles à trois variables, 1242-1245, 1247. — donne une méthode pour ramener à des intégrales définies, des fonctions données par des équations aux différences et des équations différentielles, 1251-1255. — donne, par des intégrales définies, les expressions des différentielles et des différences de la fonction x^m , 1255. — s'occupe des équations aux différences mêlées, 1256, 1268.

Lavernède: ses formules pour calculer les logarithmes, *Intr.* 32, p. 604 du tom. III.
Legendre: son opinion sur l'emploi des fractions continues, *Intr.* 66 *a*. — omet les parenthèses dans les différentielles partielles, 82. — rapporte la démonstration du théorème de Burmann, 113 *a*. — s'occupe de la différentielle dans laquelle entre un radical du second degré, contenant les quatre premières puissances de la variable, 406, 407. — Ses considérations sur les arcs d'ellipse et d'hyperbole, 507, 509, 511, 697-708, 711. — ramène aux transcendentes elliptiques, la quadrature de l'ellipsoïde, 529 *a*. — fait usage de la transformation des intégrales doubles et triples, 531. — Transformation qu'il donne d'une équation du premier degré d'un ordre quelconque, 614. — Remarque qu'il fait sur une solution particulière, 646. — Sa méthode pour trouver les solutions particulières des équations différentielles, 650, 651. — perfectionne la construction des courbes données par une équation entre l'arc et le coefficient différentiel de l'ordonnée, 679. — donne une méthode pour intégrer les équations diffé-

- rentielles partielles du premier ordre à trois variables, 742 *Note*, 745. — Sa méthode pour intégrer les équations différentielles partielles du premier degré, 769, 770. — Transformation qu'il donne pour intégrer les équations différentielles partielles du second ordre qui passent le premier degré par rapport aux coefficients du premier ordre, 772, 773; ou qui ne contiennent que ceux du second, et au-delà du premier degré, 775. — Son mémoire sur les caractères qui distinguent le *maximum* du *minimum* dans les intégrales définies, 877. — donne une expression des différences du sinus, 893. — a concouru à la construction des grandes tables trigonométriques du système décimal, 895 *Note*. — Séries qu'il a nommées *demi-convergentes*, 1000. — Formule qu'il donne pour la quadrature numérique des courbes, 1031. — Traite les factorielles par des intégrales définies, 1163, 1203, 1204; nom qu'il leur donne, *ibid.* *Note*. — Intégrales qu'il nomme *Eulériennes*, 1170 *Note*, 1199 *Note*. — Ses recherches sur les intégrales définies, 1171, 1174, 1212-1217. — Ses travaux sur les intégrales définies qui se ramènent aux transcendentes elliptiques, 1175. — Intégrale définie dont il rapporte la découverte à Euler, 1205. — Ses remarques sur les intégrales fonctions de grands nombres, 1221. — Ses remarques sur l'évaluation des différences d'un ordre élevé, 1255.
- Leibnitz** : ses idées sur l'analyse combinatoire, *Intr.* 20; 122. — Sa controverse avec Jean Bernoulli, sur les logarithmes des nombres négatifs, *Intr.* 82. — Ses idées sur le Calcul différentiel, 82. — Sa notation doit être conservée, 82, 83. — Sa manière d'appliquer le Calcul différentiel aux courbes, 256, 257. — Sa métaphysique sur cette application, 256 et la *Note*. — Origine qu'il donne au Calcul intégral, 366. — Son théorème pour différentier sous le signe $\int$, 546 *Note*. — Ce qu'il entend par *interscendante*, 586. — ne connaissait pas bien l'étendue et la nature des intégrales des équations, 688. — Ses idées sur l'analogie des différentielles et des intégrales avec les puissances, 970. — Ses remarques sur la série
- $$1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.},$$
- 1014 *Note*.
- Lemniscate** : courbe dont la rectification a conduit à la comparaison des transcendentes, 711.
- Lexells** : occupe des conditions générales d'intégrabilité des fonctions différentielles, 557 *Note*. — Eclaircit une difficulté agitée entre Euler et Daniel Bernoulli, sur les limites des séries de sinus et de cosinus, 1014.
- L'Hôpital** reconnaît l'existence du rebroussement de la seconde espèce, 234.
- Lhuillier** : son équation du plan, 269 *Note*. — Sa méthode pour décomposer les exponentielles en facteurs, 1189-1191.
- Lignes** : comment les diverses circonstances du cours d'une ligne sont exprimées par son équation, 174. — Division des lignes en ordres et en genres, *ibid.* — De l'ordre r : leur équation générale, 184. — du second ordre : leur équation générale, 193; leur équation différentielle générale, 634 *a*. — du troisième ordre : leur équation générale; principes généraux de leur énumération, 193. — Difficulté sur le nombre de points qui déterminent une courbe d'un ordre quelconque, 196 *Note*. — osculatrices, 218; leur détermination par les limites, 299, 299 *a*. — Relation des angles qu'une droite fait avec les trois axes des coordonnées, 269, 269 *a*. — Définition de la ligne droite, et son équation, 269 *Note*. — Equations de la ligne droite dans l'espace, 273, 278. — Conditions auxquelles on reconnaît que deux lignes droites se coupent dans l'espace, 276, 277. — Equations de deux lignes droites parallèles entr'elles dans l'espace, 277, 279, 279 *a*. — Détermination des équations de la ligne droite qui passe par deux points donnés dans l'espace, 278. — équations de la ligne droite perpendiculaire à un plan, 280. — Détermination de la droite perpendiculaire à un plan, par la considération du *minimum*, 281. — Détermination de l'angle que font entr'elles deux lignes droites dans l'espace, 284, 284 *a*. — Angle d'une droite et d'un plan, 286. — Détermination de la plus courte distance de deux lignes droites dans l'espace, 287. — Lignes de plus grande pente d'une surface, 319, 319 *a*. — de courbure, 327. — de courbure des surfaces du second degré, *ibid.*; leur équation, 633, 633 *a*. — Lignes singulières, 329, 329 *a*, 341. — Ligne

- de courbure sphérique, 329 *a.* — de striction, 342 *a.* — Ligne formée par une droite enveloppée sur une surface conique quelconque, son équation, 359. — La ligne formée par un fil plié librement sur une surface, est la plus courte qu'on puisse mener entre deux de ses points, 363, 814. — Ligne géodésique, 363 *Note.* — Equations générales de la ligne la plus courte entre deux points sur une surface de révolution, 824. — Détermination, par le calcul des variations, de la ligne la plus courte, entre deux points sur un plan, 829, 836, 838; entre deux points de l'espace, 840; entre deux points placés sur une surface courbe, entre deux courbes données sur une surface, 841.
- Limites*: leur définition, *Intr.* 10. — Examen d'une objection faite contre la méthode des limites, *Intr.* 10, 11. — Recherche des limites des fonctions algébriques, *Intr.* 11. — Propositions qui servent de base à la théorie des limites, *Intr.* 11, 40. — Une fonction peut avoir deux espèces de limites, les unes relatives à l'accroissement de la variable, et les autres à son décroissement, *Intr.* 12, 13. — Méthode des limites, 4, 81. — des courbes, 180; leur détermination par le Calcul différentiel, 230, 231. — Application des limites à la recherche des lignes osculatrices, 229, 229 *a.* — d'une intégrale, 471. — Recherche des limites des séries, au moyen des intégrales, 1143, 1144, 1149-1157.
- Linéaire*, note sur ce mot, 562.
- Logarithmes*: leur développement, *Intr.* 25, 26, 33, 33 *a.*, 34; par les progressions et les limites, *Intr.* 36. — Moyens de rendre plus convergent le développement de la fonction logarithmique, *Intr.* 25, 26, 29, 31, 32. — Limite d'un logarithme, *Intr.* 26. — Logarithmes népériens: leur définition, *Intr.* 27; répondent aux aires de l'hyperbole équilatère, 490. — hyperboliques, *Intr.* 27. — Méthode de Briggs pour obtenir les logarithmes des nombres, *ibid.* — Pourquoi le développement de lu ne procède pas suivant les puissances de u , *Intr.* 33. — Expression des logarithmes des quantités imaginaires, *Intr.* 81. — Un même nombre a , dans chaque système, une infinité de logarithmes dont un seul est réel, *ibid.* — des nombres négatifs sont imaginaires, *Intr.* 81, 82, 82 *a.* — Leur différentiation 13. — Développement de $l(a+x)$, par le moyen du Calcul différentiel, 86; du Calcul intégral, 414; par une fraction continuée, 669. — Maximum du rapport du logarithme au nombre, 162, 162 *a.* — Leur intégration, 427-430. — Logarithmes ordinaires: répondent aux aires d'une hyperbole dont les asymptotes font entr'elles un angle aigu, 491. — des nombres négatifs: ne forment pas un système continu avec ceux des nombres positifs, 492, 1229. — des nombres positifs et des nombres négatifs: difficulté de prouver leur existence simultanée par la considération des courbes et des solides, 517. — Leurs propriétés déduites de la comparaison de deux différentielles logarithmiques, 690. — Marche de leurs différences, 880. — Formation des tables de logarithmes, par leurs différences, 889. — Sommation des logarithmes des nombres naturels, 1008, 1009. — Logarithme intégral: ce que c'est, 1231.
- Logarithmique*: son équation, 242. — Moyens de la construire, 242 *a.*, 677. — Sa soutangente, sa normale, sa sounormale et son rayon de courbure, 243. — Son aire, 497.
- Logo-logarithme*: ce que c'est, 1231 *Note.*
- Lorgna*: formule qu'il donne pour obtenir les valeurs des intégrales par les différences, ou les aires de courbes par les différences des ordonnées équidistantes, 1029. — Ses formules pour sommer les séries des puissances négatives des nombres, 1184.

M

- MACHIN*: sa méthode pour calculer la tangente de l'arc de 45° , *Intr.* 44.
- Maclaurin*: son théorème pour le développement des fonctions, 84, 84 *a.*, 103. — Son procédé pour décomposer les fractions rationnelles, 375. — Expressions en différences, analogues à son théorème, 926.
- Malus*: sa théorie de la réfraction et de la réflexion, citée, 327.
- Maseres* rapporte des formules de Machin. Voyez *Machin*.

Mascheroni : ses recherches sur la transcendante $\int \frac{e^x dx}{x}$, 1224-1229, 1231 *Note*, 1232. — donne une expression plus exacte de la limite de la série divergente

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - \text{etc.}, 1227.$$

Mauduit : rassemble les expressions de sinus et cosinus des arcs multiples, *Intr.* 50.

Maupertuis détermine les courbes de poursuite, 689.

Maurice : sa méthode pour compléter les intégrales des équations différentielles du premier degré dans certains cas, 606 *a.*

Maximums et minimums des fonctions d'une variable, 154-164, 154 *Note*. — Conditions générales qui les déterminent, 155; 160. — des fonctions de plusieurs variables; 165-168, 166 *a.* — des ordonnées des courbes, 230. — Usage de la méthode des *maximums* et *minimums* pour déterminer la perpendiculaire à un plan, 281; pour trouver la plus courte distance de deux droites dans l'espace, 287. — des rayons de courbure des surfaces, 321; de leurs ordonnées, 329, 329 *a.* — des intégrales définies. Voyez *Intégrales définies*. — des intégrales aux différences, 1105-1108; analogie de leur détermination avec les équations de condition relatives à l'intégrabilité des fonctions aux différences, 1105.

Métaphysique : abus de la métaphysique en Mathématiques; 492.

Meusnier : ses remarques sur la courbure des surfaces, 324, 327 *a.*

Milieu entre deux expressions : dans quel cas il approche de la vérité, 473 *a.*

Module : ce que c'est qu'un module logarithmique, *Intr.* 27. — Propriété remarquable de ce nombre, 162, 162 *a.* — est le sinus de l'angle des asymptotes d'une hyperbole, 491.

Moirre : sa formule pour élever un polynôme à une puissance quelconque, *Intr.* 20. — Lemme remarquable qu'il donne, *Intr.* 48 *a.* — donne la loi de la formule du retour des suites, *Intr.* 59. — Extension qu'il donne au théorème de *Côtes*, *Intr.* 76. — Relation qu'il assigne aux nombres de Bernoulli, 951.

Monge : sa théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure, tom. I, p. 501. — Ce qu'il nomme *traces* d'un plan, 271. — donne la signification géo-

métrique des termes de l'expression d'une inconnue dans les équations du premier degré, 274. — Formules qu'il donne pour la transformation des coordonnées dans l'espace, 290, 293, 293 *a.* — Ce qu'il entend par *ligne de courbure sphérique*, 329 *a.* — détermine les surfaces limites par leurs caractéristiques, 336. — Comment il présente les surfaces développables, 339; en détermine l'arête de rebroussement, *ibid.* — Ce qu'il entend par *ligne de striction*, 342 *a.* — Son procédé pour éliminer les fonctions arbitraires, 343. — a donné une théorie des courbes à double courbure, 346. — Sa détermination des surfaces développables qui ont pour arête de rebroussement une famille de courbes liées par une propriété commune, 365 *a.* — Ses remarques sur les lignes de courbure des surfaces du second degré, 633, 633 *a.* — donne une méthode pour intégrer les équations où les différentielles passent le premier degré, 634, 634 *a.* — fait voir qu'aucune des équations à trois variables n'est réellement absurde, 714; qu'elles ont des solutions générales, 808. — ramène l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, où les coefficients différentiels ne passent pas le premier degré, à celle d'autant d'équations différentielles du premier ordre, que les premières contiennent de variables, moins une, 734. — Leçons qu'il donne sur ce sujet, 734 *Note*, et la *Note* indiquée p. 702 du tom. III. — Son procédé pour intégrer les équations différentielles partielles des ordres supérieurs, 752-763. — Liaison des surfaces qu'il nomme réciproques, 772 *a.* — Comment il a intégré l'équation différentielle partielle de la surface dont l'aire est un *minimum*, 774. — Ses constructions des intégrales des équations différentielles partielles, 798, 799, 802, 805. — intègre l'équation des surfaces équivalentes au plan, 801. — regardait l'intégration des équations différentielles, dites absurdes, comme la clef de celle des équations différentielles partielles, 811 *a.* — découvre une correspondance entre les équations différentielles partielles du premier ordre, et les équations différentielles de cet ordre, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 815. — Résultat qu'il obtient relativement aux équations différentielles du

second ordre, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 818. — Ses considérations sur les surfaces développables circonscrites à la sphère et sur leurs arêtes de rebroussement, 822. — Comment il détermine les fonctions arbitraires, 1058-1061. — Ses remarques sur les diverses intégrales dont est susceptible une même équation aux différences, 1076. — Son opinion sur les fonctions ar-

bitraires qui complètent les intégrales des équations différentielles partielles, 1103. *Montucla* : ses remarques sur le problème de *Viviani*, 542. *Mouton* : sa méthode d'interpolation, 910-912; réduite en formule, par Lagrange et par Prony, 911; au moyen de l'analogie des puissances avec les différences, 940. *Muller* donne une formule pour calculer les logarithmes, *Intr.* 32, p. 604 du tom. III.

N

NAPPES des surfaces courbes : leur définition, 298.

Neil. Voyez *Van Heuraet*.

Neper, inventeur des logarithmes, *Intr.* 27.

Newton : sa formule du binôme, *Intr.* 17; y arrive par induction, *Intr.* 49. — Sa méthode pour le retour des suites, *Intr.* 58. — Son parallélogramme analytique, *Intr.* 60. — Sa méthode des substitutions successives, *Intr.* 64; appliquée à l'intégration des équations différentielles par approximation, 672. — Ses idées sur le Calcul différentiel, 81. — Sa notation, 83. — Son théorème sur les racines des équations, 96, 127. — divise les lignes en ordres et les courbes en genres, 174. — fait l'énumération des lignes du troisième ordre, 204. — donne la limite du rapport entre un arc et sa corde, 215 *Note*. — indique mal les fluxions ou différentielles des ordres supérieurs, 258 *a*. — donne une construction pour la multiplication des angles, 710 et la *Note*. — a indiqué une manière de résoudre les équations différentielles à plus de deux variables, 808. — détermine la surface de révolution qui éprouve la moindre résistance de la part d'un fluide, 867 *Note*.

Nœud d'une courbe, 181.

Nombre exprimé par son logarithme, *Intr.* 28. — Tout nombre exprimé en chiffres revient à une série ordonnée suivant les puissances de 10, *Intr.* 60 *Note*.

Nombres entiers : leur décomposition en parties entières, 1193-1195.

Nombres figurés (suites des) : leur sommation, 991.

Nombres premiers : démonstration des théorèmes de Wilson et de Fermat sur ces nombres, 887 *a*. — Propriété de ces nombres, 1195 *Note*.

Nombres de Bernoulli : leur origine, 951. — Leurs relations, 952, 985 *Note*. — Leur terme général, 975, 977 *a*. — Valeurs des huit premiers en décimales, 1001. — Leur liaison avec la somme des suites des puissances négatives des nombres naturels, 1005, 1006, 1187. — Leur interpolation, 1006, 1006 *a*.

Normale d'une courbe : son équation, 212. — Expression de sa longueur, *ibid.* — des surfaces courbes, ses équations, 317, 326.

Notation du Calcul différentiel : inconvénient de la changer, 82, 83; celle de Leibnitz perfectionnée par Fontaine, 82; sa comparaison avec celles d'Euler, de Waring, de Lagrange, etc., 82, 83. — Nouvelle notation d'Euler, 83 *a*.

O

OMBRES : solution analytique des problèmes relatifs à la détermination des ombres, 339.

Ordonnées : l'ordonnée d'une courbe est le coefficient différentiel de son aire, 217. — des polygones d'un nombre infini de côtés; leurs différences successives représentent les différentielles, 258. — des

paraboles osculatrices : leurs différences expriment les termes du développement de $f(x+h)$, 219, 219 *a*.

Osculation des courbes, 218, 222. Voyez *Lignes osculatrices*.

Osculation des branches d'une courbe, 188, 202, 202 *a*.

P

- PAOLI** donne des formules différentielles pour résoudre les équations, 118-121. — Sa méthode pour développer les fonctions de polynômes, 123-126. — Ses remarques sur l'introduction des fonctions arbitraires, dans l'intégrale d'une équation différentielle partielle du second ordre, 781. — Ses remarques sur les équations différentielles à trois variables qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 811. — Ses *Elementi d'Algebra* cités, *ibid.* — Ses remarques sur l'intégration des équations différentielles du second ordre, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 818. — Ses remarques sur une équation du premier degré aux différences, dans laquelle la différence de la variable indépendante n'est pas constante, 1057. — cherche le facteur propre à rendre intégrables les équations du premier degré aux différences, 1065. — intègre des équations aux différences dont l'ordre dépend d'une des variables, 1098, 1099. — donne une manière particulière de convertir les fractions rationnelles en séries, 1100 *Note*. — ramène à l'intégration d'équations aux différences partielles, la décomposition des nombres entiers en parties entières, 1195. — Ses recherches sur les équations aux différences mêlées, 1268.
- Parabole** : sa développée, 228. — Equation nouvelle de la parabole, 228 *a*. — Sa rectification, 500. — engendre un volume dont l'expression offre un défaut de continuité dans le passage des différentielles aux intégrales, 517.
- Paraboles** : leur usage pour évaluer les intégrales aux différences, 476. 1025-1028. — Leur quadrature, 487. — Leur rectification, 500, 500 *a*. — Leur usage pour l'interpolation des suites, 898.
- Paraboles osculatrices**, 218. — Les différences de leurs ordonnées expriment les termes successifs de la série de Taylor, 219, 219 *a*. — Leur usage pour évaluer par approximation les intégrales définies, 476. — Leur usage pour construire les équations différentielles de tous les ordres, 680.
- Paraboloïde elliptique**, 399. — hyperbolique, 310.
- Parallélepède partagé en cases**, pour former une table à triple entrée, 1093.
- Parseval** donne un théorème pour la sommation de certaines suites résultantes de la multiplication de deux autres, terme à terme, 1152. — Comment il intègre certaines équations différentielles partielles à trois et à quatre variables, 1246. — Ses recherches sur des équations aux différences mêlées, 1268 *Note*.
- Partitio numerorum**, ou décomposition des nombres entiers en parties entières, 1195-1195.
- Pascal** : son triangle arithmétique cité, *Intr.* 20 *Note*. — ses idées sur les définitions, p. 140 du tom. I. — Ses remarques sur la rectification des cycloïdes allongées et accourcies, 512 *a*. — Loi des termes de son triangle arithmétique, 1086.
- Pasquich** : sa notation différentielle, 83.
- Pente**. Voyez *Lignes de plus grande pente*.
- Perspective** : solution analytique des problèmes de la perspective, 331.
- Petit** : sa détermination des axes principaux des surfaces du second ordre, 307 *a*.
- Pfaff** : retourne la série de Taylor, 116 *a*. — Equations différentielles du second ordre dont il s'occupe, 609. — Sa méthode pour intégrer les équations différentielles partielles du premier ordre, et les équations différentielles totales qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 748 *a*, 811 *a*. — Ses recherches sur une équation différentielle du second ordre, sur la sommation de quelques suites transcendantes et sur le retour des suites, 1269.
- Plan** : sa définition, 268. — Son équation, 268-270, 270 *a*. — Ses traces, 271. — Détermination de l'équation du plan qui passe par trois points donnés, 274, 275, 275 *a*. — Equation du plan perpendiculaire à une droite, 280. — Détermination de la perpendiculaire à un plan par la considération du *minimum*, 281. — Mener par un point donné un plan parallèle à un plan donné, 282, 282 *a*. — Détermination de l'angle que font entr'eux deux plans dans l'espace, 285, 285 *a*. — Angle d'une droite et d'un plan, 286. — Plan du *maximum* de projection, 289. — Plan invariable, 289 *Note*. — Formules pour trouver l'équation de l'intersection d'un plan et d'une surface courbe, 296 ; son rayon de courbure, 324.

- Plan normal* d'une courbe à double courbure, 348. — Surface des plans normaux, *ibid.*
- Plan osculateur* d'une courbe à double courbure, 346, 347, 347 a.
- Plan tangent* : détermination d'un plan tangent, mené à une surface, 316, 316 a, 318.
- Plans coordonnés* : leur définition, 266.
- Plans cordes* : ce que c'est, 329 a. — détermination de leur angle dièdre, *ibid.*
- Point* : un point est déterminé dans l'espace par trois coordonnées, 266. — Distance d'un point à un autre, dans l'espace, 267.
- Points conjugués* : leur définition, 181. — Leur détermination par la transformation des coordonnées, 188 ; par le Calcul différentiel, 233.
- Points multiples des courbes*, 180. — Leur détermination par la transformation des coordonnées, 187, 188 ; par le Calcul différentiel, 235, 235 a, 236, 238.
- Points singuliers des courbes*, 180, 181, 230-236, 238-241. — des surfaces courbes, 329.
- Points d'inflexion* : leur détermination par la transformation des coordonnées, 189, 190 ; par le Calcul différentiel, 231, 235, 238, 241.
- Points de rebroussement* de la première espèce et de la seconde, 181, 188 ; leur détermination par le Calcul différentiel, 231, 234, 235. — des surfaces courbes, 329.
- Points de serpentement* : leur détermination par la transformation des coordonnées, 190, 190 a.
- Poisson* fait connaître une erreur échappée à Euler sur un point de la théorie des fonctions circulaires, *Intr.* 54 a, 55 a, 102 a. — Ses remarques sur le théorème de Taylor, 16, 18 *Note*. — Ses remarques sur les points singuliers, 235 a *Note*. — Ses remarques sur les solutions particulières, 646, 648-650, 653. — Ses recherches sur la variation des constantes arbitraires, 674 *Note*. — Ses considérations géométriques sur les solutions particulières, 689. — Ses remarques sur les intégrales des équations différentielles partielles du premier ordre à trois variables, et élevées, 747 a. — Equations différentielles partielles du second ordre élevées, dont il donne des intégrales particulières, 777. — Ses remarques sur le nombre des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations différentielles partielles, 781, 782. — Sur les solutions particulières des équations différentielles partielles, 794, 795. — Sur le nombre des constantes arbitraires qui se présentent dans la détermination des *maximums* et des *minimums* des intégrales définies, 837. — Sur la formation des équations relatives aux limites de ces intégrales, 838. — Ses formules pour les variations des fonctions de deux variables, 861 a ; et celles des intégrales doubles, 862 a. — donne une démonstration du théorème concernant le degré de l'équation finale résultante d'équations algébriques quelconques, 1035. — Ses recherches sur les diverses intégrales et les solutions particulières des équations aux différences, 1079-1083. — limite la discontinuité des fonctions arbitraires des intégrales des équations différentielles partielles, 1103. — Ses recherches sur les intégrales définies, 1209, 1216, 1217, 1248. — Ses recherches sur l'intégration des équations différentielles partielles par les intégrales définies, 1250, et p. 772 du T. III. — Ses recherches sur les équations aux différences mêlées, 1258-1261, 1265, 1266.
- Pôle* d'une courbe, 248.
- Polygones* d'un nombre infini de côtés représentent des courbes, 256. — Relation entre les côtés d'un polygone plan ou gauche, 294 *Note*. — Inscrits et circonscrits à une courbe : leur usage pour obtenir les valeurs approchées des intégrales, 475, 476. — Leur usage pour trouver la différentielle du volume d'un solide de révolution, et celle de son aire, 515. — Leur usage pour construire les équations différentielles du premier ordre à deux variables, 680. — Recherche de ceux dont les aires sont des *maximums* ou des *minimums*, 1107, 1108.
- Polynome* : développement de la puissance m du polynome

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \dots$$
Intr. 19. — Sa liaison avec celle du polynome $\alpha + \beta + \gamma + \delta \dots$ *Intr.* 20, 1195 ; développement de cette dernière, *Intr.* 24. — Développement des fonctions de polynomes, 94-98, 122, 128. — Recherche du nombre de termes d'un po-

- lynome algébrique complet d'un degré quelconque, renfermant un nombre quelconque d'inconnues, et détermination du nombre des termes où l'une de ces inconnues n'entre pas, 1032-1034. — Usage du développement de la puissance quelconque d'un polynome, dans la théorie des suites récurrentes, 1120.
- Produit* : expression générale de la différentielle quelconque d'un produit, 91, 1131.
- Produits* de facteurs équidifférents : leur différence première, 926, 927. — Leur intégrale, 946, 947 ; celle du quotient de l'unité par ces produits, 948 ; analogie de ces intégrales avec $\int x^{m-1} dx$, *ibid.* — de grands nombres, moyen de trouver leurs rapports, 1009, 1010. — indéfinis, expressions de leurs différences, 1020. — Développement d'un produit de facteurs équidifférents, 1100 *Note*. *Voyez Factorielles*. — indéfinis, qui expriment une intégrale définie, le sinus et le cosinus d'un arc, 1180 ; leur logarithme, 1181 ; les exponentielles, 1182 ; toutes les lignes trigonométriques, 1188. — finis et indéfinis, leur transformation en série, 1192. — Les séries auxquelles ils donnent lieu, et leur usage pour la partition des nombres, 1192-1195.
- Progressions* par quotiens dont on tire les nombres naturels, 1195.
- Projectile* : comment on peut construire la courbe qu'il décrit dans un milieu résistant, 679.
- Projections* : relation des équations qui expriment les projections d'une ligne droite dans l'espace, 273. — Rapport de l'aire d'une figure à sa projection, 288. — Relations entre une aire et ses trois projections rectangulaires, *ibid.* — Plan du *maximum* de projection, 289.
- Prony* : tables des sinus naturels et des logarithmes, calculées sous sa direction, 895 et la *Note*. — Formules qu'il donne pour interpoler par les fonctions exponentielles, 909. — réduit en formule la méthode d'interpolation de Mouton, 911. — Formule qu'il donne pour développer les différences d'une fonction d'une seule variable, 936. — communique un Mémoire inédit d'Euler, 1202.
- Puissance* : ce qu'on doit entendre par les puissances à exposant imaginaire, *Intr.* 42. — Ce que c'est que *puissance infinitième*, 151. — de l'hyperbole, 490. — Liaison des puissances fractionnaires avec l'interpolation, 1162. — Puissances du second ordre. *Voyez Factorielles*.
- Puissant* cité pour la transformation des coordonnées dans l'espace, 294 *Note*.

Q

- QUADRATURE des courbes, 487. — Exemple d'un changement de variables qui la facilite, 496. — Usage du Calcul aux différences pour la quadrature numérique des courbes, 1025-1031.
- Quadrature des surfaces, 515, 523, 526, 526 a, 529 a.
- Quarrables (courbes), 487. *Voyez Courbe*.

R

- RACINES égales des équations, 158.
- Raison modulaire* : ce que c'est, *Intr.* 36 *Note*.
- Rayon* du cercle osculateur, de courbure ou de la développée, 221, 224, 226 ; déduit de la courbure, p. 645 du tom. III. — se présente avec le signe $\pm$, 227. — Sa valeur dans les courbes du second degré, *ibid.* ; ce qu'il devient aux points singuliers, 234. — Son expression en coordonnées polaires, 253. — Rayons de courbure des surfaces : leur expression, 321, 323. — de courbure d'une section faite par un plan dans une surface courbe, 324. — de courbure absolu d'une courbe à double courbure, 350, 350 a ; sa détermination, 351, 351 a ; autre expression du même rayon, 352.
- Rayon vecteur*, 248, 297.
- Réaumur* considère les développées imparfaites, 262.
- Rebroussement*. *Voyez Points singuliers*. — des surfaces, 329. *Voyez Arête de rebroussement*.

TABLE DES MATIÈRES.

765

Rectification des courbes, 500-513, 500 *a.*
— des courbes à double courbure, 533.

Réflexion de la lumière : problème relatif
à cette réflexion, 1264 *Note.*

Regnaud aide Mouton dans ses travaux sur
l'interpolation, 911.

Riccati : son équation différentielle, 565,
652, 663, 664, 671, 769, 1236.

Roulettes : leur théorie, 263-265.

S

SÉCANTE : sa différentielle, 15. — For-
mule qui l'exprime par la somme ou la
différence de deux tangentes, 895. —
Ses développemens en produits indéfinis,
1188.

Sécante hyperbolique, 495.

Secteurs elliptiques et circulaires, 494. —
Le secteur hyperbolique est égal à l'espace
asymptotique, *ibid.* — Analogie qu'ont
entr'eux les secteurs elliptiques et les sec-
teurs hyperboliques, 494, 495.

Section d'une surface courbe : par un plan.
Voyez Plan.

Sections principales des surfaces du second
degré, 303.

Segment de l'aire d'une courbe : sa diffé-
rentielle, 217. — Segmens paraboliques,
487.

Séparation des variables dans les équations
différentielles du premier ordre, 558-
566.

Séries : leur origine, *Intr.* 3. — Caractère
des séries convergentes, *Intr.* 5. — Possi-
bilité de rendre le premier terme d'une
série indéterminée plus grand que la
somme de tous les autres, *Intr.* 9, 9 *a.*,
155 *Note.* — qui ne sont jamais conver-
gentes, *Intr.* 9. — décroissantes qui n'ont
point de limites, *Intr.* 30. — harmonique,
Intr. 30 *Note.* — Développement des
fonctions en séries, en cherchant leurs
termes par ordre de grandeur, *Intr.* 60-
65. — Séries ascendantes sont celles où
les exposans de la variable vont en crois-
sant, *Intr.* 65. — descendantes, celles où
les exposans de la variable vont en dé-
croissant, *ibid.* — Série de Taylor. *Voyez*
Taylor. — Usage des séries pour détermi-
ner les circonstances du cours d'une cour-
be, 197-204. — à plusieurs variables :
leur interpolation, 913, 918. — demi-
convergentes : ce que c'est, et leur usage,
1000. — Remarques sur les limites de la
série $1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$, 1014 *Note.*
— Relations entre la somme des termes
pris à des intervalles égaux dans une série
quelconque et la somme totale de cette

série, 999. — Correspondance des séries
et des équations aux différences, 1036.
— Leur transformation par les fonctions
génératrices, 1122. — Leur transforma-
tion purement algébrique, 1123. — Dé-
termination des valeurs des limites de
quelques séries divergentes, 1124, 1125.
— Expression de leurs limites par des in-
tégrales, 1143, 1144, 1149-1157. — Cal-
cul de la limite d'une série divergente, par
les intégrales définies, 1150, 1227 ; par les
fractions continues, 1150 *Note*, *Intr.* 66 *a.*
— Leur interpolation par les intégrales
définies, 1158-1163. — propres à évaluer
les intégrales simples, fonctions de grands
nombres, 1218-1221 ; les intégrales dou-
bles, 1222, 1223. — Séries d'arcs dont les
tangentes procèdent suivant une loi don-
née, 1269.

Séries hyper-géométriques, 1146.

Séries récurrentes : citation du procédé pour
reconnaître si une série est récurrente,
Intr. 66 *a.* — dans lesquelles les diffé-
rences de l'ordre n sont constantes, 884.
— Recherche de l'expression de leur
terme général, 1042 (de là résulte la
détermination algébrique des coefficients
numériques de ce même terme général,
considéré comme formule d'interpolation,
dans le n° 909). — ont pour type général
une équation aux différences, 1050. —
doubles, 1084. — triples, quadruples,
1093. — Recherche de leur terme gé-
néral par les fonctions génératrices, 1116.
— Expression de leur terme général par
des coefficients différentiels, 1118, 1119.
— développement de leur terme général
indépendamment de la décomposition de la
fraction génératrice en fractions simples,
1120, 1121. — doubles : détermination
de leur terme général par les fonctions
génératrices, 1134-1138. — Rapproche-
ment des différens points de la théorie des
séries récurrentes, 1269.

Séries récurro-récurrentes. *Voyez* *Séries ré-*
currentes doubles.

Servois emploie la dernière notation d'Euler

pour les différentielles, 83 *a.* — donne des formules nouvelles pour développer les fonctions en séries, 113 *a.* — Ses considérations sur les propriétés générales des fonctions et sur les principes du Calcul différentiel, 970 *a.* — cite une remarque de Lambert sur les nombres premiers, 1195 *Note.*

Sinus : son développement suivant les puissances de l'arc, *Intr.* 38, 39 ; par les limites, *Intr.* 52 ; par le Calcul différentiel, 87 ; en produits indéfinis, 1180, 1188 ; celui de son logarithme, 896, 1181. — Son expression en exponentielles imaginaires, *Intr.* 41, 42 *a.* — Expression du sinus d'un arc multiple par les puissances du cosinus et du sinus de l'arc simple, *Intr.* 47-51, 48 *a.*, 99-101 ; déduite de l'intégration des équations aux différences, 1052 ; obtenue par les expressions imaginaires, 1053. — Expression des puissances du sinus par les cosinus et les sinus des arcs multiples, *Intr.* 55, 55 *a.* ; 102 *a.* — d'arcs imaginaires, *Intr.* 86. — hyperboliques, *Intr.* 86 *Note* ; leur définition et leur expression en logarithmes, 495. — Leur différentiation, 15. — Leurs différences, 892-894. — Formule pour la construction des tables de sinus, 895. — Tables des sinus naturels des 10000^{es} parties du quart de cercle, calculées sous la direction de Prony, *ibid.* et la *Note.* — Expression du sinus d'un arc multiple par deux sinus antécédents, 1052.

Sinus verse, sa différentielle, 15.

Soldner : ses recherches sur l'intégrale $\int \frac{dz}{12}$, 1231.

Solides. *Voyez Surfaces et volume.* — *Solide* ou *Surface de la moindre résistance*, 867 *Note.*

Solidité. *Voyez Volume.*

Solutions particulières des équations différentielles du premier ordre : exemples de ces solutions, 585, 588. — Ce que c'est, 635. — Leur liaison avec les intégrales, 636-641. — Solutions particulières, doubles, triples, 641. — Moyen de les déduire de l'équation différentielle, pour le premier ordre, 642-647 ; pour les ordres supérieurs, 648-650 ; pour les équations simultanées, 651. — Procédé de Laplace pour les déterminer par le dé-

veloppement de l'intégrale en série, 645. — Leur analogie avec les cas où le théorème de Taylor est en défaut, *ibid.* — Comment elles deviennent facteur de l'équation différentielle proposée, 646. — Comment la différentielle de celle-ci peut aussi être décomposée en deux facteurs, 653. — Leur liaison avec le facteur propre à rendre intégrables ces équations, 654, 655 ; peuvent servir à le trouver, 656, 657. — Manière de les représenter et de les obtenir par les considérations géométriques, 687-689. — Solutions particulières, des équations différentielles partielles, 793, 795. — des équations différentielles qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 813, 814. — des équations aux différences, 1078 et la *Note*, 1082, 1083.

Sommation des puissances négatives des nombres naturels, 1000-1005. — par approximation, 1000-1012. — des séries dont le terme général est une fonction transcendante, 1008-1015. — des séries, appliquée à l'interpolation, 1016-1024.

Somme : ce mot est l'origine du signe d'intégration, 366, 471 et la *Note.* — Sommes successives, 962 ; leur usage pour transformer les équations algébriques, leur formation, 962 *a.* — Distinction des sommes et des intégrales aux différences, 990. — Expression de la somme des suites d'une seule variable, 990, 1015. — des séries de sinus et de cosinus, 1012, 1013 ; paradoxe relatif aux limites de ces séries, 1014, 1015.

Sommets des surfaces du 2^e ordre, 303, 307, 311.

Son : équations relatives à sa propagation, 777 *Note*, 783.

Sounormale : son expression générale, 212.

Soutangente : son expression générale, 207, 207 *a.*, 250, 344 *a.* — déterminée par la considération des polygones d'un nombre infini de côtés, 256, 259.

Sphère : son équation, 272. — Condition des contacts de la sphère avec une surface courbe quelconque ; sphère osculatrice, 320, 320 *a.* — La sphère a un nombre infini de lignes de courbure pour chaque point, 327, 327 *a.* — osculatrice d'une courbe à double courbure, 348, 351. — Son volume, 516, 520 ; son aire,

516. — Courbes rectifiables sur la surface d'une sphère, 539. — Portions de sphère quarrables, 540, 543. — Sphères concentriques : surfaces coniques qui les coupent toutes à angle droit, 800. — Son équation est une solution particulière de celles qui appartiennent aux arêtes de rebroussement des surfaces développables circonscrites à cette sphère, 822.
- Spirales* : leurs équations rapportées à des coordonnées polaires, 248. — Spirale de Canon ou d'Archimède, 248, 250, 499, 513; hyperbolique, 248, 248 *a*, 499; parabolique, 248; logarithmique, 254, 499, 513, 685, 686. — Leur quadrature, 499. — Leur rectification, 513.
- Stirling* : ses formules d'interpolation, 901, 902. — Série qu'il interpole par les logarithmes de ses termes, 909. — a converti le premier les puissances positives et négatives, en produits directs et inverses de facteurs équidifférens, 981. — Remarque sur sa transformation des puissances négatives d'un monome, en série de fractions, 986 *Note*. — Ses travaux sur l'interpolation, 1158.
- Striction*. *Voyez Ligne de striction*.
- Substitutions successives*, *Intr.* 64. — Usage de cette méthode dans l'intégration des équations différentielles du second ordre et du premier degré, 672.
- Suites* : leur retour, *Intr.* 58, 59; 113, 113 *a*, 1269. — d'une seule variable, leur interpolation, 897-912. — à deux variables, qui résultent des solutions d'une équation à trois indéterminées, 913. — Analogie de leur sommation avec l'intégration des différences premières, 943. — Leur sommation par les intégrales aux différences, 990-1015. — Détermination de leur somme en les regardant comme engendrées par le développement des intégrales aux différentielles, 1140-1157. — Sommation de quelques suites formées par les produits des termes correspondans de deux autres, 1152, 1153, 1238. — des puissances négatives des nombres naturels : leur sommation, 1183, 1184, 1187.
- Surface*. *Voyez Aire*.
- Surfaces* : intersection d'une surface courbe et d'un plan. *Voyez Plan*. — Leur division en ordres, 298. — Application du Calcul différentiel à la théorie des surfaces courbes, 313 et suiv. — Expression analytique de leur continuité, *ibid.* — Equations différentielles de leurs sections, 314. — Leur contact, 315; avec un plan, 316, 318, 329 *a*, 339 *a*; avec une sphère, 320; avec une surface du second ordre, 328. — Equation de leur normale, 317. — Equation de leurs lignes de plus grande pente, 319, 319 *a*. — ont pour chacun de leurs points deux sphères osculatrices, 321. — ont deux rayons de courbure différens, 321-326. — Détermination des équations de leurs lignes de courbure, 322, 327. — Rayon de courbure d'une section faite dans une surface courbe par un plan quelconque, 324. — Lieux des centres de courbure d'une surface, 325, 325 *a*. — Une surface *a*, dans chacun de ses points, un contact du second ordre avec une surface de révolution, 328. — Leurs points singuliers, lignes singulières, d'inflexion ou de rebroussement, 329, 329 *a*, 341. — dont les deux rayons de courbure sont égaux et de signes contraires : leur équation différentielle partielle, 329 *a*; son intégration générale, 773, 774; intégrale particulière qu'on en obtient, 777; ces surfaces ont le *minimum* d'étendue entre des limites données, 843. — Plans cordes dans les surfaces courbes : ce que c'est, 329 *a*; détermination de leur angle dièdre, *ibid.* — Leur génération, 330-343. — Détermination des surfaces formées par les intersections successives d'une infinité d'autres de nature donnée, 330 et suiv. — Détermination des surfaces par la considération des lignes dont elles sont composées, 341. — composées de lignes droites, 341, 342. *Voyez aussi Surfaces coniques, cylindriques, développables, gauches*. — composées de cercles. *Voyez Surfaces annulaires*. — des tangentes d'une courbe à double courbure, 344; de ses plans normaux, 348. — Différentielle du volume du segment des surfaces courbes, 518. — Expression de l'élément de leur volume, 522, 522 *a*; en coordonnées polaires, 532. — Expression générale de leur aire, 523, 523 *a*. — dont les portions sont en rapport constant avec leurs projections, 544, 801. — Trouver les surfaces qui coupent sous un angle donné toutes celles qui sont comprises dans une équation différentielle totale du premier ordre don-

- née, 800. — équivalentes, ou de même étendue entre des limites données : leur détermination, équation de celles qui sont équivalentes au plan, 801 ; construction de ces dernières, 802. — Equations et propriétés des surfaces dont tous les éléments sont également inclinés par rapport à un même plan, 802. — Trouver celles qui peuvent faire partie de deux familles distinctes par leur génération, 820. — Trouver l'équation générale des courbes de contact de deux familles de surfaces courbes distinctes par leur génération, 821, 821 *a*. — Détermination de la ligne la plus courte qu'on puisse mener entre deux points ou entre deux courbes, sur une surface donnée, 841. — dont l'aire est un *maximum* ou un *minimum* entre des limites données, 843. — dont l'aire est un *maximum* ou un *minimum* parmi toutes celles qui renferment des volumes égaux, 875.
- Surfaces annulaires* : leur génération, leur équation générale, 334, 340, 340 *a*, 341. — Equation différentielle partielle de celles qui sont engendrées par le mouvement d'une sphère dont le centre reste dans le plan des xy , 334 ; son équation différentielle partielle intégrée, 741 *a*.
- Surfaces coniques* : leur génération, caractères de leurs équations, 305, 330. — Leur équation générale ; leur équation différentielle partielle, 330 ; son intégration, 731. — Détermination d'une surface conique passant par une courbe donnée, ou circonscrite à une surface donnée, 331. — Leur emploi dans la perspective et dans la théorie des ombres, *ibid.* — Expression de leur volume, 525 ; de leur aire, 526. *Voyez Surfaces du second ordre.*
- Surfaces cylindriques* : leur génération, leur équation générale, leur équation différentielle partielle, 332, 341. *Voy. Surfaces du second ordre.*
- Surfaces développables* : leur génération, 339, 339 *a*, 342, 342 *a*. — Leur équation générale, leur équation différentielle partielle, 339 ; son intégration, 776. — Equation de leur arête de rebroussement, 339. — Détermination de celles qui touchent en même temps deux surfaces données, ou qui passent par deux courbes données, *ibid.* — Leur emploi dans la théorie des ombres et des pénombres, *ibid. Note.* — formées par l'ensemble des normales d'une surface courbe, 342. — formées par l'ensemble des tangentes d'une courbe à double courbure, 344. — Détermination de celles qui ont pour arête de rebroussement une famille de courbes liées par une propriété commune, 365 *a*. — équivalentes au plan, 801, 802. — circonscrites à la sphère : leur équation générale et celle de leur arête de rebroussement, 814.
- Surfaces gauches*, ou formées de lignes droites, qui, prises deux à deux consécutivement, ne sont pas dans un même plan, 341, 342. — Leur équation différentielle partielle, 342 et 343 ; intégrée dans un cas particulier, 754 ; en général, 761. — Leur ligne de striction, 342 *a*.
- Surfaces limites* : leur détermination analytique, 330-335. — Leurs caractéristiques, 336. — Détermination analytique de la surface qui touche toutes les surfaces limites comprises dans la même équation générale, 337. — Détermination de la fonction arbitraire de leur équation générale, 338. — formées par les intersections successives d'une suite de sphères dont le centre et le rayon sont variables ; leur équation générale, 340.
- Surfaces réciproques* : ce que c'est, 772 *a*.
- Surfaces rectifiantes* : ce que c'est, 364.
- Surfaces de révolution* : leur génération, leur équation générale, leur équation différentielle partielle, 333, 333 *a* ; son intégration, 733. — Leur volume, 514, 527. — Leur aire, 515, 527. — Manières de décomposer leurs volumes et leurs aires pour en faciliter l'évaluation, 524-532, 529 *a*.
- Surfaces du second ordre ou du second degré*, 298-312. — Leurs diamètres plans, 298. — Transformation de leur équation générale, 299, 299 *a*. — rapportées à leurs axes principaux, 301, 307, 307 *a*. — Leurs sections principales, 303. — Leur énumération, 303-312. — qui ont un centre, 303-307 ; qui en sont dépourvues, 308-311 ; équation simple qui comprend les unes et les autres, 308. — cylindriques, 303 ; coniques, 305 ; engendrées par la révolution d'une courbe plane, 333 *a*. — peuvent être engendrées de deux manières par un cercle, 311, 311 *a*. — Leurs asymptotes, 312. — Leurs lignes de courbure, 327, 633, 633 *a*.

T

TABLES des suites qui résultent des solutions d'une équation à trois indéterminées, ou *Tables à double entrée*, 298, 913. — Leur interpolation, 918. — *à triple entrée*, 1093.

Tables : construction de tables pour classer les intégrales des équations différentielles, leur inconvénient, 634. — Citation des tables d'intégrales définies, 1217.

Tangente d'un arc de cercle : son expression par les imaginaires, *Intr.* 41. — d'un arc multiple, *Intr.* 51. — Sa différentiation, 15. — Son développement suivant les puissances de l'arc, 90-92; en produits indéfinis, 1188. — Formule qui exprime les tangentes des arcs au-dessus de 45°, 895.

Tangente hyperbolique, 495.

Tangentes des courbes : leur détermination par la transformation des coordonnées, 186; par les séries, 197; par le Calcul différentiel, suivant la méthode d'Arbogast, 205, 206; par les limites, 229. — Leur équation générale, 205. — Mener par un point donné une tangente à une courbe, 209. — Mener à une courbe, une tangente parallèle à une ligne donnée, ou qui fasse avec l'axe des abscisses un angle donné, 210. — Expression de leur longueur, 211. — des courbes à double courbure, 344, 345; ce que c'est que leurs *tangentes conjuguées*. Voyez ci-après le *Supplément à l'Errata* du 1^{er} volume, pour la page 650. — Méthode inverse des tangentes, 676, 683; premier problème proposé relativement à cette méthode, 678.

Taylor : détermine les plus grands termes d'une équation, *Intr.* 60. — Son théorème, 18, 23, 24; étendu aux fonctions de deux variables, 26; à celles d'un nombre quelconque, 38; sert à développer les fonctions, 84-93; se déduit du théorème de Maclaurin, 105, 106; se démontre par la différentiation, 105; par le Calcul aux différences et les limites, 929 et la *Note*; appliqué au développement d'une fonction de polynôme, 122; cas où il est en défaut, et pourquoi, 132, 133; limites des restes de la série, 169-173, 1154, 1156 et la *Note*; sert de base à l'application du Calcul différentiel aux

courbes, 205; se construit par des paraboles osculatrices, 218, 219, 219 *a*; ce qu'il devient aux points singuliers, 230-235; sert à développer les intégrales des différentielles, 482, celles des équations, 591, 592; et à les intégrer par approximation, 659; à développer les intégrales des équations différentielles partielles, 779; à développer les différences, 929-936. — Série inverse de celle de Taylor, 116 *a*. — Ses formules pour exprimer l'intégrale et la différence d'un ordre quelconque d'un produit de deux facteurs, 959, 961 et la *Note*, 962.

Terme : moyens de distinguer parmi les termes d'une équation ceux qui sont les plus grands, *Intr.* 61. — sommatoire : sa définition et sa relation avec l'intégrale aux différences, 990.

Théorème de Taylor. Voyez *Taylor*.

Traces d'un plan, 271.

Tractrices servent à construire les équations différentielles du premier ordre, 679. — Description de ces courbes, *ibid.* *Note*.

Trajectoires (problème des), 681-683. — Acception de ce mot en Mécanique, 681 *Note*. — orthogonales, 681. — réciproques (problème des), 1263.

Transcendantes, *Intr.* 3. — Analyse des transcendentes contenues dans la formule

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4}},$$

406-412. Voyez *Transcendantes elliptiques*. — Examen de la transcendante

$$\int \frac{e^x dx}{x}, \text{ ou } \int \frac{dz}{1z},$$

479, 1224-1232; sa discussion par les courbes, 1230. — Comparaison des différentielles de deux transcendentes d'une même espèce, pour en déduire les propriétés de ces fonctions, 690-708, 711. — Moyen proposé pour faire la comparaison de celles qui ne peuvent être données que par une équation différentielle où les variables ne sont pas séparées, 711. — Recherches sur la transcendante... $\int e^{-t^2} dt$, 1157, 1167, 1205, 1221 *Note*. — explicites : comment elles diffèrent des transcendentes implicites, 1233.

Transcendantes elliptiques : leurs proprié-

- tés déduites de la comparaison de deux différentielles de ces fonctions, 692-701. — Comparaison d'un nombre quelconque de ces transcendentes, 702. — Leurs valeurs approchées, prises entre des limites données, 1215.
- Transformation* des fonctions différentielles de deux variables, de manière qu'on y puisse regarder celle des deux variables que l'on voudra comme fonction de l'autre, 69, 71, 72. — des différentielles prises pour constantes, 64, 72; usage de cette transformation dans l'intégration des équations différentielles des ordres supérieurs, 598. — des coordonnées sur un plan, 182; dans l'espace, 290-297, p. 649 du tom. III, 295 a. — des coordonnées: son usage pour déterminer les tangentes des courbes, leurs points multiples, leurs inflexions, 186-190. — des coordonnées rectangles en coordonnées polaires, et des coordonnées polaires en coordonnées rectangles, sur un plan, 249-253; dans l'espace, 297. — de l'équation d'une courbe entre des coordonnées rectangles ou polaires, en une relation entre l'arc et le rayon de courbure, et réciproquement, 255, 255 a. — des intégrales doubles et triples, 524-532. — des équations différentielles du second ordre et du premier degré, 609; usage de l'une de ces transformations, 1234 *Note*. — des équations différentielles partielles, 764, 771, 772, 774, 775. — des séries par les fonctions génératrices, 1122. — Transformations purement algébriques, 1123; usage de ces transformations pour sommer certaines séries, 1124, 1125.
- Trembley* soutient la critique faite par Jean Bernoulli d'un passage de Newton, 258 a. — Proposition qu'il remarque sur les solutions particulières, 647 a. — propose un moyen pour découvrir, par les intégrales et les solutions particulières, le facteur d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables, 655-658, à trois variables, 720. — Ses réflexions sur les arcs de cercle qui s'introduisent dans les intégrales des équations différentielles du premier degré, 675.
- Triangle* arithmétique. *Voyez Pascal*.
- Triangles* sphériques: leur usage pour construire la comparaison des arcs elliptiques, 709, 710.

V

- VAN-CEULEN (Ludolph) calcule le rapport de la circonférence au diamètre, *Intr.* 44.
- Vandermonde considère les factorielles, 981, 1163 *Note*.
- Vanheuraet rectifie l'une des paraboles cubiques, 500 a, 512 a.
- Variables*: leur définition, 1. — Dépendance que les équations établissent entre des variables, 41, 74, 76. — Changement de variable indépendante dans les expressions différentielles, 57 et suiv.
- Variations*: (méthode des), 825-878, 834 a, 838 a. — Sa correspondance avec le passage d'une courbe à une autre, d'une nature différente, 825, 834, 844. — Recherche de la variation d'une fonction primitive ou différentielle, par les différentielles partielles, 826, par la caractéristique δ , 845, 848. — des formules intégrales, par les différentielles partielles, 827, 827 a, 834 a, 835, 835 a, 839; par la caractéristique δ , 847, 848, 854-856. — Examen des variations relatives aux limites des intégrales définies, 828-831, 864-866. — Application du Calcul des variations à la recherche des *maximums* et *minimums*, par les différentielles partielles, 829-843; par la caractéristique δ , 865-875. — Leur usage pour trouver les conditions d'intégrabilité des différentielles, 832, 851-853. — des fonctions contenant deux variables indépendantes et des intégrales doubles, par les différentielles partielles, 842; par la caractéristique δ , 861-863, 861 a, 862 a. — Théorèmes fondamentaux des variations, 844, 845, 846, 850. — des fonctions données par des équations différentielles, 857-860. — Leur application à la recherche des *maximums* et des *minimums* relatifs des formules intégrales définies, 873-875. — Caractères qui distinguent le *maximum* des intégrales définies, de leur *minimum*, 876-878. — Application de cette méthode aux intégrales aux différences, 11c5, 11c6.
- Véga donne un rapport très approché du diamètre à la circonférence, *Intr.* 43, 43 a, 44.
- Viète trouve le premier des formules pour la division des arcs, *Intr.* 50.

TABLE DES MATIÈRES.

771

- Vis* : courbe qu'affecte le filet de la vis ordinaire, 822.
- Viviani* : ses questions sur les espaces quarrables, 534. — Sur la voûte quarrable en particulier, 542.
- Volume* : Note sur ce mot, 514.
- Volume* terminé par une surface de révolution, 514; par une surface quelconque, 518-520, 518 *a*, 520 *a*, 522, 522 *a*.
- Voûte* quarrable (problème de la), 542, 543. — Voûtes elliptiques, 633.

W

- Wallis* : expression qu'il donne de la demi-circonférence du cercle, obtenue par les factorielles, 989; par les intégrales définies, 1166. — Usage de cette expression pour l'interpolation de certaines suites, 1024. — Ses travaux sur l'interpolation, 1158.
- Waring* : comparaison de sa notation avec celles d'Euler et de Lagrange, 82.
- Wilson* : son théorème sur les nombres premiers, 887 *a*.
- Wlacq* : ses grandes tables de logarithmes et de sinus, corrigées par Delambre, 896.
- Wren* rectifie la cycloïde, 512 *a*.

Y

- YVORY* : comment il transforme l'équation de l'ellipsoïde, 307 *a*, 529 *a*.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

TITRE Extraits du Traité du calcul différentiel et du calcul intégral :
Préfaces des trois tomes
introduction au tome 1
Table générale des matières

AUTEUR LACROIX Sylvestre-François

DATE JUIN 1996

RESUME *"Le mérite de cet ouvrage qui peut tenir lieu de tant d'autres, et qu'aucun autre ne saurait suppléer, est aujourd'hui trop bien apprécié pour que nous entreprenions de le recommander à nos lecteurs."* Cet ouvrage est le fruit d'un immense travail de recherches afin de faire connaître à un vaste public les travaux d'autrui. La préface et la table des matières seront précieuses au mathématicien tant sont nombreuses et précises les références aux ouvrages connus à cette époque.

"La science s'enrichissant sans cesse de nouveaux procédés, on conçoit sans peine que cette édition doit avoir une supériorité marquée sur la première, commencée il y a vingt-ans." L'évolution de cette science "a déterminé l'auteur à placer à la suite du troisième volume de nombreuses additions" qui sont ici reproduites.

(Ces citations sont extraites d'un prospectus publicitaire qui annonce la seconde édition du "Traité".)

MOTS-CLE Histoire du calcul différentiel et intégral
Bibliographie
Mathématiciens, leurs oeuvres

Editeur : IREM
Directeur Responsable de la publication : R. DOUADY
Dépôt légal : JUIN 1996
ISBN : 2-86612-76-0
IREM Université Paris VII
Tour 56/55 - 3ème étage, Case 7018
2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05