INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

17
Décembre 1996

LA RACINE CARREE EN TROISIEME

Etude d'une activité

Par Eric RODITI

DOCUMENT DE TRAVAIL POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT

LA RACINE CARRÉE EN TROISIÈME

Étude d'une activité

ÉRIC RODITI

Sommaire

Professeur de mathématiques dans un collège, j'enseigne les racines carrées aux élèves de troisième ou, plus précisément, les contenus prévus par les programmes de 1989 à propos des racines carrées. Les erreurs de mes élèves m'ont naturellement conduit à constater certaines difficultés d'apprentissage auxquelles j'ai tenté de répondre. Voici l'étude d'une activité sur les racines carrées que je propose à mes élèves de troisième depuis trois ans.

Dans une première partie je tenterai de mettre en évidence les attentes de l'institution sur les racines carrées en classe de troisième et, parallèlement, je décrirai les difficultés d'apprentissage de ces savoirs. Dans un second temps je ferai l'inventaire des activités pédagogiques que les manuels les plus courants proposent, je montrerai ainsi les difficultés d'enseignement de ces savoirs puis je présenterai l'activité que j'ai élaborée après en avoir décrit les motivations et défini les objectifs. Je présenterai ensuite un bilan d'enseignant sur cette activité. La troisième partie sera consacrée à l'étude critique de cette activité avec les outils d'analyse élaborés par les didacticiens, et principalement les concepts de contrat didactique, de geste, de changement de cadre, de dialectique outil-objet, de transposition didactique…

I. Un constat sur les savoirs en question

L'enseignant à pour charge de permettre aux élèves dont il a la responsabilité d'acquérir un savoir[1], délimité par les programmes officiels, et dont il peut trouver la définition en étudiant différents ouvrages : manuels, revues, publications, dictionnaires… Il élabore des situations de classe permettant aux élèves de s'approprier ce savoir et, par son évaluation, il tente de mesurer l'écart entre le savoir enseigné et celui réellement acquis[2]. De telles situations sont proposées par les différents ouvrages ; parfois, le professeur est amené à en inventer lui-même.

Je voudrais, dans cette première partie, effectuer un « état des lieux » sur l'enseignement des racines carrées tel que le profile l'institution. Que prescrivent les programmes, quelles tâches sont proposées au Brevet des Collèges ? À partir de ces

[1] Pour se limiter au rôle de formation sur un contenu disciplinaire, les professeurs ont d'autres fonctions que nous n'aborderons pas ici.

[2] L'évaluation est aussi un moyen utilisé au service de la gestion de la classe.

éléments, je tenterai de faire l'inventaire des capacités que doivent acquérir les élèves pour répondre aux attentes de l'institution et je montrerai, en analysant leurs erreurs, les difficultés qu'ils rencontrent durant ces apprentissages.

1. Quels sont les savoirs visés ?

Les textes permettant, en première analyse, d'obtenir ces informations sont les programmes officiels[3], les questions d'examens[4] et les items des évaluations[5] qui ont porté sur ces savoirs. L'expérience professionnelle permet d'obtenir d'autres informations, sur des échantillons plus restreints mais avec des possibilités plus importantes d'analyse qualitative des erreurs.

A. Programme et instructions

Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées) : Produit et quotient de deux radicaux. Puissance d'ordre 2 ou 4 d'un radical. La touche √ de la calculatrice a déjà été utilisée en Quatrième, fournit une valeur approchée d'une racine carrée. On met en place, par ailleurs les règles de calcul ci-contre. Le calcul sur des expressions comportant des radicaux (telles que $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$) n'est pas un objectif du programme. Comme dans les classes antérieures, on habituera les élèves à écrire un nombre sous la forme la mieux adaptée au problème posé.	Savoir que si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a. Savoir déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x, tels $x^2 = a$ où a désigne un nombre positif. Sur des exemples numériques, utiliser les égalités : $(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a^2} = a$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, où a et b dé signent deux nombres positifs. Par exemple : $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

[3] B.O. n° 12 du 23 mars 1989.

[4] Brevet des Collèges, juin 1995 ;

[5] Évaluation à l'entrée en 2[nde], Direction de l'Évaluation et de la Prospective, 1994, 1995.

Ces instructions nous permettent de faire le tour des points que le professeur doit aborder en classe :

– nombres positifs, négatifs, carré d'un nombre, équation, solutions d'une équation ;

– vocabulaire : racine, radical ;

– définitions de la racine carrée d'un positif : la définition exprimée dans le cadre numérique (si a désigne un nombre positif...), celle exprimée en terme de solution positive d'équation et enfin l'expression qui permet d'effectuer certains calculs ($\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$) ;

– les simplifications d'expression comportant des radicaux ;

– les opérations portant sur des radicaux.

B. Compléments sur les attentes de l'institution

Je donnerai, pour préciser ce point, quelques exemples de questions posées sur ce thème par l'institution en citant des exercices du Brevet des Collèges de juin 1995 ainsi que ceux posés par la DEP dans l'évaluation à l'entrée en seconde.

Au Brevet des Collèges

◆ À propos de la définition

– (Poitiers) Résoudre l'équation $2\,x^2 = 18$

◆ Calculs et simplification

– (Amiens)

On considère les nombres : $D = \left(2\sqrt{3}+1\right)\left(2\sqrt{3}-1\right)$ et $E = 8\sqrt{5} - \sqrt{20} - 2\sqrt{45}$.

En indiquant le détail des calculs, écrire D et E sous forme de nombres entiers.

– (Clermont-Ferrand)

Calculer et donner chaque résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ (a et b entiers, b le plus petit possible). $C = \sqrt{8} \times \sqrt{50} \times \sqrt{18}$ et $D = \sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{18}$.

– (Limoges)

Développer et réduire : $\left(\sqrt{3}-2\right)^2$; $\left(2\sqrt{5}-3\right)\left(3\sqrt{5}+2\right)$

– (Paris-Créteil-Versailles)

Soit l'expression B = $(4x - 1)(3 - x)$. Calculer la valeur exacte de B pour $x = \sqrt{3}$, on écrira le résultat sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.

On remarquera la quasi-absence de question portant sur la définition (celle indiquée est la seule de la session de juin 1995) et la difficulté importante des calculs demandés comparée à celle des exemples figurant dans les programmes.

À l'entrée en seconde

– (Septembre 1994, seconde Générale et Technologique)

$\sqrt{10^2 - 6^2}$ est égal à

4	-26	$\sqrt{136}$	8	64

– (Septembre 1995, seconde Générale et Technologique)

Sur cette ligne figure une égalité. Si l'une d'elles est vraie, l'entourer ; sinon entourer la case « aucune égalité proposée n'est vraie ».

$\sqrt{(-3)^2} = -3$	$\sqrt{(-3)^2} = 3$	$\sqrt{(-3)^2} = -\sqrt{3^2}$	aucune égalité proposée n'est vraie

– Aucune question à l'entrée en seconde professionnelle

On remarquera la grande différence de questions, celles de l'entrée en seconde ne portent que sur le sens de la racine carrée ; aucun calcul portant sur des radicaux n'est proposé.

C. Les compétences visées par l'enseignement

Avant d'examiner les procédures des élèves mises en œuvre pour répondre aux questions qui leur sont posées, nous avons, à partir d'exercices posés au Brevet des Collèges ou dans les manuels, dressé un bilan des compétences que les élèves ont à acquérir. En effet, l'évaluation ne permet que de recueillir les productions issues, dans certaines conditions, des connaissances de l'élève et même, plus précisément, de son rapport à ces connaissances. Ce rapport ayant été élaboré, pour la part qui nous intéresse ici, au cours de l'enseignement, l'analyse des productions des élèves ne sera efficace que si l'on connaît précisément, en terme de compétence, les objectifs de cet enseignement.

◆ À propos de la définition de la racine carrée et sur des exemples numériques

– distinguer des écritures correctes ou incorrectes comprenant des radicaux ;

– savoir que les trois propriétés $a \geq 0$, $\sqrt{a} \geq 0$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ sont vérifiées dès qu'on écrit $\sqrt{a}$;

– déterminer les solutions de $x^2 = a$ pour $a > 0$.

◆ À propos des simplifications et uniquement sur des exemples numériques *(a, b, c, d, e étant strictement positifs)*,

– simplifier une écriture comprenant un radical dans les cinq cas suivants :

$$\sqrt{a^2} = a \quad ; \quad \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b} \quad ; \quad \sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{a} \quad ; \quad \frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a} \quad ; \quad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{bc}}{c} \;;$$

– effectuer des multiplications d'expressions comprenant des radicaux dans les trois types de cas suivants :

$$a\sqrt{b} \times c\sqrt{b} = abc \quad ; \quad a \times b\sqrt{c} = ab\sqrt{c} \quad ; \quad a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd} \;;$$

– effectuer des divisions d'expressions comprenant des radicaux dans des trois types de cas suivants :

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{bc}}{c} \quad ; \quad \frac{a}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \;;$$

– effectuer une addition ou une soustraction d'expressions comprenant des radicaux dans les trios types de cas suivants :

$$a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a+c)\sqrt{b} \;;\; a\sqrt{b^2 c} + d\sqrt{e^2 c} = (ab+de)\sqrt{c} \;;\; \sqrt{a} + \sqrt{b} \textit{ ne donne rien}.$$

◆ À propos des puissances *(a et b étant positifs)*,

– ordre 2, appliquer $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ ou $\left(a\sqrt{b}\right)^2 = a^2 b$;

– ordre 4, appliquer $\left(\sqrt{a}\right)^4 = a^2$.

2. Quelles sont les difficultés des élèves ?

Pour dresser un bilan des procédures et des difficultés des élèves, nous avons donc procédé en deux temps : nous avons établi, à partir des savoirs définis par les programmes et d'exercices, une liste organisée des compétences attendues ; maintenant, pour quelques unes d'entre elles, nous allons donner les résultats que nous fournissent des évaluations à grande échelle avec quelques interprétations.

A. Des exemples d'erreurs « en chiffres »

Voici quelques exemples tirés d'EVAPM[6], nous n'avons pas de résultats de l'évaluation nationale à l'entrée en seconde puisqu'il n'y a pas de remontée à la DEP des résultats. $\mathscr{R}$ désigne le taux de réussite en %. Nous savons que les pourcentages de réussite ont une signification toute limitée car nous tirons, dans cette présentation, la question hors du questionnaire. Mais ces tests ont lieu en fin d'année et la racine carrée est un thème abordé généralement très tôt dans l'année scolaire et révisé régulièrement aussi pensons-nous qu'elles sont, au moment du test, très familières aux élèves.

- Deux erreurs de fréquence significative : $\sqrt{16} = -4$ (30%) ou $\sqrt{-16} = -4$ (27%).
- Résolution d'équations :

$x^2 = -49$, $\mathscr{R} = 61$ mais pour $x^2 = 25$, $\mathscr{R} = 41$ et pour $x^2 = 17$, $\mathscr{R} = 27$;

$a^2 - \dfrac{25}{100} = 0$, $\mathscr{R} = 19$ et $25\,c^2 = 36$, $\mathscr{R} = 16$;

$\left(\sqrt{\ldots}\right)^2 = 81$, $\mathscr{R} = 80$;

- quelle est la longueur du côté d'un carré dont l'aire est 400m² ? $\mathscr{R} = 89$;
- Simplifications :

[6] EVAluation des Programmes de Mathématiques de 3ᵉ, Publication n°80, APMEP et IREM de Besançon 1990.

$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $\mathscr{R} = 66$;

$\sqrt{4900} = 70$, $\mathscr{R} = 31$ et en fin de seconde $\mathscr{R} = 51$

$\sqrt{180} - \sqrt{20} + \sqrt{125} = \ldots$, $\mathscr{R} = 59$.

Remarquons que les compétences des élèves en fin de troisième sont loin d'être négligeables et que les résultats sont meilleurs avec des petits nombres. Remarquons aussi que la connaissance du sens de la racine carrée est multiforme et que suivant les questions posées, les réussites diffèrent très sensiblement. Remarquons enfin la réussite au calcul $\sqrt{180} - \sqrt{20} + \sqrt{125} = \ldots$ qui montre, d'une certaine manière, que trois cinquièmes des élèves ont appris à calculer avec des racines carrées même s'ils n'en dominent pas encore le sens.

B. Les difficultés rencontrées « par les élèves »

Les erreurs des élèves, contenues dans les réponses à des questions qui impliquent la mise en œuvre des compétences citées ci-dessus, nous indiquent les difficultés d'acquisition des savoirs qui font l'objet de l'enseignement. J'ai tenté de dresser l'inventaire des causes « mathématiques » d'erreurs[7] qui sont le plus fréquemment constatées et j'ai parfois restitué la façon qu'ont les élèves de dire leurs difficultés ou de dire ce qu'ils savent, même si ce savoir est erroné.

◆ À propos de la définition :

– la racine d'un positif ne donne pas toujours un résultat (entier ou décimal) : $\sqrt{36} = 6$ mais $\sqrt{17}$?

– l'extraction de la racine carrée d'un négatif est impossible, mais il y a une différence entre le cas où ce nombre est « visiblement » négatif et le cas où il ne l'est pas : $\sqrt{-4}$ n'existe pas mais $\sqrt{\pi - 3}$?

– confusion entre $a \geq 0$ condition d'existence et $\sqrt{a} \geq 0$ convention ;

[7] Roland CHARNAY & Michel MANTE, *De l'analyse d'erreurs en Mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes...* , in Grand N n°48, 1990-1991, pp. 37 à 64.

– signification d'exister ou ne pas exister pour un nombre : $\sqrt{-4}$ n'existe pas mais $\sqrt{17}$ existe et pourtant, on ne peut en écrire (écriture décimale) aucun des deux ;

– confusion entre $x^2 = 25$ possède deux solutions et $\sqrt{25} = \pm 5$.

– on dit que la racine carrée est la réciproque du carré mais l'égalité $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2$ n'est pas toujours vraie.

◆ À propos des calculs

– il y a des opérations qui donnent des résultats (entiers ou décimaux) et d'autres non : $\sqrt{50} \times \sqrt{2} = 10$ mais $\sqrt{50} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ et $6\sqrt{2}$ est-il vraiment un résultat ?

– pourquoi n'écrit-on pas toujours, comme en 4^e, une approximation décimale puisque la calculatrice donne un résultat précis alors qu'avec la racine carrée on ne sait pas combien vaut le résultat ?

– on peut multiplier ou diviser sous la racine mais pas ajouter ou soustraire ;

– pour ajouter ou soustraire on ne doit pas « mélanger » les nombres et les racines, on doit faire comme avec les x ($7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ comme $7x - 4x = 3x$) mais quand on développe on perd (apparemment) des termes : $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ mais $(\sqrt{2} + 1)^2 = 2\sqrt{2} + 3$;

– pour $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ j'ai compris mais si vous me donnez $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ qu'est ce que je devrai répondre ?

– on écrit dans l'ordre 2, $\sqrt{\ }$, 3 pour exprimer le double de la racine carrée de 3 mais avec une calculatrice de type « collège », cet ordre dans la séquence de frappe donne le triple de la racine de 2.

Ces inventaires des attentes institutionnelles et des difficultés des élèves, présentées en parallèles, montrent combien l'enseignement sur la racine carrée vise des gestes[8] techniques de calculs, dont les résultats s'expriment sous une certaine forme. Les règles de calculs correspondent à une algèbre[9] inconnue des élèves, tous les calculs et toutes les simplifications ne sont pas possibles. Seul le professeur connaît les calculs

[8] Yves CHEVALLARD, *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique*, in IMAG, Séminaire n°122 pp. 103 à 117.

[9] Teresa ASSUDE, *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I, 1992, pp. 145 à 153.

qu'il peut proposer aux élèves, et de même, la forme des résultats correspond à une fonction que l'enseignant connaît mais que l'élève ignore[10].

II. Une activité pédagogique

Quelles activités pédagogiques les manuels proposent-ils aux professeurs de troisième pour permettre aux élèves d'acquérir les savoirs définis dans la première partie ? Après avoir répondu à cette question, je montrerai pourquoi j'ai été conduit à en élaborer une nouvelle, j'en définirai les objectifs, j'en décrirai le contenu et j'en dresserai un premier bilan.

1. Ce que proposent les manuels

Annie Bessot et An Le Thi Hoai[11] ont déjà fourni des résultats sur un des manuels de troisième, *Pythagore* 1989 Ed. Hatier, nous avons complété ces résultats en examinant la réédition 1993 ainsi que les deux autres manuels les plus utilisés au Collège, *Maths 3^e^* collection Transmath 1993 Ed. Nathan et *Mathématiques 3^e^* Ed. Hachette. Ces manuels présentent des chapitres thématiques partagés en quatre parties : des activités, un rappel de l'essentiel, des exercices résolus, une liste d'exercices et de problèmes.

La racine carrée d'un nombre positif est introduite, dans les trois manuels, par un rappel du cours de 4^e^ comme nécessaire au calcul de l'hypoténuse d'un triangle rectangle par l'application du théorème de Pythagore. Les manuels *Pythagore* et *Mathématiques 3^e^* posent le problème de la construction d'un segment de longueur la racine carrée d'un entier positif quelconque, le premier prend le nombre 15 comme

---

[10] BESSOT Annie & LE THI HOAI An, *Une étude du contrat didactique à propos de la racine carrée*, in « Petit *x* » n° 36, 1993-1994, pp. 39 à 60.

[11] Op cit.

exemple et le second prend 11 et 17. Deux manuels, *Mathématiques 3^e^* et *Maths 3^e^*, abordent l'irrationalité de la racine carrée de 2 – ou celle de 13 – sous forme de note historique, l'irrationalité est affirmée, le problème n'est ni posé ni résolu.

Deux des trois manuels ne consacrent aucune activité sur la recherche de valeurs approchées de racines carrées par une autre méthode que celle qui consiste à interroger la calculatrice. Dans *Pythagore,* une activité proposée est de tracer la représentation graphique de la fonction définie sur [0 ; 4] par x *(côté du carré)* $\mapsto x^2$ *(aire du carré)*, à lire l'abscisse du point d'ordonnée 3, et à interpréter en termes de racine carrée le résultat obtenu.

Les trois manuels abordent la résolution de l'équation $x^2 = a$ de façon analogue : des exemples sont traités, une généralisation qui distingue les trois cas pour a positif, négatif ou nul, est donnée (sauf dans *Maths 3^e^* où les cas positif et nul sont regroupés) puis des applications sont demandées.

Pour les « règles de calculs », les trois manuels proposent des activités semblables : exemples numériques, conjecture, démonstration, application. Seul *Mathématiques 3^e^* donne des exemples d'addition et de soustraction, fait conjecturer l'absence de régularité et précise, sous sa rubrique « connaissances de base » qui rappelle l'essentiel du cours, qu'aucun résultat général ne concerne la somme ou la différence de deux racines carrées[12]. Les additions du type $a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a+c)\sqrt{b}$ sont traitées en exemple, dans les trois manuels on parle de factorisation mais seul *Maths 3^e^* explicite l'analogie avec $ax + bx = (a+b)x$.

En ce qui concerne les exercices proposés, nous n'ajouterons rien d'important aux résultats obtenus par Annie Bessot et An Le Thi Hoai. Les exercices de calculs dominent nettement, les règles du contrat pour calculer et simplifier ont été citées plus haut ; le calcul d'une valeur approchée n'est jamais demandé sauf dans les problèmes issus de la géométrie, les seuls problèmes proposés concernent l'application du théorème de Pythagore et c'est alors toujours la calculatrice qui fournit l'approximation. On trouve des équations se ramenant à $x^2 = a$ et quelques QCM où les élèves doivent

---

12 La relation $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}}$ qu'on pourrait trouver à partir de l'identité remarquable qui figure au programme de troisième est passée sous silence…

reconnaître, parmi différentes écritures proposées, soit celles qui ont du sens soit celles qui sont égales à une expression donnée.

Ainsi, les manuels ne semblent pas tenir compte des difficultés d'apprentissage constatées, en proposant des activités spécifiques. Les problèmes qu'éprouvent les élèves se répartissent dans les quatre groupes qui correspondent grossièrement au plan généralement suivi par les manuels – existence, approximation, simplification, opérations – et qui pourraient donc conduire les auteurs à des propositions d'activités spécifiques. Il n'en est pas ainsi, la conception de l'apprentissage qui émerge des manuels est du type « je regarde, j'apprends, j'applique et je m'entraîne ».

2. Un choix différent

Les seules représentations de la racine carrée d'un positif que les activités des manuels permettent de construire sont : le côté du carré d'aire donnée et le moyen de terminer le calcul d'une longueur par le théorème de Pythagore. Ces représentations ne permettent pas de donner du sens aux calculs et aux simplifications.

A. Les objectifs

Voici en quelques lignes les objectifs que poursuivis en élaborant l'activité que je propose à mes élèves.

Le premier est de compléter le sens de la racine carrée qui, en raison de son mode d'introduction en classe de quatrième, est d'abord un procédé qui permet de trouver la longueur du côté du triangle rectangle quand on a son carré. Les élèves disent : « on a $AB^2 = 17$, on fait $AB = \sqrt{17}$ et on trouve $AB \approx 4{,}12$ ». Pour que $\sqrt{17}$ soit l'écriture d'un nombre, une première condition à réaliser est que cette écriture soit utile, plus performante dans certaines occasions que la valeur approchée 4,12.

Le second objectif est de permettre aux élèves de contrôler les simplifications et calculs avec les racines carrées. Comme la règle principale est $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, une condition était de créer une situation dans laquelle la multiplication de deux racines carrées ait un sens ainsi que les deux racines $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$. Une autre était de relier cette égalité à $a^2 \times b^2 = (ab)^2$.

Le troisième objectif est que les produits de racines carrées permettent de poser le problème de la multiplicité des écritures, le problème des simplifications.

Le quatrième objectif est que la situation permette aux élèves d'attribuer aux racines carrées un statut complet de nombre c'est-à-dire que les racines carrées aient les fonctions qu'ont acquises les nombres depuis que les élèves les connaissent[13] : exprimer la mesure d'une grandeur d'un objet, exprimer une transformation de la mesure d'une grandeur d'un objet, comparer les mesures de la même grandeur de deux objets, exprimer la composition de deux grandeurs d'un objet et, enfin, exprimer la composition de deux transformations

Le dernier objectif (ou le premier puisque, dans ce paragraphe, c'est le professeur qui parle) est que cette activité s'inscrive dans le cadre institutionnel du programme de troisième de 1989.

B. Description de l'activité

Les idées qui ont inspiré cette activité sont celles des travaux de Guy Brousseau[14], de Régine Douady[15] et de Marie-Jeanne Perrin Glorian[16] qui ont travaillé la représentation des nombres (entiers, fractions, décimaux) comme mesure de longueur et d'aire, la multiplication soit comme composition des longueurs pour donner l'aire soit comme effet de l'agrandissement sur les longueurs (pantographe, tangram…), où le coefficient est un nombre sans dimension qui ne mesure ni une longueur ni une aire mais qui mesure l'agrandissement. Des activités permettant aux élèves de travailler sur les nombres dans le cadre géométrique figurent aujourd'hui dans tous les manuels de

---

[13] Gérard VERGNAUD, *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Peter Lang, 1981.

[14] Guy BROUSSEAU, *Problèmes de didactique des décimaux*, Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 2.1., La Pensée Sauvage, 1981

[15] Régine DOUADY et Marie-Jeanne PERRIN GLORIAN, *Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane*, Cahier de didactique des mathématiques n°37, IREM Paris VII.

[16] Marie-Jeanne PERRIN GLORIAN, *Représentation des fractions et des décimaux chez les élèves de CM2 et du collège*, Cahier de didactique des mathématiques n°24, IREM Paris VII.

l'école primaire et dans de nombreux manuels de collège, ce type d'activité est donc familier des élèves.

L'idée fondamentale de l'activité est que si $\sqrt{2}$ mesure le côté du carré d'aire 2, on n'a pas intérêt à conserver la valeur exacte mais plutôt à en écrire une approximation décimale. En revanche, si $\sqrt{2}$ mesure l'agrandissement qui multiplie les aires par 2, on a intérêt à conserver la valeur exacte (comme c'est le cas pour l'écriture fractionnaire des coefficients de proportionnalité). De plus, la composition de deux agrandissements permet d'obtenir une représentation de la multiplication et du produit de deux racines carrées.

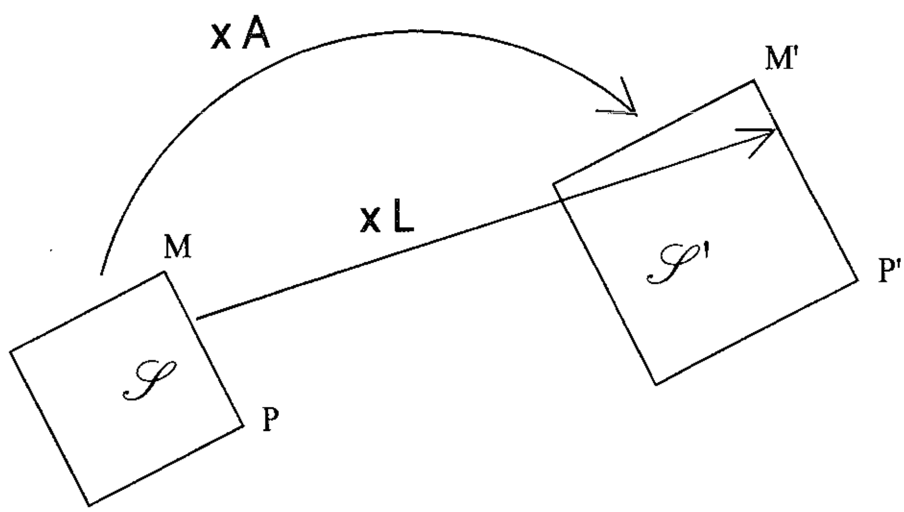
Voici la situation, elle se déroule sur deux (trois) séances. Ces séances suivent un travail sur les agrandissement et réduction de figures où l'utilisation de l'échelle a été révisée (programme de 5e). Les élèves travaillent individuellement puis par deux et enfin par quatre. Dans la phase de travail individuel, l'élève élabore une réponse à la question posée inscrite au tableau par le professeur ; quand deux voisins ont terminé, chacun dit à l'autre comment il a fait pour répondre puis, avec les deux élèves d'une table voisine, ils comparent les résultats obtenus, en cas de désaccord ils doivent tenter de le régler. Le professeur circule pour repérer les méthodes utilisées, les résultats obtenus et les élèves qui pourront présenter leur travail. Il incite les élèves à contrôler la cohérence interne de leurs résultats quand c'est possible. Après avoir constaté que les élèves parvenaient à répondre aux questions et à formuler entre eux leurs démarches, le professeur propose aux élèves d'écrire les relations qu'ils ont utilisées. La partie a-didactique de l'activité se termine, les élèves savent qu'ils élaborent le texte d'un savoir qui sera peut-être institutionnalisé.

- Première séance

Objectifs : il s'agit de faire fonctionner la relation entre le côté et l'aire du carré, l'effet d'un agrandissement sur les longueurs, déterminer l'effet d'un agrandissement sur les aires et la relation avec l'échelle, conférer à la racine carrée la double représentation du côté du carré d'aire donnée et de l'échelle de l'agrandissement qui multiplie les aires par un nombre donné, utiliser l'écriture racine carrée.

Prérequis : aire du carré de côté donné, échelle d'un agrandissement.

Protocole : le professeur dessine au tableau deux carrés de tailles différentes et, par une flèche, il indique la transformation du petit côté vers le grand. Six mesures peuvent figurer sur le dessin, des places vides y sont indiquées que l'élève va devoir compléter avec les indications du professeur, j'ai noté $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ **A** et **L** par commodité de lecture mais ce n'est pas le cas en classe. De même j'ai indiqué sur la figure suivante la flèche correspondant à l'effet sur les aires, elle n'est dessinée que quand la relation a été déterminée.



– La première tâche de l'élève est de déterminer les nombres demandés par le professeur. La question est rédigée au tableau comme le montre l'exemple suivant :

Côté du petit carré = 5	Aire du petit carré = ?
Côté du grand carré = ?	Aire du grand carré = ?
Échelle = 2	

Pour des facilités de lecture, nous avons présenté, dans ce texte, les questions dans un tableau, sachant que le professeur peut moduler les questions pour tenir compte des difficultés des élèves. Nous avons marqué de croix les cases correspondant à des questions qui ne sont pas posées.

	MP	$\mathcal{S}$	M'P'	$\mathcal{S}'$	L	A
1	5		× × ×	× × ×	× × ×	× × ×
2		16	× × ×	× × ×	× × ×	× × ×
3		3	× × ×	× × ×	× × ×	× × ×
4	5				2	
5	5		15			
6		4		100		
7		9		36		
8		7		35		
9		3		60		

Les lignes 1 à 3 correspondent à des révisions, les lignes 4 à 7 permettent différentes façons de compléter les deux dernières colonnes. Une rupture est marquée à la ligne 8, les calculs ne se font plus simplement si on utilise les approximations décimales et les méthodes pour répondre aux questions sont limitées par la nature des nombres.

Voyons des exemples de procédures et de résultats.

– Ligne 7 :

◆ $\mathcal{S} = 9 \longrightarrow \text{MP} = 3$; $\mathcal{S}' = 36 \longrightarrow \text{M'P'} = 6$; $\text{MP} = 3$ et $\text{M'P'} = 6 \longrightarrow \text{L} = 2$;

$\mathcal{S} = 9$ et $\mathcal{S}' = 36 \longrightarrow \text{A} = 4$.

◆ $\mathcal{S} = 9$ et $\mathcal{S}' = 36 \longrightarrow \text{A} = 4$; $\text{A} = 4 \longrightarrow \text{L} = 2$; $\mathcal{S} = 9 \longrightarrow \text{MP} = 3$;

$\text{MP} = 3$ et $\text{L} = 2 \longrightarrow \text{M'P'} = 6$.

◆ et d'autres.

– Ligne 8 :

◆ $\mathcal{S} = 7 \longrightarrow \text{MP} \approx 2{,}65$; $\mathcal{S}' = 35 \longrightarrow \text{M'P'} \approx 5{,}92$;

$\mathcal{S} = 7$ et $\mathcal{S}' = 35 \longrightarrow \text{A} = 5$; $\text{A} = 5 \longrightarrow \text{L} \approx 2{,}24$

ou $\text{MP} \approx 2{,}65$ et $\text{M'P'} \approx 5{,}92 \longrightarrow \text{L} \approx 5{,}92 \div 2{,}65 \approx 2{,}23$;

◆ $\mathcal{S} = 7 \longrightarrow \text{MP} = \sqrt{7}$; $\mathcal{S}' = 35 \longrightarrow \text{M'P'} = \sqrt{35}$;

$\mathcal{S} = 7$ et $\mathcal{S}' = 35 \longrightarrow \text{A} = 5$; $\text{A} = 5 \longrightarrow \text{L} = \sqrt{5}$

ou MP = $\sqrt{7}$ et M'P' = $\sqrt{35}$ $\longrightarrow$ L = $\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}} \approx 2{,}24$ (ou directement $\sqrt{5}$).

• et d'autres.

On remarquera les possibilités de contrôle de cohérence interne plus ou moins aisées suivant l'écriture des nombres.

Vient alors le moment de prendre du recul sur l'activité : c'est la seconde tâche de l'élève.

– L'élève doit, dans cette seconde phase de l'activité, exprimer par écrit les relations liant les variables de la situation, un compte-rendu au tableau permet aux différentes méthodes d'être exprimées et comparées. On trouve par exemple :

• « dans un agrandissement, l'aire aussi est multipliée », « l'aire est multipliée par le carré de l'échelle », « on peut trouver les résultats dans des ordres différents, ça permet de contrôler », « quand on multiplie des racines, ça multiplie les nombres », « quand on contrôle, ça ne tombe pas toujours juste avec les décimaux »...

– Dans la troisième phase de l'activité, en référence aux lignes 8 et 9, a lieu l'institutionnalisation de l'effet sur les aires d'un agrandissement ainsi que de la relation $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Ici $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ n'ont pas le même statut, l'un mesure une longueur, l'autre mesure un agrandissement ; l'un a une unité, l'autre est un scalaire. À la demande des élèves des exemples numériques peuvent être donnés et vérifiés avec le schéma, une relecture des lignes 4 à 6 peut être effectuée en notant les racines carrées même si elles sont entières.

– La dernière phase de cette séance repose sur la même consigne que la première :

	MP	$\mathcal{S}$	M'P'	$\mathcal{S}'$	L	A
10		25				9
11		7				7
12	5					16
13	5					6

Les élèves doivent alors reprendre le recul de la deuxième phase, le problème de l'égalité $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ est posé sur des exemples numériques positifs puis résolu sur des exemples numériques positifs par la notation « utile » $a = \sqrt{a^2}$.

Bilan : À la fin de cette séance, les élèves ont construit, ou du moins ont-ils commencé, sur la notation racine carrée un autre sens et deux nouvelles fonctions : permettre des calculs qui tombent juste et reconnaître que deux formules apparemment différentes ont le même sens.

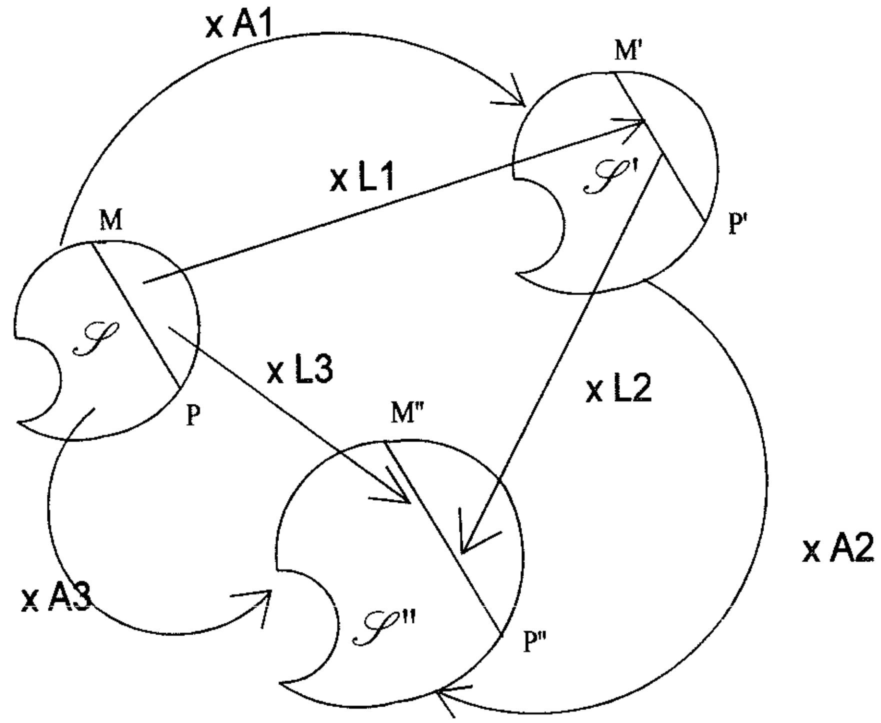
• Deuxième séance

Objectifs : il s'agit de composer deux agrandissements, compléter les représentations de la multiplication de deux racines carrées – y compris d'un entier par une racine carrée – et effectuer des calculs pour lesquels les valeurs exactes des racines carrées sont utiles.

Prérequis : racine carrée d'un positif, effet d'un agrandissement sur les longueurs et sur les aires.

Entre les deux séances, l'effet d'un agrandissement sur les aires qui avait été constaté sur les carrés, a été généralisé aux rectangles, aux triangles, aux polygones et aux cercles par utilisation des formules d'aires et admises en toute généralité.

Protocole : Le professeur dessine au tableau une ligne fermée définissant une surface d'aire non nulle et matérialise un segment ayant ses extrémités sur la ligne ; on appellera cet ensemble « la figure ». Le professeur dessine ensuite deux agrandissements successifs de la figure ainsi que les flèches qui matérialisent l'effet sur les longueurs et l'effet sur les aires. Dans une première phase les douze variables sont utilisées puis, lorsque les relations entre les coefficients sont institutionnalisées, on ne tient plus compte des longueurs et des aires des figures.



– Première phase : le professeur demande aux élèves de calculer les valeurs manquantes en précisant celles qu'on peut trouver.

	MP	M'P'	M''P''	L1	L2	L3	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}'$	$\mathcal{S}''$	A1	A2	A3
1.	3	15	60				× ×	× ×	× ×			
2.	5		100	4			× ×	× ×	× ×			
3.	2		80		10		× ×	× ×	× ×			
4.	× ×	× ×	× ×				2	18	72			
5.	× ×	× ×	× ×				2	18	90			
6.	× ×	× ×	× ×				2	24	72			
7.	× ×	× ×	× ×				3		120		4	

Les élèves remarquent sur les exemples numériques qu'il n'est pas indispensable de connaître les aires des figures pour trouver l'effet sur les aires d'un agrandissement ; ils réutilisent les relations $A = L^2$ et $L = \sqrt{A}$; certains remarquent puis utilisent le fait que les coefficients sont reliés par $L1 \times L2 = L3$ et $A1 \times A2 = A3$ et disposent de plusieurs méthodes pour compléter le tableau, d'autres non, ils le découvriront durant la seconde phase.

– Le professeur anime la mise en commun des résultats et des méthodes utilisées. Les relations entre les coefficients sont analysées et établies sur les exemples numériques (pour la ligne 1. : $60 = \mathbf{4} \times 15$ et $15 = \mathbf{5} \times 3$ donc $60 = (\mathbf{4} \times \mathbf{5}) \times 3 = \mathbf{20} \times 3$), ces relations sont institutionnalisées par des phrases en français courant. Les différentes méthodes sont comparées, elles conduisent aux mêmes résultats pour les lignes 1. à 4. mais les lignes 5. à 7. conduisant à deux solutions pour L3 d'écritures différentes. Ligne 5. $3\sqrt{5}$ et $\sqrt{45}$; ligne 6. $\sqrt{12}\sqrt{3}$ et 6 ou $\sqrt{36}$; ligne 7. $\sqrt{10} \times 2$ et $\sqrt{40}$. Les relations établies rendent compte de l'égalité des nombres malgré la différence des écritures, établir l'égalité sur les exemples passe par une réécriture des nombres en <u>utilisant</u> les racines carrées : $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ car $3\sqrt{5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45}$.

– Dans les troisième et quatrième phases, les élèves effectuent des calculs avec les racines carrées « sous le contrôle des carrés », ils passeront de la multiplication à la division. Une fois les calculs effectués, les résultats sont comparés, les différentes méthodes dégagées, les égalités démontrées sur des exemples numériques et, enfin, les égalités sont institutionnalisées sous leur forme algébrique.

	L1	L2	L3	A1	A2	A3
1.	3				16	
2.				7	8	
3.				14	4	
4.				5		20
5.					10	13

<u>Bilan</u> : À la fin de la première séance, les élèves ont au moins deux représentations de la multiplication qui fonctionnent avec les racines carrées (longueur × longueur $\mapsto$ aire) et (longueur × échelle $\mapsto$ longueur). Après cette séance les élèves ont composé deux agrandissements de figures qui ne sont pas des carrés ; ils ont constaté sur les exemples numériques que la transformation composée est un

agrandissement dont l'échelle est égale au produit des deux échelles et ainsi ils ont fait fonctionner un autre sens de la multiplication de deux racines carrées (échelle × échelle $\mapsto$ échelle) qui permet de travailler avec des nombres sans unité. Ce sens permet le contrôle des calculs par l'élévation au carré dont le sens est attaché à une situation problématisée, puisque, durant l'activité, l'effet sur les longueurs est « couplé » à l'effet sur les aires.

C. Un bilan d'enseignant

Dans la mesure où la présente étude ne comporte pas de partie expérimentale – si le sujet le mérite, il faudra peut-être l'envisager par la suite – le bilan proposé est une simple constatation d'enseignant, celui qui a animé cette activité.

Il semble que la situation soulève une problématique motivante car les élèves sont actifs. Les résultats obtenus engendrent chez eux la réflexion attendue : recherche de régularité, démarche de preuve et réutilisation des savoirs acquis.

Il peut sembler excessif de passer autant de temps sur cette activité, il m'a fallu chaque année 3 séances avec les élèves du collège dans lequel j'enseigne. Mais de nombreuses parties vont être réutilisées par la suite et ainsi, peut-on l'espérer, on n'aura pas « perdu » de temps. De façon directe, les effets des agrandissements et des réductions sur les longueurs, les aires et les volumes figurent au programme de troisième ; la composition également (dans le cas des translations et des symétries orthogonales, l'exemple des agrandissements n'est pas au programme). De façon indirecte, les agrandissements sont utiles dans la partie consacrée à l'étude du théorème de Thalès relatif au triangle ainsi que dans la partie consacrée à la trigonométrie ; ces « éclairages » ne figurent pas explicitement au programme, j'ai pour ma part choisi de les aborder par cette problématique.

Même si, comme je l'ai annoncé dès le début de ce texte, les élèves qui ont participé à cette activité ne passent pas à côté des difficultés que j'ai montrées dans la partie précédente, il me semble important de noter les phénomènes qu'ils ont ainsi eu l'occasion de rencontrer. Un nombre exprimé par une racine carrée peut être la mesure d'une grandeur mais aussi celle d'une transformation. Il peut encore exprimer une comparaison : l'échelle est aussi une façon de comparer deux carrés (géométriques), dire que le second est deux fois plus grand que le premier signifie que la longueur de son côté est $\sqrt{2}$ fois plus grande que celle du côté de l'autre carré. On retrouve la classique question de Socrate[17] qui est d'actualité dès qu'on cherche à doubler la taille d'un original par photocopie, le facteur d'agrandissement à choisir est 141%, ce qui n'est pas toujours indiqué sur le photocopieur et ce qui fait l'occasion d'un « divertissement » en classe : $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ et $141\% = \frac{141}{100} = 1{,}41$.

La multiplication de deux nombres dont l'un au moins est écrit sous la forme d'une racine carrée peut exprimer une composition de grandeurs, l'application d'une variation de grandeur ou encore une composition de deux variations. La notation racine carrée a trouvé deux utilités, pouvoir effectuer des calculs qui « tombent juste », permettre de justifier des égalités fournies par la situation. Les calculs sur des racines carrées sont couplés avec les vérifications sur les carrés, ce qui permet un contrôle par l'élève de la validité des résultats. Enfin, les démarches d'argumentation sur les égalités obtenues s'apparentent fortement à du calcul algébrique quand l'objectif est de démontrer des propriétés arithmétiques. Ce point me semble important à souligner car, nous l'avons déjà vu, la racine carrée pose des problèmes numériques mais aussi des problèmes algébriques.

En conclusion de ce premier bilan, il me semble que tous les objectifs visés par l'activité sont en jeu durant ces séances. Il manque une évaluation de l'expérience pour pouvoir juger de l'effet à court terme et à moyen terme.

---

[17] PLATON, *Le Ménon, Problème de la duplication du carré.*

III. Analyse didactique de l'activité

Au cours des deux premières parties, nous avons dressé un triple bilan à propos de l'enseignement français actuel des racines carrées en classe de troisième : un diagnostic des attentes de l'institution, un inventaire des procédures des élèves avec une analyse de leurs difficultés, puis un repérage des enseignements généralement dispensés qu'on peut, en première approximation, atteindre par l'étude des manuels. Après avoir montré une lacune dans les activités proposées par les manuels nous avons fait une proposition. Vient maintenant le moment de la critique.

Je me propose, dans cette dernière partie, d'analyser l'activité que j'ai présentée, avec les outils théoriques de la didactique des mathématiques. Dans un premier temps je compléterai les remarques sur l'enseignement des racines carrées en me situant non plus comme enseignant, à l'intérieur de l'institution, mais à l'extérieur en utilisant le cadre de la théorie anthropologique du didactique développée par Y. Chevallard ainsi que le concept de contrat didactique tel que le définit G. Brousseau. J'analyserai ensuite l'activité à l'aide du modèle élaboré par R. Douady, en particulier les concepts de cadres, de dialectique outil-objet et de variable didactique.

1. L'objet « Racine carrée »

Regardons la racine carrée sans la lunette des programmes actuels : irrationalité, théorème de Pythagore, approximation, calculs pré-algébriques, fonction… la racine carrée intervient dans tous ces domaines. Comment est-elle perçue par les professeurs, et par les élèves ?

A. Quelle écologie ? [18]

[18] Teresa ASSUDE, op. cit.

La racine carrée est au cœur de la « crise des irrationnels » déclenchée par l'incommensurabilité de la diagonale du carré à son côté, crise dont $\sqrt{2}$ est devenu le symbole. Soulignant le trop d'importance accordée, selon elle, par le curriculum à cet aspect de la racine carrée, Teresa Assude emploie, certainement à dessein, un vocabulaire hérité de la psychanalyse :

> *Tout se passe comme si le trauma initial devait être indéfiniment reconduit (...) Nous souffrons collectivement d'un défaut de notre capacité à oublier une certaine scène primitive que nous rejouons sans cesse.*

Cet auteur fait remarquer que le thème de l'irrationalité, légitime mathématiquement bien que difficile, commence et se termine, dans l'enseignement secondaire, par la démonstration – ou l'évocation – de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Il est le début et la fin de la réflexion sur la nature des nombres usuels. Peut-on à ce propos parler d'utilité pédagogique ? L'auteur répond par la négative. On pourra être critique, l'irrationalité de $\sqrt{2}$ a créé une difficulté aux mathématiciens qui a été constitutive d'un savoir, ne peut-on pas penser que l'impossibilité d'écrire la racine carrée de deux sous la forme d'un décimal ou d'un quotient de deux entiers n'est pas aussi constitutive d'un savoir chez les élèves ?

La racine carrée a bien son utilité en géométrie euclidienne (analytique ou non) car elle permet la mesure de longueurs de segment, mais remarquons cependant que l'ensemble $\mathscr{R} = \{q + \sqrt{r}\ ,\ q \in \mathbb{Q}\ ,\ r \in \mathbb{Q}^+\}$ n'est pas suffisant pour mesurer la longueur de tous les segments de droite. Ainsi, comme dans les programmes actuels de quatrième, la racine carrée serait liée au théorème de Pythagore. À propos de distance, certains auteurs utilisent la racine carrée en géométrie analytique pour exprimer la longueur d'un segment d'une droite munie d'un repère sans recourir à la valeur absolue[19] : avec des notations évidentes, $MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2}$.

La racine n$^{\text{ième}}$ a figuré, dans l'enseignement, comme cinquième opération de l'arithmétique ; de façon analogue à la division, on apprenait à extraire la racine carrée d'un nombre décimal en prolongeant l'algorithme autant que nécessaire pour obtenir à chaque étape une décimale exacte supplémentaire. L'opération à deux places considérée

[19] La valeur absolue ne figure pas au programme de la classe de troisième actuellement.

était alors : $(a\,;\,n) \mapsto \sqrt[n]{a}$ avec $a > 0$ et n entier naturel. On pourrait, en fixant $n = 2$, considérer la fonction $a \mapsto \sqrt{a}$ qui permettait, avec son algorithme de calcul d'image, d'obtenir une approximation d'une longueur de segment calculée par le théorème de Pythagore. Mais le mouvement de réforme des années 1950 exerce une pression contre cet apprentissage

> *(...) il faut supprimer totalement de l'Enseignement secondaire l'étude théorique des opérations dans le système décimal : multiplication, division, racine carrée.*[20]

et l'extraction de la racine carrée disparaît des programmes en 1962

> *L'étude de la règle classique de l'extraction de la racine carrée est en dehors du programme.*

Les tables, les règles à calcul, les calculatrices puis les ordinateurs sont utilisés dans les classes et les racines carrées donnent l'occasion de poser le problème des approximations, des approximations décimales et des méthodes pour les obtenir.

Les racines carrées expriment des nombres réels, elles interviennent donc dans des calculs numériques. Le problème posé est celui de la forme de l'expression d'un résultat. Prenons un exemple très simple, doit-on écrire $5\sqrt{18} = 15\sqrt{2}$ ou bien faut-il écrire $5\sqrt{18} = \sqrt{450}$? Doit-on laisser $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ ou calculer $\sqrt{3}+\sqrt{7} = \sqrt{10+2\sqrt{21}}$? Teresa Assude cite dans sa thèse des ouvrages comme *Notes et formules à l'usage de l'ingénieur*[21] qui témoignent du corpus important des règles calculatoires, autrefois en vigueur, qu'elle nomme « algèbre des radicaux ». Ces calculs permettent de faire de l'algèbre sans algèbre comme nous l'avons déjà remarqué dans la première partie, $3x + 5x = 8x$ et $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ etc. Mais la possibilité ou non d'effectuer ces calculs n'est pas accessible aux élèves, elle est à la charge du professeur. Une faute comme $\sqrt{3}+\sqrt{7} = \sqrt{10}$ commise actuellement par un élève ne pourrait-elle alors pas s'interpréter comme une vacuité dans l'ensemble des règles à disposition de l'élève ?

---

[20] Gustave CHOQUET, *L'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire et à l'école secondaire, in* Bulletin de l'APMEP n° 215, pp. 365-372.

[21] De la Harpe, *Notes et formules à l'usage de l'ingénieur,* Albin Michel, Paris, 1938.

La racine carrée est enfin une fonction. Le concept de fonction n'est pas défini au Collège, on trouve dans les programmes de quatrième :

> *(...) application linéaire, celle-ci fonctionnant comme une « machine à multiplier ».*

La racine carrée n'est pas abordée comme une fonction au Collège mais on a vu dans la première partie que les élèves l'utilisent pourtant comme une machine à transformer les nombres qui mesurent les carrés d'hypoténuses en nombres qui mesurent les hypoténuses. Abordée en classe de seconde par les programmes en vigueur avec R^+ comme ensemble de définition, la racine carrée retrouve chez les élèves la nature que les mathématiciens lui attribuent en tant qu'objet : la racine carrée est une fonction. C'est ainsi qu'elle apparaît encore dans les programmes ultérieurs : limite, continuité, dérivabilité, développement limité... Teresa Assude qui regrette que cet aspect fonction ne soit pas abordé dès le collège, décrit ce phénomène comme un arrêt de la transposition didactique. L'auteur montre comment au Collège, bien que le mot « fonction » figure au programme dès la classe de sixième, le caractère fonctionnel du signe $\sqrt{\ }$ est complètement délaissé.

B. Rapports à l'objet « Racine carrée »

Maintenant que nous avons décrit les diverses interventions de la racine carrée dans l'univers mathématique au niveau du collège, nous pouvons éclairer le problème qu'elle pose par une approche anthropologique.

Le rapport personnel du professeur à l'objet racine carrée contient un aspect fonctionnel et une algèbre bien plus élaborée que celle qui est disponible pour les élèves ; le professeur a une pratique de transformation d'écriture utile (pour déterminer un ensemble de définition, calculer une limite, étudier le signe d'une dérivée...) Les transformations demandées à l'élève, en revanche, ne sont pas utiles, elles sont l'objectif de l'exercice.

Compte tenu de la pratique de l'élève de quatrième que nous avons décrite (utilisation de la calculatrice pour déterminer une approximation d'une longueur après application du théorème de Pythagore, aucun calcul portant sur des radicaux), l'état initial de son savoir en entrant en troisième, qu'on peut appeler rapport personnel de l'élève qui entre en troisième à l'objet racine carrée, est assimilable, pour beaucoup d'élèves, à ce que l'institution lui demande d'en savoir, c'est-à-dire au rapport institutionnel pour l'élève à l'objet racine carrée. En quatrième, l'élève sait que si le carré de la mesure d'une longueur est a, alors cette mesure a une approximation décimale qu'on détermine à l'aide de la calculatrice par la séquence : $a\ \sqrt{\ }$. La racine carrée n'exprime pas un résultat mais une transformation.

L'institution programme, pour les élèves de troisième, un rapport à l'objet racine carrée différent de celui de la classe de quatrième : les racines carrées expriment des nombres sur lesquels l'élève devra effectuer des calculs et simplifier des écritures. Les simplifications n'ont pas d'utilité pour l'élève car l'institution n'en prévoit pas. Les écritures attendues par l'institution vont même à l'encontre du rapport visé (et souvent atteint) l'année précédente comme le montrent les deux exemples suivants.

Reprenons l'exemple très simple, doit-on écrire $5\sqrt{18} = 15\sqrt{2}$ ou bien faut-il écrire $5\sqrt{18} = \sqrt{450}$? Si l'objectif est d'obtenir une approximation par une séquence de frappe à la calculatrice, il est clair que la transformation qui permet d'obtenir une forme optimale pour le traitement à suivre est la seconde alors que c'est bien la première qui est attendue de l'élève.

Prenons comme second exemple le calcul de $\sqrt{x+9}$ pour $x = 16$ puis pour $x = 5$. L'aspect fonctionnel de la racine carrée émerge dans cet exercice mais les seules fonctions qui sont à disposition de l'élève sont les applications linéaires. Doit-on s'étonner de voir apparaître la réponse $\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4+3 = 7$? Avec $x = 5$, la linéarisation, pour le professeur qui attend $\sqrt{5+9} = \sqrt{14}$, semble moins tentante car, contrairement à 16, 5 n'est pas un carré parfait. Mais pour l'élève qui écrit $\sqrt{5+9} = \sqrt{5} + \sqrt{9} = 3 + \sqrt{5}$, pourquoi $\sqrt{5}$ serait-il plus répulsif que $\sqrt{14}$? La réponse $\sqrt{14}$ n'est-elle pas trop facile à trouver ? Le format de réponse $3 + \sqrt{5}$ n'est-il pas souvent sollicité par le professeur pour aider les élèves qui ont du mal à donner un résultat contenant un signe d'opération ? On pourrait me rétorquer qu'il faut poser la question avec $x = 7$ et le dernier argument tombe ($\sqrt{7+9} = \sqrt{16}$), mais n'est-on pas, ce faisant, en train de jouer sur les connaissances et les méconnaissances prévisibles des élèves en adaptant la variable didactique qu'est la valeur de x plutôt que de reconnaître la difficulté d'exiger des transformations d'écriture qui n'ont pas d'autre objectif que l'obtention de l'une des formes dites « simplifiées » par le professeur mais souvent « compliquées » par les élèves.

Devant ce paradoxe, l'objectif de l'enseignement étant de réduire l'écart entre le rapport institutionnel à l'objet racine carrée et le rapport personnel de l'élève à cet objet, Teresa Assude semble proposer dans sa thèse, sans en développer les moyens, d'attendre que les transformations d'écriture aient une utilité pour en proposer aux élèves, c'est-à-dire au lycée à propos des fonctions, mais d'introduire, dès le collège, la racine carrée comme une fonction. L'équilibre écologique du système serait rétabli.

C. Des problèmes de contrôle du contrat

Les calculs proposés aux élèves, nous venons d'examiner en détail le problème, ne sont pas tous « possibles » selon l'attente institutionnelle, par exemple, $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ doit être laissé tel quel et $\sqrt{18}$ doit être transformé en $3\sqrt{2}$. L'élève sait que le professeur a la responsabilité de la faisabilité des calculs proposés et que lui-même découvrira que le professeur a bien rempli son contrat en effectuant la tâche demandée ; c'est le cas, par exemple, pour le calcul de $\sqrt{12}+\sqrt{27}$ où l'élève doit mettre en évidence le facteur commun $\sqrt{3}$. Cela renforce le problème soulevé précédemment, qu'en est-il si un élève qui ne contrôle pas complètement la situation se retrouve dans l'obligation de gérer une expression qui lui semble rompre le contrat ? Considérons, par exemple, $\sqrt{12}+\sqrt{4}$ à simplifier. Le professeur attend $2+2\sqrt{3}$, ce résultat n'est pas plausible pour un élève qui conclut par $\sqrt{12}+\sqrt{4}=\sqrt{16}=4$ qui lui semble peut-être mieux respecter les termes du contrat didactique.

Dans tous les manuels, on trouve des exercices d'application de l'égalité $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ rédigés comme suit : prouver par un calcul que $\sqrt{12}\times\sqrt{3}$ est un entier. L'élève obtient la racine carrée de 36, reconnaît 6 et conclut conformément à la consigne. Mais le professeur écrira plutôt que $\sqrt{12}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}$. On trouve ces corrections dans les annales ou les livres d'exercices corrigés. Le professeur qui corrige ainsi l'exercice n'attribue-t-il pas ses obligations du contrat à l'élève ? Et quand bien même le professeur jouerait-il le jeu de l'élève, il renforcerait là un « geste » qui n'est pas celui que l'élève doit acquérir.

Le manque de possibilité de contrôle qu'a l'élève pour simplifier ou calculer rend incertaine l'application correcte des règles apprises à travers la réalisation des gestes attendus. En comparant les calculs demandés aux élèves sur les nombres rationnels – « algèbre des fractions » – et sur les racines carrées – « algèbre des radicaux » –, on ne manquera pas de constater que les moyens de contrôle sont nombreux dans un cas et pas dans l'autre. Les fractions sont introduites par nécessité pour l'étude des problèmes relevant de la proportionnalité, mais durant ces cinq années, l'étude des fractions (du cycle des approfondissements de l'École primaire à la classe de quatrième du Collège) comprend simultanément un apprentissage de la situation de proportionnalité et des techniques de calculs sur les écritures quotients. Dans le cas des fractions, chaque geste technique est associé à de nombreuses situations et chaque situation peut être abordée par plusieurs méthodes. Mais, alors que l'apprentissage des règles élémentaires se fait en un an en classe de troisième de Collège, quelles situations sont associées aux simplifications et aux calculs sur les radicaux ?

2. Analyse de l'activité

Commençons par une réserve sur le titre que nous avons choisi. Aucun résultat d'expérimentation n'ayant été donné, l'analyse porte plus précisément sur un scénario d'activité enrichi de quelques détails de l'expérience de la classe.

Compte tenu de l'étude de l'objet racine carrée, la première remarque que nous pouvons immédiatement formuler est que cette activité que nous avons décrite dans la seconde partie est strictement inscrite dans le cadre des programmes actuels, qu'elle ne propose rien qui fasse émerger un concept nouveau propre à modifier l'écologie du système. Le caractère fonction de la racine carrée n'est pas en construction dans cette activité et le caractère outil des simplifications n'y est pas en jeu comme il le sera au lycée. Mais regardons de plus près ce que contient cette activité.

A. Analyse de la situation didactique.

Le problème posé par les deux parties de l'activité est finalement de savoir calculer les grandeurs inconnues à partir de celles qui sont données. La racine carrée intervient dans la première partie comme réponse à la question algébrique « quelle est la valeur positive de x sachant que $x^2 = a$ » mais cette question est posée dans le cadre géométrique et dans deux situations : longueur du côté du carré d'aire donnée, échelle de l'agrandissement qui multiplie les aires par un nombre donné. Dans la seconde partie de l'activité la racine carrée intervient pour des calculs d'échelles dans le cas d'une composition de deux agrandissements. Les variables didactiques sont les grandeurs qui sont données, on a déjà souligné l'importance du jeu sur ces variables dans la seconde partie, nous n'y reviendrons pas.

On peut, me semble-t-il, pour cette activité, faire référence au *changement de cadre* de la théorie du « jeu de cadres » élaborée par Régine Douady[22]. Selon cet auteur, le problème est posé dans un cadre, l'élève ne peut pas le résoudre dans ce cadre et c'est le changement qui permet de trouver une solution. Ici le problème est posé dans le cadre géométrique mais les questions portent sur des mesures de longueur, d'aire ou d'échelle c'est-à-dire sur des nombres. Les deux cadres, géométrique et numérique, sont d'entrée de jeu en interaction. Il me semble que l'interaction des deux cadres permet de donner du sens[23] aux nombres utilisés. Le fait que la valeur exacte $\sqrt{2}$ ne soit pas décimale ni rationnelle n'est pas déterminant si l'objectif est d'avoir une idée, aussi précise qu'on le souhaite, d'une longueur de côté. L'approximation 1,414 donne même aux élèves plus d'information sur cette longueur que l'écriture $\sqrt{2}$. Quand l'objectif est d'exprimer l'échelle d'un agrandissement et de déterminer les effets sur les longueurs et sur les aires, la valeur exacte est, en revanche, indispensable ; tout comme l'était la fraction pour exprimer le coefficient de proportionnalité.

---

[22] Régine DOUADY, *Jeux de cadre, Dialectique outil-objet,* Recherches en didactique des mathématiques, vol 7-2, La pensée sauvage, Grenoble, 1986.

[23] Au sens d'auteurs comme Rudolph BKOUCHE, Bernard CHARLOT et Nicolas ROUCHE, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris, 1991.

Le passage outil-objet me semble ici fonctionner pleinement quand on passe de la première partie à la seconde, et cela en est, a posteriori, l'enjeu principal. Dans la première partie, les élèves abordent le problème avec les outils qui sont les leurs : un agrandissement multiplie les longueurs par l'échelle, l'aire du carré de côté c est c^2 , le côté d'un carré d'aire a est $\sqrt{a}$. Avec cet « ancien », le jeu sur les variables didactiques et la confrontation des différentes méthodes, l'élève construit du « nouveau » : un agrandissement multiplie les aires par le carré de l'échelle, l'échelle de l'agrandissement qui multiplie les aires par k est $\sqrt{k}$, la longueur obtenue par agrandissement de la longueur $\sqrt{a}$ à l'échelle $\sqrt{k}$ est $\sqrt{ak}$, $\sqrt{a}\sqrt{k} = \sqrt{ak}$. Les deux dernières propositions ne sont pas acquises durant la première partie de l'activité parce que l'élève n'a pas l'utilité de mobiliser $\sqrt{a}$ et $\sqrt{ak}$ comme mesure de longueur, il peut se contenter d'une approximation. L'outil échelle de l'agrandissement qui multiplie les aires par k n'est pas suffisant pour construire $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Durant la seconde partie de l'activité, les agrandissements sont composés, le passage ancien-nouveau a lieu encore ici mais cette fois les échelles ne sont plus des outils pour obtenir des longueurs mais bien des objets de savoir qui sont mis en jeu dans une situation plus complexe. C'est l'opération sur les échelles qui rend nécessaire la conservation des valeurs exactes et de l'écriture formelle racine carrée.

En continuant l'analyse de cette activité à la lumière de ces outils théoriques et en se rappelant qu'un des problèmes avec la racine carrée est que les simplifications n'ont pas d'utilité pour les élèves, on peut exprimer d'une autre façon cette difficulté. Admettons que l'activité, dans sa seconde partie, permette aux élèves de construire l'égalité $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, cette égalité fonctionne comme outil, elle est institutionnalisée comme objet de savoir mais elle n'est pas réinvestie en tant que telle dans une situation plus riche, elle est simplement mobilisée pour transformer des écritures dans la seule volonté de répondre à l'attente du professeur. Elle ne sera véritablement utilisée en tant qu'objet qu'au lycée pour l'étude de la fonction racine carrée. On obtient là une explication de la persistance des difficultés des élèves qui avait été constatée et décrite dès le début de ce texte.

B. Analyse de l'évolution du contrat didactique

L'activité proposée met en jeu les racines carrées et leur produit. Ces notions sont incontournables pour répondre aux questions posées. Comme les prérequis sont peu importants et que le démarrage de l'activité repose sur ce que les élèves savent le mieux, à la fois sur les agrandissements et sur les racines carrées, la dévolution du problème est bonne, l'élève peut à la fois comprendre la consigne et commencer à élaborer une stratégie de résolution. En terme de contrat didactique, on peut dire que le professeur a la responsabilité du fait que l'élève en sache assez pour trouver les valeurs numériques qu'il demande et que l'élève a la charge d'élaborer la méthode et d'effectuer les calculs qui permettent d'obtenir les valeurs manquantes.

En jouant sur les variables didactiques de la situation (les valeurs données), le professeur modifie la performance de la stratégie de l'élève, rend plusieurs stratégies possibles. À ce moment, le contrat initial n'est pas modifié, c'est parce qu'il est fixe que l'élève développe de nouvelles méthodes. Mais quand le professeur conclut la phase a-didactique pour mettre en commun le travail des élèves, le contrat didactique a changé. Le professeur garantit que les méthodes différentes et pertinentes trouvées par quelques élèves sont retransmises à tous, et les élèves, quant à eux, ont pour tâche la comparaison non seulement des avantages mais surtout des régularités des différentes méthodes. C'est à ce moment que le nouveau est en construction.

Conclusion

L'étude de la racine carrée en classe de troisième telle que l'institution la définit par les programmes de 1989 n'est pas sans poser problème. Professeur de mathématiques, j'ai tenté de répondre aux difficultés de mes élèves en proposant une activité qui permette de construire une utilité aux écritures comprenant des radicaux et une utilité aux égalités telles que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

Afin que le problème d'enseignement soit posé, nous avons relevé les pratiques courantes des élèves en montrant leurs erreurs mais aussi en expliquant leurs démarches. À la lumière des textes officiels et de questions d'examens nous avons pu identifier les attentes de l'institution scolaire. En utilisant une formulation issue de la théorie anthropologique développée par Yves Chevallard, nous avons, dès ce moment, montré l'écart entre le rapport personnel des élèves de troisième à l'objet racine carrée et le rapport institutionnel pour les élèves de troisième à cet objet. Remarquant que le rapport personnel des élèves de quatrième à l'objet racine carrée est proche du rapport institutionnel pour ces élèves à cet objet, nous avons approfondi notre étude afin de trouver des causes à l'écart constaté en troisième.

Nous avons constaté que la conception de l'apprentissage qui est sous-jacente aux activités proposées dans les manuels est du type « je regarde, j'apprends, j'applique et je m'entraîne ». Nous avons, restant à l'intérieur du cadre défini par l'institution, proposé une activité pour permettre aux élèves de construire une partie des notions en jeu et en particulier de mettre en relation l'écriture formelle des racines carrées et les différentes fonctions des nombres que Gérard Vergnaud a mises en évidence. Nous nous sommes proposés ensuite de faire une analyse a priori de cette activité.

Nous avons commencé par approfondir notre diagnostic du rapport de l'institution à l'objet racine carrée pour mieux analyser la transposition didactique. La thèse de Teresa Assude, s'appuyant sur des sources mathématiques indépendantes de l'institution scolaire et utilisant les outils créés par la didactique des mathématiques, a permis d'identifier certaines causes des difficultés que rencontrent les élèves : la racine carrée qui est pensée comme fonction par les mathématiciens n'est pas présentée comme telle aux élèves, les calculs et simplifications attendues n'ont pas d'utilité au Collège et vont à l'encontre de la recherche pratique d'approximation associée à la calculatrice, enfin, les règles qui fondent « l'algèbre des radicaux » ne sont pas à la portée des élèves et, de ce fait, le licite ou l'illicite est défini autant par l'enseignant que par les mathématiques elles-mêmes.

Ayant rendu compte des limites de l'activité proposée par le fait qu'elle s'inscrit précisément dans le cadre défini par les programmes, nous avons tout de même procédé à son analyse didactique. Cette analyse a été formulée avec les outils théoriques de la dialectique outil-objet, du contrat didactique et des notions anthropologiques comme celles de rapport personnel, d'écologie et de geste. Cela nous a servi à pointer des éléments sans doute déterminants quant à l'acquisition de la racine carrée et à sa maîtrise dans des calculs ou des transformations d'écriture.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

La racine carrée en troisième. Etude d'une activité

AUTEUR :

Roditi Eric

RESUME :

L'auteur présente une séquence d'enseignement de la racine carrée en troisième, en justifiant par les difficultés rencontrées par les élèves et en livrant une analyse didactique détaillée des activités proposées.

MOTS CLES :

Racine carrée - collège - activité

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05
Dépôt légal : 1996
ISBN : 2-86612-152-X