

M : A.T.H.



MNEMOSYNÉ

UNIVERSITE DENIS DIDEROT

PARIS VII

Cette brochure est réalisée par l'IREM PARIS 7 DENIS DIDEROT avec le concours de la D.L.C., des MAEPEN de Paris, Créteil, Versailles.

Mnémosyne

personnification de la mémoire.

Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite;
de cette union naquirent les neuf Muses.

(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture : **"La mémoire"**
gravure allégorique d'après Gravelot (XVIII ème)

MNÉMOSYNE

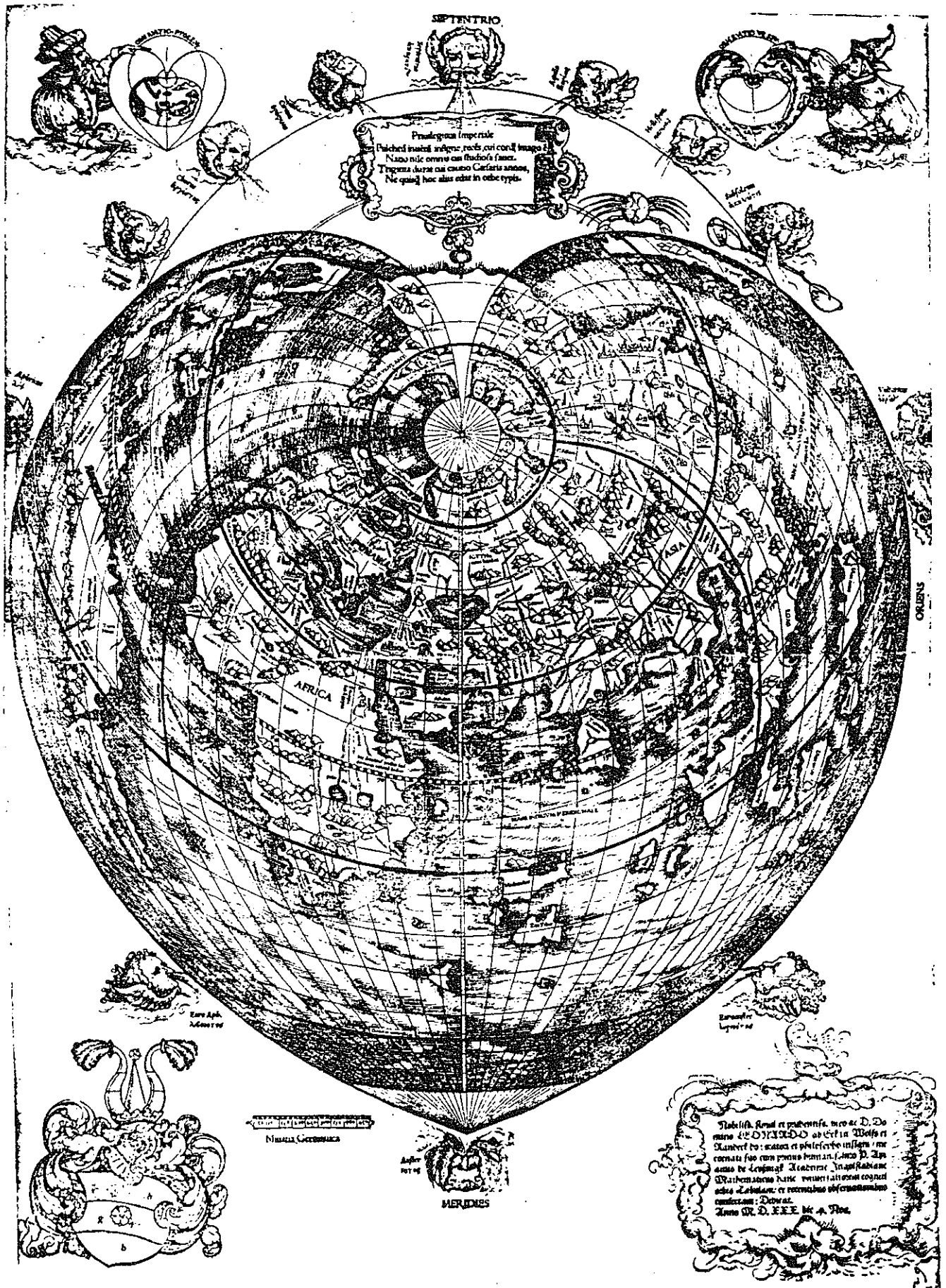
M: *Mathématiques*

A. *Approche par les*

T. *textes*

H. *historiques*





Peter Apianus, Tabula orbis cogniti universalior.
Ingolstadt 1530

SOMMAIRE

<i>Editorial</i>		<i>p.3</i>
<i>Bonnes vieilles pages</i>	<i>Puissant</i>	<i>p.5</i>
	<i>'Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement'</i>	
<i>Iconographie</i>	<i>Mercator</i>	<i>p.28</i>
<i>Etude</i>	<i>Histoire de quelques projections cartographiques</i>	<i>p.29</i>
	<i>Marie Benedittini</i>	
<i>Dans nos classes</i>	<i>La mesure du méridien</i>	<i>p.61</i>
	<i>Michèle Grégoire Mairie Françoise Jozeau</i>	
<i>Promenade</i>	<i>Méridien(s) de Paris</i>	<i>p. 81</i>



GEMMA FRISIUS, DOCCOMIENSIS,
MEDICVS ET MATHEMATICVS.

*Ut simulat solem radiantis gemma pyropi,
Sic Gemmam artifici picta tabella manu.
Hæc vultum dedit, ipse animi monumenta perennis ;
29. Ne quid in extincto non superesse putes.*

FRISIUS

EDITORIAL

Voici le deuxième volet de l'étude de la cartographie, plus spécifiquement consacré aux méthodes mathématiques de représentation de la Terre. Ce problème ne peut recevoir que des solutions partiellement satisfaisantes puisque la sphère n'est pas développable sur un plan.

Marie Benedittini, dans l'ETUDE, Histoire de quelques projections cartographiques, examine des solutions qui ont été imaginées depuis l'antiquité et qui, pour certaines sont encore en usage actuellement.

Dans les BONNES VIEILLES PAGES, nous vous proposons un texte de Louis Puissant, ingénieur topographe au début du XIXème siècle. Il présente une résolution analytique du problème de la projection d'une sphère sur un plan.

La rubrique DANS NOS CLASSES développe la question de la mesure de la Terre depuis Eratosthène, au IIIème siècle avant J.C., s'arrête sur le travail de Picard à la fin du XVIIème siècle, et surtout sur celui des astronomes et des mathématiciens de la Révolution française.

Et, pour terminer, nous vous suggérons une promenade estivale: un parcours le long du méridien de Paris...



Colonel PUISSANT.

BONNES VIEILLES PAGES

LOUIS PUISSANT

Louis Puissant (1769-1843), orphelin issu d'une famille pauvre, est placé dès l'âge de treize ans comme saute-ruisseau chez un notaire arpenteur. Lomet, ingénieur des Ponts et Chaussées, le remarque et le fait instruire puis entrer en 1790 au Dépôt de la Guerre. Il se distingue par son habileté dans le dessin topographique. Il suit les cours de Laplace et de Lagrange. Il participe à la triangulation de l'île d'Elbe, puis à celle de Lombardie (1803-1804). Il est nommé professeur au Dépôt de la Guerre où il enseigne la géodésie et la topographie aux Ingénieurs-Géographes lesquels effectueront les relevés nécessaires pour établir la carte d'Etat Major. Il est nommé en 1828 à l'Académie des Sciences, au fauteuil de Laplace. Vous pourrez apprécier, dans les pages suivantes, le témoignage de François Arago lors de l'éloge funèbre qu'il prononça le 12 janvier 1843 (publié dans les *Notices biographiques*, tome 3, Gide ed., Paris 1859). Puissant est le premier à présenter, dans un *Traité de Géodésie*, une synthèse des travaux de Delambre, constituant la géodésie en un corps de doctrine. La première édition de cet ouvrage paraît en 1805 et la troisième en 1842; cette dernière comporte des ajouts, correspondant à l'évolution de cette science ; en particulier, il introduit quelques passages relatifs à l'utilisation du calcul des probabilités en géodésie. Cet ouvrage servira longtemps de référence aux géodésiens français, avec tous les inconvénients qui en découlent pour les progrès de la géodésie française qui restera jusque vers les années 1860 à l'écart des nouvelles méthodes et des nouveaux instruments utilisés en particulier en Prusse.

Nous vous proposons ici le chapitre I du livre II, de son *Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement*, paru en 1807, ouvrage dit-il, qui constitue la deuxième partie de son *Traité de Géodésie*. Auparavant le livre I donne des exemples de calculs géodésiques ; il présente les calculs d'une chaîne de triangles dont certains côtés servent de bases aux opérations topographiques. Il nous a paru intéressant de vous présenter le détail des calculs permettant d'établir, à son époque, les formules relatives aux projections stéréographique et orthographique¹ des cercles de la sphère. Vous remarquerez que la position de l'oeil dans ces projections est bien mise en évidence. Dans le chapitre 2, Puissant traite de l'application de la théorie précédente au tracé des mappemondes.

¹ cf. fig. 4 b) et c) dans "Histoire de quelques projections cartographiques", p. 35

PUISSANT ¹

Messieurs, l'excellent confrère dont nous entourons ici les restes inanimés, assistait à l'avant-dernière séance de l'Académie. En huit jours, une constitution athlétique, encore pleine de force et de vigueur, a été brisée; une maladie cruelle, qui d'ordinaire est le triste partage de la jeunesse et de l'âge mûr, s'est emparée du vieillard septuagénaire, et l'a précipité vers la tombe avec une rapidité presque sans exemple. Que cette mort inattendue nous serve de leçon : elle nous avertit de ne pas compter sur le lendemain; de consacrer tous nos instants à la culture, à l'avancement des sciences, à ces recherches laborieuses, au prix desquelles on obtient l'estime de ses contemporains, et, quelquefois aussi, un regard de la postérité.

Je cherchais, Messieurs, des enseignements dans cette funèbre cérémonie, et je viens de tracer simplement le programme que notre confrère s'imposa de bonne heure, et qui a été sa règle de conduite invariable.

L'historien de l'Académie verra Puissant, dans sa première jeunesse, faire marcher de front les devoirs rigoureux du professorat et la composition d'un utile ouvrage de géométrie analytique.

Bientôt après, il le trouvera rattachant trigonométriquement, en qualité d'ingénieur-géographe, les régions sauvages de la Corse et de l'île d'Elbe. Là, sous la tente, dans la cabane du pâtre, sur des rochers battus de la tempête, les travaux pénibles de la journée n'empêcheront pas le laborieux observateur de s'initier scrupuleusement à tout ce que la grande géodésie offre de subtil, de délicat, de profond.

Revenu à Paris, également habile dans la pratique et dans la théorie, l'ingénieur sera absorbé, pendant toutes ses journées, par les discussions techniques, les calculs arides, mais éminemment utiles, que les travaux du Dépôt de la guerre exigent impérieusement. Ses veilles, il les consacrera à la rédaction du célèbre *Traité de Géodésie*, et du *Traité*, non moins capital, d'arpentage et de nivellement.

1. Puissant est né au Châtelet (Seine-et-Marne) en 1769; il est mort à l'âge de soixante-quatorze ans; ses funérailles ont eu lieu le 12 janvier 1843.

Sans jamais cesser de prendre une part active à la discussion numérique, à la coordination minutieuse des documents recueillis par les officiers de nos armées, Puissant, après la publication de ses deux grands ouvrages, en répandra complètement les principes parmi les ingénieurs-géographes, et ce corps deviendra une des gloires de la France.

Le titre d'académicien redoublera encore l'ardeur de notre confrère. Chaque nouvelle édition de la *Géodésie* offrira des améliorations réelles, là même où les plus habiles n'avaient pas soupçonné la nécessité d'une modification légère.

Enfin, l'heure de la retraite légale sonnera pour le colonel d'état-major, et l'administration de la guerre sentira l'impossibilité de se séparer d'un collaborateur infatigable, devant lequel d'ailleurs toutes les prétentions iront respectueusement s'incliner; et Puissant restera l'appréciateur scrupuleux, habile, consciencieux, de l'immense canevas de triangles qui servent de base à la nouvelle carte de France, une des opérations les plus vastes, les plus utiles, dont les annales des peuples aient conservé le souvenir.

Quand ces aperçus auront été convenablement développés, on ne s'étonnera pas que le nom de géodésie réveille toujours dans la pensée de ceux qui le prononcent, le nom de notre confrère. Ce n'est pas une petite chose, Messieurs, que d'être devenu ainsi, en Europe, la personnification d'une belle science!

Puissant ne laissera pas seulement parmi nous le souvenir impérissable d'un académicien d'élite. Le jour viendra de vous raconter aussi sa vie intérieure. Ceux qui ne le connurent point personnellement, apprendront alors tout ce qu'il y avait de dévouement dans l'époux, de tendresse dans le père, d'affabilité dans l'ami, d'indépendance, de fermeté, de désintéressement dans l'officier. Si le sort me réserve l'honneur d'entretenir une seconde fois l'Académie de notre illustre et si regrettable confrère, je ne manquerai pas de montrer aussi en lui l'excellent citoyen; de dépeindre les joies ineffables qu'il éprouvait pendant les triomphes de la France; les poignantes, les patriotiques douleurs qui bouillonnaient dans son âme à l'époque de nos revers. La science, Messieurs, semble grandir en majesté, en puissance, quand elle s'allie à toutes les vertus publiques et privées.

Adieu, mon cher confrère; adieu, Puissant, adieu.

F. Arago

Sept **TRAITÉ** *A. J. B.*
~~de~~
DE TOPOGRAPHIE,
D'ARPENTAGE
ET DE NIVELLEMENT;

PAR L. PUISSANT,

Professeur de Mathématiques à l'École Impériale militaire,
ancien Ingénieur - Géographe du Dépôt général de la
guerre, et Membre de la Société libre des sciences et
belles - lettres d'Agen.

O. J. Courcier

A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins, n° 57.

1807.

LIVRE II.

ANALYSE DES PROJECTIONS DE LA SPHÈRE, ET CONSTRUCTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES.

LE principal objet d'une grande triangulation, est de fournir les élémens d'une carte géographique : c'est à montrer la manière d'en construire le canevas, que je vais surtout m'attacher dans ce livre. M. Lacroix a donné sur cette matière d'excellens préceptes qui se trouvent dans son *Précis Astronomique* servant d'introduction à la *Géographie* de M. Pinkerton ; ouvrage que je me suis plu à consulter, et qui m'a fait naître le desir de retrouver, à l'aide de l'analyse élémentaire, diverses propriétés des projections énoncées par ce savant auteur. La simplicité des résultats que j'ai obtenus à cet égard, m'engage à faire connaître les constructions déduites de mes formules. Par ce moyen la théorie des nos 42 et suivans du *Traité de Géodésie* se trouvera complétée.

CHAPITRE PREMIER.

Recherche des propriétés des projections stéréographique et orthographique des cercles de la sphère.

Notions générales sur les projections.

27. **S**I les globes de grandes dimensions étaient faciles à construire et à transporter, et qu'il fût possible de les consulter aisément, ils formeraient sans doute les meilleures représentations de la Terre ; parce que les configurations des différentes parties de sa surface conserveraient sur ces globes leurs rapports de grandeur et de situation. Le relief des hautes montagnes et les autres accidens du terrain pourraient en outre y être rendus sensibles ; mais jusqu'à présent de pareils détails n'ont été exprimés que sur des reliefs d'une très-petite région , construits même sur une grande échelle. Obligé par conséquent de renoncer à l'usage fréquent des globes , on a imaginé de représenter sur une surface plane la situation respective des divers lieux de la terre , et l'on est même parvenu au point de figurer avec exactitude toutes les parties des contrées de peu d'étendue. C'est en cela que consiste la *méthode des projections géographiques*.

Parmi les surfaces courbes, celles des cônes et des cylindres sont développables, c'est-à-dire, peuvent s'étendre sur un plan sans qu'il en résulte déchirure ni duplication ; mais le contraire a lieu relativement aux surfaces de la sphère et des sphéroïdes. Ainsi pour le globe on est contraint d'altérer sur un plan certains rapports de grandeur plutôt que d'autres, selon le besoin, ou bien de représenter tous ces rapports par approximation.

On ne considère, à proprement parler, que deux sortes de

projections; les unes, qu'on appelle *projections stéréographiques*, sont des représentations du globe ou des parties de sa surface, soumises aux lois ordinaires de la perspective. Les autres, que l'on nomme *projections par développement*, sont en effet des espèces de développemens assortis aux rapports que l'on veut conserver ou n'altérer que le moins possible.

Concevons, par exemple, des droites menées d'un point pris dans l'espace à tous les points de la surface de la Terre considérée comme sphérique, et coupons ce système de lignes par un plan mené d'une manière quelconque; tous les points d'intersection seront sur ce plan les projections des points correspondans de la surface du globe.

Lorsque le plan de projection passe par le centre de la sphère, et que le point de vue est à l'extrémité du rayon mené perpendiculairement à ce plan, ce rayon se nomme *axe optique*. Si, au contraire, le point de vue est supposé à une distance infinie du tableau, ou pour mieux dire, si toutes les lignes projetantes lui sont perpendiculaires, alors la projection est dite *orthographique*.

La projection stéréographique a surtout été adoptée pour représenter un hémisphère tout entier. Les deux hémisphères du globe terrestre réunis composent une *Mappemonde*. Sur celle-ci l'on n'indique que les positions des lieux les plus remarquables du globe, le cours des fleuves et des principales rivières, les lacs, les plus grandes chaînes de montagnes, etc.

Quant aux autres cartes représentant une moindre étendue de pays et plus d'objets, leur construction est assujétie aux méthodes de développement, ou à la projection orthographique. Telles sont les *cartes générales* ou *géographiques* sur lesquelles sont figurées les quatre parties du monde; les *cartes particulières*, ou *chorographiques*, qui ne comprennent que les grands ou les petits Etats; enfin les *cartes topographiques*, qui présentent tous les détails du terrain.

Pour projeter un hémisphère en totalité ou en partie, d'après la première loi que l'on vient d'énoncer, on peut supposer, 1°. l'œil à l'un des pôles de la Terre; 2°. sur l'équateur; 3°. entre le pôle et l'équateur; 4°. enfin, au centre même de la Terre. Dans le premier cas, la projection est dite *polaire* ou *équato-*

riale; dans le second cas, on la nomme *projection sur le méridien*; dans le troisième, on l'appelle *projection horizontale*; et dans le quatrième, on la nomme *projection centrale*.

De la projection stéréographique, l'œil étant à un point quelconque de l'axe des z.

Fig. 6. (Géod.) 28. L'équation de la sphère est, en plaçant l'origine des coordonnées au centre,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

celle d'un plan est

$$z = Ax + By + D.$$

De plus, les deux projections verticale et orthographique de la génératrice du cône optique sont en général

$$y - b = n(z - c), \quad x - a = m(z - c);$$

mais comme dans le cas que l'on considère maintenant, le sommet S du cône a pour coordonnées $a = 0$, $b = 0$ et $-c$, on a simplement

$$y = n(z + c), \quad x = m(z + c);$$

ainsi l'équation du plan qui coupe la sphère devient

$$z = Am(z + c) + Bn(z + c) + D,$$

et l'on trouve aisément que

$$x = \frac{m(D + c)}{1 - Am - Bn}, \quad y = \frac{n(D + c)}{1 - Am - Bn}, \quad z = \frac{Amc + Bnc + D}{1 - Am - Bn}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de la sphère, et éliminant m et n , on a enfin

$$x^2 + y^2 + \frac{(Acx + Bcy + D(z + c))^2}{(D + c)^2} = \frac{r^2(z + c - Ax - By)^2}{(D + c)^2} \dots (M).$$

Telle est l'équation de la surface conique qui a pour base un cercle quelconque de la sphère.

L'œil étant sur la surface de la sphère.

29. En faisant $c=r$, on exprime analytiquement que le point de vue est à la surface de la sphère; ainsi l'équation (M) devient

$$x^2 + y^2 + \frac{(Arx + Bry + D(z+r))^2}{(D+r)^2} = \frac{r^2(z+r - Ax - By)^2}{(D+r)^2} \dots (M').$$

Si l'on fait en outre dans celle-ci $z=0$, on aura l'équation de la courbe suivant laquelle la surface conique rencontre le plan des xy ; savoir

$$x^2 + y^2 + \frac{2Ar^2x}{D+r} + \frac{2Br^2y}{D+r} = \frac{(r-D)r^2}{D+r}. \quad (1)$$

Il résulte de là que les projections stéréographiques des cercles de la sphère, l'œil étant à sa surface, sont elles-mêmes des cercles; propriété connue dès le temps de Ptolémée. (*Ptolemæi Planisphærium*, etc... 1558.)

L'équation des projections des parallèles perpendiculaires au plan xz , résulte de la précédente, en y faisant $B=0$; parce que dans ce cas celle de la base du cône est seulement $z = Ax + D$; on a donc

$$x^2 + y^2 + \frac{2Ar^2x}{D+r} = \left(\frac{r-D}{D+r}\right)r^2. \quad (2)$$

On peut donner à cette expression une forme plus simple; car si on désigne d'abord par ρ le rayon de la projection stéréographique d'un parallèle, et par α l'abscisse du centre de cette projection; qu'ensuite l'on fasse $y=0$, dans l'équation (2), et que l'on en représente les racines par x' , x'' , on obtiendra en dernière analyse

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x = \rho^2 - \alpha^2. \quad (2')$$

Soit h la hauteur du pôle, et L' la latitude du point N' par lequel passe le parallèle, on a (page 54, Géod.)

$$\alpha = \frac{\cos h}{2 \sin \left(\frac{L'+h}{2}\right) \cos \left(\frac{L'-h}{2}\right)}; \quad \rho = \frac{\cos L'}{2 \sin \left(\frac{L'+h}{2}\right) \cos \left(\frac{L'-h}{2}\right)},$$

et par suite ce rapport très-simple,

$$\frac{a}{r} = \frac{\cos h}{\cos L'};$$

c'est-à-dire que l'abscisse du centre de la projection stéréographique d'un parallèle est à son rayon, comme le cosinus de la hauteur du pôle est au cosinus de la latitude de ce parallèle.

Quant aux grands cercles de la sphère, leur plan a pour équation $z = Ax + By$; ainsi celle (1) devient, à cause de $D = 0$, dans le cas actuel, et en y faisant d'ailleurs $r = 1$, pour abréger,

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By = 1.$$

Si dans cette équation, qui est celle de la projection d'un grand cercle, on fait $(x_1 - A) = x$, $(y_1 - B) = y$, pour faire disparaître les premières puissances des variables, on aura

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 + A^2 + B^2. \quad (3)$$

Les coordonnées du centre de cette projection sont donc A et B . De plus, si l'on désigne par ϕ l'angle que la trace horizontale du plan de ce grand cercle fait avec l'axe des x , on aura, abstraction faite des signes, (art. 44, Géod.)

$$A = \tan h, \quad B = \frac{\tan h}{\tan \phi} = \frac{\sec h}{\tan p},$$

et le rayon de cette même projection

$$R = \sqrt{1 + A^2 + B^2} = \frac{\sec h}{\sin p},$$

p exprimant en outre la longitude du méridien que l'on considère, ou l'angle qu'il fait avec le plan xz .

Il résulte de là que les centres des méridiens de la carte sont tous sur une même droite perpendiculaire à l'axe des x , puisque l'ordonnée B d'un de ces points est seule variable. On verra bientôt comment on obtient la trace horizontale d'un méridien quelconque.

La distance AC (fig. 8, Géod.) du centre de la carte au centre de la projection d'un méridien est

$$AC = \frac{\tan h}{\sin \phi};$$

cela est une suite de la propriété du triangle rectangle ADC .

Pour avoir les projections p et p' des pôles P , P' (fig. 7, Géod.), il ne s'agit que de connaître les distances Ap , Ap' . Or en prenant le rayon de la sphère pour celui des tables, il est visible que ces distances sont respectivement les tangentes des angles NSP , NSP' , et que par conséquent

$$Ap = \tan\left(50^{\text{gr}} - \frac{h}{2}\right), \quad Ap' = \tan\left(50^{\text{gr}} + \frac{h}{2}\right);$$

de là

$$\overline{pp'} = \tan\left(50 - \frac{h}{2}\right) + \tan\left(50 + \frac{h}{2}\right).$$

Mais l'on peut donner à cette expression une forme très-simple; en effet,

$$\tan\left(50 \pm \frac{h}{2}\right) = \frac{1 \pm \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\cos \frac{1}{2}h}}{1 \mp \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\cos \frac{1}{2}h}} = \frac{\cos \frac{1}{2}h \pm \sin \frac{1}{2}h}{\cos \frac{1}{2}h \mp \sin \frac{1}{2}h};$$

multipliant haut et bas par le numérateur, on a

$$\tan\left(50 \pm \frac{h}{2}\right) = \frac{1 \pm \sin h}{\cos h};$$

donc la valeur de $\overline{pp'}$ se réduit à

$$pp' = 2 \sec h.$$

Les formules précédentes se modifient lorsque l'on projette les cercles de la sphère sur un méridien ou sur l'équateur; car dans le premier cas l'on a $h=0$, et les valeurs de α et ρ deviennent

$$\alpha = \frac{1}{2 \sin \frac{L'}{2} \cos \frac{L'}{2}} = \frac{1}{\sin L'} = \operatorname{cosec} L';$$

$$\rho = \frac{\cos L'}{2 \sin \frac{L'}{2} \cos \frac{L'}{2}} = \frac{\cos L'}{\sin L'} = \cot L' = \text{tangente distance au pôle};$$

de là

$$\alpha + \rho = An'' = \cot \frac{L'}{2}, \quad \alpha - \rho = An' = \tan \frac{L'}{2}.$$

Voilà tout ce qui concerne les parallèles; quant aux méridiens, leur rayon

$$R = \frac{\sec h}{\sin p} = \frac{1}{\sin p} = \operatorname{cosec} p = \sec p',$$

et les coordonnées de leur centre sont

$$A = 0, \quad B = \cot p = \tan p',$$

p' étant la longitude comptée du méridien sur lequel on projette. Lorsque $p' = 0$, on a $\sec p' = 1$, c'est-à-dire que dans cette circonstance le rayon [de projection du premier méridien est égal au rayon de la sphère, ce qui est d'ailleurs évident.

Dans le cas où $h = 100^{\text{gr}}$, il s'agit de la projection équatoriale, et l'on a d'une part

$$\alpha = 0, \\ \rho = \frac{\cos L'}{2 \sin^2 \left(\frac{L'}{2} + 50^{\text{gr}} \right)} = \frac{\cos L'}{1 + \sin L'} = \tan \left(50^{\text{gr}} - \frac{L'}{2} \right),$$

de l'autre

$$A = \infty, \quad B = \infty, \quad R = \infty.$$

Ces expressions signifient que tous les méridiens de la carte se changent alors en ligne droite. De plus, la relation $\tan \phi = \tan p \sin h$ (page 5, Géod.) se réduisant à $\tan \phi = \tan p$, on doit en conclure que les méridiens font avec l'axe des x un angle égal à leur longitude comptée depuis cet axe : ils passent en outre par l'origine des coordonnées ou le centre de la carte, puisque dans l'hypothèse actuelle $Ap = 0$, $Ap' = \infty$.

La seule inspection de la figure 8 (Géod.) fait voir que dans le triangle CpD on a la relation $\overline{Cp}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{Dp}^2$, ou bien, en vertu de la notation adoptée,

$$R^2 - y^2 = \sec^2 h.$$

On peut découvrir une relation semblable entre le rayon d'un parallèle et la distance de son centre au point D , ou à la droite

CD qui contient les centres des projections de tous les méridiens. Pour cet effet, si l'on reprend les valeurs générales de α et ρ , et qu'on les combine entre elles, on aura

$$\alpha + \rho = \cot \left(\frac{L' + h}{2} \right), \quad \alpha - \rho = \tan \left(\frac{L' - h}{2} \right),$$

ou bien

$$\frac{1}{\alpha + \rho} = \tan \left(\frac{L' + h}{2} \right), \quad \alpha - \rho = \tan \left(\frac{L' - h}{2} \right).$$

Soustrayant ces deux dernières équations l'une de l'autre, et réduisant au même dénominateur, il viendra

$$\frac{1 - \alpha^2 + \rho^2}{\alpha + \rho} = \tan \left(\frac{L' + h}{2} \right) - \tan \left(\frac{L' - h}{2} \right).$$

Mais $\tan \left(\frac{L' \pm h}{2} \right) = \frac{\sin L' \pm \sin h}{\cos L' + \cos h}$, par conséquent

$$\frac{1 - \alpha^2 + \rho^2}{\alpha + \rho} = \frac{2 \sin h}{\cos L' + \cos h}.$$

D'un autre côté, $\cos L' + \cos h = 2 \cos \left(\frac{L' + h}{2} \right) \cos \left(\frac{L' - h}{2} \right)$, donc

$$1 - \alpha^2 + \rho^2 = \frac{\sin h}{\sin \left(\frac{L' + h}{2} \right) \cos \left(\frac{L' - h}{2} \right)};$$

et à cause de la valeur de α ci-dessus, il s'ensuit que

$$\frac{1 - \alpha^2 + \rho^2}{2\alpha} = \tan h.$$

Maintenant, si dans cette équation on met pour α sa valeur $\alpha' - \tan h$ (*), et que l'on réduise, on obtiendra

$$\alpha'^2 - \rho^2 = \sec^2 h.$$

(*) Le point B (fig. 8, Géod.) étant sur la carte le centre d'un parallèle quelconque, et CD étant la ligne des centres des méridiens, on a, à cause de $AD = \tan h$, et de $AB = \alpha$,

$$BD = \alpha' = \alpha + \tan h;$$

partant,

$$\alpha = \alpha' - \tan h.$$

FIG. 10. Cette équation et son analogue $R^2 - y^2 = \sec^2 h$ conduisent à une propriété très-remarquable. En effet, si B et C sont respectivement sur la carte les centres du parallèle RR' et du méridien MM' , p étant le pôle, on aura, en vertu des relations précédentes,

$$\overline{CM'}^2 = R^2 = y^2 + \sec^2 h, \quad \overline{BM'}^2 = p^2 = x'^2 - \sec^2 h,$$

et ajoutant, on obtiendra

$$R^2 + p^2 = x'^2 + y^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2.$$

Donc le triangle CBM' est rectangle en M' ; donc les parallèles et les méridiens forment sur la carte les mêmes angles que sur le globe. On démontre aisément, par la Géométrie élémentaire, que, dans la projection de Ptolémée que nous analysons maintenant, cette propriété n'est qu'un cas particulier d'une autre plus générale. Nous aurons occasion de revenir sur cet objet.

Le point de vue étant au centre de la sphère.

30. Pour trouver les formules relatives à la projection centrale, soit fait dans l'équation (M) n° 28, $c=0$ et $z=r$, on aura

$$x^2 + y^2 + r^2 = \frac{r^2}{D^2} (r - Ax - By)^2 \dots \dots (4);$$

c'est la projection stéréographique d'un cercle quelconque sur un plan tangent à la sphère et par conséquent perpendiculaire à l'axe optique.

FIG. 11. Présentons maintenant cette équation en fonction de la hauteur du pôle et de la latitude d'un parallèle quelconque; et pour simplifier les calculs, supposons, ce qui est permis, que l'axe de la Terre PP' soit dans le plan même des xz . Dans ce cas, le plan d'un parallèle lui sera perpendiculaire; ainsi l'on aura pour équation de sa trace horizontale RM ,

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B},$$

dans laquelle

$$-\frac{A}{B} = \infty, \quad B = 0;$$

et pour celle de sa trace verticale RN' ,

$$z = Ax + D.$$

Dans ces équations, A est la tangente trigonométrique de l'angle $N'RX$; par conséquent $A = -\cot h$; et à cause du triangle rectangle AOn' , on a évidemment $AO = r \cos \theta$, en dénotant par θ l'arc Pn' ou le complément de la latitude L' du point N' . D'un autre côté, $AR = -\frac{D}{A}$; et puisque le triangle AOR est rectangle, on a en outre $AR = \frac{r \cos \theta}{\cos h}$; donc

$$-\frac{D}{A} = \frac{r \cos \theta}{\cos h};$$

donc

$$D = \frac{r \cos \theta \cot h}{\cos h} = \frac{r \cos \theta}{\sin h}.$$

Cela posé, si l'on substitue dans l'équation (4) pour A , B et D leurs valeurs, on aura

$$x^2 + y^2 + r^2 = \frac{\sin^2 h}{\cos^2 \theta} (r + \cot h \cdot x)^2;$$

développant et chassant le dénominateur, on obtiendra

$$x^2 \cos^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \sin^2 h + 2rx \sin^2 h \cot h + x^2 \sin^2 h \cot^2 h;$$

puis faisant passer tous les termes dans un même membre, changeant tous les signes et divisant par $\sin^2 h$, on trouvera enfin

$$x^2 (\cot^2 h - \cos^2 \theta \operatorname{cosec}^2 h) - y^2 \cdot \cos^2 \theta \operatorname{cosec}^2 h + 2rx \cdot \cot h - r^2 \cos^2 \theta \operatorname{cosec}^2 h + r^2 = 0 \dots (4'')$$

Les projections des parallèles sur un horizon quelconque se déterminent par le moyen de cette dernière équation, qui, selon que le premier terme est positif, négatif ou nul, appartient à l'hyperbole, à l'ellipse ou à la parabole.

Si l'on fait $\theta = 1^\circ$, l'équation dont il s'agit se réduira à

$$\cot h \cdot x + r = 0.$$

Telle est l'équation de la projection de l'équateur.

Dans la supposition que le coefficient de x^2 est nul, on a

$$\cot^2 h - \cos^2 \theta \operatorname{cosec}^2 h = 0,$$

d'où l'on tire aisément

$$\cos h = \cos \theta, \quad \text{ou} \quad h = \theta.$$

Concluons de là que le parallèle d'un lieu dont le complément de la latitude égale la hauteur du pôle est représenté par une parabole sur le plan de projection.

L'équation (4'), lorsqu'on y fait $y = 0$, donne les abscisses des points où les projections des parallèles coupent l'axe des x . On pourrait croire d'abord que les valeurs de x tirées de cette équation sont très-complicquées; cependant avec un peu d'attention on verra que ces valeurs sont susceptibles d'une expression fort simple. En effet, la supposition de $y = 0$ donne, après avoir converti les coefficients en sinus et cosinus,

$$(\cos^2 h - \cos^2 \theta) x^2 + 2r \sin h \cos h \cdot x + r^2 (\sin^2 h - \cos^2 \theta) = 0,$$

et par suite

$$x^2 - \frac{2r \sin 2h \cdot x}{\sin(h+\theta) \sin(h-\theta)} + \frac{r^2 \cos(h+\theta) \cos(h-\theta)}{\sin(h+\theta) \sin(h-\theta)} = 0,$$

équation dont les racines sont

$$x_1 = \cot(h+\theta) r; \quad x_2 = \cot(h-\theta) r.$$

Le lieu des méridiens de la carte est donné de même par la formule (4); mais pour ce cas l'on a nécessairement $D = 0$, et partant

$$r - Ax - By = 0. \quad (5)$$

On particularisera la projection du méridien que l'on a en vue de représenter, en introduisant dans son équation l'expression de l'angle que le plan de ce méridien fait avec celui des xz . Or le cosinus de cet angle est

$$\frac{-B}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} = \cos p = \cos. \text{ longitude.}$$

Ici A est constant, et c'est maintenant la tangente de la lati-

tude du lieu placé au centre de l'horizon, ou, si l'on veut, la tangente de la hauteur du pôle; puisque la trace verticale AP du plan d'un méridien quelconque est $z = Ax$. Pour la quantité p , elle varie d'un méridien à l'autre : on a donc

$$B^2 = \cos^2 p (1 + A^2) + \cos^2 p \cdot B^2,$$

d'où

$$B = \pm \frac{\cot p}{\cos h}.$$

D'après cela, l'équation $r - Ax - By = 0$ devient

$$r - \text{tang } h \cdot x - \frac{\cot p}{\cos h} y = 0.$$

Ainsi toutes les droites qui représentent les méridiens dans la projection sur l'horizon, se coupent au même point et sur l'axe des x , à une distance de l'origine ou du centre de la carte

$$= x = \frac{r}{\text{tang } h}.$$

Lorsque $p = 0$, on a $\cot p = \infty$; alors il reste de l'équation précédente

$$\frac{\cot p}{\cos h} y = 0, \quad \text{ou} \quad y = 0.$$

C'est le lieu de la projection du premier méridien de la carte. Cette projection coïncide donc avec l'axe des x , ce qui est d'ailleurs de toute évidence.

Les formules précédentes acquièrent une nouvelle forme lorsque $h = 0$ ou $h = 1$. Dans le premier cas, qui se rapporte à la projection sur un méridien, l'équation (4') devient, à cause de $\cot h = \infty$ et de $\text{coséc}^2 h = 1 + \cot^2 h$,

$$x^2 \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) - y^2 - r^2 = 0,$$

ou bien

$$\text{tang}^2 \theta \cdot x^2 - y^2 = r^2.$$

Les parallèles à l'équateur sont donc des hyperboles dont les branches sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses; puisque l'ordonnée y n'entre ici qu'à la seconde puissance et qu'elle est perpendiculaire à l'axe des x . Les sommets de ces courbes s'ob-

tiennent en faisant dans ce résultat $y = 0$, et l'on a

$$x = \pm \frac{r}{\tan \theta}.$$

On détermine la projection de l'équateur en faisant dans ce même résultat $\theta = 1^\circ$; alors il reste $\tan^2 \theta \cdot x^2 = 0$; quelle que soit donc y , on a

$$x = 0;$$

ainsi la projection de l'équateur est perpendiculaire à celle du premier méridien, et coïncide avec l'axe des y .

Les projections des méridiens s'obtiennent avec non moins de facilité. Pour cela, on fait $A = 0$ dans l'équation (5), et l'on a simplement, en faisant attention que $B = \cot p$,

$$y = -r \tan p.$$

Quelle que soit x , la valeur de y est donc constante pour un même méridien. Il suit de là que les projections des méridiens sont toutes des droites parallèles aux x , ou, ce qui revient au même, perpendiculaires à la projection de l'équateur.

Le cas où $h = 1^\circ$ convient à la projection équatoriale. Cette circonstance réduit l'équation (4') à

$$x^2 + y^2 = r^2 \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) = r^2 \tan^2 \theta.$$

Les projections des parallèles sont donc des cercles dont le rayon $= r \tan \theta$; et si l'on faisait ici $\theta = 100^\circ$, ce rayon serait infini: on ne peut donc pas, dans le cas actuel, représenter l'équateur. On voit par là pourquoi il est impossible de figurer un hémisphère entier dans la projection centrale.

Il nous reste à déterminer, dans la même hypothèse, les projections des méridiens. Or c'est à quoi nous parviendrons en faisant $A = B = \infty$ dans l'équation (5), ce qui la réduit à

$$Ax + By = 0.$$

Mais en général $A = \frac{\sin h}{\cos h}$, $B = \frac{\cot p}{\cos h}$; donc dans le cas dont il s'agit,

$$y = -x \sin h \tan p.$$

Ainsi les projections des méridiens sont des droites passant par l'origine des coordonnées ou par la projection du pôle. On voit en outre que l'axe des x est le premier méridien de la carte.

Si au lieu de supposer le *Tableau* tangent à la sphère, on le faisait passer par le centre ou par l'origine des axes, ce qui est le cas que l'on considère en Gnomonique, toutes les formules précédentes, modifiées convenablement, se rapporteraient au cadran horizontal; et l'on en déduirait aisément les équations des lignes horaires ou des projections des méridiens; celles des courbes de déclinaisons du soleil, etc.; par suite même, toutes les équations relatives aux cadrans verticaux inclinés, déclinans, etc., et, ce qui est fort remarquable, tant les procédés graphiques que les formules trigonométriques employées ordinairement en pareille circonstance. Ces diverses recherches peuvent exercer utilement la sagacité des jeunes lecteurs.

De la projection orthographique.

31. Les lignes projetantes, au lieu de concourir à un point déterminé, comme dans les projections précédentes, sont maintenant parallèles entre elles et perpendiculaires au tableau respectif, ou ce qui est de même, le point de vue et le tableau sont supposés à une distance infinie l'un de l'autre. C'est à ce cas particulier de la projection stéréographique que l'on a donné le nom de *projection orthographique*, ainsi que nous l'avons déjà observé. Ces lignes projetantes menées par tous les points d'une courbe quelconque, forment donc par leur ensemble une surface cylindrique dont l'intersection avec l'un des plans de projection est, sur ce plan, l'image de cette même courbe. En vertu de cette loi, l'équation de projection d'un cercle de la sphère résulte de l'équation (M) n° 28, dans laquelle $c = \infty$; ainsi l'on a

$$x^2 + y^2 + (Ax + By + D)^2 = r^2, \quad (6)$$

ou si l'on voulait, pour plus de symétrie,

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{d - ax - by}{c} \right)^2 = r^2,$$

en prenant $ax + by + cz = d$ pour l'équation du plan d'un cercle

de la sphère. Il est facile de s'assurer que les projections verticales de ce cercle seraient de même

$$x^2 + z^2 + \left(\frac{d-ax-cz}{b}\right)^2 = r^2.$$

$$y^2 + z^2 + \left(\frac{d-by-cz}{a}\right)^2 = r^2.$$

Ces équations appartiennent en général à des ellipses : elles donnent des cercles lorsque le plan sécant est parallèle à l'un des plans de projection, pourvu toutefois que la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur ce plan soit moindre que le rayon de cette sphère.

Ne voulant traiter que le cas le plus général de la projection orthographique, vu son peu d'utilité en géographie, nous allons examiner les formes diverses que prend l'équation (6) dans la projection sur l'horizon. D'abord cette équation donne la projection d'un parallèle, en y faisant, comme dans le n° 30, $A = -\cot h$, $B = 0$, $D = \frac{r \cos \theta}{\sin h}$, l'axe de la terre étant alors supposé dans le plan xz ; de sorte que l'on a

$$y^2 + (1 + \cot^2 h) x^2 - 2r \frac{\cos \theta \cot h}{\sin h} \cdot x + r^2 \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 h)}{\sin^2 h} = 0. \quad (7)$$

Si dans cette équation l'on fait $y = 0$, il restera

$$x^2 - 2r \cos \theta \cos h \cdot x + r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 h) = 0.$$

Le coefficient du second terme de celle-ci est la somme des racines prises avec un signe contraire, et le dernier terme $r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 h) = r \cos (\theta + h) \cdot r \cos (\theta - h)$, est le produit de ces racines. Donc en désignant l'une par x_1 , l'autre par x_2 , on aura

$$x_1 = \cos (\theta + h) \cdot r, \quad x_2 = \cos (\theta - h) \cdot r.$$

et l'expression du petit axe sera

$$x_2 - x_1 = 2 r \sin \theta \cos h.$$

Quant au demi-grand axe de l'ellipse, on l'obtient en faisant $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ dans l'équation (7) ; et l'on trouve, après toutes les opérations convenables,

$$y = \pm r \sin \theta.$$

Pour les projections des méridiens, leur équation est

$$x^2 + y^2 + \left(\operatorname{tang} h \cdot x + \frac{\operatorname{tang} h}{\operatorname{tang} \varphi} \cdot y \right)^2 = r^2;$$

c'est ce que devient l'équation (6), en y substituant pour A , B et D leurs valeurs respectives $\operatorname{tang} h$, $\frac{\operatorname{tang} h}{\operatorname{tang} \varphi}$ et $D=0$ (n° 29). Développant et ordonnant, on a

$$x^2 (1 + \operatorname{tang}^2 h) + y^2 \left(1 + \frac{\operatorname{tang}^2 h}{\operatorname{tang}^2 \varphi} \right) + \frac{2 \operatorname{tang}^2 h}{\operatorname{tang} \varphi} \cdot xy = r^2.$$

Le moyen de rapporter cette courbe à ses axes principaux, est de changer la direction actuelle des coordonnées, à l'aide des formules connues, (*App. de l'Alg. à la Géom.*, par Lacroix, n° 124.)

$$x = mt - nu, \quad y = nt + mu,$$

afin de pouvoir ensuite faire disparaître le terme en tu . On trouve d'abord

$$\left. \begin{aligned} & (m^2 t^2 + n^2 u^2 - 2mntu) (1 + \operatorname{tang}^2 h) \\ & + (n^2 t^2 + m^2 u^2 + 2mntu) \left(1 + \frac{\operatorname{tang}^2 h}{\operatorname{tang}^2 \varphi} \right) \\ & + \frac{2 \operatorname{tang}^2 h}{\operatorname{tang} \varphi} (mnt^2 + m^2 tu - n^2 tu - mn u^2) \end{aligned} \right\} = r^2. \quad (2)$$

Achevant les opérations indiquées, ordonnant et égalant à zéro le coefficient de tu , sa valeur sera

$$\operatorname{tang} \varphi (m^2 - n^2) - (\operatorname{tang}^2 \varphi - 1) mn = 0.$$

Soit $n = \sin \beta$, $m = \cos \beta$; il vient, par la substitution de ces valeurs dans l'équation précédente,

$$\cos 2\beta - \frac{\sin 2\beta}{2} \left(\frac{\operatorname{tang}^2 \varphi - 1}{\operatorname{tang} \varphi} \right) = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang}^2 \varphi - 1} = \frac{\sin 2\varphi}{-\cos 2\varphi} = -\operatorname{tang} 2\varphi,$$

et par conséquent

$$\beta = -\varphi.$$

Le grand axe de l'ellipse de projection d'un méridien coïncide donc avec la trace horizontale de ce méridien.

Le développement de la formule (z), dégagé du terme en tu est, après avoir réduit à l'aide de la relation $m^2 + n^2 = 1$,

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[1 + m^2 \tan^2 h + n^2 \frac{\tan^2 h}{\tan^2 \varphi} + \frac{2 \tan^2 h}{\tan \varphi} mn \right] t^2 \\ & + \left[1 + n^2 \tan^2 h + m^2 \frac{\tan^2 h}{\tan^2 \varphi} - \frac{2 \tan^2 h}{\tan \varphi} mn \right] u^2 \end{aligned} \right\} = r^2;$$

faisant ici $t=0$ pour avoir l'expression du demi-petit axe u , il vient

$$u = \pm \frac{r}{\sqrt{\left(1 + n^2 \tan^2 h + m^2 \frac{\tan^2 h}{\tan^2 \varphi} - \frac{2 \tan^2 h}{\tan \varphi} mn \right)}};$$

mais à cause de $\beta = -\varphi$, on a $n = -\sin \varphi$, $m = \cos \varphi$; donc

$$u = \pm \frac{r}{\sqrt{1 + \tan^2 h + \frac{\tan^2 h}{\tan^2 \varphi}}} = \pm \frac{r}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} = \pm r \cos V,$$

V étant l'inclinaison du méridien sur le plan xy .

On déterminerait de la même manière la valeur du demi-grand axe de l'ellipse de projection, et l'on trouverait qu'elle est égale à r , comme cela est évident.

Ceux qui possèdent bien les principes de la méthode analytique dont nous venons de faire usage, pourront découvrir eux-mêmes quelques autres propriétés des projections, et parvenir, par des transformations heureuses, à des formules que l'on puisse ensuite employer aisément pour résoudre divers problèmes relatifs à la Géographie.

Plusieurs géomètres célèbres se sont occupés des deux espèces de projections qui font le sujet de ce livre; c'est ce que l'on peut voir dans les *Mémoires de l'Académie de Pétersbourg*, tome I, première partie; dans ceux de *l'Académie de Berlin*, année 1779; et dans le tome V des *Mémoires de l'Institut de France*.



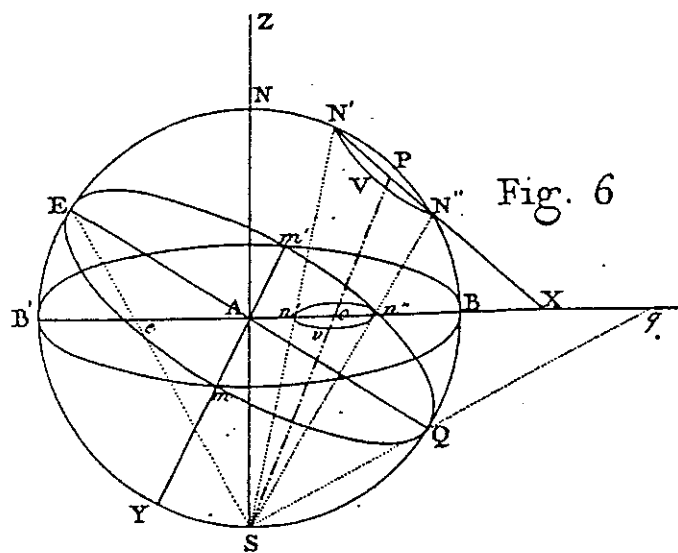


Fig. 6

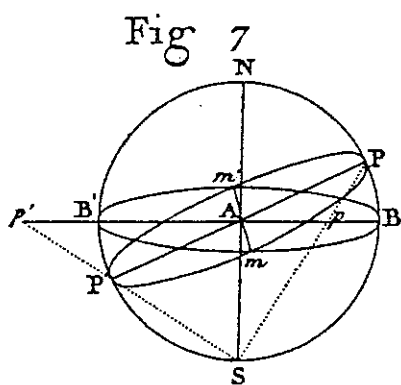


Fig. 7

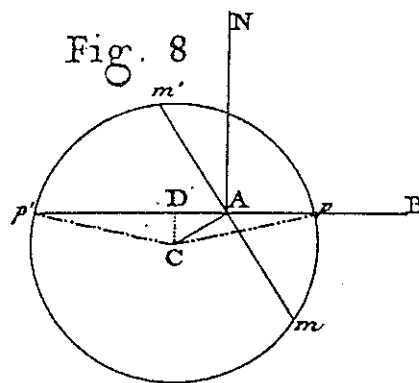


Fig. 8

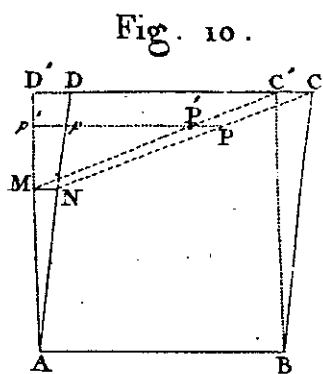


Fig. 10.

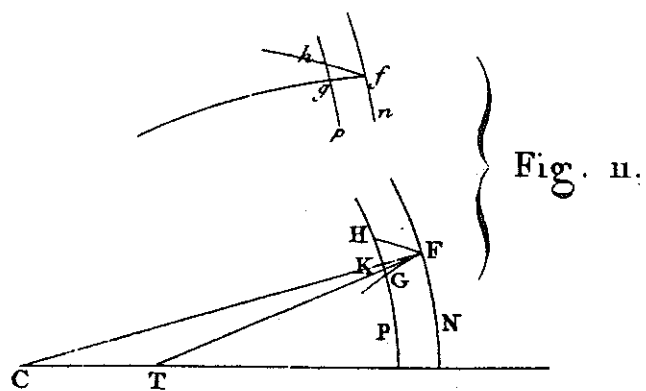


Fig. 11.



MERCATOR

HISTOIRE DE QUELQUES PROJECTIONS CARTOGRAPHIQUES

Marie Benedittini (enseignante à Paris 8-Vincennes)

La géographie est une des sciences qu'il faudra toujours perfectionner. Quelque peine qu'on ait prise, il n'a pas été possible jusqu'à présent d'avoir une description exacte de la Terre. Il faudrait que tous les souverains s'entendissent et se prêtassent des secours mutuels pour ce grand ouvrage. Mais ils se sont presque toujours plus appliqués à ravager le monde qu'à le mesurer.

Voltaire (Dictionnaire philosophique (1764))

La science maîtrisée qu'est la cartographie¹ aujourd'hui nous fait oublier qu'elle a eu une longue histoire. Les plus anciennes représentations que nous connaissons sont les cartes d'argile babyloniennes qui datent de 3000 ans av. J.C. "L'Odyssée" d'Homère, écrit près de 1000 ans av. J.C., a joué un des rôles dévolus à la carte, à savoir la description d'itinéraires. Depuis l'époque hellénistique, des notions comme "la forme de la terre", "la détermination des latitudes et des longitudes", "la connaissance des territoires et leurs représentations" ont été régulièrement revisitées en fonction des avancées conceptuelles et techniques de chaque époque. Elles ont ainsi contribué au développement de disciplines scientifiques, voire même à leur création. C'est le cas de l'astronomie, indispensable au repérage de la position des navires et plus généralement à la détermination des longitudes et des latitudes, ou de la géodésie dont l'objet concerne la forme et les dimensions de la terre. Les méthodes de triangulation des territoires développées au XVI^e siècle ont contribué à la rationalisation de la topographie. Trois siècles après, cette science du levé de cartes s'est enrichie des techniques de mesure de la troisième dimension, l'altitude. La recherche des données nécessaires au tracé des mers et des rivières a constitué l'hydrographie.... Que d'expéditions difficiles ont été nécessaires pour accéder aux savoirs qui ont progressivement apporté à la carte sa justesse et sa précision actuelles!

La cartographie est jeune - son nom n'existe que depuis le XIX^e siècle - mais elle s'est bâtie sur les héritages de la cosmographie et de la géographie et a emprunté les compétences de nombreuses disciplines scientifiques et techniques. Les mathématiques, par exemple, ont contribué à son développement depuis l'époque grecque. En retour, elles se sont enrichies de la problématique de la projection de la sphère ou de l'ellipsoïde sur une surface développable. Dans cet article, nous avons privilégié cet aspect. La trame qui est bâtie autour de cartographes dont le nom est associé aux projections qu'ils ont découvertes ou exploitées, sert en même temps de prétexte pour faire un historique du développement cartographique. En encadré, nous avons indiqué l'explicitation mathématique de quelques unes de ces projections qui sont toujours utilisées

¹ Mot dont la signification est donnée dans le glossaire. Les mots soulignés dans le texte renvoient au glossaire p. 59

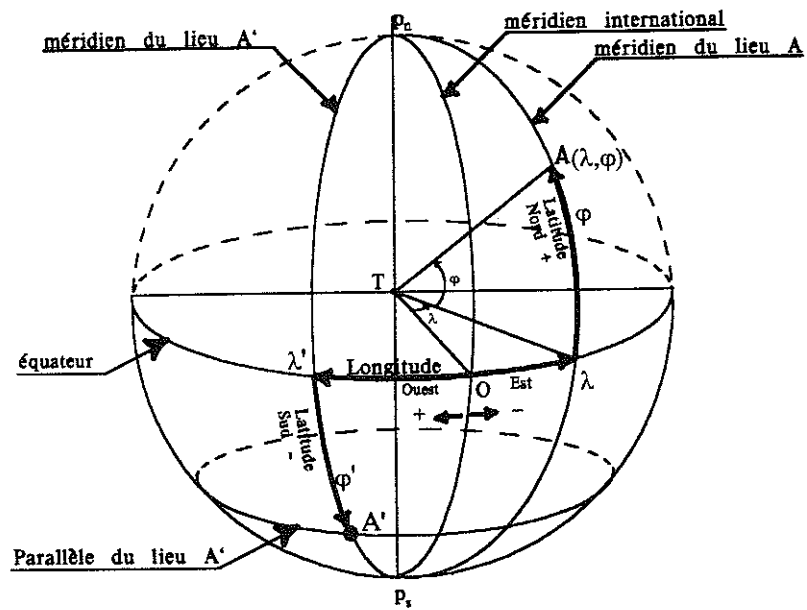


Figure 1 : Méridiens et parallèles ; longitude et latitude.

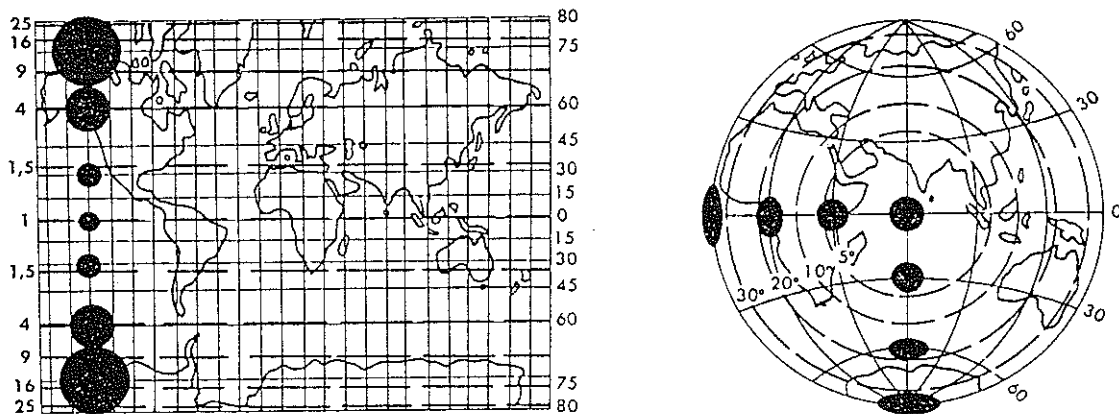


Figure 2 : Indicatrice de Tissot pour
a) la projection cylindrique de Mercator (§ IV) ;
b) la projection équivalente azimutale de Lorgna (§ VI.C)

GÉNÉRALITÉS SUR LES PROJECTIONS CARTOGRAPHIQUES

Après avoir déterminé l'échelle² à laquelle la carte sera construite, on considère un ellipsoïde - image de la terre - réduit à cette même échelle (ou pour simplifier une sphère réduite). Un point **A** y est défini par sa longitude λ et sa latitude φ (**Figure 1**). Une projection cartographique est une correspondance continue et biunivoque entre les points d'une portion de cette surface réduite et les points homologues du plan. Le point **a**, projection de **A** sur le plan, est déterminé par ses coordonnées (**x**, **y**), fonctions de (λ , φ) :

$$x = f(\lambda, \varphi) \quad , \quad y = g(\lambda, \varphi).$$

Dans les encadrés mathématiques, nous conserverons ces mêmes conventions, les lettres φ et λ , pour désigner la latitude et la longitude et **x** et **y**, pour les coordonnées géographiques dans le plan. Nous réserverons systématiquement les lettres majuscules pour désigner les points de la surface terrestre réduite et les lettres minuscules associées, pour leur image sur la carte. Nous considérerons généralement la sphère réduite dont le rayon est toujours nommé **R** ou, quand nous le préciserons dans le texte, l'ellipsoïde réduit.

I.1 - Déformations des cartes et propriétés recherchées

Une sphère, un ellipsoïde ne sont pas développables sur un plan. De ce fait, toutes les projections utilisées en cartographie engendrent des déformations. Pour préciser ces altérations, on fait appel à l'indicatrice de Tissot, qui est l'image sur la carte d'un cercle placé sur la surface terrestre réduite, de rayon infinitésimal. Sa forme elliptique variable selon la position du centre du cercle (**Figure 2**) permet de repérer les altérations de longueur et les déformations angulaires.

L'indicatrice est un cercle quand la projection conserve les angles. On dit alors que la projection est conforme. Les images des méridiens et des parallèles sont perpendiculaires, et au voisinage d'un point, l'échelle est constante dans toutes les directions. Si l'échelle est une caractéristique de la carte, elle n'est en réalité exacte que pour les quelques points pour lesquels le module linéaire³ vaut 1. Ailleurs, où il est différent de 1, il traduit une estimation de l'erreur associée au mode de projection. Dans les encadrés mathématiques relatifs aux différentes projections, nous donnerons la plupart du temps la formule traduisant la variation du module linéaire et nous préciserons les positions pour lesquelles il vaut 1.

² Facteur d'homothétie pour passer de la terre à un ellipsoïde (ou une sphère) réduit intermédiaire qu'on projetera sur le plan de la carte. Sur une carte au 1 : 100000, 1 cm correspond à une longueur 10^5 plus grande, soit 1 km .

³ Le module linéaire traduit les déformations de longueur. C'est le rapport **m** d'une longueur **ab** du plan à la longueur correspondante **AB** de l'ellipsoïde réduit à l'échelle : **m** = **ab/AB**. Quand il n'y a pas de déformation, **m** = 1.

Quand une projection conserve les rapports de surface, elle est dite équivalente. Les méridiens et parallèles sont perpendiculaires et en tout point de la carte, la surface de l'indicatrice de Tissot reste constante. Généralement, on choisit une projection en fonction de ses caractéristiques en termes de stabilité/déformation. Ainsi, la projection de Mercator (cf. § IV), projection conforme, qui traduit tout déplacement à cap constant par une droite, a été créée à l'usage des navigateurs. En contrepartie, elle produit de fortes déformations de surface qui peuvent la rendre inutilisable, notamment au delà d'une latitude de 80°. La surface du Groenland, par exemple, est comparable à celle de l'Amérique du Sud, pourtant huit fois supérieure. A l'inverse, une projection équivalente peut être choisie pour privilégier les rapports de surface entre les pays ou les continents. Mais elle engendre des déformations d'angle (donc de forme) qui peuvent en limiter son intérêt. On peut aussi choisir une projection qui minimise les déformations d'angles et de surfaces, bien qu'elle présente l'inconvénient de ne conserver aucune stabilité vis-à-vis de ces deux grandeurs. Une telle projection est alors dite aphylactique. Parmi celles-ci, on utilise les projections équidistantes qui conservent l'orthogonalité de méridiens et des parallèles, l'équidistance des parallèles, et les longueurs le long des méridiens.

En fonction de l'usage particulier auquel est destinée la carte, le concepteur impose des conditions à la représentation en choisissant une projection qui correspond au meilleur compromis. Pour une représentation conforme par exemple, on peut utiliser une des propriétés liée à la conformité : la stabilité de la valeur du module linéaire au voisinage d'un point. Cette condition se traduit par l'égalité $\frac{aa_1}{AA_1} = \frac{aa_2}{AA_2}$ où AA_1 et AA_2 sont des grandeurs infinitésimales associées à un point quelconque, A, de la sphère réduite selon la longitude et la latitude (traduites par des relations en $d\lambda$ et $d\phi$) et aa_1 et aa_2 , les dx et dy correspondants sur l'indicatrice de Tissot dans les deux directions x et y de la carte. Le développement algébrique de cette égalité conduit à une équation différentielle dont la résolution fixe des conditions sur les coordonnées (cf. IV, VI.B). Pour les projections équivalentes, l'équation différentielle sera fournie en écrivant l'égalité de la surface infinitésimale d'une indicatrice de Tissot et celle du cercle associé sur la sphère réduite (cf. VI.C).

I.2 - Projection sur une surface développable

Les principales surfaces développables sur lesquelles on projette géométriquement les points d'une sphère sont le plan, le cylindre et le cône. Quand la projection se fait sur un plan tangent à la sphère, on l'appelle projection azimutale. Les projections cylindriques et coniques se font respectivement sur un cylindre ou un cône tangent -ou sécant- à la sphère (**Figure 3**). Selon que le plan tangent passe par un pôle ou par l'équateur et que les axes du cylindre ou du cône sont confondus avec l'axe des pôles ou perpendiculaires à lui, on dira que les projections sont *d'aspect direct* ou *d'aspect transverse*. L'aspect transverse correspond donc à une rotation de 90° de l'aspect direct. Lors des présentations de projections transverses (cf. § VI.A, § VII), nous déduirons leurs principales propriétés de celles établies pour les cas directs, plus faciles à appréhender et à dessiner.

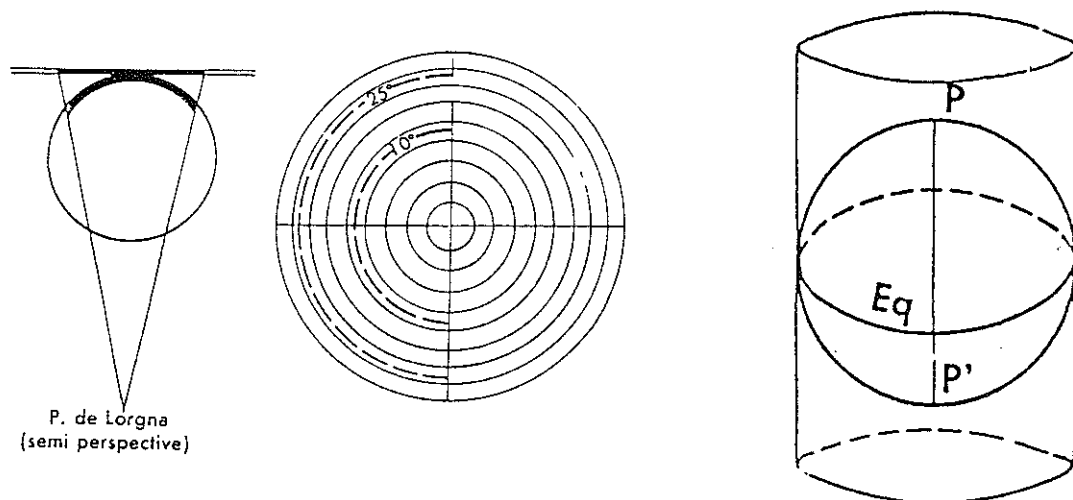
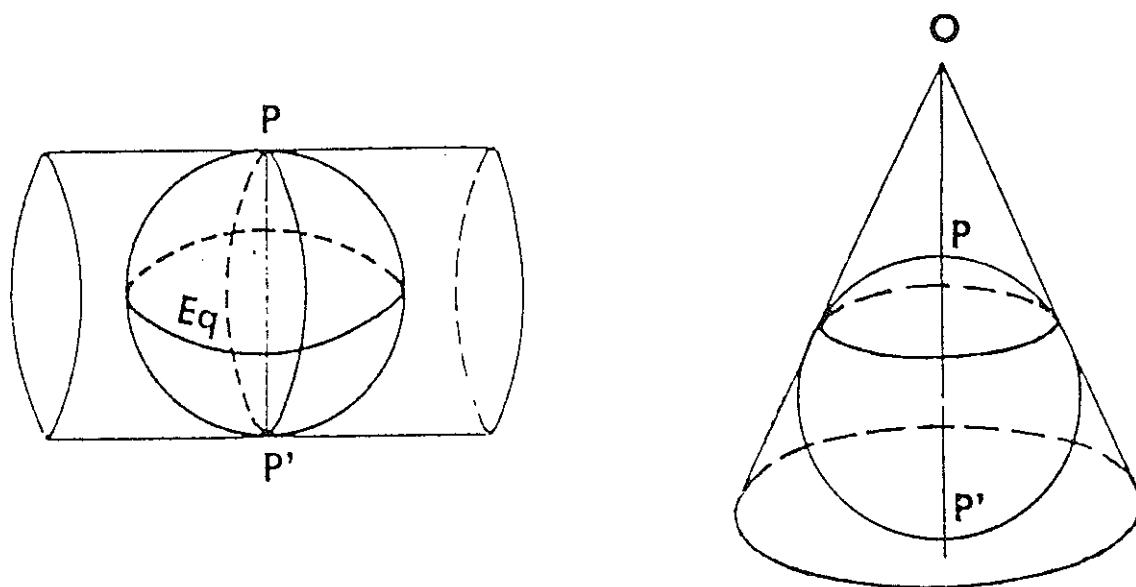
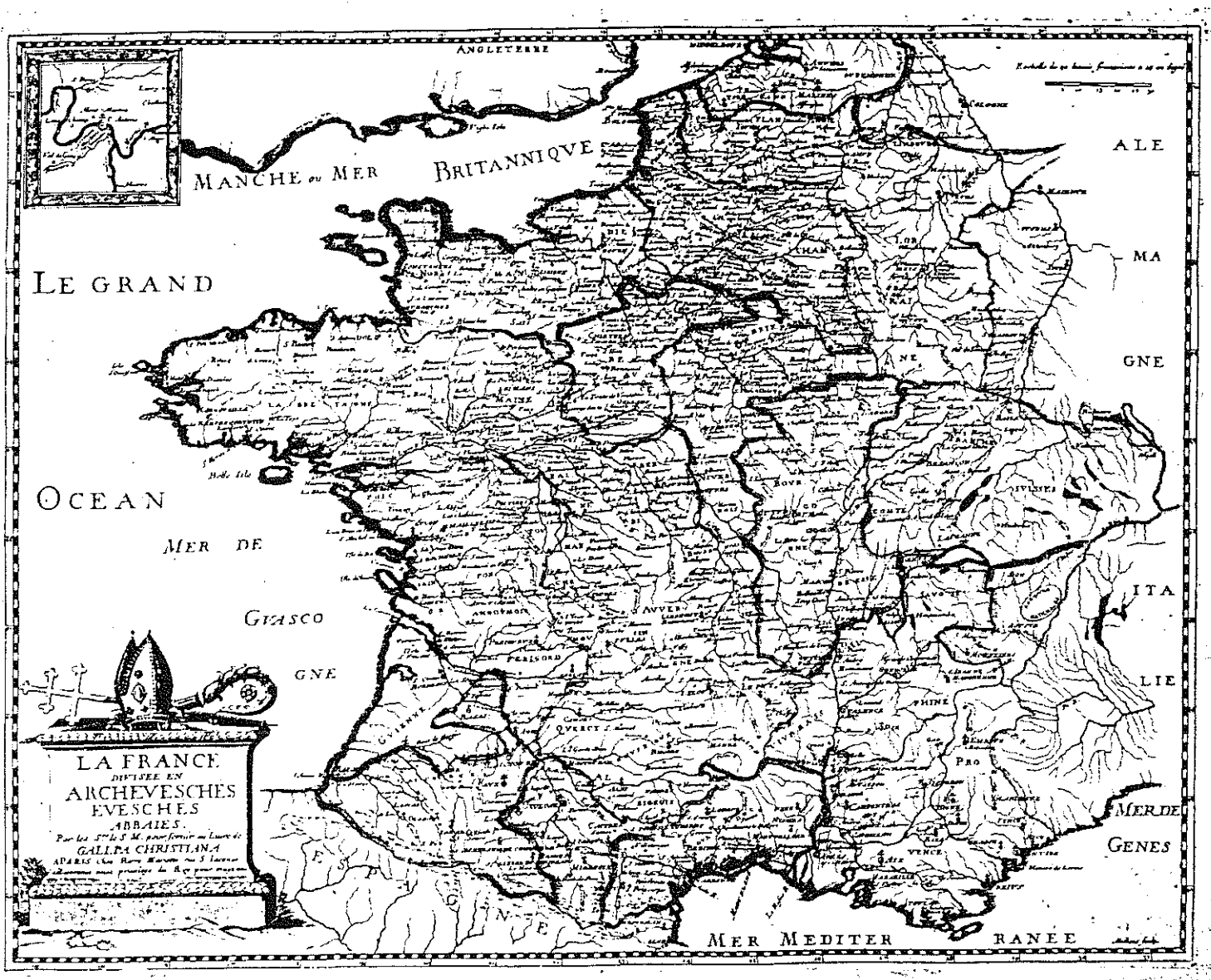


Figure 3 :

- a) projection azimutale de Lorgna ; b) projection cylindrique d'aspect direct ;
c) projection cylindrique d'aspect transverse ; d) projection conique





1656

1.2.a - Les projections azimutales (Figure 4)

Dans une projection azimutale, le centre de projection P se trouve sur l'axe perpendiculaire au plan tangent. Sous l'aspect direct, les méridiens sont représentés par des droites rayonnantes au point image du pôle et les parallèles, par des circonférences entières dont le pôle est le centre. Parmi les plus courantes, citons la *projection gnomonique* développée par Thales (P est placé au centre de la terre), la *projection stéréographique* (P est à un des pôles) et la *projection orthographique* (P est à l'infini). Hipparque et Ptolémée ont utilisé ces deux dernières pour leurs cartes du ciel. La projection de Lorgna⁴ (cf. § VI.2.c) est un autre cas de projection azimutale pour laquelle P est symétrique d'un pôle par rapport à l'autre.

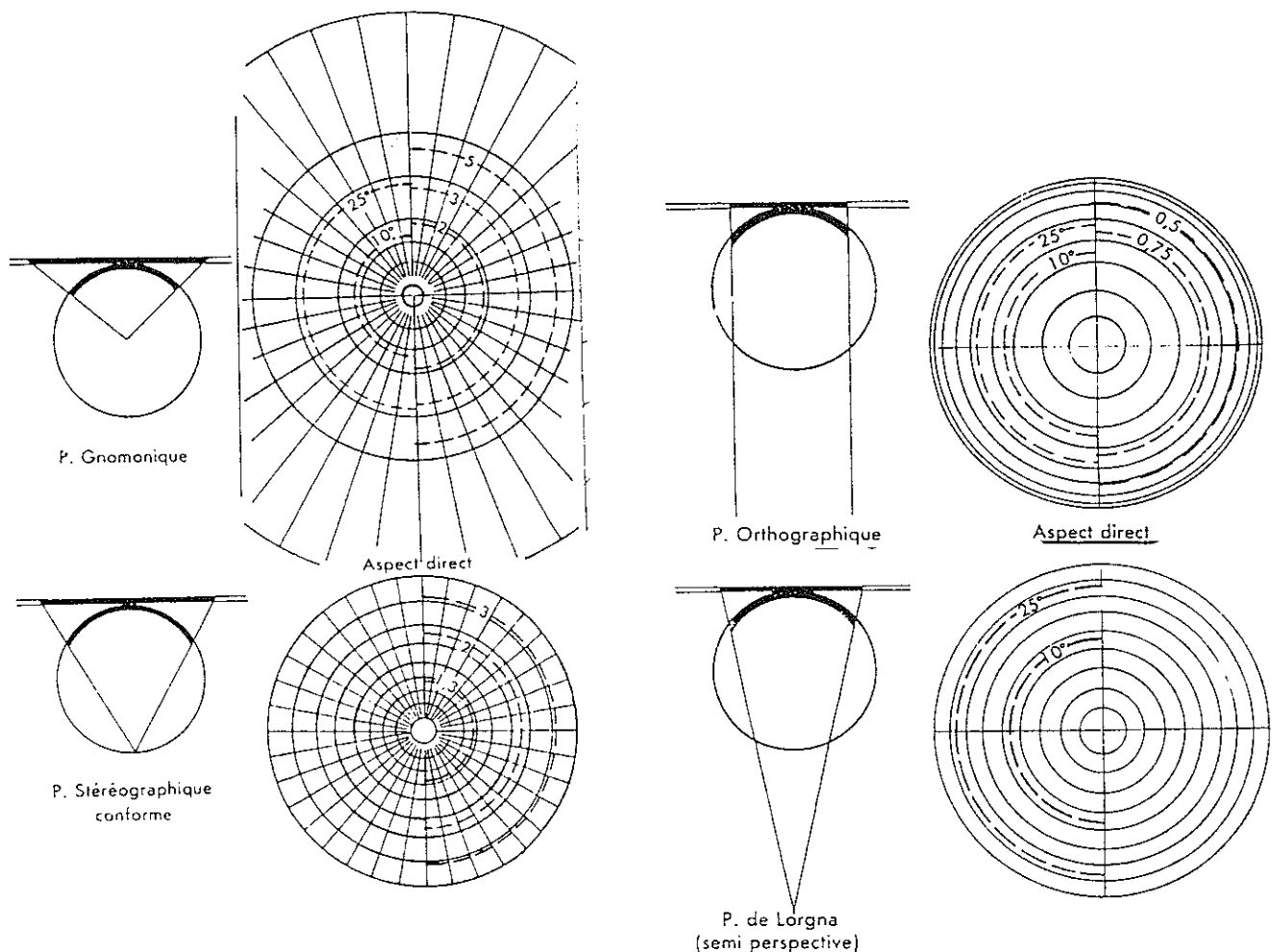
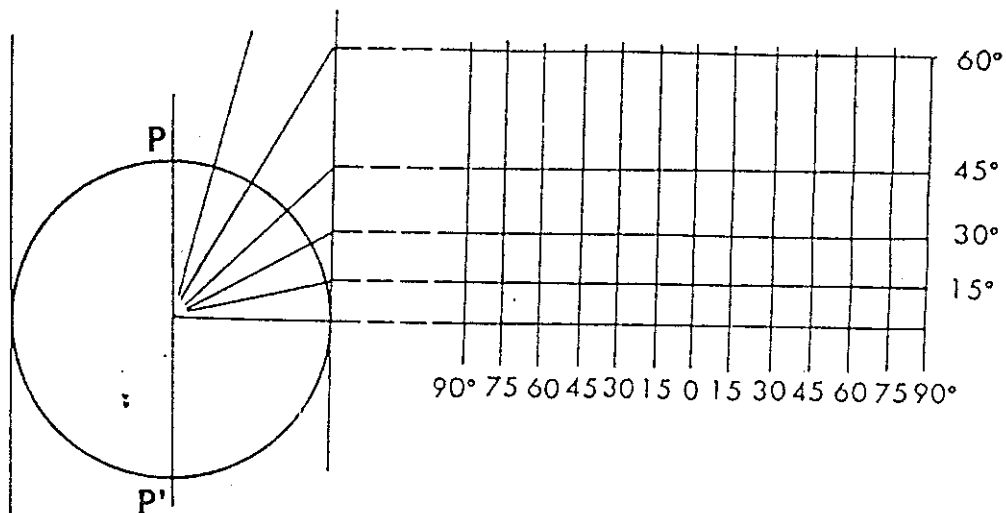


Figure 4 : Projections azimutales : a) gnomonique ; b) stéréographique ;
c) orthographique ; d) projection de Lorgna

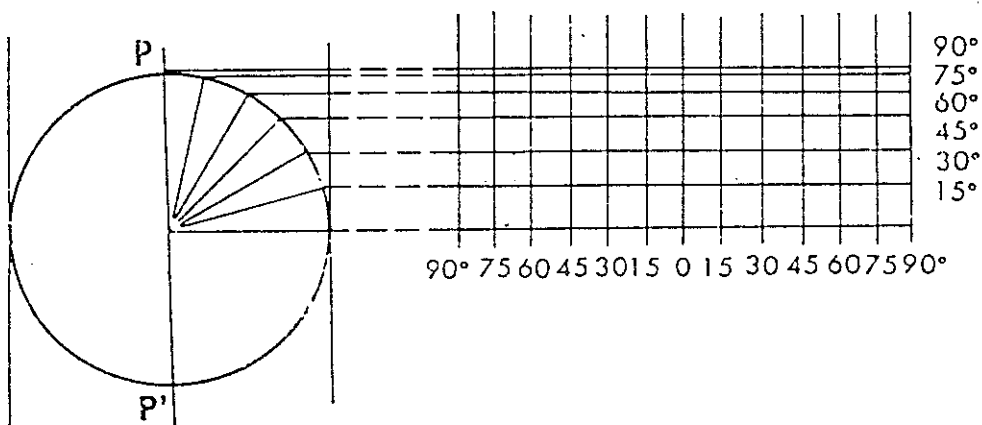
⁴ Lorgna (1735-1796) Mathématicien de Vérone qui a dirigé la Société italienne des Sciences (dite dei XL) et a contribué à sa renommée.

1.2.b - Les projections cylindriques (Figure 5)

Les projections cylindriques donnent des représentations rectangulaires. Les parallèles et les méridiens sont des droites qui forment les directions d'un quadrillage orthogonal. Sous l'aspect direct, les méridiens sont équidistants entre eux ; les parallèles, tous égaux à l'équateur (y compris les pôles) ont un espacement qui dépend des conditions imposées à la représentation (cf. § 1.1). Le module linéaire vaut 1 pour les points situés à l'équateur et $\frac{1}{\cos \varphi}$ le long d'un parallèle de latitude φ . Selon la latitude, il varie de 1 à ∞ .



P. cylindr. centrale



P. cylindrique équivalente
de Lambert

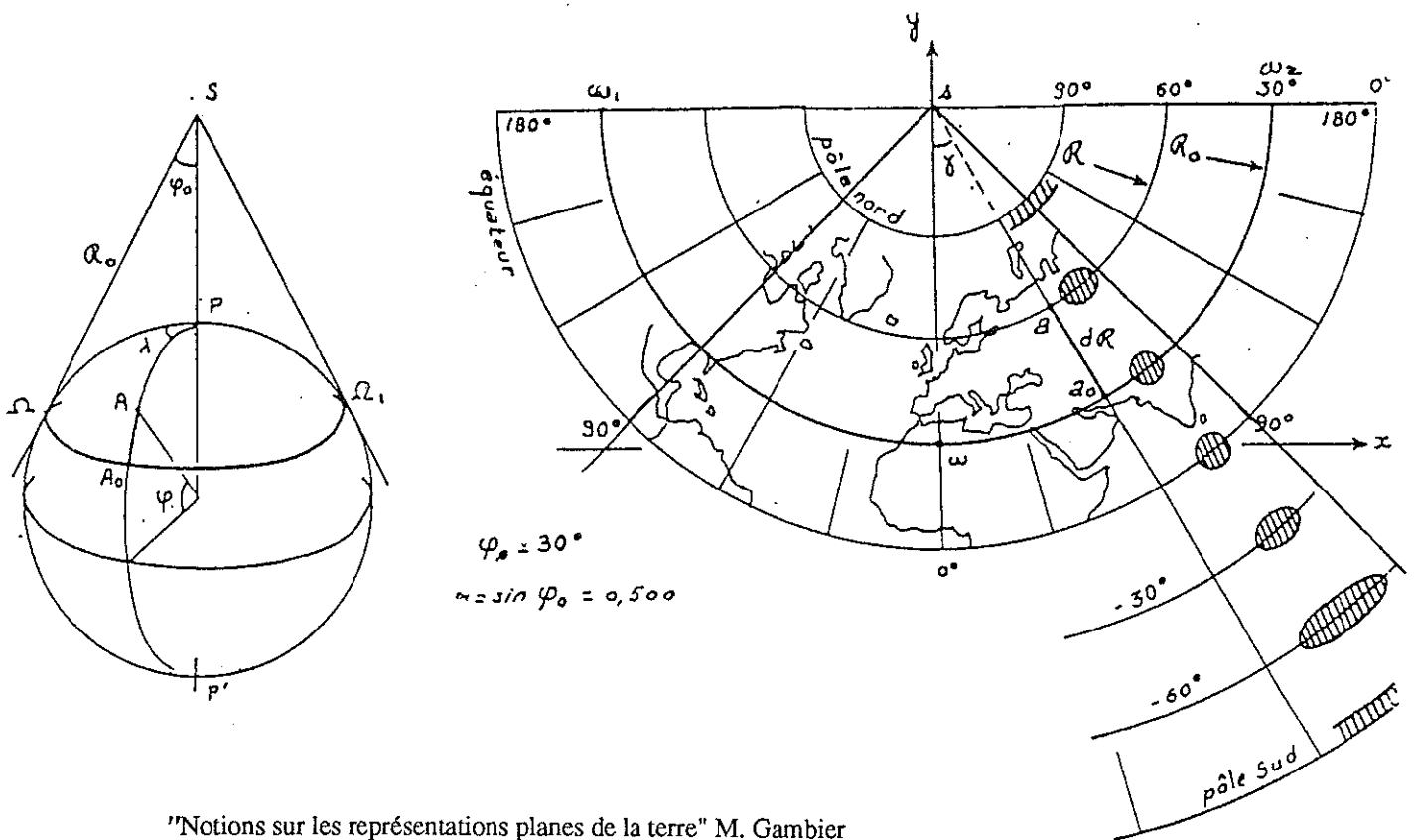
Figure 5: Projection cylindrique

I.2.c - Les projections coniques (Figure 6)

Le cône de sommet S est tangent à la sphère terrestre de rayon R , selon un parallèle $\Omega_1\Omega_2$ de latitude φ_0^5 . $P\Omega$ est pris comme méridien origine.

Dans la projection sur le plan, les méridiens sont représentés par un ensemble de droites concourantes en s , image de S , et les parallèles par des arcs de cercle centrés en s et dont le rayon $\mathcal{R}$ dépend des conditions imposées. Méridiens et parallèles sont orthogonaux. L'une des conditions imposées aux projections coniques tangentes est que le module linéaire soit égal à 1 sur le parallèle de latitude φ_0 . L'arc de cercle $\omega_1\omega_2$, qui est donc l'image intacte du parallèle $\Omega_1\Omega_2$, a pour rayon $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} \cotan \varphi_0$ et pour longueur celle du parallèle terrestre réduit à l'échelle, soit $2\pi R \cos \varphi_0$. Sur ce parallèle, tout arc ΩA de longitude λ est représenté par un arc de cercle de même longueur ωa .

Nous appellerons γ l'angle $(s\omega, sa)$ formé par les deux images de méridien $s\omega$ et sa , et n le rapport γ / λ . La condition imposée aux projections coniques tangentes donne $\gamma = \lambda \sin \varphi_0$ et $n = \sin \varphi_0$. En particulier l'angle formé par les deux droites, $s\omega_1$ et $s\omega_2$, images de l'antiméridien $P\Omega_1$ est $(s\omega_1, s\omega_2) = 2\pi \sin \varphi_0$.



"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier
IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

Figure 6 : Projection conique

⁵ Rappelons que R est le rayon de la sphère terrestre réduite à l'échelle.

Pour la construction de la projection, traçons un cercle de centre s et de rayon $\mathcal{R}_O = R \cotan\varphi_0$. L'arc de cercle $\omega_1\omega\omega_2$, image du parallèle $\Omega_1\Omega\Omega_2$, est limité par les droites $s\omega_1$ et $s\omega_2$ formant entre elles un angle $(s\omega_1, s\omega_2) = 2\pi \sin\varphi_0$ dont la bissectrice est le méridien origine, $s\omega$.

L'angle $(P\Omega_1, P\Omega) = \pi$ a pour image plane $(s\omega_1, s\omega) = \pi \sin\varphi_0$.

• Les coordonnées de l'image du point $A(\lambda, \varphi)$ sont :

- pour les coordonnées polaires : $\gamma = n\lambda$; $\mathcal{R}$ est une fonction de φ
- pour les coordonnées rectangulaires : $x = \mathcal{R} \sin\gamma$; $y = \mathcal{R}_O - \mathcal{R} \cos\gamma$

La projection du pôle correspond généralement à un arc de cercle.

II- LES PREMIERES REPRÉSENTATIONS SCIENTIFIQUES (la période hellénistique)

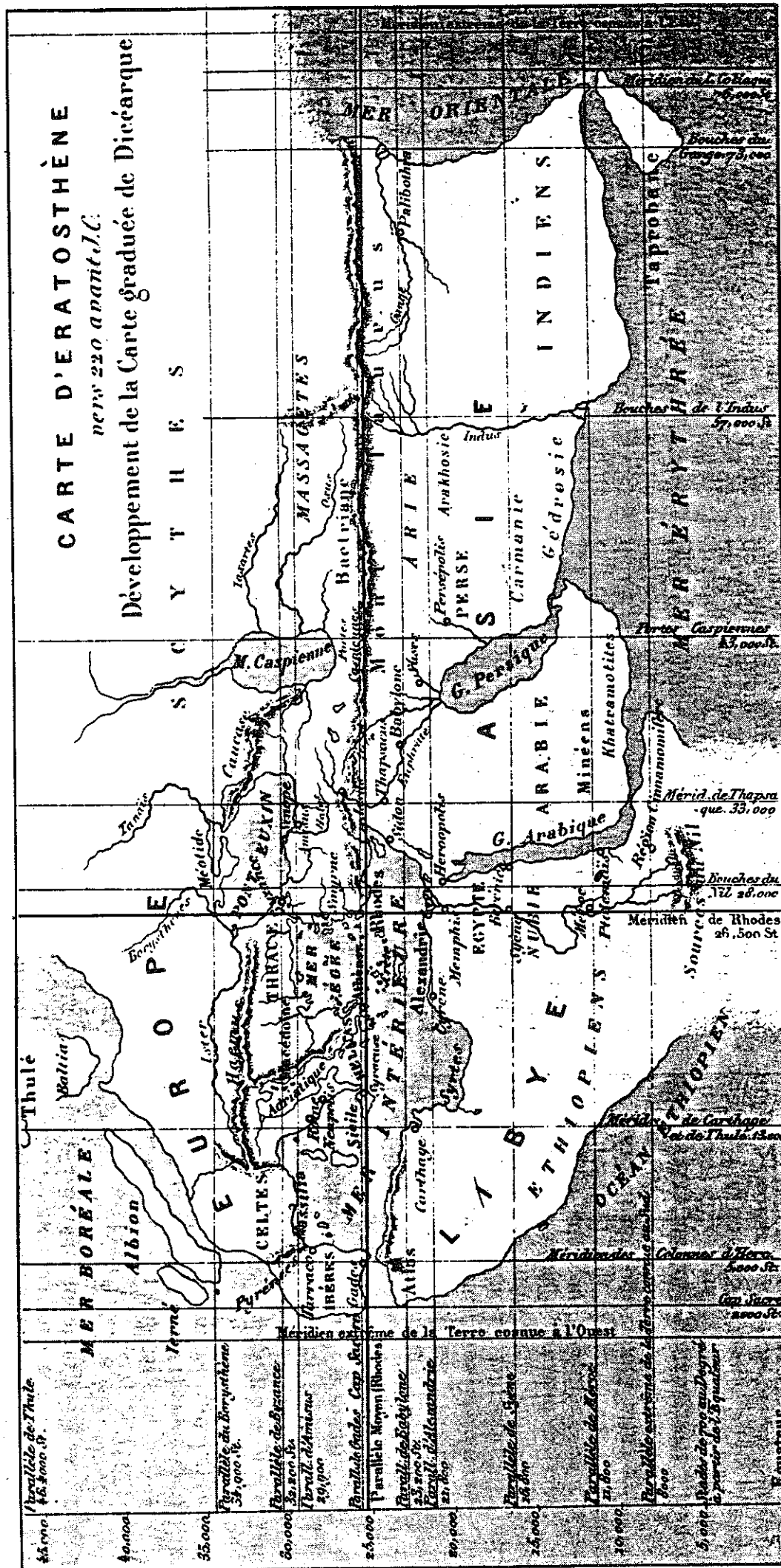
Eratosthène, bibliothécaire à Alexandrie au III^e siècle av. J.C., nous est connu pour ses contributions philosophiques, géométriques et astronomiques. Il fut également un des premiers à introduire des bases scientifiques à la cartographie et rassembla les connaissances existantes dans ce domaine. C'est notamment lui qui a donné la première estimation de 250 000 stades (environ 39 500 km) pour la circonférence terrestre en mesurant la distance de deux villes situées sur un même méridien, Alexandrie et Assouan (appelée Syenne à cette époque), ainsi que leur latitude (pour un développement détaillé, voir la rubrique "Dans nos classes").

Il perfectionna les systèmes de représentation cartographique. A son époque, des cartes de l'oekoumène (c'est-à-dire, de la partie habitée) avaient déjà été réalisées, notamment celle d'Anaximandre au VI^e siècle av. J.C. (les lieux étaient disposés les uns par rapport aux autres selon une estimation de leurs directions et de leurs distances respectives) et la carte de Dicéarque du IV-III^e siècles av. J.C. (deux axes, la méridienne et un axe est-ouest, se croisaient à l'emplacement de Rhodes et quelques lieux de référence étaient positionnés). Eratosthène compléta cette dernière représentation (Figure 7) en y insérant un réseau de parallèles et de méridiens déterminés par les principales localisations pour lesquelles les latitudes avaient été mesurées au gnomon et les distances évaluées approximativement.

Hipparque, astronome à Rhodes au I^e siècle avant J.C., constitua le premier catalogue d'étoiles et systématisa les rapports entre l'astronomie et la géographie : l'observation astronomique devait permettre de déterminer avec exactitude les positions terrestres. La représentation cartographique qu'il établit était constituée d'un réseau de méridiens et de parallèles équidistants vis-à-vis duquel il introduisit la division en degrés -360^{ème} partie de la circonférence terrestre. Il inventa également les deux projections, stéréographique et orthographique (cf. § 1.2) pour les cartes du ciel ainsi qu'une construction qui, pour tenir compte du rétrécissement des parallèles avec la latitude, représentait les méridiens comme des éléments concourants.

new 220 variant J.C.

Développement de la Carte graduée de Dicéarque



III - PTOLEEMEE (II^e SIECLE)

Claude Ptolémée, savant grec d'Alexandrie, vécut au II^e siècle après J.C. et intervint dans de nombreuses disciplines, mathématique, physique, théorie du son, optique, astronomie, ... Les deux principaux ouvrages qui nous sont parvenus sont *l'Almageste* ⁶, qui recense les connaissances astronomiques des grecs, et *la Géographie*, répertoire des itinéraires connus à son époque, qui précise les latitudes et longitudes d'environ 8000 positions terrestres réparties dans le monde connu de son époque -de l'Europe occidentale, sauf l'Irlande et l'Écosse, à une Chine déformée, vers l'est, et à la partie nord de l'Afrique, vers le sud. En réalité, peu de données de *la Géographie* se sont révélées exactes et elles n'ont concerné que les latitudes. Des copies de ces ouvrages ont appartenu aux astronomes byzantins et arabes du Moyen-Age.

Ptolémée inventa deux projections, la projection dite de Ptolémée et la projection dite homéotère (cf. § V) qui tiennent compte, l'une et l'autre, de la réduction de la longueur des parallèles avec l'augmentation de la latitude.

L'aspect mathématique de la projection de Ptolémée (Figure 8)

La projection de Ptolémée est une projection conique (cf. § I.2.c) équidistante, encore utilisée pour les cartes d'atlas.

Le module linéaire est égal à 1 sur le parallèle de latitude φ_0 , donc $\gamma = \lambda \sin \varphi_0$. La particularité de la projection de Ptolémée est qu'il en soit de même sur l'ensemble des méridiens. La longueur d'un arc de méridien d'angle $(\varphi - \varphi_0)$ est donc $a_0 a = R(\varphi - \varphi_0)$ où R est le rayon de la sphère terrestre réduite.

Sur un parallèle de latitude quelconque φ , le module linéaire est donné par le rapport de la longueur de l'image d'un arc du parallèle avec celle de cet arc, soit :

$$\frac{2\pi \sin \varphi_0 (R_0 - R(\varphi - \varphi_0))}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi_0 (\cotan \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0))}{\cos \varphi}$$

Les coordonnées polaires d'un point a sont $\gamma = \lambda \sin \varphi_0$ et $R = R(\cotan \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0))$. Le pôle, de latitude $\pi/2$ et pour lequel R est non nul, est représenté par un arc de cercle.

La projection se construit en traçant :

- i) un axe $y'y$ origine sur lequel on place un point s , pris comme centre de l'arc de cercle de rayon $R_0 = R \cotan \varphi_0$. L'intersection de l'axe $y'y$ et du cercle définit le point ω . Le méridien origine, $s\omega$, est bissecteur de l'angle $(s\omega_1, s\omega_2) = 2\pi \sin \varphi_0$ qui délimite l'arc du parallèle origine.
- ii) l'angle $\gamma = (s\omega, sa) = \lambda \sin \varphi_0$ qui détermine la demi-droite sa_0 , image du méridien de longitude λ , passant par A_0 et A . L'intersection de l'arc de cercle avec la demi-droite est a_0 .

⁶ Latinisation du titre arabe de la syntaxe mathématique de Ptolémée

iii) Sur le méridien sa_0 , on place a est tel que $a_0a = R(\varphi - \varphi_0)$. La projection du parallèle de latitude φ est un arc de cercle de rayon sa .

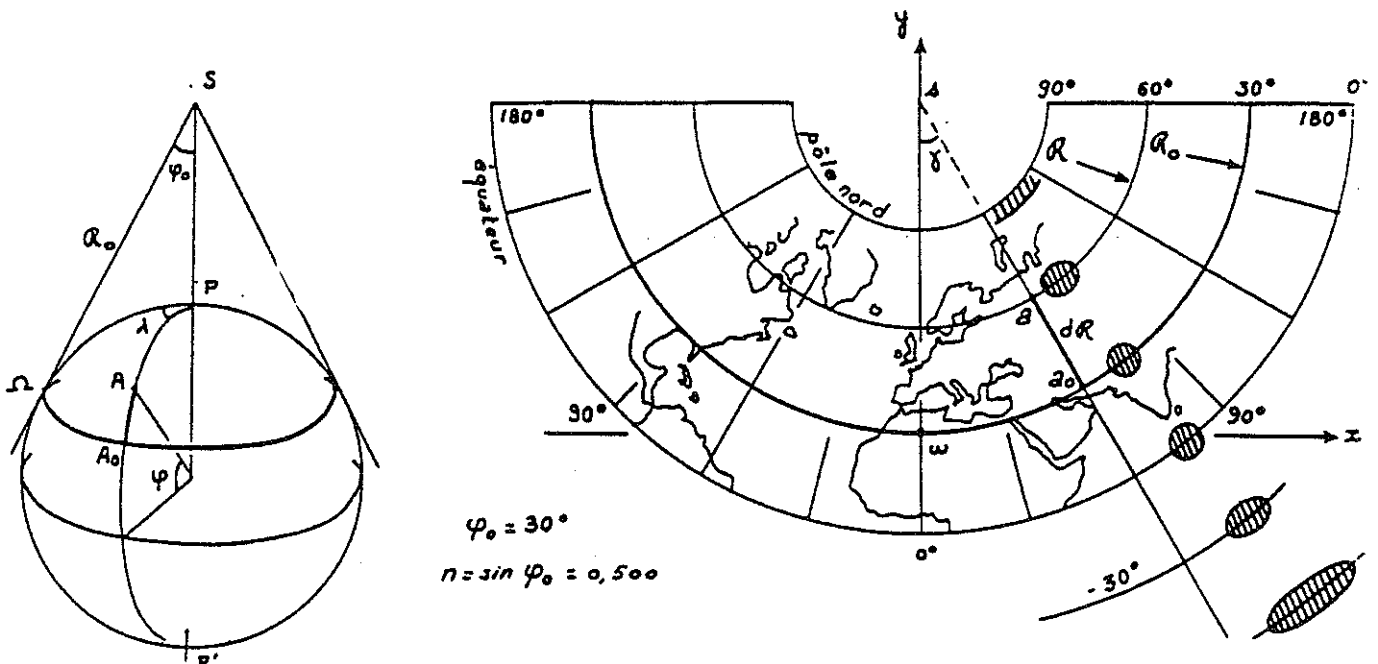


Figure 8 : Représentation de Ptolémée

"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier
 IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

V- MERCATOR (XVI^{ème} SIECLE)

Le Haut Moyen-Age a privilégié le développement d'une cartographie symbolique qui traduisait la conception théologique⁷ du monde occidental (Figure 9).

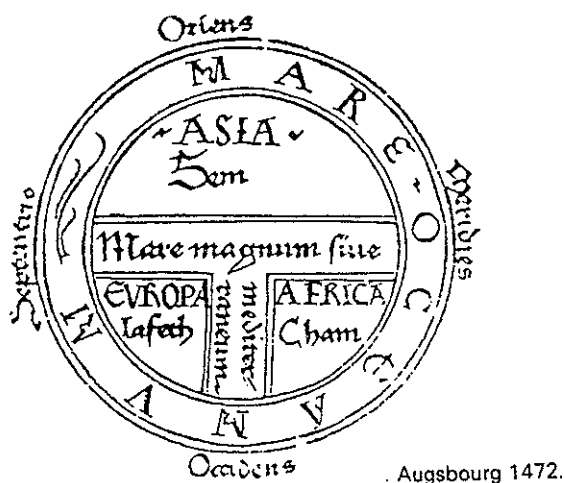
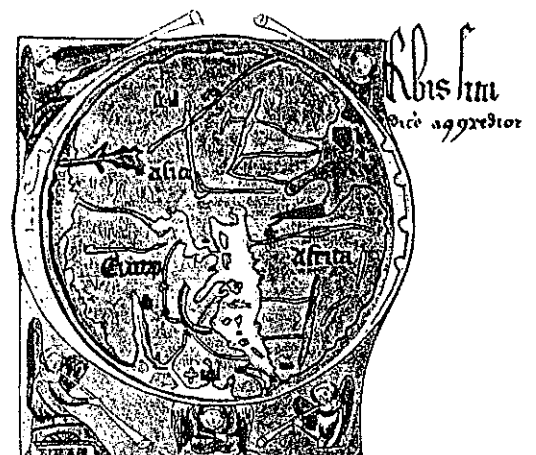


Figure 9 : exemple de carte T dans l'O



⁷ C'est notamment le cas des cartes T dans O, où les continents connus, l'Europe, l'Afrique et l'Asie, sans considération de leurs dimensions, et séparés par les mers, constituent un T placé dans l'O.

A partir du XII^e siècle, une nouvelle forme de carte se répand dans le monde des navigateurs : ce sont les portulans, qui transcrivent avec précision les contours du littoral sur un fond de carte constitué de divisions angulaires (correspondant à des directions de la rose des vents). Ces quantités angulaires -les rumbs- étaient généralement au nombre de 8, 16 ou 32, disposées irrégulièrement au début puis régulièrement. Les ateliers des régions méditerranéennes et portugaises eurent le monopole des portulans qui connurent un essor particulièrement important du XIV^e siècle jusqu'à la seconde moitié du XVI^e siècle.

Au début du XV^e siècle, la redécouverte de la *Géographie* de Ptolémée (l'*Almageste* était connu depuis le XII^e siècle) permit l'établissement de nouvelles cartes construites à partir des positions terrestres recensées dans l'ouvrage. La première carte imprimée date de 1475. On sait que les découvertes des Antilles et du nouveau continent, à la fin du XV^e siècle, ont été permises grâce à la dilatation des longitudes induite dans cet ouvrage pour le continent asiatico-européen et à la sous-estimation, à cette époque, de la circonférence terrestre (inférieure à celle calculée par Eratosthène), ce qui par différence, minimisait le chemin de l'Europe à l'Asie passant par l'ouest. En effet, pour atteindre la Chine, Christophe Colomb et ses mécènes n'ont pu tenter cette expédition maritime que dans la mesure où la distance à parcourir restait envisageable, aussi bien pour la survie des équipages que d'un point de vue psychologique.

A la Renaissance, les cartes existantes sont donc constituées de deux modes de représentation qui s'avèrent insuffisants, les portulans décrivant uniquement les côtes littorales, mais dont l'efficacité pratique avait fait ses preuves, et les cartes issues des données de la *Géographie* qui concernait le monde connu au II^e siècle. Aussi, le XVI^e siècle voit le bouleversement du mode de représentation cartographique : *i*) nécessité de représenter le monde connu qui s'est étendu avec les grandes découvertes, *ii*) exigence d'une plus grande exactitude pour les coordonnées terrestres, *iii*) progrès dans les concepts et dans leurs mises en pratique (trigonométrie, levées topographiques, calculs de triangulation), *iiii*) recherche de systèmes de projection mieux adaptés.

Ces progrès proviennent essentiellement des mathématiciens-astronomes -humanistes- de l'Europe allemande, flamande et normande. Deux flamands, Mercator (1512-1594) et Ortelius (1527-1598), ont joué un rôle essentiel dans la rationalisation de la cartographie en offrant la synthèse des données géographiques et scientifiques disponibles et en révisant la conception des cartes. Le *theatrum orbis terrarum* (Théâtre de l'Univers) d'Ortelius (1570) est le premier atlas de conception moderne. La carte de Mercator (1569) est la première carte de construction mathématique utilisable par les navigateurs. Elle conserve les angles et les routes à cap constant y sont traduites par des droites.

L'aspect mathématique de la projection Mercator (Figure 10)

La projection de Mercator est une projection cylindrique (cf. § 1.2.b) conforme. Elle sert actuellement aux cartes de navigation maritime ou aérienne, ainsi que pour les planisphères à petite échelle limités aux régions de latitudes inférieures à 80°. L'IGN l'utilise encore pour certaines cartes. Les loxodromies (routes à cap constant) sont représentées par des droites et les orthodromies (chemins selon un grand cercle) par des courbes.

Sur la base d'un quadrillage rectangulaire, cette projection, dite projection à latitude croissante, compense l'agrandissement des parallèles selon leur latitude par un accroissement équivalent sur les méridiens. Aussi, produit-elle une importante déformation pour les grandes latitudes (cf. I;1).

La propriété de conformité exige que le module linéaire au voisinage d'un point soit égal dans toutes les directions, et en particulier le long des méridiens et des parallèles. Ceci se traduit par $\frac{aa_1}{AA_1} = \frac{aa_2}{AA_2}$ où $a(x,y)$ est l'image de $A(\lambda, \varphi)$, a_1 et a_2 , celles de A_1 et A_2 .

$aa_1 = dx$, $aa_2 = dy$, $AA_1 = R \cos \varphi d\lambda$, $AA_2 = R d\varphi$. Comme $x = R \lambda$, le module linéaire vaut $1/\cos \varphi$ et $dy/R d\varphi = 1/\cos \varphi$.

$$dy = \frac{R d\varphi}{\cos \varphi} = R \frac{d\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} = R \frac{\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + 1\right] d\varphi}{2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\implies x = R\lambda \text{ et } y = R \ln \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

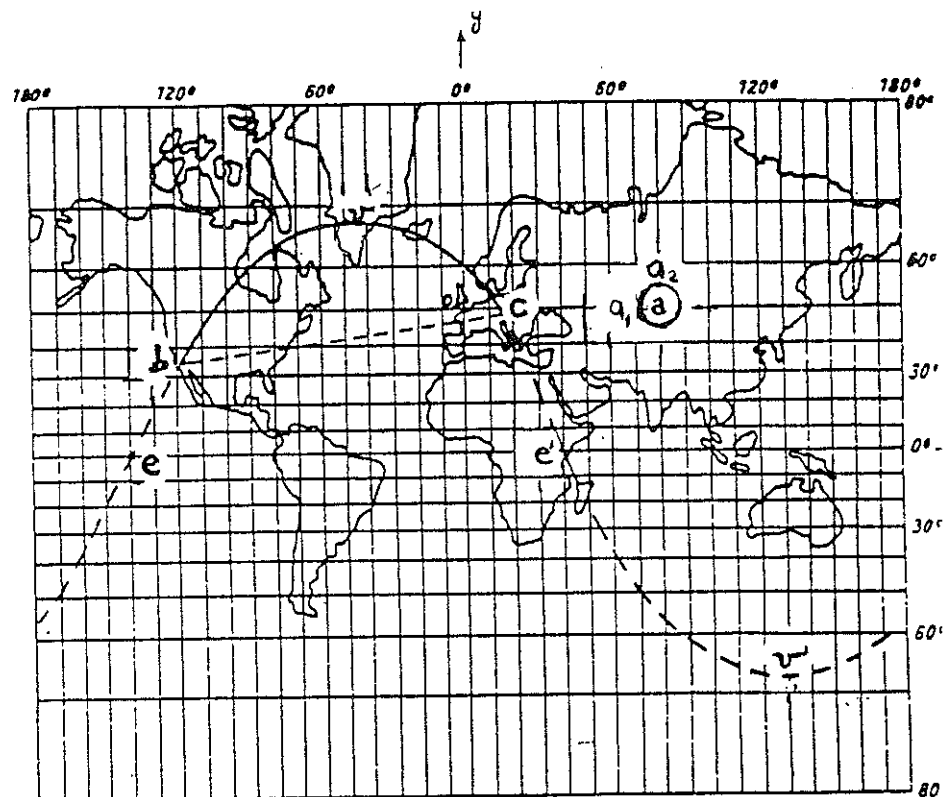
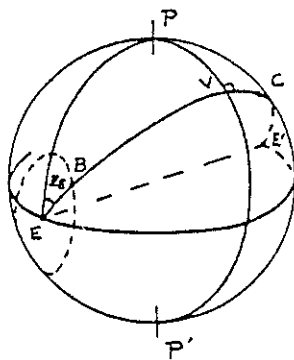
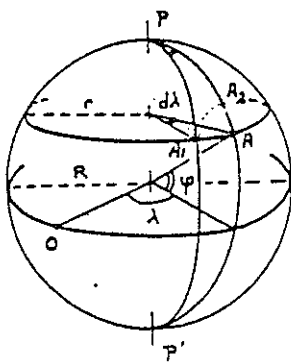


Figure 10 : Représentation de Mercator

"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

V - LA REPRÉSENTATION DE SANSON OU DE FLAMSTEED (XVII^{ème} SIECLE)

Le XVI^e siècle est assurément une période de progrès pour la cartographie. En plus des bouleversements apportés par Mercator et Ortelius, on observe de multiples tentatives de visualisation des cartes à petite échelle, terre entière ou ensemble de continents. Des solutions sont recherchées pour minimiser les déformations des représentations des régions découvertes récemment, à l'extrême-orient, à l'extrême-occident et dans l'hémisphère sud. On assiste à de nombreuses variations sur la projection homéotère de Ptolémée (explications au § suivant) : cartes de Sylvani en 1511 (Italie), de Werner en 1514 (Nuremberg), d'Oronce Finé en 1536 (France), Mercator en 1538, du normand Guillaume Le Testu en 1566, ... D'autres tentatives sont réalisées à partir de fragmentations ou de juxtapositions de cartes partielles. On assiste également à la fabrication de planisphères.

Le dieppois Jehan Cossin inventa en 1570 une projection, construite assez semblablement à la projection homéotère de Ptolémée, mais avec des parallèles représentées par des droites (cf. l'aspect mathématique). Cette projection a été transformée vers 1650 par Nicolas Sanson (1600-1667), géographe du Roi et premier d'une longue dynastie de cartographes, puis vers 1700 par Flamsteed (1646-1719), premier directeur de l'Observatoire de Greenwich fondé en 1670.

L'aspect mathématique de la représentation de Sanson (Figure 11)

C'est une représentation équivalente, dont le canevas est facile à établir. Elle est utilisée pour des cartes d'atlas. C'est un cas particulier de la projection homéotère de Ptolémée. Cette dernière consiste à représenter un méridien origine par un axe, puis d'y choisir un point qui sera le centre des arcs de cercles concentriques -images des parallèles-. Ces arcs sont équidistants le long de l'axe méridien et conservent chacun la longueur du parallèle dont il est l'image, rapportée à l'échelle. Les méridiens, autres que le méridien origine, se construisent point par point, et forment des courbes.

Pour la projection de Sanson, le centre des arcs de cercles est renvoyé à l'infini. Les parallèles sont représentés par des droites parallèles entre elles, équidistantes et perpendiculaires au méridien central. Sur ces parallèles, les longueurs sont conservées et le module linéaire est donc égal à 1. Les coordonnées de $a(x,y)$, image d'un point $A(\lambda, \varphi)$ sont $x = R\lambda \cos\varphi$ et $y = R\varphi$.

Les images des méridiens d'équation $x = \lambda \cos y$ sont des sinusoides.

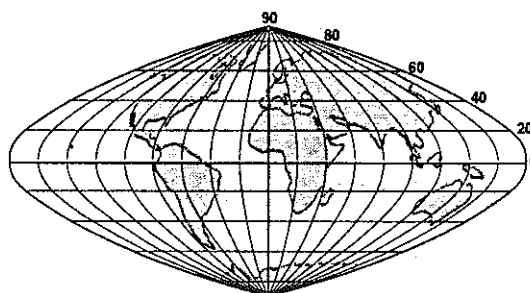
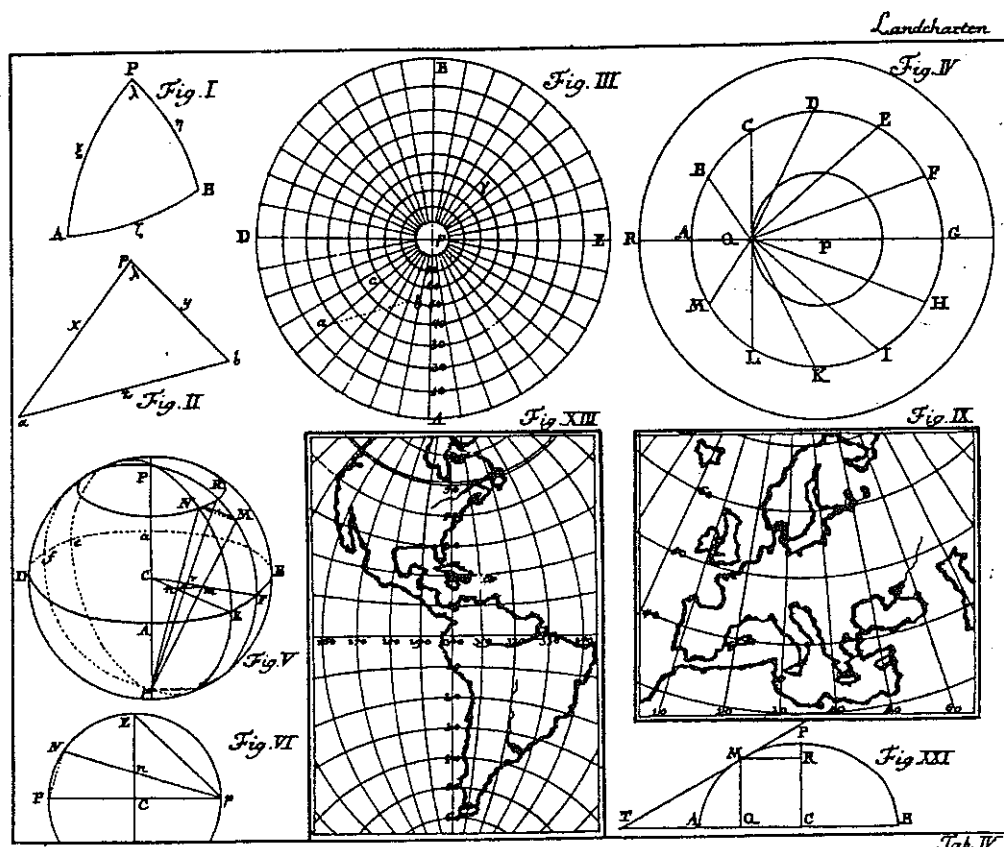


Figure 11 : Représentation de Sanson

VI- JEAN-HENRI LAMBERT (XVIII^{EME} SIECLE)

Jean-Henri Lambert (1728-1777) est un homme singulier : pionnier dans différentes branches des mathématiques (intégrales, différentielles, logique symbolique ...), de l'astronomie (calcul des orbites des corps célestes notamment) et de la cartographie scientifique, mais également connu comme philosophe. Né à Mulhouse dans une famille modeste, il fut secrétaire à Bâle puis précepteur. Ses divers métiers favorisèrent chez lui goûts de la lecture, des mathématiques et de la méditation. Nommé en 1765 à l'Académie des sciences de Berlin par Frédéric le Grand, J.H Lambert y resta jusqu'à sa mort.

Dans le chapitre *Remarques et compléments pour l'établissement des cartes terrestres et célestes* de son ouvrage *Contributions à l'utilisation des mathématiques et de leurs applications* (1772), dont est tirée la planche ci-dessous, il précise les bases mathématiques nécessaires aux projections des surfaces sphériques sur un plan. Elles concernent notamment la propriété de conformité, qui selon lui, est une condition indispensable pour la topographie ou la cartographie de précision, et qui doit utiliser le calcul infinitésimal. On lui doit plusieurs projections conformes -les projections conique et cylindrique transverse- et quelques projections équivalentes -les projections azimutale (dite aussi de Lorgna), cylindrique et conique avec un recourt aux équations différentielles. Il conçut un atlas qui fut publié par l'Académie des sciences de Berlin.



Aspects mathématiques de trois représentations de Lambert

Parmi les nombreuses projections étudiées par Lambert, nous en avons retenue trois en raison de leur intérêt historique et de leur usage actuel.

A - Représentation cylindrique conforme transverse (dite de Gauss)

C'est une projection utilisée -notamment par l'IGN- pour les cartes à petite échelle ou les cartes d'atlas. Le méridien origine choisi est au centre de la zone à cartographier.

- C'est une projection sur un cylindre tangent selon un méridien POP', choisi comme méridien origine (Figure 12). Les caractéristiques de cette projection découlent de celles de la projection de Mercator -pour laquelle le cylindre est tangent à l'équateur- en leur appliquant une rotation de 90°. On introduit alors les termes de "pseudo-méridiens" pour désigner les grands cercles orthogonaux au méridien origine POP' qui passent par un "pseudo-pôle" Q, et de "pseudo-parallèles", pour les petits cercles situés à égale distance du méridien origine et orthogonaux aux "pseudo-méridiens". POP', méridien, devient un "pseudo-équateur" et QQQ', l'équateur, un "pseudo-méridien". Les angles L et H jouent des rôles analogues aux longitude λ et latitude ϕ de la projection de Mercator. De même qu'on exclut les régions polaires dans la projection de Mercator, celle de Lambert est limitée aux valeurs de H inférieures à 80°.

- La projection admet deux axes, celui des x et celui des y, qui correspondent respectivement aux droites-images de QQQ' et POP'. Les "pseudo-méridiens" et "pseudo-parallèles" forment un quadrillage rectangulaire parallèle aux axes. Le "pseudo-pôle" Q, qui fait partie de la zone exclue de la représentation, a une image à l'infini sur l'axe des y.

Les méridiens sont traduits par des courbes passant par les images des pôles (par exemple, la courbe pap'), et les parallèles par des courbes orthogonales aux précédentes et centrées en p (ou p' pour l'hémisphère sud).

- La condition de conformité de la projection de Mercator transcrite dans la projection transverse devient $dx = R \frac{dH}{\cosh H}$ soit $x = R \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{H}{2} \right) \right]$ et $y = R L$.

Ces formules établissent les coordonnées de a(x, y), image du point A (λ, ϕ), et pour les exprimer en fonction de λ et ϕ , on utilise les relations trigonométriques sphériques de Neper :

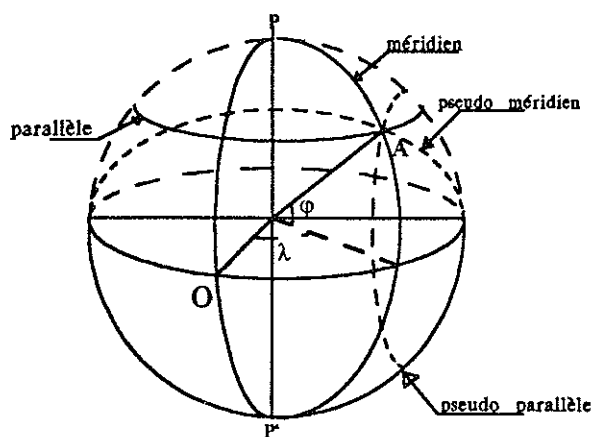
$$\sin H = \sin \lambda \cos \phi \quad \text{et} \quad \tan L = \frac{\tan \phi}{\cos \lambda}$$

- Le module linéaire d'un point est donné par $\frac{1}{\cosh H}$.

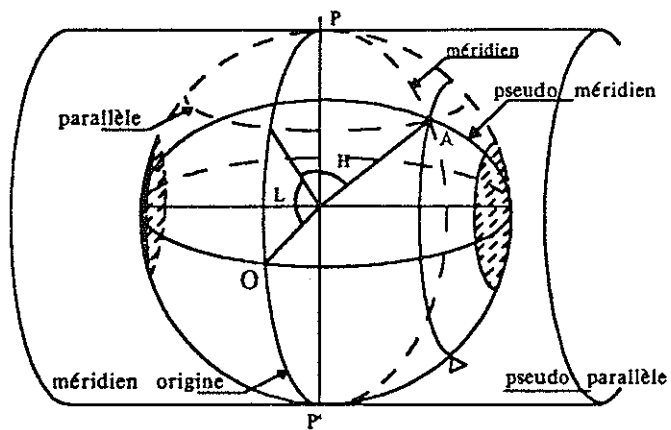
Application : la représentation UTM

Une des applications de cette projection est la représentation UTM (Universal Transverse Mercator), réalisée sur l'ellipsoïde⁸ tel qu'il est connu actuellement et limitée à 3° d'amplitude de part et d'autre du méridien origine. C'est de nos jours la projection la plus employée pour le calcul des triangulations et l'établissement des cartes topographiques.

⁸ Depuis 1967, les caractéristiques de l'ellipsoïde adopté sont celles observées par satellite en 1957 (grand axe "a"=6378,160 m ; aplatissement "a" =1/298,247 (a=(a-b)/a où b est le petit axe)). L'ellipsoïde de Clarke ("a"=6378,249 m ; "a" =1/293,5) est issu des observations de 1880.



A a pour latitude φ et pour longitude λ



A a pour pseudo-latitude H et pour pseudo-longitude L

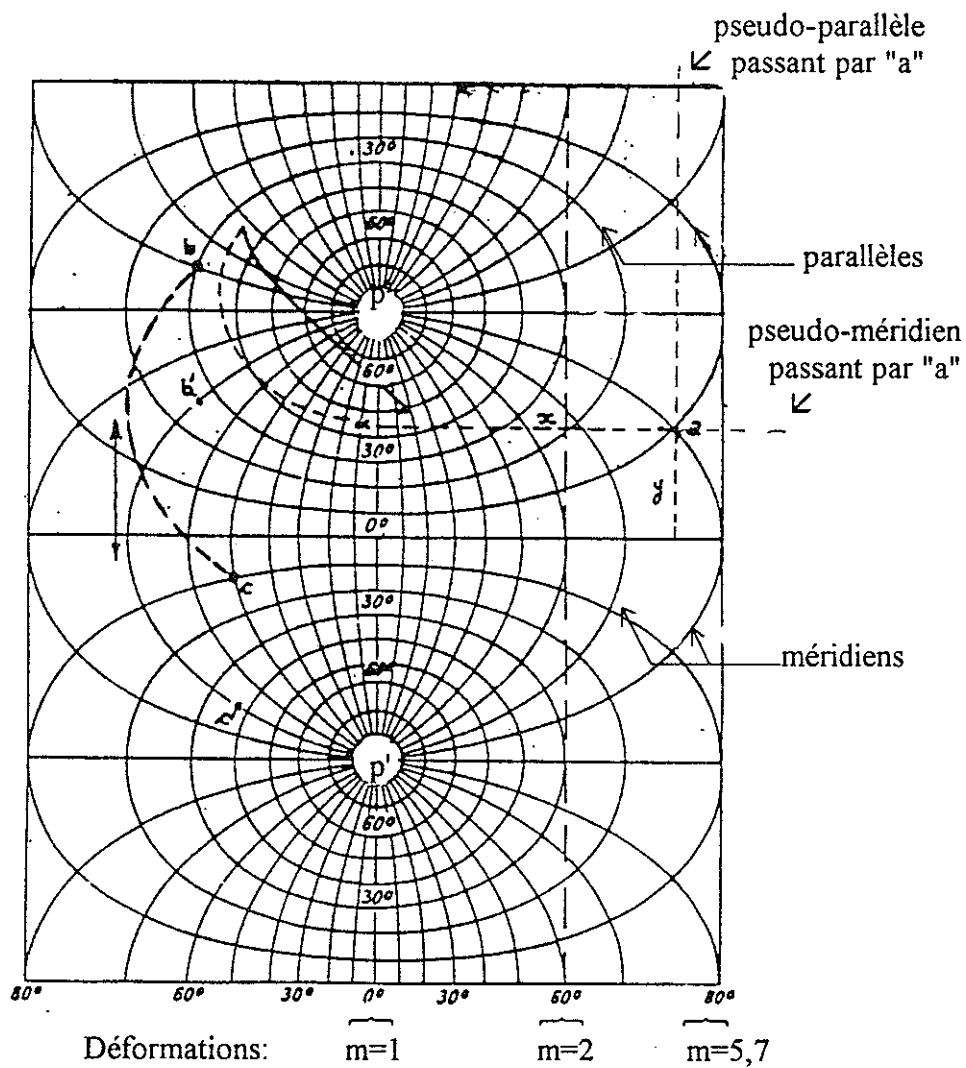


Figure 12 : Représentation de Gauss

"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

B - Projection conique conforme (appelée représentation conforme de Lambert)

Cette représentation est très employée pour les cartes générales et les cartes de navigation aérienne, mais également, dans de nombreux pays du monde, pour l'établissement des cartes topographiques et le calcul des triangulations. C'est notamment le cas des cartes de France et d'Afrique du nord réalisées par l'IGN et dont les triangulations ont été calculées à partir des données de l'ellipsoïde de Clarke⁸. Pour la France (Figure 13), quatre zones ont été définies, de sorte que la distance maximale au parallèle-origine soit de 200 Km. L'armée française a introduit en 1915 cette projection qui minimise les altérations d'angles et de longueurs.

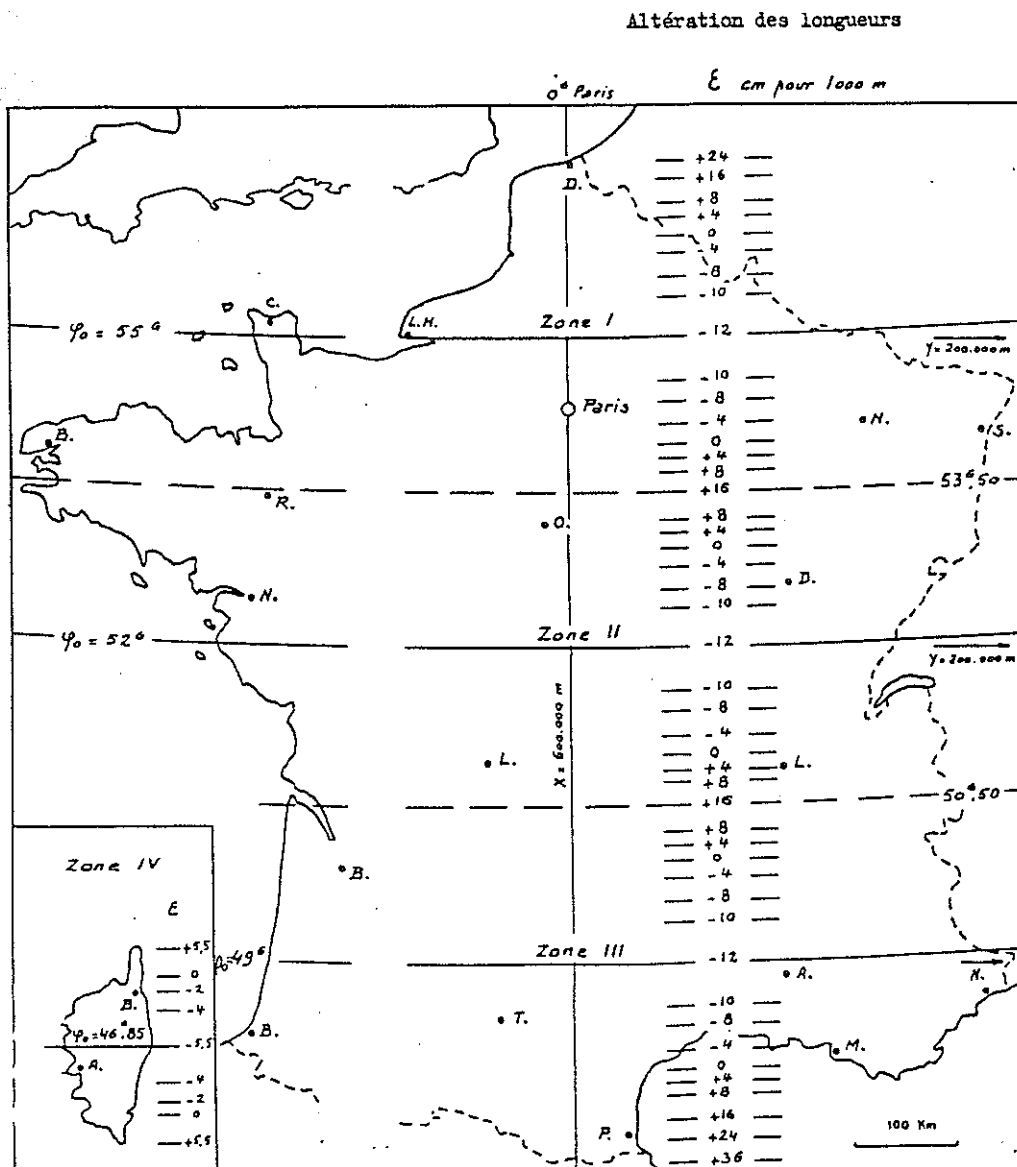


Figure 13 : Représentation de la France découpée en quatre zones sur lesquelles est appliquée la projection conforme de Lambert

"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

C'est une projection conique (cf. § 1.2.c) telle que l'image du parallèle origine est représentée par un arc de cercle de rayon $R_0 = R \cotan \varphi_0$ (Figure 14).

• La propriété de conformité (l'égalité des rapports $\frac{aa_1}{AA_1}$ et $\frac{aa_2}{AA_2}$ où $a(x,y)$ est l'image du point $A(\lambda, \varphi)$) donne une condition sur R , rayon des arcs représentant les parallèles :

$$aa_1 = R d\gamma; aa_2 = dR, AA_1 = R \cos \varphi d\lambda, AA_2 = R d\varphi.$$

Par ailleurs, la dérivation de $\gamma = \lambda \sin \varphi_0$ donne $d\gamma = \sin \varphi_0 d\lambda$.

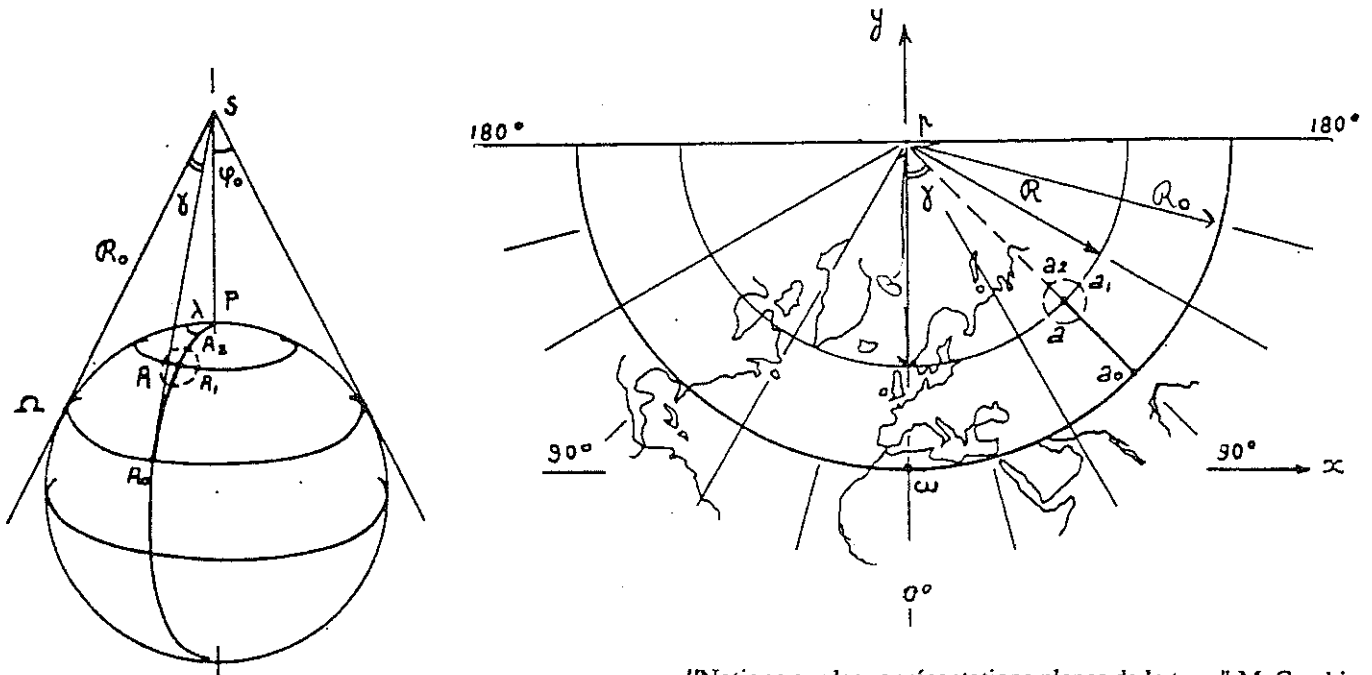
$$\frac{aa_1}{AA_1} = \frac{aa_2}{AA_2} \Rightarrow \frac{R d\gamma}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{dR}{R d\varphi}$$

(On introduit un signe négatif puisque R décroît quand φ croît).

$$\frac{dR}{R} = -\frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi} d\varphi \Rightarrow R = R_0 \left(\cotan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right)^{\sin \varphi_0}$$

De cette formule, on voit que le pôle nord est représenté par un point, convergence des méridiens, tandis que l'image du pôle sud est rejetée à l'infini.

- Les coordonnées $a(x, y)$ sont $x = R \sin \gamma$ et $y = R_0 - R \cos \gamma$.
- On démontre que, pour une représentation peu étendue en latitude, le module linéaire au point a est approximativement égal à $1 + \frac{d^2}{2R^2}$ avec d , distance de a au parallèle origine.



"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier
IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

Figure 14 : Représentation conforme de Lambert

Les rayons des images de l'équateur et du parallèle de latitude 30° valent donc $R\sqrt{2}$ et R .
 Pour construire un point a sur la carte, on trace

- i) le cercle-parallèle de latitude 30° dont le rayon est R ,
- ii) deux méridiens faisant entre eux l'angle $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ soit l'angle (pb, pc),
- iii) la corde joignant les extrémités b et c. La longueur bc est alors égal au rayon R de l'image du parallèle de latitude φ . On trace ce cercle.
- iv) On reporte depuis le méridien origine l'angle λ qui coupe le cercle en a.

- Les coordonnées de a(x,y), image du point A (λ, φ) sont $x = R \sin \lambda$ et $y = -R \cos \lambda$.
- Les modules linéaires valent $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ sur les méridiens et l'inverse sur les parallèles.

Ils sont donc respectivement inférieur et supérieur à 1, conséquence de la propriété d'équivalence.

VII - LES CASSINI

Quatre générations successives de Cassini ont occupé la scène de la cartographie, entre la création de l'Observatoire de Paris par l'Académie des Sciences en 1668 et le début du XIX^e siècle : Jean-Dominique (1625-1712), Jacques (1677-1756), César-François Cassini de Thury (1714-1784), Jacques-Dominique (1748-1845). Ils mirent en pratique les principes de géodésie proposés par l'abbé Picard que Colbert avait nommé directeur de l'Observatoire lors de sa création. Pour Picard, la connaissance géométrique du Royaume devait se faire en établissant une triangulation de l'ensemble du territoire et en évaluant par des mesures astronomiques les coordonnées géographiques, et en particulier les longitudes pour lesquelles il savait que les mesures réalisées auparavant étaient peu fiables. Cette démarche, qui fut mise en place en plusieurs étapes, permit la réalisation de la première carte de France scientifique, celle dite de Cassini ou de l'Observatoire.

La méthode de triangulation, définie en 1533 par le flamand Frisius, consiste à recouvrir la longueur d'un arc de méridienne ou de ses perpendiculaires, par des triangles successifs dont les sommets sont des points en intervisibilité -sommets, clochers, tours- à partir desquels on mesure les angles de chaque triangle (voir la rubrique "Dans nos classes"). La connaissance d'un côté du triangle et de ses angles permet, grâce à la trigonométrie, de calculer les longueurs des deux autres côtés et, de proche en proche, de déterminer toutes les dimensions du réseau de triangles ainsi que la longueur de l'arc.

Jean-Dominique Cassini et l'abbé Picard, mesurèrent d'abord par cette méthode, la longueur d'un degré de méridien entre Malvoisine dans le Gatinais et Sourdon en Picardie. Jean-Dominique entreprit d'établir la mesure de la méridienne entre Dunkerque et Perpignan, mais ce travail fut interrompu à la mort de Colbert. L'expédition scientifique ne put être reprise qu'en 1700 par Jacques Cassini et La Hire. L'écart des mesures de la longueur d'arc correspondant à un degré d'angle, selon qu'elles étaient réalisées au nord ou au sud de la France, confirma que la terre n'était pas sphérique. D'après les mesures, la terre devait être

allongée vers les pôles. La théorie de Newton stipulait par contre que la terre était aplatie. Cette contradiction ne fut levée qu'avec les missions en Laponie (1736-1737) et au Pérou (1735-1743) réalisées par Delambre, Méchain, Bouguer et qui donnèrent raison au théoricien anglais. L'ensemble des mesures réalisées auparavant furent alors remises en question.

En 1739-1740, César-François Cassini de Thury et l'abbé La Caille reprirent la mesure de la longueur de la méridienne entre Dunkerque et Perpignan. Ces derniers étaient également chargés de la triangulation de la France afin d'améliorer la géodésie pour l'établissement d'une carte au 1/86400. Cette mission concernait la méridienne, les perpendiculaires à cette dernière -en premier lieu, celle passant par l'Observatoire de Paris- et les perpendiculaires de ces perpendiculaires. Il faut remarquer qu'en dehors de la méridienne elle-même, cet ensemble de lignes parallèles et perpendiculaires qui forment le réseau de triangulation ne sont ni des méridiens, ni des parallèles. La **figure 16** indique ces différentes lignes ainsi que la forme des courbes représentant les méridiens et les parallèles. La méthode de levé adoptée était associée pour la première fois à une projection, la projection cylindrique équidistante transverse réalisée sur l'ellipsoïde de Plessis établie d'après les résultats des expéditions de Laponie et du Pérou (voir ci-dessous).

L'établissement de la carte fut retardé par la guerre de sept ans qui mit un terme aux financements royaux et que des fonds privés ne parvinrent que partiellement à combler. La première carte, celle de Paris, n'a été publiée qu'en 1783 et dix ans après, cinquante feuilles sur les cent quatre-vingt deux prévues étaient éditées. A la mort de son père, Jacques-Dominique prit la relève et continua son oeuvre. Dans d'autres pays d'Europe, des travaux semblables furent entrepris.

L'aspect mathématique de la représentation Cassini

Cette projection équidistante a été utilisée au XVIII^e siècle pour la première carte de France au 1/86400 calculée sur un ellipsoïde et non sur une surface sphérique comme auparavant. De nombreux pays européens l'ont employée pour l'établissement de leur cartes à la fin du XVIII^e siècle et au XIX^e siècle.

Les caractéristiques de la projection transverse sont déduites de la projection directe par rotation.

A- Projection cylindrique équidistante directe

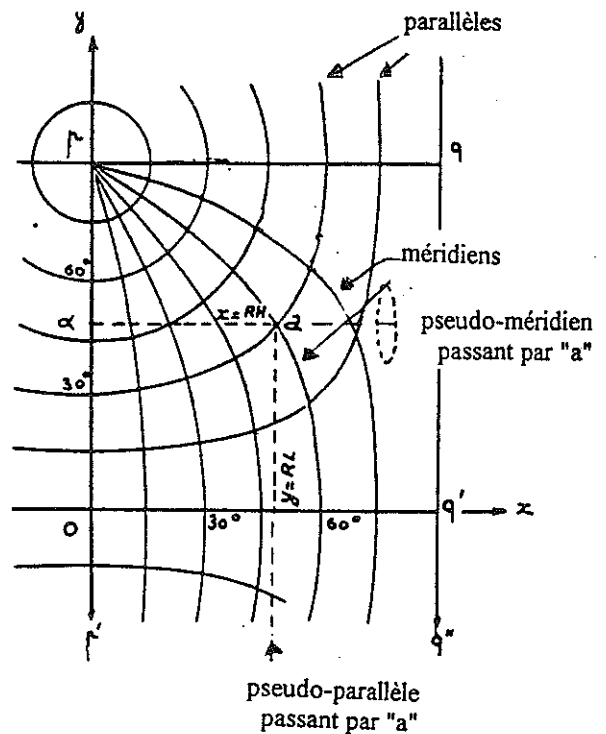
C'est la représentation la plus ancienne, qu'on appelle carte plate carrée : les parallèles et les méridiens sont régulièrement espacés et l'image de chaque pôle est une droite parallèle à l'équateur située à une distance de $R \frac{\pi}{2}$ de celui-ci. Les coordonnées de l'image $a(x, y)$ d'un point $A(\lambda, \varphi)$ sont données par $x = R\lambda$ et $y = R\varphi$ (R , rayon de la sphère terrestre réduite).

Le module linéaire vaut 1 suivant l'équateur et les méridiens, et $\frac{1}{\cos \varphi}$ suivant les parallèles.

(Figure 16)

Pour construire cette projection, on trace la droite pop' , image de POP' ainsi que les "pseudo-méridiens", droites perpendiculaires à pop' . Le module linéaire vaut 1 sur l'ensemble de ces droites. L'image de Q est la droite qq' , qui est l'équivalent de l'image des pôles de la projection directe. Les "pseudo-parallèles" sont des droites parallèles à pop' dont le module linéaire vaut $\frac{1}{\cos H}$. Les "pseudo-méridiens" et "pseudo-parallèles" forment la trame de la triangulation telle que l'ont établie César-François Cassini de Thury et l'abbé La Caille.

coupant régulièrement po et pq.



"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

VIII - BONNE (XIX^{EME} SIECLE)

La projection de Cassini présentait l'inconvénient d'une déformation importante dans les zones limitrophes de la France. En 1803, la commission créée par le Dépôt de la Guerre ⁹ qui avait pour mission d'établir les conditions optimales à rechercher pour une carte de France, sélectionna la projection que l'ingénieur hydrographe Bonne avait étudiée en 1752. Le Dépôt de la Guerre vit également la nécessité de codifier les signes et d'uniformiser les conventions en usage dans les différents services publics chargés de cartographie. Ils définirent ainsi les règles de la cartographie moderne, notamment, *i*) l'échelle décimale liée au système métrique, *ii*) l'introduction de cotes établies en référence au niveau de la mer, *iii*) le tableau d'écriture qui avait été établi par un ingénieur géographe - du nom de Jacotin, *iiii*) les méthodes de gravure topographique.

Si le projet d'une nouvelle carte de France, initié pendant la Révolution, fut de nouveau envisagé sous Napoléon et pendant la Restauration, de nombreuses difficultés financières retardèrent sa concrétisation. Les levés s'étalèrent en effet entre 1818 et 1866, et l'impression au 1: 80000, entre 1833 et 1880. Les triangulations de la carte, dite d'Etat-major, ont été calculées sur l'ellipsoïde de Plessis.

Dès 1841, des révisions s'avérèrent nécessaires pour tenir compte du récent développement du réseau des voies de communication. Les résultats obtenus au cours des premières années qui suivirent furent peu homogènes du fait d'une trop grande dispersion des compétences dans le domaine cartographique. Les divers services de cartographie militaires furent alors regroupés au sein du Service géographique de l'Armée, qui fit procéder au recueil des données par des opérateurs spécialisés à partir de 1889. Jusqu'en 1880, le Service hydrographique de la Marine française adopta également le système de Bonne pour ses cartes marines.

L'aspect mathématique (Figure 17)

C'est une représentation dite "mériconique". Elle n'est pas conique dans la mesure où les méridiens ne sont pas des droites, mais elle a cependant des analogies avec les systèmes coniques. C'est une représentation équivalente qui a été utilisée pour la carte d'Etat-Major de France parce que, contrairement à la carte de Cassini, elle produit de faibles déformations dans les régions extrêmes, Est et Ouest. Elle a été très répandue pour les cartes à grande échelle de nombreux pays d'Europe au XIX^e siècle. Actuellement, sa facilité de construction et ses faibles déformations favorisent son utilisation pour des cartes d'atlas.

Pour la construire, on trace s le point-image du sommet S du cône tangent à la sphère. Le méridien origine a pour image un segment pp' passant par s , de module linéaire égal à 1, divisé régulièrement selon les parallèles. Les parallèles sont des arcs de cercle centré en s , de module linéaire égal à 1 et de rayons $\mathcal{R}$.

pour le parallèle de latitude φ_0 , choisi comme origine, $\mathcal{R} = s\omega_0 = S\Omega_0 = R \cotan \varphi_0$

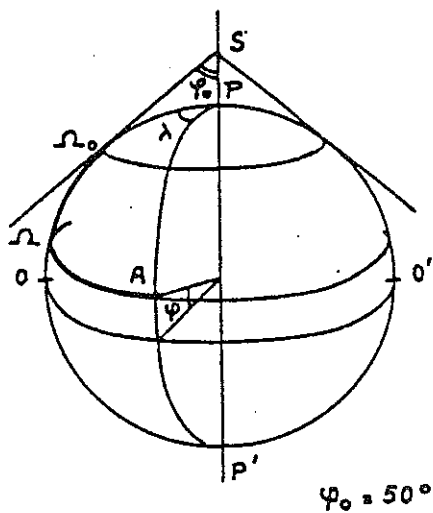
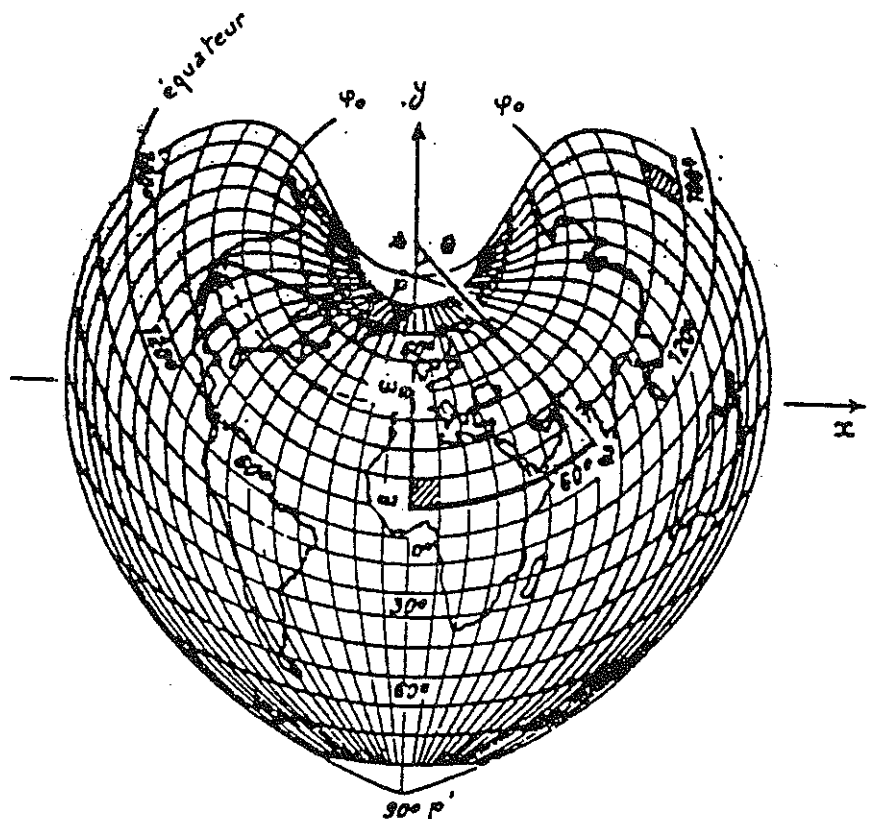
⁹ Précurseur du Service géographique de l'Armée et de l'IGN.

La projection du pôle est un arc de cercle.

Pour déterminer l'image a d'un point $A(\lambda, \varphi)$, on trace :

- On construit alors l'image du parallèle passant par A, cercle de centre s passant par ω , puis la demi-droite sa qui fait avec l'image du méridien origine un angle $\gamma = RA \cdot \frac{\cos \varphi}{s\omega}$.

(λ , longitude de A). Le point a est l'intersection de ce cercle et de la demi-droite sa.

 $\varphi_0 = 50^\circ$ 

Les coordonnées polaires de a $(\gamma, \mathcal{R})$ sont :

La projection de Sanson est un cas particulier de celle de Bonne où l'on choisit $\varphi_0 = 0$

CONCLUSION

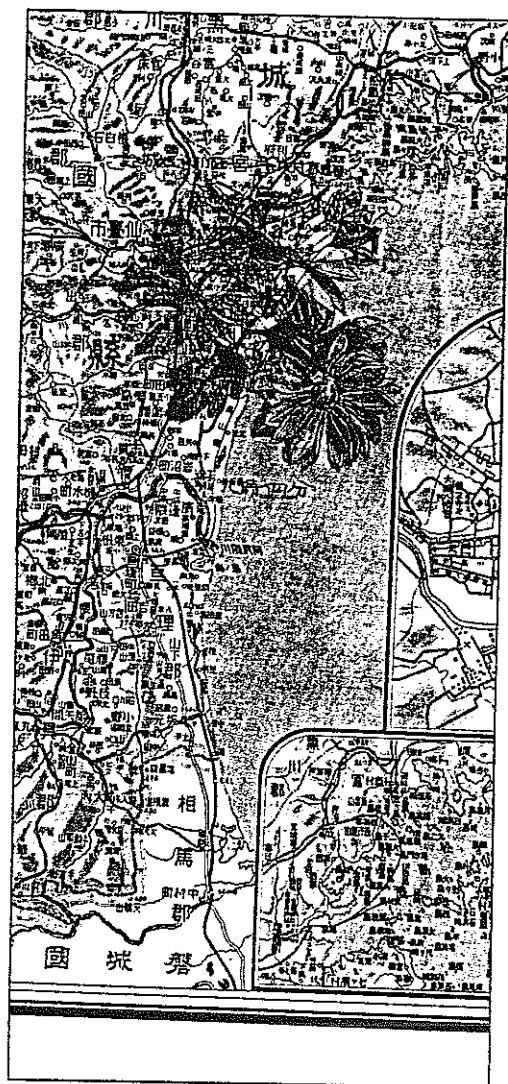
Nous venons de le voir dans ce raccourci de quelques siècles sur la cartographie occidentale : les représentations du monde ont joué un rôle privilégié dans les sociétés qui les ont produites. Elles ont été prises dans des enjeux de pouvoir et de prestige, politiques, militaires, commerciaux, techniques et intellectuels. C'est encore le cas au XX^e siècle où la cartographie a été profondément modifiée avec l'introduction de l'ordinateur, des satellites, de la télédétection et de manière générale, des nouveaux moyens de communication et d'information. Elle semble de plus en plus étroitement mêlée aux développements scientifiques et techniques. On constate que les enjeux qu'elle suscite de nos jours favorisent encore cette évolution ambitieuse.

Toutefois, à côté du dynamisme de cette discipline et de ses progrès décisifs, il nous semble qu'au XX^e siècle, la carte est singulière à plusieurs titres. D'une part, on assiste à sa banalisation. Cartes routières, cartes marines, cartes à petite ou grande échelle, toutes ces cartes qui, dans les siècles précédents, étaient tenues secrètes ou étaient réservées à quelques corps de métier, sont aujourd'hui des objets de consommation courante. D'autre part, la carte a étendu son champ de fonctionnalité. Elle ne se limite plus aux informations de territoires et d'itinéraires, mais peut traduire toute sorte de données (démographiques, économiques, géopolitiques, géologiques ...), imprimées sur des fonds de cartes établis scientifiquement ou sur des tracés symboliques (plan de métro, cartes SNCF...). Par ailleurs, elle apparaît dans de nombreux mouvements artistiques du XX^e siècle -contestataires par essence à notre époque-. C'est au tout début de notre siècle que dadaïstes et surréalistes l'ont introduite comme élément dans leurs tableaux, alors même que l'espace de Newton, référent absolu, était remis en question par Einstein, bouleversant, on le sait, les certitudes acquises au XIX^e siècle. La carte a ensuite traversé la plupart des mouvements artistiques de notre siècle.

Alors que la cartographie s'offre à nous dans son positivisme et son efficacité, la carte jouerait-elle, de façon paradoxale, un rôle métaphorique dans le questionnement artistique et intellectuel de notre époque ? Pour alimenter cette thèse, je laisserai Baudrillard (1981) affirmer que "c'est désormais la carte qui précède le territoire, c'est elle qui engendre le territoire" ou M. A. Brayer (1995) suggérer que "la carte comme fondation géométrique du monde, grille de coordonnées et de mesures, est devenue un instrument qui permet de s'attaquer aux fondements de la représentation". Petites phrases qui trouvent un écho quant à la lecture d'événements particuliers de notre XX^e siècle.

BIBLIOGRAPHIE

- Alinhac G., "Historique de la cartographie", Imprimerie de l'Institut Géographique National, 1986
- Baudrillard, "Simulacres et simulation", Paris, Ed. Galilée, 1981
- Brayer M.A., "Mesure d'une fiction picturale : la carte de géographie", in "Perte d'inscription", Exposé n°2, Revue d'esthétique et d'art contemporain, Premier trimestre 1995
- Colloque international et interdisciplinaire Jean-Henri Lambert, Université de haute Alsace, Centre de recherches et d'Etudes Rhénanes, Ed Orphys, Paris, 1979
- Cuenin R., "Cartographie générale, tome 1, Notions générales et principes d'élaboration", Ed. Eyrolles, 1972
- Gambier G., "Notions sur les représentations planes de la terre", Imprimerie de l'Institut Géographique National, 1984
- Jacob C., "L'empire des cartes - approche théorique de la cartographie à travers l'histoire", Albin Michel Histoire, 1992
- Jacquel R., "Le savant et philosophe mulhousien Jean-Henri Lambert (1728-1777), Études critiques et commentaires", Université du Haut-Rhin, Centre de recherches et d'études rhénanes, Ed Orphys, Paris, 1977
- Levallois J.J., "Mesurer la terre, 300 ans de géodésie française", Association française de topographie, Presses de l'École Nationales des Ponts et Chaussées, Paris, 1988
- Minelle F., "Représenter le monde", Presse Pocket, coll. Explora, 1992
- Pelletier M. (édité par), "Géographie du Monde au Moyen Age et à la Renaissance", Editions du Comité des Travaux Historiques et Scientifiques, 1989



中英見骨龍斷截

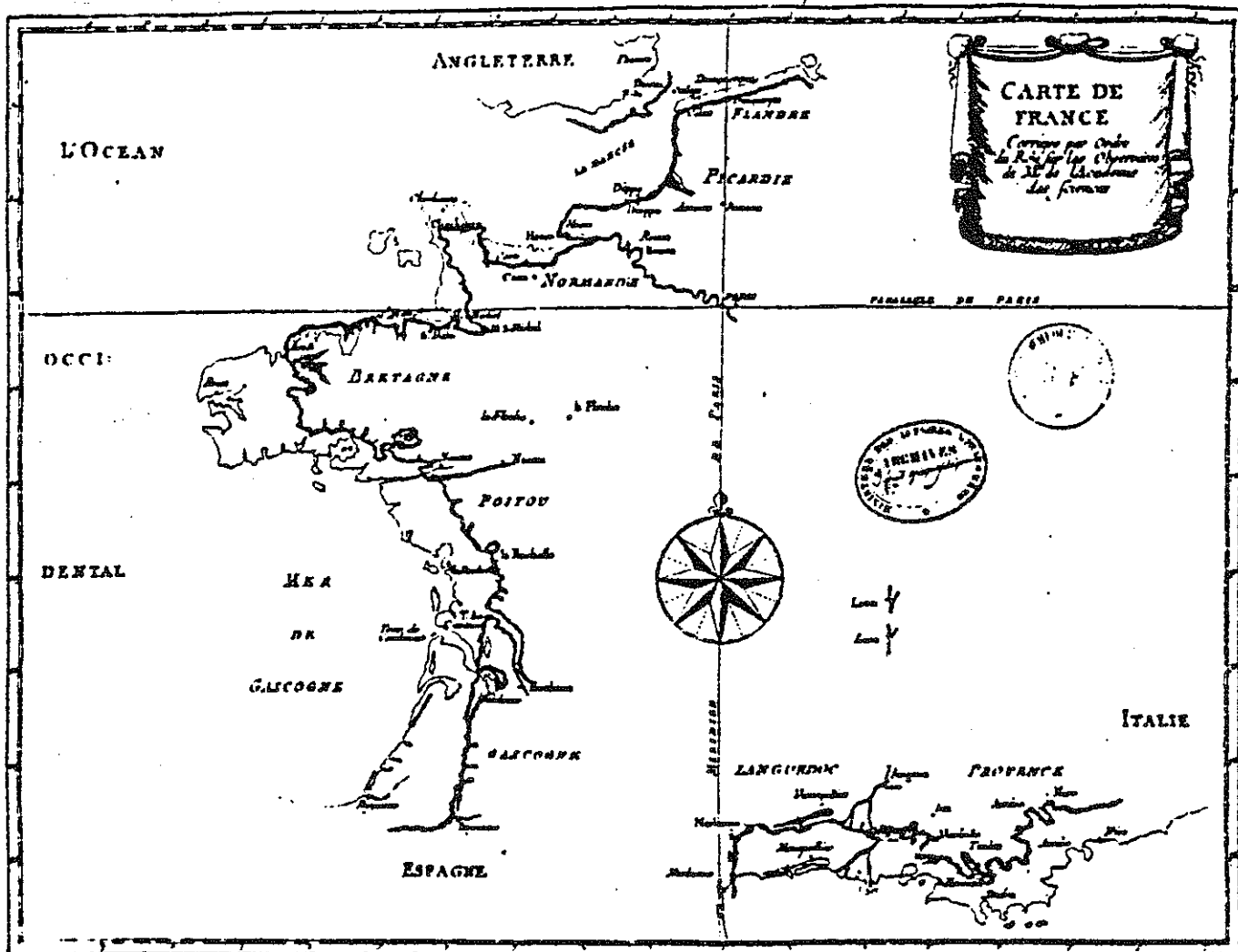


Cerisiers et Chrysanthèmes – 1995
Dessin sur carte géographique et latex
27 x 12 cm – 35 x 17 cm

Philippe LALEU

GLOSSAIRE

- Antiméridien** : Méridien opposé au méridien origine qui forme avec celui-ci un angle de 180 °. C'est le méridien de changement de jour quand il est midi au méridien origine (Rappelons-nous l'heureux dénouement du "Tour du monde en 80 jours" !).
- Azimut** : Angle d'un plan vertical avec un autre plan vertical choisi pour plan origine (par exemple en astronomie : angle du plan vertical d'un astre avec le méridien du point d'observation).
- Cartographie** (définition de l'Association Cartographique Internationale, 1966, et de l'UNESCO)
Ensemble des études et des opérations scientifiques, artistiques et techniques intervenant à partir de résultats d'observations directes ou de l'exploitation d'une documentation, en vue de l'élaboration de cartes, plans et autres modes d'expression.
- Cosmographie** : Description des systèmes astronomiques de l'univers (système solaire ; nébuleuses ; trajectoire de la terre par rapport aux étoiles ...).
- Echelle d'une carte** (ou échelle nominale) : Facteur d'homothétie pour passer de la terre à un ellipsoïde réduit (ou une sphère) dont on projetera les points sur le plan de la carte. Sur une carte au 1: 100 000, un cm correspond à une longueur 100 000 plus grande, soit 1Km .
- Ellipsoïde** : Solide engendré par la rotation d'une ellipse autour de l'un de ses axes.
- Géodésie** : Science qui a pour objet l'étude de la forme de la terre et de ses dimensions.
- Géographie** : Science qui a pour objet la description de la terre sous ces différents aspects (géologique ; économique ; humain ; physique ...).
- Gnomon** : Cadran solaire. De manière générale, tige dont on mesurait l'ombre portée afin d'estimer l'heure, mais également la latitude.
- Hydrographie** : Science qui étudie l'hydrosphère (la partie liquide de la terre).
- Indicatrice de Tissot** : Projection sur la carte d'un cercle infinitésimal de la surface terrestre réduite. Son image est une ellipse qui sert d'indicatrice pour les déformations associées à une projection.
- Loxodromie** : Routes à cap constant, c'est-à-dire un parcours à azimuth constant (angle avec la méridienne).
- Module linéaire** : Rapport d'une longueur ab du plan à la longueur correspondante AB sur l'ellipsoïde ou la sphère réduite à l'échelle : $m=ab/AB$. Quand il n'y a pas de déformation, $m=1$.
- Orthodromie** : Parcours selon un grand cercle de la terre. Plus généralement, plus court chemin géodésique de la sphère.
- Projection aphylactique** : Projection qui n'est ni conforme, ni équivalente.
- Projection conforme** : Projection qui conserve les angles initiaux.
- Projection équidistante** : Projection qui conserve les longueurs sur les méridiens et l'équidistance des parallèles.
- Projection équivalente** : Projection qui conserve les rapports de surface initiaux.
- Planisphère** : Cartes représentant la terre entière d'un seul tenant.
- Rumb** (ou **Rhumb**) : quantité angulaire entre deux divisions de la rose des vents.
- Surface développable** : Surface qu'on peut appliquer sur un plan (par exemple, le cylindre ou le cône peuvent être ouverts par un coup de ciseau et être superposés à un plan).
- Topographie** : Science du levé des plans et des cartes avec prise en compte du relief.



Carte de France corrigée par ordre du Roi

DANS NOS CLASSES

La mesure du méridien

Michèle Grégoire , Marie-Françoise Jozeau

La mesure des distances terrestres est une préoccupation qui remonte à l'Antiquité, que ce soit pour l'établissement de cartes ou pour des recherches plus théoriques sur le système du monde. Le souci de précision devint plus aigu quand la volonté égalitariste de la Révolution française choisit le méridien terrestre, bien commun à tous les humains, comme base d'un système universel de mesure.

Ce sujet a donné lieu à plusieurs projets pluridisciplinaires, souvent liés à des commémorations historiques.

- En 1989, plusieurs classes du lycée Gérard de Nerval à Luzarches ont participé à l'opération menée par Denis Guedj, intitulée la Méridienne, qui consistait à faire revivre à des élèves les observations effectuées par Delambre et Méchain sur la ligne méridienne entre Dunkerque et Perpignan. Avec leur professeur de Physique des élèves ont tracé un méridien dans la cour du lycée. Ils ont réalisé une exposition présentant leurs travaux relatifs à la mesure du méridien autour de Saint Martin du Tertre, une des stations de la triangulation de Delambre et Méchain, voisine de Luzarches. Cette exposition fut présentée dans les écoles et les mairies des communes alentour.

- La même année, la Cité des sciences et de l'industrie proposait une exposition sur les savants à la Révolution française et une classe de 1ère S du lycée Lavoisier a fait un "séjour" d'étude d'une semaine -une classe-Villette - dont un des thèmes était la mesure de la terre et de l'univers. Les principes et l'histoire du système métrique y furent présentés et des mesures de distances par triangulations, à l'aide de théodolites prêtés par l'armée (!), ont été effectuées dans le Parc de la Villette.

- Certaines des activités ont été reprises lors d'un projet d'établissement pluridisciplinaire de commémoration de l'oeuvre de Lavoisier, entrepris en 1994.

Les activités décrites ci-dessous sont aussi des exercices proposés en Travaux pratiques dans les classes de 1ère S, en liaison avec le cours de trigonométrie ou de géométrie dans l'espace (à propos de la sphère). L'exercice "Étude de la réduction au centre" donne l'occasion de réfléchir sur l'usage de l'approximation classique de $\sin x$ par x (pour x petit).

Signalons une excellente exposition diffusée par le CRDP d'Amiens sur l'histoire du système métrique, qui est propre à éveiller la curiosité des élèves sur ce sujet.

1. Deux poids, deux mesures.

Sous l'Ancien Régime, les unités et étalons de mesures étaient fort nombreux, et, le plus souvent différaient d'une région à l'autre. Les étalons étaient déposés dans les églises ou les palais seigneuriaux, sous la protection des autorités religieuses ou temporelles. L'extension du commerce au Moyen-âge fit ressentir le besoin d'unifier étalons et mesures. Au XVII^{ème} siècle, le développement scientifique et la centralisation du pouvoir rendirent ce besoin de plus en plus évident et ressenti par des groupes de plus en plus nombreux.

L'empereur Charlemagne avait déjà suggéré de choisir le "pied du Roi" ($\approx 0,3248$ mètre) comme étalon universel. Cette unité avait été adoptée par les ordres monastiques bâtisseurs, mais d'autres communautés continuaient à utiliser des unités diverses. En 1670, Gabriel Mouton, abbé de Lyon suggéra de choisir pour unité universelle le "milliare", le soixantième du degré de méridien, qui est devenu le mille marin (1,852 km). Mais malgré de nombreuses tentatives de ce genre, jusqu'à la Révolution française, jamais la volonté politique ne fut assez forte pour imposer une décision unificatrice face aux intérêts des seigneurs ou des corporations qui savaient tirer parti de la confusion. En 1789, les cahiers de doléances sont pleins de réclamations dans ce sens : "Que toutes les sortes de grains soient mesurées avec la même unité, pour ne pas léser les plus pauvres..." Plus de 800 unités différentes étaient en usage au XVIII^{ème} siècle: arpents pour les champs, perches pour les prés, daurées pour les vignes, aune-carrée pour les pièces d'étoffe, on pesait les fruits en poinçonnées, le blé au muid, le sel au setier, les poudres d'apothicaire à la livre, à l'once, en drachmes ou en scrupules... (cf. l'exercice de l'Annexe 1, pour le collège)

En 1790, l'Assemblée Constituante demande à l'académie des Sciences de déterminer un système de mesure qui puisse être accepté par le monde entier, sans particularité liée à aucune situation particulière. La commission, composée en particulier des mathématiciens et physiciens Lagrange, Laplace, Monge, Condorcet, du chimiste Lavoisier,... hésite sur différentes définitions possibles, rejette par exemple l'idée proposée pour la première fois par Picard au XVII^{ème} siècle, de choisir la longueur du pendule battant la seconde, car cette longueur diffère selon les latitudes; la commission décide finalement de fixer pour unité de longueur la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre¹ et la nomme "mètre" (du grec *metron*, mesure). Cette définition témoigne de l'esprit égalitariste de la Révolution française, puisque sous les pieds de chaque être humain passe un méridien et que tous les méridiens sont égaux. L'Académie des Sciences se propose donc de remesurer une portion du méridien terrestre (à l'aide de l'étalon le plus précis dont les astronomes disposent à l'époque, la toise du Pérou, nommée ainsi, car elle avait été utilisée lors d'opérations géodésiques au Pérou quelques dizaines d'années plus tôt). L'unité de poids est définie à partir de l'unité de longueur puisque c'est le poids d'un cube de 0,1 mètre de côté d'eau distillée à la température de zéro degré². On adopte également le principe de division décimale des unités (cf Annexe 3).

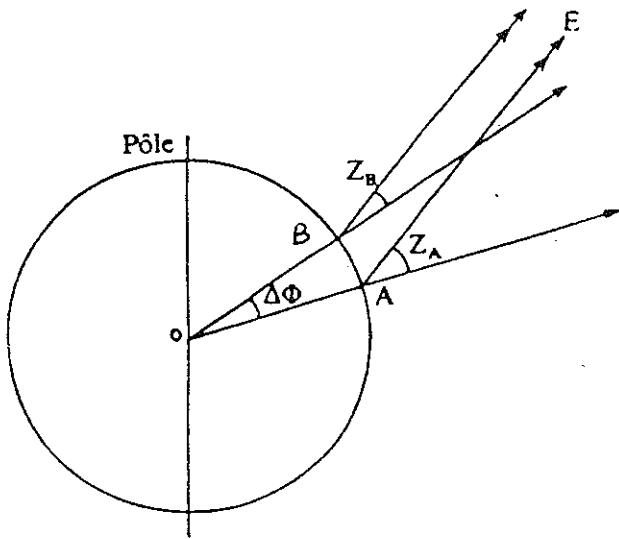
¹ Le méridien est alors défini comme tout grand cercle passant par les pôles.

² Les mesures expérimentales sont faites à basse température (environ 6°), par Lavoisier et Fortin, puis ramenées par des calculs théoriques à 0°. Quelques années plus tard, le kilogramme sera défini de la même façon, mais en prenant l'eau à 4°, température de densité maximale de l'eau.

2. La mesure de la terre avant 1789.

La mesure du méridien terrestre avait déjà été faite précédemment de façon plus ou moins précise. Aristarque, qui, au IV^{ème} siècle avant J.C., défendait un système héliocentrique du monde avait estimé à 400000 stades (≈ 63000 km) la circonférence de la terre; Archimède donnait pour estimation 300000 stades, mais on ne connaît rien de leurs méthodes. La plus ancienne méthode connue est celle d'Eratosthène d'Alexandrie, au III^{ème} siècle avant J.C. Il a mesuré la distance entre Syène (Assouan aujourd'hui) et Alexandrie, deux villes situées approximativement sur le même méridien, mesuré l'angle $\Delta\Phi$, égal à la différence de latitude entre les deux villes, et il en a déduit la circonférence de la terre, environ équivalente à 39000 km. La qualité de l'approximation est excellente, probablement par un heureux hasard, les différentes erreurs se compensaient. (cf. encadré ci-dessous et texte de Duhem en Annexe 2)

La méthode d'Eratosthène



Des points A et B on vise la même étoile E (le soleil pour Eratosthène). L'étoile E étant très éloignée, on considère que les rayons de visée sont parallèles.

Question 1 :
Démontrer que $\Delta\Phi = Z_A - Z_B$

Question 2 :
Connaissant $\Delta\Phi$ et la longueur de l'arc AB, comment peut-on en déduire la circonférence de la terre ?

La mesure de la terre était le souci des cartographes, mais aucune mesure précise du méridien ne fut tentée avant 1669, année où Colbert demanda à l'Académie des Sciences nouvellement créée, de dresser une carte du Royaume. L'astronome Picard fut chargé de mesurer la distance entre Sourdan et Malvoisine, correspondant à un degré du méridien de Paris. (fig. 2). Louis XIV remercia ces Messieurs de l'Académie pour la carte de France qu'ils établirent, bien que, en conclusion de leurs calculs et observations, le territoire de son royaume se révélât moins étendu que ce que laissaient croire les cartes précédentes. (cf figure p. 60)

Picard appliqua la méthode de triangulation inventée par le mathématicien flamand Frisius, et appliquée vers 1617 par Snellius qui travailla toute sa vie à l'établissement d'une carte des Pays Bas. Les mesures de longueurs sont beaucoup plus difficiles à réaliser que les mesures d'angles; c'est pourquoi on

avec le maximum de précision qu'une seule petite distance appelée base, sur laquelle s'appuie une chaîne de triangles dont on ne mesure que les angles. Picard mesura la distance Juvisy-Villejuif, d'environ 11km, puis les angles d'une chaîne de 13 triangles. A l'aide de la formule $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, il put calculer les côtés des triangles et leurs projections sur la ligne méridienne. Les côtés des triangles étaient d'environ 40km de long. Picard utilisait, pour mesurer les angles, un quart de cercle dont le rayon était d'environ un mètre; la précision des mesures était d'environ 5 secondes par degré d'angle.

La première activité proposée à nos élèves fut d'utiliser la page ci-jointe du rapport de Picard pour calculer, en toises, la distance GE³.

34 *Mesure de la Terre,*
qui ne donnoient les minutes que de six
en six, ils n'ont pas laissé d'approcher de
la justesse autant qu'il étoit nécessaire,
pour faire voir qu'on ne s'étoit pas trompé
aux conclusions.

I. TRIANGLE ABC.
Pour connoître le côté AC.

CAB.....54°...4'...35".
ABC.....95°...6'...55".
ACB.....30°...48'...30".
AB.....5663...Toises de mesure actuelle.
Donc AC.....11012...Toises 5 pieds.
Et BC.....8954...Toises.

II. TRIANGLE ADC.
Pour DC & AD.

DAC.....77°...25'...50".
ADC.....55°...0'...10".
ACD.....47°...34'...0".
AC.....11012...Toises 5 pieds.
Donc DC.....13121...Toises 3 pieds.
Et AD.....9922...Toises 2 pieds.

III. TRIANGLE DEC.
Pour DE & CE.

DEC.....74°...9'...30".
DCE.....40°...34'...0".
CDE.....65°...16'...30".
DC.....13121...Toises 3 pieds.
Donc DE.....8870...Toises 3 pieds.
Et CE.....12389...Toises 3 pieds.

par M. l'Abbé Picard. 35.

IV. TRIANGLE DCF.
Pour DF.

DCF.....113°...47'...40".
DFC.....33°...40'...0".
FDC.....32°...32'...20".
DC.....13121...Toises 3 pieds.
Donc DF.....21658...Toises.

Notez que dans ce quatrième triangle, l'angle DFC a été augmenté de 10", qui manquoient à la somme des trois angles.

V. TRIANGLE DFG.
Pour DG & FG.

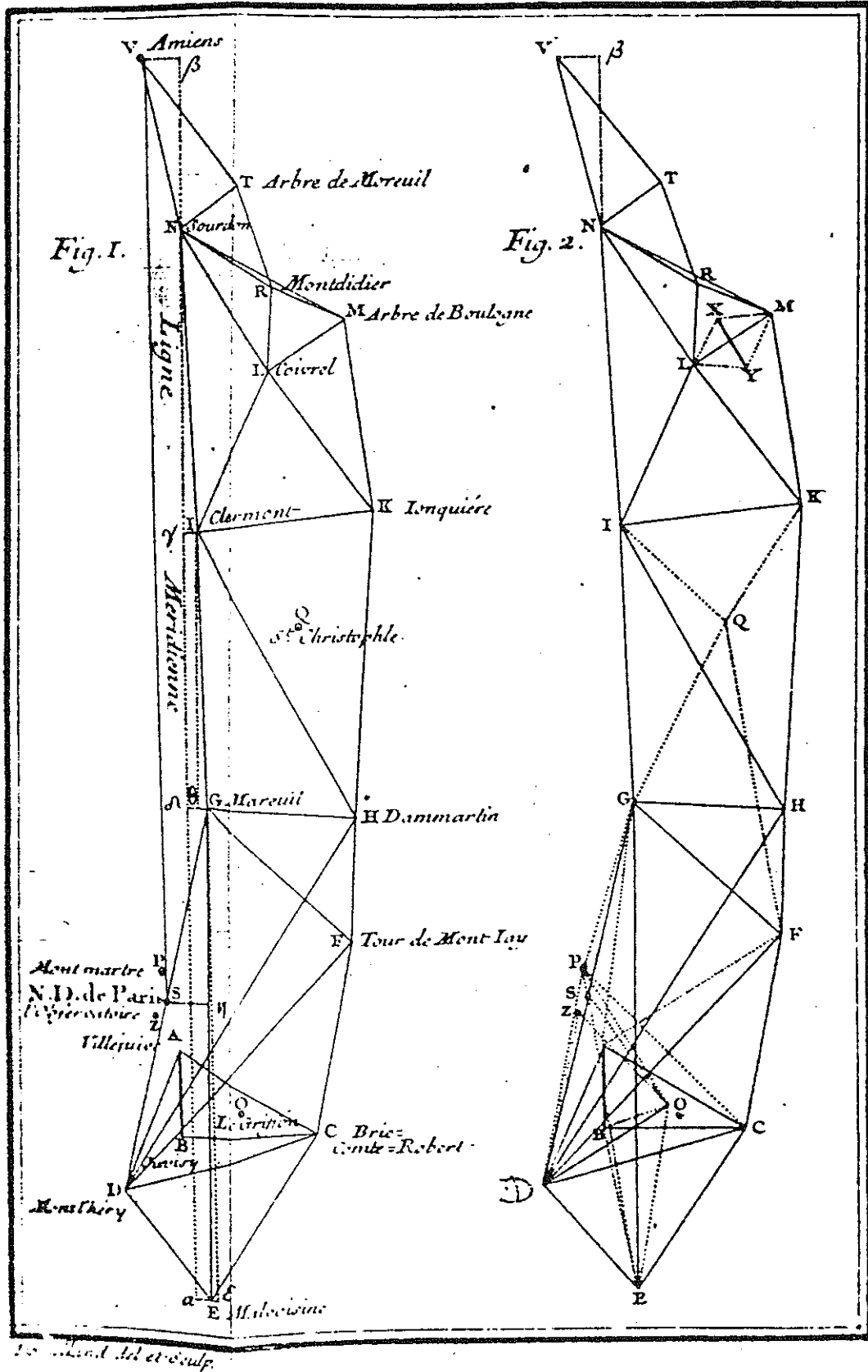
DFG.....92°...5'...20".
DGF.....57°...34'...0".
GDF.....30°...20'...40".
DF.....21658...Toises.
Donc DG.....25643...Toises.
Et FG.....12963...Toises 3 pieds.

Ensuite de ces cinq triangles, il a été facile de conclure la distance GE entre Malvoisine & Mareuil, sans supposer aucune nouvelle Observation.

N.B. Une toise vaut 6 pieds; son équivalent en mètres est environ 1,949.

Picard estima le degré de méridien à 57060 toises, ce qui correspond à environ 111,210 km (la toise utilisée par Picard était d'environ 1,949 m). La valeur exacte du degré de méridien est de 111,111...km. De nouvelles mesures furent faites au 18ème siècle par plusieurs membres de la famille des Cassini, astronomes à l'Observatoire de Paris, la dernière fut réalisée en 1740 par La Caille.

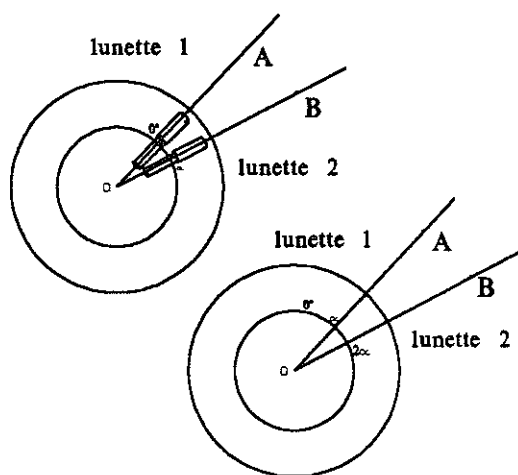
³ Une activité intéressante en 6ème consiste à faire construire "à l'échelle" la chaîne des triangles déterminée par les données de la page de Picard puis de mesurer sur la figure la distance GE et d'en déduire sa valeur en toises.



3. La mesure du méridien par Delambre et Méchain.

Les mesures du méridien réalisées par La Caille devaient être revérifiées pour permettre une définition acceptable du mètre. Ce furent les astronomes Pierre Méchain et Jean-Baptiste Delambre qui en furent chargés. Leurs opérations durèrent 7 ans, de 1792 à 1799, elles furent entravées par toutes sortes de difficultés: outre les difficultés naturelles, les inégalités du terrain, dans les Pyrénées en particulier, les intempéries, Méchain tomba très malade, il fut même temporairement paralysé; la guerre fut déclarée entre la France et l'Espagne; les astronomes furent pris pour des espions, parfois pour des contre-révolutionnaires; ils furent arrêtés, emprisonnés, leurs signaux de mesures furent détruits à plusieurs reprises... Leurs aventures sont racontées par Denis Guedj dans "la Méridienne".

Les instruments de mesure avaient été améliorés depuis la dernière mesure de La Caille; Delambre et Méchain commandèrent à l'ingénieur Lenoir des "cercles-répétiteurs", instruments qu'il avait construits en 1784 pour les mesures concernant la jonction entre les méridiens de Greenwich et de Paris, sur une idée de l'astronome allemand Tobie Mayer, adaptée par Borda à la mesure des angles terrestres. Le résultat de la mesure d'un angle est toujours entaché d'erreurs. Parmi celles-ci, on peut citer les erreurs de pointé, les erreurs de lecture et les erreurs de division du limbe (cercle gradué). Pour diminuer ces erreurs, il a été fait usage du cercle répétiteur (cf. fig. 4). L'avantage de ce cercle est d'atténuer considérablement les erreurs de division et les erreurs de lecture. En effet, la méthode de répétition consiste à prendre plusieurs mesures successives du même angle sur le cercle horizontal de l'instrument en ajoutant successivement les arcs mesurés aux précédents, sans jamais revenir au zéro de la graduation, et en divisant la dernière mesure lue par le nombre de répétitions exécutées.⁴



L'angle AOB est visé n fois: la lunette 1, placée en face de la graduation 0, vise d'abord le point A; la lunette 2 vise le point B; (si la lecture était faite immédiatement, la graduation lue serait α); puis la lunette 2, rendue temporairement solidaire du limbe vise A et la lunette 1 vise B (la graduation lue serait alors $\cong 2\alpha$), etc.;

Deux lectures seulement sont faites, une au début et l'autre à la fin.

Le limbe entier ou en grande partie est utilisé, ce qui permet de compenser les erreurs de division résultant de la graduation du limbe.

Laplace recommande de faire trois séries de vingt répétitions.

⁴ Avec le cercle répétiteur, la mesure se fait dans le plan de l'angle, d'où la nécessité ensuite de faire une réduction à l'horizon.

On peut lire dans le dernier paragraphe du document ci-joint, extrait du rapport de Delambre, "*Base du système métrique décimal*", 36 puis 18 mesures successives du même angle, angle entre le Panthéon et Dammartin et dont le sommet est le clocher de Saint Martin du Tertre.

St.-Martin du
Tertre.

SAINT-MARTIN DU TERTRE.

XXII.

Le clocher de Saint-Martin du Tertre a été rebâti en 1745, c'est-à-dire environ cinq ans après les opérations de la *Méridienne vérifiée*. Déjà cependant il menace ruine. Il n'est pas à la même place que l'ancien clocher. $dH = 3^{\circ}5$.

La charpente est dans le plus mauvais état, et nous ne pouvions faire le moindre mouvement sur notre échafaud sans faire tout trembler. Cette station d'ailleurs a été très-rude par les vents impétueux et les pluies continuelles.

Entre Dammartin et Saint-Christophe.

Cinquième série.

$$24 \ 15025243 \quad 6255934583 = 56^{\circ} 20' 2''8$$

F. et B. n° 1. Cette dernière série paroît devoir mériter la préférence. Je n'y ai pas pris de part moi-même. La taille du citoyen le Français se prêtoit mieux à l'espace que nous avions, et lui permettoit de faire porter le poids de son corps sur les avents du clocher. Aussi les deux séries qu'il a observées s'accordent très-passablement avec la dernière, dans laquelle les deux observateurs ont toujours conservé la même position.

St.-Martin du
Tertre.

$$\begin{array}{rcl} r = 0^{\circ}5 & y = 296^{\circ} 3' 50'' & + 6''2 \\ \text{Centre} & & 56^{\circ} 20' 9''0 \\ & & + 0''41 \\ \text{Horizon} & & 56^{\circ} 20' 9''41 \end{array}$$

Entre le Panthéon et Dammartin.

$$\begin{array}{rcl} 36 \ 30415629 & 84548969 & = 76^{\circ} 2' 26''6 \quad \text{D. puis B.} \\ 18 \ 15205317 & 84548986 & = 76^{\circ} 2' 27''06 \quad \text{F. n° 1.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 76^{\circ} 2' 26''83 \\ r = 0^{\circ}21181 & y = 6^{\circ} 56' 53'' & + 2''48 \\ & & 76^{\circ} 2' 29''31 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 20 \ 16895792 & 8454896 & = 76^{\circ} 2' 26''30 \quad \text{D. n° 1.} \\ r = 0^{\circ}37153 & y = 10^{\circ} 51' 10'' & + 3''98 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 76^{\circ} 2' 30''28 \\ \text{Première série} & & 76^{\circ} 2' 29''08 \\ \text{Seconde série} & & 76^{\circ} 2' 29''54 \\ \text{Moyenne} & & 76^{\circ} 2' 29''63 \\ & & + 1''20 \\ \text{Horizon} & & 76^{\circ} 2' 30''83 \end{array}$$

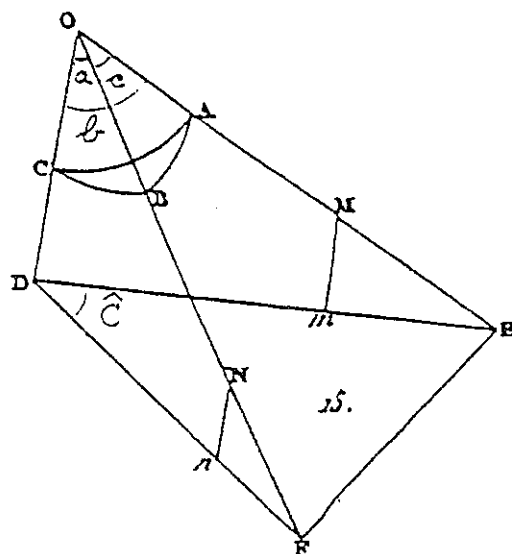
La lecture et l'explicitation de ce document constitue l'activité suivante proposée à nos élèves :

- la première ligne indique que Delambre (noté D.) puis son adjoint Bellet (B.) ont réalisé 36 mesures de l'angle qui a pour sommet le clocher de St Martin du Tertre et pour côtés les directions du Panthéon et de Dammartin. Le cercle répétiteur indique 3041,629 grades⁵; la 36ème partie, 84,48969, convertie en degrés vaut 76° 2' 26" 6. La seconde ligne indique que Le Français (F), autre collaborateur de Delambre a fait une série de 18 mesures du même angle avec le premier cercle-répétiteur (n°1) dont la moyenne est 76° 2' 27" 06. La moyenne des deux mesures de l'angle est faite à la troisième ligne. Une série supplémentaire de 20 mesures de l'angle est encore reprise par Delambre avec ce même cercle-répétiteur (D. n°1), mentionnée à la ligne 6.

- Une correction, intitulée "réduction au centre" est effectuée aux lignes 4 et 7. C'est le cas lorsque le cercle répétiteur ne peut, pour des raisons pratiques, être exactement placé au centre C de la station (clocher d'église, sommet de tour par exemple); c'est ce point qui a été visé depuis le sommet précédent de la chaîne de triangles et qui servira également de mire aux mesures suivantes. Delambre calcule la différence entre l'angle effectivement mesuré AOB et l'angle théorique ACB. L'activité suivante étudie et démontre la formule de correction.

- sur les dernières lignes figure une correction intitulée "réduction à l'horizon", nécessaire lorsque l'angle mesuré c n'est pas situé dans un plan horizontal. Delambre calcule alors la mesure de la projection C sur le plan horizontal de l'angle c, à l'aide d'une formule qui a été établie sur la demande spécifique de Delambre, par le mathématicien Legendre, par l'intermédiaire de la trigonométrie sphérique.

$$\sin^2 \frac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{a-b+c}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \sin a}$$



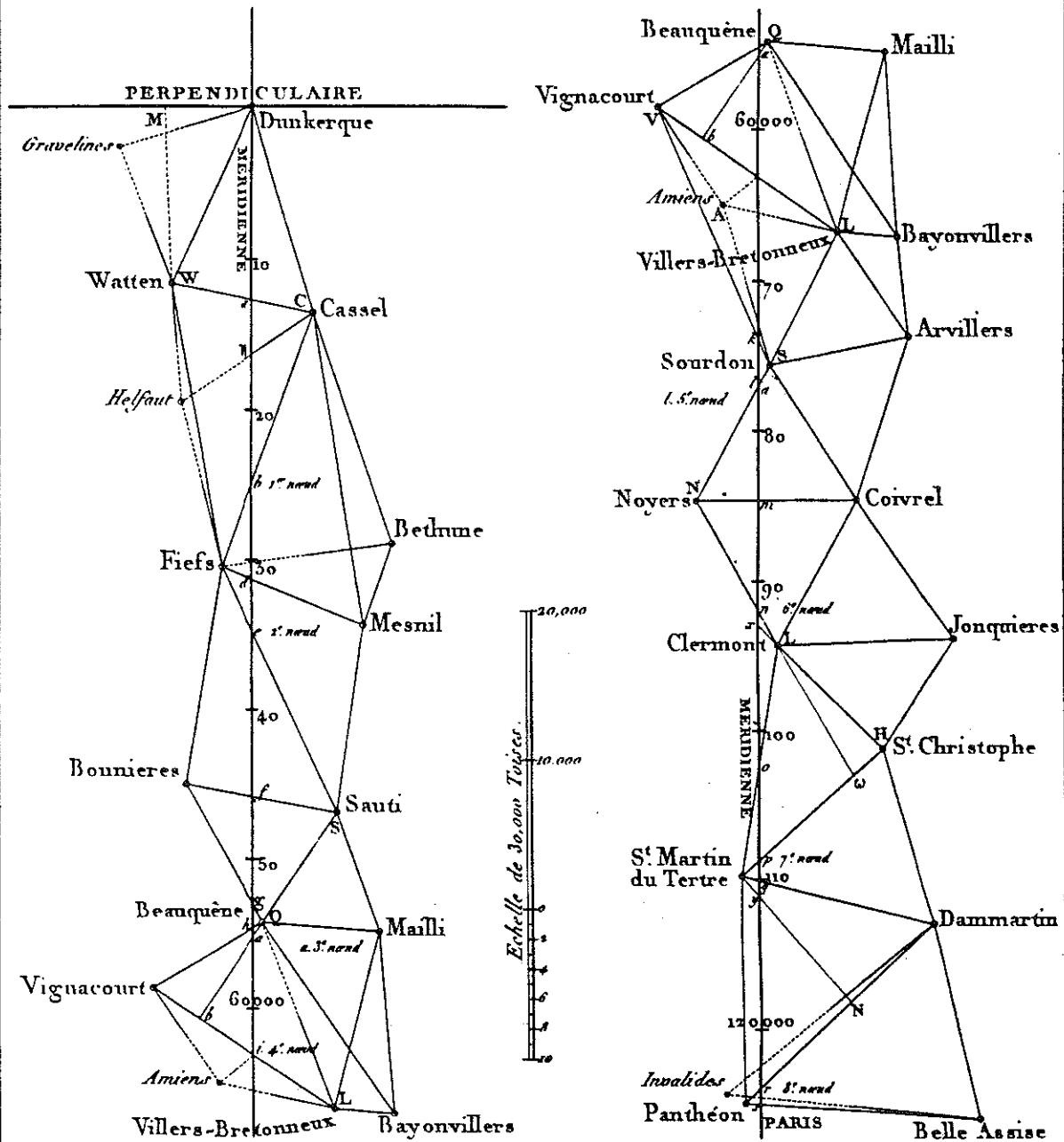
- d'autres corrections ont encore été pratiquées par Delambre, qui n'apparaissent pas dans cette page du Rapport; en particulier, celles qui tiennent compte de la sphéricité de la terre. (cf Annexe 4)

⁵ La mesure décimale des angles en grades avait été également instituée par la commission des Poids et Mesures, mais les tables de sinus à la disposition des astronomes n'existaient que pour des angles mesurés en degrés.

CHAÎNE DES TRIANGLES

de Dunkerque à Barcelone

mesurée par MM. Delambre et Méchain.



Étude de la "Réduction au centre"

Le point C est la position du signal visé dans les mesures précédentes (clocher, sommet de tour ou de montagne, ...). Il est appelé centre de la station. S'il n'est pas accessible pour y poser le cercle répétiteur, on place celui-ci en un point O, le plus proche possible de C. L'angle mesuré est donc AOB (noté O), alors que l'angle dont on doit tenir compte dans la chaîne des triangles est ACB, noté C. On pose $r = OC$, $y = \angle BOC$, $O = \angle AOB$, $G = BC$, $D = AC$

$$\Delta \parallel (BC) \quad \Delta' \parallel (AO)$$

1) Montrer que $\hat{C} = \hat{O} + \hat{A} - \hat{B}$ en

utilisant les angles auxiliaires introduits dans la figure.

2) En utilisant la formule des sinus, montrer que $\sin B = \frac{r \sin y}{G}$ et que $\sin A = \frac{r \sin (O+y)}{D}$

3) Si les angles A et B étaient mesurés en radians, et puisqu'ils sont petits (la distance OC est très petite par rapport aux distances CA et CB de l'ordre de 40km), on pourrait écrire $\sin A \cong A$ et $\sin B \cong B$.

Si x'' est la mesure en secondes d'un angle, quelle est sa mesure en radians ?

Considérons un angle d'une seconde ; sa mesure en radians y peut être confondue avec son sinus.

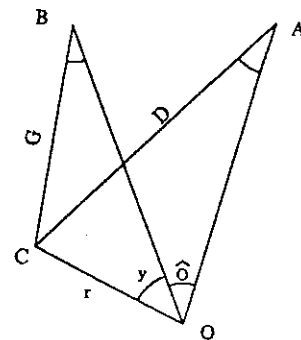
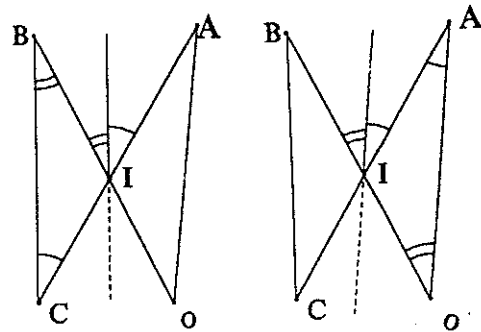
Donner donc une approximation de $\sin 1''$.

En déduire l'approximation $\sin x'' \cong x \sin 1''$

4) En déduire la formule approchée de réduction au centre

$$\angle ACB \approx O + \frac{r \sin (O+y)}{D \sin 1''} - \frac{r \sin y}{G \sin 1''}$$

Vérifier la correction faite par Delambre (au milieu de la p.68, $r=0^{\circ}15' 29''$, $y=296^{\circ}3' 50''$ $+6''$) en prenant pour G et D une approximation des distances BC et AC estimées à l'aide de l'échelle de la carte.



4. Les conclusions de Delambre et Méchain et leur postérité.

Les deux astronomes présentent leurs conclusions en 1799 à une commission de scientifiques de diverses nations d'Europe, correspondant à l'Italie, l'Espagne, le Portugal, la Suisse, au Danemark, aux Pays-Bas d'aujourd'hui. Ceux-ci approuvent, après trois mois d'étude soignée des rapports de Delambre et Méchain, leur définition du mètre et du kilogramme. Des étalons en platine doivent être construits. Le nouveau mètre mesure 3 pieds 11296 lignes de la Toise du Pérou. Le système métrique est institué. Le

consul Bonaparte est favorable à son adoption, mais empereur, il transige et autorise également l'usage des anciennes mesures; à la Restauration, la monarchie rétablit l'usage des anciennes mesures. Mais en 1837 l'usage du système métrique devient obligatoire en France. En 1869, une commission internationale du Mètre réunit plus de trente nations et les étalons français en platine iridié sont adoptés par tous les participants. Pour répondre aux exigences croissantes de précision des recherches les plus variées, le mètre est, en 1960, redéfini comme 1650763,73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation émise entre deux niveaux du krypton 86. Les performances des lasers étant supérieures à celles des lampes à krypton, le mètre reçoit, en 1983, une nouvelle définition: la distance que traverse la lumière dans le vide en $1/299792458$ de seconde.⁶

Bibliographie

Delambre *Base du système métrique décimal*, Paris 1806 - 1810

Legendre A.M. *Éléments de Géométrie*, Paris, 1794

Picard *La mesure de la terre*, 1671

Boyé A., Lefort X. *Mesurer aussi bien la terre que le ciel*, IREM des Pays de Loire, 1991

Guedj D. *La méridienne*, Seghers, 1987

Guedj D. *La révolution des savants*. Découvertes Gallimard 1989

Lefort X. *L'histoire de la carte de France de Cassini. Un P.A.E. interdisciplinaire d'histoire des mathématiques en classe de seconde*. Repères IREM n°14, janvier 1994.

Observatoire de Paris *Une mesure révolutionnaire: le mètre*. Paris, 1988

⁶ Depuis 1967, la seconde est la durée de $9\,192\,631\,770$ périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

ANNEXE 1

N O M des ANCIENS ET NOUVEAUX	LEUR VALEUR en LIVRES.
-------------------------------------	------------------------------

N.° 1.

Barres.

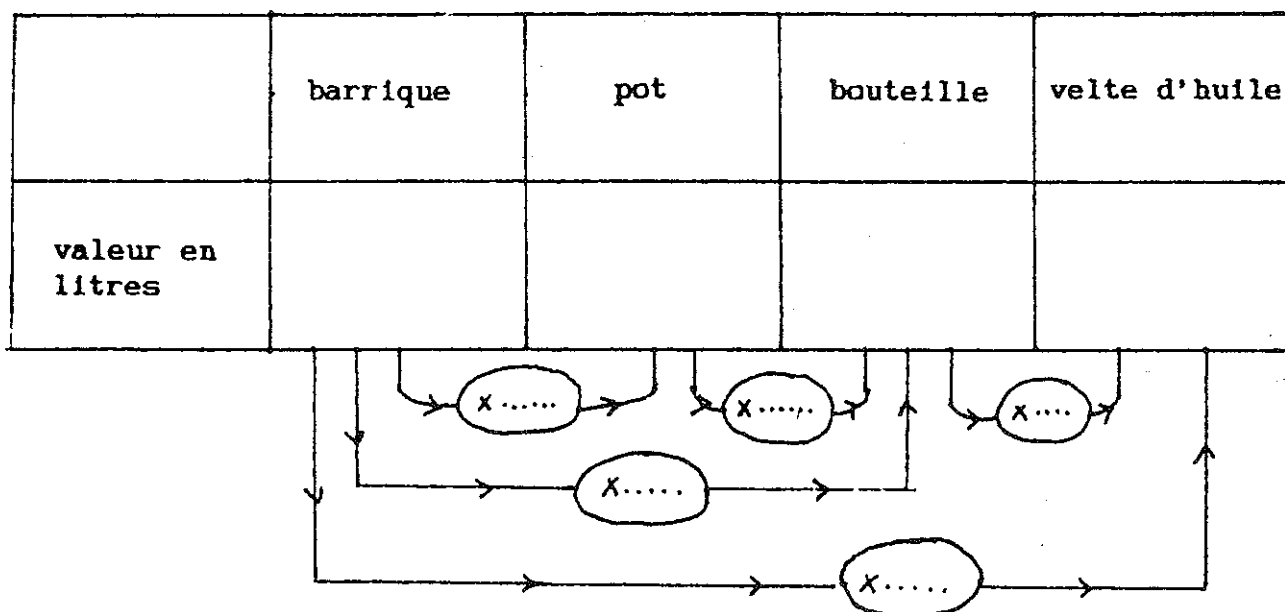
La barrique de vin de 100 pots . . . 196,900.
 Le pot de 2 bouteilles ou de 6 roquilles
 ou de 3 grands pintons 1,969.
 La bouteille de 2 petits pintons . . . 9,984.
 La velte d'huile de 4 pots 7,876.

2.

La barrique de 80 pots. 104,640.
 Le pot de 2 bouteilles. 2,558.
 La bouteille 1,279.

3.

La barrique de 105 pots : : : : : 210,000;
 Le pot de 2 bouteilles ou de 3 pou-
 chons. , , , , , 2,000.
 La bouteille , , , , , 1,000.



Au temps d'Archimède, la circonférence terrestre avait été déjà l'objet d'une mesure beaucoup plus exacte que celle dont se contente le géomètre syracusain ; l'auteur de cette mesure était Ératosthène.

Né dans la cité africaine de Cyrène 275 ans avant J.-C., Ératosthène étudia à Alexandrie, puis à Athènes ; il revint à Alexandrie, appelé par Ptolémée III Évergète qui l'attacha à sa cour ; en 236, il fut mis à la tête de la célèbre bibliothèque ; ayant perdu la vue en 193, il se laissa, en 194, volontairement mourir de faim.

Les renseignements les plus sûrs que nous ayons sur l'opération par laquelle Ératosthène a mesuré un arc du méridien terrestre sont ceux de Cléomède ; il les tirait sans doute des écrits de Posidonius et nous les a conservés² dans sa *Théorie du mouvement circulaire des corps célestes*.

Selon le récit de Cléomède, Ératosthène aurait supposé, comme point de départ de sa détermination, que les deux villes de Syène et d'Alexandrie étaient sous le même méridien et qu'elles étaient distantes de cinq mille stades. Il aurait admis aussi ce postulat : On peut regarder comme parallèles entre eux tous les rayons envoyés par n'importe quel point du Soleil à n'importe quel point de la Terre ; « car les mathématiciens font l'hypothèse que ces rayons se comportent ainsi », ajoute Cléomède ; et, en effet, cette hypothèse équivaut bien à l'une de celles qu'Aristote prend soin d'attribuer explicitement aux mathématiciens qui ont mesuré la circonférence terrestre.

Syène, selon Ératosthène, est exactement située sous le tropique du Cancer ; au jour du solstice d'été, à midi, les gnomons ne portent aucune ombre ; le Soleil est au zénith. Le même jour et à la même heure, un gnomon dressé à Alexandrie³ porte une ombre dont la longueur, comparée à la hauteur de la tige de l'appareil, permet de connaître la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon. Selon le récit de Cléomède, il s'en faut du cinquantième de quatre angles droits que cette hauteur atteigne 90° ; c'est donc là la différence de latitude entre Syène et Alexandrie.

Dès lors, l'arc qui sépare ces deux villes, et dont la longueur connue est de cinq mille stades, représente un cinquantième du méridien terrestre, en sorte que la longueur même de ce méridien est de 250.000 stades.

Dans ce récit de Cléomède, nous reconnaissons aisément non le procès-verbal minutieusement détaillé des mesures qu'Ératosthène a dû réellement effectuer, mais un exposé grandement simplifié. Syène et Alexandrie sont, pour la commodité du raisonnement, supposées sous le même méridien alors que les longitudes de ces villes diffèrent de plus de 3°. La distance des deux cités, leur différence de latitude sont présentées sous forme de nombres ronds. Il est clair que nous avons sous les yeux une exposition accommodée au goût de lecteurs qui aiment la simplicité.

Quelles furent les observations réellement faites par Ératosthène ? Quelles précautions prit-il pour les rendre aussi exactes que possible ? Le rapport de Cléomède nous le laisse ignorer. Nous en sommes réduits à admirer la justesse du résultat obtenu par Ératosthène sans connaître les raisons qui l'expliquent. Elle est bien remarquable, d'ailleurs, cette justesse ; si, comme il est vraisemblable, le stade d'Ératosthène valait 157 mètres 50 centimètres, la mesure du géomètre de Cyrène attribue au méridien terrestre 39.375 kilomètres au lieu de 40.000.

2. CLÉOMÈDES *De motu circulari corporum caelestium* lib. I, cap. X ; éd. Hermannus Ziegler, Lipsiae, 1891, pp. 90-103.

3. En réalité, Ératosthène a mesuré la hauteur du Soleil à Alexandrie à l'aide de la *σύνστις*, sorte de cadran solaire inventé par Aristarque de Samos.

Division de la circonférence.

1. Jusqu'à ces derniers temps les géomètres s'étoient accordés à diviser la circonférence en 360 parties égales appelées *degrés*, le degré en 60 *minutes*, la minute en 60 *secondes*, etc. Ce mode présentait quelques avantages dans la pratique, à cause du grand nombre de diviseurs de 60 et de 360 : mais il entraînoit avec lui l'inconvénient des nombres complexes, et il nuisoit souvent à la rapidité du calcul.

Les savants, à qui on doit l'invention du nouveau système des poids et mesures, ont pensé qu'il y auroit un grand avantage à introduire la division décimale dans la mesure des angles. En conséquence ils ont regardé, comme unité principale, le quart de circonférence ou le *quadrans*, mesuré de l'angle droit, et ils ont divisé cette unité en 100 parties égales appelées *degrés*, le degré en 100 *minutes*, et la minute en 100 *secondes*.

Nous n'emploierons désormais que la nouvelle division ou la division décimale de la circonférence. C'est celle qui convient le mieux à la nature de notre arithmétique, et qui est la plus propre à abréger les calculs.

ANNEXE 4

Lecture d'un extrait des *Eléments de Géométrie* de Legendre (1800), expliquant comment ramener la résolution d'un triangle sphérique très-peu courbe à celle d'un triangle rectiligne.

Ce théorème a été établi par Legendre à la demande de Delambre et Méchain:

Etant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles ainsi diminués deviendront les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique proposé.

I Formules fondamentales de la trigonométrie sphérique (en forme d'exercice pour des classes de 1ère ou terminale).

Soient A, B, C, trois points d'une sphère Σ de centre O, n'appartenant pas à un même grand cercle.

Définitions:

1. On appelle triangle sphérique la portion de la surface de la sphère comprise entre 3 arcs de grands cercles, inférieurs à un demi-cercle. .
2. Ces arcs sont les côtés du triangle sphérique. On désignera, suivant l'habitude, la mesure de l'arc AB par c, celle de l'arc AC par b et celle de l'arc BC par a (ces mesures d'arcs sont égales aux mesures des angles au centre qui interceptent ces arcs)⁷. On peut donc écrire: $\cos BOC = \cos a$
3. Les angles du triangle sont les angles de plans. Ainsi, l'angle A est l'angle des plans (OAC) et (OAB). Cet angle est aussi égal à l'angle des tangentes en A aux grands cercles définissant les côtés.

1) Soit un triangle sphérique ABC d'une sphère Σ de centre O. On trace AO. La tangente en A à l'arc AB coupe la droite (OB) en K, la tangente en A à l'arc AC coupe la droite (OC) en H. On note A l'angle HAK.

a) Quelle est la nature des triangles HAO et KAO?

b) Compléter les formules suivantes:

$$HK^2 = AH^2 + \dots - 2 \dots$$

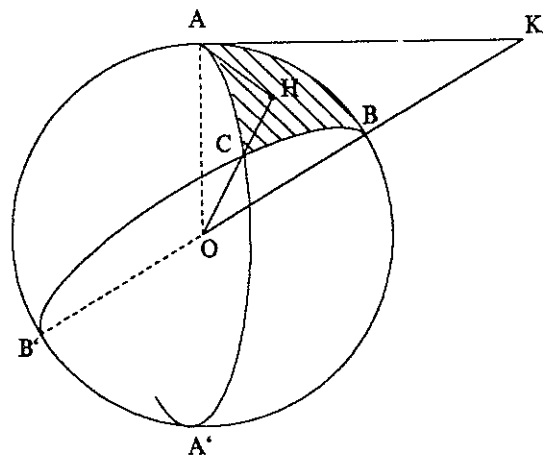
$$HK^2 = HO^2 + \dots - 2HO.KO\dots$$

$$AK = \dots \tan c \quad AH = AO \dots$$

$$OK = AO/\dots \quad OH = AO/\dots$$

c) En déduire que : $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

d) Ecrire deux autres formules analogues.



2) Soit une sphère Σ de centre O et un triangle sphérique ABC. On appelle L la projection orthogonale de A sur le plan (OBC). On appelle M et N les projections orthogonales de L sur (OB) et sur (OC).

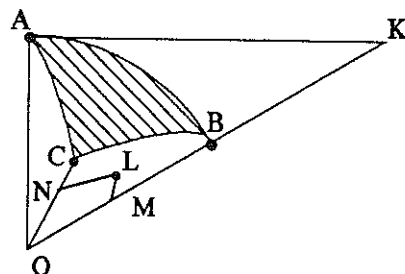
a) Comparer l'angle ANL et l'angle C du triangle sphérique. Comparer l'angle AML et l'angle B.

c) Etablir que $AL = R \sin c \sin B$

$$AL = R \sin b \sin C$$

N.B. On peut ainsi établir les formules classiques:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$



⁷ On sera attentif au fait que, dans le texte de Legendre, a, b, c désignent les longueurs des côtés du triangle sphérique, c'est-à-dire des longueurs d'arcs de grands cercles, et non les mesures des arcs, qui sont alors égales, en radians, à $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ où r désigne le rayon de la sphère. Sur une sphère de rayon 1 et lorsque les angles sont mesurés en radians, la mesure de l'arc est égale à la longueur de l'arc.

II Etude du théorème de Legendre

Pour cette partie, on a besoin des développements limités des fonctions sinus et cosinus. Les élèves de lycée peuvent suivre les calculs en utilisant des approximations polynomiales de ces fonctions

§. V. Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.

cv. Lorsque les côtés a, b, c , sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, le triangle proposé est peu différent d'un triangle rectiligne; et, en le considérant comme tel, on peut en avoir une première solution approchée, mais

on néglige de cette manière l'excès de la somme des angles sur 200° . Pour avoir une solution plus approchée, il faut tenir compte de cet excès, et c'est ce qu'on peut faire très-aisément, au moyen d'un principe général que nous allons démontrer.

Soit r le rayon de la sphère sur laquelle est situé le triangle proposé; si l'on imagine un triangle semblable tracé sur la sphère dont le rayon est 1, les côtés de ce triangle seront

$$\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}, \text{ et on aura } \cos A = \frac{\cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}}{\sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r}}. \text{ Mais puis-}$$

que r est fort grand par rapport à a, b, c , on aura d'une manière très-approchée, $\cos \frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 r^4}$, $\cos \frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 r^4}$, $\cos \frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 r^4}$, $\sin \frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{2 \cdot 3 r^3}$, $\sin \frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{2 \cdot 3 r^3}$. Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et négligeant les termes où b et c ont plus de quatre dimensions, on aura

$$\cos A = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4}{24r^4} - \frac{b^2 c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2} \left(1 - \frac{b^2}{6r^2} - \frac{c^2}{6r^2} \right)}$$

Multipliant les deux termes de cette fraction par $1 + \frac{b^2 + c^2}{6r^2}$, et réduisant, on aura

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2}{24bcr^2}$$

(1) il s'agit ici de degrés décimaux (c'est-à-dire de grades) et non de degrés sexagésimaux.

a, b, c sont les longueurs des côtés; $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ sont les longueurs d'arcs sur la sphère de rayon 1 ou les mesures des arcs en radians.

(2) il est évident qu'à partir d'ici, les angles et les arcs sont considérés comme mesurés en radians, pour utiliser les développements limités de cosinus et sinus.

Soit maintenant A' l'angle opposé au côté a , dans le triangle rectiligne dont les côtés seroient égaux en longueur aux arcs a, b, c ; on aura $\cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ et $4b^2 c^2 \sin^2 A' = 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Donc

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2} \sin^2 A'$$

Soit $A = A' + x$, on aura en rejetant le carré de x , $\cos A = \cos A' - x \sin A'$, d'où l'on voit que $x = \frac{bc}{6r^2} \sin A'$.

et puisque x est du second ordre par rapport à $\frac{b}{r}$ et $\frac{c}{r}$, il s'ensuit que ce résultat est exact aux quantités près du quatrième ordre. On aura donc

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2} \sin A'$$

Mais $\frac{1}{2} bc \sin A'$ est l'aire du triangle rectiligne dont a, b, c sont les trois côtés, laquelle ne diffère pas sensiblement de celle du triangle sphérique proposé. Donc, si l'une ou l'autre aire est appelée α , on aura $A = A' + \frac{\alpha}{3r^2}$, ou $A' = A - \frac{\alpha}{3r^2}$.

On auroit semblablement $B' = B - \frac{\alpha}{3r^2}$, $C' = C - \frac{\alpha}{3r^2}$, et il en résulte $A' + B' + C' = 2\cos^0 = A + B + C - \frac{\alpha}{r^2}$. On peut donc

considérer $\frac{\alpha}{r^2}$ comme étant l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits. Cela posé, on a ce théorème remarquable qui réduit la résolution des triangles sphériques très-petits, à celle des triangles rectilignes.

Etant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles ainsi diminués deviendront les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique proposé, ou en d'autres termes :

Le triangle sphérique très-peu courbe dont les angles sont A, B, C , et les côtés opposés a, b, c , répond toujours à un triangle rectiligne qui a les côtés de même longueur a, b, c , et dont les angles opposés sont $A - \frac{1}{3}\epsilon, B - \frac{1}{3}\epsilon, C - \frac{1}{3}\epsilon$, ϵ étant l'excès de la somme des angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits.

CVI. L'excès ϵ ou $\frac{\alpha}{r^2}$, qui est proportionnel à l'aire du triangle, peut toujours se calculer *a priori* par les données du triangle sphérique considéré comme rectiligne. Si deux côtés b, c , sont donnés avec l'angle compris A , on aura l'aire $\alpha = \frac{1}{2} bc \sin A$; si on donne un côté a et les deux angles adjacents B, C , on aura l'aire $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}$.

(3) x est très petit,

donc $\cos x \approx 1$ et $\sin x \approx x$

(4) remarquons qu'il faudrait écrire

$$2\pi = A + B + C - \frac{\alpha}{r^2},$$

puisque $\frac{\alpha}{r^2}$ est exprimé en radians.

Eusuite

on aura $\varepsilon = \frac{\alpha}{r^2} R$, R étant le nombre de secondes comprises dans le rayon, et de cette manière ε sera exprimé en secondes.

Si on veut appliquer ces formules aux triangles tracés sur la surface de la terre, considérée comme sphérique (1), il faudra supposer que les côtés a, b, c , ainsi que le rayon de la terre r sont exprimés en mètres. Or, puisque le quart du méridien $\frac{1}{4} \pi r$ est égal à 10000000 mètres, on en conclut $\log r = 6.8038801$; d'un autre côté le rayon R exprimé en secondes, a pour logarithme 5,8038801. Donc si au logarithme de l'aire α exprimée en mètres carrés, on ajoute le logarithme constant 2.196119, et qu'on retranche 10 unités de la somme, on aura le logarithme de l'excès ε exprimé en secondes.

Connoissant ε on retranchera ou on supposera retranché $\frac{1}{3} \varepsilon$ de chaque angle du triangle sphérique proposé, et alors dans le triangle rectiligne formé par les côtés a, b, c , et les angles $A' = A - \frac{1}{3} \varepsilon$, $B' = B - \frac{1}{3} \varepsilon$, $C' = C - \frac{1}{3} \varepsilon$, on aura les données nécessaires pour en déterminer toutes les parties. Ainsi on connoîtra en même temps celles du triangle sphérique proposé.

(5) R est le coefficient de proportionnalité permettant de passer des radians en secondes. R est en fait, la mesure en "secondes" d'un arc de grand cercle terrestre dont la longueur est celle du rayon. la "seconde" ici employée est une seconde décimale (10^{-4} grade). On obtient ainsi $R = \frac{2}{\pi} 10^6$

r étant la mesure en mètres du rayon de la terre, on a $r = \frac{2}{\pi} 10^7$, d'où l'on tire $\log R = \log r - 1$

(le logarithme utilisé étant le logarithme décimal). Ainsi $\log r \approx 6,80388016$ $\log R \approx 5,8038801$

Par ailleurs, $\varepsilon = \frac{\alpha R}{r^2} = \frac{100\pi}{2} \alpha 10^{-10}$ d'où $\log \varepsilon = \log \frac{100\pi}{2} + \log \alpha - 10$

Legendre appelle "logarithme constant" le nombre $\log \frac{100\pi}{2} \approx 2,196119$ et obtient ainsi une relation directe

entre $\log \varepsilon$ et $\log \alpha$.

Exemple : $C = 123^\circ 19' 99,23''$ $\log a \approx 4,5891503$ $\log b \approx 4,5219271$

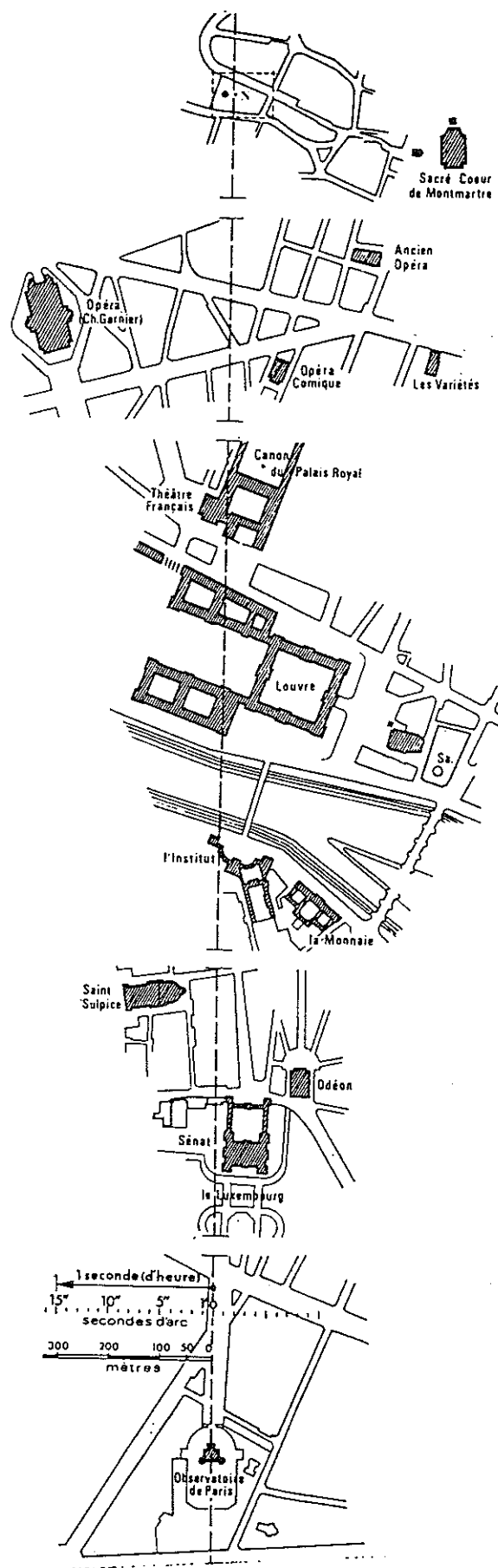
$\log (\frac{1}{2} \text{ absin } C) = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2 \approx 8,78055$

$\log \varepsilon \approx 2,196119 + 8,78055 - 10 \approx 0,97667$ donc $\varepsilon \approx 9,48$ secondes ; $(1/3)\varepsilon \approx 3,24$ secondes

et puisque $C' = C - (1/3) \varepsilon$; on obtient $C' = 123^\circ 19' 96,07''$

Question subsidiaire:

Évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur commise lorsqu'on confond A et A' dans le cas où r est le rayon de la terre et où b et c sont les côtés des triangles d'une triangulation du premier ordre c'est-à-dire valent à peu-près 40 km. Les approximations faites par Legendre sont-elles justifiées ?



traversée de Paris par son méridien, au Nord de l'Observatoire.

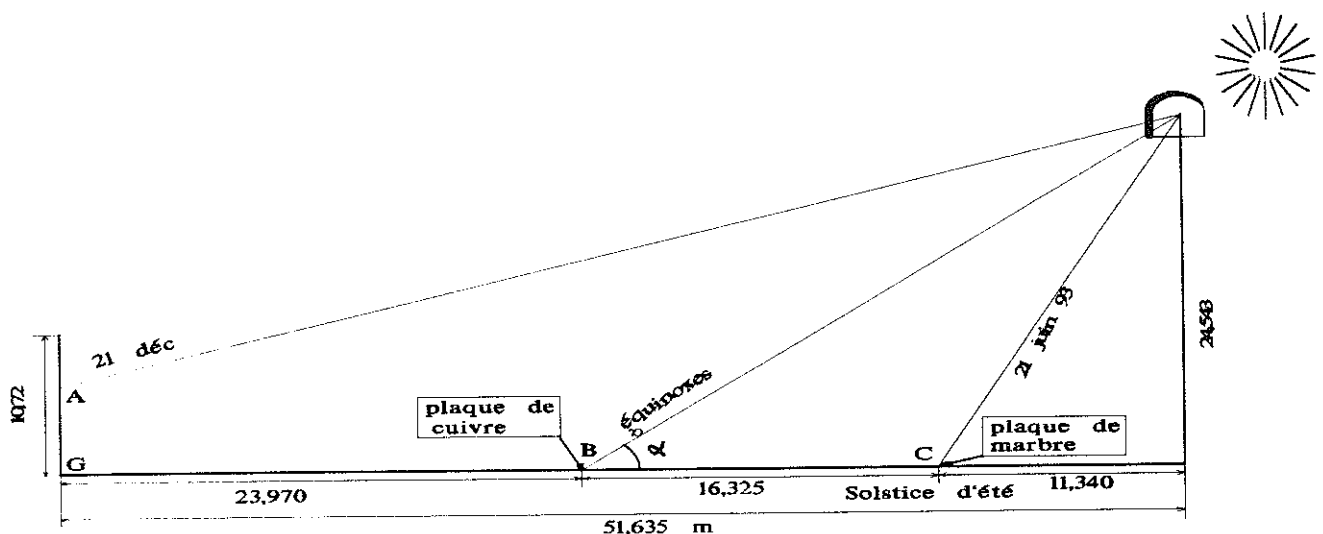
Méridiens de Paris

Avec un "s" ?

Oui, car si pour les géographes existe le méridien de Paris, celui qui traverse l'Observatoire de Paris, il existe, pour les Parisiens, des traces de plusieurs méridiens et méridiennes.

Au XVIII^{ème} siècle, avec la généralisation du ressort spirale les montres se multiplient . Nobles et bourgeois en acquièrent et, se piquant de savoir, ont l'impression de se libérer qui du cadran solaire, qui des sonneries de clocher. Encore fallait-il accorder ces montres. Le problème à résoudre est celui-ci: comment avoir le vrai midi du lieu ? comment trouver une solution et la proposer à ses concitoyens ? La réponse est dans le repérage de la culmination du soleil dans sa trajectoire diurne et son suivi au cours du cycle annuel. Il faut donc bien préciser le "midi" des cadrans solaires et pour cela le plan méridien du lieu. C'est là l'origine des diverses stèles méridiennes ainsi que les figurations du méridien que l'on trouve ici et là dans la capitale , et ailleurs.

Ainsi, sous l'impulsion de MAUREPAS, secrétaire de la maison du roi Louis XV, l'église Saint-Sulpice se voit traversée en 1744, par une ligne méridienne en cuivre, en son transept. C'est la trace d'un rayon du soleil passant par un petit orifice percé dans le mur sud de l'édifice, sur la suggestion de l'académicien LE MONNIER, de retour de l'expédition du méridien en Laponie. Des renseignements complémentaires indiquent au visiteur actuel que l'orifice est à la hauteur h du sol et que le jour de l'équinoxe la trace du rayon solaire est à la distance d du pied du mur. La géométrie nous apprend, par ailleurs, que l'angle α tel que $\tan \alpha = d / h$ n'est autre que la latitude du lieu - (h et d sont fournis en millimètres!) - Le calcul donne alors α voisin de $48,5^\circ$ un peu inférieur à la latitude moyenne de Paris : $48,8^\circ$.



Autre témoignage: dans une des cours de l'Hôtel de la Monnaie, on trouve une "méridienne calculée" par PINGRE et SADRAT de l'Académie de Sciences en 1777, selon la légende gravée sur la stèle.

Il y eut aussi le petit canon dans les jardins du Palais-Royal, conçu de façon que, à midi, un rayon de soleil, passant à travers une loupe enflammât un peu de poudre. Les parisiens entendirent tonner ce canon à midi jusqu'au milieu du XX^{ème} siècle .

Toutes ces traces de méridiens sont forts voisines. Mais elles n'appartiennent pas toutes au méridien de l'Observatoire.

Cassini avait obtenu de Louis XIV, vers 1670, qu'une salle du bâtiment que construisait PERRAULT soit percée d'un trou par lequel entre un rayon de soleil qui décrit sur le sol l'image des orbes journalières de l'astre. C'est aujourd'hui la salle CASSINI avec sa méridienne. L'Observatoire est construit symétriquement par rapport à un axe Nord-Sud qui a été choisi comme méridien origine et nommé méridien de Paris. On chercha ensuite à repérer vers l'horizon d'autres points situés sur le même méridien. On commença vers le nord. L'idée en était venue à PICARD, lorsqu'il mesurait la longueur de la portion de méridien entre Paris et Amiens. Une stèle en pierre fut élevée ; la stèle de 1736 comportait une fleur de lys que la Révolution enleva; elle existe encore près de l'actuel "Moulin de la Galette" sur la colline de Montmartre. Il fallut attendre 1806 et Napoléon 1er pour avoir la mire sud au parc Montsouris. La Restauration y enleva les références à l'empereur..

"Le" méridien était bien repéré sur Paris : Deux mires et l'instrument méridien de l'Observatoire, malheureusement non alignés (la ligne des mires est située environ 35 mètres à l'est de la méridienne de l'Observatoire).

Au XVIII^{ème} siècle les Parisiens se préoccupaient moins du midi vrai. Il y avait le télégraphe, l'heure de la poste, l'heure de la gare...

ARAGO qui fut directeur de l'Observatoire, fut honoré en 1893, après sa mort, d'une statue en bronze érigée au Sud de l'Observatoire.... boulevard Arago. En 1942, la statue fut coulée par les Allemands, pour l'armement de guerre. Il fallut cinquante ans pour que le métal revienne célébrer notre homme, non par une statue mais, selon le projet de l'artiste néerlandais Jan Dibbets, avec 135 médaillons scellés sur le sol de la capitale, de la porte Montmartre au parc Montsouris. Sur ces médaillons ressort le nom d'ARAGO et les lettres N et S. Ils réalisent ainsi la ligne imaginaire du méridien, celui qui passe juste dans l'axe du bâtiment de PERRAULT et par le socle de l'ancienne statue d'ARAGO, ignorant la ligne des mires. C'était notre promenade le long des méridiens de Paris.

Henry Plane

**Institut de Recherche sur l'Enseignement
des Mathématiques .**
Université Paris VII
2 . Place Jussieu . 75005 PARIS

Mercredi 20 Novembre 1996

(Mathématiques et Physique cartésiennes)

(Responsable : Michel SERFATI)

(accès 54 Rue Saint- Jacques ou 17 Rue de la Sorbonne)

IREM : Régine DOUADY, Michèle GREGOIRE, Michel SERFATI
Tel : (1) - 44 - 27 - 53 - 83 / 53 - 84 Fax : (1) - 44 - 27 - 56 - 08
Centre d' Etudes Cartésiennes : Catherine VILLEBRUN. Tel : (1) - 39 - 58 - 19 - 96

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

<http://www.irem-paris7.fr.st/>

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

Comité de rédaction:

<i>Philippe BRIN</i>	<i>Lycée Technique E.Branly Créteil Animateur à l' IREM Paris VII</i>
<i>Martine BÜHLER</i>	<i>Lycée Flora Tristan Noisy le Grand Animatrice à l' IREM Paris VII</i>
<i>Michèle GREGOIRE</i>	<i>Lycée Lavoisier Paris Animatrice à l' IREM Paris VII</i>
<i>Maryvonne HALLEZ</i>	<i>Collège P. Bert Paris Animatrice à l' IREM Paris VII</i>
<i>Marie Françoise JOZEAU</i>	<i>Lycée G. de Nerval Luzarches Animatrice à l' IREM Paris VII</i>
<i>Odile KOUTEYNIKOFF</i>	<i>Collège Descartes Antony Animatrice à l' IREM Paris VII</i>
<i>Michèle LACOMBE</i>	<i>CNED Institut de Vanves Animatrice à l' IREM Paris VII</i>
<i>Anne MICHEL-PAJUS</i>	<i>Lycée C. Bernard Paris Animatrice à l' IREM Paris VII</i>
<i>Jean Luc VERLEY</i>	<i>Université Paris VII IREM Paris VII</i>

*avec la participation de Marie Benedittini
Paris 8 Vincennes*

Courrier à adresser à : Groupe M: A.T.H.

IREM Université Denis DIDEROT PARIS VII

Tour 56/55 - 3ème étage - Case 7018

2 place Jussieu 75251 PARIS CEDEX 05

tel : 01 44 27 53 83

*Pour échanger expériences et réflexion à propos de l'histoire et de
l'enseignement des mathématiques*

*M: Mathématiques
A. Approche par les
T. textes
H. historiques*

SOMMAIRE

Editorial

Bonnes vieilles pages Puissant

*Etude Histoire de quelques projections cartographiques.
Marie Benedittini (Paris 8)*

*Dans nos classes Mesure du méridien
Michèle Grégoire, Marie Françoise Jozeau*

Editeur : IREM
Directeur responsable de la publication : R. DOUADY
Dépôt légal : Juin 1996
ISBN : 2-86612-123-6

IREM Université Paris VII Denis Diderot
Tour 56-55 - 3^{ème} étage, Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel : 01 44 27 53 83

En vente
au prix de 33 F.
à l'IREM de l'université Denis Diderot
Paris VII