La mesure du méridien

Michèle Grégoire , Marie-Françoise Jozeau

La mesure des distances terrestres est une préoccupation qui remonte à l'Antiquité, que ce soit pour l'établissement de cartes ou pour des recherches plus théoriques sur le système du monde. Le souci de précision devint plus aigu quand la volonté égalitariste de la Révolution française choisit le méridien terrestre, bien commun à tous les humains, comme base d'un système universel de mesure.

Ce sujet a donné lieu à plusieurs projets pluridisciplinaires, souvent liés à des commémorations historiques.

- En 1989, plusieurs classes du lycée Gérard de Nerval à Luzarches ont participé à l'opération menée par Denis Guedj, intitulée la Méridienne, qui consistait à faire revivre à des élèves les observations effectuées par Delambre et Méchain sur la ligne méridienne entre Dunkerque et Perpignan. Avec leur professeur de Physique des élèves ont tracé un méridien dans la cour du lycée. Ils ont réalisé une exposition présentant leurs travaux relatifs à la mesure du méridien autour de Saint Martin du Tertre, une des stations de la triangulation de Delambre et Méchain, voisine de Luzarches. Cette exposition fut présentée dans les écoles et les mairies des communes alentour.

- La même année, la Cité des sciences et de l'industrie proposait une exposition sur les savants à la Révolution française et une classe de 1ère S du lycée Lavoisier a fait un "séjour" d'étude d'une semaine -une classe-Villette - dont un des thèmes était la mesure de la terre et de l'univers. Les principes et l'histoire du système métrique y furent présentés et des mesures de distances par triangulations, à l'aide de théodolites prêtés par l'armée (!), ont été effectuées dans le Parc de la Villette.

- Certaines des activités ont été reprises lors d'un projet d'établissement pluridisciplinaire de commémoration de l'oeuvre de Lavoisier, entrepris en 1994.

Les activités décrites ci-dessous sont aussi des exercices proposés en Travaux pratiques dans les classes de 1ère S, en liaison avec le cours de trigonométrie ou de géométrie dans l'espace (à propos de la sphère). L'exercice "Étude de la réduction au centre" donne l'occasion de réfléchir sur l'usage de l'approximation classique de sinx par x (pour x petit).

Signalons une excellente exposition diffusée par le CRDP d'Amiens sur l'histoire du système métrique, qui est propre à éveiller la curiosité des élèves sur ce sujet.

1. Deux poids, deux mesures.

Sous l'Ancien Régime, les unités et étalons de mesures étaient fort nombreux, et, le plus souvent différaient d'une région à l'autre. Les étalons étaient déposés dans les églises ou les palais seigneuriaux, sous la protection des autorités religieuses ou temporelles. L'extension du commerce au Moyen-âge fit ressentir le besoin d'unifier étalons et mesures. Au XVII^{ème} siècle, le développement scientifique et la centralisation du pouvoir rendirent ce besoin de plus en plus évident et ressenti par des groupes de plus en plus nombreux.

L'empereur Charlemagne avait déjà suggéré de choisir le "pied du Roi" ($\equiv$ 0,3248 mètre) comme étalon universel. Cette unité avait été adoptée par les ordres monastiques bâtisseurs, mais d'autres communautés continuaient à utiliser des unités diverses. En 1670, Gabriel Mouton, abbé de Lyon suggéra de choisir pour unité universelle le "milliare", le soixantième du degré de méridien, qui est devenu le mille marin (1,852 km). Mais malgré de nombreuses tentatives de ce genre, jusqu'à la Révolution française, jamais la volonté politique ne fut assez forte pour imposer une décision unificatrice face aux intérêts des seigneurs ou des corporations qui savaient tirer parti de la confusion. En 1789, les cahiers de doléances sont pleins de réclamations dans ce sens : "Que toutes les sortes de grains soient mesurées avec la même unité, pour ne pas léser les plus pauvres..."Plus de 800 unités différentes étaient en usage au XVIII^{ème} siècle: arpents pour les champs, perches pour les prés, daurées pour les vignes, aune-carrée pour les pièces d'étoffe, on pesait les fruits en poinçonnées, le blé au muid, le sel au setier, les poudres d'apothicaire à la livre, à l'once, en drachmes ou en scrupules... (cf. l'exercice de l'Annexe 1, pour le collège)

En 1790, l'Assemblée Constituante demande à l'académie des Sciences de déterminer un système de mesure qui puisse être accepté par le monde entier, sans particularité liée à aucune situation particulière. La commission, composée en particulier des mathématiciens et physiciens Lagrange, Laplace, Monge, Condorcet, du chimiste Lavoisier,... hésite sur différentes définitions possibles, rejette par exemple l'idée proposée pour la première fois par Picard au XVIIème siècle, de choisir la longueur du pendule battant la seconde, car cette longueur diffère selon les latitudes; la commission décide finalement de fixer pour unité de longueur la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre[1] et la nomme "mètre" (du grec metron, mesure). Cette définition témoigne de l'esprit égalitariste de la Révolution française, puisque sous les pieds de chaque être humain passe un méridien et que tous les méridiens sont égaux. L'Académie des Sciences se propose donc de remesurer une portion du méridien terrestre (à l'aide de l'étalon le plus précis dont les astronomes disposent à l'époque, la toise du Pérou, nommée ainsi, car elle avait été utilisée lors d'opérations géodésiques au Pérou quelques dizaines d'années plus tôt). L'unité de poids est définie à partir de l'unité de longueur puisque c'est le poids d'un cube de 0,1 mètre de côté d'eau distillée à la température de zéro degré[2]. On adopte également le principe de division décimale des unités (cf Annexe 3).

---

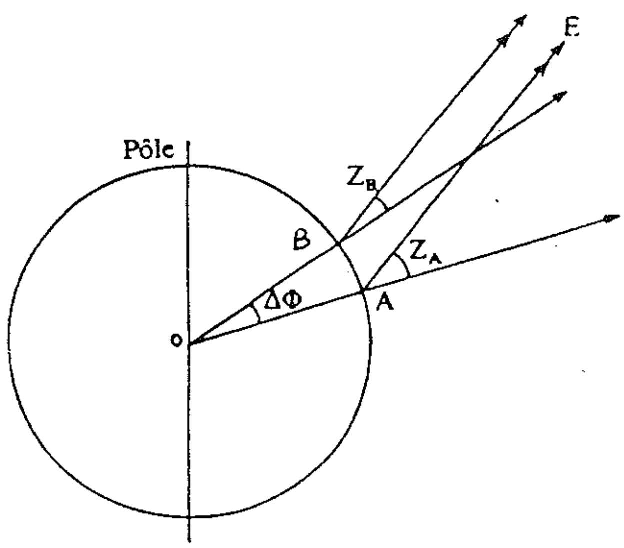
[1] Le méridien est alors défini comme tout grand cercle passant par les pôles.

[2] Les mesures expérimentales sont faites à basse température (environ 6°), par Lavoisier et Fortin, puis ramenées par des calculs théoriques à 0°. Quelques années plus tard, le kilogramme sera défini de la même façon, mais en prenant l'eau à 4°, température de densité maximale de l'eau.

2. La mesure de la terre avant 1789.

La mesure du méridien terrestre avait déjà été faite précédemment de façon plus ou moins précise. Aristarque, qui, au IVème siècle avant J.C., défendait un système héliocentrique du monde avait estimé à 400000 stades ($\simeq$ 63000 km) la circonférence de la terre; Archimède donnait pour estimation 300000 stades, mais on ne connaît rien de leurs méthodes. La plus ancienne méthode connue est celle d'Eratosthène d'Alexandrie, au IIIème siècle avant J.C. Il a mesuré la distance entre Syène (Assouan aujourd'hui) et Alexandrie, deux villes situées approximativement sur le même méridien, mesuré l'angle $\Delta\Phi$, égal à la différence de latitude entre les deux villes, et il en a déduit la circonférence de la terre, environ équivalente à 39000 km. La qualité de l'approximation est excellente, probablement par un heureux hasard, les différentes erreurs se compensaient. (cf. encadré ci-dessous et texte de Duhem en Annexe 2)

La méthode d'Eratosthène



Des points A et B on vise la même étoile E (le soleil pour Eratosthène). L'étoile E étant très éloignée, on considère que les rayons de visée sont parallèles.

Question 1 :

Démontrer que $\Delta\Phi = Z_A - Z_B$

Question 2 :

Connaissant $\Delta\Phi$ et la longueur de l'arc AB, comment peut-on en déduire la circonférence de la terre ?

La mesure de la terre était le souci des cartographes, mais aucune mesure précise du méridien ne fut tentée avant 1669, année où Colbert demanda à l'Académie des Sciences nouvellement créée, de dresser une carte du Royaume. L'astronome Picard fut chargé de mesurer la distance entre Sourdan et Malvoisine, correspondant à un degré du méridien de Paris. (fig. 2). Louis XIV remercia ces Messieurs de l'Académie pour la carte de France qu'ils établirent, bien que, en conclusion de leurs calculs et observations, le territoire de son royaume se révélât moins étendu que ce que laissaient croire les cartes précédentes. (cf figure p. 60)

Picard appliqua la méthode de triangulation inventée par le mathématicien flamand Frisius, et appliquée vers 1617 par Snellius qui travailla toute sa vie à l'établissement d'une carte des Pays Bas. Les mesures de longueurs sont beaucoup plus difficiles à réaliser que les mesures d'angles; c'est pourquoi on avec le maximum de précision qu'une seule petite distance appelée base, sur laquelle s'appuie une chaîne de triangles dont on ne mesure que les angles. Picard mesura la distance Juvisy-Villejuif, d'environ 11km, puis les angles d'une chaîne de 13 triangles. A l'aide de la formule $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, il put calculer les côtés des triangles et leurs projections sur la ligne méridienne. Les côtés des triangles étaient d'environ 40km de long. Picard utilisait, pour mesurer les angles, un quart de cercle dont le rayon était d'environ un mètre; la précision des mesures était d'environ 5 secondes par degré d'angle.

La première activité proposée à nos élèves fut d'utiliser la page ci-jointe du rapport de Picard pour calculer, en toises, la distance GE [3].

34 *Meſure de la Terre,*

qui ne donnoient les minutes que de ſix en ſix, ils n'ont pas laiſſé d'approcher de la juſteſſe autant qu'il étoit néceſſaire, pour faire voir qu'on ne s'étoit pas trompé aux concluſions.

I. TRIANGLE ABC.
Pour connoître le côté AC.

C A B.........54°....4'...35".
A B C.........95....6....55.
A C B.........30...48....30.
A B......5663..*Toiſes de meſure actuelle.*
Donc A C......11012..*Toiſes 5 pieds.*
Et B C......8954...*Toiſes.*

II. TRIANGLE ADC.
Pour DC *&* AD.

D A C.........77°....25'..50".
A D C.........55.......0...10.
A C D.........47....34....0.
A C.....11012..*Toiſes 5 pieds.*
Donc D C.....13121..*Toiſes 3 pieds.*
Et A D......9922..*Toiſes 2 pieds.*

III. TRIANGLE DEC.
Pour DE *&* CE.

D E C.........74°...9'..30".
D C E.........40...34....0.
C D E.........65...16...30.
D C.....13121...*Toiſes 3 pieds.*
Donc D E......8870...*Toiſes 3 pieds.*
Et C E.....12389...*Toiſes 3 pieds.*

par M. l'Abbé Picard. 35

IV. TRIANGLE DCF.
Pour DF.

D C F.........113°....47'...40".
D F C.........33....40.......0.
F D C.........32....32....20.
D C......13121....*Toiſes 3 pieds.*
Donc D F......21658....*Toiſes.*

Notez que dans ce quatriéme triangle, l'angle DFC a été augmenté de 10", qui manquoient à la ſomme des trois angles.

V. TRIANGLE DFG.
Pour DG *&* FG.

D F G.........92°....5'...20".
D G F.........57....34.......0.
G D F.........30....20....40.
D F.....21658....*Toiſes.*
Donc D G......25643....*Toiſes.*
Et F G......12963....*Toiſes 3 pieds.*

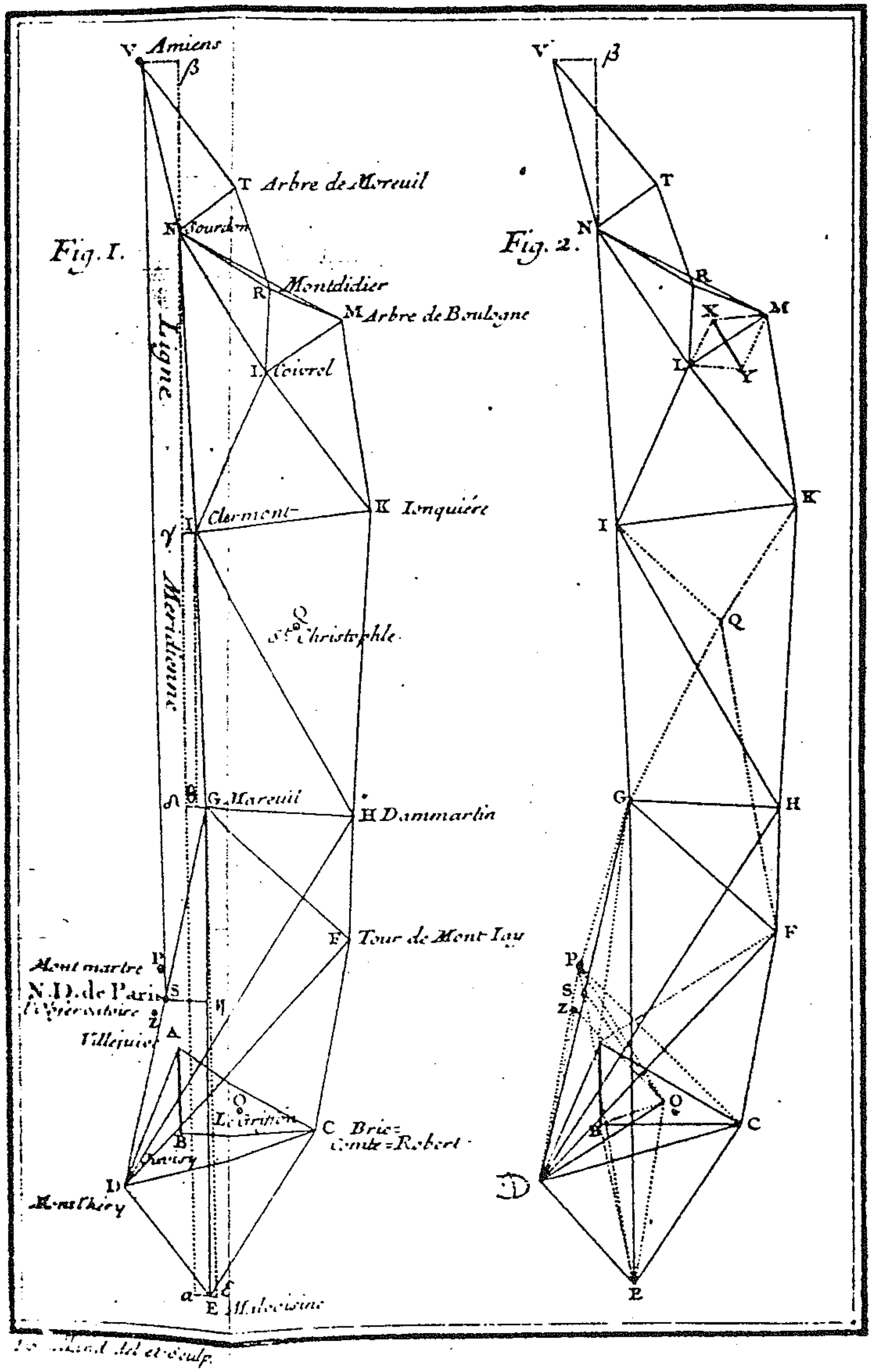
Enſuite de ces cinq triangles, il a été facile de conclure la diſtance GE entre Malvoiſine & Mareuil, ſans ſuppoſer aucune nouvelle Obſervation.

N.B. Une toise vaut 6 pieds; son équivalent en mètres est environ 1,949.

Picard estima le degré de méridien à 57060 toises, ce qui correspond à environ 111,210 km (la toise utilisée par Picard était d'environ 1,949 m). La valeur exacte du degré de méridien est de 111,111...km. De nouvelles mesures furent faites au 18ème siècle par plusieurs membres de la famille des Cassini, astronomes à l'Observatoire de Paris, la dernière fut réalisée en 1740 par La Caille.

[3] Une activité intéressante en 6ème consiste à faire construire "à l'échelle" la chaîne des triangles déterminée par les données de la page de Picard puis de mesurer sur la figure la distance GE et d'en déduire sa valeur en toises.

Mesure de la Terre de Mr Picard. Planche II. Page 110.

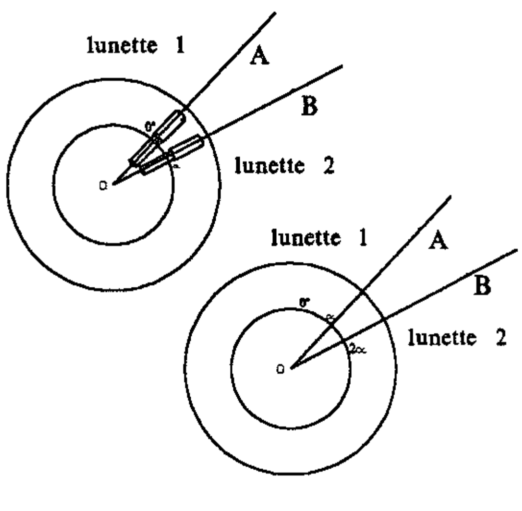


... Del. et Sculp.

3. La mesure du méridien par Delambre et Méchain.

Les mesures du méridien réalisées par La Caille devaient être revérifiées pour permettre une définition acceptable du mètre. Ce furent les astronomes Pierre Méchain et Jean-Baptiste Delambre qui en furent chargés. Leurs opérations durèrent 7 ans, de 1792 à 1799, elles furent entravées par toutes sortes de difficultés: outre les difficultés naturelles, les inégalités du terrain, dans les Pyrénées en particulier, les intempéries, Méchain tomba très malade, il fut même temporairement paralysé; la guerre fut déclarée entre la France et l'Espagne; les astronomes furent pris pour des espions, parfois pour des contre-révolutionnaires; ils furent arrêtés, emprisonnés, leurs signaux de mesures furent détruits à plusieurs reprises... Leurs aventures sont racontées par Denis Guedj dans "la Méridienne".

Les instruments de mesure avaient été améliorés depuis la dernière mesure de La Caille; Delambre et Méchain commandèrent à l'ingénieur Lenoir des "cercles-répétiteurs", instruments qu'il avait construits en 1784 pour les mesures concernant la jonction entre les méridiens de Greenwich et de Paris, sur une idée de l'astronome allemand Tobie Mayer, adaptée par Borda à la mesures des angles terrestres. Le résultat de la mesure d'un angle est toujours entaché d'erreurs. Parmi celles-ci, on peut citer les erreurs de pointé, les erreurs de lecture et les erreurs de division du limbe (cercle gradué). Pour diminuer ces erreurs, il a été fait usage du cercle répétiteur (cf. fig 4). L'avantage de ce cercle est d'atténuer considérablement les erreurs de division et les erreurs de lecture. En effet, la méthode de répétition consiste à prendre plusieurs mesures successives du même angle sur le cercle horizontal de l'instrument en ajoutant successivement les arcs mesurés aux précédents, sans jamais revenir au zéro de la graduation, et en divisant la dernière mesure lue par le nombre de répétitions exécutées. [4]



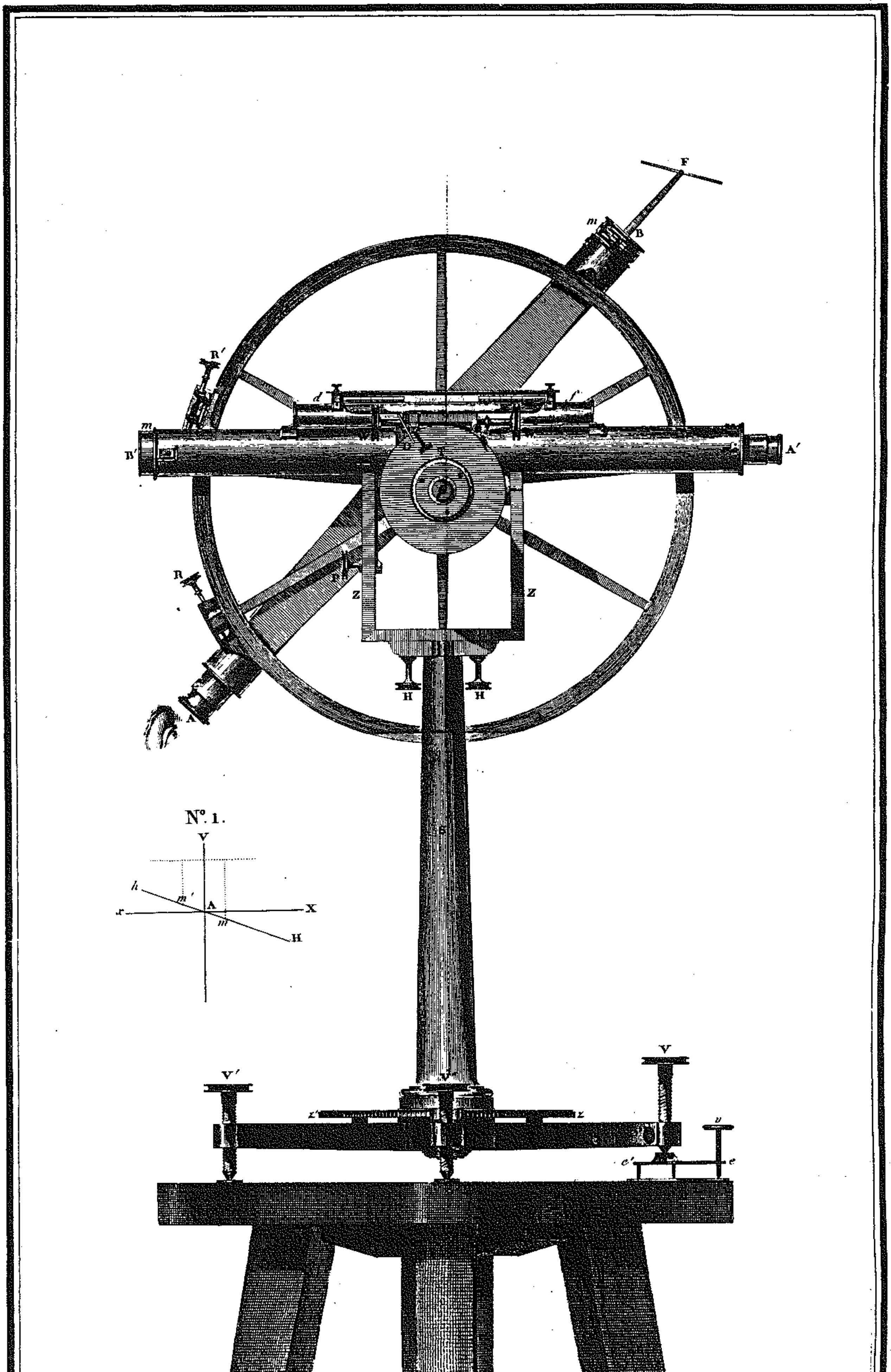
L'angle AOB est visé n fois: la lunette 1, placée en face de la graduation 0, vise d'abord le point A ; la lunette 2 vise le point B; (si la lecture était faite immédiatement, la graduation lue serait α); puis la lunette 2, rendue temporairement solidaire du limbe vise A et la lunette 1 vise B (la graduation lue serait alors $\cong 2\alpha$), etc.;

Deux lectures seulement sont faites, une au début et l'autre à la fin.

Le limbe entier ou en grande partie est utilisé, ce qui permet de compenser les erreurs de division résultant de la graduation du limbe.

Laplace recommande de faire trois séries de vingt répétitions.

[4] Avec le cercle répétiteur, la mesure se fait dans le plan de l'angle, d'où la nécessité ensuite de faire une réduction à l'horizon.



ECHELLE { de 1 2 3 4 5 Décimètres.
{ de 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 Pouces.

On peut lire dans le dernier paragraphe du document ci-joint, extrait du rapport de Delambre, *"Base du système métrique décimal"*, 36 puis 18 mesures successives du même angle, angle entre le Panthéon et Dammartin et dont le sommet est le clocher de Saint Martin du Tertre.

SAINT-MARTIN DU TERTRE.

St.-Martin du Tertre.

XXII.

Le clocher de Saint-Martin du Tertre a été rebâti en 1745, c'est-à-dire environ cinq ans après les opérations de la *Méridienne vérifiée*. Déja cependant il menace ruine. Il n'est pas à la même place que l'ancien clocher. $dH = 3^{t}5$.

La charpente est dans le plus mauvais état, et nous ne pouvions faire le moindre mouvement sur notre échafaud sans faire tout trembler. Cette station d'ailleurs a été très-rude par les vents impétueux et les pluies continuelles.

Entre Dammartin et Saint-Christophe.
Cinquième série.

24 $1502^{g}243$ $62^{g}5934583 = 56°\ 20'\ 2''8$

F. et B. n° 1. Cette dernière série paroit devoir mériter la préférence. Je n'y ai pas pris de part moi-même. La taille du citoyen le Français se prêtoit mieux à l'espace que nous avions, et lui permettoit de faire porter le poids de son corps sur les auvents du clocher. Aussi les deux séries qu'il a observées s'accordent très-passablement avec la dernière, dans laquelle les deux observateurs ont toujours conservé la même position.

St.-Martin du Tertre.

$r = 0^{t}5$ $y = 296°\ 3'\ 50''$	+ 6″2
Centre	56° 20′ 9″0
	+ 0″41
Horizon	56° 20′ 9″41

Entre le Panthéon et Dammartin.

36	$3041^{g}629$	$84^{g}48969$	= 76° 2′ 26″6	D. puis B.
18	$1520^{g}817$	$84^{g}48986$	= 76° 2′ 27″06	F. n° 1.
			76° 2′ 26″83	
$r = 0^{t}21181$	$y = 6°\ 56'\ 53''$		+ 2″48	
			76° 2′ 29″31	
20	$1689^{g}792$	$84^{g}4896$	= 76° 2′ 26″30	D. n° 1.
$r = 0^{t}37153$	$y = 10°\ 51'\ 10''$		+ 3″98	
			76° 2′ 30″28	
Première série			76° 2′ 29″08	
Seconde série			76° 2′ 29″54	
Moyenne			76° 2′ 29″63	
			+ 1″20	
Horizon			76° 2′ 30″83	

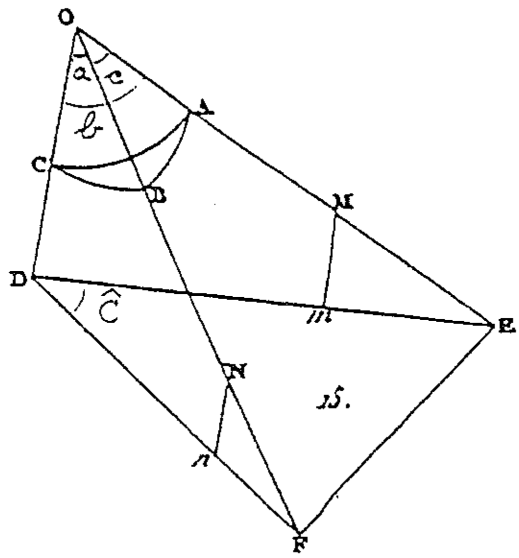
La lecture et l'explicitation de ce document constitue l'activité suivante proposée à nos élèves :

- la première ligne indique que Delambre (noté D.) puis son adjoint Bellet (B.) ont réalisé 36 mesures de l'angle qui a pour sommet le clocher de St Martin du Tertre et pour côtés les directions du Panthéon et de Dammartin. Le cercle répétiteur indique 3041,629 grades[5]; la 36ème partie, 84,48969, convertie en degrés vaut 76° 2' 26" 6 La seconde ligne indique que Le Français (F), autre collaborateur de Delambre a fait une série de 18 mesures du même angle avec le premier cercle-répétiteur (n°1) dont la moyenne est 76° 2' 27" 06. La moyenne des deux mesures de l'angle est faite à la troisième ligne. Une série supplémentaire de 20 mesures de l'angle est encore reprise par Delambre avec ce même cercle-répétiteur (D. n°1), mentionnée à la ligne 6.

- Une correction, intitulée "réduction au centre" est effectuée aux lignes 4 et 7. C'est le cas lorsque le cercle répétiteur ne peut, pour des raisons pratiques, être exactement placé au centre C de la station (clocher d'église, sommet de tour par exemple); c'est ce point qui a été visé depuis le sommet précédent de la chaîne de triangles et qui servira également de mire aux mesures suivantes. Delambre calcule la différence entre l'angle effectivement mesuré AOB et l'angle théorique ACB. L'activité suivante étudie et démontre la formule de correction.

- sur les dernières lignes figure une correction intitulée "réduction à l'horizon", nécessaire lorsque l'angle mesuré c n'est pas situé dans un plan horizontal. Delambre calcule alors la mesure de la projection C sur le plan horizontal de l'angle c, à l'aide d'une formule qui a été établie sur la demande spécifique de Delambre, par le mathématicien Legendre, par l'intermédiaire de la trigonométrie sphérique.

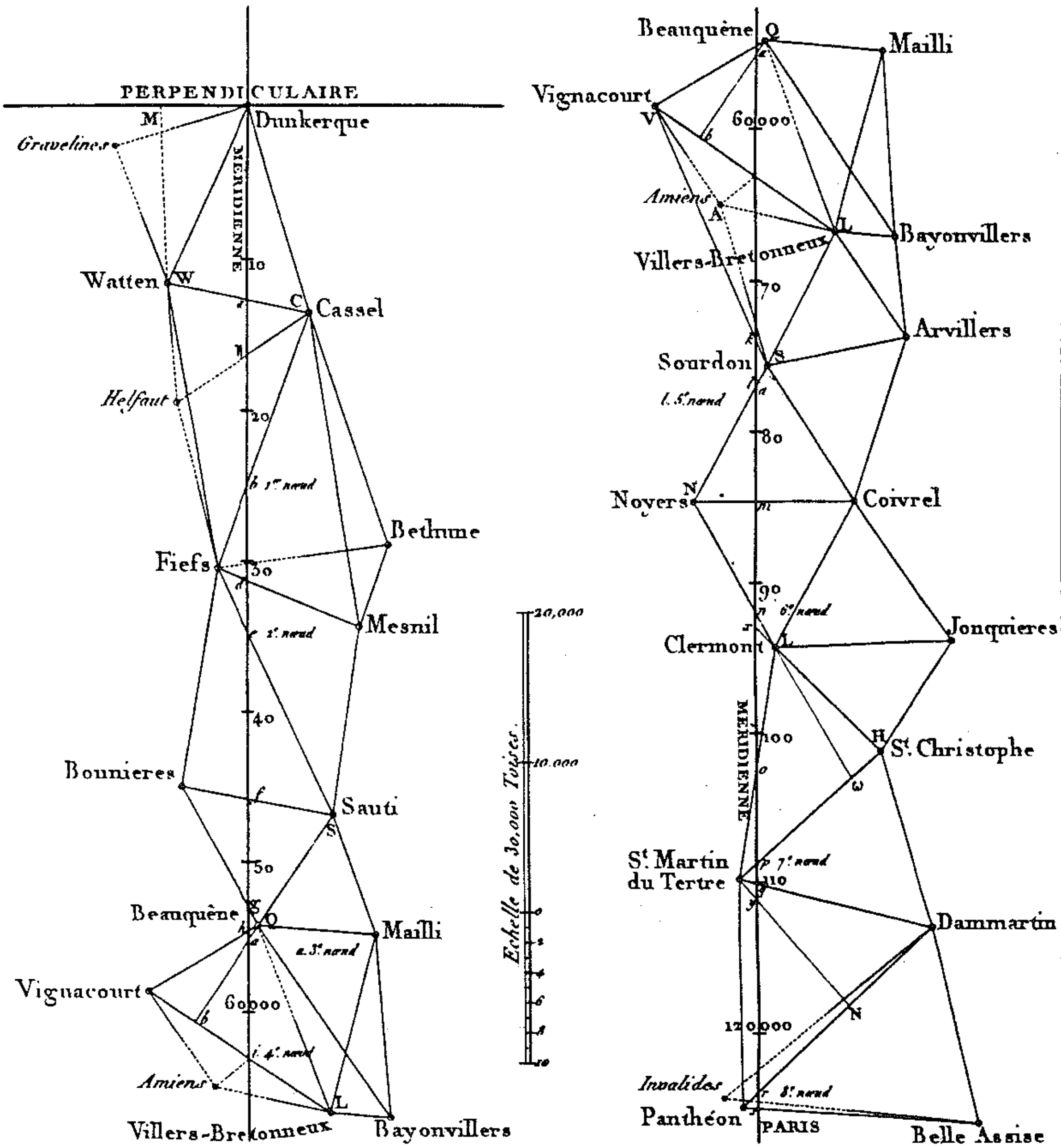
$$\sin^2 \frac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{a - b + c}{2} \sin \frac{b + c - a}{2}}{\sin b \ \sin a}$$



- d'autres corrections ont encore été pratiquées par Delambre, qui n'apparaissent pas dans cette page du Rapport; en particulier, celles qui tiennent compte de la sphéricité de la terre. (cf Annexe 4)

[5] La mesure décimale des angles en grades avait été également instituée par la commission des Poids et Mesures, mais les tables de sinus à la disposition des astronomes n'existaient que pour des angles mesurés en degrés.

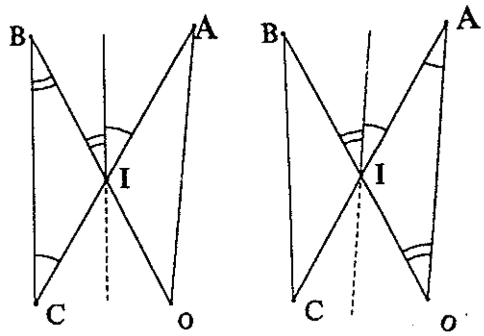
CHAINE DES TRIANGLES
de Dunkerque à Barcelone
mesurée par MM. Delambre et Méchain.



Étude de la "Réduction au centre"

Le point C est la position du signal visé dans les mesures précédentes (clocher, sommet de tour ou de montagne, ...). Il est appelé centre de la station. S'il n'est pas accessible pour y poser le cercle répétiteur, on place celui-ci en un point O, le plus proche possible de C. L'angle mesuré est donc AOB (noté O), alors que l'angle dont on doit tenir compte dans la chaîne des triangles est ACB, noté C. On pose r = OC, y = BOC , O = AOB , G = BC , D = AC $\quad\quad$ Δ // (BC) $\quad$ Δ'//(AO)

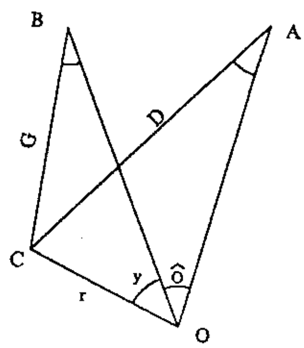
1) Montrer que $\hat{C} = \hat{O} + \hat{A} - \hat{B}$ en utilisant les angles auxiliaires introduits dans la figure.



2) En utilisant la formule des sinus, montrer que $\sin B = \dfrac{r \sin y}{G}$ et que $\sin A = \dfrac{r \sin (O+y)}{D}$

3) Si les angles A et B étaient mesurés en radians, et puisqu'ils sont petits (la distance OC est très petite par rapport aux distances CA et CB de l'ordre de 40km), on pourrait écrire $\sin A \cong A$ et $\sin B \cong B$.

Si x" est la mesure en secondes d'un angle, quelle est sa mesure en radians ?
Considérons un angle d'une seconde ; sa mesure en radians y peut être confondue avec son sinus.
Donner donc une approximation de sin1".
En déduire l'approximation $\sin x'' \cong x \sin 1''$



4) En déduire la formule approchée de réduction au centre

$$ACB \approx O + \frac{r \sin (O+y)}{D \sin 1''} - \frac{r \sin y}{G \sin 1''}$$

Vérifier la correction faite par Delambre (au milieu de la p.68, r=o^{t}5 y=296°3' 50" $\quad$ +6"2) en prenant pour G et D une approximation des distances BC et AC estimées à l'aide de l'échelle de la carte.

4. Les conclusions de Delambre et Méchain et leur postérité.

Les deux astronomes présentent leurs conclusions en 1799 à une commission de scientifiques de diverses nations d'Europe, correspondant à l'Italie, l'Espagne, le Portugal, la Suisse, au Danemark, aux Pays-Bas d'aujourd'hui. Ceux-ci approuvent, après trois mois d'étude soigneuse des rapports de Delambre et Méchain, leur définition du mètre et du kilogramme. Des étalons en platine doivent être construits. Le nouveau mètre mesure 3 pieds 11296 lignes de la Toise du Pérou. Le système métrique est institué. Le consul Bonaparte est favorable à son adoption, mais empereur, il transige et autorise également l'usage des anciennes mesures; à la Restauration, la monarchie rétablit l'usage des anciennes mesures. Mais en 1837 l'usage du système métrique devient obligatoire en France. En 1869, une commission internationale du Mètre réunit plus de trente nations et les étalons français en platine iridié sont adoptés par tous les participants. Pour répondre aux exigences croissantes de précision des recherches les plus variées, le mètre est, en 1960, redéfini comme 1650763,73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation émise entre deux niveaux du krypton 86. Les performances des lasers étant supérieures à celles des lampes à krypton, le mètre reçoit, en 1983, une nouvelle définition: la distance que traverse la lumière dans le vide en 1/299792458 de seconde.[6]

Bibliographie

Delambre *Base du système métrique décimal*, Paris 1806 - 1810

Legendre A.M. *Éléments de Géométrie* , Paris , 1794

Picard *La mesure de la terre* , 1671

Boyé A. , Lefort X. *Mesurer aussi bien la terre que le ciel* , IREM des Pays de Loire, 1991

Guedj D. *La méridienne*, Seghers, 1987

Guedj D. *La révolution des savants.* Découvertes Gallimard 1989

Lefort X. *L'histoire de la carte de France de Cassini. Un P.A.E. interdisciplinaire d'histoire des mathématiques en classe de seconde.* Repères IREM n°14, janvier 1994.

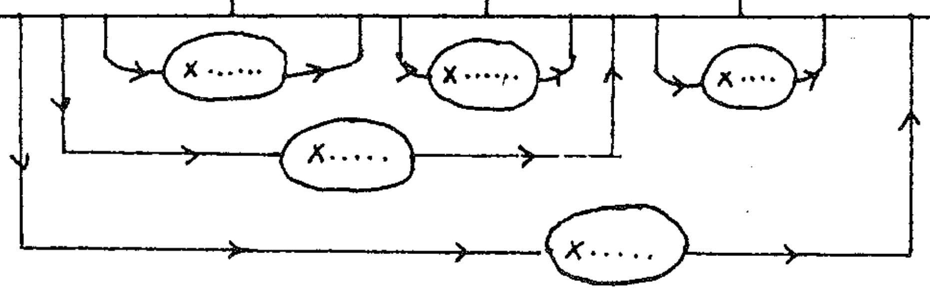
Observatoire de Paris *Une mesure révolutionnaire: le mètre.* Paris, 1988

[6] Depuis 1967, la seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

ANNEXE 1

NOMS des ANCIENNES MESURES.	LEUR VALEUR en LITRES.
N.° 1.	litres.
La barrique de vin de 100 pots . . .	196,900.
Le pot de 2 bouteilles ou de 6 roquilles ou de 3 grands pintons.	1,969.
La bouteille de 2 petits pintons . . .	0,984.
La velte d'huile de 4 pots	7,876.
2.	
La barrique de 80 pots.	204,640.
Le pot de 2 bouteilles.	2,558.
La bouteille	1,279.
3.	
La barrique de 105 pots	210,000.
Le pot de 2 bouteilles ou de 3 pouchons.	2,000.
La bouteille	1,000.

	barrique	pot	bouteille	velte d'huile
valeur en litres				



ANNEXE 2 : J. Duhem , *Le système du monde* (tome 2) , Hermann, Paris 1965 , p.5 et 6.

Au temps d'Archimède, la circonférence terrestre avait été déjà l'objet d'une mesure beaucoup plus exacte que celle dont se contente le géomètre syracusain ; l'auteur de cette mesure était Ératosthène.

Né dans la cité africaine de Cyrène 275 ans avant J.-C., Ératosthène étudia à Alexandrie, puis à Athènes ; il revint à Alexandrie, appelé par Ptolémée III Évergète qui l'attacha à sa cour ; en 236, il fut mis à la tête de la célèbre bibliothèque ; ayant perdu la vue en 195, il se laissa, en 194, volontairement mourir de faim.

Les renseignements les plus sûrs que nous ayons sur l'opération par laquelle Ératosthène a mesuré un arc du méridien terrestre sont ceux de Cléomède ; il les tirait sans doute des écrits de Posidonius et nous les a conservés [2] dans sa *Théorie du mouvement circulaire des corps célestes*.

Selon le récit de Cléomède, Ératosthène aurait supposé, comme point de départ de sa détermination, que les deux villes de Syène et d'Alexandrie étaient sous le même méridien et qu'elles étaient distantes de cinq mille stades. Il aurait admis aussi ce postulat : On peut regarder comme parallèles entre eux tous les rayons envoyés par n'importe quel point du Soleil à n'importe quel point de la Terre ; « car les mathématiciens font l'hypothèse que ces rayons se comportent ainsi », ajoute Cléomède ; et, en effet, cette hypothèse équivaut bien à l'une de celles qu'Aristote prend soin d'attribuer explicitement aux mathématiciens qui ont mesuré la circonférence terrestre.

Syène, selon Ératosthène, est exactement située sous le tropique du Cancer ; au jour du solstice d'été, à midi, les gnomons ne portent aucune ombre ; le Soleil est au zénith. Le même jour et à la même heure, un gnomon dressé à Alexandrie [3] porte une ombre dont la longueur, comparée à la hauteur de la tige de l'appareil, permet de connaître la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon. Selon le récit de Cléomède, il s'en faut du cinquantième de quatre angles droits que cette hauteur atteigne 90° ; c'est donc là la différence de latitude entre Syène et Alexandrie.

Dès lors, l'arc qui sépare ces deux villes, et dont la longueur connue est de cinq mille stades, représente un cinquantième du méridien terrestre, en sorte que la longueur même de ce méridien est de 250.000 stades.

Dans ce récit de Cléomède, nous reconnaissons aisément non le procès-verbal minutieusement détaillé des mesures qu'Ératosthène a dû réellement effectuer, mais un exposé grandement simplifié. Syène et Alexandrie sont, pour la commodité du raisonnement, supposées sous le même méridien alors que les longitudes de ces villes diffèrent de plus de 3°. La distance des deux cités, leur différence de latitude sont présentées sous forme de nombres ronds. Il est clair que nous avons sous les yeux une exposition accommodée au goût de lecteurs qui aiment la simplicité.

Quelles furent les observations réellement faites par Ératosthène ? Quelles précautions prit-il pour les rendre aussi exactes que possible ? Le rapport de Cléomède nous le laisse ignorer. Nous en sommes réduits à admirer la justesse du résultat obtenu par Ératosthène sans connaître les raisons qui l'expliquent. Elle est bien remarquable, d'ailleurs, cette justesse ; si, comme il est vraisemblable , le stade d'Ératosthène valait 157 mètres 50 centimètres, la mesure du géomètre de Cyrène attribue au méridien terrestre 39.375 kilomètres au lieu de 40.000.

2. Cleomedis *De motu circulari corporum caelestium* lib. I, cap. X ; éd. Hermannus Ziegler, Lipsiae, 1891, pp. 90-103.

3. En réalité, Ératosthène a mesuré la hauteur du Soleil à Alexandrie à l'aide de la σκάφη, sorte de cadran solaire inventé par Aristarque de Samos.

ANNEXE 3 A.M. Legendre, *Eléments de géométrie* , traité de trigonométrie, 3ème éditon, 1800

Division de la circonférence.

1. Jusqu'à ces derniers temps les géomètres s'étoient accordés à diviser la circonférence en 360 parties égales appelées *degrés*, le degré en 60 *minutes*, la minute en 60 *secondes*, etc. Ce mode présentoit quelques avantages dans la pratique, à cause du grand nombre de diviseurs de 60 et de 360 : mais il entraînoit avec lui l'inconvénient des nombres complexes, et il nuisoit souvent à la rapidité du calcul.

Les savants, à qui on doit l'invention du nouveau système des poids et mesures, ont pensé qu'il y auroit un grand avantage à introduire la division décimale dans la mesure des angles. En conséquence ils ont regardé, comme unité principale, le quart de circonférence ou le *quadrans*, mesure de l'angle droit, et ils ont divisé cette unité en 100 parties égales appelées *degrés*, le degré en 100 *minutes*, et la minute en 100 *secondes*.

Nous n'emploierons désormais que la nouvelle division ou la division décimale de la circonférence. C'est celle qui convient le mieux à la nature de notre arithmétique, et qui est la plus propre à abréger les calculs.

ANNEXE 4

Lecture d'un extrait des *Eléments de Géométrie* de Legendre (1800), expliquant comment ramener la résolution d'un triangle sphérique très-peu courbe à celle d'un triangle rectiligne.

Ce théorème a été établi par Legendre à la demande de Delambre et Méchain:

> *Etant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles ainsi diminués deviendront les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique proposé.*

I Formules fondamentales de la trigonométrie sphérique (en forme d'exercice pour des classes de 1ère ou terminale).

Soient A, B, C, trois points d'une sphère Σ de centre O, n'appartenant pas à un même grand cercle.

<u>Définitions</u>:

1. On appelle triangle sphérique la portion de la surface de la sphère comprise entre 3 arcs de grands cercles, inférieurs à un demi-cercle. .

2. Ces arcs sont les côtés du triangle sphérique. On désignera, suivant l'habitude, la mesure de l'arc AB par c, celle de l'arc AC par b et celle de l'arc BC par a (ces mesures d'arcs sont égales aux mesures des angles au centre qui interceptent ces arcs)[7]. On peut donc écrire: cos BOC = cos a

3. Les angles du triangle sont les angles de plans. Ainsi, l'angle A est l'angle des plans (OAC) et (OAB). Cet angle est aussi égal à l'angle des tangentes en A aux grands cercles définissant les côtés.

1) Soit un triangle sphérique ABC d'une sphère Σ de centre O. On trace AO. La tangente en A à l'arc AB coupe la droite (OB) en K, la tangente en A à l'arc AC coupe la droite (OC) en H. On note A l'angle HAK.

a) Quelle est la nature des triangles HAO et KAO?

b) Compléter les formules suivantes:

$HK^2 = AH^2 + ... - 2 ....$

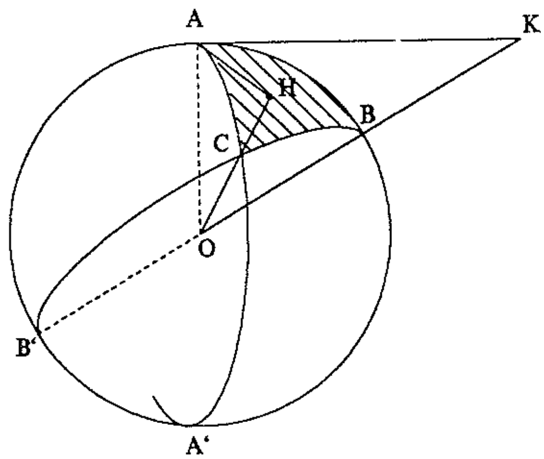
$HK^2 = HO^2 + ... - 2HO.KO...$

AK = ...tan c AH = AO....

OK = AO/... OH = AO/...

c) En déduire que : $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

d) Ecrire deux autres formules analogues.



2) Soit une sphère Σ de centre O et un triangle sphérique ABC. On appelle L la projection orthogonale de A sur le plan (OBC). On appelle M et N les projections orthogonales de L sur (OB) et sur (OC).

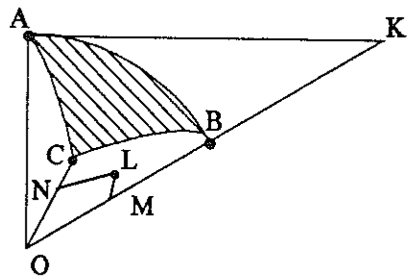
a) Comparer l'angle ANL et l'angle C du triangle sphérique. Comparer l'angle AML et l'angle B.

c) Etablir que AL = R sin c sin B

AL = R sin b sin C

N.B.On peut ainsi établir les formules classiques:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$



---

[7] On sera attentif au fait que, dans le texte de Legendre, a, b, c désignent les longueurs des côtés du triangle sphérique , c'est -à-dire des longueurs d'arcs de grands cercles, et non les mesures des arcs , qui sont alors égales , en radians, à $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ où r désigne le rayon de la sphère. Sur une sphère de rayon 1 et lorsque les angles sont mesurés en radians, la mesure de l'arc est égale à la longueur de l'arc.

II Etude du théorème de Legendre

Pour cette partie, on a besoin des développements limités des fonctions sinus et cosinus. Les élèves de lycée peuvent suivre les calculs en utilisant des approximations polynomiales de ces fonctions

§. V. *Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.*

cv. Lorsque les côtés a, b, c, sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, le triangle proposé est peu différent d'un triangle rectiligne; et, en le considérant comme tel, on peut en avoir une première solution approchée, mais

on néglige de cette manière l'excès de la somme des angles sur 200°. Pour avoir une solution plus approchée, il faut tenir compte de cet excès, et c'est ce qu'on peut faire très-aisément, au moyen d'un principe général que nous allons démontrer.

Soit r le rayon de la sphère sur laquelle est situé le triangle proposé; si l'on imagine un triangle semblable tracé sur la sphère dont le rayon est 1, les côtés de ce triangle seront $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$, et on aura $\cos A = \dfrac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$. Mais puisque r est fort grand par rapport à a, b, c, on aura d'une manière très-approchée, $\cos\frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2.3.4r^4}$, $\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2.3.4r^4}$, $\cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{2.3.4r^4}$, $\sin\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{2.3r^3}$, $\sin\frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{2.3r^3}$. Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et négligeant les termes où b et c ont plus de quatre dimensions, on aura

$$\cos A = \frac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \dfrac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \dfrac{b^2c^2}{4r^4}}{\dfrac{bc}{r^2}\left(1 - \dfrac{b^2}{6r^2} - \dfrac{c^2}{6r^2}\right)}.$$

Multipliant les deux termes de cette fraction par $1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}$, et réduisant, on aura

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2}$$

(1) il s'agit ici de degrés décimaux (c'est-à-dire de grades) et non de degrés sexagésimaux.
a, b, c sont les longueurs des côtés ; $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ sont les longueurs d'arcs sur la sphère de rayon 1 ou les mesures des arcs en radians.

(2) il est évident qu'à partir d'ici, les angles et les arcs sont considérés comme mesurés en radians, pour utiliser les développements limités de cosinus et sinus .

Soit maintenant A' l'angle opposé au côté a, dans le triangle rectiligne dont les côtés seroient égaux en longueur aux arcs a, b, c; on aura $\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ et $4b^2c^2 \sin^2 A' = 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$. Donc

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2} \sin^2 A'$$

Soit $A = A' + x$, on aura en rejetant le quarré de x, $\cos A = \cos A' - x \sin A'$, d'où l'on voit que $x = \frac{bc}{6r^2} \sin A'$.

et puisque x est du second ordre par rapport à $\frac{b}{r}$ et $\frac{c}{r}$, il s'ensuit que ce résultat est exact aux quantités près du quatrième ordre. On aura donc

(3) x est très petit,

donc cos x ≃ 1 et sinx ≃x

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2} \sin A'$$

Mais $\frac{1}{2} bc \sin A'$ est l'aire du triangle rectiligne dont a, b, c sont les trois côtés, laquelle ne diffère pas sensiblement de celle du triangle sphérique proposé. Donc, si l'une ou l'autre aire est appelée α, on aura $A = A' + \frac{\alpha}{3r^2}$, ou $A' = A - \frac{\alpha}{3r^2}$.

On auroit semblablement $B' = B - \frac{\alpha}{3r^2}$, $C' = C - \frac{\alpha}{3r^2}$, et il en résulte $A'+B'+C'$ ou $2c0° = A+B+C-\frac{\alpha}{r^2}$. On peut donc considérer $\frac{\alpha}{r^2}$ comme étant l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits. Cela posé, on a ce théorême remarquable qui réduit la résolution des triangles sphériques très-petits, à celle des triangles rectilignes.

(4) remarquons qu'il faudrait écrire

$2\pi = A + B + C - \frac{a}{r^2}$,

puisque $\frac{a}{r^2}$ est exprimé en radians.

Etant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles ainsi diminués deviendront les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique proposé, ou en d'autres termes :

Le triangle sphérique très-peu courbe dont les angles sont A, B, C, *et les côtés opposés* a, b, c, *répond toujours à un triangle rectiligne qui a les côtés de même longueur* a, b, c, *et dont les angles opposés sont* $A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $C - \frac{1}{3}\varepsilon$, ε *étant l'excès de la somme des angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits.*

CVI. L'excès ε ou $\frac{\alpha}{r^2}$, qui est proportionnel à l'aire du triangle, peut toujours se calculer *a priori* par les données du triangle sphérique considéré comme rectiligne. Si deux côtés b, c, sont donnés avec l'angle compris A, on aura l'aire $\alpha = \frac{1}{2} bc \sin A$; si on donne un côté a et les deux angles adjacents B, C, on aura l'aire $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}$.

Ensuite

on aura $\varepsilon = \frac{\alpha}{r^2} R$, R étant le nombre de secondes comprises dans le rayon, et de cette manière ε sera exprimé en secondes.

Si on veut appliquer ces formules aux triangles tracés sur la surface de la terre, considérée comme sphérique (1), il faudra supposer que les côtés a, b, c, ainsi que le rayon de la terre r sont exprimés en mètres. Or, puisque le quart du méridien $\frac{1}{2}\pi r$ est égal à 10000000 mètres, on en conclut log. $r = 6.8038801$; d'un autre côté le rayon R exprimé en secondes, a pour logarithme 5,8038801. Donc si au logarithme de l'aire α exprimée en mètres quarrés, on ajoute le logarithme constant 2.196119, et qu'on retranche 10 unités de la somme, on aura le logarithme de l'excès ε exprimé en secondes.

Connoissant ε on retranchera ou on supposera retranché $\frac{1}{3}\varepsilon$ de chaque angle du triangle sphérique proposé, et alors dans le triangle rectiligne formé par les côtés a, b, c, et les angles $A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B' = B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $C' = C - \frac{1}{3}\varepsilon$, on aura les données nécessaires pour en déterminer toutes les parties. Ainsi on connoîtra en même temps celles du triangle sphérique proposé.

(5) R est le coefficient de proportionalité permettant de passer des radians en secondes. R est en fait, la mesure en "secondes" d'un arc de grand cercle terrestre dont la longueur est celle du rayon. la "seconde" ici employée est une seconde décimale (10^{-4} grade). On obtient ainsi $R = \frac{2}{\pi} 10^6$

r étant la mesure en mètres du rayon de la terre, on a $r = \frac{2}{\pi} 10^7$, d'où l'on tire $\log R = \log r - 1$

(le logarithme utilisé étant le logarithme décimal). Ainsi $\log r \simeq 6{,}80388016$ $\quad \log R \simeq 5{,}8038801$

Par ailleurs, $\varepsilon = \frac{\alpha R}{r^2} = \frac{100\pi}{2} \alpha 10^{-10}$ d'où $\log\varepsilon = \log \frac{100\pi}{2} + \log \alpha - 10$

Legendre appelle "logarithme constant" le nombre $\log \frac{100\pi}{2} \simeq 2{,}196119$ et obtient ainsi une relation directe entre $\log \varepsilon$ et $\log \alpha$.

<u>Exemple</u> : C = 123° 19' 99,23" $\quad \log a \simeq 4{,}5891503 \quad \log b \simeq 4{,}5219271$

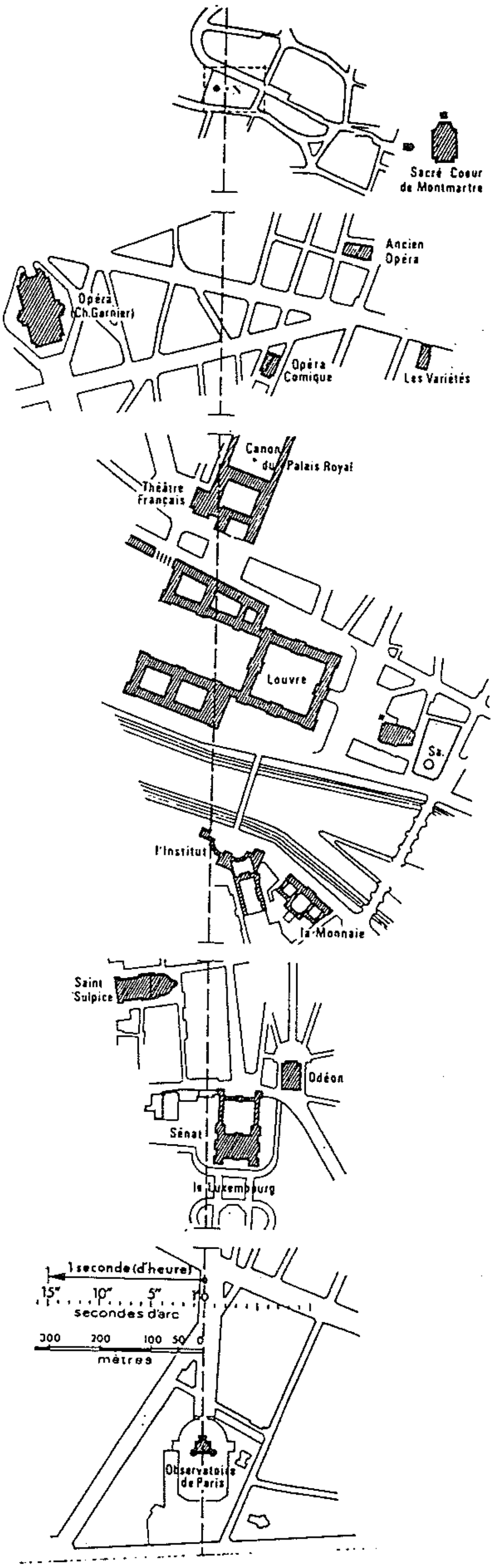
$\log (\frac{1}{2} ab\sin C) = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2 \simeq 8{,}78055$

$\log \varepsilon \simeq 2{,}196119 + 8{,}78055 - 10 \simeq 0{,}97667$ donc $\varepsilon \simeq 9{,}48$ secondes ; $(1/3)\varepsilon \simeq 3{,}24$ secondes

et puisque $C' = C - (1/3)\varepsilon$; on obtient C' = 123° 19' 96,07"

Question subsidiaire:

Évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur commise lorsqu'on confond A et A' dans le cas où r est le rayon de la terre et où b et c sont les côtés des triangles d'une triangulation du premier ordre c'est-à-dire valent à peu-près 40 km. Les approximations faites par Legendre sont-elles justifiées ?



traversée de Paris par son méridien, au Nord de l'Observatoire.