

# HISTOIRE DE QUELQUES PROJECTIONS CARTOGRAPHIQUES

Marie Benedittini (enseignante à Paris 8-Vincennes)

La géographie est une des sciences qu'il faudra toujours perfectionner. Quelque peine qu'on ait prise, il n'a pas été possible jusqu'à présent d'avoir une description exacte de la Terre. Il faudrait que tous les souverains s'entendissent et se prêtassent des secours mutuels pour ce grand ouvrage. Mais ils se sont presque toujours plus appliqués à ravager le monde qu'à le mesurer.

Voltaire (Dictionnaire philosophique (1764))

La science maîtrisée qu'est la cartographie<sup>1</sup> aujourd'hui nous fait oublier qu'elle a eu une longue histoire. Les plus anciennes représentations que nous connaissons sont les cartes d'argile babyloniennes qui datent de 3000 ans av. J.C. "L'Odyssée" d'Homère, écrit près de 1000 ans av. J.C., a joué un des rôles dévolus à la carte, à savoir la description d'itinéraires. Depuis l'époque hellénistique, des notions comme "la forme de la terre", "la détermination des latitudes et des longitudes", "la connaissance des territoires et leurs représentations" ont été régulièrement revisitées en fonction des avancées conceptuelles et techniques de chaque époque. Elles ont ainsi contribué au développement de disciplines scientifiques, voire même à leur création. C'est le cas de l'astronomie, indispensable au repérage de la position des navires et plus généralement à la détermination des longitudes et des latitudes, ou de la géodésie dont l'objet concerne la forme et les dimensions de la terre. Les méthodes de triangulation des territoires développées au XVI<sup>e</sup> siècle ont contribué à la rationalisation de la topographie. Trois siècles après, cette science du levé de cartes s'est enrichie des techniques de mesure de la troisième dimension, l'altitude. La recherche des données nécessaires au tracé des mers et des rivières a constitué l'hydrographie.... Que d'expéditions difficiles ont été nécessaires pour accéder aux savoirs qui ont progressivement apporté à la carte sa justesse et sa précision actuelles!

La cartographie est jeune - son nom n'existe que depuis le XIX<sup>e</sup> siècle - mais elle s'est bâtie sur les héritages de la cosmographie et de la géographie et a emprunté les compétences de nombreuses disciplines scientifiques et techniques. Les mathématiques, par exemple, ont contribué à son développement depuis l'époque grecque. En retour, elles se sont enrichies de la problématique de la projection de la sphère ou de l'ellipsoïde sur une surface développable. Dans cet article, nous avons privilégié cet aspect. La trame qui est bâtie autour de cartographes dont le nom est associé aux projections qu'ils ont découvertes ou exploitées, sert en même temps de prétexte pour faire un historique du développement cartographique. En encadré, nous avons indiqué l'explicitation mathématique de quelques unes de ces projections qui sont toujours utilisées

---

<sup>1</sup> Mot dont la signification est donnée dans le glossaire. Les mots soulignés dans le texte renvoient au glossaire p. 59

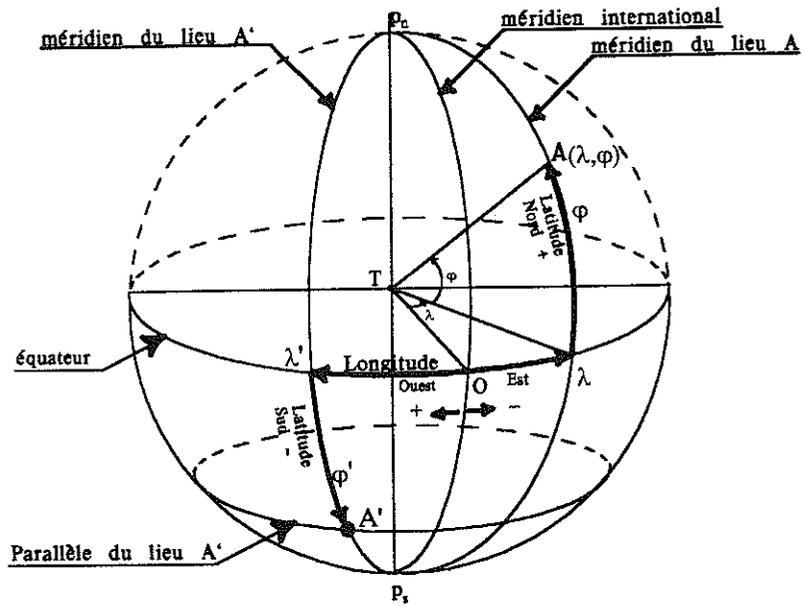


Figure 1 : Méridiens et parallèles ; longitude et latitude.

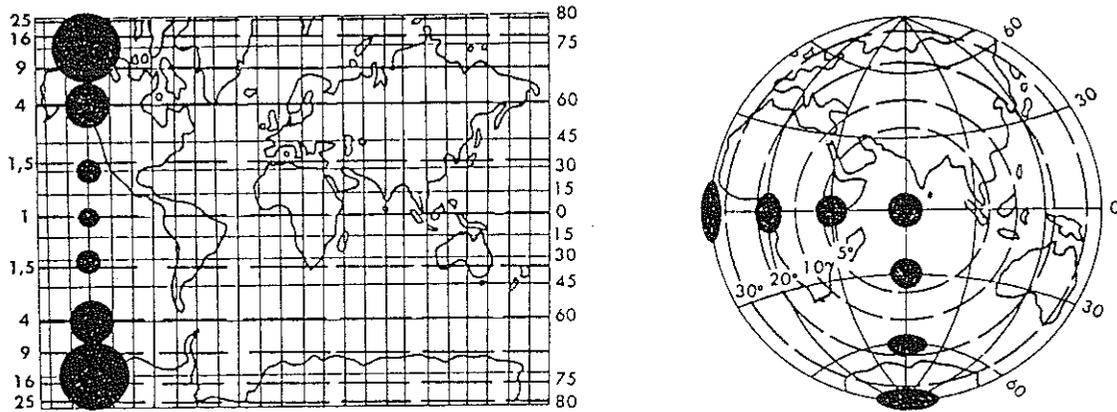


Figure 2 : Indicatrice de Tissot pour  
 a) la projection cylindrique de Mercator (§ IV) ;  
 b) la projection équivalente azimutale de Lorgna (§ VI.C)

## GÉNÉRALITÉS SUR LES PROJECTIONS CARTOGRAPHIQUES

Après avoir déterminé l'échelle<sup>2</sup> à laquelle la carte sera construite, on considère un ellipsoïde - image de la terre - réduit à cette même échelle (ou pour simplifier une sphère réduite). Un point **A** y est défini par sa longitude  $\lambda$  et sa latitude  $\varphi$  (**Figure 1**). Une projection cartographique est une correspondance continue et biunivoque entre les points d'une portion de cette surface réduite et les points homologues du plan. Le point **a**, projection de **A** sur le plan, est déterminé par ses coordonnées (**x**, **y**), fonctions de ( $\lambda$ ,  $\varphi$ ) :

$$x = f(\lambda, \varphi) \quad , \quad y = g(\lambda, \varphi).$$

Dans les encadrés mathématiques, nous conserverons ces mêmes conventions, les lettres  $\varphi$  et  $\lambda$ , pour désigner la latitude et la longitude et **x** et **y**, pour les coordonnées géographiques dans le plan. Nous réserverons systématiquement les lettres majuscules pour désigner les points de la surface terrestre réduite et les lettres minuscules associées, pour leur image sur la carte. Nous considérerons généralement la sphère réduite dont le rayon est toujours nommé **R** ou, quand nous le préciserons dans le texte, l'ellipsoïde réduit.

### I.1 - Déformations des cartes et propriétés recherchées

Une sphère, un ellipsoïde ne sont pas développables sur un plan. De ce fait, toutes les projections utilisées en cartographie engendrent des déformations. Pour préciser ces altérations, on fait appel à l'indicatrice de Tissot, qui est l'image sur la carte d'un cercle placé sur la surface terrestre réduite, de rayon infinitésimal. Sa forme elliptique variable selon la position du centre du cercle (**Figure 2**) permet de repérer les altérations de longueur et les déformations angulaires.

L'indicatrice est un cercle quand la projection conserve les angles. On dit alors que la projection est conforme. Les images des méridiens et des parallèles sont perpendiculaires, et au voisinage d'un point, l'échelle est constante dans toutes les directions. Si l'échelle est une caractéristique de la carte, elle n'est en réalité exacte que pour les quelques points pour lesquels le module linéaire<sup>3</sup> vaut **1**. Ailleurs, où il est différent de **1**, il traduit une estimation de l'erreur associée au mode de projection. Dans les encadrés mathématiques relatifs aux différentes projections, nous donnerons la plupart du temps la formule traduisant la variation du module linéaire et nous préciserons les positions pour lesquelles il vaut **1**.

---

<sup>2</sup> Facteur d'homothétie pour passer de la terre à un ellipsoïde (ou une sphère) réduit intermédiaire qu'on projetera sur le plan de la carte. Sur une carte au 1: 100000, 1 cm correspond à une longueur  $10^5$  plus grande, soit 1 km .

<sup>3</sup> Le module linéaire traduit les déformations de longueur. C'est le rapport **m** d'une longueur **ab** du plan à la longueur correspondante **AB** de l'ellipsoïde réduit à l'échelle :  $m = ab/AB$ . Quand il n'y a pas de déformation,  $m = 1$ .

Quand une projection conserve les rapports de surface, elle est dite *équivalente*. Les méridiens et parallèles sont perpendiculaires et en tout point de la carte, la surface de l'indicatrice de Tissot reste constante. Généralement, on choisit une projection en fonction de ses caractéristiques en termes de stabilité/déformation. Ainsi, la projection de Mercator (cf. § IV), projection conforme, qui traduit tout déplacement à cap constant par une droite, a été créée à l'usage des navigateurs. En contrepartie, elle produit de fortes déformations de surface qui peuvent la rendre inutilisable, notamment au delà d'une latitude de 80°. La surface du Groenland, par exemple, est comparable à celle de l'Amérique du Sud, pourtant huit fois supérieure. A l'inverse, une projection équivalente peut être choisie pour privilégier les rapports de surface entre les pays ou les continents. Mais elle engendre des déformations d'angle (donc de forme) qui peuvent en limiter son intérêt. On peut aussi choisir une projection qui minimise les déformations d'angles et de surfaces, bien qu'elle présente l'inconvénient de ne conserver aucune stabilité vis-à-vis de ces deux grandeurs. Une telle projection est alors dite *aphylactique*. Parmi celles-ci, on utilise les projections équidistantes qui conservent l'orthogonalité de méridiens et des parallèles, l'équidistance des parallèles, et les longueurs le long des méridiens.

En fonction de l'usage particulier auquel est destinée la carte, le concepteur impose des conditions à la représentation en choisissant une projection qui correspond au meilleur compromis. Pour une représentation conforme par exemple, on peut utiliser une des propriétés liée à la conformité : la stabilité de la valeur du module linéaire au voisinage d'un point. Cette condition se traduit par l'égalité  $\frac{aa_1}{AA_1} = \frac{aa_2}{AA_2}$  où  $AA_1$  et  $AA_2$  sont des grandeurs infinitésimales associées à un point quelconque,  $A$ , de la sphère réduite selon la longitude et la latitude (traduites par des relations en  $d\lambda$  et  $d\phi$ ) et  $aa_1$  et  $aa_2$ , les  $dx$  et  $dy$  correspondants sur l'indicatrice de Tissot dans les deux directions  $x$  et  $y$  de la carte. Le développement algébrique de cette égalité conduit à une équation différentielle dont la résolution fixe des conditions sur les coordonnées (cf. IV, VI.B). Pour les projections équivalentes, l'équation différentielle sera fournie en écrivant l'égalité de la surface infinitésimale d'une indicatrice de Tissot et celle du cercle associé sur la sphère réduite (cf. VI.C).

## I.2 - Projection sur une surface développable

Les principales surfaces développables sur lesquelles on projette géométriquement les points d'une sphère sont le plan, le cylindre et le cône. Quand la projection se fait sur un plan tangent à la sphère, on l'appelle projection *azimutale*. Les projections *cylindriques* et *coniques* se font respectivement sur un cylindre ou un cône tangent -ou sécant- à la sphère (**Figure 3**). Selon que le plan tangent passe par un pôle ou par l'équateur et que les axes du cylindre ou du cône sont confondus avec l'axe des pôles ou perpendiculaires à lui, on dira que les projections sont *d'aspect direct* ou *d'aspect transverse*. L'aspect transverse correspond donc à une rotation de 90° de l'aspect direct. Lors des présentations de projections transverses (cf. § VI.A, § VII), nous déduirons leurs principales propriétés de celles établies pour les cas directs, plus faciles à appréhender et à dessiner.

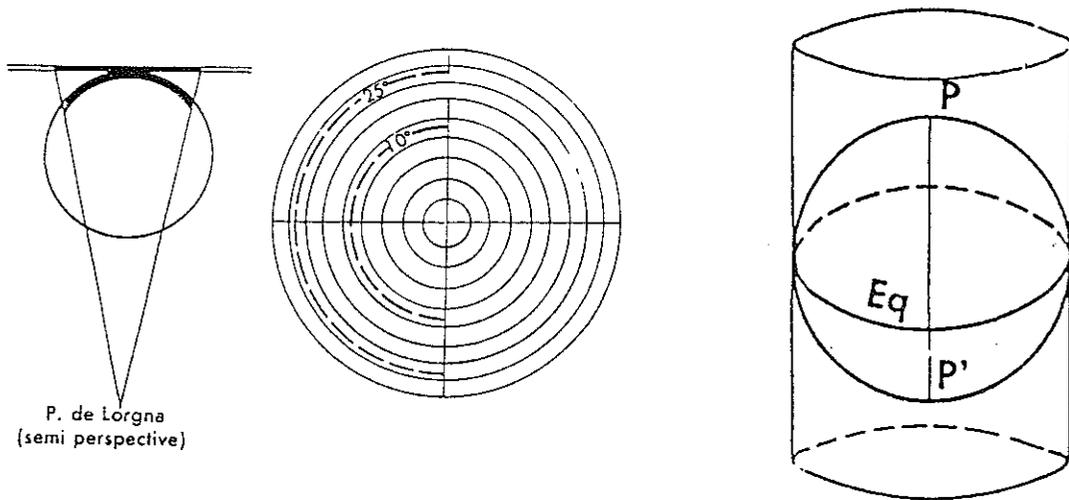
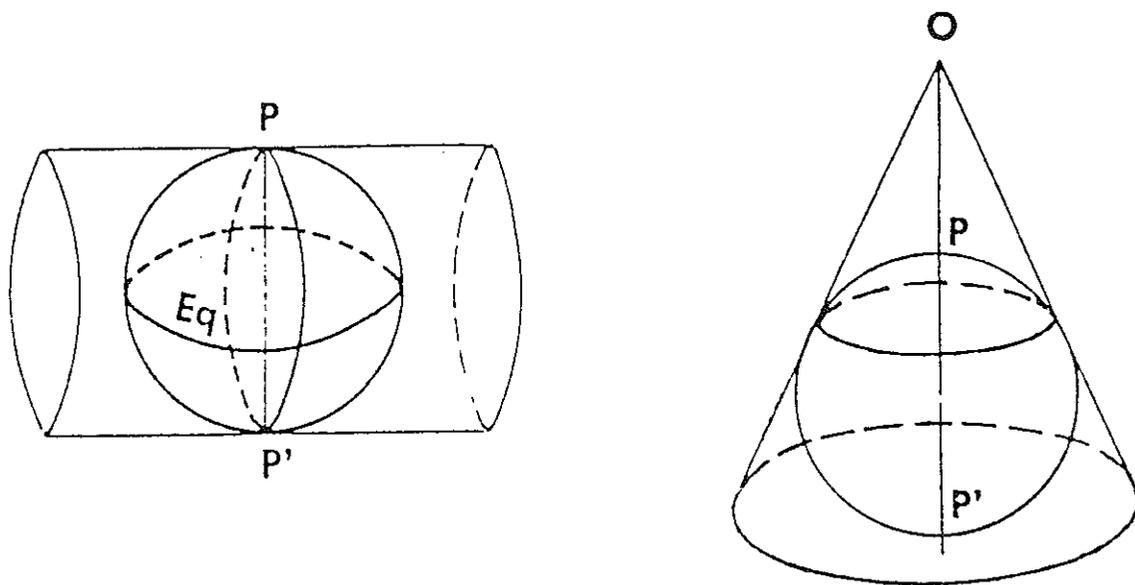
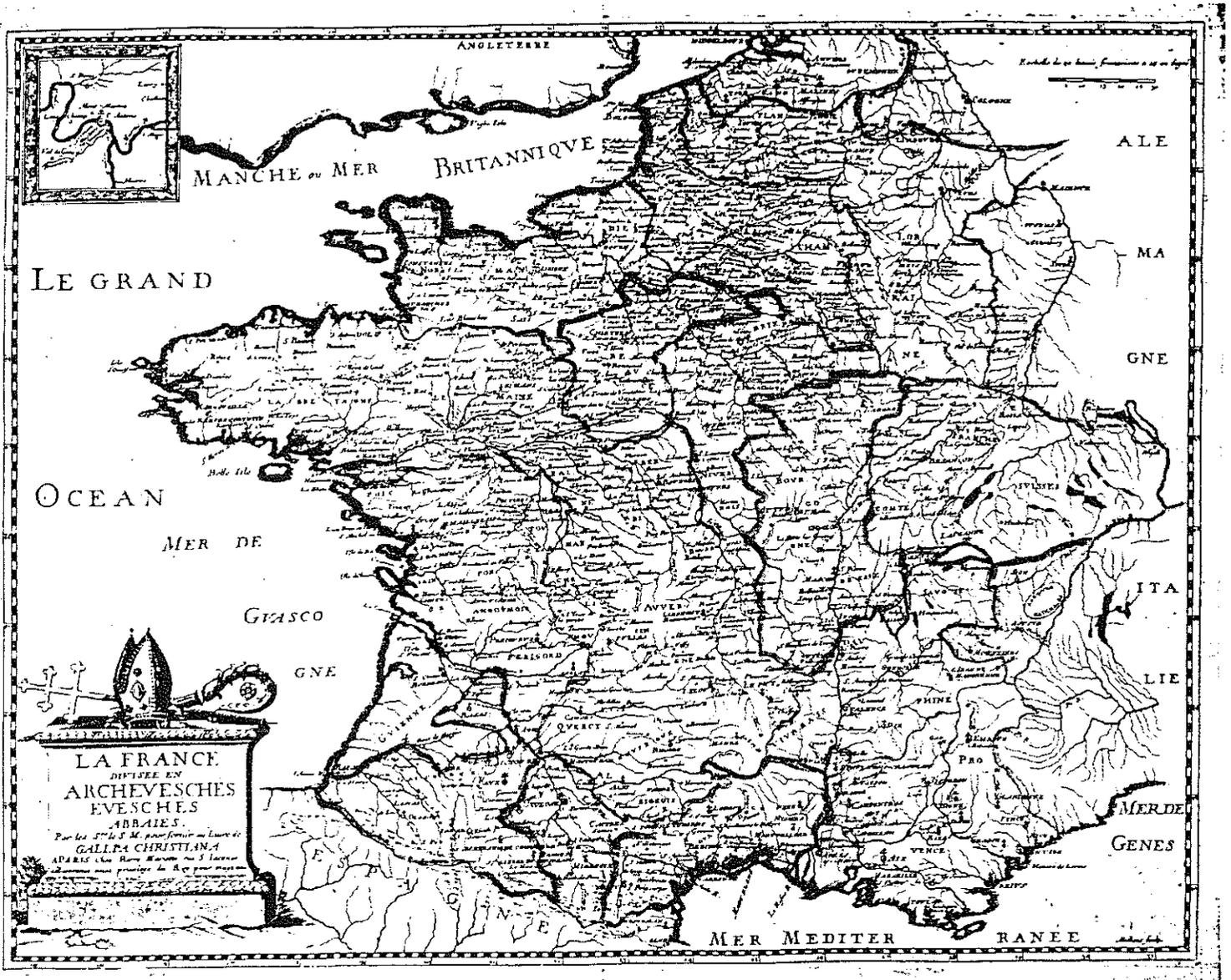


Figure 3 :  
 a) projection azimutale de Lorgna ; b) projection cylindrique d'aspect direct ;  
 c) projection cylindrique d'aspect transverse ; d) projection conique





1656

1.2.a - Les projections azimutales (Figure 4)

Dans une projection azimutale, le centre de projection  $P$  se trouve sur l'axe perpendiculaire au plan tangent. Sous l'aspect direct, les méridiens sont représentés par des droites rayonnantes au point image du pôle et les parallèles, par des circonférences entières dont le pôle est le centre. Parmi les plus courantes, citons la *projection gnomonique* développée par Thales ( $P$  est placé au centre de la terre), la *projection stéréographique* ( $P$  est à un des pôles) et la *projection orthographique* ( $P$  est à l'infini). Hipparque et Ptolémée ont utilisé ces deux dernières pour leurs cartes du ciel. La projection de Lorgna<sup>4</sup> (cf. § VI.2.c) est un autre cas de projection azimutale pour laquelle  $P$  est symétrique d'un pôle par rapport à l'autre.

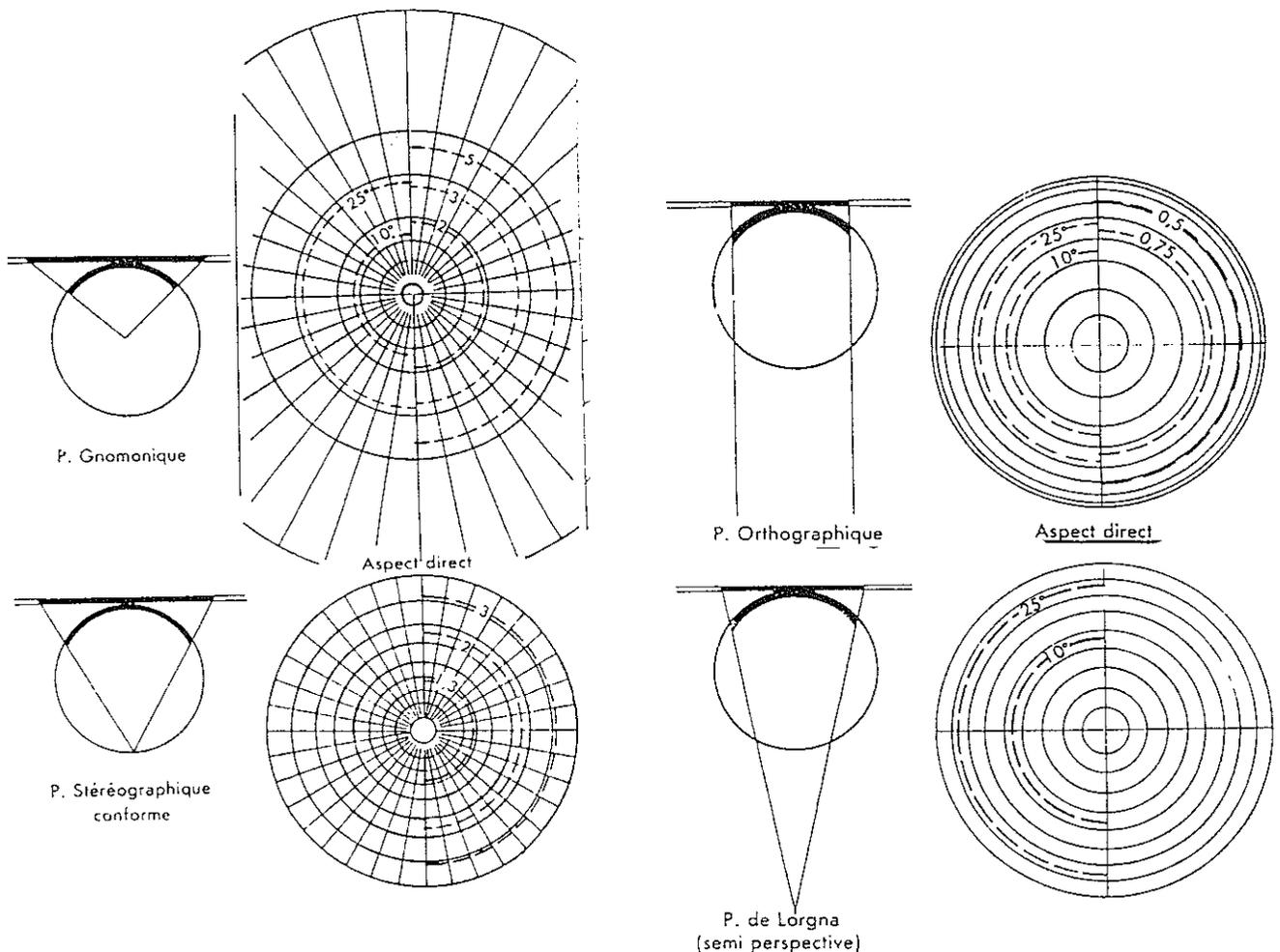
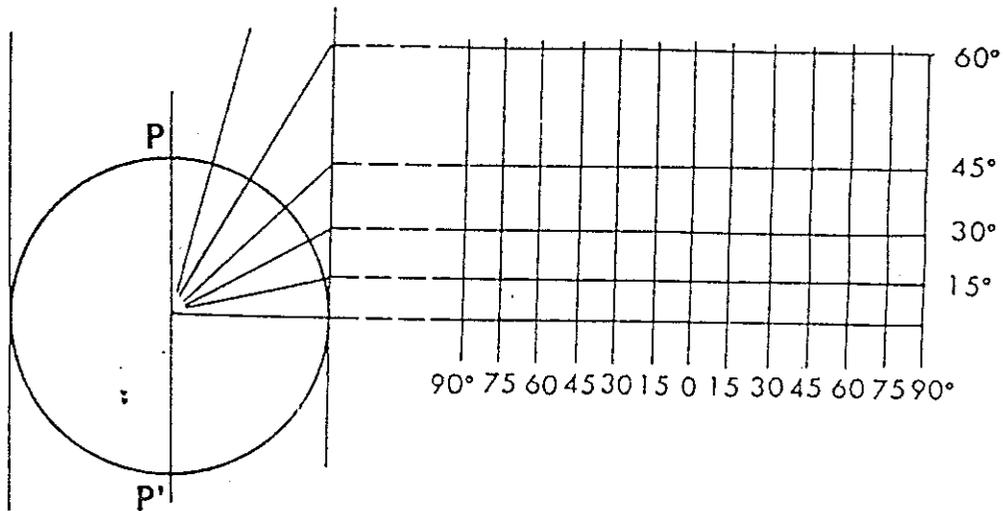


Figure 4 : Projections azimutales : a) gnomonique ; b) stéréographique ;  
c) orthographique ; d) projection de Lorgna

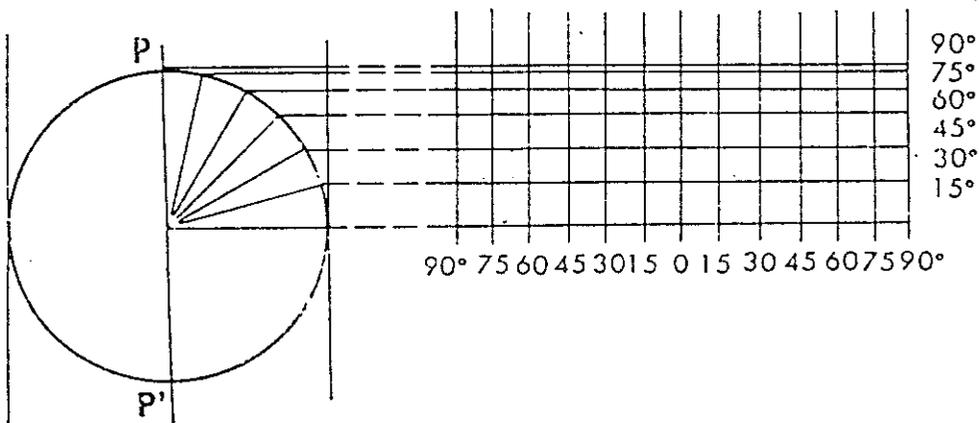
<sup>4</sup> Lorgna (1735-1796) Mathématicien de Vérone qui a dirigé la Société italienne des Sciences (dite dei XL) et a contribué à sa renommée.

**1.2.b - Les projections cylindriques (Figure 5)**

Les projections cylindriques donnent des représentations rectangulaires. Les parallèles et les méridiens sont des droites qui forment les directions d'un quadrillage orthogonal. Sous l'aspect direct, les méridiens sont équidistants entre eux ; les parallèles, tous égaux à l'équateur (y compris les pôles) ont un espacement qui dépend des conditions imposées à la représentation (cf. § 1.1). Le module linéaire vaut 1 pour les points situés à l'équateur et  $\frac{1}{\cos \varphi}$  le long d'un parallèle de latitude  $\varphi$ . Selon la latitude, il varie de 1 à  $\infty$ .



P. cylindr. centrale



P. cylindrique équivalente  
de Lambert

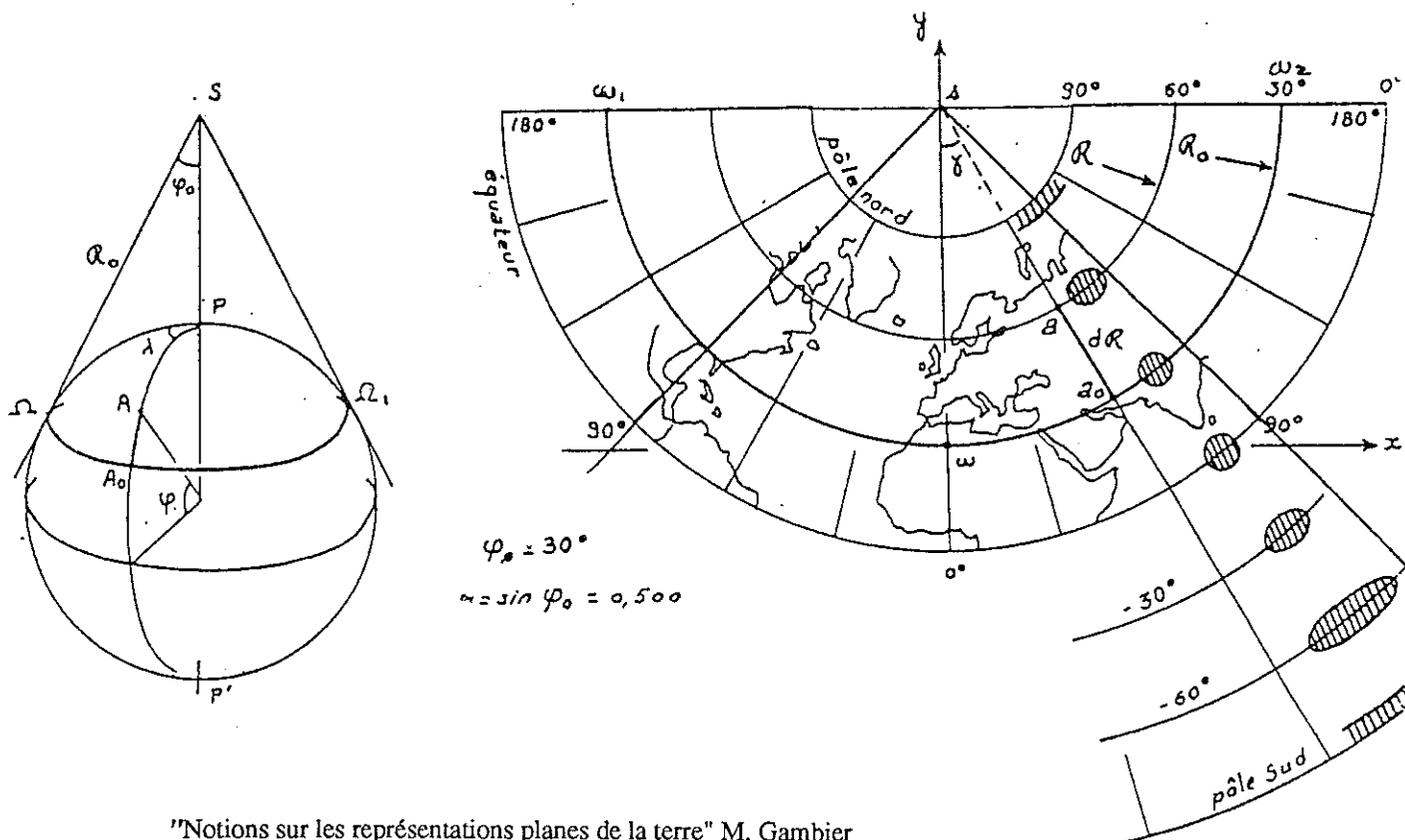
**Figure 5: Projection cylindrique**

**I.2.c - Les projections coniques (Figure 6)**

Le cône de sommet  $S$  est tangent à la sphère terrestre de rayon  $R$ , selon un parallèle  $\Omega_1\Omega\Omega_1$  de latitude  $\varphi_0^5$ .  $P\Omega$  est pris comme méridien origine.

Dans la projection sur le plan, les méridiens sont représentés par un ensemble de droites concourantes en  $s$ , image de  $S$ , et les parallèles par des arcs de cercle centrés en  $s$  et dont le rayon  $\mathcal{R}$  dépend des conditions imposées. Méridiens et parallèles sont orthogonaux. L'une des conditions imposées aux projections coniques tangentes est que le module linéaire soit égal à 1 sur le parallèle de latitude  $\varphi_0$ . L'arc de cercle  $\omega_1\omega_2$ , qui est donc l'image intacte du parallèle  $\Omega_1\Omega\Omega_1$ , a pour rayon  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} \cotan\varphi_0$  et pour longueur celle du parallèle terrestre réduit à l'échelle, soit  $2\pi R \cos\varphi_0$ . Sur ce parallèle, tout arc  $\Omega A$  de longitude  $\lambda$  est représenté par un arc de cercle de même longueur  $\omega a$ .

Nous appellerons  $\gamma$  l'angle  $(s\omega,sa)$  formé par les deux images de méridien  $s\omega$  et  $sa$ , et  $n$  le rapport  $\gamma/\lambda$ . La condition imposée aux projections coniques tangentes donne  $\gamma = \lambda \sin\varphi_0$  et  $n = \sin\varphi_0$ . En particulier l'angle formé par les deux droites,  $s\omega_1$  et  $s\omega_2$ , images de l'antiméridien  $P\Omega_1$  est  $(s\omega_1,s\omega_2) = 2\pi \sin\varphi_0$ .



"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier  
IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

Figure 6 : Projection conique

<sup>5</sup> Rappelons que  $R$  est le rayon de la sphère terrestre réduite à l'échelle.

Pour la construction de la projection, traçons un cercle de centre  $s$  et de rayon  $\mathcal{R}_O = R \cotan\varphi_0$ . L'arc de cercle  $\omega_1\omega\omega_2$ , image du parallèle  $\Omega_1\Omega\Omega_2$ , est limité par les droites  $s\omega_1$  et  $s\omega_2$  formant entre elles un angle  $(s\omega_1, s\omega_2) = 2\pi \sin\varphi_0$  dont la bissectrice est le méridien origine,  $s\omega$ .

L'angle  $(P\Omega_1, P\Omega) = \pi$  a pour image plane  $(s\omega_1, s\omega) = \pi \sin\varphi_0$ .

- Les coordonnées de l'image du point  $A(\lambda, \varphi)$  sont :
  - pour les coordonnées polaires :  $\gamma = n\lambda$  ;  $\mathcal{R}$  est une fonction de  $\varphi$
  - pour les coordonnées rectangulaires :  $x = \mathcal{R} \sin\gamma$  ;  $y = \mathcal{R}_O - \mathcal{R} \cos\gamma$

La projection du pôle correspond généralement à un arc de cercle.

## II- LES PREMIERES REPRÉSENTATIONS SCIENTIFIQUES (la période hellénistique)

**Eratosthène**, bibliothécaire à Alexandrie au III<sup>e</sup> siècle av. J.C., nous est connu pour ses contributions philosophiques, géométriques et astronomiques. Il fut également un des premiers à introduire des bases scientifiques à la cartographie et rassembla les connaissances existantes dans ce domaine. C'est notamment lui qui a donné la première estimation de 250 000 stades (environ 39 500 km) pour la circonférence terrestre en mesurant la distance de deux villes situées sur un même méridien, Alexandrie et Assouan (appelée Syenne à cette époque), ainsi que leur latitude (pour un développement détaillé, voir la rubrique "Dans nos classes").

Il perfectionna les systèmes de représentation cartographique. A son époque, des cartes de l'oekoumène (c'est-à-dire, de la partie habitée) avaient déjà été réalisées, notamment celle d'Anaximandre au VI<sup>e</sup> siècle av. J.C. (les lieux étaient disposés les uns par rapport aux autres selon une estimation de leurs directions et de leurs distances respectives) et la carte de Dicéarque du IV-III<sup>e</sup> siècles av. J.C. (deux axes, la méridienne et un axe est-ouest, se croisaient à l'emplacement de Rhodes et quelques lieux de référence étaient positionnés). Eratosthène compléta cette dernière représentation (Figure 7) en y insérant un réseau de parallèles et de méridiens déterminés par les principales localisations pour lesquelles les latitudes avaient été mesurées au gnomon et les distances évaluées approximativement.

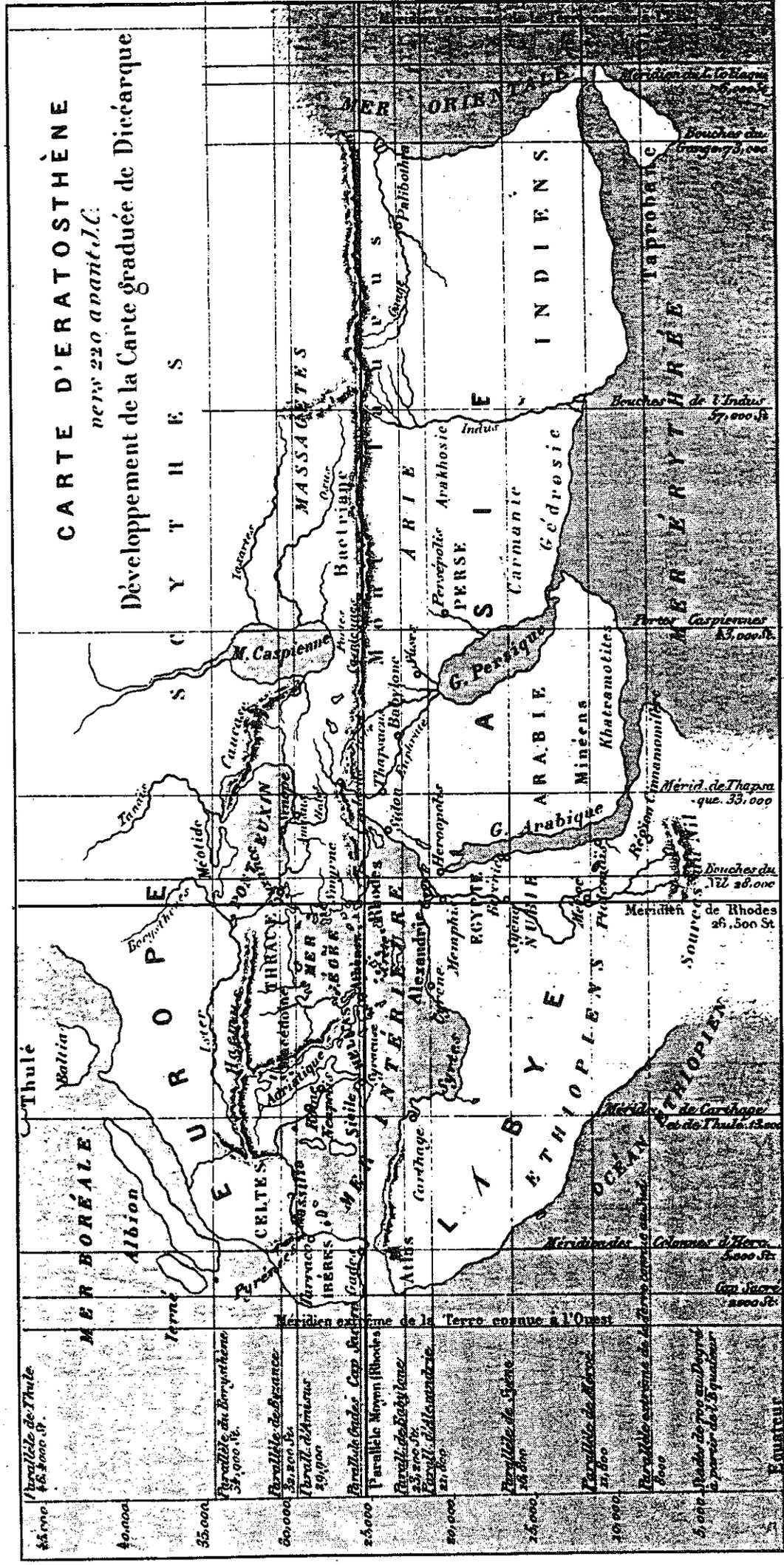
**Hipparque**, astronome à Rhodes au I<sup>e</sup> siècle avant J.C., constitua le premier catalogue d'étoiles et systématisa les rapports entre l'astronomie et la géographie : l'observation astronomique devait permettre de déterminer avec exactitude les positions terrestres. La représentation cartographique qu'il établit était constituée d'un réseau de méridiens et de parallèles équidistants vis-à-vis duquel il introduisit la division en degrés -360<sup>ème</sup> partie de la circonférence terrestre. Il inventa également les deux projections, stéréographique et orthographique (cf. § 1.2) pour les cartes du ciel ainsi qu'une construction qui, pour tenir compte du rétrécissement des parallèles avec la latitude, représentait les méridiens comme des éléments concourants.

# CARTE D'ERATOSTHÈNE

vers 220 avant J.C.

## Développement de la Carte graduée de Dicéarque

### CYTHES



Parallèle de Thulé  
46,500 St.

40,000

35,000

30,000

25,000

20,000

15,000

10,000

5,000

0

Equateur

Parallèle de Byzance  
34,000 St.

Parallèle de Ambrac  
29,000

Parallèle de Cap Sicile  
24,000

Parallèle de l'Égypte  
23,000 St.

Parallèle de l'Inde  
21,000

Parallèle de Syène  
26,000

Parallèle de Carthage  
27,000

Parallèle extrême de la Terre connue à l'Ouest  
28,000

Parallèle de Rhodes  
26,500 St.

Bouches du Nil  
28,000

Bouches de l'Inde  
27,000 St.

Thulé

Albion

EUROPE

CELTES

THRACE

LIBYE

ASIE

LIBYE

ETHIOPIENS

INDIENS

ASIE

MER MÉDITERRANÉE

MER ÉRYTHRÉE

MER INDIQUE

M. Caspienne

MASSAGÈTES

MER ORIENTALE

### III - PTOLEEMEE (II<sup>e</sup> SIECLE)

Claude Ptolémée, savant grec d'Alexandrie, vécut au II<sup>e</sup> siècle après J.C. et intervint dans de nombreuses disciplines, mathématique, physique, théorie du son, optique, astronomie, ... Les deux principaux ouvrages qui nous sont parvenus sont *l'Almageste* <sup>6</sup>, qui recense les connaissances astronomiques des grecs, et *la Géographie*, répertoire des itinéraires connus à son époque, qui précise les latitudes et longitudes d'environ 8000 positions terrestres réparties dans le monde connu de son époque -de l'Europe occidentale, sauf l'Irlande et l'Écosse, à une Chine déformée, vers l'est, et à la partie nord de l'Afrique, vers le sud. En réalité, peu de données de *la Géographie* se sont révélées exactes et elles n'ont concerné que les latitudes. Des copies de ces ouvrages ont appartenu aux astronomes byzantins et arabes du Moyen-Age.

Ptolémée inventa deux projections, la projection dite de Ptolémée et la projection dite homéotère (cf. § V) qui tiennent compte, l'une et l'autre, de la réduction de la longueur des parallèles avec l'augmentation de la latitude.

#### L'aspect mathématique de la projection de Ptolémée (Figure 8)

La projection de Ptolémée est une projection conique (cf. § 1.2.c) équidistante, encore utilisée pour les cartes d'atlas.

Le module linéaire est égal à 1 sur le parallèle de latitude  $\varphi_0$ , donc  $\gamma = \lambda \sin \varphi_0$ . La particularité de la projection de Ptolémée est qu'il en soit de même sur l'ensemble des méridiens. La longueur d'un arc de méridien d'angle  $(\varphi - \varphi_0)$  est donc  $a_0 a = R(\varphi - \varphi_0)$  où  $R$  est le rayon de la sphère terrestre réduite.

Sur un parallèle de latitude quelconque  $\varphi$ , le module linéaire est donné par le rapport de la longueur de l'image d'un arc du parallèle avec celle de cet arc, soit :

$$\frac{2\pi \sin \varphi_0 (R_0 - R(\varphi - \varphi_0))}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi_0 (\cotan \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0))}{\cos \varphi}$$

Les coordonnées polaires d'un point  $a$  sont  $\gamma = \lambda \sin \varphi_0$  et  $\mathcal{R} = R(\cotan \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0))$ . Le pôle, de latitude  $\pi/2$  et pour lequel  $\mathcal{R}$  est non nul, est représenté par un arc de cercle.

La projection se construit en traçant :

i) un axe  $y'y$  origine sur lequel on place un point  $s$ , pris comme centre de l'arc de cercle de rayon  $\mathcal{R}_0 = R \cotan \varphi_0$ . L'intersection de l'axe  $y'y$  et du cercle définit le point  $\omega$ . Le méridien origine,  $s\omega$ , est bissecteur de l'angle  $(s\omega_1, s\omega_2) = 2\pi \sin \varphi_0$  qui délimite l'arc du parallèle origine.

ii) l'angle  $\gamma = (s\omega, sa) = \lambda \sin \varphi_0$  qui détermine la demi-droite  $sa_0$ , image du méridien de longitude  $\lambda$ , passant par  $A_0$  et  $A$ . L'intersection de l'arc de cercle avec la demi-droite est  $a_0$ .

<sup>6</sup> Latinisation du titre arabe de la syntaxe mathématique de Ptolémée



A partir du XII<sup>e</sup> siècle, une nouvelle forme de carte se répand dans le monde des navigateurs : ce sont les portulans, qui transcrivent avec précision les contours du littoral sur un fond de carte constitué de divisions angulaires (correspondant à des directions de la rose des vents). Ces quantités angulaires -les rumbs- étaient généralement au nombre de 8, 16 ou 32, disposées irrégulièrement au début puis régulièrement. Les ateliers des régions méditerranéennes et portugaises eurent le monopole des portulans qui connurent un essor particulièrement important du XIV<sup>e</sup> siècle jusqu'à la seconde moitié du XVI<sup>e</sup> siècle.

Au début du XV<sup>e</sup> siècle, la redécouverte de la *Géographie* de Ptolémée (l'*Almageste* était connu depuis le XII<sup>e</sup> siècle) permit l'établissement de nouvelles cartes construites à partir des positions terrestres recensées dans l'ouvrage. La première carte imprimée date de 1475. On sait que les découvertes des Antilles et du nouveau continent, à la fin du XV<sup>e</sup> siècle, ont été permises grâce à la dilatation des longitudes induite dans cet ouvrage pour le continent asiatico-européen et à la sous-estimation, à cette époque, de la circonférence terrestre (inférieure à celle calculée par Eratosthène), ce qui par différence, minimisait le chemin de l'Europe à l'Asie passant par l'ouest. En effet, pour atteindre la Chine, Christophe Colomb et ses mécènes n'ont pu tenter cette expédition maritime que dans la mesure où la distance à parcourir restait envisageable, aussi bien pour la survie des équipages que d'un point de vue psychologique.

A la Renaissance, les cartes existantes sont donc constituées de deux modes de représentation qui s'avèrent insuffisants, les portulans décrivant uniquement les côtes littorales, mais dont l'efficacité pratique avait fait ses preuves, et les cartes issues des données de la *Géographie* qui concernait le monde connu au II<sup>e</sup> siècle. Aussi, le XVI<sup>e</sup> siècle voit le bouleversement du mode de représentation cartographique : *i*) nécessité de représenter le monde connu qui s'est étendu avec les grandes découvertes, *ii*) exigence d'une plus grande exactitude pour les coordonnées terrestres, *iii*) progrès dans les concepts et dans leurs mises en pratique (trigonométrie, levées topographiques, calculs de triangulation), *iiii*) recherche de systèmes de projection mieux adaptés.

Ces progrès proviennent essentiellement des mathématiciens-astronomes -humanistes- de l'Europe allemande, flamande et normande. Deux flamands, Mercator (1512-1594) et Ortelius (1527-1598), ont joué un rôle essentiel dans la rationalisation de la cartographie en offrant la synthèse des données géographiques et scientifiques disponibles et en révisant la conception des cartes. Le *theatrum orbis terrarum* (Théâtre de l'Univers) d'Ortelius (1570) est le premier atlas de conception moderne. La carte de Mercator (1569) est la première carte de construction mathématique utilisable par les navigateurs. Elle conserve les angles et les routes à cap constant y sont traduites par des droites.

#### **L'aspect mathématique de la projection Mercator (Figure 10)**

La projection de Mercator est une projection cylindrique (cf. § 1.2.b) conforme. Elle sert actuellement aux cartes de navigation maritime ou aérienne, ainsi que pour les planisphères à petite échelle limités aux régions de latitudes inférieures à 80°. L'IGN l'utilise encore pour certaines cartes. Les loxodromies (routes à cap constant) sont représentées par des droites et les orthodromies (chemins selon un grand cercle) par des courbes.

Sur la base d'un quadrillage rectangulaire, cette projection, dite projection à latitude croissante, compense l'agrandissement des parallèles selon leur latitude par un accroissement équivalent sur les méridiens. Aussi, produit-elle une importante déformation pour les grandes latitudes (cf. I;1).

La propriété de conformité exige que le module linéaire au voisinage d'un point soit égal dans toutes les directions, et en particulier le long des méridiens et des parallèles. Ceci se traduit par  $\frac{aa_1}{AA_1} = \frac{aa_2}{AA_2}$  où  $a(x,y)$  est l'image de  $A(\lambda,\varphi)$ ,  $a_1$  et  $a_2$ , celles de  $A_1$  et  $A_2$ .

$aa_1 = dx$ ,  $aa_2 = dy$ ,  $AA_1 = R \cos \varphi d\lambda$ ,  $AA_2 = R d\varphi$ . Comme  $x = R \lambda$ , le module linéaire vaut  $1/\cos \varphi$  et  $dy/R d\varphi = 1/\cos \varphi$ .

$$dy = \frac{R d\varphi}{\cos \varphi} = R \frac{d\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} = R \frac{\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + 1\right] d\varphi}{2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\implies x = R\lambda \text{ et } y = R \ln \left[ \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

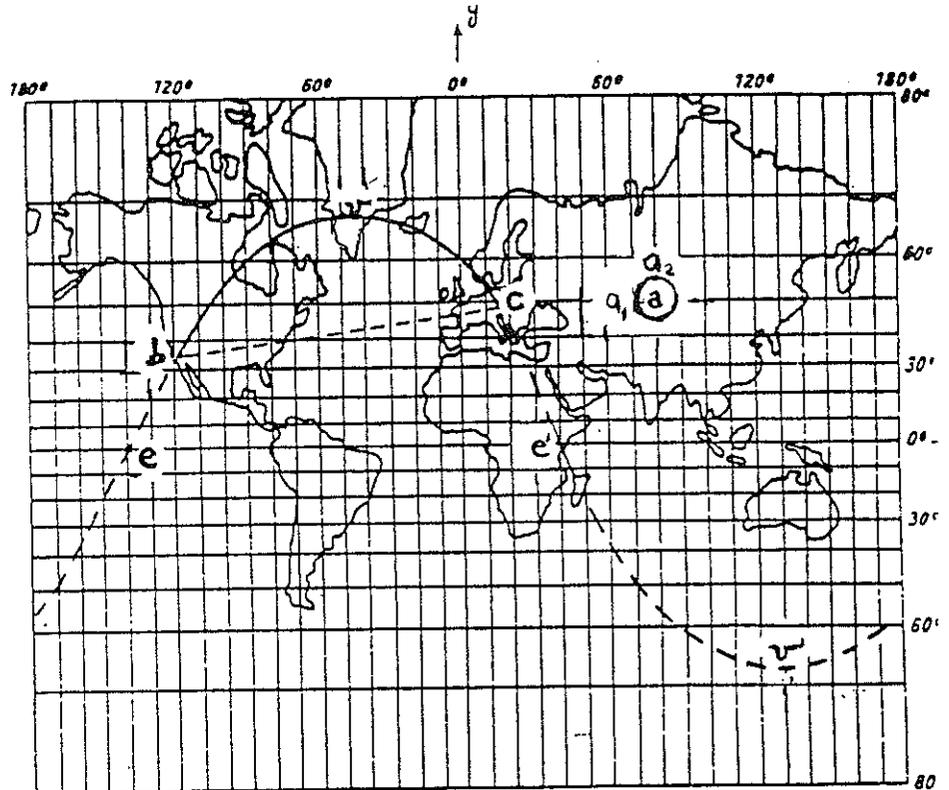
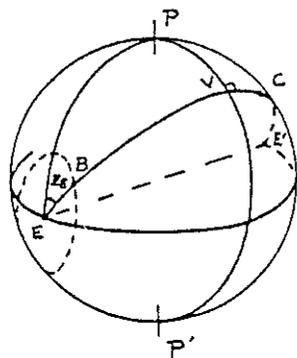
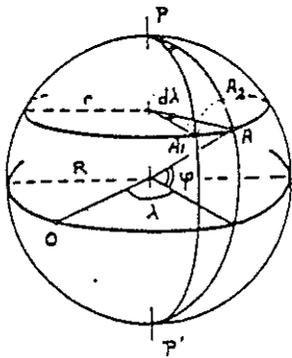


Figure 10 : Représentation de Mercator

"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

## V - LA REPRÉSENTATION DE SANSON OU DE FLAMSTEED (XVII<sup>ème</sup> SIECLE)

Le XVI<sup>e</sup> siècle est assurément une période de progrès pour la cartographie. En plus des bouleversements apportés par Mercator et Ortelius, on observe de multiples tentatives de visualisation des cartes à petite échelle, terre entière ou ensemble de continents. Des solutions sont recherchées pour minimiser les déformations des représentations des régions découvertes récemment, à l'extrême-orient, à l'extrême-occident et dans l'hémisphère sud. On assiste à de nombreuses variations sur la projection homéotère de Ptolémée (explications au § suivant) : cartes de Sylvani en 1511 (Italie), de Werner en 1514 (Nuremberg), d'Oronce Finé en 1536 (France), Mercator en 1538, du normand Guillaume Le Testu en 1566, ... D'autres tentatives sont réalisées à partir de fragmentations ou de juxtapositions de cartes partielles. On assiste également à la fabrication de planisphères.

Le dieppois Jehan Cossin inventa en 1570 une projection, construite assez semblablement à la projection homéotère de Ptolémée, mais avec des parallèles représentées par des droites (cf. l'aspect mathématique). Cette projection a été transformée vers 1650 par Nicolas Sanson (1600-1667), géographe du Roi et premier d'une longue dynastie de cartographes, puis vers 1700 par Flamsteed (1646-1719), premier directeur de l'Observatoire de Greenwich fondé en 1670.

**L'aspect mathématique de la représentation de Sanson (Figure 11)**  
C'est une représentation équivalente, dont le canevas est facile à établir. Elle est utilisée pour des cartes d'atlas. C'est un cas particulier de la projection homéotère de Ptolémée. Cette dernière consiste à représenter un méridien origine par un axe, puis d'y choisir un point qui sera le centre des arcs de cercles concentriques -images des parallèles-. Ces arcs sont équidistants le long de l'axe méridien et conservent chacun la longueur du parallèle dont il est l'image, rapportée à l'échelle. Les méridiens, autres que le méridien origine, se construisent point par point, et forment des courbes.  
Pour la projection de Sanson, le centre des arcs de cercles est renvoyé à l'infini. Les parallèles sont représentés par des droites parallèles entre elles, équidistantes et perpendiculaires au méridien central. Sur ces parallèles, les longueurs sont conservées et le module linéaire est donc égal à 1. Les coordonnées de  $a(x,y)$ , image d'un point  $A(\lambda, \varphi)$  sont  $x = R\lambda \cos\varphi$  et  $y = R\varphi$ .  
Les images des méridiens d'équation  $x = \lambda \cos y$  sont des sinusoides.

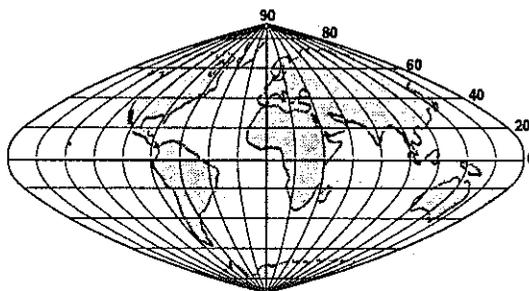
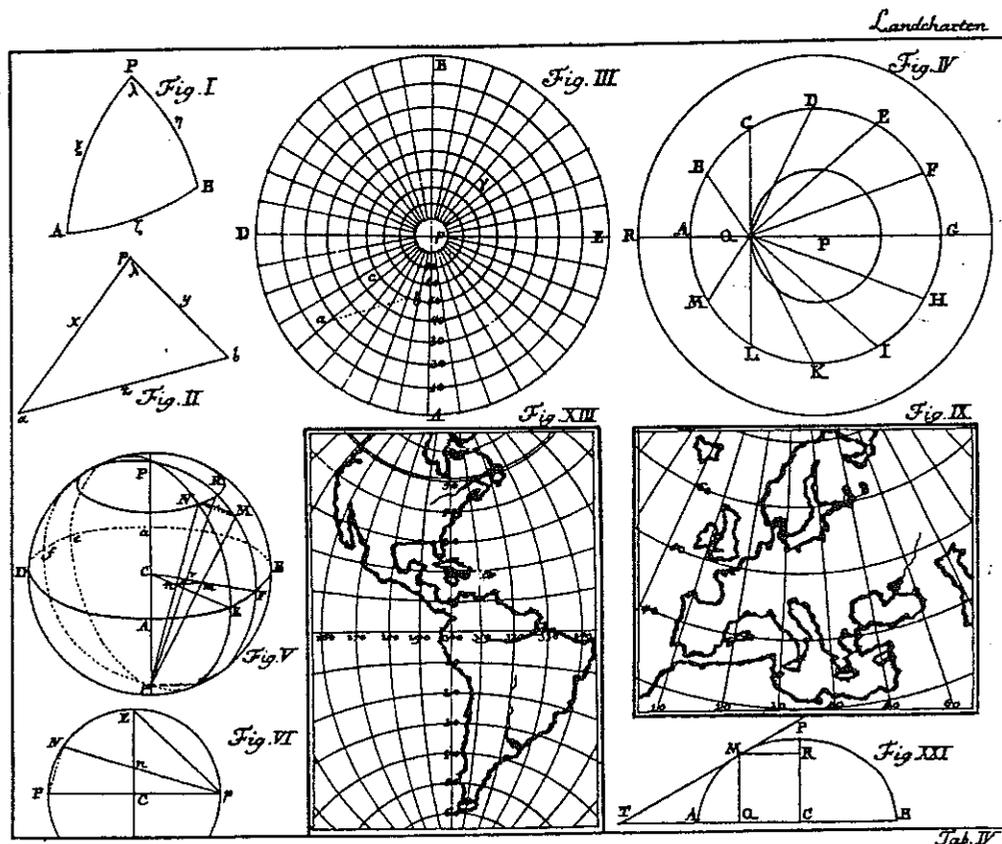


Figure 11 : Représentation de Sanson

## VI- JEAN-HENRI LAMBERT (XVIII<sup>EME</sup> SIECLE)

Jean-Henri Lambert (1728-1777) est un homme singulier : pionnier dans différentes branches des mathématiques (intégrales, différentielles, logique symbolique ...), de l'astronomie (calcul des orbites des corps célestes notamment) et de la cartographie scientifique, mais également connu comme philosophe. Né à Mulhouse dans une famille modeste, il fut secrétaire à Bâle puis précepteur. Ses divers métiers favorisèrent chez lui goûts de la lecture, des mathématiques et de la méditation. Nommé en 1765 à l'Académie des sciences de Berlin par Frédéric le Grand, J.H Lambert y resta jusqu'à sa mort.

Dans le chapitre *Remarques et compléments pour l'établissement des cartes terrestres et célestes* de son ouvrage *Contributions à l'utilisation des mathématiques et de leurs applications* (1772), dont est tirée la planche ci-dessous, il précise les bases mathématiques nécessaires aux projections des surfaces sphériques sur un plan. Elles concernent notamment la propriété de conformité, qui selon lui, est une condition indispensable pour la topographie ou la cartographie de précision, et qui doit utiliser le calcul infinitésimal. On lui doit plusieurs projections conformes -les projections conique et cylindrique transverse- et quelques projections équivalentes -les projections azimutale (dite aussi de Lorgna), cylindrique et conique avec un recourt aux équations différentielles. Il conçut un atlas qui fut publié par l'Académie des sciences de Berlin.



### Aspects mathématiques de trois représentations de Lambert

Parmi les nombreuses projections étudiées par Lambert, nous en avons retenue trois en raison de leur intérêt historique et de leur usage actuel.

### A - Représentation cylindrique conforme transverse (dite de Gauss)

C'est une projection utilisée -notamment par l'IGN- pour les cartes à petite échelle ou les cartes d'atlas. Le méridien origine choisi est au centre de la zone à cartographier.

- C'est une projection sur un cylindre tangent selon un méridien POP', choisi comme méridien origine (Figure 12). Les caractéristiques de cette projection découlent de celles de la projection de Mercator -pour laquelle le cylindre est tangent à l'équateur- en leur appliquant une rotation de 90°. On introduit alors les termes de "pseudo-méridiens" pour désigner les grands cercles orthogonaux au méridien origine POP' qui passent par un "pseudo-pôle" Q, et de "pseudo-parallèles", pour les petits cercles situés à égale distance du méridien origine et orthogonaux aux "pseudo-méridiens". POP', méridien, devient un "pseudo-équateur" et QQQ', l'équateur, un "pseudo-méridien". Les angles L et H jouent des rôles analogues aux longitude  $\lambda$  et latitude  $\varphi$  de la projection de Mercator. De même qu'on exclut les régions polaires dans la projection de Mercator, celle de Lambert est limitée aux valeurs de H inférieures à 80°.

- La projection admet deux axes, celui des x et celui des y, qui correspondent respectivement aux droites-images de QQQ' et POP'. Les "pseudo-méridiens" et "pseudo-parallèles" forment un quadrillage rectangulaire parallèle aux axes. Le "pseudo-pôle" Q, qui fait partie de la zone exclue de la représentation, a une image à l'infini sur l'axe des y.

Les méridiens sont traduits par des courbes passant par les images des pôles (par exemple, la courbe pap'), et les parallèles par des courbes orthogonales aux précédentes et centrées en p (ou p' pour l'hémisphère sud).

- La condition de conformité de la projection de Mercator transcrite dans la projection transverse devient  $dx = R \frac{dH}{\cosh H}$  soit  $x = R \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{H}{2} \right) \right]$  et  $y = R L$ .

Ces formules établissent les coordonnées de a(x, y), image du point A ( $\lambda, \varphi$ ), et pour les exprimer en fonction de  $\lambda$  et  $\varphi$ , on utilise les relations trigonométriques sphériques de Neper :

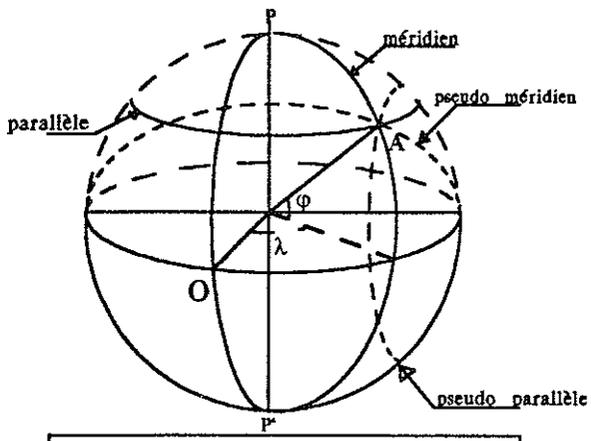
$$\sin H = \sin \lambda \cos \varphi \quad \text{et} \quad \tan L = \frac{\tan \varphi}{\cos \lambda}$$

- Le module linéaire d'un point est donné par  $\frac{1}{\cosh H}$ .

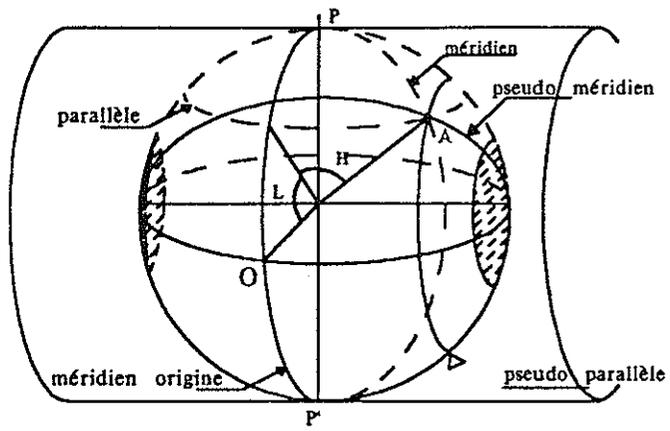
### Application : la représentation UTM

Une des applications de cette projection est la représentation UTM (Universal Transverse Mercator), réalisée sur l'ellipsoïde<sup>8</sup> tel qu'il est connu actuellement et limitée à 3° d'amplitude de part et d'autre du méridien origine. C'est de nos jours la projection la plus employée pour le calcul des triangulations et l'établissement des cartes topographiques.

<sup>8</sup> Depuis 1967, les caractéristiques de l'ellipsoïde adopté sont celles observées par satellite en 1957 (grand axe "a"=6378,160 m ; aplatissement "a" =1/298,247 (a=(a-b)/a où b est le petit axe)). L'ellipsoïde de Clarke ("a"=6378,249 m ; "a" =1/293,5) est issu des observations de 1880.



A a pour latitude  $\phi$  et pour longitude  $\lambda$



A a pour pseudo-latitude H et pour pseudo-longitude L

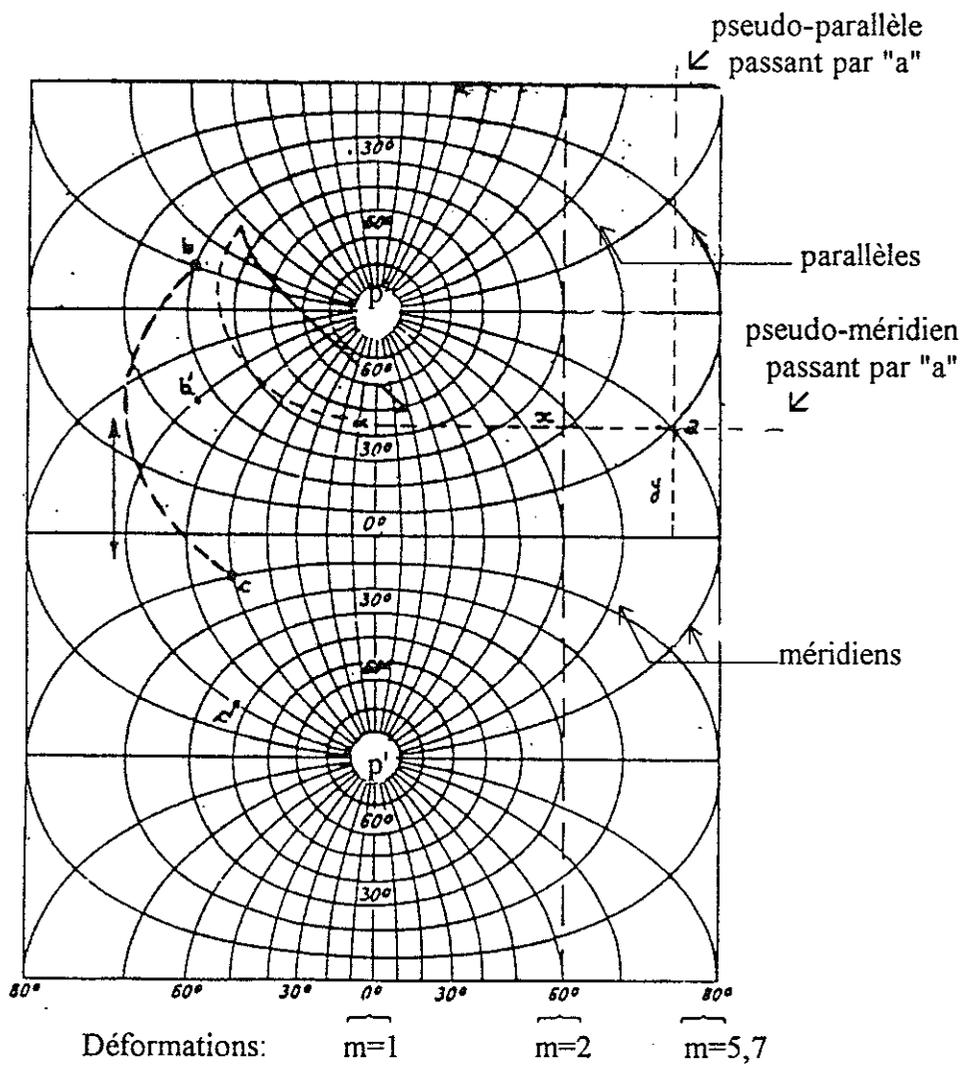


Figure 12 : Représentation de Gauss

"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

**B - Projection conique conforme (appelée représentation conforme de Lambert)**

Cette représentation est très employée pour les cartes générales et les cartes de navigation aérienne, mais également, dans de nombreux pays du monde, pour l'établissement des cartes topographiques et le calcul des triangulations. C'est notamment le cas des cartes de France et d'Afrique du nord réalisées par l'IGN et dont les triangulations ont été calculées à partir des données de l'ellipsoïde de Clarke<sup>8</sup>. Pour la France (Figure 13), quatre zones ont été définies, de sorte que la distance maximale au parallèle-origine soit de 200 Km. L'armée française a introduit en 1915 cette projection qui minimise les altérations d'angles et de longueurs.

Altération des longueurs

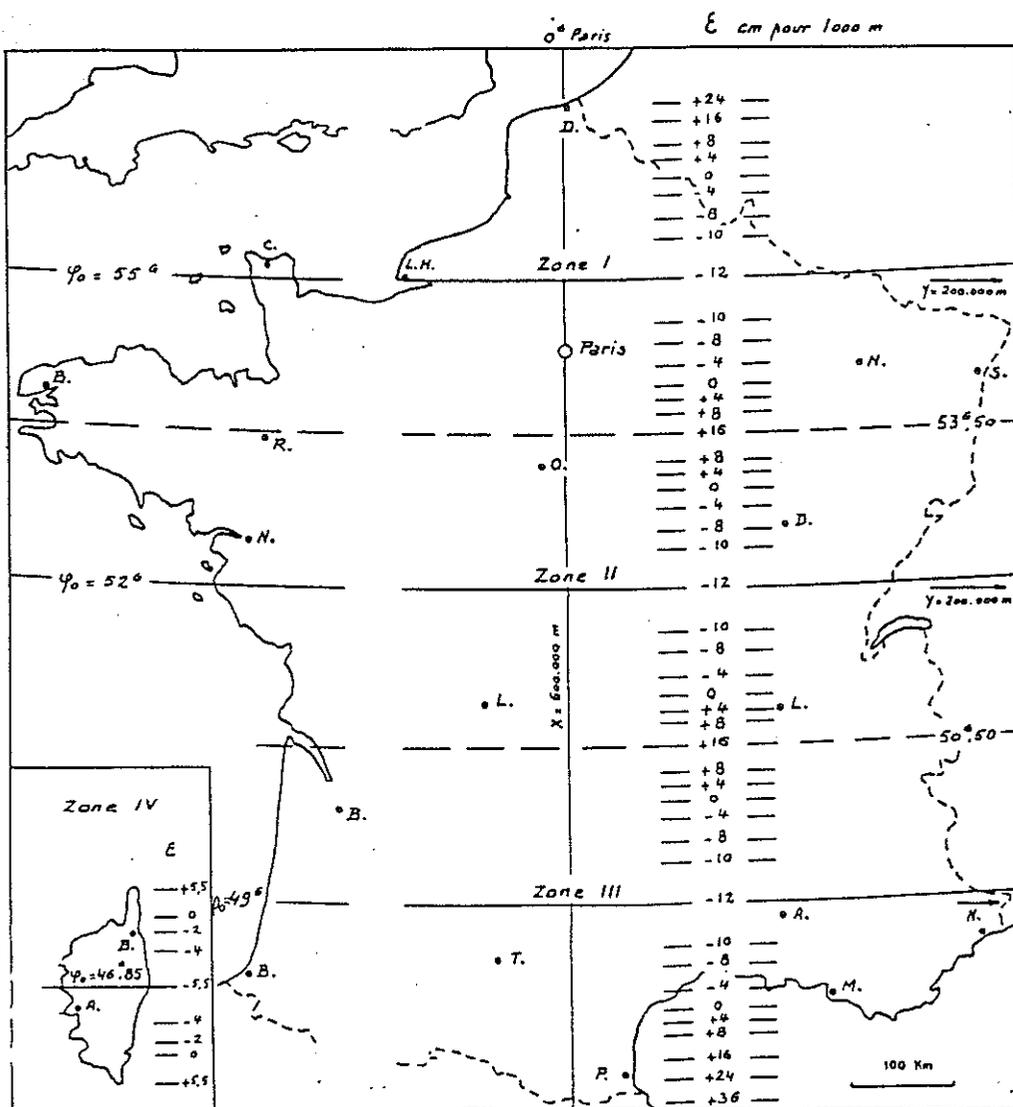


Figure 13 : Représentation de la France découpée en quatre zones sur lesquelles est appliquée la projection conforme de Lambert

"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

C'est une projection conique (cf. § 1.2.c) telle que l'image du parallèle origine est représentée par un arc de cercle de rayon  $R_0 = R \cotan \varphi_0$  (Figure 14).

• La propriété de conformité (l'égalité des rapports  $\frac{aa_1}{AA_1}$  et  $\frac{aa_2}{AA_2}$  où a (x,y) est l'image du

point A ( $\lambda, \varphi$ )) donne une condition sur R, rayon des arcs représentant les parallèles :

$$aa_1 = \mathcal{R} d\gamma; aa_2 = d\mathcal{R}, AA_1 = R \cos \varphi d\lambda, AA_2 = R d\varphi.$$

Par ailleurs, la dérivation de  $\gamma = \lambda \sin \varphi_0$  donne  $d\gamma = \sin \varphi_0 d\lambda$ .

$$\frac{aa_1}{AA_1} = \frac{aa_2}{AA_2} \Rightarrow \frac{\mathcal{R} d\gamma}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{d\mathcal{R}}{R d\varphi}$$

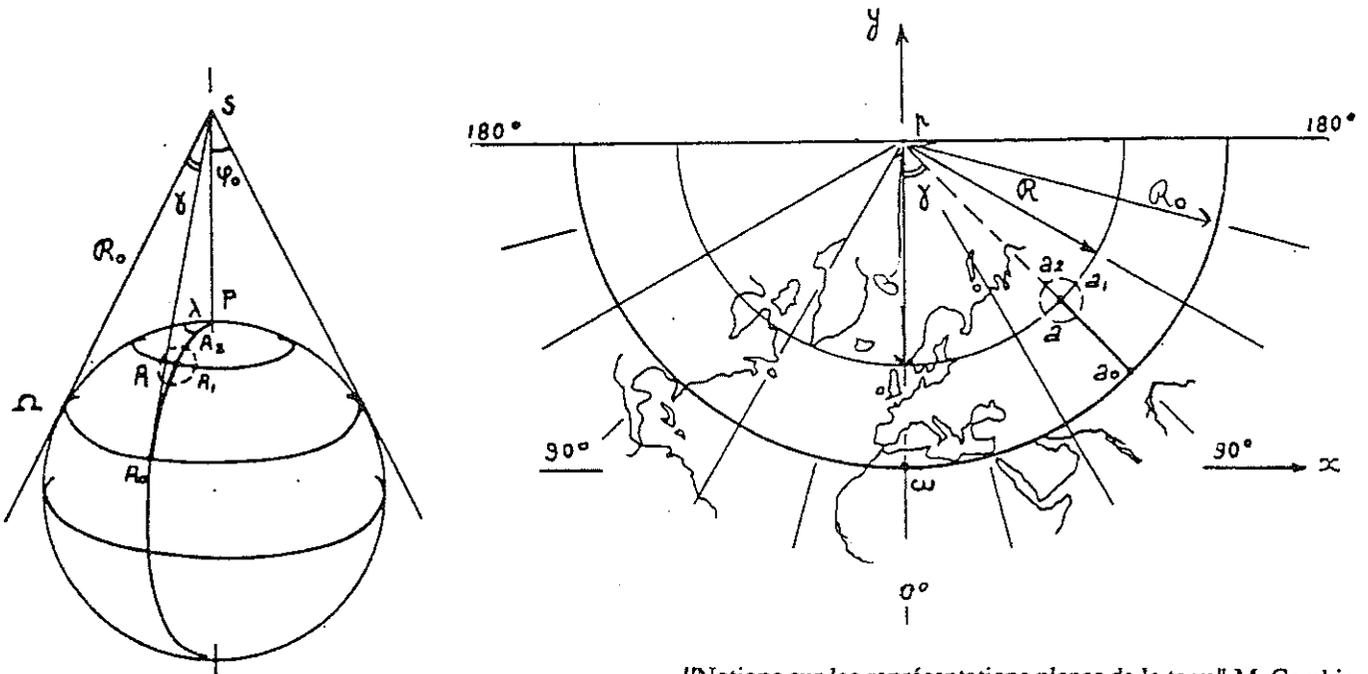
(On introduit un signe négatif puisque  $\mathcal{R}$  décroît quand  $\varphi$  croît).

$$\frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}} = -\frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi} d\varphi \Rightarrow \mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \left( \cotan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right) \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right)^{\sin \varphi_0}$$

De cette formule, on voit que le pôle nord est représenté par un point, convergence des méridiens, tandis que l'image du pôle sud est rejetée à l'infini.

• Les coordonnées a (x, y) sont  $x = \mathcal{R} \sin \gamma$  et  $y = \mathcal{R}_0 - \mathcal{R} \cos \gamma$ .

• On démontre que, pour une représentation peu étendue en latitude, le module linéaire au point a est approximativement égal à  $1 + \frac{d^2}{2R^2}$  avec d, distance de a au parallèle origine.



"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier  
IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

Figure 14 : Représentation conforme de Lambert

**C - Projection azimutale équivalente (appelée représentation de Lorgna)**

C'est la projection azimutale sous l'aspect direct (cf. § 1.2.a) qui est exposée ici. Elle est couramment utilisée pour des cartes d'atlas représentant la région polaire. C'est, parmi les représentations équivalentes, celle qui minimise les altérations linéaires et angulaires.

• Cette projection (Figure 15), qui est un cas particulier de la projection conique équivalente, est telle que  $n = 1$ . L'angle de deux méridiens est conservé par projection.

La condition d'équivalence qui se traduit par l'égalité de l'aire de la calotte sphérique (de rayon  $R$ ) limitée par le parallèle de latitude  $\phi$  et l'aire du cercle-image de ce parallèle donne :

$$4\pi R^2 \sin^2\left(\frac{\pi - \phi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \pi R'^2 \Rightarrow R' = 2R \sin\left(\frac{\pi - \phi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$$

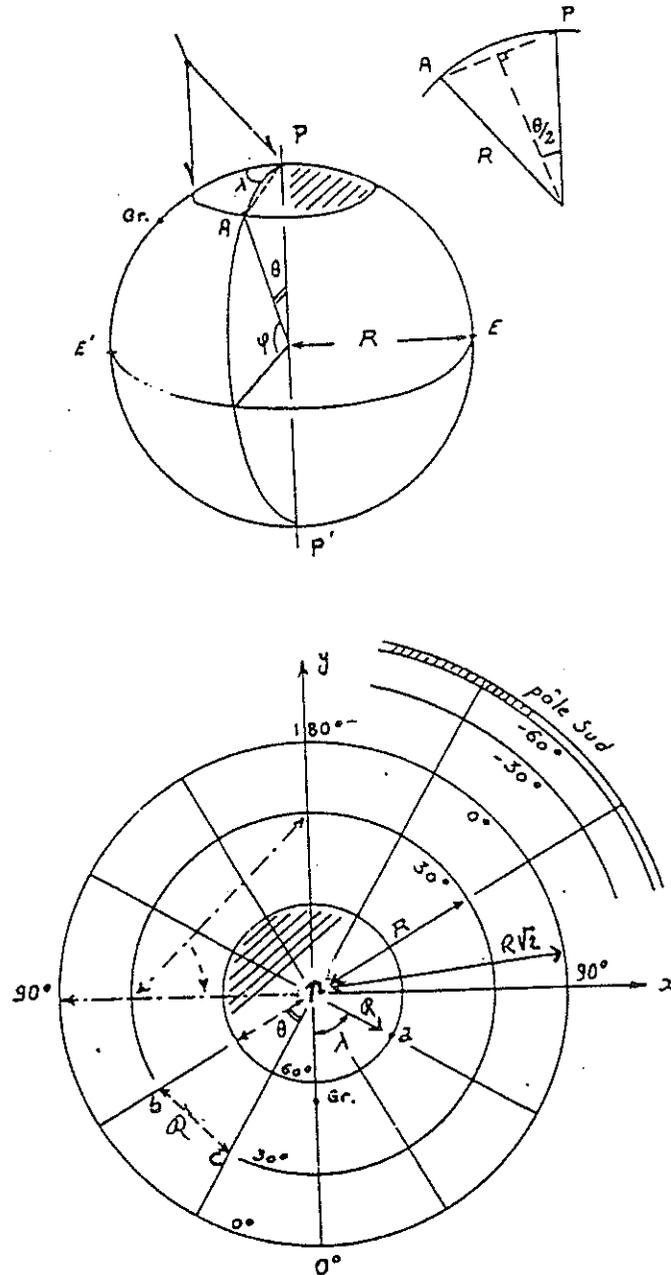


Figure 15 : Représentation de Lorgna

"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier  
IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

Les rayons des images de l'équateur et du parallèle de latitude  $30^\circ$  valent donc  $R\sqrt{2}$  et  $R$ .

Pour construire un point a sur la carte, on trace

- i) le cercle-parallèle de latitude  $30^\circ$  dont le rayon est  $R$ ,
- ii) deux méridiens faisant entre eux l'angle  $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$  soit l'angle (pb, pc),
- iii) la corde joignant les extrémités b et c. La longueur bc est alors égal au rayon  $\mathcal{R}$  de l'image du parallèle de latitude  $\varphi$ . On trace ce cercle.
- iv) On reporte depuis le méridien origine l'angle  $\lambda$  qui coupe le cercle en a.

- \* Les coordonnées de a(x,y), image du point A ( $\lambda, \varphi$ ) sont  $x = \mathcal{R} \sin \lambda$  et  $y = -\mathcal{R} \cos \lambda$ .
- \* Les modules linéaires valent  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$  sur les méridiens et l'inverse sur les parallèles.

Ils sont donc respectivement inférieur et supérieur à 1, conséquence de la propriété d'équivalence.

## VII - LES CASSINI

Quatre générations successives de Cassini ont occupé la scène de la cartographie, entre la création de l'Observatoire de Paris par l'Académie des Sciences en 1668 et le début du XIX<sup>e</sup> siècle : Jean-Dominique (1625-1712), Jacques (1677-1756), César-François Cassini de Thury (1714-1784), Jacques-Dominique (1748-1845). Ils mirent en pratique les principes de géodésie proposés par l'abbé Picard que Colbert avait nommé directeur de l'Observatoire lors de sa création. Pour Picard, la connaissance géométrique du Royaume devait se faire en établissant une triangulation de l'ensemble du territoire et en évaluant par des mesures astronomiques les coordonnées géographiques, et en particulier les longitudes pour lesquelles il savait que les mesures réalisées auparavant étaient peu fiables. Cette démarche, qui fut mise en place en plusieurs étapes, permit la réalisation de la première carte de France scientifique, celle dite de Cassini ou de l'Observatoire.

La méthode de triangulation, définie en 1533 par le flamand Frisius, consiste à recouvrir la longueur d'un arc de méridienne ou de ses perpendiculaires, par des triangles successifs dont les sommets sont des points en intervisibilité -sommets, clochers, tours- à partir desquels on mesure les angles de chaque triangle (voir la rubrique "Dans nos classes"). La connaissance d'un côté du triangle et de ses angles permet, grâce à la trigonométrie, de calculer les longueurs des deux autres côtés et, de proche en proche, de déterminer toutes les dimensions du réseau de triangles ainsi que la longueur de l'arc.

Jean-Dominique Cassini et l'abbé Picard, mesurèrent d'abord par cette méthode, la longueur d'un degré de méridien entre Malvoisine dans le Gatinais et Sourdon en Picardie. Jean-Dominique entreprit d'établir la mesure de la méridienne entre Dunkerque et Perpignan, mais ce travail fut interrompu à la mort de Colbert. L'expédition scientifique ne put être reprise qu'en 1700 par Jacques Cassini et La Hire. L'écart des mesures de la longueur d'arc correspondant à un degré d'angle, selon qu'elles étaient réalisées au nord ou au sud de la France, confirma que la terre n'était pas sphérique. D'après les mesures, la terre devait être

allongée vers les pôles. La théorie de Newton stipulait par contre que la terre était aplatie. Cette contradiction ne fut levée qu'avec les missions en Laponie (1736-1737) et au Pérou (1735-1743) réalisées par Delambre, Méchain, Bouguer et qui donnèrent raison au théoricien anglais. L'ensemble des mesures réalisées auparavant furent alors remises en question.

En 1739-1740, César-François Cassini de Thury et l'abbé La Caille reprirent la mesure de la longueur de la méridienne entre Dunkerque et Perpignan. Ces derniers étaient également chargés de la triangulation de la France afin d'améliorer la géodésie pour l'établissement d'une carte au 1/86400. Cette mission concernait la méridienne, les perpendiculaires à cette dernière -en premier lieu, celle passant par l'Observatoire de Paris- et les perpendiculaires de ces perpendiculaires. Il faut remarquer qu'en dehors de la méridienne elle-même, cet ensemble de lignes parallèles et perpendiculaires qui forment le réseau de triangulation ne sont ni des méridiens, ni des parallèles. La **figure 16** indique ces différentes lignes ainsi que la forme des courbes représentant les méridiens et les parallèles. La méthode de levé adoptée était associée pour la première fois à une projection, la projection cylindrique équidistante transverse réalisée sur l'ellipsoïde de Plessis établie d'après les résultats des expéditions de Laponie et du Pérou (voir ci-dessous).

L'établissement de la carte fut retardé par la guerre de sept ans qui mit un terme aux financements royaux et que des fonds privés ne parvinrent que partiellement à combler. La première carte, celle de Paris, n'a été publiée qu'en 1783 et dix ans après, cinquante feuilles sur les cent quatre-vingt deux prévues étaient éditées. A la mort de son père, Jacques-Dominique prit la relève et continua son oeuvre. Dans d'autres pays d'Europe, des travaux semblables furent entrepris.

#### **L'aspect mathématique de la représentation Cassini**

Cette projection équidistante a été utilisée au XVIII<sup>e</sup> siècle pour la première carte de France au 1/86400 calculée sur un ellipsoïde et non sur une surface sphérique comme auparavant. De nombreux pays européens l'ont employée pour l'établissement de leur cartes à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle et au XIX<sup>e</sup> siècle.

Les caractéristiques de la projection transverse sont déduites de la projection directe par rotation.

#### **A- Projection cylindrique équidistante directe**

C'est la représentation la plus ancienne, qu'on appelle carte plate carrée : les parallèles et les méridiens sont régulièrement espacés et l'image de chaque pôle est une droite parallèle à l'équateur située à une distance de  $R \frac{\pi}{2}$  de celui-ci. Les coordonnées de l'image  $a(x, y)$  d'un point  $A(\lambda, \varphi)$  sont données par  $x = R\lambda$  et  $y = R\varphi$  ( $R$ , rayon de la sphère terrestre réduite).

Le module linéaire vaut 1 suivant l'équateur et les méridiens, et  $\frac{1}{\cos \varphi}$  suivant les parallèles.



## VIII - BONNE (XIX<sup>EME</sup> SIECLE)

La projection de Cassini présentait l'inconvénient d'une déformation importante dans les zones limitrophes de la France. En 1803, la commission créée par le Dépôt de la Guerre <sup>9</sup> qui avait pour mission d'établir les conditions optimales à rechercher pour une carte de France, sélectionna la projection que l'ingénieur hydrographe Bonne avait étudiée en 1752. Le Dépôt de la Guerre vit également la nécessité de codifier les signes et d'uniformiser les conventions en usage dans les différents services publics chargés de cartographie. Ils définirent ainsi les règles de la cartographie moderne, notamment, *i*) l'échelle décimale liée au système métrique, *ii*) l'introduction de cotes établies en référence au niveau de la mer, *iii*) le tableau d'écriture qui avait été établi par un ingénieur géographe - du nom de Jacotin, *iiii*) les méthodes de gravure topographique.

Si le projet d'une nouvelle carte de France, initié pendant la Révolution, fut de nouveau envisagé sous Napoléon et pendant la Restauration, de nombreuses difficultés financières retardèrent sa concrétisation. Les levés s'étalèrent en effet entre 1818 et 1866, et l'impression au 1: 80000, entre 1833 et 1880. Les triangulations de la carte, dite d'État-major, ont été calculées sur l'ellipsoïde de Plessis.

Dès 1841, des révisions s'avèrent nécessaires pour tenir compte du récent développement du réseau des voies de communication. Les résultats obtenus au cours des premières années qui suivirent furent peu homogènes du fait d'une trop grande dispersion des compétences dans le domaine cartographique. Les divers services de cartographie militaires furent alors regroupés au sein du Service géographique de l'Armée, qui fit procéder au recueil des données par des opérateurs spécialisés à partir de 1889. Jusqu'en 1880, le Service hydrographique de la Marine française adopta également le système de Bonne pour ses cartes marines.

### L'aspect mathématique (Figure 17)

C'est une représentation dite "mériconique". Elle n'est pas conique dans la mesure où les méridiens ne sont pas des droites, mais elle a cependant des analogies avec les systèmes coniques. C'est une représentation équivalente qui a été utilisée pour la carte d'Etat-Major de France parce que, contrairement à la carte de Cassini, elle produit de faibles déformations dans les régions extrêmes, Est et Ouest. Elle a été très répandue pour les cartes à grande échelle de nombreux pays d'Europe au XIX<sup>e</sup> siècle. Actuellement, sa facilité de construction et ses faibles déformations favorisent son utilisation pour des cartes d'atlas.

Pour la construire, on trace  $s$  le point-image du sommet  $S$  du cône tangent à la sphère. Le méridien origine a pour image un segment  $pp'$  passant par  $s$ , de module linéaire égal à 1, divisé régulièrement selon les parallèles. Les parallèles sont des arcs de cercle centré en  $s$ , de module linéaire égal à 1 et de rayons  $\mathcal{R}$ .

pour le parallèle de latitude  $\varphi_0$ , choisi comme origine,  $\mathcal{R} = s\omega_0 = S\Omega_0 = R \cotan \varphi_0$

<sup>9</sup> Précurseur du Service géographique de l'Armée et de l'IGN.

et pour les autres  $\mathcal{R} = s\omega = s\omega_0 + \omega_0\omega = S\Omega_0 + \text{arc}\Omega_0\Omega = R (\cotan\varphi_0 \cdot (\varphi - \varphi_0))$ .

La projection du pôle est un arc de cercle.

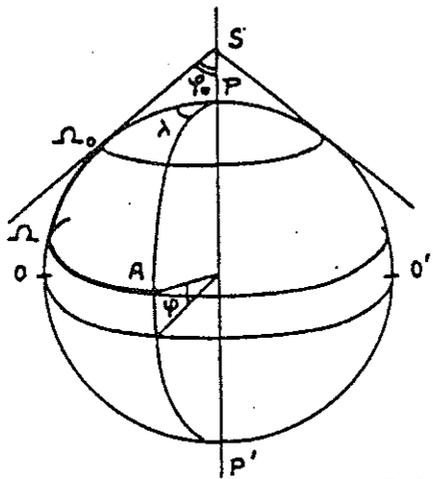
Les méridiens sont des courbes concourantes en  $s$ , construites point par point, selon la construction présentée ci-dessous :

Pour déterminer l'image  $a$  d'un point  $A (\lambda, \varphi)$ , on trace :

- i) le point  $s$  sur la droite méridien origine  $pp'$ ,
- ii) le cercle de rayon  $R \cotan\varphi_0$  qui coupe  $pp'$  au point  $\omega_0$ . Sur  $pp'$ , on détermine le point  $\omega$ , image de l'intersection  $\Omega$  du parallèle de latitude  $\varphi$  et du méridien origine :  $\omega_0\omega = \text{arc}\Omega_0\Omega = R (\varphi - \varphi_0)$ , les angles étant exprimés en radians.

On construit alors l'image du parallèle passant par  $A$ , cercle de centre  $s$  passant par  $\omega$ , puis la demi-droite  $sa$  qui fait avec l'image du méridien origine un angle  $\gamma = R\lambda \frac{\cos\varphi}{s\omega}$ ,

( $\lambda$ , longitude de  $A$ ). Le point  $a$  est l'intersection de ce cercle et de la demi-droite  $sa$ .



$\varphi_0 = 50^\circ$

"Notions sur les représentations planes de la terre" M. Gambier  
IGN Paris 1975 Autorisation n° 90-6071

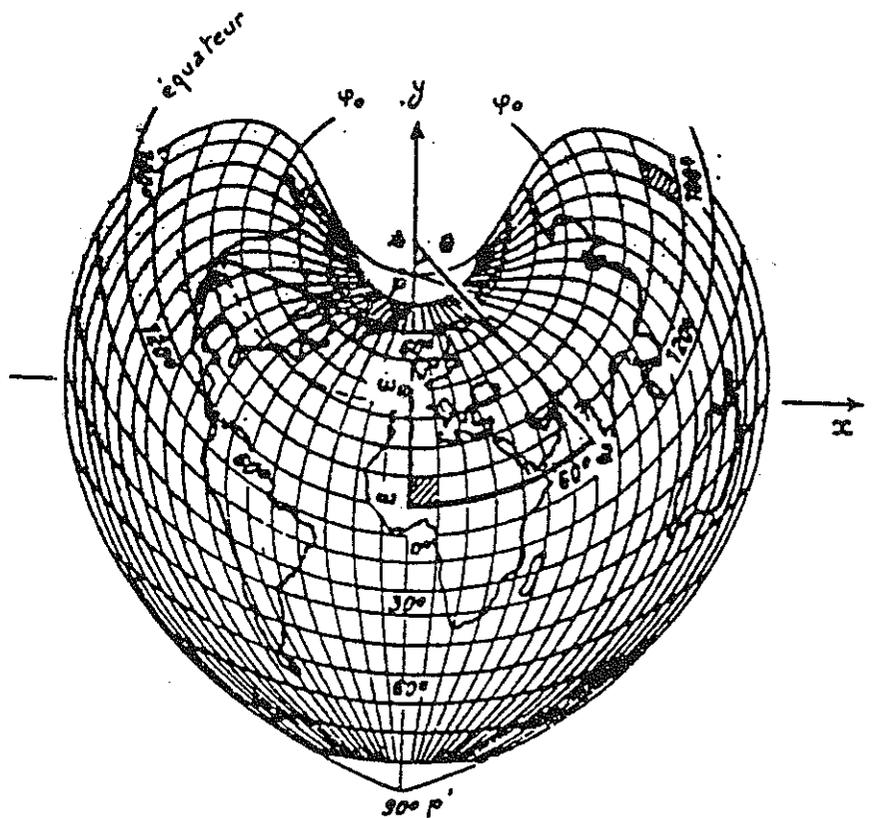


Figure 17 : Représentation de Bonne

Les coordonnées polaires de  $a (\gamma, \mathcal{R})$  sont

$\gamma = \lambda \cos\varphi (\cotan\varphi_0 - (\varphi - \varphi_0))$  et  $\mathcal{R} = R (\cotan\varphi_0 - (\varphi - \varphi_0))$ .

La projection de Sanson est un cas particulier de celle de Bonne où l'on choisit  $\varphi_0 = 0$

## CONCLUSION

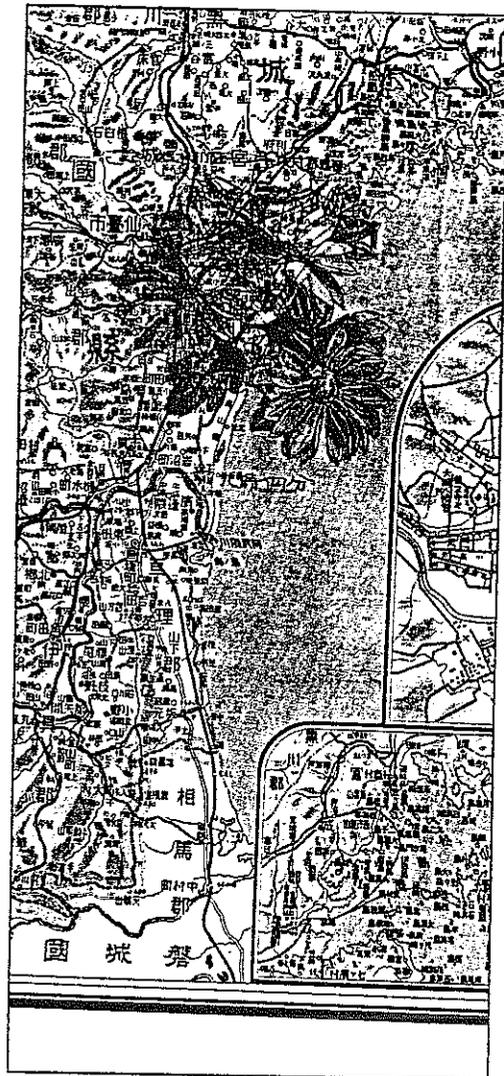
Nous venons de le voir dans ce raccourci de quelques siècles sur la cartographie occidentale : les représentations du monde ont joué un rôle privilégié dans les sociétés qui les ont produites. Elles ont été prises dans des enjeux de pouvoir et de prestige, politiques, militaires, commerciaux, techniques et intellectuels. C'est encore le cas au XX<sup>e</sup> siècle où la cartographie a été profondément modifiée avec l'introduction de l'ordinateur, des satellites, de la télédétection et de manière générale, des nouveaux moyens de communication et d'information. Elle semble de plus en plus étroitement mêlée aux développements scientifiques et techniques. On constate que les enjeux qu'elle suscite de nos jours favorisent encore cette évolution ambitieuse.

Toutefois, à côté du dynamisme de cette discipline et de ses progrès décisifs, il nous semble qu'au XX<sup>e</sup> siècle, la carte est singulière à plusieurs titres. D'une part, on assiste à sa banalisation. Cartes routières, cartes marines, cartes à petite ou grande échelle, toutes ces cartes qui, dans les siècles précédents, étaient tenues secrètes ou étaient réservées à quelques corps de métier, sont aujourd'hui des objets de consommation courante. D'autre part, la carte a étendu son champ de fonctionnalité. Elle ne se limite plus aux informations de territoires et d'itinéraires, mais peut traduire toute sorte de données (démographiques, économiques, géopolitiques, géologiques ...), imprimées sur des fonds de cartes établis scientifiquement ou sur des tracés symboliques (plan de métro, cartes SNCF...). Par ailleurs, elle apparaît dans de nombreux mouvements artistiques du XX<sup>e</sup> siècle -contestataires par essence à notre époque-. C'est au tout début de notre siècle que dadaïstes et surréalistes l'ont introduite comme élément dans leurs tableaux, alors même que l'espace de Newton, référent absolu, était remis en question par Einstein, bouleversant, on le sait, les certitudes acquises au XIX<sup>e</sup> siècle. La carte a ensuite traversé la plupart des mouvements artistiques de notre siècle.

Alors que la cartographie s'offre à nous dans son positivisme et son efficacité, la carte jouerait-elle, de façon paradoxale, un rôle métaphorique dans le questionnement artistique et intellectuel de notre époque ? Pour alimenter cette thèse, je laisserai Baudrillard (1981) affirmer que "c'est désormais la carte qui précède le territoire, c'est elle qui engendre le territoire" ou M. A. Brayer (1995) suggérer que "la carte comme fondation géométrique du monde, grille de coordonnées et de mesures, est devenue un instrument qui permet de s'attaquer aux fondements de la représentation". Petites phrases qui trouvent un écho quant à la lecture d'événements particuliers de notre XX<sup>e</sup> siècle.

## BIBLIOGRAPHIE

- Alinhac G., "Historique de la cartographie", Imprimerie de l'Institut Géographique National, 1986
- Baudrillard, "Simulacres et simulation", Paris, Ed. Galilée, 1981
- Brayer M.A., "Mesure d'une fiction picturale : la carte de géographie", in "Perte d'inscription", Exposé n°2, Revue d'esthétique et d'art contemporain, Premier trimestre 1995
- Colloque international et interdisciplinaire Jean-Henri Lambert, Université de haute Alsace, Centre de recherches et d'Etudes Rhénanes, Ed Orphys, Paris, 1979
- Cuenin R., "Cartographie générale, tome 1, Notions générales et principes d'élaboration", Ed. Eyrolles, 1972
- Gambier G., "Notions sur les représentations planes de la terre", Imprimerie de l'Institut Géographique National, 1984
- Jacob C., "L'empire des cartes - approche théorique de la cartographie à travers l'histoire", Albin Michel Histoire, 1992
- Jacquel R., "Le savant et philosophe mulhousien Jean-Henri Lambert (1728-1777), Études critiques et commentaires", Université du Haut-Rhin, Centre de recherches et d'études rhénanes, Ed Orphys, Paris, 1977
- Levallois J.J., "Mesurer la terre, 300 ans de géodésie française", Association française de topographie, Presses de l'École Nationales des Ponts et Chaussées, Paris, 1988
- Minelle F., "Représenter le monde", Presse Pocket, coll. Explora, 1992
- Pelletier M. (édité par), "Géographie du Monde au Moyen Age et à la Renaissance", Editions du Comité des Travaux Historiques et Scientifiques, 1989



中英見骨龍斷截

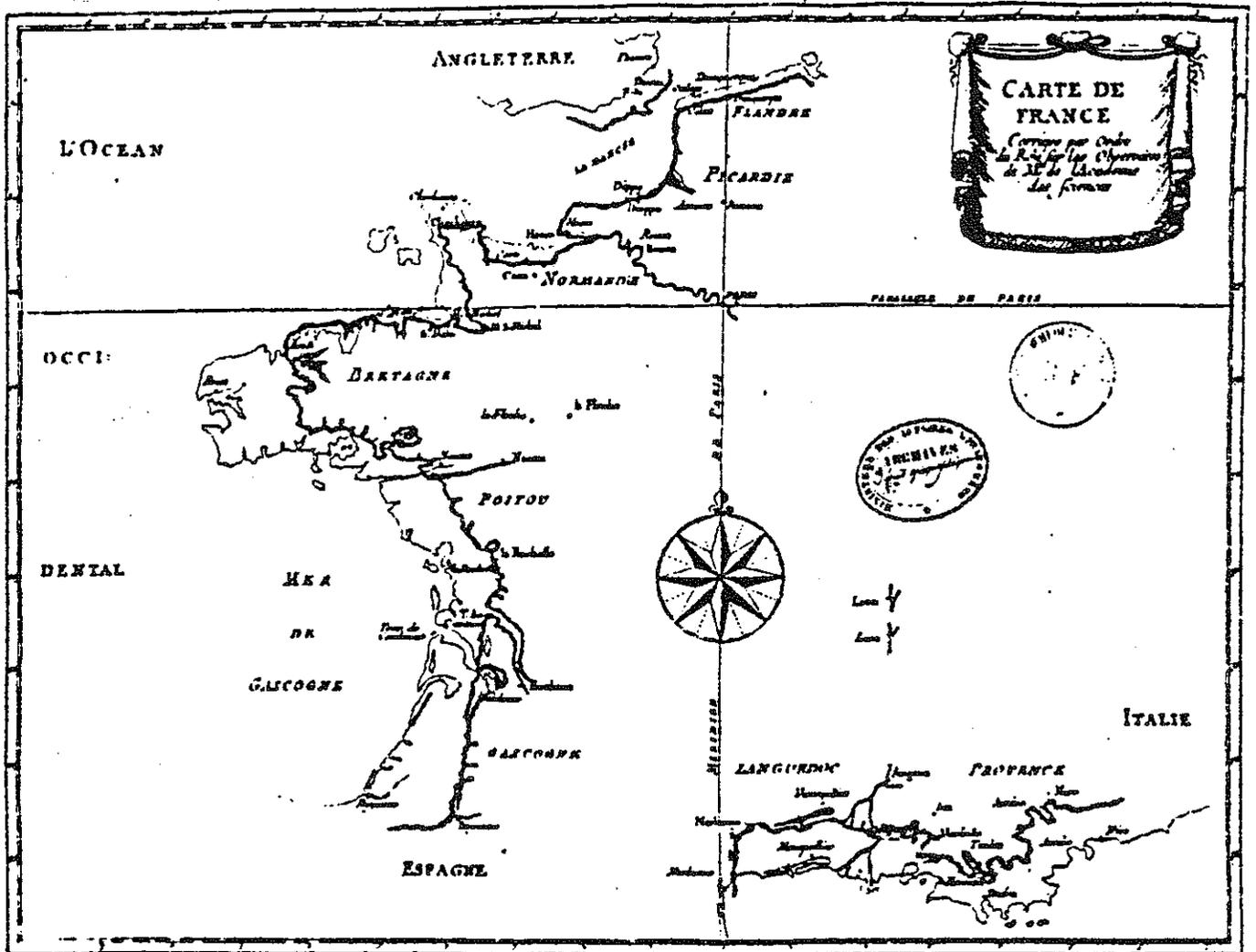


*Cerisiers et Chrysanthèmes - 1995*  
Dessin sur carte géographique et latex  
27 x 12 cm - 35 x 17 cm

Philippe LALEU

## GLOSSAIRE

- Antiméridien** : Méridien opposé au méridien origine qui forme avec celui-ci un angle de 180 °. C'est le méridien de changement de jour quand il est midi au méridien origine (Rappelons-nous l'heureux dénouement du "Tour du monde en 80 jours" !).
- Azimut** : Angle d'un plan vertical avec un autre plan vertical choisi pour plan origine (par exemple en astronomie : angle du plan vertical d'un astre avec le méridien du point d'observation).
- Cartographie** (définition de l'Association Cartographique Internationale, 1966, et de l'UNESCO) Ensemble des études et des opérations scientifiques, artistiques et techniques intervenant à partir de résultats d'observations directes ou de l'exploitation d'une documentation, en vue de l'élaboration de cartes, plans et autres modes d'expression.
- Cosmographie** : Description des systèmes astronomiques de l'univers (système solaire ; nébuleuses ; trajectoire de la terre par rapport aux étoiles ...).
- Echelle d'une carte** (ou échelle nominale) : Facteur d'homothétie pour passer de la terre à un ellipsoïde réduit (ou une sphère) dont on projetera les points sur le plan de la carte. Sur une carte au 1: 100 000, un cm correspond à une longueur 100 000 plus grande, soit 1Km .
- Ellipsoïde** : Solide engendré par la rotation d'une ellipse autour de l'un de ses axes.
- Géodésie** : Science qui a pour objet l'étude de la forme de la terre et de ses dimensions.
- Géographie** : Science qui a pour objet la description de la terre sous ces différents aspects (géologique ; économique ; humain ; physique ...).
- Gnomon** : Cadran solaire. De manière générale, tige dont on mesurait l'ombre portée afin d'estimer l'heure, mais également la latitude.
- Hydrographie** : Science qui étudie l'hydrosphère (la partie liquide de la terre).
- Indicatrice de Tissot** : Projection sur la carte d'un cercle infinitésimal de la surface terrestre réduite. Son image est une ellipse qui sert d'indicatrice pour les déformations associées à une projection.
- Loxodromie** : Routes à cap constant, c'est-à-dire un parcours à azimuth constant (angle avec la méridienne).
- Module linéaire** : Rapport d'une longueur  $ab$  du plan à la longueur correspondante  $AB$  sur l'ellipsoïde ou la sphère réduite à l'échelle :  $m=ab/AB$ . Quand il n'y a pas de déformation,  $m=1$ .
- Orthodromie** : Parcours selon un grand cercle de la terre. Plus généralement, plus court chemin géodésique de la sphère.
- Projection aphyllactique** : Projection qui n'est ni conforme, ni équivalente.
- Projection conforme** : Projection qui conserve les angles initiaux.
- Projection équidistante** : Projection qui conserve les longueurs sur les méridiens et l'équidistance des parallèles.
- Projection équivalente** : Projection qui conserve les rapports de surface initiaux.
- Planisphère** : Cartes représentant la terre entière d'un seul tenant.
- Rumb** (ou **Rhumb**) : quantité angulaire entre deux divisions de la rose des vents.
- Surface développable** : Surface qu'on peut appliquer sur un plan (par exemple, le cylindre ou le cône peuvent être ouverts par un coup de ciseau et être superposés à un plan).
- Topographie** : Science du levé des plans et des cartes avec prise en compte du relief.



Carte de France corrigée par ordre du Roi