

Une approximation de π

Martine BÜHLER

L'activité que nous proposons ici à partir d'un texte d'Euler est destinée aux élèves de T S, spécialité mathématiques. Il s'agit d'un problème d'approximations d'intégrales qui permet d'écrire $\frac{\pi}{4}$ comme limite d'une série (la série de Leibniz : $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$). L'originalité d'Euler est de se préoccuper d'améliorer la convergence très lente de cette série par des méthodes de calcul accessibles à nos élèves.

Le texte sur lequel s'appuie cette activité est extrait de *l'Introduction à l'Analyse infinitésimale*, qui est considérée comme le premier livre d'analyse "moderne".

Dans la préface, EULER décrit l'ouvrage : *"Je me suis d'abord étendu dans le premier livre sur les fonctions de variables"*. C'est effectivement sur ces définitions qu'ouvre le chapitre premier du livre I :

"4 - une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes."

10 - Il faut ensuite remarquer principalement la division des fonctions : uniformes et multiformes".

Rappelons que c'est la reconnaissance du caractère multiforme des logarithmes de nombres imaginaires qui a permis à EULER de mettre un terme à la célèbre "controverse entre messieurs Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires" ¹.

Les cinq premiers chapitres du livre I traitent des fonctions algébriques. *"Passant ensuite des puissances aux quantités exponentielles, qui sont elles-mêmes des puissances, dont les exposants sont variables, leur développement m'a fourni une idée fort naturelle et à la fois fort féconde des logarithmes."* (Préface)

Le chapitre II commence en effet par un exposé sur "la quantité exponentielle a^z ", où EULER explique ce qu'il entend par $a^{\frac{5}{2}}$ ou $a^{\sqrt{7}}$ ("une valeur déterminée comprise entre les limites a^2 et a^3 "). C'est à partir de cette notion qu'EULER définit le logarithme.

"102 - Si étant donné le nombre a , on peut conclure de chaque valeur de z , celle de y ($y = a^z$) réciproquement ayant pris pour y une valeur quelconque positive, on conçoit qu'il existe pour z un nom-

¹EULER, *Mémoire de l'Académie des Sciences de Berlin*, 1751 (voir l'article de Jean-Luc Verley dans *Fragments d'histoire des mathématiques* n° I - Brochure APMEP N°41 - 1981 -)

bre convenable pour que $a^z = y$; cette valeur de z , en tant qu'elle peut être regardée comme une fonction de y , s'appelle ordinairement le LOGARITHME de y . La théorie des logarithmes suppose donc l'existence d'un nombre constant représenté par a , que pour cette raison , on appelle la Base des logarithmes".

De cette définition, EULER tire les propriétés habituelles des logarithmes ainsi que l'établissement des tables.

Le chapitre VII est consacré au "Développement des quantités exponentielles et logarithmes en série".

La méthode d'EULER repose sur le développement du binôme et une manipulation hardie de quantités infiniment petites ou infiniment grandes.

Si ω est un infiniment petit (positif), a^ω est infiniment proche de 1, il pose donc $a^\omega = 1 + k\omega$, k dépendant de a . Mais alors :

$$\begin{aligned} a^{i\omega} &= (1 + k\omega)^i \\ &= 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{2!}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{3!}k^3\omega^3 + \dots \end{aligned}$$

Si z est un nombre fini et si on prend $i = \frac{z}{\omega}$, i est un infiniment grand .

$$\text{Comme } \omega = \frac{z}{i}, \text{ on a : } a^z = 1 + \frac{i}{1!}k\frac{z}{i} + \frac{i(i-1)}{2!}k^2\frac{z^2}{i^2} + \frac{i(i-1)(i-2)}{3!}k^3\frac{z^3}{i^3} + \dots$$

$$\text{Comme } i \text{ est infiniment grand, } 1 = \frac{i}{i} = \frac{i(i-1)}{i^2} = \frac{i(i-1)(i-2)}{i^3} = \dots$$

$$\text{donc } a^z = 1 + kz + \frac{k^2z^2}{2!} + \frac{k^3z^3}{3!} + \dots$$

Une méthode analogue donne le développement en série du logarithme :

Toujours pour ω infiniment petit, donc infiniment proche de 1, soit $a = 1 + k\omega$ (où k est un nombre réel dépendant de a), avec i infiniment grand dans $z = i\omega$, EULER pose:

$$(1 + k\omega)^i = a^{i\omega} = 1 + x$$

$$\text{et obtient } \ell(1+x) = \ell(a^{i\omega}) = i\omega$$

(Euler désigne par $\ell(y)$ le logarithme de base a de y).

Mais alors

$$1 + k\omega = (1+x)^{\frac{1}{i}}$$

$$k\omega = (1+x)^{\frac{1}{i}} - 1$$

$$\ell(1+x) = i\omega = \frac{i}{k} \left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1 \right)$$

Un travail de même type que celui mené plus haut pour la fonction exponentielle mène alors au développement de $\ell(1+x)$, puis en changeant x en $-x$, de $\ell(1-x)$ et de $\ell\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Il est alors pratique de choisir comme base du logarithme le nombre a qui correspond à $k = 1$, donc défini par $a^\omega = 1 + \omega$. Si on applique à ce nombre, pour $z = 1$, le développement obtenu précédemment pour a^z , on trouve :

$$a = a^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \text{ nombre qu'EULER désigne par } e \text{ et dont il calcule une approximation décimale.}$$

$$\text{Le développement fournit pour } z \text{ quelconque: } e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Et on a aussi, parce que $e^\omega = 1 + \omega$,

$$e^z = e^{i\omega} = (1 + \omega)^i = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i \text{ avec } i \text{ infiniment grand.}$$

C'est aussi le développement du binôme qui est l'origine des séries donnant les fonctions trigonométriques. La connaissance de formules de duplication amène EULER à affirmer :

$$\begin{aligned} (\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^n &= \cos nz \pm \sqrt{-1} \sin nz \text{ puis, à partir de} \\ \cos nz &= \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2}, \\ \text{il prend } z \text{ infiniment petit, } n \text{ infiniment grand donc :} \\ v = nz \text{ est fini, } \sin z &= \frac{v}{n}, \cos z = 1 \\ \text{d'où } \cos v &= \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \frac{v}{n})^n + (\cos z - \sqrt{-1} \frac{v}{n})^n}{2} \end{aligned}$$

D'une part, le développement du binôme et une manipulation des infiniment grands semblable à celle qui a été faite pour les logarithmes lui donne le développement en série de $\cos z$ (et de même $\sin z$), d'autre part, le fait que $e^{\sqrt{-1}v} = \left(1 + \sqrt{-1} \frac{v}{n}\right)^n$ pour n infiniment grand donne les célèbres formules d'EULER

$$\cos v = \frac{e^{\sqrt{-1}v} + e^{-\sqrt{-1}v}}{2} \quad \text{et} \quad \sin v = \frac{e^{\sqrt{-1}v} - e^{-\sqrt{-1}v}}{2}$$

En revenant à la variable z , on obtient donc l'arc z comme logarithme de quantités imaginaires dépendant de $\cos z$ et de $\sin z$:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} / \left(\frac{\cos z + \sqrt{-1} \sin z}{\cos z - \sqrt{-1} \sin z} \right) \\ z &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} / \left(\frac{1 + \sqrt{-1} \tan z}{1 - \sqrt{-1} \tan z} \right) \end{aligned}$$

d'où le développement de l'arc $\tan$ qui conduit à la "série de Leibniz" :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

C'est ce passage que nous avons choisi de faire étudier aux élèves (en leur faisant obtenir un développement en série d'Arctan par des méthodes plus "orthodoxes" que celles d'EULER, et qui permettent de majorer l'erreur). En effet, EULER se préoccupe d'améliorer la convergence très médiocre de la célèbre série. La lecture du texte permet donc une comparaison de vitesse de convergence et donne aux élèves un moyen d'obtenir le début du développement décimal de π .

C'est aussi bien sûr l'occasion de replacer EULER dans son contexte historique, de parler de l'émergence du concept de fonction.

Problème

A) Activités préliminaires.

Soit F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx$

- 1) a) Justifier l'existence et la dérivabilité de F .
b) Calculer $F'(t)$ et déterminer le sens de variation de F .
- 2) a) Montrer : pour $t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \frac{x^8}{1+x^2}$
b) En déduire : $F(t) = P(t) + R(t)$ où P est un polynôme de degré 7
et $R(t) = \int_0^t \frac{x^8}{1+x^2} dx$
c) Montrer : pour $t \in [0;1]$, $0 \leq R(t) \leq \frac{t^9}{9}$
- 3) Soit G définie sur $I =]-\pi/2; \pi/2[$ par $G(z) = F(\tan z)$.
a) Justifier la dérivabilité de G et calculer $G'(z)$ pour z dans I
b) Calculer $G(0)$.
c) Déduire de ce qui précède : pour z appartenant à I , $G(z) = z$.
- 4) a) Lire les lignes 1 à 5 du texte joint.
b) Quel est le lien entre ce texte et les questions précédentes ?
c) Expliciter le "&c" (et caetera).
- 5) a) Calculer $F(1)$ et $F(1/\sqrt{3})$.
b) Lire les lignes 5 à 9 du texte.
c) Que signifie le mot "série" ?

B - Approximation de π .

- 1) a) Calculer $P(1)$ à 0,01 près par défaut et déduire du A) un encadrement de $F(1) - P(1)$, puis un encadrement de π . Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?
Expliciter le "&c" de la ligne 7.
b) Lire les lignes 10 à 30 du texte. Traduire les termes d'EULER avec les notations du problème. En déduire un encadrement de π (mener les calculs intermédiaires à 10^{-4} près).
Quelle est l'amplitude de l'encadrement obtenu ?
- 2) Amélioration de l'approximation.
a) Lire les lignes 32 à 42. Vérifier les calculs d'EULER ; en particulier, démontrer la formule donnant $\tan(a+b)$.
b) On suppose : $\tan a = 0,5$. Calculer $\tan b$ (avec $a+b = \pi/4$)
Que valent $F(1/2)$ et $F(1/3)$?
Calculer $P(1/2)$ et $P(1/3)$ à 0,000 001 près par défaut. Majorer $R(1/2)$ et $R(1/3)$.
c) Lire la fin du texte. Expliquer, avec les notations du problème, l'égalité des lignes 46-47.
Déterminer un encadrement de π (en explicitant la démarche suivie) et comparer l'amplitude de l'encadrement à celle du 1°)b).

Faisons donc $\text{tang. } \chi = t$, de sorte que χ soit l'arc dont la tangente est t , & que nous désignerons ainsi: $A. \text{ tang. } t$, ce qui donne $\chi = A. \text{ tang. } t$. La tangente t étant connue, l'arc correspondant sera $\chi = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \&c.$ Puis donc qu'en supposant la tangente t égale au rayon 1, l'arc χ devient = à l'arc de 45° ou $\chi = \frac{\pi}{4}$, nous trouverons $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c.$ série que LEIBNITZ a donnée le premier pour exprimer la valeur de la circonférence du cercle.

141. Mais pour obtenir promptement, au moyen d'une telle série, la longueur d'un arc de cercle, il est clair qu'on doit prendre pour la tangente t une fraction assez petite. Ainsi, on trouveroit facilement, à l'aide de cette série, la longueur de l'arc χ , dont la tangente t seroit $\frac{1}{10}$; car cet arc seroit $\chi = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{50000} - \&c.$ série dont on peut aisément obtenir la valeur par le moyen des décimales; mais la mesure d'un tel arc n'apprendroit rien pour la longueur de toute la circonférence, parce que le rapport de l'arc, dont la tangente $= \frac{1}{10}$, à la circonférence entière est inassignable. C'est pourquoi, dans cette recherche, on doit prendre un arc qui soit une partie aliquote de la circonférence, & dont la tangente assez petite puisse être exprimée commodément. On choisit ordinairement pour remplir ce but l'arc de 30° dont la tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$, parce que les tangentes des arcs plus petits, qui ont un rapport commensurable avec la circonférence, sont trop irrationnelles.

Ainsi, à cause de l'arc de $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, on aura $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^3\sqrt{3}} - \&c.$ & $\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^3} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^5} + \&c.$ Et c'est par le moyen de cette série, & avec un travail incroyable, qu'on est venu à bout de trouver la valeur de π que nous avons donnée ci-dessus.

142. Ce calcul est d'autant plus pénible, que tous les termes sont irrationnels, & que chacun d'eux n'est gueres plus petit, que le tiers de celui qui précède; mais on pourra remédier ainsi à cet inconvénient: prenons toujours l'arc de 45° ou $\frac{\pi}{4}$. Quoique cet arc ait une valeur exprimée par une série à peine convergente $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c.$; conservons-le cependant, & imaginons-le partagé en deux arcs a & b , de manière que $a + b = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$. Puis donc que $\text{tang. } (a + b) = 1 = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \cdot \text{tang. } b}$, nous aurons $1 - \text{tang. } a \cdot \text{tang. } b = \text{tang. } a + \text{tang. } b$ & $\text{tang. } b = \frac{1 - \text{tang. } a}{1 + \text{tang. } a}$. Soit maintenant $\text{tang. } a = \frac{1}{2}$; nous trouverons $\text{tang. } b = \frac{1}{3}$; alors les deux arcs a & b seront exprimés par une série rationnelle beaucoup plus convergente que la précédente, & leur somme donnera la valeur de l'arc $\frac{\pi}{4}$. Donc

$$\pi = 4 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \&c. \\ \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \&c. \end{array} \right\}$$

On auroit donc pu trouver de cette manière la longueur de la demi-circonférence beaucoup plus promptement qu'on ne l'a fait, en se servant de la série que nous avons donnée auparavant.