BONNES VIEILLES PAGES

Le coeur de ce numéro est une étude sur les séries et les interrogations qu'elles ont suscitées tout au long de l'histoire. Ce travail a été amorcée par la lecture de l'introduction d'un ouvrage d'Emile Borel : *Leçons sur les séries divergentes*. Cette introduction est un petit chef d'oeuvre d'épistémologie et de pédagogie que nous vous présentons en "Bonnes feuilles". La première édition date de 1901. Elle est plus difficile à trouver que la suivante, qui date de 1928, mais ce n'est pas seulement pour cela que j'ai choisi la première édition. J'y lis toute la fraîcheur et l'enthousiasme d'un mathématicien en train de construire une théorie qui coïncide avec son intuition profonde et lui permet de réhabiliter certains travaux critiqués de très estimés prédécesseurs.

Dans la deuxième édition, "on" a tempéré les jugements personnels et ajouté des justifications mathématiques. A vrai dire, je pense que cette révision n'est pas de la main de Borel, mais plutôt de celle de Bouligand. Un indice étant que le "je" de la première édition est devenu "M. Emile Borel". Ministre de la Marine en 1925, Borel ne devait guère avoir le temps de s'occuper des rééditions. Pour donner à la lectrice et au lecteur un aperçu de cette évolution, j'ai souligné quelques passages supprimés dans la deuxième édition et signalé en note quelques ajouts, quand ils m'ont parus significatifs.

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES DIVERGENTES.

INTRODUCTION.

HISTORIQUE ET GÉNÉRALITÉS.

Les séries divergentes avant Abel et Cauchy.

On s'accorde généralement pour dater les débuts de l'Analyse moderne des travaux d'Abel et de Cauchy. Ce qui caractérise surtout ces deux géomètres, c'est le souci de la rigueur parfaite des raisonnements : c'est là la réforme essentielle qu'ils ont introduite dans les Mathématiques.

*Sans doute, avant eux, bien des géomètres avaient fait des raisonnements rigoureux; plusieurs même avaient une sûreté parfaite et ne se trompaient que d'une manière exceptionnelle. D'autre part, depuis Abel et Cauchy, il a été imprimé souvent des raisonnements inexacts, et eux-mêmes n'ont pas toujours échappé à l'erreur. Mais le point essentiel est d'avoir proclamé hautement et nettement qu'un raisonnement non rigoureux, un raisonnement par induction ou par à peu près, doit être, en Mathématiques, considéré comme inexistant. Ce principe une fois posé, il appartenait aux successeurs d'Abel et de Cauchy d'en tirer toutes les conséquences et d'introduire peu à peu la rigueur parfaite des méthodes et des raisonnements qui caractérise le développement mathématique de la seconde moitié du siècle qui vient de finir.

E. B. (3) 1

*Rappelons que c'est nous qui soulignons certains passages, pour indiquer qu'ils ont été supprimés dans l'édition de 1928.

Il est incontestable que la révolution ainsi accomplie a constitué un grand progrès et qu'elle était indispensable. On peut toutefois se demander si l'abandon complet des méthodes moins rigoureuses des géomètres du XVIII[e] siècle a été un bien au point de vue de la facilité de la découverte mathématique. Il a pu être nécessaire de les abandonner momentanément d'une manière complète, pour permettre au principe de la rigueur nécessaire de s'établir sans contestation; mais maintenant que ce principe est établi d'une manière définitive et irrévocable, l'étude des méthodes anciennes peut avoir du bon, à condition, bien entendu, qu'on les emploie seulement comme procédé de recherche, en se réservant de démontrer ensuite les résultats par les méthodes rigoureuses de l'Analyse moderne.

La théorie des séries divergentes est l'une de celles auxquelles s'appliquent le plus immédiatement les généralités qui précèdent; nous allons nous occuper exclusivement de cette théorie, et tout d'abord rechercher quel était l'état de la question avant les premiers travaux d'Abel et de Cauchy.

Le procédé le plus commode, et peut-être aussi le plus sûr, pour faire cette recherche, consiste à consulter le grand Traité de Calcul différentiel et intégral de Lacroix (¹).

On peut considérer, en effet, que cet Ouvrage résume l'Analyse ancienne; en le comparant avec l'*Analyse algébrique* de Cauchy (²), publiée seulement quelques années après, on mesure toute la distance qui sépare les Mathématiques du XVIII[e] siècle des Mathématiques du XIX[e]. Peu de comparaisons sont plus instructives pour l'histoire de la Science.

Mais revenons aux séries divergentes et voyons ce que nous apprend à leur sujet le Traité de Lacroix; nous emprunterons aussi quelques renseignements bibliographiques au substantiel article de M. Pringsheim dans l'Encyclopédie Burkhardt-Meyer (³).

Il importe tout d'abord d'établir une distinction entre les séries purement numériques et les séries analytiques, c'est-à-dire dont

---

(¹) S.-F. LACROIX, *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, seconde édition, 3 vol. in-4, Paris, 1810, 1814 et 1819.

(²) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. III. La première édition est de 1821.

(³) *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, I, A. 3, § 39-40.

les termes sont des fonctions d'une variable (ou de plusieurs; mais nous nous bornerons au cas d'une seule).

En ce qui concerne les séries divergentes numériques, l'impossibilité apparaît d'abord immédiatement de les utiliser directement pour un calcul précis.

Il est cependant un cas dans lequel elles ont paru pouvoir servir à un calcul approximatif; et, en fait, dans la pratique, on n'a jamais besoin que d'une approximation limitée; il est même presque toujours impossible de faire un calcul *exact*. Le cas dont nous voulons parler est celui où les termes de la série divergente commencent à décroître jusqu'à un certain terme minimum, pour augmenter d'ailleurs ensuite au delà de toute limite. En calculant la somme de la série jusqu'au terme minimum, on peut espérer avoir un résultat approché, dont l'approximation sera du même ordre de grandeur que ce terme et pourra, par suite, être très notable, si ce terme est suffisamment petit.

Souvent même, on n'aura pas besoin d'aller jusqu'au terme minimum, qui occupera un rang très élevé et sera bien plus petit que l'approximation désirée; on calculera simplement les premiers termes de la série, jusqu'à ce qu'on arrive à des termes assez petits pour qu'on puisse les considérer comme négligeables, et l'on adoptera la somme ainsi trouvée pour valeur approchée de la série.

L'exemple classique en Analyse de la série pour laquelle cette méthode réussit est la série de Stirling; mais nous aurons l'occasion d'y revenir tout à l'heure. Un exemple plus important est celui des séries que les astronomes emploient dans leurs calculs; ils les ont utilisées longtemps sans se douter qu'elles étaient divergentes, en calculant seulement les premiers termes. Depuis que M. Poincaré, dans un Mémoire célèbre [1], a démontré leur divergence, on continue à les utiliser dans bien des cas, car on y est encouragé par l'exactitude des résultats obtenus, en tous points conformes aux observations. Nous verrons, dans le Chapitre I, consacré à la théorie des séries asymptotiques de M. Poincaré, comment cette théorie permet de se rendre compte de ce fait, en apparence paradoxal.

[1] *Acta mathematica*, t. XIII.

Mais il est des séries divergentes numériques qui présentent un tout autre caractère; leurs termes ne vont pas en décroissant, ou même croissent constamment à partir du premier et augmentent au delà de toute limite.*

Comme exemples typiques de telles séries, on peut citer les deux suivantes, que l'on rencontre assez fréquemment dans les applications, et qui sont étudiées toutes deux dans le Traité de Lacroix :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{1}$$

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + 1.2.3.4.5 - \ldots. \tag{2}$$

La série (1), qui paraît avoir été considérée pour la première fois par Jacques Bernoulli et Leibnitz, a été très souvent choisie comme type de série divergente; elle a donné lieu, depuis Euler jusqu'à Cauchy, à de nombreuses discussions, et, après Cauchy, on l'a souvent signalée comme exemple de l'emploi illégitime des séries divergentes.

Euler considère la somme de la série (1) comme égale à $\frac{1}{2}$; et cette affirmation a pour lui la signification suivante : si, *par un calcul quelconque,* on est conduit à la série (1), le résultat de ce calcul est certainement $\frac{1}{2}$.

Ainsi présentée et prise à la lettre, la proposition d'Euler n'est certainement pas exacte, et l'on ne tarda pas à s'en apercevoir. Déjà plusieurs auteurs, Pierre Varignon, Nicolas Bernoulli, d'Alembert, avaient signalé le danger de l'emploi des séries divergentes. J'emprunte à M. Pringsheim la citation suivante de d'Alembert : « Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements fondés sur les séries qui ne sont pas convergentes... me paraîtront très suspects, même quand les résultats s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs. » (*Opusc. math.*, 5, 1768, p. 183).

Relativement à la série d'Euler, l'objection suivante se présenta bientôt.

Soient n et m $(n < m)$ deux entiers positifs; on a

$$\frac{1 - x^n}{1 - x^m} = 1 - x^n + x^m - x^{n+m} + x^{2m} - \ldots. \tag{3}$$

* Addition de 1928 : "Malgré cela il y a lieu, dans certaines questions, de leur attribuer une *somme conventionnelle.*"

Si l'on fait $x = 1$, on obtient

$$\frac{n}{m} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots .$$

La série d'Euler a donc ainsi pour somme une fraction positive quelconque.

Lagrange (¹) montra cependant que l'objection précédente pouvait être levée; Leibnitz avait fait reposer le calcul de la série (1) sur le calcul des probabilités; la somme de la série (1) étant 1 ou 0 suivant que l'on prend un nombre impair ou pair de termes, elle est aussi souvent égale à 1 qu'à zéro; donc sa valeur la plus probable est égale à la moyenne $\frac{1}{2}$. Lagrange fait observer que, si l'on veut appliquer la même méthode à la série (3), on doit observer qu'elle n'est pas complète et que si, pour plus de netteté, on prend $n = 3$, $m = 5$, elle doit s'écrire

$$1 + 0 + 0 - x^3 + 0 + x^5 + 0 + 0 - x^8 + 0 + x^{10} + 0 + \ldots .$$

Dès lors, on voit que, si l'on prend la somme successivement de 1, 2, 3, 4, 5, ... termes de la série, on constate que, sur cinq sommes consécutives, trois sont égales à 1 et deux à zéro; la valeur moyenne est donc $\frac{3}{5}$, ce qui est bien la vraie valeur de la fonction qui a donné naissance à la série.*

On peut prouver que le résultat ainsi obtenu n'est point dû au hasard et démontrer même, comme l'a fait voir M. Frobenius (²), une proposition plus générale; si l'on pose

$$\sum_{0}^{n} a_i = s_n,$$

on a

$$\lim_{x=1} \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1} + s_n}{n},$$

dans le cas où la limite du second membre existe.** On voit ainsi

(¹) *Voir*, pour cette discussion, LACROIX, t. III, p. 160; et LAGRANGE, Rapport sur le Mémoire de Callet, dans le Tome III des *Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut*.
(²) *Journal de Crelle*, t. 89, p. 262.

* Note ajoutée en 1828 : "La théorie des séries divergentes dans ses rapports avec le Calcul des probabilités a été étudiée tout récemment par M. Paul Lévy dans un Mémoire du *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 54,1926, p. 1-25 (*Sur les conditions d'application et sur la régularité des procédés de sommation des séries divergentes*)

** voir page suivante

** Ce long paragraphe et ses notes sont ajoutés dans l'édition de 1928.

Si dans cet énoncé, la série Σa_n est supposée convergente, les *sommes s_n tendent vers une limite. Donc la moyenne des sommes écrite au second membre a aussi une limite et cette limite est la même* (1). D'autre part, dire que Σa_n est convergente équivaut à dire que la série entière $\Sigma a_n x^n$ converge pour $x = 1$. Le rayon de convergence de cette série est donc ≥ 1. S'il surpasse l'unité, l'égalité précédente traduit la continuité de la série entière à l'intérieur de son intervalle de convergence; si le rayon de convergence est l'unité, la même égalité traduit le second théorème d'Abel, d'après lequel si x tend vers 1 par valeurs réelles, la fonction représentée par la série entière tend vers la somme de la série convergente Σa_n.

En résumé, le théorème de Frobenius apparaît donc comme une extension du théorème d'Abel, extension qui s'opère en conservant littéralement l'énoncé de ce dernier, à la seule condition d'adopter une nouvelle définition de la locution : *somme d'une série*. Pour l'obtenir, on substitue à la limite de s_n celle de la moyenne arithmétique (2)

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1}.$$

Moyennant cette nouvelle définition, la série d'Euler a effectivement une somme dont la valeur est $\frac{1}{2}$.

(1) Ce théorème est essentiel. On peut le démontrer en écrivant

$$\frac{(s_0 + \ldots + s_{p-1}) + (s_p + \ldots + s_n)}{n+1}$$

et faisant croître simultanément p et n de manière que le rapport $\frac{p}{n}$ tende vers zéro. Le résultat annoncé devient dès lors évident.

(2) Un calcul immédiat donne

$$s_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1},$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = (n+1)\sigma_n - 2n\sigma_{n-1} + (n-1)\sigma_{n-2}.$$

On en conclut que si σ_n possède une limite, le rapport $\frac{a_n}{n}$ tend vers zéro. Il en résulte que si la limite de σ_n existe, sans que s_n admette une limite, le rayon de convergence de la série entière $\Sigma a_n x^n$ est l'unité. La méthode de la moyenne arithmétique est donc susceptible de faire connaître la valeur de la fonction aux extrémités de l'intervalle de convergence, mais elle reste inopérante en dehors de celui-ci.

que la série, qui peut être divergente,

$$\sum_0^\infty a_n$$

peut être considérée comme ayant pour somme la moyenne arithmétique des diverses sommes obtenues en prenant successivement 1, 2, 3, 4, ... termes (ou du moins la limite de cette moyenne arithmétique).

Mais l'objection précédente n'est pas la seule que l'on puisse faire contre la proposition d'Euler; il est aisé de former des séries dont les termes dépendent d'une variable et qui se réduisent à la série d'Euler pour une valeur particulière de cette variable, alors que la valeur limite de la série est un nombre absolument quelconque.

Empruntons-en deux exemples à M. Pringsheim.

On a

$$\frac{-1}{1+x} = x - 1 + x^3 - x^2 + x^5 - x^4 + \ldots, \tag{4}$$

d'où

$$\frac{-1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

On peut d'ailleurs donner à la série (4), à laquelle on pourrait reprocher un arrangement arbitraire des termes, la forme suivante :

$$\sum_0^\infty x^{n+(-1)^n} \tag{5}$$

dans laquelle les exposants sont les valeurs successives pour $n = 0$, 1, 2, 3, ... d'une fonction simple de n.

De même, en désignant par $E(x)$ la partie entière de x, on a

$$\sum_0^\infty (-1)^n x^{E\left(\frac{n}{2}\right)} = 1 - 1 + x - x + x^2 - x^2 + \ldots,$$

d'où, pour $x = 1$,

$$0 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

Il serait aisé de multiplier et de varier ces exemples; faut-il en conclure, avec M. Pringsheim, que l'affirmation d'Euler est dépourvue de toute valeur et doit être complètement rejetée? Nous ne le pensons pas. Il importe, en effet, de remarquer que les anciens géomètres n'avaient point l'habitude de construire artificiellement des expressions analytiques compliquées pour prouver telle ou telle opinion; ils se contentaient, d'habitude, de calculer sur les expressions qui se présentaient naturellement à eux, au cours de leurs recherches.

Il doit donc être expressément sous-entendu, dans l'affirmation d'Euler que, *si l'on est conduit à la série* (¹) *par n'importe quel*

(¹) On devra, bien entendu, tenir compte des remarques de Lagrange rappelées page 5, relativement aux séries qu'il est naturel de considérer comme incomplètes et de compléter par des termes nuls. Si cependant la loi des termes manquants est suffisamment *régulière*, la proposition d'Euler paraît être encore vraie. Mais je ne puis ici préciser le sens du mot *régulière;* je renverrai à mes *Leçons sur les fonctions entières*, Note II, où l'on trouvera quelques indications à ce sujet, en attendant que je puisse publier une théorie générale de la croissance des fonctions.

Comme exemple d'une série importante en Analyse et où il manque des termes en grand nombre, on peut citer la suivante

$$s = 1 + q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + q^{36} + \ldots.$$

Lorsque q tend vers -1 par valeurs réelles, la limite de s est $\frac{1}{2}$, de sorte que l'on a, à la limite

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

Voici de ce fait une démonstration très élégante, due à M. J. Tannery. On a

$$\begin{aligned} \vartheta_4(v) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2 q^{n^2} \cos 2n\pi v \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}). \end{aligned}$$

En faisant $v = 0$, on obtient

$$\vartheta_4(0) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}) \right]^2.$$

Lorsque q est réel et positif, tous les facteurs du produit infini sont inférieurs à l'unité; on en conclut immédiatement que ce produit tend vers zéro lorsque q tend vers $+1$; si l'on observe que l'on a

$$\vartheta_4(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots,$$

calcul, on peut sans hésitation la remplacer par $\frac{1}{2}$, qu'il s'agit seulement des calculs que l'on sera conduit naturellement à faire, et non d'expressions construites exprès pour mettre la règle en défaut. Pour prouver donc que l'affirmation d'Euler est fausse, en se plaçant au point de vue d'Euler, il faudrait fournir l'exemple d'un géomètre qui, *n'ayant aucune préoccupation relative aux séries divergentes et à la légitimité de leur emploi*, a trouvé, dans des calculs ayant pour objet des recherches d'un ordre tout différent, une série telle que (5), pour laquelle la règle d'Euler est en défaut.

Tant qu'on n'aura pas fourni un tel exemple, on pourra dire que cette règle est exacte, *au point de vue pratique et expérimental*, puisque, depuis un siècle, elle n'aurait trompé aucun des géomètres qui l'auraient appliquée, sauf ceux qui se seraient précisément proposé comme but de la mettre en défaut; ceux-là, non plus, n'auraient d'ailleurs pas été trompés, puisqu'ils savaient à l'avance le but vers lequel ils tendaient.

Aussi n'y a-t-il point lieu de blâmer Fourier de s'en être servi sans scrupule (*Œuvres*, t. I, p. 206). Fourier fait d'ailleurs usage, dans le même Ouvrage (p. 191) de produits infinis divergents et il suffit de consulter la Note dans laquelle M. Darboux a rétabli le raisonnement rigoureux, pour se rendre compte que Fourier savait parfaitement ce qu'il faisait et ne risquait nullement de se tromper.*

Mais nous nous sommes assez étendus [1] sur la série (1); disons quelques mots de la série

$$(2) \qquad 1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + 1.2.3.4.5 - \ldots.$$

---

on en conclut immédiatement le théorème que nous avons énoncé relativement à la série s.

Ce théorème peut s'étendre, par l'emploi des formules de transformation (TANNERY et MOLK, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, formule XLIII_6), au cas où l'on suppose que q tend vers -1 en suivant un chemin quelconque non tangent au cercle de convergence; je dois aussi ce dernier résultat à une obligeante communication de M. Tannery.

[1] Faisons observer cependant que, *si l'on attribue une somme* à la série (1), cette somme ne saurait être autre que $\frac{1}{2}$; car si l'on pose

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

* Cette ardente défense des mathématiciens au nom d'une restriction de leurs résultats à un champ *naturel* des travaux mathématiques est remplacée dans l'édition de 1928 par une restriction *théorisée* et *axiomatisée* du champ d'application, que nous présentons page suivante.

* Extrait de l'édition de 1928

Nous ne pensons pas, pour cela, qu'il faille en conclure, avec M. Pringsheim, que l'affirmation d'Euler est dépourvue de toute valeur. Il vaut mieux l'interpréter de la manière suivante : si, dans un calcul, on est conduit à la série (1), on peut *en général* la remplacer par $\frac{1}{2}$; le résultat est exact toutes les fois qu'il s'agit de calculs se présentant naturellement, au cours d'une recherche objective, et non d'expressions construites artificiellement avec le souci de mettre justement la règle d'Euler en défaut (2).

Cet énoncé n'a évidemment qu'une valeur statistique. Mais on peut transformer la règle d'Euler en un théorème, parfaitement rigoureux, si l'on admet les prémisses suivantes :

1° Il existe une classe de séries, plus étendue que celle des séries classiquement dénommées convergentes, telle qu'à chaque série de cette classe, corresponde ~~une~~ *somme*;

2° La série d'Euler appartient à cette classe;

3° Soit S la somme d'une série Σa_n de la classe. La série $\Sigma\lambda a_n$ (où λ désigne un facteur quelconque indépendant de n) appartient elle-même à la classe et a pour somme λS;

4° Si la série $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ admet une somme S, la série $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ admet elle-même une somme égale à $S - a_0$.

Ces hypothèses entraînent la possibilité d'écrire légitimement

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - S,$$

d'où

$$S = \frac{1}{2}.$$

Finalement, les calculs au cours desquels il est permis d'appliquer la règle d'Euler sont donc ceux où, d'une manière implicite, on considère les hypothèses ci-dessus comme vérifiées.

Il ne peut être ici question de prendre une moyenne de sommes successives; cette moyenne n'existe pas; on ne peut pas non plus, comme il pourrait être suggéré par ce qui précède, introduire une variable x et chercher la limite de la série

$$(2)' \qquad 1 - 1.2x + 1.2.3x^2 - 1.2.3.4x^3 + \ldots$$

lorsqu'on y fait $x = 1$. Cette série $(2)'$ est, en effet, divergente pour toute valeur de x.

Lacroix obtient la somme de la série (2) par une transformation assez compliquée (t. III, p. 347); le résultat ainsi obtenu coïncide d'ailleurs avec la valeur d'une intégrale qui donne naissance à la série $(2)'$ et dont nous parlerons plus loin (p. 56).

Sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, on voit que, malgré des hésitations et des scrupules qui devaient mettre en garde contre les erreurs grossières, les géomètres du temps de Lacroix avaient d'assez bonnes raisons *expérimentales* d'avoir confiance dans les séries divergentes, même numériques.

A plus forte raison employaient-ils sans le moindre scrupule les séries divergentes dont les termes étaient des fonctions d'une variable. Considérant simplement au point de vue formel les calculs exécutés sur ces séries, ils étaient amenés à constater que les résultats de ces calculs exprimaient des faits analytiques précis, d'où ils tiraient des conséquences le plus souvent, sinon toujours, exactes [1]. Nous verrons plus loin comment de tels résultats sont aisément explicables.

---

on a

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S$$

d'où $S = \frac{1}{2}$. Relativement aux objections que l'on pourrait faire à ce raisonnement, en changeant l'ordre des termes, *voir* plus loin, p. 17.

[1] Le passage suivant du Traité de Lacroix (t. I, p. 4) montre très nettement le point de vue auquel il se plaçait :

« Il est à propos de faire attention au mot *développement* que l'on emploie ici au lieu de celui de *valeur;* car une série ne donne pas toujours la valeur de la fonction à laquelle elle appartient : quelquefois même, au lieu d'en approcher davantage, à mesure qu'on prend plus de termes, elle s'en éloigne sans cesse, ainsi qu'on peut le remarquer sur la fraction $\frac{a}{a-x}$ développée suivant les puissances de x. La série

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots$$

qui en résulte ne donne des résultats convergents vers la vraie valeur que dans

En somme, on peut résumer l'état de la Science à l'époque de Lacroix en disant que l'on avait dans les séries divergentes une confiance justifiée par les faits, mais cependant rendue prudente et quelque peu hésitante par des difficultés telles que celle qui a été étudiée page 5.

Les travaux de Cauchy.

Nous venons de dire que, à l'époque où Abel et Cauchy commencèrent à écrire, on avait, dans les séries divergentes, une confiance justifiée presque toujours, sinon toujours, par les faits. Aussi n'est-ce pas sans hésitation qu'Abel et Cauchy frappèrent

---

le cas où $x < a$; ce n'est donc que dans ce cas qu'il est permis de l'employer à déterminer par approximation cette vraie valeur, mais cependant l'expression

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots$$

considérée en faisant abstraction du dernier terme, c'est-à-dire comme contenant toujours des termes de même forme, quelque loin qu'on la prolonge, est tellement liée avec la fraction $\frac{a}{a-x}$, que si une question nous conduisait à la série

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots$$

nous serions en droit d'en conclure que la fonction cherchée n'est autre que $\frac{a}{a-x}$; ou si nous découvrions quelque propriété relative à une suite de termes tels que $1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots$, nous pourrions affirmer qu'elle appartient à la fonction $\frac{a}{a-x}$. Pour sentir la vérité de cette assertion, il suffit d'observer que le développement régulier d'une fonction, considéré dans toute son étendue, vérifie l'équation qui caractérise cette fonction. Dans l'exemple que j'ai choisi, si l'on fait $\frac{a}{a-x} = y$, on en conclura l'équation

$$a - (a - x) y = 0$$

et si l'on substitue, au lieu de la fonction y, son développement

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots,$$

on verra que, quelque loin qu'on le calcul pousse, les termes se détruiront toujours. On conçoit sans peine qu'il en serait de même dans tout autre exemple, et d'ailleurs il s'en présentera un grand nombre dans la suite de ce Traité. »

On verra qu'il y a peu de chose à ajouter aux idées de Lacroix pour obtenir la base d'une théorie rigoureuse des séries divergentes.

d'ostracisme les séries divergentes. Quelques citations montreront bien quels furent leurs scrupules. Abel écrit à Holmboë, le 16 janvier 1826 (*Œuvres complètes d'Abel*, édition Sylow-Lie, t. II, p. 256-257) : « Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration... la partie la plus essentielle des Mathématiques est sans fondement. *Pour la plus grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant* ».

D'autre part, dans la Préface de son *Analyse algébrique*, dès 1821, Cauchy écrit : « J'ai été *forcé d'admettre* diverses propositions qui paraîtront peut-être *un peu dures;* par exemple, qu'une série divergente n'a pas de somme... ».

On voit combien sont grands les scrupules de Cauchy; aussi ne doit-on pas s'étonner qu'il se soit posé, lui aussi, le problème énoncé par Abel dans le passage que nous avons cité, et ait recherché comment l'emploi des séries divergentes peut conduire, d'une manière presque constante, à des résultats exacts, tout en n'étant pas théoriquement légitime. Une mort prématurée n'a malheureusement pas permis à Abel de s'occuper de cette question, comme il en annonce l'intention; aussi avons-nous dû mettre le nom seul de Cauchy en tête de ce paragraphe.

En parcourant ses OEuvres, on se rend compte que le désir de trouver un mode d'utilisation des séries divergentes ne l'a jamais abandonné; il y revient à plusieurs reprises. Il se préoccupe aussi des intégrales définies dépourvues de sens, question connexe à celle des séries divergentes et pouvant être traitée par des méthodes en partie analogues, mais que nous laisserons systématiquement de côté, désireux de délimiter bien nettement notre sujet, et ne voulant pas y mêler un problème, intéressant sans doute, mais à peine effleuré jusqu'ici et qui appelle encore bien des recherches.

Sur les séries divergentes, les travaux de Cauchy sont d'importance très inégale; le court Mémoire sur la série de Stirling ([1]) se distingue nettement des autres par la clarté et la beauté de ses résultats; nous étudierons en détail ce Mémoire au début du Chapitre I; contentons-nous de dire ici que Cauchy y justifie, pour

([1]) *Comptes rendus*, t. XVIII, p. 370. — *Œuvres de Cauchy*, série I, t. VIII, p. 18.

la série de Stirling, le procédé de calcul approximatif dont nous avons parlé tout à l'heure (p. 3), pour les séries dont les termes décroissent d'abord beaucoup pour croître ensuite au delà de toute limite.

La théorie de Cauchy ne s'applique d'ailleurs pas à la seule série de Stirling; comme nous le verrons, il fait observer qu'elle s'applique aussi à une classe fort générale de séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable.

Mais cette partie du Mémoire de Cauchy, étant restée sans applications, est tombée dans l'oubli et la série de Stirling a été le seul exemple classique de *série asymptotique*, jusqu'au jour où M. Poincaré a fait une théorie générale de cette classe de séries, théorie dont les traits essentiels sont exposés dans le Chapitre I.

Parmi les autres recherches de Cauchy sur les séries divergentes, on doit citer sa théorie des séries *syntagmatiques*. Cauchy donne ce nom à des séries ordonnées suivant les puissances de plusieurs variables et qui sont convergentes ou divergentes, suivant la manière dont on arrange leurs termes. Nous devons nous borner à ces brèves indications, renvoyant pour les détails aux Mémoires de Cauchy ([1]). Signalons cependant un fait curieux : l'analogie certaine, quoique assez éloignée, de ces recherches de Cauchy avec les travaux récents de M. Mittag-Leffler, dont il sera question au Chapitre V. Nous devons d'ailleurs nous empresser de dire que les Mémoires de Cauchy, faute d'applications simples, étaient complètement tombés dans l'oubli, et que M. Mittag-Leffler n'en avait nulle connaissance lorsqu'il a fait sa belle découverte.

Le fait essentiel qui se dégage de cette revue rapide des travaux de Cauchy sur les séries divergentes, c'est que le grand géomètre n'a jamais perdu de vue la question des séries divergentes et a cherché constamment à atténuer cette proposition « un peu dure », suivant ses propres termes, *qu'une série divergente n'a pas de somme*. Les successeurs immédiats de Cauchy, au contraire, ont accepté cette proposition sans atténuation ni restriction, et paraissent avoir perdu complètement de vue les efforts qu'il a faits pour en diminuer la brutalité. Ils conservèrent seulement le souvenir

([1]) *Comptes rendus*, t. XX, p. 329. — *Œuvres de Cauchy*, série I, t. IX, p. 19.

*** Note de 1928 :**

([1]) Il est bien facile de comprendre dès maintenant comment ce point de vue consistant à rechercher un arrangement, ou plus généralement une transformation opportune des termes se rattache à ce qui précède. Soit $S_n(x)$ la somme des n premiers termes d'une série entière. En posant

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0 + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1},$$

on obtient la somme des $n+1$ premiers termes d'une série, ayant pour terme général un polynome. En substituant à la série entière cette série de polynomes (qui en résulte par transformation des termes), il se peut que cette deuxième série converge en certains points du cercle de convergence où la première était indéterminée.

de la théorie relative à la série de Stirling; mais la possibilité d'utiliser pratiquement cette série divergente apparaissait comme une curiosité tout à fait isolée, et sans importance au point de vue des idées générales que l'on pouvait chercher à se faire sur l'Analyse.

Les séries divergentes depuis Cauchy. — Le problème actuel.

Comme nous venons de le dire, on cessa, après la mort de Cauchy (1857), de se préoccuper des séries divergentes; c'est seulement plus de vingt ans après que paraît un travail se rattachant à cette question; je veux parler du *Mémoire de Laguerre sur l'intégrale* (1)

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}.$$

Nous dirons quelques mots de ce Mémoire au début du Chapitre II; contentons-nous de remarquer ici qu'il renferme seulement un fait isolé et ne paraissant pas pouvoir servir de base à une théorie générale. C'est seulement bien plus tard que Stieltjes, généralisant d'une manière fort large le résultat de Laguerre, a créé la belle théorie que nous exposerons dans ce Chapitre.

Mais c'est à 1886 qu'il faut faire remonter les premières recherches à la fois générales et rigoureuses, sur des séries divergentes. A cette époque, parurent simultanément deux Mémoires, l'un de Stieltjes (2), l'autre de M. Poincaré (3) sur les séries que le premier appelait *semi-convergentes* et le second *asymptotiques*. C'est ce dernier terme qui a prévalu; la théorie de M. Poincaré a, en effet, une portée bien plus haute que celle de Stieltjes, comme on s'en rendra compte aisément en lisant le Chapitre I.

Ce qui caractérise la théorie de M. Poincaré et lui donne sa grande importance, c'est qu'elle est basée essentiellement sur la

(1) *Œuvres de Laguerre*, t. I, p. 428. — *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII.

(2) STIELTJES, *Recherches sur quelques séries semi-convergentes* (*Annales de l'École normale*, 1886).

(3) POINCARÉ, *Acta mathematica*, t. VIII.

possibilité d'appliquer aux séries asymptotiques, dans des conditions bien déterminées que nous apprendrons à connaître, les règles ordinaires du calcul algébrique et du calcul intégral. *Les opérations ainsi effectuées correspondent exactement aux opérations analogues effectuées sur les fonctions que l'on fait correspondre aux séries.* C'est là le fait essentiel qui est le fondement de la théorie de M. Poincaré et qui doit être, *mutatis mutandis,* le fondement de toute théorie des séries divergentes qui aspire à être susceptible d'applications.

On trouvera dans les Chapitres III, IV, V, l'exposé de travaux plus récents sur les séries divergentes, travaux dans lesquels j'ai eu une part assez grande pour qu'il ne m'appartienne point de les commenter; je préfère terminer ce Chapitre en indiquant brièvement les principes fondamentaux qui m'ont guidé et qui dérivent d'ailleurs des remarques qui viennent d'être faites à propos de la théorie de M. Poincaré.

Il semble qu'à propos des séries divergentes on puisse se poser deux problèmes principaux, dont le second est, comme nous le verrons, un cas particulier du premier, mais mérite cependant d'être traité à part.

Le problème fondamental est le suivant : *Faire correspondre à chaque série divergente numérique un nombre tel que la substitution de ce nombre à la série, dans les calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts, ou du moins presque toujours exacts.* Il y aura lieu d'ailleurs, une fois ce premier résultat acquis, de fixer des classes, le plus étendues possible, de méthodes de calcul dans lesquelles on est *certain* que la substitution du nombre à la série est légitime. Pour les calculs ne rentrant pas dans les classes étudiées, on devra regarder le résultat obtenu comme seulement probable, et chercher à le vérifier par d'autres méthodes.

Il est d'ailleurs à peine utile d'observer qu'on ne peut guère espérer résoudre le problème précédent pour *toutes* les séries divergentes; l'infinité non dénombrable des modes de divergence paraît être un obstacle insurmontable; mais ce serait déjà un résultat fort important de l'avoir résolu pour les séries divergentes que l'on peut être effectivement amené à rencontrer dans les applications.

* Dans l'édition de 1928, cette phrase est remplacée par : "travaux auxquels M Emile Borel a pris une part importante".

On pourrait d'ailleurs être amené, comme nous en verrons des exemples plus loin, à attribuer *plusieurs sommes différentes* à une série divergente (¹); ce fait peut paraître tout d'abord étrange et paradoxal; il n'aurait pas paru moins étrange à un géomètre du XVIIIᵉ siècle d'entendre affirmer que l'intégrale définie

$$\int_1^2 \frac{dz}{z}$$

n'a pas seulement pour valeur $\log 2$, mais doit être considérée comme égale à

$$\log 2 + 2k\pi i,$$

k étant un nombre entier quelconque.

Mais nous laisserons à peu près complètement de côté cette question des valeurs multiples des séries.

Il est aisé de fixer, *a priori*, diverses conditions auxquelles devra satisfaire le nombre que nous appellerons la *somme* de la série divergente, par une extension naturelle du sens de ce mot.

* Il est d'abord clair que si les séries de termes généraux u_n et v_n ont pour somme U et V, la série de terme général $au_n + bv_n$ devra avoir pour somme $a\mathrm{U} + b\mathrm{V}$, quelles que soient les constantes a et b.

Il est clair aussi que si la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

a pour somme U, la série

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

doit avoir pour somme

$$\mathrm{U} - (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}).$$

De même, dans des conditions à préciser, la multiplication des séries divergentes devra être possible, et la série *produit* devra avoir pour somme le produit des sommes des séries *facteurs*.

Les remarques précédentes permettent déjà de calculer la valeur *nécessaire* que l'on doit attribuer à la somme de certaines séries, si toutefois il est possible de leur attribuer une valeur. Nous les

(¹) Et aussi à une série convergente.

* Le texte de 1928 qui remplace toute cette fin de l'introduction est reproduit dans l'article "Le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries, p

avons déjà utilisées, en fait, page 8, à propos de la série d'Euler. Voici un autre exemple : soit

$$s = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots.$$

On a

$$s = 1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots) = 1 - 2s,$$

d'où

$$s = \tfrac{1}{3}.$$

Il est cependant deux opérations que l'on devra se garder d'effectuer sur les séries divergentes : c'est le changement de l'ordre des termes, et le remplacement de termes consécutifs par leur somme (¹), *lorsque ces opérations seront faites une infinité de fois,* car il résulte, d'une remarque faite à la page précédente, que ces opérations sont légitimes lorsqu'on ne les effectue qu'un nombre limité de fois.

Il est manifeste d'ailleurs que la seconde des opérations dont nous venons de parler ne saurait être légitime si la première ne l'est pas; car, en effectuant successivement cette seconde opération et l'opération inverse, on peut obtenir un changement pur et simple de l'ordre des termes, c'est-à-dire effectuer la première opération (²).

Or, un peu de réflexion suffit pour se rendre compte que ce changement de l'ordre des termes ne saurait être légitime.

On sait, en effet, que, même dans le cas des séries convergentes, on peut modifier la somme à volonté en changeant l'ordre des termes, toutes les fois que la série n'est pas absolument convergente.

(¹) Ou, inversement, la décomposition d'un terme en une somme de plusieurs autres.

(²) Par exemple, la série d'Euler s peut s'écrire

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

et ensuite

$$(-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$-1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

ou $-s$.

D'ailleurs, on peut démontrer (¹) que si l'on désigne par δ_n le déplacement du terme de rang n de la série, c'est-à-dire la différence entre les nombres qui expriment son rang dans la série primitive et dans la série modifiée, il suffit, pour que le changement de l'ordre des termes n'altère pas la valeur de la série, que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \delta_{n-p} u_n = 0, \tag{1}$$

ou bien

$$\lim_{n=\infty} \delta_n u_{n+p} = 0, \tag{1'}$$

quel que soit l'entier positif p qui peut varier avec n; ces deux conditions sont d'ailleurs équivalentes; mais il ne suffit pas que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \delta_n u_n = 0. \tag{2}$$

Or, pour une série convergente, dont les termes tendent nécessairement vers zéro, la condition (1) est nécessairement vérifiée si tous les δ_n sont finis. Mais pour une série divergente, dont les termes ne tendent généralement pas vers zéro, la condition (2) ne sera pas vérifiée, même si les δ_n ne dépassent pas l'unité. Il est donc fort naturel, par analogie avec ce qui se passe pour les séries convergentes, que le changement de l'ordre des termes altère la valeur de la série. Des exemples très aisés à former montrent d'ailleurs qu'il en est effectivement ainsi.

On doit donc considérer, dans une série, le rang de chaque terme comme faisant partie intégrante de ce terme; une série n'est pas seulement une collection dénombrable de nombres; c'est une telle collection, dont les éléments sont rangés dans un ordre déterminé, et cet ordre importe autant que la valeur des éléments. Sans doute, pour les séries absolument convergentes, la somme ne dépend pas de cet ordre et, à un certain point de vue, on peut en faire abstraction; mais il n'en serait sans doute plus de même si l'on s'inquiétait des diverses valeurs que peuvent avoir ces séries, comme nous l'avons dit p. 15.

Cette manière de considérer les séries : une collection de

(¹) *Voir* Borel, *Sur le changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1890).

nombres, *dont chacun a un rang déterminé,* est, à mon sens, *tout à fait essentielle en Analyse;* il faut y ajouter qu'une modification portant sur un nombre *limité* de rangs, et pouvant par suite diminuer tous les rangs d'un nombre fixe, à partir d'un certain terme, *est sans importance;* mais c'est *à l'infini,* si l'on peut ainsi s'exprimer, c'est-à-dire dans les termes dont le rang augmente indéfiniment, qu'il importe de ne pas bouleverser l'arrangement de la série, sous peine de changer complètement son caractère.

Laissant maintenant de côté les séries divergentes numériques, passons au second problème que nous avions annoncé : il est relatif aux séries de fonctions toujours divergentes. La théorie des séries de fonctions tantôt convergentes, tantôt divergentes, suivant la valeur de la variable (ou des variables) se rattache, en effet, à la théorie du prolongement analytique et il n'y a pas lieu d'y insister ici; nous en parlerons dans le Chapitre IV.

Le problème actuel est, comme nous l'avons dit, un cas particulier du précédent puisque, si l'on savait calculer la somme de la série numérique obtenue en donnant à la variable (ou aux variables), dans la série de fonctions, une valeur particulière quelconque, on aurait la connaissance complète des valeurs numériques de la fonction représentée par la série. Cette fonction serait donc connue, au moins théoriquement, et son étude rendue possible.

Mais on conçoit qu'il puisse être le plus souvent avantageux d'étudier cette fonction directement, sans passer par l'intermédiaire de ses valeurs numériques, et c'est pourquoi nous avons distingué ce second problème du premier.

Le cas particulier de ce second problème qui paraît être de beaucoup le plus important, dans l'état actuel de l'Analyse, est celui qui est relatif aux séries de puissances toujours divergentes. Nous nous en occuperons à diverses reprises dans le courant de cet Ouvrage.

Remarquons simplement ici que ces séries se présentent naturellement, comme intégrales vérifiant formellement des équations différentielles, et qu'il est par conséquent tout indiqué de chercher à déterminer, à l'aide de ces séries, les fonctions intégrales.

Il est clair, d'ailleurs, sans qu'il soit besoin d'insister sur ce point, que les règles de sommation de ces séries de fonctions devront satisfaire aux lois fondamentales que nous avons reconnu être nécessaires pour les règles de sommation des séries numériques. En particulier, pour les séries de puissances, la multiplication s'effectue d'après des règles évidentes : elle devra donner pour résultat une série dont la somme sera le produit des sommes des séries facteurs.

PAR

ÉMILE BOREL