

1 - 1 + 1 - 1 + 1 - etc. à l'infini

Maryvonne HALLEZ

La "série" $1-1+1-1-....$ que nous pouvons écrire $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (-1)^i$ a occupé sous différentes formes

plusieurs mathématiciens et philosophes et non des moindres¹ depuis le 17ème siècle après avoir donné beaucoup de fil à retordre aux "géomètres" du Moyen-Age. Le propos de cet article est la lecture de la lettre adressée par Leibniz au philosophe Christian Wolf *"sur la science de l'infini"* qui traite justement de cette série. A l'époque de Leibniz, *"la nouvelle acuité du débat résulte de l'interprétation théologique que le père Guido Grandi, jésuite, auteur d'une quadrature du cercle et de l'hyperbole prétend y greffer"*². Il énonce que $0+0+0+... à l'infini$ donne une quantité non nulle expliquant ainsi de manière tendancieuse voire hérétique le mystère de la création.

Voici quelques questions un peu provocatrices qui peuvent introduire le débat. Considérons l'expression $0 + 0 + 0 + 0 +etc. à l'infini$.

Est-ce un objet mathématique ? Peut-on attribuer à la somme $0+0+...$ la valeur 0 ? Est-ce le même objet que $1-1+1-1+... etc. à l'infini$ au sens où $1+2+3$ serait le même objet que $3+3$? Peut-on poser $x = 1-1+1-1+...etc. à l'infini$, en déduire $x = 1 - x$ et obtenir $\frac{1}{2} = 1-1+1-1+...etc. à l'infini$? Dira-t-on seulement : toute somme partielle est 0 ou 1 ?

Les mathématiciens contemporains qualifient $1-1+1-1+...$ de série alternée admettant deux valeurs d'adhérence 0 et 1. Cette série est donc divergente. Leibniz va proposer trois démarches pour "prouver" l'égalité $\frac{1}{2} = 1-1+1-1+...etc. à l'infini$, que nous présentons dans l'aide à la lecture qui va suivre. Le but de la réflexion sur cette lettre est de montrer les paradoxes qu'entraîne la décision de poser l'infini et d'introduire les outils mathématiques forgés pour domestiquer ces paradoxes. Quelle formulation va satisfaire une communauté scientifique ? Quel outil conceptuel va remporter l'adhésion ?

D'Euclide à Grégoire de Saint-Vincent, donc du 3ème siècle avant Jésus-Christ jusqu'en 1647, une seule méthode pour "apprivoiser l'infini" celle que nous appelons méthode d'exhaustion dont le fondement est la proposition 1 du livre X des *Éléments* d'Euclide³. Cette proposition n'aura pas de rivale avant le 17ème siècle. La scolie à cette proposition donne le cas particulier de la dimidiation ou

¹Citons Leibniz, les frères Bernoulli, le Marquis de l'Hospital, d'Alembert, Euler, Bolzano, Woodhouse, Peacock, De Morgan, Laplace, Lagrange, Borel, Bourbaki, Grattan-Guinness, Frobenius.....

² *"La naissance du calcul différentiel"* de G.W. Leibniz - Introduction, traduction et notes de Parmentier - Vrin 1989 p.434

Le texte de la lettre donnée en annexe est également tiré de cet ouvrage.
La quadrature de Grandi fut publiée à Pise en 1703.

³Cf. Mnemosyne n°1 p. 18

dédoublément ; à partir d'une grandeur donnée , si on lui en enlève sa moitié puis la moitié de sa moitié et ainsi de suite que restera-t-il ? Euclide répond : une grandeur moindre que toute grandeur proposée à l'avance quelle que petite qu'elle fût. On peut aussi dire que le lièvre ne rattrapera jamais la tortue, que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ ne sera jamais 1, ou répondre comme Leibniz $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ Écrire cette égalité

est un des coups de force de Leibniz qui vont lui permettre de déraciner les méthodes archimédiennes en les arrachant aux limites inhérentes à la mathématique grecque et d'inventer le calcul différentiel. Il affirme fortement la véracité de l'égalité ; *"une égalité peut être stricte et rigoureuse même si elle enveloppe l'infini que ce soit l'infiniment petit ou l'infiniment grand . 2 est autant que $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ le*

*diamètre et son carré étant 1, le cercle est $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$ "*¹ Il substitue ainsi à l'égalité statique

de Descartes, à l'adégalité de Fermat², une égalité dynamique constitutive de la "doctrine des séries" qui manifeste *"les merveilleuses harmonies de la nature"*. Cette position philosophique est liée au principe de raison suffisante : *"rien ne se fait sans raison suffisante : c'est à dire que rien n'arrive sans qu'il soit possible à celui qui ne connaîtrait assez les choses, de rendre une Raison qui suffise pour déterminer pourquoi il en est ainsi, et non autrement."*³ Deux autres éléments de la valise métaphysique de Leibniz utilisés dans cette lettre à Christian Wolf sont

- la loi de justice que l'on peut exprimer ainsi : s'il n'y a pas plus d'arguments en faveur d'une quantité que d'une autre la loi de justice conduit à prendre *"le milieu entre les deux quantités ayant même raison d'être."*
- et la loi de continuité : lorsque la différence entre deux grandeurs "peut être diminuée au-dessous de toute grandeur donnée in datis ou dans ce qui est posé, il faut qu'elle se puisse trouver aussi diminuée au-dessous de toute grandeur donnée in quæsitis ou dans ce qui en résulte."⁴

Christian Wolf (1679-1754) a exercé une grande influence sur la philosophie allemande de son temps. Il est d'abord mathématicien, professeur de mathématiques à Halle à partir de 1707; il se tourne officiellement vers la philosophie l'année même de cette lettre de Leibniz en 1713; mais sa correspondance avec Leibniz s'étend de 1704 à 1716. Parmi les "wolfiens", on rencontre le mathématicien Jean-Henri Lambert. Influencé par Descartes, Spinoza et Locke, il est en relation avec Tschirnaus et comme lui il considère la mathématique comme un idéal méthodologique. Toute vérité doit être déduite d'une vérité précédente; les premières vérités sont le principe de non-contradiction et le principe de raison suffisante. Il élabore une science de l'être en général en tant qu'être possible. Accusé de spinozisme, d'idéalisme et de fatalisme, il est exilé. Frédéric II, le nouveau roi de Prusse le rappelle à Halle en 1740.

¹ Leibniz - lettre à Varignon publiée en 1702 dans le Journal des Savants.

² *De vera proportione circuli* 1682

³ Leibniz *Principes de la nature et de la grâce fondés en raison* Epiméthée PUF p.45.

⁴ Leibniz lettre à Bayle février 1687 citée par Parmentier op. cit. p. 445

Aide à la lecture.

(le texte de la lettre est donné en annexe.) ¹

Présentation des trois démarches de Leibniz:

1. Dans la première démarche, il utilise la somme des séries suivantes

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2 \qquad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{3}{2}$$

connues depuis la publication en 1647 de l'*Opus Geometricum* de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)

et il écrit

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad \text{etc. à l'infini} \quad (1)$$

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots \quad \text{etc. à l'infini} \quad (2)$$

en précisant "à condition naturellement de supposer en x une quantité plus petite que un".

Il attribue la première égalité à Saint-Vincent, la deuxième à Nicolas Mercator (1620-1687).

Dans un passage célèbre de la *Logarithmotechnica* publié en 1668 à Londres, Nicolas Mercator veut quarrer l'hyperbole c'est-à-dire déterminer l'aire comprise entre l'hyperbole équilatère d'équation $y = \frac{1}{1+x}$, les axes $(x'x)$ et (yy') et la droite d'équation $x = a$.

Il effectue la division du numérateur par le dénominateur

$\begin{array}{r} 1 \\ -(1+x) \\ \hline -x \\ -(-x-x^2) \\ \hline x^2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1+x \\ 1-x+x^2+\dots \end{array}$
--	---

"ita, continuata operatione $\frac{1}{1+a} = 1 - a + aa \dots$ " ²

La fraction $\frac{1}{1+x}$ peut être considérée comme point de départ ou point d'arrivée de la série infinie $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a^i$ dans le cas où a est positif et inférieur à l'unité.

¹ L'aide à la lecture et le problème qui suit ont fait l'objet d'une publication dans *Histoire d'infini*, Actes du colloque de la commission inter-IREM, d'épistémologie et histoire des mathématiques, publié par l'IREM de Caen, 1994

² ainsi en continuant l'opération.

L'aire cherchée est ainsi donnée par la série infinie $a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \dots$ pour $0 < a < 1$.

Cette "découverte sensationnelle de la série $\log(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$ par Mercator"

ouvre "des perspectives toutes nouvelles sur l'application des séries et principalement des séries de puissances, aux problèmes dits impossibles"¹.

D'après Montucla, Lord Brouncker aurait fait cette découverte auparavant en 1657.

Leibniz ose alors remplacer x par 1 dans (2) : "Observons ce qui se passe si $x = 1$. A notre grand émerveillement, il vient alors

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ etc. à l'infini".}$$

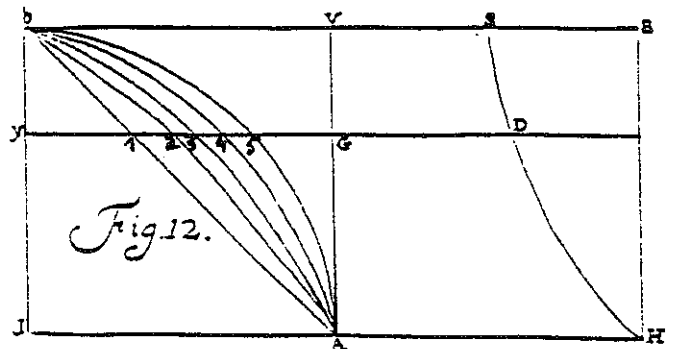
2. La deuxième démarche consiste, à l'aide de la figure du mathématicien et théologien Guido Grandi (1671-1742), à "mettre à la portée des gens peu familiarisés au calcul abstrait" ce "merveilleux" résultat en utilisant la **loi de continuité**.

Sur $]0,1[$ Grandi représente les courbes dont les ordonnées sont respectivement $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$ et la courbe dont l'ordonnée est $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ c'est à dire la courbe dont l'ordonnée est $\frac{1}{1+x}$.

Pour $x = AG < 1$ on a
 $GY - G1 + G2 - G3 + G4 - G5 + \dots = GD$
 en nommant 1,2,3,4,5 les points d'abscisse $x = AG$. Pour $x = 1$, le premier membre devient

$bV - bV + bV - bV + bV - bV + \dots$, le
 deuxième membre devient $Vs = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Conclusion de Grandi :
 $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$



Leibniz fait ce commentaire : "Ceci est en accord avec la loi de continuité ... Dans les continus, on peut considérer une limite externe comme une limite interne", que l'on peut interpréter ainsi :

la fonction $x \rightarrow \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$; la série $1 - x + x^2 - \dots$ est convergente sur $[0,1[$. Donc

en considérant 1 qui est extérieur à $[0,1[$ comme "limite interne", Leibniz étend l'égalité $1 - x + x^2 - \dots = \frac{1}{1+x}$ à la valeur $x = 1$.

¹ Bourbaki *Eléments d'histoire des mathématiques* - Hermann 1969 p.230

3. La troisième démarche est la plus surprenante, elle consiste à établir une moyenne en probabilité : il y a autant de chances d'obtenir 0 ou 1 pour la somme de cette série puisqu'il y a équiprobabilité du pair et de l'impair dans la suite des entiers naturels.

Donc la somme de cette série est $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$!

Le pouvoir de conviction est faible pour un mathématicien moderne, mais reste fort pour beaucoup de non-mathématiciens même de nos jours, et donc pour les élèves.

Il ne faudrait pas en conclure que Leibniz ne fait aucune considération de convergence : dans une lettre du 26 juin 1705 il écrit à Hermann :

*"Il me semble que la détermination des limites est une partie essentielle de la théorie des séries si on veut la traiter complètement. En effet dans tous les cas tant que nous ne démontrons pas que la série converge vers le terme inconnu, afin que nous puissions rendre l'erreur plus petite qu'une quantité donnée, nous ne pouvons pas conclure que la série complète donne ce terme"*¹ Et pourtant dans cette lettre de 1713 on pourrait croire que Leibniz se laisse prendre à "l'évidence" géométrique du dessin de Grandi. Le problème est complexe et vient de la nature des séries divergentes. Leibniz affine son analyse quelques mois plus tard dans une lettre à Bernoulli du 10 janvier 1714 : *"Si tu y prêtes attention tu remarqueras aisément que lorsque les termes d'une série sont continûment décroissants et alternativement positifs et négatifs la valeur qu'elle exprime converge et est par conséquent fini"*². Il précise là le critère suffisant de convergence d'une série alternée, qu'il avait déjà proposé en 1705, lequel critère ne s'applique évidemment pas à la série $1 - x + x^2 \dots$ pour $x = 1$.

Quelques prolongements :

En 1795, appelé à enseigner les mathématiques aux Écoles Normales par un décret de la Convention Nationale, Laplace va présenter les principes et les résultats de la théorie des probabilités, Dans l'introduction à son cours, il met en garde sur les illusions que les hommes, désirant ardemment un événement peuvent entretenir dans l'estimation des probabilités ; il cite à ce propos quelques exemples tirés de la vie quotidienne comme la crainte d'un futur père dont le souhait le plus cher est d'avoir un fils: celui-ci doit naître la deuxième quinzaine de mars ; or le 15 de ce mois le quota de garçons pour le mois est atteint ! Un autre exemple d'illusion dans la calcul des probabilités sur lequel Laplace s'étend longuement est notre fameuse série : *" les préjugés de l'enfance peuvent égarer les plus grands hommes"*, dit-il en référence à Leibniz qui, dans son Arithmétique binaire a imaginé que l'unité pouvait représenter Dieu et zéro représenter le néant. Laplace reprend un à un les arguments de Leibniz de la lettre à Wolf et,

¹ Parmentier op. cité p. 438 note 12

² Parmentier op. cité p. 439-440 note 15

dans sa critique de la naïveté leibnizienne quant à l'estimation des probabilités s'appuie sur de considérations d'analyse. Il reprend une objection de Nicolas Bernoulli en l'étayant d'un exemple¹:

"Mais ces séries peuvent résulter d'une infinité de fractions différentes..." Ainsi la série "plus un, moins un, plus un etc." peut naître du développement d'une "fraction dont le numérateur est l'unité plus la variable et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté du carré de la variable".

Soit $\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + \dots$ le second membre devient bien $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, si l'on substitue 1 à x, mais $\frac{1+x}{1+x+x^2} = \frac{2}{3}$ pour $x = 1$, et $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$. Laplace conclut alors "les règles de probabilité donneraient donc alors un faux résultat, ce qui prouve combien il serait dangereux d'employer de semblables raisonnements, surtout dans les Sciences mathématiques que la rigueur de leurs procédés doit éminemment distinguer."²

L'argumentation de Laplace est renversée par le raisonnement de Lagrange "qui montre que cette objection n'est pas essentielle" comme le dit Emile Borel dans son introduction aux Leçons sur les séries divergentes de 1901. Lagrange prend comme fonction de la "série" la fraction rationnelle

$\frac{1 + x + \dots + x^{n-1}}{1 + x + \dots + x^{m-1}}$ avec $n < m$ dont l'exemple de Laplace est un cas particulier et prenant par

exemple $n = 3$ et $m = 5$

$$\frac{1 + x + x^2}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4} = 1 + 0 + 0 - x^3 + 0 + x^5 + 0 + 0 - x^8 \dots$$

les sommes partielles sont 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, soit 3 fois 1 et 2 fois 0 toutes les 5 sommes .

La loi de justice donne pour valeur $\frac{3 \times 1 + 2 \times 0}{5} = \frac{3}{5}$.

En 1847, Bolzano s'attaque à une autre justification du $\frac{1}{2}$ comme somme de la série

$\begin{array}{r} a \\ -(a+a) \\ \hline -a \\ -(-a-a) \\ \hline +a+\dots \end{array}$	$\begin{array}{r} 1+1 \\ a-a+a\dots \end{array}$
---	--

en posant $a - a + a \dots = x$ comme nous l'avions fait dans l'introduction

$$x = a - x \quad x = \frac{a}{2} \quad \text{si } a = 1 \quad x = \frac{1}{2}$$

et il écrit "l'erreur est ici assez évidente : la série entre parenthèses n'a manifestement plus le même ensemble de termes que celle donnée d'abord ; elle a en moins le premier a. Sa valeur si tant est qu'elle en ait une aurait dû être notée $x-a$ ce qui aurait dû donner l'identité $x = a+x-a$ "³ et énonce une propriété pouvant garantir contre les errements : pour considérer cette série comme une "grandeur" c'est à dire "comme la somme de ses termes" il faut qu'elle vérifie "la propriété de ne subir aucun changement dans sa

¹Laplace annexe lignes 47 à 52

²Laplace annexe lignes 54 à 59

³ Bolzano Paradoxes de l'infini introduction et traduction Hourya Sinaceur Seuil 1993 p. 109

valeur quelque soit le changement introduit dans la succession de ses termes. Les grandeurs en effet satisfont nécessairement la relation suivante :

$$(A+B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B..(\dots) -1+1-1+1...in\ inf.$$

devrait, si elle n'était pas complètement vide, être égale à $+a$ et aussi à $-a$ avec le même droit que nous prenions pour l'égaliser à 0." Il reprend ensuite la remarque classique de Leibniz, de d'Alembert, de Lagrange, "les séries obtenues résultent d'une division qui, à chaque étape, a un reste ... et c'est précisément pour cette raison qu'elles ne peuvent donner la vraie valeur du quotient ... que si les restes deviennent plus plus petits que toute grandeur si petite soit-elle."

Pour conclure cette introduction de la problématique, voici deux citations montrant bien la diversité des approches possibles.

Frobenius en 1880 dans un article intitulé à propos de la série de Leibniz veut éclairer ce qu'il appelle "le paradoxe de la série infinie $1-1+1-1... = 1;2$)"¹ Il pose $S_n = a_0 + a_1 \dots + a_n$. Si $\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1} + s_n}{n}$ a une limite finie M quand n augmente, si la série $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ converge pour x compris entre 1 et -1 on pourra prendre M comme limite quand x tend vers 1 , ce qui lui permet d'attribuer un sens à l'égalité infinie. Il définit ainsi une convergence en moyenne.

Borel en 1901 : "Si dans un calcul on est conduit à la série $(1-1+1-1...etc.)$ on peut en général la remplacer par $\frac{1}{2}$; le résultat est exact toutes les fois qu'il s'agit de calculs se présentant naturellement au cours d'une recherche objective et non d'expressions construites artificiellement"² On peut attribuer une somme à une série divergente et même plusieurs dans le cadre de certaines problématiques.

¹Frobenius, *über die Leibnitzsche Reihe Journal für angewandte Mathematik* 1880 p. 262 à 264.

²Borel *Leçons sur les séries divergentes* Gauthiers-Villars 1901

Travail avec les élèves. Texte de problème.

De nos jours nous introduisons la notion de suite géométrique dans le cadre du cursus de 1ère et

Terminale : pour la suite $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $S_n = u_1 + \dots + u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$.

L'activité proposée aux élèves peut-être menée comme introduction à la notion de limite ou comme mise au point de cette notion.

A. Travail préliminaire à la lecture du texte de Leibniz

Dans un repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 6$ cm, construisez les courbes représentatives des fonctions f, g, h, k, l définies sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=1, \quad g(x)=x, \quad h(x)=x^2, \quad k(x)=x^3, \quad l(x)=x^4$$

Pour chaque fonction vous tracerez avec soin le point d'abscisse $\frac{2}{3}$ et vous nommerez j, b, V, G, Y les points de coordonnées respectives $(0,1); (1,1); (1,0); \left(\frac{2}{3}, 0\right); \left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

Dans un autre repère $(A', \vec{i}, \vec{j})$ de mêmes vecteurs unitaires que le précédent construisez la courbe représentative de la fonction définie sur $[0,1]$ par $m(x) = \frac{1}{1+x}$.

Vous appellerez H, D, S , les points de $\mathfrak{C}_m$ d'abscisses respectives $0, \frac{2}{3}$ et 1 et B le point de coordonnées $(1,0)$.

B. Lecture du texte 1 :

I - Justifiez et écrivez en symboles modernes la ligne 11.

II - Justifiez le passage de la ligne 11 à la ligne 14

III - Justifiez la ligne 18

IV - Quelles sont les propositions disjonctives dont il est question ligne 42 ?

Quelle est la proposition affirmative de la ligne 43 ?

V - Quel commentaire pouvez-vous faire ?

C. Lecture du texte 2 :

Vous vous servirez des graphiques tracés en A.

Leibniz appelle 1, 2, 3, 4 les points de même abscisses sur les différentes courbes ; on peut utiliser les équivalences de notations suivantes : $GY = f(x)$ $G1 = g(x)$ $G2 = h(x)$ $G3 = k(x)$ $G4 = l(x)$

I - Calculez $f(x) - g(x) + h(x) - k(x) + l(x)$ pour $x = \frac{2}{3}$ puis à 10^{-4} près la différence entre cette forme algébrique et $m\left(\frac{2}{3}\right)$.

II - Reprenez la question I pour $x = 0,9$ et pour $x = 0,1$

III - Quelle est la limite quand n tend vers l'infini

de $1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \dots + \left(-\frac{2}{3}\right)^n$;

de $1 - 0,9 + 0,9^2 \dots + (-0,9)^n$

et de $1 - 0,1 + 0,1^2 \dots + (-0,1)^n$

IV- Donnez une autre formulation pour les lignes 10 à 12.

V - Quelles conclusions tirez-vous de ces lectures ?

Commentaires

Les objectifs du travail avec les élèves étaient les suivants :

- Révision de la comparaison graphique des fonctions monômes de degré de 0 à 4.
- Utilisation des connaissances sur les séries géométriques.
- Approfondissement de la notion de limite.

En classe de 1ère, le travail préliminaire A(Cf. p.52) fut donné à faire à la maison et corrigé en classe avant la distribution des deux extraits du texte et du devoir B (Cf. p.52) l'accompagnant.

En classe de Terminale, les deux travaux A et B sont donnés conjointement.

La correction en classe fut accompagnée de la lecture du texte intégral avec les élèves.

Pour la question B.I, la plupart des élèves utilisèrent

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u_0 \frac{1}{1-q}$ pour la suite géométrique $u_n = x^n$, $u_0 = 1$ de raison x , avec $0 < x < 1$.

Mais certains justifiaient l'égalité par la division infinie de 1 par $1 - x$.

Pour la question B.II, les réponses s'équilibrèrent entre l'utilisation de la suite géométrique de raison $-x$, avec $0 < x < 1$ et la substitution de $-x$ à x ; quelques-uns refirent la division infinie de 1 par $1 - x$.

Dans l'ensemble, les élèves répondirent correctement aux questions et une vue d'ensemble claire de la partie B se dégagait de leurs remarques. Il n'en était pas de même pour la partie C dont l'objectif leur parut fort confus jusqu'à la mise en commun des remarques et l'analyse de la figure de l'un d'entre eux agrandie sur transparent.

Le savoureux débat du XVIII^e siècle dont la lettre de Leibniz à Wolf se fait l'écho, trouva son répondant dans les virulentes discussions des élèves qui se poursuivirent au café du lycée.

Voici quelques-unes de leurs remarques :

"Quel moyen peut-on utiliser pour obtenir quelque chose de fini à partir de rien ?".

"Sont-ce vraiment des riens?"

La discussion qui suivit fit référence à la question de Dieu créant le monde fini à partir de rien . Nous discutâmes alors sur la forme indéterminée $0 \times \infty$. " Peut-on avoir $0 \times \infty = \frac{1}{2}$?"

Je leur proposai comme exemple la fonction $f : x \rightarrow \frac{x+1}{2x+1} = (x+1) \times \frac{1}{2x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x+1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$$

Voici pour conclure une remarque fort poétique d'une élève : "0 ou 1, symbiose du 0 et du 1 à l'infini, l'infini bouclé sur lui-même par la moyenne arithmétique" ...

Je laissai un certain suspense en ne répondant pas tout de suite aux questions "Leibniz a-t-il raison ?". "Que dit-on aujourd'hui ?" Je leur proposai, à la fin de l'heure, la réponse de Knobloch : *"Aujourd'hui on dit que c'est une série alternée avec deux points d'accumulation. Donc selon la définition de la convergence d'une série infinie, cette série est divergente."* Ce fut un soulagement pour beaucoup.

Dans la classe de terminale, certains élèves émirent le souhait de lire d'autres textes du "même genre". Je leur proposai alors un extrait de l'article "Séries" de l'Encyclopédie méthodique de Diderot et d'Alembert, qui est donné en annexe, et dont la lecture se fit sans problème. Ces élèves avaient pris goût à la "division infinie".

Texte 1

Dans la question remise récemment à l'ordre du jour par *Guido Grandi*, vous me demandez si je suis d'avis que $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. à

l'infini est égal à $\frac{1}{2}$ et comment écarter l'apparente absurdité d'une telle proposition. En effet puisque l'égalité $1 - 1 = 0$ semble se reproduire
 (5) une infinité de fois, on ne voit pas comment la répétition à l'infini de purs néants pourrait faire $\frac{1}{2}$

Ceux qui, suivant l'exemple du grand Archimède dans sa quadrature de la parabole, ont calculé la somme de termes en progression Géométrique, au premier chef *Grégoire de Saint Vincent*, ont déjà montré que

(10) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4 + \text{etc.}$ à l'infini, à condition naturellement de supposer en x une quantité plus petite que un. Nicolas Mercator du Holstein a transposé ce résultat en

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5 + \text{etc. à l'infini,}$$

(15) Laissons-là les quadratures et revenons à la série de termes en progression Géométrique (qui me suffit pour ce que je veux faire)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 + \text{etc. à l'infini, ou}$$

$$\frac{1}{1+xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 + \text{etc. à l'infini. Observons ce qui se passe}$$

si $x = 1$. A notre grand émerveillement il vient alors :

(20) $\frac{1}{1+1}$ soit $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc. à l'infini, ce que la}$
 figure employée par M. Grandi nous met en quelque sorte sous les yeux.

- Il m'appartient à présent de révéler la véritable solution, peut-être inattendue, en tout cas singulière, de cette énigme, ainsi que
- (25) l'explication du *paradoxe*, en me ramenant d'abord à une série finie pour passer ensuite à une série infinie. Remarquons en effet que pour une série finie il faut distinguer deux cas qui, de façon assez surprenante, se confondent dès qu'il s'agit d'une série infinie : . Nous pouvons développer une série finie : $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ de deux
- (30) manières : elle est ou bien constituée d'un nombre pair de termes et : termine par un $-$, comme $1 - 1$, $1 - 1 + 1 - 1$, ou $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$: dans ce cas, aussi loin que nous poursuivons, nous obtenons toujours 0. Ou bien la série est constituée d'un nombre impair de termes et se termine par un $+$, par exemple $1 - 1 + 1$, $1 - 1 + 1 - 1 + 1$, aussi
- (35) loin que nous poursuivons, tous les cas donnent $+1$. Mais lorsque la Série est infinie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ à l'infini, au-delà de tout nombre, en même temps que disparaît la notion de nombre, disparaît également la détermination pair impair. Et comme il n'y a pas plus d'arguments en faveur de la parité que de l'imparité, ni par conséquent
- (40) en faveur d'un résultat égal à 0 ou à 1, le génie admirable de la nature fait que le passage du fini à l'infini s'accompagne du passage de propositions disjonctives (qui disparaissent) à une proposition unique affirmative (qui subsiste), moyen terme entre les deux propositions disjonctives. Or ceux qui ont traité des estimations ont montré que
- (45) lorsqu'il s'agit de prendre le milieu entre deux quantités ayant même raison d'être : , il faut prendre la moyenne Arithmétique, c'est-à-dire la moitié de leur somme : c'est ainsi que la nature conserve ici encore sa loi de justice, par conséquent puisque dans le cas d'un nombre fini de termes la série $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ vaut 0 si le nombre est pair et 1 s'il
- (50) est impair, lorsque la multiplicité infinie des termes fait disparaître les deux cas, que les prérogatives du pair et de l'impair se confondent et que l'un et l'autre ont exactement la même raison d'être, nous obtenons par conséquent $\frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$ comme je l'avais.

Soit le carré bJAV, traçons la diagonale Ab ou A₁b, ainsi qu'une (1)
 infinité de paraboles et de paraboloides A₂b, A₃b, A₄b, A₅b etc., de
 sorte que si nous prenons le côté du carré comme unité, que nous
 notions x l'abscisse AG, et que nous traçons la droite yG normale à (5)
 AG coupant la diagonale et les paraboloides en 1, 2, 3, 4, 5, etc., les
 ordonnées Gy, G1, G2, G3, G4, G5 etc. soient respectivement
 1, x, xx, x³, x⁴ x⁵ etc. et qu'en conséquence les segments de droites

Gy, G1, G2, G3, G4 etc. soient en progression Géométrique. Ceci
 posé, prolongeons bV jusqu'à B, avec BV = bV, et yG jusqu'à D de
 façon que GD soit la réunion des ordonnées alternativement (10)
 additionnées et soustraites, soit GD = Gy - G1 + G2 - G3 + etc. ou
 encore, ce qui revient au même (compte tenu de ce que j'ai dit plus

haut), $GD = \frac{1}{VA + AG} = \frac{1}{1 + AG}$. Complétons le carré AVBH et
 traçons la courbe SDH joignant tous les points D, et coupant AH en H et
 BV en S; il est clair que dans le cas où AG = VA = 1 nous aurons (15)

$$GD = \frac{1}{1 + xx} = \frac{1}{2} = VS, \text{ c'est-à-dire } GD = \frac{1}{2} BV; \text{ par conséquent}$$

dans ce cas, puisque G tombe en V et D en S, $VS = \frac{1}{2} BV$ ou $= \frac{1}{2} AV$.

Or comme dans ces conditions tous les points 1, 2, 3, 4, 5 etc.
 coïncident au même et unique point B, les points G1, G2, G3, G4 etc.
 deviennent égaux à Gy ou BV, et finalement Gy - G1 + G2 - G3 + etc. (20)
 devient BV - BV + BV - BV + etc. = $\frac{1}{2} BV$.

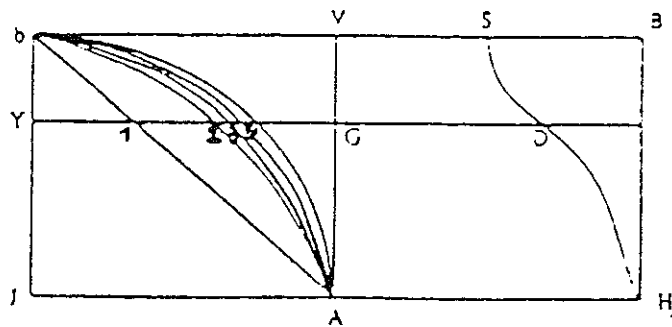


figure 48

Lettre au très illustre Christian WOLF, professeur de mathématiques à Halle, sur la Science de l'Infini? (publiée dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig en 1713)

Dans la question remise récemment à l'ordre du jour par *Guido Grandi*, vous me demandez si je suis d'avis que $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. à

l'infini est égal à $\frac{1}{2}$ et comment écarter l'apparente absurdité d'une telle proposition. En effet puisque l'égalité $1 - 1 = 0$ semble se reproduire une infinité de fois, on ne voit pas comment la répétition à l'infini de purs néants pourrait faire $\frac{1}{2}$. Je constate que M. Grandi confère à l'infini le pouvoir de faire surgir quelque chose à partir de rien, et qu'il entend par là expliquer, non sans élégance, la création du monde, que l'omnipotence Divine tire du néant. Mais la Création n'est pas simple répétition de Néants et suppose l'adjonction d'une réalité nouvelle et positive. J'entends dire également, bien que ses arguments ne me soient pas parvenus, que M. *Marchetti*, Professeur de Mathématiques à Pise, s'est opposé à l'idée de Grandi. Au demeurant, comme l'examen du problème est plaisant et qu'il joue un rôle essentiel pour expliquer la Science de l'Infini (dont on ne s'est pas encore occupé comme elle le méritait), il sera bon de reprendre la chose d'un peu plus haut et de la ramener à ses origines. J'ai la conviction que ce ne sera pas pour déplaire à M. Grandi lui-même puisque sur le fond j'approuve sa conclusion, même s'il faudrait selon moi prêter attention à certains de ses raisonnements et de ses déductions pour qu'ils n'aillent pas porter préjudice à la science.

Ceux qui, suivant l'exemple du grand Archimède dans sa quadrature de la parabole, ont calculé la somme de termes en progression Géométrique, au premier chef *Grégoire de Saint Vincent*, ont déjà montré que

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4 + \text{etc.}$ à l'infini, à condition naturellement de supposer en x une quantité plus petite que un. Nicolas Mercator du Holstein a transposé ce résultat en

$\frac{1}{1-x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5 + \text{etc.}$ à l'infini, résultat qu'il a démontré, en même temps que le précédent, à partir d'une division

continue, bien qu'on puisse aussi le déduire du premier, en remplaçant $-x$ par $+x$. Il fut également le premier à enseigner, en publiant sa *Logarithmotechnia*, comment déduire de ce résultat une Quadrature par une série infinie; c'est de cette manière qu'il nous a fait connaître sa Quadrature Arithmétique de l'Hyperbole, et qu'il l'a ensuite mise en relation avec les Logarithmes. Encouragé par son exemple, j'ai eu le bonheur de trouver non seulement que la quadrature de l'Aire ayant pour ordonnée $\frac{1}{1-xx}$ dépend de la

Quadrature de l'Hyperbole, mais aussi semblablement, que $\frac{1}{1-xx}$ repose sur la Quadrature Arithmétique du Cercle. En effet, puisque (en remplaçant x par xx) $\frac{1}{1-xx}$ est égal à

$1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \text{etc.}$ à l'infini, il s'ensuivait que (une méthode originale m'avait fait découvrir que cette somme fournit la quadrature d'un secteur circulaire), serait:

$\int dx - \int xx dx + \int x^4 dx - \int x^6 dx + \text{etc.}$ à l'infini, c'est-à-dire (en faisant appel à la Quadrature des Paraboloïdes qui nous est connue) $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$ Dès lors, dans le cas où $x = 1$, il vient:

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$ à l'infini, et le rapport de cette série à l'unité est celui de l'Aire d'un Cercle au carré de son Diamètre. La première année où ont paru les Actes de la République des Lettres de Leipzig, j'ai fait connaître ce résultat découvert bien longtemps auparavant. Plus tard dans ces mêmes Actes, j'ai donné la formule générale

rassemblant en un unique théorème la Quadrature des secteurs de toutes les Coniques à centre. C'est ce que M. Grandi a voulu, dans une intention louable, mettre à la portée des gens peu familiarisés au calcul abstrait, en le démontrant à sa manière sur une figure, pour donner plus de prise à l'imagination: lorsque dans ma jeunesse je résidais à Paris, j'avais eu moi-même l'intention de publier quelque chose d'analogue (mais applicable également à d'autres résultats apparentés), et en même temps d'éclaircir l'origine de leur découverte, qui n'est peut-être pas encore bien limpide aujourd'hui. Mais, appelé à d'autres tâches, j'ai suspendu ce projet. Il est naturellement bien plus facile de démontrer les inventions que d'en dévoiler l'origine et de faire ainsi progresser l'art d'inventer lui-même.

Laissons-là les quadratures et revenons à la série de termes en progression Géométrique (qui me suffit pour ce que je veux faire)

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 + \text{etc.}$ à l'infini, ou

$\frac{1}{1+xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 + \text{etc.}$ à l'infini. Observons ce qui se passe

si $x = 1$. A notre grand étonnement il vient alors:

$\frac{1}{1+1}$ soit $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$ à l'infini, ce que la

figure employée par M. Grandi nous met en quelque sorte sous les yeux.

Soit le carré bJAV, traçons la diagonale Ab ou A₁b, ainsi qu'une infinité de paraboles et de paraboloïdes A₂b, A₃b, A₄b, A₅b etc., de sorte que si nous prenons le côté du carré comme unité, que nous notions x l'abscisse AG, et que nous traçons la droite yG normale à AG coupant la diagonale et les paraboloïdes en 1, 2, 3, 4, 5, etc., les ordonnées Gy, G₁, G₂, G₃, G₄, G₅ etc. soient respectivement 1, x , xx , x^3 , x^4 , x^5 etc. et qu'en conséquence les segments de droites

Gy, G₁, G₂, G₃, G₄ etc. soient en progression Géométrique. Ceci posé, prolongeons bV jusqu'à B, avec BV = bV, et yG jusqu'à D de façon que GD soit la réunion des ordonnées alternativement additionnées et soustraites, soit GD = Gy - G₁ + G₂ - G₃ + etc. ou encore, ce qui revient au même (compte tenu de ce que j'ai dit plus

haut), $GD = \frac{1}{VA + AG} = \frac{1}{1 + AC}$. Complétons le carré AVBH et traçons la courbe SDH joignant tous les points D, et coupant AH en H et BV en S; il est clair que dans le cas où AG = VA = 1 nous aurons $GD = \frac{1}{1+xx} = \frac{1}{2} = VS$, c'est-à-dire $GD = \frac{1}{2} BV$; par conséquent

dans ce cas, puisque G tombe en V et D en S, $VS = \frac{1}{2} BV$ ou $\frac{1}{2} AV$. Or comme dans ces conditions tous les points 1, 2, 3, 4, 5 etc. coïncident au même et unique point B, les points G₁, G₂, G₃, G₄ etc. deviennent égaux à Gy ou BV, et finalement Gy - G₁ + G₂ - G₃ + etc. devient BV - BV + BV - BV + etc. = $\frac{1}{2} BV$.

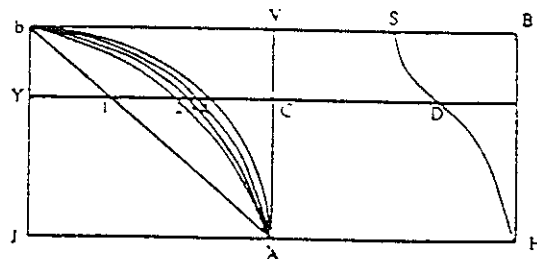


figure 28

Ceci est en accord avec la Loi de Continuité que j'ai proposée pour la première fois dans les Nouvelles de la République des Lettres de Bayle et appliquée aux Lois du Mouvement. Elle entraîne que dans

les continus, on peut considérer une limite externe comme une limite interne, si bien que le dernier cas, même s'il est de nature complètement différente, est compris dans la loi générale gouvernant les autres ; dès ce moment, de manière paradoxale et pour ainsi dire, par une *Figure Philosophico-rhétorique*, nous pouvons considérer le point par rapport à la ligne, le repos par rapport au mouvement, comme des cas particuliers compris dans le cas général inverse : le point apparaissant comme une ligne infiniment petite, évanescence, ou le repos comme un mouvement évanescence. De même pour d'autres formules du même genre, que l'homme très profond qu'était *Joachim Jung* aurait nommées *vraies par tolérance* et qui sont des plus utiles pour l'art d'inventer, même si à mon avis elles enveloppent quelque chose de fictif et d'imaginaire. Car en les ramenant à des expressions ordinaires, il est très facile de les corriger et d'écarter tout risque

d'erreur. Au reste la nature, qui procède toujours pas à pas et non par sauts, ne saurait violer la loi de continuité.

Mais apparaît ici l'objection pertinente que M. Marchetti et vous-même avez soulevée. Puisque $BV - BV$ soit $1 - 1 = 0$, n'en résulte-t-il pas que $BV - BV + BV - BV + \text{etc.}$ à l'infini, soit

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$ à l'infini, se réduit à

$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \text{etc.}$ à l'infini ? On ne voit pas comment cela

pourrait faire $\frac{1}{2}$. M. Grandi tente avec ingéniosité de lever l'objection

en recourant à une analogie. Il imagine que deux frères devant partager un patrimoine découvrent dans l'héritage de leur père une pierre de très grande valeur, dont le testament interdit la vente ; ils conviennent donc entre eux de la déposer alternativement pour un an dans leur bibliothèque respective. De cette façon, à supposer que les héritiers respectent éternellement cette règle, la descendance de chaque frère se voyant accorder puis retirer la pierre une infinité de fois, en posséderait juridiquement exactement la moitié.

Mais à y regarder de plus près, cette analogie est trop claudicante. Premièrement parce que dans le cas qui nous occupe (M. Grandi le reconnaît lui-même), tout repose sur un privilège conféré à l'infini, de pouvoir de lui-même, par simple répétition, produire quelque chose à partir de Rien. Or dans le cas du partage d'un patrimoine, la situation reste inchangée s'il y a un nombre fini d'années. Imaginez en effet que la pierre échoie aux deux frères non par héritage paternel, mais par le legs d'un ami, et qu'ils n'en obtiennent pas la propriété perpétuelle, mais seulement l'usufruit pour cent ans ; il est clair, dès l'instant où ils la possèdent une année sur deux, que leurs droits respectifs seront les mêmes. Mais dans notre cas, si nous écrivons cent fois de suite l'unité, en faisant alternativement une addition puis une soustraction, c'est-à-dire si nous écrivons 50 fois ou même 50000 fois $1 - 1$, il en résultera toujours 0.

Deuxièmement la différence tient à ce que dans le cas d'un droit commun à deux personnes possédant une chose, tour à tour, ce qui est accordé puis ôté n'est pas la totalité du droit sur cette chose, mais le droit d'en user pendant un an, ce qui ne fait que de petites portions du droit total ; si nous répartissons celui-ci par années et que nous en concédions l'usufruit pour cent ans, l'usufruit pour un an n'est, de toute évidence, que la centième partie du droit total, de ce fait puisque chacun en obtient de cette manière cinquante centièmes, nous voyons bien que chacun détient la moitié du titre. Mais dans notre cas c'est l'unité elle-même, le tout lui-même (non de petites parts), qui sont tantôt accordés, tantôt soustraits. C'est pourquoi, bien que séduisante, si nous l'examinons en détail, cette analogie laisse le problème entier.

Il m'appartient à présent de révéler la véritable solution, peut-être inattendue, en tout cas singulière, de cette énigme, ainsi que l'explication du *paradoxe*, en me ramenant d'abord à une série finie pour passer ensuite à une série infinie. Remarquons en effet que pour une série finie il faut distinguer deux cas qui, de façon assez surprenante, se confondent dès qu'il s'agit d'une série infinie. Nous pouvons développer une série finie : $1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$ de deux manières ; elle est ou bien constituée d'un nombre pair de termes et se termine par un -, comme $1 - 1$, $1 - 1 + 1 - 1$, ou $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$, dans ce cas, aussi loin que nous poursuivions, nous obtenons toujours 0. Ou bien la série est constituée d'un nombre impair de termes et se termine par un +, par exemple $1 - 1 + 1$, $1 - 1 + 1 - 1 + 1$, aussi loin que nous poursuivions, tous les cas donnent + 1. Mais lorsque la Série est infinie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$ à l'infini, au-delà de tout nombre, en même temps que disparaît la notion de nombre, disparaît

également la détermination pair impair. Et comme il n'y a pas plus d'arguments en faveur de la parité que de l'imparité, ni par conséquent en faveur d'un résultat égal à 0 ou à 1, le génie admirable de la nature fait que le passage du fini à l'infini s'accompagne du passage de propositions disjonctives (qui disparaissent) à une proposition unique affirmative (qui subsiste), moyen terme entre les deux propositions disjonctives. Or ceux qui ont traité des estimations ont montré que lorsqu'il s'agit de prendre le milieu entre deux quantités ayant même raison d'être, il faut prendre la moyenne Arithmétique, c'est-à-dire

la moitié de leur somme : c'est ainsi que la nature observe ici encore sa loi de justice, par conséquent puisque dans le cas d'un nombre fini de termes la série $1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$ vaut 0 si le nombre est pair et 1 s'il est impair, lorsque la multiplicité infinie des termes fait disparaître les deux cas, que les prérogatives du pair et de l'impair se confondent, et que l'un et l'autre ont exactement la même raison d'être, nous obtenons par conséquent $\frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$ comme je l'avais.

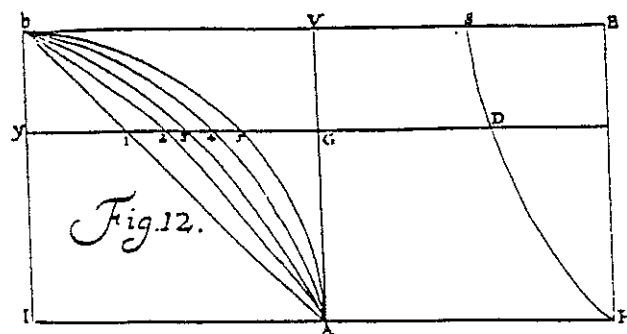
J'ajoute que même si ce type d'argumentation semble plus Métaphysique que Mathématique, il ne laisse pas d'être solide. Au reste les Règles de la Véritable Métaphysique (celle qui ne se contente pas de dresser des nomenclatures) sont en Mathématiques, en Analyse et même en Géométrie, d'un usage plus étendu qu'on n' imagine. En l'occurrence nous avons déjà un autre moyen de savoir, grâce au raisonnement que j'ai indiqué au début, que VS est $\frac{1}{2}$ BV (les ordonnées

GD étant $\frac{1}{1 + AG}$ il en résulte que lorsque AG devient AV,

c'est-à-dire 1, VS devient $\frac{1}{1 + 1}$. Or nous aurions pu également montrer qu'en prenant G arbitrairement voisin de V, GD devient à son tour aussi voisin de $\frac{1}{2}$ BV qu'on le souhaite, de façon que nous puissions rendre la différence inférieure à toute quantité donnée. Par conséquent, par la manière de raisonner d'Archimède nous obtenons également que VS vaut $\frac{1}{2}$ BV. Au demeurant le fait d'aboutir au même

résultat à la fois par les propriétés des séries et par celles de l'infini n'est pas seulement source de satisfaction, ce sera aussi une aide très précieuse pour construire des raisonnements rigoureux sur l'infini et dévoiler de mieux en mieux les origines de notre nouvelle théorie. On prendra garde du même coup à ne pas porter préjudice à la nouvelle science en recourant à des paradoxes insoutenables. Ainsi lorsqu'on nous objectait que des quantités nulles si nombreuses soient elles ne pouvaient rien donner de réel, il ne fallait pas répondre en distinguant entre le fini et l'infini, au sens où cette règle ne vaudrait pas

pour l'infini, mais il fallait reconnaître la valeur générale de la règle et montrer, comme je viens de le faire, qu'il n'y a pas lieu de l'appliquer ici.



XXVI – Epistola ad Christianum Wolfium (figure 48)

LAPLACE *Essai philosophique sur les probabilités*

Introduction , p. CXVIII à CXX , tome 7 des *Oeuvres complètes*.

Je mets encore au rang des illusions l'application que Leibnitz et Daniel Bernoulli ont faite du Calcul des Probabilités à la sommation des séries. Si l'on réduit la fraction dont le numérateur est l'unité et dont le dénominateur est l'unité plus une variable, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de cette variable, il est facile de voir qu'en supposant la variable égale à l'unité, la fraction devient $\frac{1}{2}$, et la suite devient *plus un, moins un, plus un, moins un*, etc. En ajoutant les deux premiers termes, les deux suivants, et ainsi du reste, on transforme la suite dans une autre dont chaque terme est zéro. Grandi, jésuite italien, en avait conclu la possibilité de la création, parce que, la suite étant toujours égale à $\frac{1}{2}$, il voyait cette fraction naître d'une infinité de zéros, ou du néant. Ce fut ainsi que Leibnitz crut voir l'image de la création dans son Arithmétique binaire, où il n'employait que les deux caractères zéro et l'unité. Il imagina que l'unité pouvait représenter Dieu, et zéro le néant, et que l'Être suprême avait tiré du néant tous les êtres, comme l'unité avec le zéro exprime tous les nombres dans ce système d'Arithmétique. Cette idée plut tellement à Leibnitz qu'il en fit part au jésuite Grimaldi, président du tribunal de Mathématiques à la Chine, dans l'espérance que cet emblème de la création convertirait au christianisme l'empereur d'alors, qui aimait particulièrement les sciences. Je ne rapporte ce trait que pour montrer jusqu'à quel point les préjugés de l'enfance peuvent égarer les plus grands hommes.

Leibnitz, toujours conduit par une métaphysique singulière et très déliée, considéra que la suite *plus un, moins un, plus un, etc.*, devient l'unité ou zéro, suivant que l'on s'arrête à un nombre de termes impair ou pair, et comme dans l'infini il n'y a aucune raison de préférer le nombre pair à l'impair, on doit, suivant les règles des probabilités, prendre la moitié des résultats relatifs à ces deux espèces de nombres, et qui sont zéro et l'unité, ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la valeur de la série. Daniel Bernoulli a étendu depuis ce raisonnement à la sommation des séries formées de termes périodiques. Mais toutes ces séries n'ont point, à proprement parler, de valeurs : elles n'en prennent que dans le cas où leurs termes sont multipliés par les puissances successives d'une variable moindre que l'unité. Alors ces séries sont toujours convergentes, quelque petite que l'on suppose la différence de la variable à l'unité, et il est facile de démontrer que les valeurs assignées par Bernoulli, en vertu de la règle des probabilités, sont les valeurs mêmes des fractions génératrices des séries, lorsque l'on suppose dans ces

fractions la variable égale à l'unité. Ces valeurs sont encore les limites dont les séries approchent de plus en plus, à mesure que la variable approche de l'unité. Mais, lorsque la variable est exactement égale à l'unité, les séries cessent d'être convergentes : elles n'ont de valeurs qu'autant qu'on les arrête. Le rapport remarquable de cette application du Calcul des Probabilités avec les limites des valeurs des séries périodiques suppose que les termes de ces séries sont multipliés par toutes les puissances consécutives de la variable. Mais ces séries peuvent résulter du développement d'une infinité de fractions différentes, dans lesquelles cela n'a pas lieu. Ainsi la série *plus un, moins un, plus un, etc.*, peut naître du développement d'une fraction dont le numérateur est l'unité plus la variable, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté du carré de la variable. En supposant la variable égale à l'unité, ce développement se change dans la série proposée, et la fraction génératrice devient égale à $\frac{2}{3}$; les règles des probabilités donneraient donc alors un faux résultat, ce qui prouve combien il serait dangereux d'employer de semblables raisonnements, surtout dans les Sciences mathématiques que la rigueur de leurs procédés doit éminemment distinguer.

Quant à l'invention d'une *suite infinie*, qui exprime des quantités cherchées, Mercator, le premier inventeur de cette méthode, se sert, pour cet effet, de la division. Mais Newton & Leibnitz ont porté cette théorie plus loin; le premier, en trouvant les *suites* par l'extraction des racines; & le second, par une autre *suite* présumée.

Pour trouver, par le moyen de la division, une *suite* qui soit l'expression d'une quantité cherchée. Supposons qu'on demande une *suite* qui exprime le quotient de b divisé par $a + c$, divisez le dividende par le diviseur, comme dans l'algèbre ordinaire, en continuant la division, jusqu'à ce que le quotient fasse voir l'ordre de la progression, ou la loi suivant laquelle les termes vont à l'infini; observant toujours les règles de la soustraction, de la multiplication, de la division, par rapport au changement des signes. Quand vous aurez poussé cette opération jusqu'à un certain point, vous trouverez que le quotient est $\frac{b}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{bc^2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4}$, &c. à l'infini. Ces quatre ou cinq termes étant ainsi trouvés, vous reconnoîtrez facilement que le

quotient consiste en une *suite* infinie de fractions. Les numérateurs de ces fractions sont les puissances de c , dont les exposants sont moindres d'une unité que le nombre qui marque la place que ces termes occupent, & les dénominateurs sont les puissances de a , dont les exposants sont égaux au nombre qui marque la place de ces termes. Par exemple, dans le troisième terme, la puissance de c est du second degré dans le numérateur, & la puissance de a est du troisième degré dans le dénominateur.

Par conséquent 1.^o si $b = 1$ & $a = 1$, substituant ces valeurs nous aurons le quotient ci-dessus $= 1 - c + c^2 - c^3$, &c. à l'infini; c'est pourquoi $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3$, &c. à l'infini.

2.^o Donc si les termes qui sont au quotient décroissent continuellement, la *suite* donnera un quotient aussi près du vrai qu'il est possible. Par exemple, si $b = 1$, $a = 2$, ces valeurs étant substituées dans la *suite* générale, & la division étant faite comme dans l'exemple général ci-dessus, on trouvera $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$, &c. Supposons maintenant que la *série* ou la *suite* s'arrête au quatrième terme, la somme de cette *suite* sera au-dessous de la véritable; mais il ne s'en faudra pas $\frac{1}{32}$. Si elle s'arrête au sixième terme, elle sera encore en-dessous, mais moins que de $\frac{1}{128}$: c'est pourquoi plus on poussera la *série* ou la *suite*, plus aussi on approchera de la véritable somme, sans pourtant jamais y arriver.

De la même manière, on trouve que $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$, &c. à l'infini...
 $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256}$, &c. à l'infini...
 $\frac{1}{6} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625}$, &c. à l'infini.

Ce qui donne une loi constante, suivant laquelle toutes les fractions, dont le numérateur est l'unité, peuvent être exprimées par des *suites* infinies; ces *suites* étant toutes des progressions géométriques, qui décroissent en telle manière, que le numé-

rateur est toujours l'unité, & que le dénominateur du premier terme, qui est aussi l'exposant du rapport, est moindre d'une unité que le dénominateur de la fraction que l'on a proposé de réduire en *suite*.

Si les termes du quotient croissent continuellement, la *série* s'éloigne d'autant plus du quotient, qu'elle est poussée plus loin; & elle ne peut jamais devenir égale au quotient, à moins qu'on ne limite ce quotient, & qu'on ne lui ajoute le dernier reste avec son propre signe. Par exemple, supposons $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$; on trouvera que le quotient $= 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 64 + 128$, &c. prenons le premier terme 1, il excède $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{3}$; deux termes,

c'est-à-dire, $1 - 2$, seront plus petits de $\frac{1}{3}$; trois termes seront trop grands de $\frac{2}{3}$; quatre termes seront plus petits que $\frac{1}{3}$ de $\frac{16}{3}$, &c. Si l'on suppose que la *série* ou la *suite* se termine au terme -8 ; alors on aura $\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + \frac{16}{3}$; mais $1 - 2 + 4 - 8 = -5 = -\frac{15}{3}$; ainsi $\frac{1}{1+2} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3} = \frac{1}{3}$.

Mais, dira-t-on, qu'exprime donc alors une pareille *suite*? Car, par la nature de l'opération, elle doit être égale à la quantité ou fraction proposée; & cependant elle s'en éloigne continuellement. Un auteur nommé Guido Ubaldo, dans son traité de *quadratura circuli & hyperbolæ*, a poussé ce raisonnement plus loin, & en a tiré une conséquence fort singulière. Ayant pris la *suite* $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, & ayant fait la division, il a trouvé au quotient $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$, &c. qui, à l'infini, ne peut jamais donner que 1 ou 0; savoir 1, si on prend un nombre impair de termes; & 0, si on prend un nombre pair; d'où cet auteur a conclu que la fraction $\frac{1}{2}$ pouvoit devenir 1 par une certaine opération, & que 0 pouvoit être aussi égal à $\frac{1}{2}$, & que par conséquent la création étoit possible, puisque avec moins on pouvoit faire plus.

L'erreur de cet auteur venoit de n'avoir pas remarqué que la *suite* $1 - 1 + 1 - 1$, &c. & en général $1 - c + c^2 - c^3$, &c. n'exprimoit point exactement la valeur de la fraction $\frac{1}{1+c}$. Car supposons qu'on ait poussé le quotient de la division jusqu'à cinq termes, comme la division ne se fait jamais exactement, il y a toujours un reste, soit ce reste r ; & pour avoir le quotient exact, il faut, comme dans la division ordinaire, ajouter ce reste r divisé par le diviseur $1 + c$, à la partie déjà trouvée du quotient.

Ainsi supposons que la *série* générale soit terminée à $-c^3$, on aura $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c} = \frac{1+c-c^2+c^2+c^3-c^3-c^4+c^4}{1+c} = \frac{1}{1+c}$.

Par conséquent la valeur exacte de $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ est $1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{1+1}$; & cette valeur se trouve toujours égale à $\frac{1}{2}$, & non pas zéro à 1.

QUADRATURA CIRCULI, ET HYPERBOLÆ

*Per Infinitas Hyperbolas, & Parabolas Quadrabiles
Geometricè exhibita, & demonstrata.*

EDITIO ALTERA AUCTIONIOR, ET ACCURATIO

In qua, præter alia multa, ad veterem Appendicem de Rectificatione Curvarum, altera accessit de earundem, & Curvilinearum Spatiarum Transformatione infinitis modis expedienda.

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDO

*Monacho Camaldulensi, in Pisana Universitate Publ. Phil. Professore
Reg. Cels. M. D. Etruriæ Theologo, & Mathematico,
Et Regiæ Societatis Sodali.*

AD SERENISSIMUM PRINCIPEM
JOANNEM GASTONEM
AB ETRURIA.



P I S I S, MDCCX.

Ex Typographia Francisci Bindi Impressi. Archiep. Superiorum permissu.

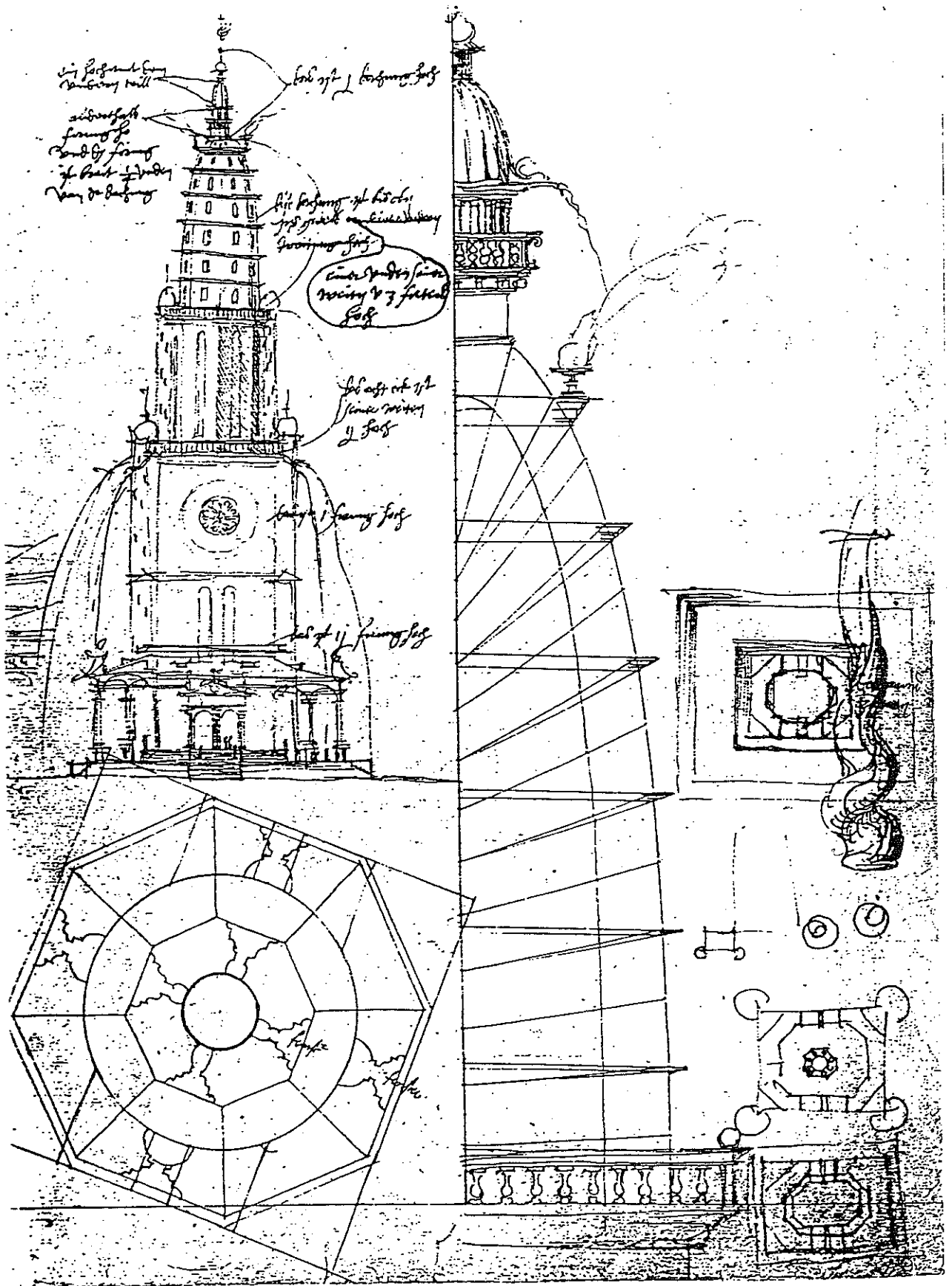


Planche du manuscrit de l'Underweysung