IREM
INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

n°10

JUILLET 1995

M : A.T.H.

MNEMOSYNE

UNIVERSITE DENIS DIDEROT

PARIS VII

Cette brochure est réalisée par l'IREM PARIS 7 DENIS DIDEROT avec le concours de la D.L.C. des MAFPEN de Paris, Créteil, Versailles.

Mnémosyne
personnification de la mémoire.
Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite;
de cette union naquirent les neuf Muses.
(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture : **"La mémoire"**
gravure allégorique d'après Gravelot (XVIII ème)

n°10

JUILLET 1995

MNEMOSYNE

M: *Mathématiques*

A. *Approche par les*

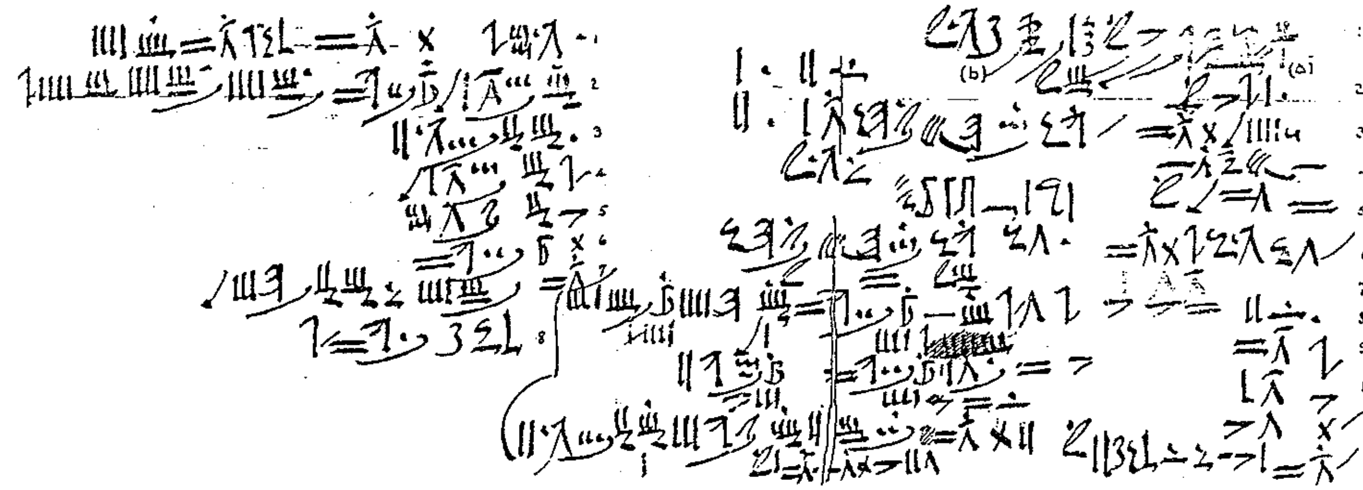
T. *textes*

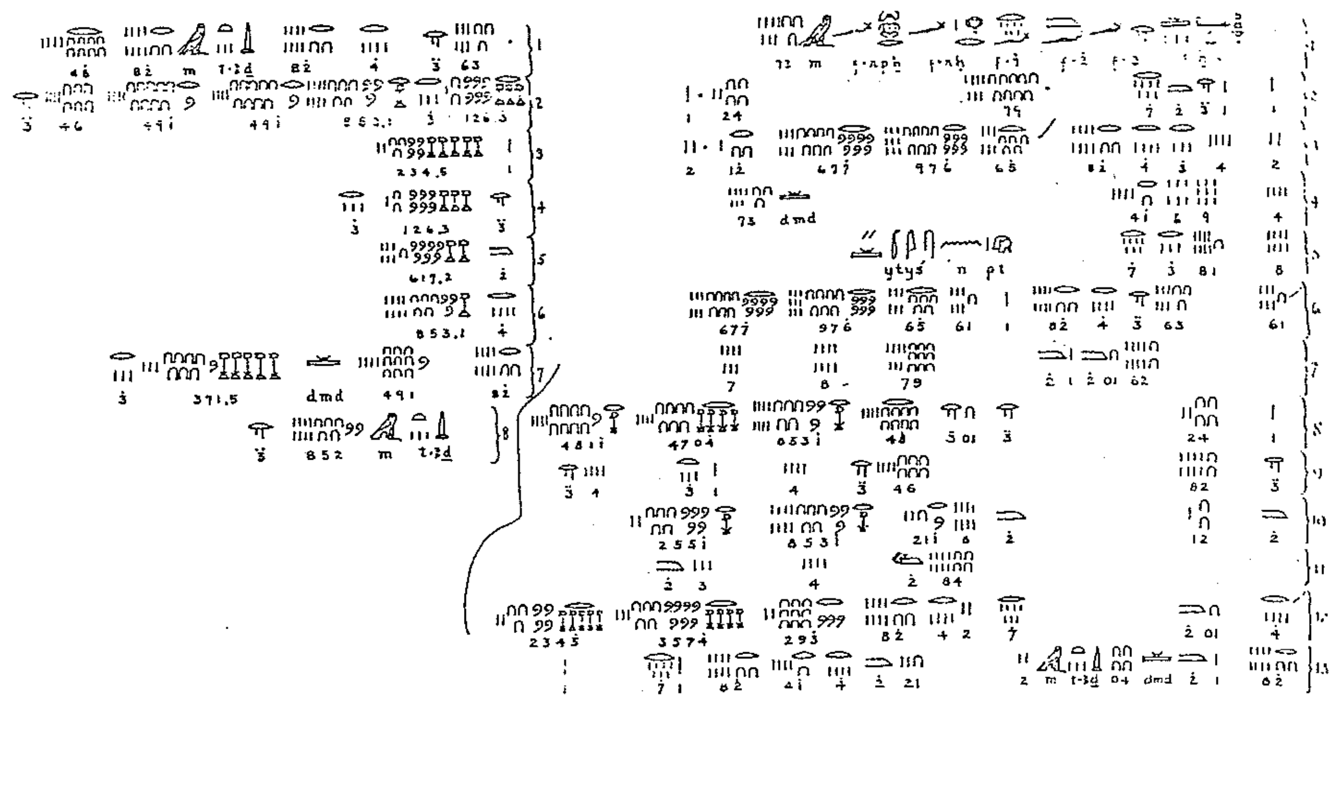
H. *historiques*

SOMMAIRE

PROBLEM 33

-c-





EDITORIAL

Nous présentons d'abord toutes nos excuses à nos fidèles lectrices et lecteurs pour ce "léger" retard de parution.

Mnémosyne n°10 vient juste à temps, néanmoins, pour vous offrir quelques copieuses lectures de vacances, dont le thème central sera les séries.

Peut-on attribuer une somme à une série divergente ? Quel statut mathématique lui donner ? Comment réagir face aux paradoxes qui en résultent ? Faut-il les rejeter ou les assumer ?

Nous vous proposons quelques éléments de réponse, d'une part dans l'introduction d'un ouvrage d'Émile Borel : "*Leçons sur les séries divergentes*" que nous publions dans les "*Bonnes vieilles pages*" et d'autre part dans l'étude "Le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries" où vous retrouverez la somme 1 - 1 + 1 - 1 ... dont *Mnémosyne* n°9 vous a déjà parlé.

La rubrique "*Dans nos classes*" propose une approximation de π par accélération de convergence due à Euler et présentée dans "*l'introduction à l'analyse infinitésimale*", ouvrage qui offre d'ailleurs d'autres exemples d'usage audacieux des séries.

Enfin, les "*notes de lecture*" nous parleront d'une publication de l'inter IREM d'Histoire et Epistémologie des mathématiques : "Histoires d'Algorithmes".

Nous vous souhaitons une bonne lecture et de bonnes vacances. N'hésitez pas à nous envoyer vos commentaires ou suggestions, en suivant l'exemple de Michel Guillemot qui a relu pour nous le problème 33 que vous pouvez admirer ci-contre !

NOUVELLES LEÇONS SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS.

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES DIVERGENTES

PAR

ÉMILE BOREL,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

BONNES VIEILLES PAGES

Le coeur de ce numéro est une étude sur les séries et les interrogations qu'elles ont suscitées tout au long de l'histoire. Ce travail a été amorcée par la lecture de l'introduction d'un ouvrage d'Emile Borel : *Leçons sur les séries divergentes.* Cette introduction est un petit chef d'oeuvre d'épistémologie et de pédagogie que nous vous présentons en "Bonnes feuilles". La première édition date de 1901. Elle est plus difficile à trouver que la suivante, qui date de 1928, mais ce n'est pas seulement pour cela que j'ai choisi la première édition. J'y lis toute la fraîcheur et l'enthousiasme d'un mathématicien en train de construire une théorie qui coïncide avec son intuition profonde et lui permet de réhabiliter certains travaux critiqués de très estimés prédécesseurs.

Dans la deuxième édition, "on" a tempéré les jugements personnels et ajouté des justifications mathématiques. A vrai dire, je pense que cette révision n'est pas de la main de Borel, mais plutôt de celle de Bouligand. Un indice étant que le "je" de la première édition est devenu "M. Emile Borel". Ministre de la Marine en 1925, Borel ne devait guère avoir le temps de s'occuper des rééditions. Pour donner à la lectrice et au lecteur un aperçu de cette évolution, j'ai souligné quelques passages supprimés dans la deuxième édition et signalé en note quelques ajouts, quand ils m'ont parus significatifs.

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES DIVERGENTES.

INTRODUCTION.

HISTORIQUE ET GÉNÉRALITÉS.

Les séries divergentes avant Abel et Cauchy.

On s'accorde généralement pour dater les débuts de l'Analyse moderne des travaux d'Abel et de Cauchy. Ce qui caractérise surtout ces deux géomètres, c'est le souci de la rigueur parfaite des raisonnements : c'est là la réforme essentielle qu'ils ont introduite dans les Mathématiques.

*Sans doute, avant eux, bien des géomètres avaient fait des raisonnements rigoureux; plusieurs même avaient une sûreté parfaite et ne se trompaient que d'une manière exceptionnelle. D'autre part, depuis Abel et Cauchy, il a été imprimé souvent des raisonnements inexacts, et eux-mêmes n'ont pas toujours échappé à l'erreur. Mais le point essentiel est d'avoir proclamé hautement et nettement qu'un raisonnement non rigoureux, un raisonnement par induction ou par à peu près, doit être, en Mathématiques, considéré comme inexistant. Ce principe une fois posé, il appartenait aux successeurs d'Abel et de Cauchy d'en tirer toutes les conséquences et d'introduire peu à peu la rigueur parfaite des méthodes et des raisonnements qui caractérise le développement mathématique de la seconde moitié du siècle qui vient de finir.

E. B. (3) 1

*Rappelons que c'est nous qui soulignons certains passages, pour indiquer qu'ils ont été supprimés dans l'édition de 1928.

Il est incontestable que la révolution ainsi accomplie a constitué un grand progrès et qu'elle était indispensable. On peut toutefois se demander si l'abandon complet des méthodes moins rigoureuses des géomètres du XVIII^e siècle a été un bien au point de vue de la facilité de la découverte mathématique. Il a pu être nécessaire de les abandonner momentanément d'une manière complète, pour permettre au principe de la rigueur nécessaire de s'établir sans contestation; mais maintenant que ce principe est établi d'une manière définitive et irrévocable, l'étude des méthodes anciennes peut avoir du bon, à condition, bien entendu, qu'on les emploie seulement comme procédé de recherche, en se réservant de démontrer ensuite les résultats par les méthodes rigoureuses de l'Analyse moderne.

La théorie des séries divergentes est l'une de celles auxquelles s'appliquent le plus immédiatement les généralités qui précèdent; nous allons nous occuper exclusivement de cette théorie, et tout d'abord rechercher quel était l'état de la question avant les premiers travaux d'Abel et de Cauchy.

Le procédé le plus commode, et peut-être aussi le plus sûr, pour faire cette recherche, consiste à consulter le grand Traité de Calcul différentiel et intégral de Lacroix (1).

On peut considérer, en effet, que cet Ouvrage résume l'Analyse ancienne; en le comparant avec l'*Analyse algébrique* de Cauchy (2), publiée seulement quelques années après, on mesure toute la distance qui sépare les Mathématiques du XVIII^e siècle des Mathématiques du XIX^e. Peu de comparaisons sont plus instructives pour l'histoire de la Science.

Mais revenons aux séries divergentes et voyons ce que nous apprend à leur sujet le Traité de Lacroix; nous emprunterons aussi quelques renseignements bibliographiques au substantiel article de M. Pringsheim dans l'Encyclopédie Burkhardt-Meyer (3).

Il importe tout d'abord d'établir une distinction entre les séries purement numériques et les séries analytiques, c'est-à-dire dont

(1) S.-F. Lacroix, *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, seconde édition, 3 vol. in-4, Paris, 1810, 1814 et 1819.

(2) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. III. La première édition est de 1821.

(3) *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, I, A. 3, § 39-40.

les termes sont des fonctions d'une variable (ou de plusieurs; mais nous nous bornerons au cas d'une seule).

En ce qui concerne les séries divergentes numériques, l'impossibilité apparaît d'abord immédiatement de les utiliser directement pour un calcul précis.

Il est cependant un cas dans lequel elles ont paru pouvoir servir à un calcul approximatif; et, en fait, dans la pratique, on n'a jamais besoin que d'une approximation limitée; il est même presque toujours impossible de faire un calcul *exact*. Le cas dont nous voulons parler est celui où les termes de la série divergente commencent à décroître jusqu'à un certain terme minimum, pour augmenter d'ailleurs ensuite au delà de toute limite. En calculant la somme de la série jusqu'au terme minimum, on peut espérer avoir un résultat approché, dont l'approximation sera du même ordre de grandeur que ce terme et pourra, par suite, être très notable, si ce terme est suffisamment petit.

Souvent même, on n'aura pas besoin d'aller jusqu'au terme minimum, qui occupera un rang très élevé et sera bien plus petit que l'approximation désirée; on calculera simplement les premiers termes de la série, jusqu'à ce qu'on arrive à des termes assez petits pour qu'on puisse les considérer comme négligeables, et l'on adoptera la somme ainsi trouvée pour valeur approchée de la série.

L'exemple classique en Analyse de la série pour laquelle cette méthode réussit est la série de Stirling; mais nous aurons l'occasion d'y revenir tout à l'heure. Un exemple plus important est celui des séries que les astronomes emploient dans leurs calculs; ils les ont utilisées longtemps sans se douter qu'elles étaient divergentes, en calculant seulement les premiers termes. Depuis que M. Poincaré, dans un Mémoire célèbre [1], a démontré leur divergence, on continue à les utiliser dans bien des cas, car on y est encouragé par l'exactitude des résultats obtenus, en tous points conformes aux observations. Nous verrons, dans le Chapitre I, consacré à la théorie des séries asymptotiques de M. Poincaré, comment cette théorie permet de se rendre compte de ce fait, en apparence paradoxal.

---

[1] *Acta mathematica*, t. XIII.

Mais il est des séries divergentes numériques qui présentent un tout autre caractère; leurs termes ne vont pas en décroissant, ou même croissent constamment à partir du premier et augmentent au delà de toute limite.*

Comme exemples typiques de telles séries, on peut citer les deux suivantes, que l'on rencontre assez fréquemment dans les applications, et qui sont étudiées toutes deux dans le Traité de Lacroix :

$$(1) \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$(2) \qquad 1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + 1.2.3.4.5 - \ldots.$$

La série (1), qui paraît avoir été considérée pour la première fois par Jacques Bernoulli et Leibnitz, a été très souvent choisie comme type de série divergente; elle a donné lieu, depuis Euler jusqu'à Cauchy, à de nombreuses discussions, et, après Cauchy, on l'a souvent signalée comme exemple de l'emploi illégitime des séries divergentes.

Euler considère la somme de la série (1) comme égale à $\frac{1}{2}$; et cette affirmation a pour lui la signification suivante : si, *par un calcul quelconque,* on est conduit à la série (1), le résultat de ce calcul est certainement $\frac{1}{2}$.

Ainsi présentée et prise à la lettre, la proposition d'Euler n'est certainement pas exacte, et l'on ne tarda pas à s'en apercevoir. Déjà plusieurs auteurs, Pierre Varignon, Nicolas Bernoulli, d'Alembert, avaient signalé le danger de l'emploi des séries divergentes. J'emprunte à M. Pringsheim la citation suivante de d'Alembert : « Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements fondés sur les séries qui ne sont pas convergentes... me paraîtront très suspects, même quand les résultats s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs. » (*Opusc. math.*, 5, 1768, p. 183).

Relativement à la série d'Euler, l'objection suivante se présenta bientôt.

Soient n et m ($n < m$) deux entiers positifs; on a

$$(3) \qquad \frac{1-x^n}{1-x^m} = 1 - x^n + x^m - x^{n+m} + x^{2m} - \ldots.$$

* Addition de 1928 : "Malgré cela il y a lieu, dans certaines questions, de leur attribuer une *somme conventionnelle.*"

Si l'on fait $x = 1$, on obtient

$$\frac{n}{m} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots.$$

La série d'Euler a donc ainsi pour somme une fraction positive quelconque.

Lagrange (¹) montra cependant que l'objection précédente pouvait être levée; Leibnitz avait fait reposer le calcul de la série (1) sur le calcul des probabilités; la somme de la série (1) étant 1 ou 0 suivant que l'on prend un nombre impair ou pair de termes, elle est aussi souvent égale à 1 qu'à zéro; donc sa valeur la plus probable est égale à la moyenne $\frac{1}{2}$. Lagrange fait observer que, si l'on veut appliquer la même méthode à la série (3), on doit observer qu'elle n'est pas complète et que si, pour plus de netteté, on prend $n = 3$, $m = 5$, elle doit s'écrire

$$1 + 0 + 0 - x^3 + 0 + x^5 + 0 + 0 - x^8 + 0 + x^{10} + 0 + \ldots.$$

Dès lors, on voit que, si l'on prend la somme successivement de 1, 2, 3, 4, 5, ... termes de la série, on constate que, sur cinq sommes consécutives, trois sont égales à 1 et deux à zéro; la valeur moyenne est donc $\frac{3}{5}$, ce qui est bien la vraie valeur de la fonction qui a donné naissance à la série.*

On peut prouver que le résultat ainsi obtenu n'est point dû au hasard et démontrer même, comme l'a fait voir M. Frobenius (²), une proposition plus générale; si l'on pose

$$\sum_0^n a_i = s_n,$$

on a

$$\lim_{x=1} \sum_0^\infty a_n x^n = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1} + s_n}{n},$$

dans le cas où la limite du second membre existe. ** On voit ainsi

(¹) *Voir*, pour cette discussion, LACROIX, t. III, p. 160; et LAGRANGE, Rapport sur le Mémoire de Callet, dans le Tome III des *Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut*.

(²) *Journal de Crelle*, t. 89, p. 262.

* Note ajoutée en 1828 : "La théorie des séries divergentes dans ses rapports avec le Calcul des probabilités a été étudiée tout récemment par M. Paul Lévy dans un Mémoire du *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 54,1926, p. 1-25 (*Sur les conditions d'application et sur la régularité des procédés de sommation des séries divergentes*)

** voir page suivante

** Ce long paragraphe et ses notes sont ajoutés dans l'édition de 1928.

Si dans cet énoncé, la série Σa_n est supposée convergente, les *sommes s_n tendent vers une limite. Donc la moyenne des sommes écrite au second membre a aussi une limite et cette limite est la même* (1). D'autre part, dire que Σa_n est convergente équivaut à dire que la série entière $\Sigma a_n x^n$ converge pour $x = 1$. Le rayon de convergence de cette série est donc ≥ 1. S'il surpasse l'unité, l'égalité précédente traduit la continuité de la série entière à l'intérieur de son intervalle de convergence; si le rayon de convergence est l'unité, la même égalité traduit le second théorème d'Abel, d'après lequel si x tend vers 1 par valeurs réelles, la fonction représentée par la série entière tend vers la somme de la série convergente Σa_n.

En résumé, le théorème de Frobenius apparaît donc comme une extension du théorème d'Abel, extension qui s'opère en conservant littéralement l'énoncé de ce dernier, à la seule condition d'adopter une nouvelle définition de la locution : *somme d'une série*. Pour l'obtenir, on substitue à la limite de s_n celle de la moyenne arithmétique (2)

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1}.$$

Moyennant cette nouvelle définition, la série d'Euler a effectivement une somme dont la valeur est $\frac{1}{2}$.

---

(1) Ce théorème est essentiel. On peut le démontrer en écrivant

$$\frac{(s_0 + \ldots + s_{p-1}) + (s_p + \ldots + s_n)}{n+1}$$

et faisant croître simultanément p et n de manière que le rapport $\frac{p}{n}$ tende vers zéro. Le résultat annoncé devient dès lors évident.

(2) Un calcul immédiat donne

$$s_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1},$$
$$a_n = s_n - s_{n-1} = (n+1)\sigma_n - 2n\sigma_{n-1} + (n-1)\sigma_{n-2}.$$

On en conclut que si σ_n possède une limite, le rapport $\frac{a_n}{n}$ tend vers zéro. Il en résulte que si la limite de σ_n existe, sans que s_n admette une limite, le rayon de convergence de la série entière $\Sigma a_n x^n$ est l'unité. La méthode de la moyenne arithmétique est donc susceptible de faire connaître la valeur de la fonction aux extrémités de l'intervalle de convergence, mais elle reste inopérante en dehors de celui-ci.

que la série, qui peut être divergente,

$$\sum_0^\infty a_n$$

peut être considérée comme ayant pour somme la moyenne arithmétique des diverses sommes obtenues en prenant successivement 1, 2, 3, 4, ... termes (ou du moins la limite de cette moyenne arithmétique).

Mais l'objection précédente n'est pas la seule que l'on puisse faire contre la proposition d'Euler; il est aisé de former des séries dont les termes dépendent d'une variable et qui se réduisent à la série d'Euler pour une valeur particulière de cette variable, alors que la valeur limite de la série est un nombre absolument quelconque.

Empruntons-en deux exemples à M. Pringsheim.

On a

$$(4) \qquad \frac{-1}{1+x} = x - 1 + x^3 - x^2 + x^5 - x^4 + \ldots,$$

d'où

$$\frac{-1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

On peut d'ailleurs donner à la série (4), à laquelle on pourrait reprocher un arrangement arbitraire des termes, la forme suivante :

$$(5) \qquad \sum_0^\infty x^{n+(-1)^n}$$

dans laquelle les exposants sont les valeurs successives pour $n = 0$, 1, 2, 3, ... d'une fonction simple de n.

De même, en désignant par $E(x)$ la partie entière de x, on a

$$\sum_0^\infty (-1)^n x^{E\left(\frac{n}{2}\right)} = 1 - 1 + x - x + x^2 - x^2 + \ldots,$$

d'où, pour $x = 1$,

$$0 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

Il serait aisé de multiplier et de varier ces exemples; faut-il en conclure, avec M. Pringsheim, que l'affirmation d'Euler est dépourvue de toute valeur et doit être complètement rejetée? Nous ne le pensons pas. Il importe, en effet, de remarquer que les anciens géomètres n'avaient point l'habitude de construire artificiellement des expressions analytiques compliquées pour prouver telle ou telle opinion; ils se contentaient, d'habitude, de calculer sur les expressions qui se présentaient naturellement à eux, au cours de leurs recherches.

Il doit donc être expressément sous-entendu, dans l'affirmation d'Euler que, *si l'on est conduit à la série* (¹) *par n'importe quel*

(¹) On devra, bien entendu, tenir compte des remarques de Lagrange rappelées page 5, relativement aux séries qu'il est naturel de considérer comme incomplètes et de compléter par des termes nuls. Si cependant la loi des termes manquants est suffisamment *régulière*, la proposition d'Euler paraît être encore vraie. Mais je ne puis ici préciser le sens du mot *régulière;* je renverrai à mes *Leçons sur les fonctions entières*, Note II, où l'on trouvera quelques indications à ce sujet, en attendant que je puisse publier une théorie générale de la croissance des fonctions.

Comme exemple d'une série importante en Analyse et où il manque des termes en grand nombre, on peut citer la suivante

$$s = 1 + q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + q^{36} + \dots.$$

Lorsque q tend vers -1 par valeurs réelles, la limite de s est $\frac{1}{2}$, de sorte que l'on a, à la limite

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots.$$

Voici de ce fait une démonstration très élégante, due à M. J. Tannery. On a

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_4(v) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2 q^{n^2} \cos 2 n \pi v \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2 q^{2n-1} \cos 2 \pi v + q^{4n-2}). \end{aligned}$$

En faisant $v = 0$, on obtient

$$\mathfrak{I}_4(0) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}) \right]^2.$$

Lorsque q est réel et positif, tous les facteurs du produit infini sont inférieurs à l'unité; on en conclut immédiatement que ce produit tend vers zéro lorsque q tend vers $+1$; si l'on observe que l'on a

$$\mathfrak{I}_4(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \dots,$$

calcul, on peut sans hésitation la remplacer par $\frac{1}{2}$, qu'il s'agit seulement des calculs que l'on sera conduit naturellement à faire, et non d'expressions construites exprès pour mettre la règle en défaut. Pour prouver donc que l'affirmation d'Euler est fausse, en se plaçant au point de vue d'Euler, il faudrait fournir l'exemple d'un géomètre qui, *n'ayant aucune préoccupation relative aux séries divergentes et à la légitimité de leur emploi*, a trouvé, dans des calculs ayant pour objet des recherches d'un ordre tout différent, une série telle que (5), pour laquelle la règle d'Euler est en défaut.

Tant qu'on n'aura pas fourni un tel exemple, on pourra dire que cette règle est exacte, *au point de vue pratique et expérimental*, puisque, depuis un siècle, elle n'aurait trompé aucun des géomètres qui l'auraient appliquée, sauf ceux qui se seraient précisément proposé comme but de la mettre en défaut; ceux-là, non plus, n'auraient d'ailleurs pas été trompés, puisqu'ils savaient à l'avance le but vers lequel ils tendaient.

Aussi n'y a-t-il point lieu de blâmer Fourier de s'en être servi sans scrupule (*Œuvres*, t. I, p. 206). Fourier fait d'ailleurs usage, dans le même Ouvrage (p. 191) de produits infinis divergents et il suffit de consulter la Note dans laquelle M. Darboux a rétabli le raisonnement rigoureux, pour se rendre compte que Fourier savait parfaitement ce qu'il faisait et ne risquait nullement de se tromper.*

Mais nous nous sommes assez étendus (¹) sur la série (1); disons quelques mots de la série

$$(2) \qquad 1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + 1.2.3.4.5 - \ldots.$$

---

on en conclut immédiatement le théorème que nous avons énoncé relativement à la série s.

Ce théorème peut s'étendre, par l'emploi des formules de transformation (TANNERY et MOLK, *Traité des fonctions elliptiques*. t. II, formule XLIII_6), au cas où l'on suppose que q tend vers -1 en suivant un chemin quelconque non tangent au cercle de convergence; je dois aussi ce dernier résultat à une obligeante communication de M. Tannery.

(¹) Faisons observer cependant que, *si l'on attribue une somme* à la série (1), cette somme ne saurait être autre que $\frac{1}{2}$; car si l'on pose

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

* Cette ardente défense des mathématiciens au nom d'une restriction de leurs résultats à un champ *naturel* des travaux mathématiques est remplacée dans l'édition de 1928 par une restriction *théorisée* et *axiomatisée* du champ d'application, que nous présentons page suivante.

* Extrait de l'édition de 1928

Nous ne pensons pas, pour cela, qu'il faille en conclure, avec M. Pringsheim, que l'affirmation d'Euler est dépourvue de toute valeur. Il vaut mieux l'interpréter de la manière suivante : si, dans un calcul, on est conduit à la série (1), on peut *en général* la remplacer par $\frac{1}{2}$; le résultat est exact toutes les fois qu'il s'agit de calculs se présentant naturellement, au cours d'une recherche objective, et non d'expressions construites artificiellement avec le souci de mettre justement la règle d'Euler en défaut (2).

Cet énoncé n'a évidemment qu'une valeur statistique. Mais on peut transformer la règle d'Euler en un théorème, parfaitement rigoureux, si l'on admet les prémisses suivantes :

1° Il existe une classe de séries, plus étendue que celle des séries classiquement dénommées convergentes, telle qu'à chaque série de cette classe, corresponde une *somme* ;

2° La série d'Euler appartient à cette classe ;

3° Soit S la somme d'une série Σa_n de la classe. La série $\Sigma \lambda a_n$ (où λ désigne un facteur quelconque indépendant de n) appartient elle-même à la classe et a pour somme λS ;

4° Si la série $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ admet une somme S, la série $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ admet elle-même une somme égale à $S - a_0$.

Ces hypothèses entraînent la possibilité d'écrire légitimement

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - S,$$

d'où

$$S = \frac{1}{2}.$$

Finalement, les calculs au cours desquels il est permis d'appliquer la règle d'Euler sont donc ceux où, d'une manière implicite, on considère les hypothèses ci-dessus comme vérifiées.

Il ne peut être ici question de prendre une moyenne de sommes successives; cette moyenne n'existe pas; on ne peut pas non plus, comme il pourrait être suggéré par ce qui précède, introduire une variable x et chercher la limite de la série

$$(2)' \qquad 1 - 1.2x + 1.2.3x^2 - 1.2.3.4x^3 + \ldots$$

lorsqu'on y fait $x = 1$. Cette série $(2)'$ est, en effet, divergente pour toute valeur de x.

Lacroix obtient la somme de la série (2) par une transformation assez compliquée (t. III, p. 347); le résultat ainsi obtenu coïncide d'ailleurs avec la valeur d'une intégrale qui donne naissance à la série $(2)'$ et dont nous parlerons plus loin (p. 56).

Sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, on voit que, malgré des hésitations et des scrupules qui devaient mettre en garde contre les erreurs grossières, les géomètres du temps de Lacroix avaient d'assez bonnes raisons *expérimentales* d'avoir confiance dans les séries divergentes, même numériques.

A plus forte raison employaient-ils sans le moindre scrupule les séries divergentes dont les termes étaient des fonctions d'une variable. Considérant simplement au point de vue formel les calculs exécutés sur ces séries, ils étaient amenés à constater que les résultats de ces calculs exprimaient des faits analytiques précis, d'où ils tiraient des conséquences le plus souvent, sinon toujours, exactes [1]. Nous verrons plus loin comment de tels résultats sont aisément explicables.

---

on a

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S$$

d'où $S = \frac{1}{2}$. Relativement aux objections que l'on pourrait faire à ce raisonnement, en changeant l'ordre des termes, *voir* plus loin, p. 17.

[1] Le passage suivant du Traité de Lacroix (t. I, p. 4) montre très nettement le point de vue auquel il se plaçait :

« Il est à propos de faire attention au mot *développement* que l'on emploie ici au lieu de celui de *valeur;* car une série ne donne pas toujours la valeur de la fonction à laquelle elle appartient : quelquefois même, au lieu d'en approcher davantage, à mesure qu'on prend plus de termes, elle s'en éloigne sans cesse, ainsi qu'on peut le remarquer sur la fraction $\frac{a}{a-x}$ développée suivant les puissances de x. La série

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots$$

qui en résulte ne donne des résultats convergents vers la vraie valeur que dans

En somme, on peut résumer l'état de la Science à l'époque de Lacroix en disant que l'on avait dans les séries divergentes une confiance justifiée par les faits, mais cependant rendue prudente et quelque peu hésitante par des difficultés telles que celle qui a été étudiée page 5.

Les travaux de Cauchy.

Nous venons de dire que, à l'époque où Abel et Cauchy commencèrent à écrire, on avait, dans les séries divergentes, une confiance justifiée presque toujours, sinon toujours, par les faits. Aussi n'est-ce pas sans hésitation qu'Abel et Cauchy frappèrent

---

le cas où $x < a$; ce n'est donc que dans ce cas qu'il est permis de l'employer à déterminer par approximation cette vraie valeur, mais cependant l'expression

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots$$

considérée en faisant abstraction du dernier terme, c'est-à-dire comme contenant toujours des termes de même forme, quelque loin qu'on la prolonge, est tellement liée avec la fraction $\frac{a}{a-x}$, que si une question nous conduisait à la série

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots$$

nous serions en droit d'en conclure que la fonction cherchée n'est autre que $\frac{a}{a-x}$; ou si nous découvrions quelque propriété relative à une suite de termes tels que $1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots$, nous pourrions affirmer qu'elle appartient à la fonction $\frac{a}{a-x}$. Pour sentir la vérité de cette assertion, il suffit d'observer que le développement régulier d'une fonction, considéré dans toute son étendue, vérifie l'équation qui caractérise cette fonction. Dans l'exemple que j'ai choisi, si l'on fait $\frac{a}{a-x} = y$, on en conclura l'équation

$$a - (a - x)y = 0$$

et si l'on substitue, au lieu de la fonction y, son développement

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots,$$

on verra que, quelque loin qu'on le calcul pousse, les termes se détruiront toujours. On conçoit sans peine qu'il en serait de même dans tout autre exemple, et d'ailleurs il s'en présentera un grand nombre dans la suite de ce Traité. »

On verra qu'il y a peu de chose à ajouter aux idées de Lacroix pour obtenir la base d'une théorie rigoureuse des séries divergentes.

d'ostracisme les séries divergentes. Quelques citations montreront bien quels furent leurs scrupules. Abel écrit à Holmboë, le 16 janvier 1826 (*Œuvres complètes d'Abel*, édition Sylow-Lie, t. II, p. 256-257) : « Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration... la partie la plus essentielle des Mathématiques est sans fondement. *Pour la plus grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant* ».

D'autre part, dans la Préface de son *Analyse algébrique*, dès 1821, Cauchy écrit : « J'ai été *forcé d'admettre* diverses propositions qui paraîtront peut-être *un peu dures;* par exemple, qu'une série divergente n'a pas de somme... ».

On voit combien sont grands les scrupules de Cauchy; aussi ne doit-on pas s'étonner qu'il se soit posé, lui aussi, le problème énoncé par Abel dans le passage que nous avons cité, et ait recherché comment l'emploi des séries divergentes peut conduire, d'une manière presque constante, à des résultats exacts, tout en n'étant pas théoriquement légitime. Une mort prématurée n'a malheureusement pas permis à Abel de s'occuper de cette question, comme il en annonce l'intention; aussi avons-nous dû mettre le nom seul de Cauchy en tête de ce paragraphe.

En parcourant ses Œuvres, on se rend compte que le désir de trouver un mode d'utilisation des séries divergentes ne l'a jamais abandonné; il y revient à plusieurs reprises. Il se préoccupe aussi des intégrales définies dépourvues de sens, question connexe à celle des séries divergentes et pouvant être traitée par des méthodes en partie analogues, mais que nous laisserons systématiquement de côté, désireux de délimiter bien nettement notre sujet, et ne voulant pas y mêler un problème, intéressant sans doute, mais à peine effleuré jusqu'ici et qui appelle encore bien des recherches.

Sur les séries divergentes, les travaux de Cauchy sont d'importance très inégale; le court Mémoire sur la série de Stirling [1] se distingue nettement des autres par la clarté et la beauté de ses résultats; nous étudierons en détail ce Mémoire au début du Chapitre I; contentons-nous de dire ici que Cauchy y justifie, pour

[1] *Comptes rendus*, t. XVIII, p. 370. — *Œuvres de Cauchy*, série I, t. VIII, p. 18.

la série de Stirling, le procédé de calcul approximatif dont nous avons parlé tout à l'heure (p. 3), pour les séries dont les termes décroissent d'abord beaucoup pour croître ensuite au delà de toute limite.

La théorie de Cauchy ne s'applique d'ailleurs pas à la seule série de Stirling; comme nous le verrons, il fait observer qu'elle s'applique aussi à une classe fort générale de séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable.

Mais cette partie du Mémoire de Cauchy, étant restée sans applications, est tombée dans l'oubli et la série de Stirling a été le seul exemple classique de *série asymptotique*, jusqu'au jour où M. Poincaré a fait une théorie générale de cette classe de séries, théorie dont les traits essentiels sont exposés dans le Chapitre I.

Parmi les autres recherches de Cauchy sur les séries divergentes, on doit citer sa théorie des séries *syntagmatiques*. Cauchy donne ce nom à des séries ordonnées suivant les puissances de plusieurs variables et qui sont convergentes ou divergentes, suivant la manière dont on arrange leurs termes. Nous devons nous borner à ces brèves indications, renvoyant pour les détails aux Mémoires de Cauchy (¹). Signalons cependant un fait curieux : l'analogie certaine, quoique assez éloignée, de ces recherches de Cauchy avec les travaux récents de M. Mittag-Leffler, dont il sera question au Chapitre V. Nous devons d'ailleurs nous empresser de dire que les Mémoires de Cauchy, faute d'applications simples, étaient complètement tombés dans l'oubli, et que M. Mittag-Leffler n'en avait nulle connaissance lorsqu'il a fait sa belle découverte.

Le fait essentiel qui se dégage de cette revue rapide des travaux de Cauchy sur les séries divergentes, c'est que le grand géomètre n'a jamais perdu de vue la question des séries divergentes et a cherché constamment à atténuer cette proposition « un peu dure », suivant ses propres termes, *qu'une série divergente n'a pas de somme*. Les successeurs immédiats de Cauchy, au contraire, ont accepté cette proposition sans atténuation ni restriction, et paraissent avoir perdu complètement de vue les efforts qu'il a faits pour en diminuer la brutalité. Ils conservèrent seulement le souvenir

(¹) *Comptes rendus*, t. XX, p. 329. — *Œuvres de Cauchy*, série I, t. IX, p. 19.

*** Note de 1928 :**

(¹) Il est bien facile de comprendre dès maintenant comment ce point de vue consistant à rechercher un arrangement, ou plus généralement une transformation opportune des termes se rattache à ce qui précède. Soit $S_n(x)$ la somme des n premiers termes d'une série entière. En posant

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0 + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1},$$

on obtient la somme des $n+1$ premiers termes d'une série, ayant pour terme général un polynome. En substituant à la série entière cette série de polynomes (qui en résulte par transformation des termes), il se peut que cette deuxième série converge en certains points du cercle de convergence où la première était indéterminée.

de la théorie relative à la série de Stirling; mais la possibilité d'utiliser pratiquement cette série divergente apparaissait comme une curiosité tout à fait isolée, et sans importance au point de vue des idées générales que l'on pouvait chercher à se faire sur l'Analyse.

Les séries divergentes depuis Cauchy. — Le problème actuel.

Comme nous venons de le dire, on cessa, après la mort de Cauchy (1857), de se préoccuper des séries divergentes; c'est seulement plus de vingt ans après que paraît un travail se rattachant à cette question; je veux parler du *Mémoire de Laguerre sur l'intégrale* (¹)

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}.$$

Nous dirons quelques mots de ce Mémoire au début du Chapitre II; contentons-nous de remarquer ici qu'il renferme seulement un fait isolé et ne paraissant pas pouvoir servir de base à une théorie générale. C'est seulement bien plus tard que Stieltjes, généralisant d'une manière fort large le résultat de Laguerre, a créé la belle théorie que nous exposerons dans ce Chapitre.

Mais c'est à 1886 qu'il faut faire remonter les premières recherches à la fois générales et rigoureuses, sur des séries divergentes. A cette époque, parurent simultanément deux Mémoires, l'un de Stieltjes (²), l'autre de M. Poincaré (³) sur les séries que le premier appelait *semi-convergentes* et le second *asymptotiques*. C'est ce dernier terme qui a prévalu; la théorie de M. Poincaré a, en effet, une portée bien plus haute que celle de Stieltjes, comme on s'en rendra compte aisément en lisant le Chapitre I.

Ce qui caractérise la théorie de M. Poincaré et lui donne sa grande importance, c'est qu'elle est basée essentiellement sur la

(¹) *Œuvres de Laguerre*, t. I, p. 428. — *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII.

(²) STIELTJES, *Recherches sur quelques séries semi-convergentes* (*Annales de l'École normale*, 1886).

(³) POINCARÉ, *Acta mathematica*, t. VIII.

possibilité d'appliquer aux séries asymptotiques, dans des conditions bien déterminées que nous apprendrons à connaître, les règles ordinaires du calcul algébrique et du calcul intégral. *Les opérations ainsi effectuées correspondent exactement aux opérations analogues effectuées sur les fonctions que l'on fait correspondre aux séries.* C'est là le fait essentiel qui est le fondement de la théorie de M. Poincaré et qui doit être, *mutatis mutandis,* le fondement de toute théorie des séries divergentes qui aspire à être susceptible d'applications.

On trouvera dans les Chapitres III, IV, V, l'exposé de travaux plus récents sur les séries divergentes, travaux dans lesquels j'ai eu une part assez grande pour qu'il ne m'appartienne point de les commenter; je préfère terminer ce Chapitre en indiquant brièvement les principes fondamentaux qui m'ont guidé et qui dérivent d'ailleurs des remarques qui viennent d'être faites à propos de la théorie de M. Poincaré.

Il semble qu'à propos des séries divergentes on puisse se poser deux problèmes principaux, dont le second est, comme nous le verrons, un cas particulier du premier, mais mérite cependant d'être traité à part.

Le problème fondamental est le suivant : *Faire correspondre à chaque série divergente numérique un nombre tel que la substitution de ce nombre à la série, dans les calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts, ou du moins presque toujours exacts.* Il y aura lieu d'ailleurs, une fois ce premier résultat acquis, de fixer des classes, le plus étendues possible, de méthodes de calcul dans lesquelles on est *certain* que la substitution du nombre à la série est légitime. Pour les calculs ne rentrant pas dans les classes étudiées, on devra regarder le résultat obtenu comme seulement probable, et chercher à le vérifier par d'autres méthodes.

Il est d'ailleurs à peine utile d'observer qu'on ne peut guère espérer résoudre le problème précédent pour *toutes* les séries divergentes; l'infinité non dénombrable des modes de divergence paraît être un obstacle insurmontable; mais ce serait déjà un résultat fort important de l'avoir résolu pour les séries divergentes que l'on peut être effectivement amené à rencontrer dans les applications.

* Dans l'édition de 1928, cette phrase est remplacée par : "travaux auxquels M Emile Borel a pris une part importante".

On pourrait d'ailleurs être amené, comme nous en verrons des exemples plus loin, à attribuer *plusieurs sommes différentes* à une série divergente (1); ce fait peut paraître tout d'abord étrange et paradoxal; il n'aurait pas paru moins étrange à un géomètre du XVIIIe siècle d'entendre affirmer que l'intégrale définie

$$\int_1^2 \frac{dz}{z}$$

n'a pas seulement pour valeur $\log 2$, mais doit être considérée comme égale à

$$\log 2 + 2k\pi i,$$

k étant un nombre entier quelconque.

Mais nous laisserons à peu près complètement de côté cette question des valeurs multiples des séries.

Il est aisé de fixer, *a priori*, diverses conditions auxquelles devra satisfaire le nombre que nous appellerons la *somme* de la série divergente, par une extension naturelle du sens de ce mot.

* Il est d'abord clair que si les séries de termes généraux u_n et v_n ont pour somme U et V, la série de terme général $au_n + bv_n$ devra avoir pour somme $a\mathrm{U} + b\mathrm{V}$, quelles que soient les constantes a et b.

Il est clair aussi que si la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

a pour somme U, la série

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

doit avoir pour somme

$$\mathrm{U} - (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}).$$

De même, dans des conditions à préciser, la multiplication des séries divergentes devra être possible, et la série *produit* devra avoir pour somme le produit des sommes des séries *facteurs*.

Les remarques précédentes permettent déjà de calculer la valeur *nécessaire* que l'on doit attribuer à la somme de certaines séries, si toutefois il est possible de leur attribuer une valeur. Nous les

(1) Et aussi à une série convergente.

* Le texte de 1928 qui remplace toute cette fin de l'introduction est reproduit dans l'article "Le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries, p

avons déjà utilisées, en fait, page 8, à propos de la série d'Euler. Voici un autre exemple : soit

$$s = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots.$$

On a

$$s = 1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots) = 1 - 2s,$$

d'où

$$s = \tfrac{1}{3}.$$

Il est cependant deux opérations que l'on devra se garder d'effectuer sur les séries divergentes : c'est le changement de l'ordre des termes, et le remplacement de termes consécutifs par leur somme [1], *lorsque ces opérations seront faites une infinité de fois,* car il résulte, d'une remarque faite à la page précédente, que ces opérations sont légitimes lorsqu'on ne les effectue qu'un nombre limité de fois.

Il est manifeste d'ailleurs que la seconde des opérations dont nous venons de parler ne saurait être légitime si la première ne l'est pas; car, en effectuant successivement cette seconde opération et l'opération inverse, on peut obtenir un changement pur et simple de l'ordre des termes, c'est-à-dire effectuer la première opération [2].

Or, un peu de réflexion suffit pour se rendre compte que ce changement de l'ordre des termes ne saurait être légitime.

On sait, en effet, que, même dans le cas des séries convergentes, on peut modifier la somme à volonté en changeant l'ordre des termes, toutes les fois que la série n'est pas absolument convergente.

---

[1] Ou, inversement, la décomposition d'un terme en une somme de plusieurs autres.

[2] Par exemple, la série d'Euler s peut s'écrire

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

et ensuite

$$(-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$-1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

ou $-s$.

D'ailleurs, on peut démontrer (¹) que si l'on désigne par δ_n le déplacement du terme de rang n de la série, c'est-à-dire la différence entre les nombres qui expriment son rang dans la série primitive et dans la série modifiée, il suffit, pour que le changement de l'ordre des termes n'altère pas la valeur de la série, que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \delta_{n-p} u_n = 0, \tag{1}$$

ou bien

$$\lim_{n=\infty} \delta_n u_{n+p} = 0, \tag{1'}$$

quel que soit l'entier positif p qui peut varier avec n; ces deux conditions sont d'ailleurs équivalentes; mais il ne suffit pas que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \delta_n u_n = 0. \tag{2}$$

Or, pour une série convergente, dont les termes tendent nécessairement vers zéro, la condition (1) est nécessairement vérifiée si tous les δ_n sont finis. Mais pour une série divergente, dont les termes ne tendent généralement pas vers zéro, la condition (2) ne sera pas vérifiée, même si les δ_n ne dépassent pas l'unité. Il est donc fort naturel, par analogie avec ce qui se passe pour les séries convergentes, que le changement de l'ordre des termes altère la valeur de la série. Des exemples très aisés à former montrent d'ailleurs qu'il en est effectivement ainsi.

On doit donc considérer, dans une série, le rang de chaque terme comme faisant partie intégrante de ce terme; une série n'est pas seulement une collection dénombrable de nombres; c'est une telle collection, dont les éléments sont rangés dans un ordre déterminé, et cet ordre importe autant que la valeur des éléments. Sans doute, pour les séries absolument convergentes, la somme ne dépend pas de cet ordre et, à un certain point de vue, on peut en faire abstraction; mais il n'en serait sans doute plus de même si l'on s'inquiétait des diverses valeurs que peuvent avoir ces séries, comme nous l'avons dit p. 15.

Cette manière de considérer les séries : une collection de

(¹) *Voir* Borel, *Sur le changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1890).

nombres, *dont chacun a un rang déterminé,* est, à mon sens, *tout à fait essentielle en Analyse;* il faut y ajouter qu'une modification portant sur un nombre *limité* de rangs, et pouvant par suite diminuer tous les rangs d'un nombre fixe, à partir d'un certain terme, *est sans importance;* mais c'est *à l'infini,* si l'on peut ainsi s'exprimer, c'est-à-dire dans les termes dont le rang augmente indéfiniment, qu'il importe de ne pas bouleverser l'arrangement de la série, sous peine de changer complètement son caractère.

Laissant maintenant de côté les séries divergentes numériques, passons au second problème que nous avions annoncé : il est relatif aux séries de fonctions toujours divergentes. La théorie des séries de fonctions tantôt convergentes, tantôt divergentes, suivant la valeur de la variable (ou des variables) se rattache, en effet, à la théorie du prolongement analytique et il n'y a pas lieu d'y insister ici; nous en parlerons dans le Chapitre IV.

Le problème actuel est, comme nous l'avons dit, un cas particulier du précédent puisque, si l'on savait calculer la somme de la série numérique obtenue en donnant à la variable (ou aux variables), dans la série de fonctions, une valeur particulière quelconque, on aurait la connaissance complète des valeurs numériques de la fonction représentée par la série. Cette fonction serait donc connue, au moins théoriquement, et son étude rendue possible.

Mais on conçoit qu'il puisse être le plus souvent avantageux d'étudier cette fonction directement, sans passer par l'intermédiaire de ses valeurs numériques, et c'est pourquoi nous avons distingué ce second problème du premier.

Le cas particulier de ce second problème qui paraît être de beaucoup le plus important, dans l'état actuel de l'Analyse, est celui qui est relatif aux séries de puissances toujours divergentes. Nous nous en occuperons à diverses reprises dans le courant de cet Ouvrage.

Remarquons simplement ici que ces séries se présentent naturellement, comme intégrales vérifiant formellement des équations différentielles, et qu'il est par conséquent tout indiqué de chercher à déterminer, à l'aide de ces séries, les fonctions intégrales.

Il est clair, d'ailleurs, sans qu'il soit besoin d'insister sur ce point, que les règles de sommation de ces séries de fonctions devront satisfaire aux lois fondamentales que nous avons reconnu être nécessaires pour les règles de sommation des séries numériques. En particulier, pour les séries de puissances, la multiplication s'effectue d'après des règles évidentes : elle devra donner pour résultat une série dont la somme sera le produit des sommes des séries facteurs.

PAR

ÉMILE BOREL

Le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries

Anne MICHEL-PAJUS

Qu'est-ce qu'une âme? Il est facile de la définir négativement: c'est très exactement cela en nous qui se rétracte quand nous entendons parler de séries algébriques.

Robert Musil, *L'homme sans qualités*,Tome I, p.122, Points Seuil.

Quelle est la somme d'une série divergente ? Pour nos élèves cette question n'a pas de sens. S'il leur arrive d'attribuer une somme par inadvertance à une série avant d'en avoir montré la convergence, nous ne manquons pas de leur montrer quelles fâcheuses conséquences pourraient en découler.C'est ainsi que j'ai reçu il y a quelques années ce mot d'un ancien élève :

"Hello, peux-tu jeter un oeil et même les deux sur cet article et notamment sur

$$\sum_{i=0}^{\infty} i = -\frac{1}{12}$$

J'aimerais si possible une explication pour me rassurer. Ou est-ce simplement une coquille?"

L'article, écrit par Jean Thierry-Mieg, directeur de recherche au CNRS, théoricien à l'observatoire de Paris-Meudon, traitait de la grande unification dans la théorie des cordes et faisait allusion à la "renormalisation des infinis".

C'est ainsi que j'ai découvert que ce problème, attribuer une somme à une série divergente, fait travailler les mathématiciens depuis au moins trois siècles. Je vais essayer ici de replacer dans leur contexte quelques uns de ces face-à-face du mathématicien avec l'impossible et l'absurde : l'impossibilité de résoudre une question où apparaît une série infinie de termes, à moins de la remplacer par quelque chose, et l'absurdité des paradoxes auxquels conduit l'attribution d'une somme quelle qu'elle soit.

L'histoire de l'infini est une mine de paradoxes et le traitement des séries exige le discernement et la mise en cohérence de multiples acceptions de l'infini : infini/indéfini, discret/continu, infini potentiel/infini actuel. Du point de vue moderne, une série numérique a une infinité dénombrable (discrète) de termes. Si elle converge, la définition de sa somme comme limite de la suite des sommes partielles met en jeu le continu. Si le terme général comporte une indéterminée, il s'agit pour nous d'une série de fonctions, qui englobe une infinité de séries numériques, dont la somme éventuelle est une fonction qui peut elle-même être continue ou pas. Les séries divergentes soulèvent une autre difficulté : alors que la convergence, problème local, admet une théorie qui assure l'unicité de la somme, la divergence joue dans le global, et il semble que la multiplicité des valeurs attribuées à la somme soit inévitable.

Que fait un mathématicien devant un paradoxe? Il peut s'incliner devant la contradiction, rejeter ou réviser la théorie qui y conduit, mais il peut aussi l'utiliser pour affronter un autre défi: celui de l'écriture impossible d'une intuition dans le langage mathématique ambiant. Il s'agit alors d'élaborer un concept qui permette d'assumer le paradoxe, sous la forme *calculable* d'un objet mathématique. Mais le fait qu'il y ait contradiction dépend de l'univers mathématique dans lequel on se place, des objets préalablement construits mais aussi des modes de raisonnement, de la logique propre à cet univers. C'est pourquoi cette élaboration ne peut se faire qu'en se déportant de la logique normative en vigueur pour se placer dans la logique encore inconnue de l'univers en construction, la logique propre à l'impossible visé. Cela se réalise par tentatives de mise en cohérence locale, échecs, contournements et avancées, jusqu'à l'obtention d'une cohérence globale que l'on pourrait nommer rigueur du nouvel univers.

> "Ainsi, par des expériences successives, sans doute jalonnées de succès et d'erreurs, les hommes auraient conquis à la fois leur sujet d'étude (objet et but) et, en même temps, le mode de raisonnement approprié à cette étude. Ce qui aurait le mieux assuré cette appropriation, c'est la constance des résultats obtenus, la non-contradiction, comme nous disons maintenant."[1]

Cette relativité des modes de raisonnement peut sembler étonnante aux "post-modernes" que nous sommes. C'est que :

> "de même que les modifications apportées à la morale, au cours des siècles, sont apparues aux yeux de tous comme le retour à une morale immuable, les modifications apportées par Cantor à la logique, cette morale du discours, ont été considérées comme de simples rappels à la stricte observance d'une logique éternelle".[2]

C'est à une exploration de ces univers successifs que j'invite la lectrice ou le lecteur, en essayant de relever quelques ambiguïtés sur les concepts et les notations, de cerner l'objet et l'objectif du travail mathématique en jeu, de dévoiler les présupposés non-mathématiques qui fondent l'intuition impérieuse des mathématiciens. Les objets mathématiques que ceux-ci nous ont légués sont la trace calculable, condensée, mais épurée, de toutes ces tentatives.

C'est donc dans les textes mathématiques qu'il faut en lire le récit.

---

1 H.Lebesgue,1938, Les controverses sur la théorie des ensembles et la question des fondements, Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des Sciences Mathématiques , *Oeuvres Scientifiques*, Genève 1972, vol 5, p. 289.

2 idem, p. 291.

Premier moment : Aristote

Les séries infinies surgissent dans l'Histoire au coeur d'un bouquet de paradoxes. Bien que Zénon d'Elée les utilise dans le cadre d'un débat philosophique sur le temps, l'espace et le mouvement, le problème soulevé touche fondamentalement à l'infini et à la continuité. Voici "l'Achille" tel que l'énonce et le commente Aristote :

> " Le deuxième [paradoxe] est celui que l'on appelle l'Achille. Le voici: le plus lent à la course ne sera jamais rattrapé par le plus rapide; car celui qui poursuit doit toujours commencer par atteindre le point d'où est parti celui qui fuit, de sorte que le plus lent a toujours quelque avance."[3]
>
> " Le raisonnement suppose à tort que les infinis ne peuvent être parcourus ou touchés successivement en un temps fini. En effet la longueur et le temps, et en général tout continu sont dits infinis en deux acceptions, soit en division, soit aux extrémités (en composition). Sans doute, pour les infinis selon la quantité (en composition) il n'est pas possible de les toucher en un temps fini, mais pour les infinis selon la division, c'est possible, puisque le temps lui-même est infini de cette manière."[4]

Ainsi se constitue une première distinction que l'on peut désigner par *continu/discret*. Pour Aristote, les grandeurs continues (temps, espace) sont divisibles- et donc recomposables- à l'infini, alors que la quantité (le nombre) n'est pas divisible à l'infini, puisqu'il faut s'arrêter à l'unité. L'infini en composition de la quantité est donc infini dénombrable, ou discret. Ce paradoxe de Zénon tient à la considération du temps comme discret et de l'espace comme continu. La réfutation envisage le temps et l'espace comme continus, mais le discret est toujours sous-jacent dans le nombre d'étapes de la course d'Achille.

Cette première distinction de l'infini va se doubler d'une autre plus subtile: alors qu'il accepte la *possibilité* de diviser indéfiniment une grandeur en deux moitiés, Aristote nie l'existence simultanée, *en acte*, de cette infinité de moitiés.

> "Dans nos premiers exposés *Sur le Mouvement*, nous avons donné une solution fondée sur ce que le temps a en lui même des parties en nombre infini[...] Mais si cette solution était suffisante pour la demande (on demandait en effet si, dans un temps fini, il était possible de parcourir ou de compter des infinis), elle n'est pas suffisante relativement à la chose même et à la vérité[...]Si dans le continu, sont contenues des moitiés en nombre infini, ce n'est pourtant pas en acte, mais en puissance..."[5]

Ce refus - d'origine philosophique - de l'infini actuel[6] va marquer toutes les mathématiques grecques et celles dont elles constituent le modèle. De fait, la question de l'existence de l'infini actuel ressurgit tout le long de l'histoire des mathématiques.

---

4 Aristote, op.cit.,233 a, p.20-30

5 Aristote,op.cit.,263 a, p. 11-29

6 Pour une étude détaillée, cf H.Barreau, "la Physique du Continu chez Aristote, sa Réponse à Zénon", p. 3-15, in *Le Labyrinthe du Continu*, J.M.Salanskis et H.Sinaceur,Springer-Verlag Paris. Les citations d'Aristote sont tirées de cet article.

ARISTOTE, ACCUSÉ D'IMPIÉTÉ, S'EXILE D'ATHÈNES AVEC SES DISCIPLES

Extrait de:

CENT TABLEAUX DE SCIENCE PITTORESQUE

PAR

ALBERT LEVY

PARIS, 1886 (2e Ed.)
HACHETTE

Deuxième moment : Grégoire de Saint Vincent

Bien qu'un certain nombre de mathématiciens de la fin du Moyen-Age aient calculé des sommes de série infinies, on considère généralement que le premier qui ait affirmé explicitement qu'une série infinie représente une grandeur est Grégoire de Saint-Vincent. Dès sa jeunesse, celui-ci a travaillé sur les paradoxes de Zénon, comme en témoignent des manuscrits non publiés. Cette réflexion va le conduire à rejeter le paradoxe de Zénon en affinant la distinction d'Aristote pour les progressions :

> "Le discours captieux de Zénon engendre des difficultés en ne considérant pas la différence, comme cela a été relevé ici, entre les deux progressions qu'il imagine dans le double cours de son argumentation; l'une en effet se fait par parties égales [progression arithmétique]; l'autre par parties proportionnelles [progression géométrique]."[7]

Il peut alors définir la somme (qu'il appelle terme) d'une série infinie dans certains cas:

> "Le terme d'une progression est la fin des séries à laquelle s'il nous est permis de poursuivre à l'infini, aucune progression ne peut aboutir, mais à laquelle il est possible d'accéder d'aussi près que de n'importe quel intervalle donné"[8] .

Le *raisonnement* d'Aristote est remplacé par la définition d'un *objet mathématique* sur lequel on peut calculer. Cette définition tient son style étonnamment moderne du refus de l'infini actuel[9]. En incorporant le nouvel objet ainsi défini, *la progression qui possède un terme*, au langage de la tradition euclidienne, Grégoire de Saint Vincent démontre *rigoureusement*, par une double réduction à l'absurde, la formule qui donne la somme d'une série géométrique. Jean Dhombres[10] analyse subtilement l'introduction d'un découpage discret dans le continu qui constitue l'infini de référence d'une grandeur dans le cadre géométrique. En effet, l'objectif visé par Grégoire de Saint-Vincent est le problème géométrique de la Quadrature du cercle. Hélas, cet outil des séries ne permet pas d'atteindre la construction à la règle et au compas visée, et Grégoire de Saint Vincent ne le développera pas davantage.

Troisième moment : Les débuts du Calcul Infinitésimal

Après s'être affranchis peu à peu des contraintes euclidiennes, les mathématiciens du XVIIème découvrent le calcul infinitésimal. Les séries infinies y jouent un rôle primordial.

Il est remarquable que Newton comme Leibniz déclarent avoir commencé leurs recherches mathématiques en étudiant des séries infinies inspirées par le triangle de Pascal.

---

7 Grégoire de Saint-Vincent,1647, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*. Livre 2, p. 102. Traduction J.Dhombres, dans l'article cité note 10.

8 Grégoire de Saint-Vincent,1647, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*. Livre 1, p 55. Traduction J.Dhombres.

9 cf la définition de Cauchy: "lorsque les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres". *Cours d'analyse*,1821.

10 J.Dhombres,1992,"Le Continu Baroque, ou Comment ne pas jouer Discret", p. 51, in *Le Labyrinthe du Continu*, J.M.Salanskis et H.Sinaceur,Springer-Verlag, Paris.

ISAAC NEWTON

Extrait de:

CENT TABLEAUX DE SCIENCE PITTORESQUE

PAR

ALBERT LEVY

PARIS, 1886 (2e Ed.)

HACHETTE

Newton, en 1665, lisant chez Barrow la quadrature de l'hyperbole, imagine d'interpoler le triangle de Pascal pour développer $(1+x)^r$ quand r est rationnel et calculer ainsi les aires limitées par les courbes définies par ces équations[11].

Leibniz, en 1672, a l'idée de renverser le mode de constitution par sommes et différences du triangle de Pascal, ainsi que la suite de départ, en prenant la suite des inverses des entiers au lieu de celle des entiers, et utilise ce procédé pour calculer des sommes de séries infinies. Il indique clairement que son calcul différentiel infinitésimal (celui qui utilise différentielles et intégrales) est une généralisation de son calcul différentiel numérique (qui utilise différences finies et sommes de séries). Il utilise d'ailleurs les mêmes notations d, dd,...et $\int,\int\int$, ... dans les deux cas[12] .

Dans de nombreux cas, les développements en série constituent le seul moyen d'exprimer les fonctions "transcendantales" (c'est-à-dire non polynomiales), ou les grandeurs que l'on cherche à déterminer (racines d'équations, aires, rapport de l'aire du cercle à sa circonférence...), *impossibles à écrire dans le langage algébrique.* Le glissement du domaine des sommes *finies* à celui des sommes d'un nombre *indéfini* de termes, puis aux sommes *infinies* est favorisé par la notation ambigüe d'une somme de quelques termes suivie par etc, &c ou ... Les mathématiciens appliquent aux développements infinis toutes les opérations algèbriques, mais aussi dérivation, intégration, qu'ils utilisent pour les sommes finies.

Quand ces techniques sont justifiées, c'est au moyen d'arguments métaphysiques. De plus, à l'instar d'une somme finie, la série infinie a forcément une valeur: finie ou infinie, "vraie" ou "fausse"(imaginaire).

Newton expose sa méthode dans le *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*[13] (L'Analyse par les Equations qui ont un Nombre Infini de Termes), publié en 1711, mais qui circule depuis 1669 .

> "Et tout ce que l'Analyse ordinaire accomplit au Moyen des Equations comportant un Nombre fini de Termes (pourvu que cela se puisse faire), tout ceci peut toujours être accompli de même au moyen des Equations infinies, de sorte que je n'ai pas hésité à l'appeler également Analyse. Car les raisonnements dans ce cas ne sont pas moins certains que dans l'autre, ni les équations moins exactes, encore que nous autres Mortels, dont les pouvoirs de raisonnement sont confinés entre d'étroites limites, ne puissions ni exprimer, ni plus concevoir <u>tous</u> les termes de ces Equations que connaître <u>exactement</u> à partir d'elles les quantités que nous désirons."[14]

Cet acte de foi reflète la conception qu'a Newton du monde comme création divine. Par ses recherches, en physique et mathématique comme en alchimie ou dans l'étude des textes sacrés, il vise à s'approcher de la pensée de Dieu, en extrapolant à partir de ce que l'esprit limité

11 Epistola posterior et notes manuscrites, *The mathematical papers of Isaac Newton*, Whiteside, Tome I, p. 108.

12 Histoire et origine du calcul Différentiel, *Mnémosyne* , à paraître

14 Dans toutes les citations, j'ai laissé en italique ce qui était mis en italique par l'auteur, et ce qui est souligné est souligné par moi.

de l'homme peut en déchiffrer.

Par ailleurs, l'objet mathématique central n'est plus comme chez Grégoire de Saint Vincent une progression qui possède un terme que l'on cherche à calculer exactement, même s'il est impossible de l'atteindre, mais une grandeur inconnue, la racine d'une équation par exemple, qui possède (au moins) un développement en série et dont on cherche une valeur approchée. C'est dans ce cadre que Newton étudie les séries, non pour elles-mêmes, mais comme méthode. Bien qu'il dispose d'une définition de la convergence "selon les règles" très proche de celle de Saint-Vincent, la distinction qui lui semble pertinente pour une série est *vraie/fausse*, selon que la série conduit ou non à une valeur approchée de *la racine y*. Par exemple, dans le chapitre "Sur le Calcul des Séries", sans doute écrit en 1684, d'un ambitieux Traité qui ne sera jamais publié, *Matheseos Universalis Specimina,* Newton rappelle sa méthode[15] pour calculer les racines d'une équation sous forme de séries. Il obtient sur un exemple :

$$y = a + p = a - \frac{1}{4}x + q = a - \frac{1}{4}x + \frac{1}{64\,a}x^2 + r = \ldots$$

et conclut:

"A partir de là, la démonstration de la méthode est claire. Car si p, q, r, s,... qui sont les erreurs de la série, décroissent perpétuellement jusqu'à devenir inférieures à tout nombre donné, il est manifeste que la série obtenue converge selon les règles et <u>approche à l'infini</u> la quantité y qu'elle exprime. En fait, ceci arrive toujours lorsque la quantité indéfinie (ici x) dont les puissances constituent la série est assez petite. Mais si, à cause de la grandeur de x ou pour quelqu'autre raison ces p, q, r, s, ... ne diminuent pas ainsi, la série n'approchera jamais la quantité cherchée y avec une erreur assez petite et pour cela est dite à juste titre fausse. On obtient d'ailleurs toujours de fausses séries quand on extrait des racines impossibles.[l'auteur a rayé le passage suivant :] et des vraies quand les racines sont possibles et que le premier termede la série constitue une bonne partie de la racine"[16] [...]

Il propose alors la méthode de "transmutation"[17]

"La transmutation des séries s'intéresse à leur profusion. Ainsi, à partir d'une qui est rencontrée en dérivent d'innombrables autres.[...]Le principal usage de cette transmutation est de convertir les séries divergentes en convergentes, et les convergentes en plus convergentes. Les

[15] Cette méthode a été exposée dans le *Methodus Fluxionum et serierum infinitarum*, 1736. Elle est reproduite et expliquée dans *Histoire d'Algorithmes*, Belin, 1994, p.195-200.

[16] De computo Serierum, in *The mathematical Papers of Isaac Newton*, Whiteside, tome IV, p.593-595. Trad. A.M.P.

[17] Cette opération est celle qui sera désignée plus tard sous le nom de transformation d'Euler. Elle consiste à faire un changement de variable dans la série entière:

$$x = \frac{z}{1 \pm z}$$

Newton démontre une formule qui donne les coefficients de la série entière en z en fonction des différences finies des cefficients de de la série entière en x.

Sans entrer dans les calculs, on peut voir comment le changement de variable change la convergence de la série. Par exemple le développement de ln(1+x) diverge pour x = 2. Si l'on pose x = z/(1-z), ln(1+x) = -ln(1-z). Or pour x = 2, z=2/3, et le développement de ln(1-z) est alors convergent.

séries dont les termes ont tous le même signe ne peuvent diverger sans devenir en même temps infiniment grandes et pour cela deviennent fausses. Ce n'est donc pas la peine de convertir celles-ci en convergentes. Celles en revanche dont les termes sont de signes alternés et progressent selon certaines règles sont ainsi modérées par les additions et soustractions alternatives de leurs termes qu'elles restent vraies même en divergeant. Mais sous leur forme divergente leur quantité ne peut être calculée. Il faut les convertir en convergentes au moyen de la règle donnée, et quand elles convergent lentement, il faut appliquer la règle pour qu'elles convergent plus vite."[18]

Le terme "divergent" qui apparaît ici[19], ne recouvre pas une propriété intéressante, ni même intrinsèque, de la série. La notion de vraie/fausse que privilégie Newton, liée à la fois à la série (certaines ont une forme qui les donne comme fausses a priori) et à la grandeur cherchée (une racine imaginaire donne une série fausse) ne nous satisfait pas sur le plan logique - notons d'ailleurs que ces textes n'ont pas été publiés par l'auteur - mais elle s'introduit plus naturellement dans la recherche d'une formule *localement* valable pour une grandeur.

Pour Michel Serres, cette priorité de traitement des problèmes locaux est

"un cas particulier d'une constante aisément observable en histoire des sciences, et en histoire des mathématiques précisément : il semble qu'il y ait *précession des problèmes posés par l'infiniment petit* sur ceux de *l'infiniment grand*. On voit assez mal les raisons de cette priorité, mais elle ne laisse pas d'être en fait. "[20]

Peut-on relier cette situation au fait que dans l'infiniment petit l'écart entre l'infini potentiel et l'infini actuel est...infiniment petit, inférieur à toute grandeur donnée, alors que dans l'infiniment grand cet écart est infiniment grand, et donc plus difficilement contrôlable ?

Dans une lettre à Hermann[21] de 1705, Leibniz distingue deux notions que l'on peut rapprocher de celles de Newton: la convergence (advergence) vers une valeur, et la possibilité-vérité de la série. Mais à la différence de ce dernier, il essaie de les détacher de l'équation d'origine, et d'étudier "la possibilité d'une série à partir de sa propre loi". Cette recherche est liée à une détermination du domaine d'utilisation des séries entières. L'auteur distingue plus précisément la convergence/non convergence de la série et la possibilité/impossibilité de sa *valeur* dans une lettre à Nicolas Bernoulli de 1713 :

"Je me réjouis de ce que, à mon incitation, tu aies commencé à réfléchir au moyen par lequel une série infinie doit être explorée, dans quel cas sa valeur est définie comme une quantité impossible, et que tu aies déjà apporté des résultats non négligeables. Il y a ceci de sûr, que toutes les fois que la quantité est impossible, la série ne peut pas être advergente, ou telle, si loin qu'on puisse la continuer, qu'elle diffère par rapport à une quantité finie possible, d'une quantité inférieure à celle qui est donnée : autrement, en effet, elle sera nécessairement égale à cette quantité possible finie. Or, quoiqu'on ne puisse dire à coup sûr qu'à l'inverse une série non advergente exprime une

[18] De computo Serierum, in *The mathematical Papers of Isaac Newton*, Whiteside, tome IV, p.610. Trad. A.M.P.

[19] Signalons au passage que le terme de "convergent" apparaît en 1667 sous la plume de Gregory , qui était aussi opticien, mais celui-ci ne l'utilise que pour des suites adjacentes.

[20] Michel Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, PUF, 1990, p.259.

[21] Lettre de Leibniz à Hermann, Hanovre, le 26 Juin 1705.*Leibnizens mathematische Schriften*, tome#,p.272-273

quantité finie impossible, puisqu'elle peut éventuellement exprimer une quantité infinie, je croirais cependant, si une expression générale avait des limites telles qu'en les franchissant elle représenterait quelque chose d'impossible, et si cette expression de la valeur était aussi obtenue au moyen d'une série infinie, qu'il est nécessaire que dans le cas d'une limite, c'est-à-dire quand commence l'impossibilité, la série de advergente devienne non advergente. [...]

La racine $\sqrt{(1-x)}$ donnera un exemple ; elle peut être exprimée par la série:

$$\sqrt{(1-x)} = 1 - \frac{1}{2;1}x - \frac{1}{2^2;1.2}x^2 - \frac{1.3}{2^3;1.2.3}x^3 - \frac{1.3.5}{2^4;1.2.3.4}x^4 - \text{etc.}$$

Ici, quand x est inférieur à l'unité, la quantité est possible et la série est advergente, mais quand x est supérieur à l'unité, la quantité est impossible et il est donc nécessaire que la série soit non advergente. Certes nous le savons à partir de l'expression finie $\sqrt{(1-x)}$, mais cela vaut la peine que la même chose soit connue aussi à partir d'une série dont la valeur finie est inconnue ou dissimulée. Assurément quand $x = 1$, il s'ensuit que :

$$1 = \frac{1}{2;1} + \frac{1}{2^2;1.2} + \frac{1.3}{2^3;1.2.3} + \frac{1.3.5}{2^4;1.2.3.4} + \text{etc .,}$$

et dans ce cas du moins cela pourrait être trouvé par ailleurs, car nous avons les sommes de séries de cette nature en assez bon nombre; mais il reste à démontrer à partir de la série que, lorsque x est posé supérieur à 1, elle cesse d'adverger. Par ailleurs, je préfère utiliser ici le terme d'advergence, plutôt que convergence et divergence, en effet quand deux séries s'approchent l'une de l'autre de manière continue, elles sont appelées à juste titre convergentes par James Gregory; mais quand il s'agit d'une seule série qui s'approche d'une valeur, il sera plus correct de dire advergente. Des séries d'équations, à savoir expressions de quantités régulières il faudrait passer aux séries de quantités transcendantes ou du moins de quantités qui n'ont pas d'expression finie. C'est là en effet que cette détermination de l'impossibilité serait extrêmement utile."[22]

La dernière égalité ne nous semble peut-être pas aussi "assurée" qu'à Leibniz. Nous y reviendrons, mais entretemps sont apparus les premiers paradoxes, chez Jacques Bernoulli. Celui-ci explore les méthodes de sommation des séries avec l'objectif de calculer un maximum de sommes. Cette étude, effectuée entre 1689 et 1704, est publiée en 1713, après sa mort, par son neveu Nicolas en supplément à l'*Ars Conjectandi* sous le titre "*Traité des Séries Infinies et de leur Somme Finie et de leur Usage dans la Quadrature des Espaces et la Rectification des Courbes*" (en fait, il s'agit probablement de thèses soutenues par ses élèves, mais publiées sous son nom).

Bien que la présentation du traité se veuille très axiomatique, les méthodes sont biaisées par la manipulation algébrique de cet objet ambigü, matérialisé par une notation (quelques premiers termes suivis de &c) qui désigne indifféremment une série, la somme d'un nombre fini mais indéterminé de termes, la somme (valeur) de la série. L'auteur distingue clairement les séries de somme infinie et signale au début, en donnant un contre-exemple, qu'il ne faut pas les utiliser sans précaution[23]. A contrario, le fait d'aboutir à une contradiction ne remet pas en cause la méthode ni le résultat, mais le convainc de l'infinité de la somme utilisée.

22 Lettre du 28 Juin 1713,*Leibnizens mathematische Schriften*,tome 3,p.985-986. Trad. A.M.P.

23 *Ars conjectandi*... Bâle,1713, p.249-250

Il donne ainsi, par exemple,une nouvelle preuve de l'infinité de la série harmonique[24] :

"Cette série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\&c$$

est égale à ses parties, soit aux séries A+B+C+D+&c.

$$A=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\&c=\frac{2}{1}$$

$$B=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\&c=\frac{2}{3}$$

$$C=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\&c=\frac{2}{5}$$

$$D=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+\&c=\frac{2}{7}$$

La série

$$\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\&c$$

est donc égale à la série proposée et donc la série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\&c$$

est égale à sa moitié. C'est-à-dire que la somme des termes de position impaire est la moitié de la série totale, et donc égale à la série des autres termes

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\&c$$

[...]Puisque

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}>\frac{1}{4},\ \frac{1}{5}>\frac{1}{6},\&c, \text{ on aura } \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\&c>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\&c$$

qui a cependant par ce moyen été montrée égale; ces [propositions] ne peuvent être conciliées en aucune façon, sinon par le fait que la somme de chacune de ces séries est posée <u>infinie, c'est-à-dire qu'aussi grande que soit leur différence, elle ne peut détruire l'argument de l'égalité.</u>"

Plus loin, à la suite d'une autre contradiction:

"la raison de cette εναντιοφανειασ [contradiction révélée], <u>quoiqu'il semble que la nature de l'infini ne puisse être saisie par notre perception finie</u>, nous l'avons suffisamment examinée. On doit comprendre qu'il en est de même pour les autres séries qui ont une somme infinie."[25]

Il existe pourtant un autre type de série qui conduit à des paradoxes, bien que sa somme ne soit pas infinie. Par division continuée Bernoulli obtient le résultat suivant:

$$\frac{1}{m+n}=\frac{1}{m}-\frac{\ln}{m^2}+\frac{\ln^2}{m^3}-\dots$$

puis énonce un corollaire :

Si cependant n = m, il viendra

---

24 idem,p.261 (le texte latin est reproduit page 65 de ce numéro). Bernoulli a auparavant rappelé p. 250-251 une démonstration par l'absurde dûe à son frère Jean et en a proposé une autre. Notons que la preuve de Mengoli (*Novae Quadraturae Arithmetica*, Bologne, 1650) est citée par John Collins dès 1676. Celle d'Oresme (*Questiones super geometriam Euclidis*) n'était apparement pas connue à l'époque.

25 idem, p.262

$$\frac{1}{m+n}=\frac{1}{2m}$$

et la série

$$\frac{1}{m}-\frac{ln}{m^2}+\frac{ln^2}{m^3}-\frac{ln^3}{m^4}+\text{etc}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}-\text{etc}$$

d'où il découle un paradoxe non dépourvu d'élégance. En effet, si le dernier terme de la série est pris affecté du signe - tous les termes sembleront se détruire mutuellement, et si c'est du signe +, ils se verront égaler l/m et non pas l/2m. Mais l'explication du paradoxe est que dans la division continuée de l par m + n, le reste de la division n'est pas diminué, mais reste perpétuellement égal à l; d'où le quotient de la division à proprement parler n'est pas la seule série

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}-\frac{1}{m}+\text{etc mais }\frac{1}{m}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}-\frac{1}{m}+\text{etc}\pm\frac{1}{2m}$$

la fraction devant être faite à partir du reste et du diviseur, et affectée du signe + ou - selon que le dernier terme le plus proche de la série aura le signe - ou +.

Cette explication nous laisse sur notre faim, car l'auteur ne prend pas parti sur la validité de l'égalité. Mais peut-être a-t-il moins envie de s'attaquer aux paradoxes que d'en éprouver la divine volupté, comme le suggère le poème[26] publié à la fin du chapitre :

Comme une petite somme finie enserre
Une Série sans fin, et la limite n'est présente en aucune limite
Ainsi les traces de l' Immense Puissance divine s'attachent
A un corps modeste, et la limite est absente de l'étroite limite.
Voir dans l'immense le minuscule,dis, quelle volupté!
Et quelle volupté de voir dans le minuscule le Dieu immense!

Les mathématiques fournissent ici à la métaphysique un modèle qui permet d'enfermer l'infini dans le fini et de penser l'Univers du point de vue de Dieu. Réciproquement, les paradoxes à l'intérieur des mathématiques ne sont pas facteurs de rejet car ils ne font que traduire la trace divine. Citons Pascal :

> "une division infinie est chose incompréhensible puisqu'elle échappe à toute représentation directe, pourtant, il est vrai de dire qu'il n'y a point de géomètre qui ne croie l'espace divisible à l'infini. On ne peut non plus l'être sans ce principe qu'être homme sans âme"[27].
>
> "Incompréhensible.Tout ce qui est incompréhensible ne laisse pas d'être. Le nombre infini. Un espace infini égal au fini. Incompréhensible que Dieu s'unisse à nous."[28]

Le soutien mutuel des mathématiques et de la théologie se manifeste fréquemment. Par exemple, l'écossais John Craig utilise le calcul des probabilités pour dater la fin du

---

26 idem, p.306 "Ut non-finitam Seriem finita coercet,/Summula, & in nullo limite limes adest:/Sic modico immensi vestigia Numinis haerent/Corpore, & angusto limite limes abest./Cernere in immenso parvum, dic, quanta voluptas!/In parvo immensum cernere, quanta, Deum!" Trad. A.M.P.

27 *Réflexions sur l'esprit géométrique*

28 Pensée 149, Edition Lafuma

monde[29]. Leibniz trouve dans le calcul binaire une illustration de la création divine. Et c'est encore l'interprétation théologique du Père Guido Grandi qui va rendre célèbre la série 1-1+1-1+1+ etc. déjà signalée par Bernoulli. Grandi y découvre le paradoxe suivant : il est possible d'obtenir quelque chose à partir de "la répétition à l'infini de purs néants", ce qui renvoie au mystère de la Création. Leibniz voit dans ce paradoxe un danger pour "la nouvelle science de l'infini", et publie en 1713 une réponse au Professeur Wolff, de Halle, dans les Suppléments aux Acta Mathematica[30] :

> "... Dans la question remise récemment à l'ordre du jour par Guido Grandi, vous me demandez si je suis d'avis que 1-1+1-1+1 etc. à l'infini est égal à $\frac{1}{2}$ et comment écarter l'apparente absurdité d'une telle proposition. En effet puisque l'égalité 1-1=0 semble se reproduire une infinité de fois, on ne voit pas comment la répétition à l'infini de purs néants pourrait faire $\frac{1}{2}$. Je constate que Grandi confère à l'infini le pouvoir de faire surgir quelque chose à partir de rien, et qu'il attend par là expliquer, non sans élégance, la création du monde, que l'omnipotence Divine tire du néant. Mais la Création n'est pas simple répétition de Néants et suppose l'adjonction d'une réalité nouvelle et positive[...]

Leibniz justifie d'abord la valeur $\frac{1}{2}$ pour la somme en prenant x=1 dans l'égalité :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{etc.}$$

Pour appuyer cette extension d'une égalité valable pour $x < 1$, il rappelle qu'il a déjà utilisé cette méthode avec succès pour la Quadrature du Cercle. A l'aide de la série:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

il a obtenu que "le rapport de la série

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$

à l'unité est celui de l'aire d'un Cercle au carré de son Diamètre."

Il emprunte ensuite à Grandi une idée d'illustration de ce résultat par les courbes "pour donner plus de prise à l'imagination", et donne enfin la justification par la "loi de continuité", que l'on peut énoncer ainsi :

> "si une différence dans ce qui est donné peut-être rendu arbitrairement petite, il en est de même pour la différence qui en résulte dans ce qui est cherché"[31].

Pour Leibniz, cette loi implique que:

> "dans les continus, on peut considérer une limite externe comme une limite interne, si bien que le dernier cas, même s'il est de nature complètement différente, est compris dans la loi générale gouvernant les autres".

Et donc ici, comme dans sa lettre à Bernoulli, ce qui est vrai pour $x < 1$, reste vrai pour $x = 1$.

Leibniz conteste ensuite l'assertion que la série se réduirait à 0+ 0+ 0+ 0+ etc à l'infini :

---

29 *Theologiae christianae Principia mathematica*, 1699. Cité par Marc Parmentier in *Leibniz, La naissance du calcul différentiel*,1989,Vrin. p.437.

30 Traduction de Marc Parmentier in *Leibniz, La naissance du calcul différentiel*,1989,Vrin.

31 *Leibnizens mathematische Schriften*, tome 6, p.129

"M. Grandi tente avec ingéniosité de lever l'objection en recourant à une analogie. Il imagine que deux frères devant partager un patrimoine découvrent dans l'héritage de leur père une pierre de très grande valeur, dont le testament interdise la vente ; ils conviennent donc entre eux de la déposer alternativement pour un an dans leur bibliothèque respective. De cette façon, à supposer que les héritiers respectent éternellement cette règle, la descendance de chaque frère se voyant accorder puis retirer la pierre une infinité de fois, en possèderait juridiquement la moitié.

Mais à y regarder de plus près, cette analogie est trop claudicante[...]

Il adresse deux reproches à cette analogie. Premièrement, la même contradiction apparaîtrait si la pierre était partagée un nombre fini d'années (égalité des droits mais résultat nul au bout du compte) et deuxièmement, l'usufruit sur un an n'est pas la totalité du droit sur une chose.

Il propose alors un deuxième argument, fondé sur la" loi de justice":

"Il m'appartient à présent de révéler la véritable solution, peut-être inattendue, en tout cas singulière, de cette *énigme*, ainsi que l'explication du *paradoxe*, en me ramenant d'abord à une série finie pour passer ensuite à une série infinie. Remarquons en effet que pour une série finie il faut distinguer deux cas qui d'une façon assez surprenante, se confondent dès qu'il s'agit d'une série infinie. Nous pouvons développer une série finie 1-1+1-1+1+etc. de deux manières: elle est ou bien constituée d'un nombre pair de termes et se termine par un -, comme1-1, 1-1+1-1, ou 1-1+1-1+1-1,dans ce cas, aussi loin que nous poursuivions, nous obtenons toujours 0. Ou bien la série est constituée d'un nombre impair de termes et se termine par un +, par exemple 1-1+1,1-1+1-1+1-1+1, aussi loin que nous poursuivions, tous les cas donnent +1. Mais lorsque la série est infinie 1-1+1-1+1-1+etc. à l'infini, au-delà de tout nombre,disparaît également la détermination pair impair. Et comme il n'y a pas plus d'arguments en faveur de la parité que de l'imparité, ni par conséquent en faveur d'un résultat égal à 0 ou à 1, le génie admirable de la nature fait que le passage du fini à l'infini s'accompagne du passage de propositions disjonctives (qui disparaissent) à une proposition unique affirmative (qui subsiste), moyen terme entre les deux propositions disjonctives. Or ceux qui ont traité des estimations ont montré que lorsqu'il s'agit de prendre le milieu entre deux quantités ayant même raison d'être, il faut prendre la moyenne Arithmétique, c'est-à-dire la moitié de leur somme; c'est ainsi que la nature observe ici encore sa loi de justice, par conséquent puisque dans le cas d'un nombre fini de termes la série 1-1+1-1+etc. vaut 0 si le nombre est pair et 1 s'il est impair, lorsque la multiplicité infinie des termes fait disparaître les deux cas, que les prérogatives du pair et de l'impair se confondent, et que l'un et l'autre ont exactement la même raison d'être, nous obtenons par conséquent $(0+1)/2 = \frac{1}{2}$ comme je l'avançais.

J'ajoute que même si ce type d'argumentation semble plus Métaphysique que Mathématique, il ne laisse pas d'être solide. Au reste les Règles de la Véritable Métaphysique (celle qui ne se contente pas de dresser des nomenclatures) sont en Mathématiques, en Analyse et même en Géométrie, d'un usage plus étendu qu'on imagine."

En conclusion, Leibniz se félicite que les propriétés des séries (utilisées pour la première idée) et celles de l'infini (pour la deuxième idée) donnent la même conclusion, et donc, en réfutant l'objection que la série valait 0, rendent ainsi "insoutenable" un paradoxe qui aurait pu "porter préjudice à la nouvelle science [de l'infini]".

Pourquoi Leibniz donne-t-il deux arguments ? Le fait de trouver le même résultat par deux raisonnements distincts donne consistance à la théorie. Mais il semble trouver le second plus convaincant que le premier. Certes le nouveau calcul infinitésimal de Leibniz est très discuté, et pour justifier la double continuité (existence de la somme, continuité de la fonction somme) sur laquelle repose le premier argument, l'auteur a recours à un autre paradoxe, qu'il traduit par une "Figure Philosophico-rhétorique".

> "Dès ce moment et de manière paradoxale et pour ainsi dire par une *Figure Philosophico-rhétorique* nous pouvons considérer le point par rapport à la ligne, le repos par rapport au mouvement, comme des cas particuliers compris dans le cas général inverse, le point apparaissant comme une ligne infiniment petite, évanescente, ou le repos comme un mouvement évanescent. De même pour d'autres formules du même genre,que l'homme très profond qu'était Joachim Jung aurait nommées *vraies par tolérance* et qui sont des plus utiles pour l'art d'inventer, même si à mon avis elles enveloppent quelque chose de fictif et d'imaginaire[...]Au reste la nature, qui procède toujours pas à pas et non par sauts, ne saurait violer la loi de continuité".

Leibniz se place ainsi dans une logique qui inclut elle-même un autre concept paradoxal, posé de façon quasiment axiomatique, si l'on considère le terme de Figure Rhétorique et l'expression "vraies par tolérance", et justifié philosophiquement par la référence à la nature. Leibniz a la même attitude vis-à-vis de l'existence des infiniment petits.

Tout comme le statut des infiniment petits, les arguments métaphysiques de Leibniz sont très discutés[32]. Varignon, par exemple, est sceptique quant à la loi de continuité. En 1707, Leibniz lui répond :

> Je me contenterai de répondre à l'article de votre lettre où vous me demandez des éclaircissements sur mon principe de Continuité. Assurément je pense que ce principe est général et qu'il tient bon, non seulement dans la Géométrie mais encore dans la Physique. La géométrie n'étant que la science des limites et de la grandeur du continu, il n'est point étonnant que cette loi s'y observe partout : car d'où viendrait une subite interruption dans un sujet qui n'en admet pas en vertu de sa nature? Aussi savons-nous bien que tout est parfaitement lié dans cette science, et qu'on ne saurait alléguer un seul exemple qu'une propriété quelconque y cesse subitement ou naisse de même, sans qu'on puisse assigner le passage intermédiaire de l'une à l'autre, les points d'inflexion ou de rebroussement qui rendent le changement explicable ; de manière qu'une équation algébrique qui représente exactement un état, en représente virtuellement tous les autres qui peuvent convenir au même sujet. L'universalité de ce principe dans la géométrie m'a bientôt fait connaître qu'il ne saurait manquer d'avoir lieu aussi dans la physique : puisque je vois que, pour qu'il y ait de la règle et de l'ordre dans la nature, il est nécessaire que la physique harmonise constamment avec le géométrique et que le contraire arriverait si, là où la géométrie demande de la continuation, la physique souffrait une subite interruption. Selon moi tout est lié dans l'univers en vertu de raisons de métaphysique, de manière que le présent est toujours gros de l'avenir et qu'aucun état donné n'est explicable naturellement qu'au moyen de celui dont il a été précédé immédiatement..."[33]

[32] à propos du statut des infiniment petits, cf par exemple: J.P. Wurtz,La naissance du calcul différentiel et le problème du statut des infiniment petits: Leibniz et Guillaume de l'Hospital, in *La mathématique non standard*, Ed. du CNRS,1989, p13-41, et Observatio quod rationes, in Parmentier*Leibniz, La naissance du calcul différentiel*,1989,Vrin, p 433.

[33] Lettre du 16 Octobre 1707, in *Leibniz et l'infini*, F.Burbage et N.Chouchan, PUF 1993, p.122-123.

Pour ce qui est de la série de Grandi, Varignon fait preuve d'un solide bon sens :

"Pour moy, voyant que la division de 1/(1+1) poussée à l'infini, donne 1-1+1-1+1-1+1-1+etc.= 0 , et 1-1+1-1+1-1+1+etc. =1, selon que le nombre des unités est pair ou impair dans cette suite infinie; j'avois conclu qu'une telle division ne donnait rien ici, et que chaque operation y détruisant toujours l'autre, c'étoit toujours à re[com]mencer apres une infinité d'operations comme si l'on n'en eust fait aucune lorsque le nombre est pair, ou comme si l'on n'en eust fait qu'une lorsqu'il est impair.

Pour remédier à cet inconvénient ou pour éviter l'enigme, au lieu de la fraction 1/(1+1) , je me sers de son égale 1/(3-1), dont la division poussée à l'infini, donne

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\text{etc.}$$

en progression géométrique décroissante dont la somme est

$$\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$$

On peut ainsi trouver une infinité d'autres progressions géométriques décroissantes, chacune = 1/(1+1) sans aucune Enigme, en poussant à l'infini la division d'une fraction quelconque 1/(a-b) d'un dénominateur a -b = 2...."[34]

Varignon *évite* ainsi le paradoxe en ne s'intéressant qu'aux différentes manières d'écrire une grandeur sous forme de séries, mais ne fait guère progresser le sujet...

Nous avons vu que le premier argument n'utilise pas en fait l'infiniment grand, mais les infiniment petits. La série infinie n'est qu'une autre écriture d'une expression algébrique. Ce qui est en cause n'est pas la convergence de la série, comme concept qui prend en compte la dualité discret/continu, mais la continuité de la fonction somme. Le deuxième argument est fondé sur une toute autre approche. Inspiré des travaux de Huygens sur l'espérance mathématique ou de la loi des grands nombres de Jacques Bernoulli, il renvoie à un infiniment grand discret qui semble actuel, puisque la situation envisage d'emblée l'infinité des cas (finis) possibles, pour les partager en deux lots égaux. D'une certaine façon, cette approche semble mieux adaptée au problème posé.

La position de Leibniz vis-à-vis de l'existence de l'infini actuel est la même que pour les infiniment petits :

"L'infini continu ou discret n'est proprement ni une unité, ni un tout, ni une quantité, et lorsque par analogie nous l'employons dans ce sens, c'est pour ainsi dire une façon de parler; je veux dire que lorsqu'une multiplicité d'objets excède tout nombre, nous leur en attribuons un malgré tout, par analogie et nous l'appelons infini. Mais lorsque par un saut à la limite, nous disons seulement infini ou infiniment petit, nous nous plions à une commodité de langage, c'est-à-dire à un raccourci mental, mais nous ne disons plus que des choses *vraies par tolérance*, dont le sens devient *rigoureux* quand on les explique"[35]

---

34 Lettre à Leibniz du 19 Novembre 1712,*Leibnizens mathematische Schriften*, tome 4, p. 188.

35 Observatio quod rationes, 1712, traduit par Parmentier dans*Leibniz, La naissance du calcul différentiel*,1989,Vrin, p.434.

Quatrième moment : Euler

Les arguments de Leibniz n'ont évidemment pas clos le débat, et les opposants de l'attribution d'une somme aux séries divergentes soulèvent de nouveaux paradoxes, auxquels répondent de nouvelles tentatives de mise en cohérence. Simultanément l'utilisation des sommes de séries divergentes se révèle très fructueuse. Euler, en particulier, accomplit un travail titanesque sur les séries à partir de 1730. En inventant une profusion de méthodes dont certaines auront de nombreux développements, il obtient les sommes exactes ou approchées d'une foule de séries, convergentes, mais aussi divergentes, malgré ses propres appels à la prudence.[36]

Il démontre par exemple que la somme des termes de la forme

$$\frac{1}{m^n - 1}$$

où m et n sont des entiers supérieurs ou égaux à deux (en ne gardant que les dénominateurs distincts) est égale à 1, en utilisant la somme de la série harmonique[37].

Ses sommations de séries divergentes valent à Euler de nombreuses objections, en particulier de Nicolas Bernoulli, comme en témoignent ses lettres de 1742-1743. Nous n'avons pas les lettres de réponse d'Euler, mais celui-ci publie en 1754-1755 un article de synthèse[38] où il reprend tous les arguments de ses prédécesseurs et conclut en distinguant la *somme* de la série, de sa *valeur*, qui est celle de "l'expression algébrique d'où dérive la série", pour aussitôt poser, de façon axiomatique, l'unification des deux concepts.

> 1. Puisque les séries convergentes sont constituées par définition de termes continûment décroissants, qui s'évanouissent enfin tout à fait si la série va jusqu'à l'infini, on comprend facilement qu'il faut classer dans les séries divergentes celles dont les termes à l'infini ne s'aboliraient pas dans le zéro, mais resteraient finis ou croîtraient à l'infini, puisqu'elle ne sont pas convergentes. Selon donc que les derniers termes de la série, ceux que l'on obtient en continuant la progression à l'infini, seront de grandeur finie ou infinie, il y aura deux genres de séries divergentes, que l'on divise encore chacun en deux espèces, selon que tous les termes sont affectés du même signe, ou bien que l'on trouve alternativement les signes + et -. Nous aurons donc en tout quatre espèces de séries divergentes, dont je vais donner ci-dessous quelques exemples pour plus de clarté.

---

36 Par exemple en 1739 :"On voit bien ici avec quelle prudence il faut traiter la somme des séries divergentes. " *Opera omnia*(1), tome 14, p.360.

37 Variae observationes circa series infinitas, 1744, *Opera omnia*,(I) 14,p.216-218. Trad. A.M.P

38 De Seriebus divergentibus, *Novi.Comm.Acad.Sci.Petrop*;5, 1760, *Opera*(1),14, p.585-594. Trad A.M.P.

I. $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \text{etc.}$

II. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$

$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \text{etc.}$

III. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \text{etc.}$

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \text{etc.}$

IV. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.}$

$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \text{etc}$

2. Il y a un grand désaccord parmi les Mathématiciens au sujet des sommes de séries divergentes de ce type: certains nient qu'elles puissent être totalisées dans une somme unique, d'autres l'affirment. Et d'abord il est certes évident que les sommes des séries que j'ai rapportées à la première espèce sont réellement infiniment grandes, puisque, en effectuant l'addition de tous les termes,on arrive à une somme plus grande que tout nombre donné; il ne fait donc aucun doute que les sommes de ces séries puissent être exprimées par des expressions de la forme a/0. C'est donc autour des autres types de séries qu'il y a surtout controverse entre Géomètres, et les arguments donnés pour défendre les avis sont assénés avec tant de force pour persuader, qu'aucun des partis n'a pu jusqu'ici avoir l'accord de l'autre.

3. Parmi celles de la seconde espèce, Leibniz le premier a considéré la série 1-1+1-1+1+etc., dont il avait établi que la somme vaut $\frac{1}{2}$ par ces arguments assez solides : en effet d'abord cette série donnerait ce résultat, si l'on développait de la manière habituelle la fraction $1/(1+a)$ par division continue en cette série : $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \text{etc.}$ et si l'on prenait la valeur de la lettre a égale à l'unité. Puis, comme grande confirmation de ceci et pour persuader ceux qui ne sont pas habitués au Calcul [infinitésimal], il utilise le raisonnement suivant : si la série s'arrêtait quelque part et si le nombre de termes était pair, sa valeur serait = 0, mais si le nombre de termes était impair, la valeur de la série serait =1; et <u>si</u> donc la série <u>allait jusqu'à l'infini</u> , le nombre de termes ne pourrait être estimé ni pair ni impair, il conclut que la somme n'est ni = 0 ni =1, mais qu'elle doit occuper une valeur moyenne également distante de l'un et de l'autre, à savoir $\frac{1}{2}$.

4. Contre ces arguments, l'objection habituelle des adversaires est : "D'abord, la fraction $1/(1+a)$ n'est pas égale à la série infinie si a n'est pas une fraction inférieure à l'unité. En effet, si l'on interrompt n'importe où la division et si l'on ajoute la partie qui reste dûe à ce rang quel qu'il soit, l'origine du paralogisme devient manifeste; on aura en effet:

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots \pm a^n \pm \frac{a^{n+1}}{1+a},$$

et <u>aussi loin que le nombre n soit pris vers l'infini</u>, on ne peut cependant omettre la fraction additionnelle

$$\pm \frac{a^{n+1}}{1+a},$$

à moins qu'elle ne s'évanouisse réellement, ce qui a lieu dans les cas où a<1, et alors la série devient convergente. Mais dans les autre cas, il faut toujours garder le calcul de cette mantisse, et bien qu'elle soit affectée du signe flottant ± selon que n est un nombre pair ou impair, cependant, si n est infini, on ne peut la négliger du fait que le nombre infini n'est ni pair ni impair, et donc qu' il n'y aurait pour cela aucune raison d'adopter un signe plutôt que l'autre: il est en effet absurde que l'on puisse donner un nombre, pas même infini, qui ne soit ni pair ni impair."[39]

5. Or dans cette objection, ceux qui attribuent des sommes déterminées aux séries divergentes ont coutume de réfuter à juste titre le fait que le nombre infini soit conçu comme un nombre déterminé, et donc posé comme pair ou impair, alors qu'il est indéterminé. "En effet, dès que l'on dit qu'une série va à l'infini, c'est contraire à cette idée de concevoir qu'il y ait un dernier terme, même infinitésimal, à cette même série. Et ainsi disparaît d'elle même l'objection rappelée ci-dessus que la mantisse doit être ajoutée ou soustraite au dernier terme. Puisque donc on ne parvient jamais au terme d'une série infinie, on n'arrive jamais non plus à ce rang où il serait nécessaire d'ajouter une mantisse, et donc non seulement on peut, mais on doit, négliger la mantisse elle-même parce qu'elle n'a de place nulle part."

6. Mais ceux qui plaident contre la somme des séries divergentes estiment trouver dans l'espèce [du type 1+2+4+8+16+etc.] un appui des plus solides. Bien qu'en effet les termes de ces séries croissent continûment et donc que l'on puisse parvenir en additionnant les termes à des sommes supérieures à tout nombre assignable, ce qui est la définition de l'infini, cependant les défenseurs des sommes sont forcés d'admettre les séries de ce type dans la catégorie de celles dont les sommes sont finies et même négatives, c'est-à-dire inférieures à zéro. Puisqu'en développant en série par division la fraction $1/(1-a)$, cela donne $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \text{etc.}$, on devrait avoir $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{etc.}$, $-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \text{etc.}$, ce qui semble avec quelque raison tout à fait absurde à leurs adversaires, puisque l'on ne peut jamais arriver à une somme négative en additionnant des nombres positifs. D'où ils saisissent avec d'autant plus d'empressement la nécessité d'ajouter la mantisse rappelée ci-dessus, de sorte qu'il est évident qu'en l'ajoutant on aurait

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n \pm \frac{2^{n+1}}{1-2},$$

même si n est un nombre infini.

7. Ainsi donc les défenseurs des sommes de séries divergentes, pour résoudre ce célèbre paradoxe, décident une distinction plus subtile que réelle entre les quantités négatives, en affirmant que les unes sont inférieures à zéro tandis que les autres sont supérieures à l'infini, c'est à dire plus qu'infinies . "On doit reconnaître qu'il y a une première valeur -1 quand on considère qu'elle provient de la soustraction d'un nombre plus grand a+1 à un nombre plus petit a, et une autre valeur quand elle est trouvée égale à la série 1+2+4+8+16+etc., et qu'elle vient de la division du nombre +1 par -1. Car dans le premier cas le nombre est inférieur à zéro, et dans le second supérieur à l'infini, c'est à dire plus qu'infinies. "On doit reconnaître qu'il y a une première valeur -1 quand on considère qu'elle provient de la soustraction d'un nombre plus grand a+1 à un nombre plus petit a, et une autre valeur quand elle est trouvée égale à la série 1+2+4+8+16+etc., et qu'elle vient de la division du nombre +1 par -1. Car dans le premier cas le nombre est inférieur à zéro,et dans le second supérieur à l'infini. Pour mieux appuyer leurs dires, ils donnent cet exemple de suite de fractions :

[39] C'est par exemple une objection que Nicolas Bernoulli, reprenant la remarque de son oncle Jacques vue plus haut, fait à Leibniz en 1713, *Leibnizens mathematische Schriften*, tome 3, p.982-984

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-3}, \text{etc.},$$

qui, puisque l'on voit qu'elle est croissante pour ses premiers termes, doit être aussi considérée comme continûment croissante. D'où ils concluent que l'on aura

$$\frac{1}{-1} > \frac{1}{0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{-2} > \frac{1}{-1}$$

et ainsi de suite. Et donc dans la mesure où l'on exprime 1/-1 par -1 et 1/0 par ∞, on aura $-1>\infty$. Ainsi repoussent-ils avec assez d'ingéniosité cette apparente absurdité."

8. Mais si ingénieusement pensée que semble cette distinction, elle satisfait cependant peu les adversaires et semble surtout apporter de la force à la certitude de l'analyse. Si en effet ces deux valeurs de -1, à savoir soit 1-2, soit 1/-1, se différenciaient réellement au point qu'il ne soit pas permis de les confondre, la certitude et l'usage des règles que nous observons dans les calculs seraient profondément remises en cause, ce qui serait du moins encore plus absurde que le fait pour lequel cette distinction a été imaginée. Mais que l'on ait au contraire 1-2=1/-1, comme le postulent les principes de l'algèbre, et l'affaire n'est pas du tout résolue puisque cette quantité elle-même -1, qui est posée égale à la série 1+2+4+8+16+etc.,est inférieure à zéro.La même difficulté persiste donc. Cependant il semble conforme à la vérité de dire que ces mêmes quantités qui sont inférieures à zéro peuvent être en même temps considérées comme supérieures à l'infini. Ce n'est pas seulement de l'algèbre, en effet, mais aussi de la géométrie, que nous apprenons que l'on peut sauter des quantités positives aux négatives de deux façons, l'une en passant par cyphra[40] ou plutôt par zéro, l'autre par l'infini. Bien plus, les quantités aussi bien croissantes que décroissantes à partir de cyphra reviennent sur elles-mêmes et retournent à ce même terme 0 de sorte que les mêmes quantités supérieures à l'infini sont inférieures à zéro et que les quantités inférieures à l'infini se confondent avec les quantités supérieures à zéro.

9. Mais ceux qui nient que ces sommes que l'on a coutume d'assigner aux séries divergentes soient justes, non seulement n'en proposent pas d'autres, mais encore décident de s'opposer complètement à ce qu'on imagine seulement la somme d'une série divergente. "En effet on peut admettre la convergence des séries comme celle-ci :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \text{etc.}$$

avec une somme = 2, parce que, plus nous additionnons de termes de cette série, plus nous approchons la valeur deux. Tandis que dans les séries divergentes l'affaire tourne tout autrement: en effet, plus nous ajoutons de termes, et plus les sommes qui grandissent diffèrent entre elles et n'aboutissent à aucune valeur certaine et déterminée". D'où ils concluent que l'on ne peut transférer l'idée même de somme aux séries divergentes et que le travail de ceux qui se dépensent à chercher les sommes de séries divergentes est complètement inutile et contraire aux véritables principes de l'analyse.

10. Mais aussi réel que semble ce désaccord, aucune des deux parties ne peut être taxée d'erreur par l'autre toutes les fois que l'on a besoin d'utiliser des séries de ce type en analyse.Car il faut donner du poids à l' argument que ni l'une ni l'autre partie n'est dans l'erreur, mais que tout le désaccord réside seulement dans les mots. Si en effet dans un calcul j'arrive à cette série 1-1+1-1+1-1+etc., et que je la remplace par $\frac{1}{2}$, personne certes n'ira à bon droit m'imputer une erreur, alors pourtant que cela n'aurait échappé à personne si j'avais posé n'importe quelle autre valeur à la place

[40] cyphra, qui a donné le mot français "chiffre", signifie zéro en arabe.

de la série. D'où il ne peut subsister aucun doute sur le fait que la série 1-1+1-1+1-1+etc. et la fraction $\frac{1}{2}$ sont des quantités équivalentes, et qu'il est toujours permis de substituer sans erreur l'une à l'autre. Toute la question semble donc se ramener à ceci: est-il juste d'appeler la fraction $\frac{1}{2}$ la somme de la série 1-1+1-1+1-1+etc.? Pour ceux qui disent non avec acharnement, alors qu'ils n'osent pas nier l'équivalence, il est fortement à craindre qu'ils ne tombent dans la Logomachie.

11. Mais je pense qu'il serait facile de régler tout ce litige, si nous voulions nous intéresser avec application à cette suite. Toutes les fois qu'en analyse nous en arrivons à une expression soit fractionnaire soit transcendante, nous avons coutume de la transformer en une série idoine pour faciliter la suite du calcul. Les séries infinies trouvent place en analyse aussi longtemps qu'elles sont issues de la transformation de quelque expression finie, et de ce fait il est toujours permis de remplacer dans un calcul une série infinie par la formule dont la transformation lui a donné naissance. De là, de même que c'est avec un grand succés qu'on enseigne d'habitude les règles pour convertir les expressions finies, mais offertes sous une forme peu idoine, en séries infinies, de même à rebours il faut considérer que sont très utiles les règles grâce auxquelles, si l'on a proposé une série infinie quelconque, on peut chercher l'expression finie dont elle découle. Et comme cette expression peut toujours sans erreur être mise à la place de la série infinie, il faut que les deux aient la même valeur. De cela il ressort que l'on ne peut donner aucune série infinie qui ne puisse être conçue en même temps comme équivalente à une expression finie.

12. Si donc nous modifions autant l'idée reçue de somme au point de dire que la somme de toute série infinie est l'expression finie dont la transformation a donné naissance à la série-même, toutes les difficultés qui sont soulevées par les deux partis s'évanouissent d'elles-mêmes. D'abord en effet, l'expression dont la transformation donne naissance à une série convergente, donne en même temps sa somme, en prenant le mot dans son sens commun, et, dans le cas où la série est divergente, la recherche ne pourra plus être qualifiée d'absurde, si nous recherchons l'expression finie dont la transformation selon les règles de l'analyse produit cette même série. Et, une fois qu'il est permis de substituer cette expression à la série dans le calcul, nous ne pourrons plus douter qu'elle lui soit égale. Ceci étant résolu, nous ne nous écartons pas de la terminologie habituelle, si nous appelons aussi sa somme l'expression qui est égale à une série, pourvu que nous ne confondions pas cette notion avec l'idée de somme pour les séries convergentes, parce que, plus on additionne de termes, plus on doit s'approcher de la valeur de la somme."

Les tentatives de résolution des paradoxes se heurtent d'abord au statut de l'infiniment grand discret, et au flou qui entoure la notion de nombre. Pour Leibniz (§3), tel que le lit Euler, l'infini est un nombre (ce qui le rattache encore à l'infini actuel), mais il n'est ni pair ni impair. Objection (§4): tout nombre est soit pair soit impair, donc l'infini n'est pas un nombre. Contre-objection(§5): c'est un nombre indéterminé. L'infini a alors un statut potentiel, et l'argument est très différent de celui de Leibniz. La mantisse disparaît parce qu'*il n'y a pas de lieu où l'écrire.*

Apparaît ensuite un deuxième paradoxe : une somme infinie de termes positifs peut-elle être négative ? La tentative de résolution du §7 repose en fait sur deux idées : considérer plusieurs sortes d'infini, et affiner les définitions pour lever une ambiguïté, celle de -1. L'idée des plus qu'infinis venait de Wallis, suite à une erreur décelée et corrigée par Varignon en 1706. Mais Grandi défendait le fait que, puisqu'il y a plusieurs ordres d'infiniment petits, il peut y en avoir plusieurs d'infiniment grands. Au lieu de poursuivre dans cette voie, les mathématiciens, Leibniz en tête, préfèrent remettre en cause le statut de véritable grandeur pour les quantités négatives[41] .

Les tentatives de résolution d'un paradoxe en levant une ambiguïté sont fréquentes, mais cette idée-ci se révèle impraticable, car elle remet en cause toute la construction précédente de l'algèbre. Nous verrons qu'un essai du même genre est effectué par Woodhouse en 1803.

Euler récuse donc cette distinction et propose une réfutation du paradoxe qui fait appel à une conception circulaire des nombres, par analogie avec la géométrie. Cette remarque exceptée, Euler refuse absolument de prendre parti sur le problème de l'infini. Il choisit d'étendre "l'idée reçue de somme" de façon à assurer la cohérence locale de son champ de recherches. Il redéfinit ainsi le *mot* somme, ce qui lui permettra, en jouant sur l'ambiguïté ainsi introduite, de transférer les méthodes relatives aux séries convergentes à un champ plus vaste.

Ce qui fonde la confiance d'Euler, ce n'est plus un principe métaphysique, c'est *le nombre et la constance des résultats* obtenus à l'aide de cette convention ou par d'autres méthodes de son invention (développements en fractions continues, regroupements et/ou déplacements de termes, recherche de séries solutions d'équations différentielles). S'il cherche à obtenir un consensus des mathématiciens sur la même conclusion que Leibniz (la légitimité d'utiliser une série en dehors de son domaine de convergence), ce n'est pas en invoquant une loi plus générale dont elle découlerait logiquement, mais en montrant son efficacité et sa consistance. C'est pourquoi la suite de l'article d'Euler est consacré au calcul d'une valeur approchée de la somme de la "série de Wallis":

$$1-1! +2! -3! + 4! - 5! + \text{etc.}$$

par quatre méthodes différentes, qui donnent des résultats voisins. La première utilise la "transformation d'Euler" déjà rencontrée chez Newton, la deuxième utilise une autre méthode de Newton: les polynômes d'extrapolation, la troisième utilise une équation différentielle dont la série $\Sigma(-1)^n n!x^n$ est solution et la dernière le développement en fraction continue de cette série[42] .

Ce besoin de consistance explique le refus d'examiner une objection de Nicolas Bernoulli qui suggère que la même série pourrait provenir de deux fonctions différentes, et par là avoir deux sommes différentes. Euler écrit à Goldbach, en 1745:

> "Bernoulli ne donne pas d'exemples et je ne crois pas possible que la même série puisse venir de deux expressions algébriques réellement différentes".

Ce en quoi il se trompe, évidemment. On peut aujourd'hui justifier ces résultats en considérant ce type de séries comme le développement asymptotique d'une fonction analytique dans un certain domaine. Pour toute série formelle, l'existence d'une telle fonction est assurée, mais pas son unicité, ce qui pourrait conduire à des résultats différents[43]. Quelques quarante

---

41 cf Observatio quod rationes, in Parmentier*Leibniz, La naissance du calcul différentiel*,1989,Vrin, p 433.

42 on trouve une étude mathématique détaillée de ces méthodes dans: E.J.Barbeau, Euler subdues a very obstreperous series, *American Mathematical Monthly* 86 (1979),p.356-372, ainsi que dans: Anne Duval et J.L.Loday, Séries divergentes, 1985, *Le courrier du CNRS*,Supplément au n°62

43 cf J.P. Ramis,Séries Divergentes et Théories Asymptotiques, *Séries divergentes et procédés de resommation*, Journées X-UPS 1991, Centre de mathématiques de l'Ecole Polytechnique,p.9, réédité en1993, Supplément au bulletin SMF, Tome 121.

années plus tard, un certain Jean-Charles Callet soumet un Mémoire à Lagrange pour publication dans les Mémoires de l'Académie des Sciences. Nous ne connaissons que le rapport[44] qu'en fait Lagrange en 1796. Callet remarque que:

$$\frac{1+x+\ldots+x^{n-1}}{1+x+\ldots+x^{m-1}}=\frac{1-x^{n}}{1-x^{m}}=1-x^{n}+x^{m}-x^{m+n}+x^{2m}-\ldots$$

et donc que pour n<m et x=1, on obtient 1-1+1-1+1-1+etc...= n/m.

Ainsi que le rapporte Emile Borel[45], Lagrange écarte l'objection en défendant la règle, ici celle de la sommation probabiliste, mais en l'adaptant au contexte local.

> "Lagrange montra cependant que l'objection précédente pouvait être levée; Leibniz avait fait reposer le calcul de la série [1-1+1-1+1+etc.] sur le calcul des probabilités. La somme de la série [1-1+1-1+1+etc.] étant 1 ou 0 suivant que l'on prend une nombre impair ou pair de termes, elle est aussi souvent égale à 1 qu'à 0; donc sa valeur la plus probable est égale à la moyenne $\frac{1}{2}$. Lagrange fait observer que si l'on veut appliquer la même méthode à la série [$1-x^n+x^m-x^{n+m}+x^{2m}$+etc.], on doit remarquer qu'elle n'est pas complète, et que si,pour plus de netteté,on prend n=3 et m=5, elle doit s'écrire:
>
> $$1+0+0-x^3+0+x^5+0+0-x^8+0+x^{10}+0+\text{etc.}$$
>
> Dès lors, on voit que, si l'on prend la somme successivement de 1, 2, 3, 4, 5,... termes de la série, on constate que, sur 5 sommes consécutives, 3 sont égale à 1 et 2 à 0. La valeur moyenne est donc 3/5, ce qui est bien la vraie valeur de la fonction qui a donné naissance à la série."

La règle d'Euler, tout comme la règle probabiliste, assure une cohérence *locale*, pour les calculs *naturels* dans un champ de recherches et trouve à ce titre une certaine légitimité. Le fait que l'on obtienne des valeurs différentes dans des contextes ou par des méthodes différentes est soit nié, soit rejeté comme pathologique. Euler était pourtant capable d'affronter une situation de ce genre, comme il l'a montré en reconnaissant le caractère multiforme du logarithme des nombres imaginaires[46]. Il est d'ailleurs intéressant de constater qu'à l'occasion de cette controverse, Leibniz et Euler n'hésitent pas à accepter ou refuser les séries divergentes au gré de leur argumentation !

Cependant, le mouvement de refus envers l'intrusion de la métaphysique en mathématiques, joint à une intuition moins sûre des calculs "naturels" augmente la méfiance envers les séries divergentes, d'où la nécessité d'élargir les recherches de critères de convergence[47] .

On reconnait traditionnellement la première apparition du "critère de d'Alembert" dans un Mémoire de 1768, où il est appliqué à la série du binôme. Mais une lecture attentive

---

44 Rapport sur le mémoire de Callet, *Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut* .

45 Emile BOREL, Introduction aux *Leçons sur les séries divergentes*, 1901, Paris, p. 5.

46 cf J.L.Verley, La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, in *Fragments d'histoire des mathématiques*, 1981, APMEP

47 On trouve un très riche historique des critères classiques dans K.Knopp, *Theory and application of infinite series*, Dover, 1990, première édition en allemand: 1921

montre un certain nombre d'incertitudes et d'incohérences dans les définitions.

> "Cette convergence des premiers termes peut être poussée fort loin dans une série qui d'ailleurs finira par être divergente"[48]

En tout cas, dans l'article de l'Encyclopédie[49] sur les séries, l'auteur refuse d'attribuer la valeur $\frac{1}{2}$ à la série 1-1+1-1,&c,

> "comme la division [de 1 par 1+c] ne se fait jamais exactement, il y a toujours un reste, soit ce reste r; & pour avoir le quotient exact, il faut, comme dans la division ordinaire, ajouter ce reste r divisé par le diviseur 1+c, à la partie déjà trouvée du quotient"

Lagrange apporte une importante contribution à l'étude des séries de fonctions en étudiant le "reste" de la série de Taylor, bien qu'il montre quelque indécision dans la manipulation des définitions :

> "il est clair que pour qu'une série puisse être regardée comme représentant réellement la valeur d'une quantité cherchée il faut qu'elle soit convergente à son extrémité, c'est-à-dire que ses derniers termes soient infiniment petits, de sorte que l'erreur puisse devenir moindre qu'aucune quantité donnée"[50].

Ces précautions dont la nécessité est reconnue n'empêchent pas Fourier, par exemple, d'utiliser $S = \frac{1}{2}$ au cours d'un calcul pour la somme de la série de Grandi[51]. De même, Poisson rejette en principe les séries divergentes, mais les utilise pour certaines séries trigonométriques[52]. Notons que Gauss donne une très stricte étude au sujet de la série hypergéométrique[53] mais n'élabore pas de théorie générale sur la convergence des séries.

Néanmoins, les exemples d'emploi dangereux des séries se multiplient et le besoin d'appuyer l'analyse sur des bases moins intuitives devient pressant. Les mathématiques perdent le rôle, assigné par Galilée, de langage privilégié pour décrire le Monde. C'est la fin d'une époque où la théorie se construisait de façon indissociable de ses applications, où les règles de la méthode analytique étaient jus00,tifiées a priori par des principes métaphysiques et a posteriori par leur adéquation et leur efficacité. Les mathématiciens considèrent qu'il faut au contraire nettoyer leur science de toute influence extérieure, et que c'est quelque nécessité interne qui doit réguler leur développement.

Alors que les mathématiciens renoncent à utiliser un concept d'infini au profit d'un approfondissement des méthodes de l'algèbre, les philosophes vont reprendre en charge la conceptualisation de l'infini. Grand lecteur de Lagrange, Hegel pense que c'est le rôle du philosophe de rendre clair pour la raison ce que le mathématicien rend clair par le calcul. Loin

48 *Réflexions sur les Suites et sur les Racines imaginaires*, 1768,p.175

49 Encyclopédie méthodique, 1787, Tome 3, p. 33

50 "Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries."Mém.Acad.Sci. de Berlin,1768, publié en 1770; *Oeuvres*, tome 3, p. 61.

51 *Oeuvres*, Tome 1, p.206

52 *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 19,1823, p. 404-509

53 *Disquisitiones Generales Circa Seriem Infinitam*, 1812

de pousser à un rejet, les contradictions mathématiques sont le lieu où le véritable infini se laisse pressentir. En effet, les mathématiques sont la science du quantum et l'infini est justement le dépassement de tout quantum. La série est un de ces lieux où apparaît le "mauvais infini", l'infini contradictoire :

> " La fraction 2/7 peut s'exprimer comme 0,285714..., de même que 1/(1-a) comme $1+a+a^2+$etc. Ainsi est-elle présentée comme une série infinie, et la fraction elle-même veut dire la somme ou l'espression finie de cette même série.[...]Dans cette série infinie est effectivement présente cette *inexactitude* dont seule l'apparence se rencontre en l'infini mathématique véritable[...]La *série infinie* contient en effet la mauvaise infinité pour cette raison que ce qu'elle doit exprimer demeure un *devoir-être*; et ce qu'elle exprime est affecté d'un au-delà qui ne disparaît pas, et est différent de ce qui doit être exprimé. Elle est infinie, non pas à cause des membres qui sont posés, mais pour cette raison qu'ils sont incomplets, parce que l'autre, qui leur appartient essentiellement, est au-delà d'eux; ce qui en elle est là, qu'il y ait autant de termes posés qu'on le veuille, est seulement quelque chose de fini, quelque chose qui est posé comme fini, comme ce qui n'est pas ce qu'il doit être. En revanche, ce que l'on nomme l'*expression finie* ou la *somme* d'une telle série ne comporte pas de manque; cette expression contient plutôt complètement ce que la série ne fait que chercher; l'au-delà est rappelé de sa fuite; ce qu'est cette expression et ce qu'elle doit être n'est pas séparé, mais est la même chose."[54]

Cinquième moment : les séries divergentes bannies par les adeptes de la "rigueur", mais maintenues par les tenants de la "permanence".

Les initiateurs de "la rigueur" en analyse sont Bolzano, Cauchy et Abel. Pour Abel, "la théorie des séries en général est jusqu'à présent très mal fondée". A l'âge de 24 ans, au cours d'un voyage d'études à travers l'Europe, il écrit de Berlin à son ancien professeur Holmboë[55] :

> "...Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter $0 = 1- 2^n + 3^n - 4^n$ +etc., n étant un nombre entier positif ? Enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière fappante, car à l'exception des cas les plus simples, par exemple les séries géométriques, il ne se trouve dans les mathématiques presque aucune série infinie dont la somme soit déterminée d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire que la partie la plus essentielle des mathématiques est sans fondement. Pour la plus grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant[...]. La formule binôme elle-même n'est pas encore rigoureusement démontrée[...]
>
> Pour montrer par un exemple général (sit venia verbo) comme on raisonne mal, et combien il faut être sur ses gardes, je choisirai le suivant. Soit $a_0+a_1+a_2+a_3+$etc. une série infinie quelconque, tu sais qu'une manière très ordinaire pour en touver la somme c'est de chercher la

54 Hegel, *Science de la logique*,T1, Aubier, p 244-247

55 lettre du 16 Janvier 1826 in ABEL, *Oeuvres complètes* ,1881

somme de celle-ci : $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...$ et faire ensuite x =1 dans le résultat. C'est bien juste, mais il me semble qu'on ne doit pas l'admettre sans démonstration; car quoiqu'on ait démontré que $fx = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3+...$ pour toutes les valeurs de x qui sont inférieures à l'unité, il ne s'ensuit pas que la même chose ait lieu pour x égal à 1. Il serait bien possible que la série $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 +...$ s'approchât d'une quantité toute différente de $a_0+a_1+a_2+a_3+$etc lorsque x s'approche indéfiniment de l'unité. C'est ce qui est clair dans le cas général où la série est divergente ; car alors elle n'a pas de somme. J'ai démontré que ce procédé est juste lorsque la série est convergente[56] . L'exemple suivant montre comme on peut se tromper. On peut démontrer rigoureusement qu'on aura pour toutes les valeurs de x inférieures à π :

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \text{etc} . = 0$$

Il semble qu'on en pourrait conclure que la même formule aurait lieu pour $x = \pi$; mais cela donnerait:

$$\frac{\pi}{2} = \sin \pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi + \frac{1}{3}\sin 3\pi - \text{etc} . = 0$$

résultat absurde. On peut trouver une infinité d'exemples pareils.

La théorie des séries infinies en général est jusqu'à présent très mal fondée. On applique aux séries infinies toutes les opérations, comme si elles étaient finies; mais cela est-il bien permis? Je crois que non. Où est-il démontré qu'on obtient la différentielle d'une série infinie en prenant la différentielle de chaque terme ? Rien n'est plus facile que de donner des exemples où cela n'est pas juste; par exemple :

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \text{etc} . = 0$$

En différenciant, on obtient:

$$\frac{1}{2} = \cos x - \cos 2x + \text{cox}\, 3x - \text{etc} . = 0$$

résultat tout faux, car cette série est divergente.

La même chose a lieu par rapport à la multiplication et à la division des séries infinies. J'ai commencé à examiner les règles les plus importantes qui (à présent) sont ordinairement approuvées à cet égard, et à montrer en quels cas elles sont justes ou non. Cela va assez bien et m'intéresse infiniment.

Malgré les rebuffades, Abel est un fervent admirateur de Cauchy. Le 24 Octobre 1826, il écrit de Paris:

"Cauchy est fou, et avec lui il n'y a pas moyen de s'entendre, bien que pour le moment il soit celui qui sait comment les mathématiques doivent être traitées. Ce qu'il fait est excellent, mais très brouillé. D'abord je n'y compris presque rien; maintenant j'y vois plus clair. Il fait publier une série de Mémoires sous titre d'Exercices de Mathématiques. Je les achète et les lis assidûment..."

En effet il trouve dans le Cours d'Analyse Algébrique de Cauchy de 1821 un écho à ses propres préoccupations :

---

56 Ce résultat est publié dans le Mémoire: Untersuchungen über die reihe

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.\,2}x^2 + ...$$

Journal für reine und angewandte Mathematik,1826, Traduit dans Abel, *Oeuvres complètes*,1881, réimprimé en 1965. "Recherches sur la série..", tome 1, p.224.

"Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des mathématiques.On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs de quantités qu'elles renferment."

Cette rigueur exige un retour à la méthode déductive "euclidienne" et le refus des inductions liées à des principes de continuité, de permanence, de généralité ou aux intuitions de "l'évidence" géométrique. Dans ce mouvement, les contre-exemples ne sont plus considérés comme des paradoxes ou des exceptions à une loi naturelle, mais des objets à exclure du champ des mathématiques, ce que Lakatos appelle la "relégation des exceptions"[57] . Cauchy va "apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues", Abel examine "en quels cas [les règles de calcul sur les séries infinies] sont justes ou non". L'objectif est ici clairement d'éliminer les objets porteurs de contradiction, mais l'examen que nécessite ce tri va provoquer un affinement du concept de convergence, une définition qui ne fasse plus référence à la somme dont l'existence est justement en jeu.

La première définition de la convergence sans référence à la somme, ce que nous appelons le "critère de Cauchy de convergence des séries" est publié en 1817 par Bolzano[58], dans un traité qui vise à démontrer le théorème des valeurs intermédiaires. Après avoir désigné par $F_n(x)$ la somme des n premiers termes de la série, il énonce le théorème :

"Si dans une série de grandeurs: $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$,..., $F_n(x)$..., $F_{n+r}(x)$ la différence entre son n^e^ terme $F_n(x)$ et tout terme ultérieur $F_{n+r}(x)$, aussi éloigné soit-il du n^e^, reste plus petite que toute grandeur donnée si l'on a pris n suffisamment grand: alors il existe toujours une certaine *grandeur constante*, et *une seule*, dont s'approchent toujours davantage les termes de cette série et dont ils peuvent s'approcher d'aussi près que l'on voudra, lorsqu'on prolonge la série suffisamment loin" .

Isolé à Prague, où il enseigne la théologie avec une liberté qui le fera bientôt révoquer, Bolzano a peu de lecteurs. On ne sait si Cauchy en fait partie, mais celui-ci publie ce critère en 1821 dans son Cours d'Analyse. En fait, tant que la théorie des nombres réels n'est pas élaborée, l'existence de la somme d'une série, définie comme la limite de la suite des sommes partielles, ne peut être établie rigoureusement (selon nos standards)[59] . Cette nouvelle

---

57 I.Lakatos, Preuves et réfutations, p.177.

58 "*Démonstration purement analytique du théorème: entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation*, traduit par Jan Sebestik : Bernard Bolzano et son Mémoire sur le théorème fondamental de l'Analyse, *Revue d'histoire des Sciences*, 17, 1964.

59 On trouve une étude de cette démonstration dans Cavaillès, *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*,1938,p.32-34, *Oeuvres complètes*,1994,p.230-232

impossibilité d'écrire la somme d'une série, même convergente, va contribuer à l'élaboration d'une axiomatique des réels (ce sera accompli par Weierstrass, vers 1863).

Le "Cours d'Analyse" de Cauchy et le mémoire d'Abel sur la formule du binôme[60] contiennent la plupart des théorèmes du programme actuel d'Analyse de Mathématiques Spéciales. Ces textes sont abondamment commentés dans les ouvrages d'histoire des mathématiques. L'étude attentive des démonstrations qui y sont données est des plus instructives. Ni Cauchy ni Abel ne font clairement la distinction entre séries numériques et séries de fonctions, et Abel, contrairement à Cauchy, omet les valeurs absolues. Il est donc difficile de juger de ce qui est effectivement prouvé, selon nos standards. On peut néanmoins y reconnaître de nombreux critères de convergence des séries, et surtout le théorème du prolongement sur le bord du domaine de convergence, justifié par Abel à l'aide de ce que nous nommons la "transformation d'Abel". Ce théorème justifie, pour les séries réelles convergentes, le "principe de continuité" de Leibniz.

Dans la reconstruction de l'Analyse par Cauchy, Abel trouve de nombreuses réponses et ... une anomalie qu'il signale en note dans son fameux Mémoire sur la formule du binôme :

> "Dans l'ouvrage cité de M. Cauchy, on trouve (p.131) le théorème suivant: "Lorsque les différents termes de la série $u_0+u_1+u_2+...$ sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x." Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série
>
> $$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - ...$$
>
> est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de x, m étant un nombre entier. Il y a, comme on sait, beaucoup de séries de cette espèce."

Dans cette belle unanimité contre les sommes de séries divergentes, il convient de citer Laplace qui s'attaque, lui, à l'argument probabiliste de Leibniz, en reprenant l'exemple de Callet:

> "Je mets encore au rang des illusions l'application que Leibniz et Daniel Bernoulli ont faite du Calcul des probabilités à la sommation des séries.[...] ces séries peuvent résulter du développement d'une infinité de fractions différentes[...] Ainsi la série, *plus un,moins un,plus un*,etc. peut naître du développement d'une fraction dont le numérateur est l'unité plus la variable, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté du carré de la variable. En supposant la variable égale à l'unité, ce développement se change dans la série proposée, et la fraction génénratrice devient égale à 2/3; les règles des probabilités donneraient donc alors un faux résultat; ce qui prouve combien il serait dangereux d'employer de semblables raisonnements, surtout dans les sciences mathématiques que la rigueur de leurs procédés doit éminemment distinguer."[61]

---

60 Cf note 54

61 Laplace, Essai philosophique sur les probabilités, 1814.

La démarche de Bolzano est différente. Dès 1810 il se propose de construire une *nouvelle logique* pour les mathématiques :

> "mathématique est une science qui traite des lois universelles (formes) d'après lesquelles les choses doivent se disposer dans leur être...[ou] lois des conditions de leur possibilité."[62]

En opposition avec les philosophes comme Hegel, il veut montrer que les mathématiques sont capables de conceptualiser le "vrai" infini[63] . Il attaque ainsi de front les *Paradoxes de l'infini*. Dans l'ouvrage publié sous ce titre en 1851, il commence par définir le concept d'infini (actuel) et de grandeur, ce qui permet de concevoir des grandeurs infinies. Il n'y a pas de nombre infini, mais certaines grandeurs infinies *déterminables* d'une certaine manière.

> "Le fait de dire infini quelque chose [...] c'est affirmer seulement la présence dans cette chose et sous un certain point de vue d'une pluralité plus grande que n'importe quel nombre, partant d'une pluralité *non susceptible d'être déterminée par un simple nombre*. Il ne s'ensuit pas du tout que cette pluralité n'est *déterminable d'aucune manière*."[64]

C'est le cas en particulier des séries convergentes[65]. Les sommes de séries du type 1+2+3+4+...*in inf* sont également des grandeurs (infinies), et il existe des gandeurs infinies distinctes. Il propose ensuite un calcul de l'infini :

> "Le *concept d'un calcul de l'infini* semble, je l'avoue, être une contradiction en soi. Car vouloir *compter* quelque chose, c'est essayer de la *déterminer par des nombres*. Or, selon notre propre définition, l'infini est un ensemble constitué par une infinité de parties, *i.e.* un ensemble plus grand que n'importe quel nombre et donc non déterminable par un nombre. Comment veut-on alors tenter de déterminer l'infini par des nombres? Cette difficulté disparaît cependant, quand on remarque qu'un calcul réglé de l'infini n'a pas pour fin un comptage de ce qui ne peut être déterminé dans l'infini par aucun nombre, ni, plus précisément un comptage de la pluralité infinie en elle-même, mais seulement la détermination du *rapport* de deux infinis - chose réalisable en certains cas, comme le montreront plusieurs exemples."[66]

> "Malheureusement, la plupart des mathématiciens qui se sont risqués dans le calcul de l'infini sont allés beaucoup plus loin que ne le permettent les principes établis ci-dessus.[...]Ils ont pris la liberté de poser tantôt l'égalité, tantôt l'inégalité de grandeurs résultant de la sommation de séries infinies, en s'appuyant sur le fait qu' on peut, en dépit de l'inégalité évidente des ensembles de ces grandeurs, faire se correspondre un à un leurs termes, et que les éléments de chaque couple se trouvent dans un tel rapport d'égalité ou d'inégalité."[67]

En application de ces principes, il refuse absolument le statut de grandeur à la somme de la série 1-1+1+... L'argumentation de Bolzano se fait en deux parties. Premièrement, on peut concevoir des expressions mathématiques qui ne correspondent à

---

62 Bolzano, 1810, *Philosophie des mathématiques ou contribution à une représntation bien fondée des mathématiques*, p.17, cité par Cavaillès, Méthode axiomatique et formalisme, 1938,p.46, Oeuvres, 1994, p.54

63 Bolzano, *Les paradoxes de l'infini* , traduction H.Sinaceur, 1993, Ed du Seuil, p.65

64 ibidem, p.96

65 ibidem, p.82-84.La démonstration que Bolzano donne de la somme d'une série géométrique convergente et qu'il affirme plus rigoureuse que les preuves habituelles me semble d'ailleurs assez peu convaincante.

66 ibidem, p.101

67 ibidem, p.107

aucune grandeur. Deuxièmement, l'expression étudiée en fait partie puisqu'elle représente une somme et devrait à ce titre être invariante par associativité et commutativité. En effet une grandeur est au départ associée à un ensemble, ce qui implique qu'elle ne dépende pas de l'arrangement des parties de cet ensemble.

[...]Il se trouvait encore en 1830 quelqu'un qui, sous la signature de R.M.S., tentait de démontrer dans les Annales de mathématiques de Gergonne (tome 20, n° 12) que la somme de la série infinie bien connue : a - a + a - a + a - a +...in inf. a une valeur égale à a/2.

Posant cette valeur = x, il crut être en droit d'écrire : x = a - (a - a + a - a +a - a + ... in inf).

Il estima alors égales la nouvelle série entre parenthèses et la série de départ dont la somme constitue l'inconnue x ; il écrivit donc l'équation : x = a - x, d'où il tira x = a/2.

L'erreur est ici assez évidente: la série entre parenthèses n'a manifestement plus le même ensemble de termes que celle donnée d'abord; elle a en moins le premier a. Sa valeur, si tant est qu'elle en ait une, aurait dû être notée par x - a, ce qui aurait dû donner l'identité: x = a + x - a.

"Or -pourrait-on dire-[le fait] que cette série, dont la somme des termes n'est sûrement pas infiniment grande, n'ait pas de valeur exactement déterminable, exactement mesurable est précisément d'autant plus paradoxal qu'elle est engendrée par la division continuée à l'infini de a par 2 = 1+1, circonstance qui plaide tout à fait pour la correction de l'hypothèse selon laquelle la vraie valeur de la série est a/2".

Je rappelle cependant que l'existence d'expressions de grandeur qui ne désignent en fait aucune grandeur réelle n'est pas en soi inconcevable; du reste, il est généralement et à juste titre admis que tel est le statut du zéro.

Le cas particulier d'une série appelle les remarques suivantes : lorsque nous la définissons seulement comme une grandeur, i.e. seulement comme la somme de ses termes, il faut, en vertu du concept de somme, qui revient aux ensembles, i.e. aux collections dans lesquelles l'ordre des parties n'est pas pris en considération, il faut, dis-je, qu'elle verifie la propriété de ne subir aucun changement dans sa valeur quel que soit le changement introduit dans la succession de ses termes. les grandeurs, en effet, satisfont nécessairement la relation suivante: (A + B + C = A + (B + C)= (A + C) + B.

Cette propriété va nous montrer clairement que la série: a - a + a - a + a - a+...in inf n'est l'expression d'aucune grandeur réelle. En effet, nous ne changerions rien à la grandeur représentée, pour autant qu'une grandeur le serait par cette expression, en transformant celle-ci de la manière suivante:

(1) (a - a) + (a - a) + (a - a) + ...in inf.

Nous n'avons fait que réunir en une somme partielle chaque couple de nombres consécutifs, ce qui doit être possible, puisque la série donnée n'a pas de dernier terme. Nous obtenons ainsi : 0 + 0 + 0 + 0 + ... in inf., qui ne peut évidemment être égal qu'à zéro.

Nous pouvons tout aussi bien opérer la transformation suivante sans rien changer à la grandeur représentée, si tant est qu'une grandeur est réellement représentée par l'expression considérée:

(2) a + (-a + a)+(-a + a)+(-a + a) +...in inf.

Nous avons cette fois isolé le premier terme, puis réuni en sommes partielles les couples de termes consécutifs.

Enfin en intervertissant l'ordre des termes de chaque couple de l'expression (1) et en faisant subir ensuite à l'expression ainsi obtenue le même changement que celui par lequel nous sommes passés de (1) à (2), nous pouvons écrire:

(3) - a + (a - a) + (a - a) + (a - a) +...in inf.

Si l'expression de grandeur donnée n'était pas vide, les expressions (1), (2), (3), devraient toutes dénoter la même grandeur. Car il est bien clair que la représentation d'une somme d'un seul et même ensemble de grandeurs ne peut représenter plusieurs grandeurs différentes les unes des autres, comme c'est entre autres, le cas des représentations $\sqrt{+1}$ et arcsin$\frac{1}{2}$. La représentation de grandeur 1- 1 +1 - 1 + 1 - 1+ in inf., devrait, si elle n'était pas complètement vide, être égale à a et aussi à -a avec le même droit que nous prenions pour l'égaler à 0 (nommé par un usage impropre, grandeur); ce qui est complètement absurde et justifie la conclusion qu'il s'agit là d'une représentation absolument sans objet.

Il est exact que la série dont nous parlons résulte de la division, continuée à l'infini, de a par 2=1+1; mais toutes les séries obtenues de façon analogue résultent d'une division qui, à chaque étape, a un reste (alternativement -a et +a dans ce cas-ci); et c'est précisément pour cette raison- cela se comprend- qu'elles ne peuvent donner la vraie valeur du quotient (ici a/2) que si les restes des divisions successives deviennent plus petits que toute grandeur, si petite soit-elle. [...][68]

Alors que Bolzano se montre capable de se déporter suffisamment de la logique ambiante pour imaginer une définition positive de l'infini (c'est-à dire qui ne soit pas une négation du fini)- et la découverte fondamentale des *Paradoxes* est la caractérisation d'un ensemble infini comme ensemble qui peut être mis en bijection avec une de ses parties propres[69] - il ne peut mettre en place un concept *positif* de divergence pour les séries. Ceci est en relation avec les limites de son arithmétisation de l'infiniment grand, construite par analogie avec le calcul infinitésimal, comme il apparaît clairement dans sa présentation du calcul de l'infini: celui-ci a pour fin, non pas le "comptage de la pluralité infinie" (infiniment grand), mais la "détermination du rapport des infinis" (utilisé en calcul infinitésimal).

Hourya Sinaceur explique ces limitations par l'écartèlement entre l'élan d'abstraction vers une arithmétisation de l'infiniment grand actuel et le courant de fondement de l'analyse par évacuation de tout infiniment petit, même potentiel :

"Ces *Paradoxes* [sont] victimes de l'asymétrie, qu'ils instaurent tout en essayant de la nier, entre l'infiniment petit et l'infiniment grand.[...] cette disjonction de statut entre infiniment petit actuel et infiniment grand actuel, Bolzano ne l'assume pas explicitement, comme le fera Cantor."[70]

Nous avons dit que, pour les mathématiciens de cette époque, le développement des mathématiques doit être réglé par une nécessité interne. L'idée que l'on se fait de cette nécessité interne peut aboutir à des conclusions opposées: alors qu'une certaine idée de l'algèbre conduit Bolzano à rejeter les séries divergentes pour conserver l'associativité et la commutativité des grandeurs, une autre idée de l'algèbre, la permanence de ses lois, pousse les mathématiciens de l'Ecole de Cambridge à les conserver, tout au moins comme séries formelles. Cette Ecole essaie de construire l'algèbre comme une science déductive fondée sur des relations entre symboles.

---

68 ibidem, p.108-111.

69 Notons que cette propriété était utilisée implicitement par Bernoulli, cf p.8

70 ibidem, p37-38 Introduction d'H.Sinaceur.

Woodhouse, en 1801, écrit :

"Je suis intimement convaincu qu'il ne peut pas y avoir de paradoxes ou de mystères inhérents et inexplicables dans un système de signes de notre invention et combinés selon des règles dont nous devons précisément déterminer l'origine et le champ d'application...La démonstration devrait être définie comme une méthode pour entraîner l'accord à des idées éloignées au moyen d'un train d'idées intermédiaires, chacune en accord avec sa voisine; ou, en d'autres termes, une méthode pour retracer la connection entre certains principes et une conclusion, au moyen d'une série de propositions intermédiaires et jumelles, chaque proposition étant convertie en sa voisine par un changement des signes qui la représentent, en une autre qui est lui est prouvée équivalente."[71]

En fonction de cette conviction, un moyen de lever certaines ambiguïtés causes de paradoxes consiste à introduire de nouveaux symboles, et en 1803[72] , Woodhouse propose, d'écrire la somme de la série 1-1+1-1+etc.= 1/(1+1), à distinguer de $\frac{1}{2}$.

Voici l'opinion de Peacock, en 1833 :

"...Il est très vrai que Mr. Cauchy a parfaitement réussi à éviter la considération des séries infinies pour établir la plupart des grands principes du calcul différentiel et intégral, mais je ne peux en aucun cas me sentir disposé à considérer son succès à surmonter ce type de difficultés comme une preuve décisive de l'opportunité qu'il y aurait à emboîter ses pas. Le fait est que, si les opérations de l'algèbre sont générales, nous devons nécessairement obtenir des séries infinies et si les symboles que nous employons sont également généraux, il doit être impossible de déterminer, dans la plupart des cas, la convergence ou la divergence des séries qui en résultent. C'est seulement par conséquent lorsque nous envisageons des valeurs spécifiques qu'une question se pose en général concernant le caractère de la série: et c'est seulement quand nous sommes amenés à chercher la fonction qui génère la série en appliquant la théorie des limites à l'aggrégat d'un nombre fini de ses termes, que sa convergence ou sa divergence devient importante car elle affecte la possibilité même de la recherche. En résumé, c'est nécessairement un point de vue erroné des principes de l'algèbre qui permet que le résultat d'une opération générale, dépendant des lois fondamentales de l'algèbre, puisse être fallacieux. Cette insuffisance doit être dans tous les cas attribuée à notre pouvoir d'interprétation de tels résultats, et non aux résultats eux-mêmes, ou à la généralité et à la certitude des opérations qui les produisent; en résumé, le rejet de séries divergentes de l'analyse, ou de séries qui puissent devenir divergentes, est inconsistant tout à la fois avec l'esprit et les principes de l'algèbre symbolique et nous ramènerait nécessairement à cette fastidieuse multiplication des cas qui caractérise l'enfance de la science..."[73]

Augustus De Morgan justifie sa conviction par l'histoire des mathématiques :

"... L'histoire de l'algèbre nous montre que rien n'est aussi peu fondé que le rejet d'une méthode qui vient *naturellement*, à cause d'un ou plusieurs cas apparemment valides dans lesquels

[71] On the necessary truth of certain conclusions obtained by means of imaginary quantities, *Philosophical Transactions*, 1801, 91, p 89-120. Communiqué par M.J. Durand, traduit par moi.

[72] *The principles of Analytical Calculation*, 1833, Cambridge.

[73] Report on the recent progress and the present state of certain branches of analysis. *Report for the British Association for the Advancement of Science*,1834, p.247-248. Traduit par M.J. Durand.

cette méthode conduit à des résultats erronés. De tels cas devraient en fait nous enseigner la prudence et non le rejet; si l'on avait préféré celui-ci à celle-là, les quantités négatives, et encore plus leurs racines carrées, auraient efficacement bloqué le développement de l'algèbre... et ces immenses domaines de l'analyse que parcourent sans peur même les adversaires des séries divergentes, n'auraient pas été si explorés, bien moins cultivés et aménagés... la devise que j'adopterais à l'encontre d'un cours qui me semble calculé pour stopper le progrès de la découverte tiendrait en un mot et un symbole - souviens-toi de $\sqrt{-1}$ "[74]

L'Ecole de Cambridge s'appuie ici sur le "Principe de permanence", déjà énoncé par le mathématicien flamand Albert Girard en 1629[75] : puisque certaines propriétés restent valides quand on passe des nombres réels aux nombres complexes, elles doivent servir de base à la construction de l'algèbre. Ce principe n'est plus fondé sur une conception de ce qu'est le monde, mais de ce qu'est l'algèbre, appuyée sur des considérations historiques. Notons que si la convergence peut se traiter dans le local, la divergence joue dans le global, et fait appel à des principes d'extension, de permanence du symbole, de la forme. Cette tentative d'extension de l'algèbre symbolique, malgré son échec signé par la construction des quaternions non-commutatifs par Hamilton, va ouvrir la voie à une pensée plus abstraite de l'algèbre et à la logique formelle.

Sixième moment: le retour de certaines séries divergentes.

Dès 1843, Cauchy lui-même va adoucir sa position "un peu dure". Il reconnaît l'intérêt d'utiliser certains développements en série de fonctions, même quand ils sont divergents :

> "Les géomètres reconnaissent généralement aujourd'hui les dangers que peut offrir l'introduction des séries divergentes dans l'Analyse, et ils admettent avec raison que ces séries n'ont pas de sommes. Toutefois la série employée par Stirling, pour la détermination approximative du logarithme d'un produit dont les facteurs croissent en progression géométrique, et d'autres séries divergentes du même genre fournissent effectivement, quand on les arrête après un certain nombre de termes, des valeurs approchées des fonctions dont elles représentent les développements... Il était important d'examiner s'il est possible de rendre légitime l'emploi de semblables séries, et de fixer les erreurs commises en raison de cet emploi. M'étant occupé de cette question, je suis parvenu à reconnaître que, dans la série de Stirling et dans une multitude d'autres séries du même genre, le premier des termes négligés représente précisément une limite supérieure à l'erreur commise. "[76]

[74] *Differential and Integral Calculus*, 1842, London. p.566

[75] *L'invention nouvelle en algèbre*. Cité par J.L.Verley in *Fragments d'histoire des mathématiques*, Brochure 41, APMEP,p.121.

[76] Sur un emploi légitime des séries divergentes, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Oeuvres*, tome XVII, p.18.

En arrêtant la sommation partielle au plus petit terme (en valeur absolue) d'une telle série divergente, on obtient une excellente approximation de la valeur de la fonction dont elle est le développement. La méthode d'Euler devient alors une excellente méthode d'approximation. Tout ceci est développé dans le texte d'Emile Borel reproduit en "Bonnes feuilles".

Ce type particulier de séries divergentes, appelées séries *asymptotiques*, s'introduit progressivement dans les articles mathématiques sous la pression des besoins de la physique et de la mécanique céleste, par exemple chez Poisson, Lipschitz, Riemann (1855). Citons aussi le physicien Stokes qui les utilise pour calculer les franges des caustiques en optique ondulatoire.[77]

Mais aussi, les modes de fonctionnement de la rationalité mathématique ont changé. La relégation des objets contradictoires a laissé la place à ce que Lakatos appelle la "méthode des preuves et réfutations", qui conduit à revoir et affiner les concepts.

> "Quand, partant de la certitude ainsi acquise que le théorème n'est pas universellement valide, et de là que sa preuve doit reposer sur quelque présupposition cachée, on soumet alors la preuve à une analyse plus détaillée, il n'est pas très difficile ainsi de découvrir l'hypothèse cachée; on peut alors déduire en retour que cette hypothèse n'est pas satisfaite par les séries qui représentent des fonctions discontinues, et ce n'est qu'ainsi que l'accord peut être rétabli entre la séquence de la preuve, mis à part cela correcte, et ce qui avait été établi d'autre part"[78]

Laguerre, en 1879[79], amorce l'étude systématique, et la théorisation de ces séries est réalisée en 1886 à la fois par Poincaré[80] et Stieltjes[81]. Comme Peacock, mais pour d'autres raisons (les besoins des utilisateurs de mathématiques), Poincaré estime qu'une théorie localement valable est tout à fait compatible avec la rigueur si l'on délimite clairement son champ d'application.

> "Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment.
>
> Ainsi , pour prendre un exemple simple, considérons les deux séries qui ont pour terme général:

---

[77] G.G.Stokes: On the numerical calculation of a class of Definite Integrals and Infinite Series, *Transactions of the Cambridge Philosophic Society*, vol.IX (1857) et: On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments,vol.X (1857), cité par J.P. Ramis, cf infra.

[78] Seidel, 1847, cité in Lakatos, preuves et réfutations p176

[79] Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$, Bulletin de la société Mathématique de France(7), 1879, p.72-81

[80] Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, *Acta mathematica*, 1886, Oeuvres, tome 1, p.290-332

[81] Recherches sur quelques séries semi-convergentes, *Annales de l'Ecole normale*, 1886, p.201-207

$$\frac{1000^n}{1.2.3...n} \quad \text{et} \quad \frac{1.2.3...n}{1000^n}$$

Les géomètres diront que la première converge, et même qu'elle converge rapidement, parce que le millionième terme est beaucoup plus petit que le 999 999ème; mais ils regarderont la seconde comme divergente, parce que le terme général peut croître au delà de toute limite.

Les astronomes, au contraire, regarderont la première série comme divergente, parce que les 1000 premiers termes vont en croissant; et la seconde comme convergente, parce que les 1000 premiers termes vont en décroissant et que cette décroissance est d'abord très rapide.

Les deux règles sont légitimes: la première, dans les recherches théoriques; la seconde, dans les applications numériques. Toutes deux doivent régner, mais dans deux domaines séparés et dont il importe de bien connaître les frontières."[82]

Moyennant certaines conditions, ces séries, nommées à la suite de Poincaré développements asymptotiques, vérifient alors les règles du calcul algébrique et du calcul intégral, satisfaisant ainsi le principe de permanence des "symbolistes" de Cambridge.

Septième moment : le triomphe des séries divergentes.

Le problème d'attribuer une valeur à *toute* série infinie n'est pas encore résolu. Mais après la découverte de nouvelles algèbres et des géométries non euclidiennes, la conception de la nature des mathématiques a encore évolué. Considéré dans l'optique où les mathématiques ne sont qu'une construction de l'esprit humain, le mot "naturel" change de sens. Il ne s'agit plus d'attribuer à la série *sa* valeur naturelle, c'est-à-dire découlant d'une réalité externe ou interne aux mathématiques, mais *une* valeur arbitrairement définie, qui vérifie les propriétés que l'on juge commode de lui imposer pour résoudre un certain champ de problèmes. Même dans le cas d'une série convergente, comme le souligne Knopp, la valeur classiquement attribuée est arbitraire :

> "une suite infinie de nombres[...] n'a et ne peut avoir, aucune signification *en soi*, mais c'est seulement nous qui lui donnions une signification, par une convention arbitraire. Cette convention consistait, *premièrement*, à n'autoriser que des suites *convergentes*, c'est-à-dire des suites dont les termes approchaient un nombre défini et unique en un sens parfaitement défini; *deuxièmement*, à associer ce nombre à la suite, comme sa *valeur*, ou à regarder la suite comme rien de plus qu'un autre symbole pour le nombre."[83]

Dans le cas où la série diverge, pourquoi ne pourrait-on pas également définir un réel qui pourrait, dans certaines situations, remplacer la série? Dans l'esprit du "principe de permanence", les mathématiciens demandent à un nouveau concept éventuel de somme de

82 *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 1893, tome 2, p.1-2.

83 KNOPP, *Theory and application of infinite series* , Dover1989, p.459, Trad. A.M.P. (première édition en allemand en 1921)

respecter certaines règles "raisonnables", celles de l'algèbre mais pour des raisons *pratiques*, non plus au nom d'un *principe* supérieur... Ceci sera exposé de façon systématique dans l'introduction de 1928 des "Leçons sur les série divergentes", mais mis en oeuvre bien avant.

> "Le problème fondamental est le suivant: faire correspondre à chaque série divergente numérique d'une classe aussi large que possible, un nombre tel que la substitution de ce nombre à la série, dans les calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts, ou du moins presque toujours exacts. Ce problème en appelle d'autres et notamment les suivants:
>
> 1° Fixer avec précision la classe des séries que l'on considérera;
>
> 2° Enumérer les opérations qu'il est permis d'effectuer sur ces séries, en utilisant leur somme conventionnelle.
>
> La question étant posée sous cette forme, on conçoit aisément qu'elle puisse admettre différentes solutions, ou, si l'on préfère, qu'il existe différents procédés de sommation, c'est-à-dire diverses manières de définir la somme conventionnelle. Suivant le procédé de sommation que l'on a choisi, la classe des séries auxquelles il s'applique se trouve délimitée de telle ou telle manière, en même temps que telles ou telles opérations simples sont admises.
>
> En fait, nous verrons que l'on a proposé des procédés de sommation extrêmement variés. Notons d'abord leurs caractères communs:
>
> 1° Chacun de ces procédés satisfait à la *condition de permanence*, qu'on peut formuler ainsi: la classe des séries auxquelles s'applique la méthode de sommation considérée comprend et dépasse la classe des séries convergentes; en outre la somme que cette méthode assigne à une telle série est égale à sa somme, au sens ordinaire. Cette condition bien naturelle et déjà signalée par M.Emile Borel a été systématiquement introduite par le géomètre anglais G.Hardy, sous le nom de "*consistency-condition*". Nous préférons employer ici la dénomination *condition de permanence*, due à M.Conrad Knopp.
>
> 2° Nous demanderons encore à la série de terme général au_n+bv_n d'être sommable par la méthode en question, du moment où les séries de termes généraux u_n et v_n sont elles-mêmes sommables par cette méthode, la somme de au_n+bv_n devant égaler $aU+bV$, si U et V sont les sommes des séries u_n et v_n, et la propriété devant avoir lieu quelles que soient les constantes a et b. C'est ce que nous appellerons la *condition de distributivité*.
>
> Tous les procédés de sommation satisfont à la fois à la condition de permanence et à la condition de distributivité. Il y a lieu de considérer dans cette théorie d'autres conditions de forme simple, mais qui pourront être ou non satisfaites suivant le procédé de sommation employé. De leur validité dépendra la souplesse plus ou moins grande de la méthode, qui se prêtera à des transformations de calcul plus ou moins larges. Voici un exemple d'une condition de ce genre:
>
> Si la série $u_0+u_1+u_2+...+u_n+...$ est sommable et admet U pour somme, la série $u_1+u_2+...+u_n+...$ l'est également et a pour somme $U - u_0$ .C'est ce que nous appellerons la *condition de semi-associativité*. Lorsqu'elle est remplie, il est manifeste que la série obtenue, en supprimant les n premiers termes d'une série sommable, est également sommable et que sa somme s'obtient en retranchant de la somme de la série initiale celles de ces *n* termes.
>
> La valeur pratique d'un procédé de sommation dépend encore de la facilité avec laquelle il fournira des règles relatives à la multiplication des séries. Notons qu'étant donnée une classe de séries, sommables par un procédé particulier, on doit en général formuler des conditions restrictives

pour que la série produit formel, déduite de deux séries de cette classe par la règle de Cauchy, appartienne à la même classe et soit, à ce titre, sommable par le procédé considéré: pour comprendre la nécessité de telles restrictions, il suffit de se rappeler que le produit formel de deux séries simplement convergentes (c'est-à-dire dont la convergence n'est pas absolue) n'est pas en général une série convergente. Si l'on suppose que chacun des facteurs converge absolument, on est assuré que le produit formel présente ce même caractère et a pour somme le produit des sommes des deux séries.

Enfin, la valeur pratique d'un procédé de sommation dépendra du résultat qu'il donne, lorsqu'on l'applique au développement taylorien d'une fonction analytique hors de son cercle de convergence et notamment à la série $1+u+u^2+...$, dont la somme devra être égale à $(1-u)^{-1}$. S'il en est bien ainsi, dans des conditions très larges, le procédé pourra s'appliquer au prolongement analytique d'une fonction quelconque, en raison du rôle dévolu à la fonction particulière précédente (où $uz = x$) dans l'intégrale de Cauchy."[84]

En s'inspirant de l'argument "probabiliste" de Leibniz, on peut par exemple décider que la série est sommable quand la *moyenne* des sommes partielles a une limite au sens de Cauchy, et que cette limite est la valeur de la série. Pour la série 1-1+1-1+1+etc., on obtient bien la valeur $\frac{1}{2}$.

Dans un article de 1880, Fröbenius[85] montre que cela correspond aussi à l'autre méthode de Leibniz. En effet, si l'on pose :

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

on obtient:

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \lim_{n \to \infty} \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1}$$

Cette deuxième définition a donc le mérite d'être conforme à l'idée de moyenne de Leibniz, à la "loi de continuité" (ce qui est vrai pour x<1 le reste pour x=1), et à la définition d'Euler. On démontrera plus tard qu'elle obéit aux conditions de Borel.

Hölder(1882) et Cesaro[86] donnent peu après des généralisations de la méthode de Fröbenius, parmi lesquelles on retrouve la transmutation de Newton, réintroduite par Euler comme méthode d'accélération de convergence[87]. Mais c'est Emile Borel qui fonde la théorie des séries divergentes sommables. Il publie dès 1896 un article[88] qui, au-delà de sa valeur théorique, montre combien l'état d'esprit des mathématiciens a évolué :

---

84 Introduction aux *Leçons sur les séries divergentes*, 1901, Paris,p.13-15.

85 Ueber die Leibnitzsche Reihe, Journal für die Reine und angewandte Mathematik,(89),1880, p.282-24

86 Sur la multiplication des séries, *Bulletin des sciences mathématiques*, (2),14, 1890, p.114-120

87 On trouvera une explication mathématique dans J.P.Ramis, Séries Divergentes et Théories Asymptotiques, in *Séries divergentes et procédés de resommation*, Journées X-UPS 1991, Centre de mathématiques de l'Ecole Polytechnique, p.12, rédité en 1993 in *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Supplément au Bulletin SMF, Tome 121

88 Fondements de la théorie des séries divergentes sommables, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1896, p.103-104.

"Les géomètres antérieurs à Abel et Cauchy faisaient usage sans scrupules des séries divergentes; par exemple, l'égalité

$$(1) \qquad 1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

leur donnait pour x =-1

$$(2) \qquad 1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$$

Cette manière de procéder n'avait évidemment aucune rigueur; peut-être s'est-on trop hâté de conclure qu'elle ne reposait sur aucun fondement et, au lieu de rechercher les raisons pour lesquelles les résultats qu'elle fournissait étaient presque toujours exacts, on a proscrit absolument du calcul les séries divergentes. Cette réaction violente était peut-être nécessaire pour donner aux mathématiciens l'habitude d'une rigueur absolue; actuellement cette habitude est prise depuis longtemps et nul n'oserait donner comme certain un résultat qui ne serait pas déduit rigoureusement de résultats certains, ou du moins que son auteur ne croirait point tels. Aussi ne peut-il y avoir aucun inconvénient à se demander si l'emploi de séries divergentes ne serait pas dans certains cas parfaitement légitime, et si l'égalité(2) par exemple, n'exprimerait pas un *fait mathématique* aussi certain que la relation (1) d'où on l'a déduite.

Voici le point de vue auquel je me suis placé pour faire cette recherche.

On utilise souvent, pour représenter une fonction analytique, un développement en série convergente dans une région moins étendue que la région où la fonction donnée existe ; c'est ce qui arrive presque constamment pour le développement de Taylor. Considérons, par exemple, l'égalité (1) ; si l'on donne à x une valeur dont le module dépasse l'unité, le premier membre n'est pas convergent, tandis que, si x est différent de *un*, le second membre a une valeur numérique parfairement déterminée. je me suis proposé de rechercher une relation entre les valeurs numériques des termes successifs du premier membre et la valeur numérique du second membre, et je suis arrivé au résultat suivant : dans des cas très étendus, *la valeur numérique du second membre peut être calculée au moyen des valeurs numériques des termes du premier membre, par un procédé ne dépendant que de ces valeurs numériques.* Dès lors il est légitime de dire que cette valeur numérique est la somme de la série numérique (divergente) que forme le premier membre.

Cette méthode donne pour somme de la série de terme général u_n,

$$\lim_{a \to \infty} e^{-a}S(a)$$

où l'on note :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \text{ et } s_0 = 0 \qquad\qquad S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{a^n}{n!}$$

Borel donne lui-même l'exemple de la série 1-1+1-1+....:

Il publie enfin en 1901 les "Leçons sur les séries divergentes" où il développe pleinement sa théorie. On peut lire dans l'introduction reproduite en "Bonnes feuilles" combien il tient à réhabiliter les Anciens, en particulier Euler :

"Il doit être expressément sous-entendu, dans l'affirmation d'Euler que *si l'on est conduit à la série 1-1+1-1+1+... par n'importe quel calcul, on peut sans hésitation, la remplacer par* $\frac{1}{2}$, puisqu'il s'agit seulement des calculs que l'on sera conduit naturellement à faire, et non d'expressions construites exprès pour mettre la règle en défaut.Pour prouver donc que l'affirmation d'Euler est fausse, en se plaçant du point de vue d'Euler, il faudrait fournir l'exemple d'un géomètre qui, *n'ayant aucune préoccupation relative aux séries divergentes et à la légitimité de leur emploi*, a trouvé, dans des calculs ayant pour objet des recherches d'un ordre tout différent, une série [...] pour laquelle la règle d'Euler est en défaut.

Tant qu'on n'aura pas fourni un tel exemple, on pourra dire que cette règle est exacte, *au point de vue pratique et expérmental*, puisque, depuis un siècle, elle n'aurait trompé aucun des géomètres qui l'auraient appliquée, sauf ceux qui se seraient précisément proposé comme but la mettre en défaut; ceux-là, non plus, n'auraient d'ailleurs pas été trompés, puisqu'ils savaient à l'avance le but vers lequel ils tendaient."[89]

Voilà énoncé, avec beaucoup d'humour, un dernier paradoxe : une règle qui donne à chacun ce qu'il cherche ne trompe personne! Pour réfuter ce dernier paradoxe, il reste à lever l'ambiguïté liée à la multiplicité des réponses localement cohérentes en précisant le domaine d'application des différentes méthodes :

"Le problème fondamental est le suivant : *faire correspondre à chaque série divergente numérique un nombre tel que la substitution de ce nombre à la série, dans des calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts, ou du moins presque toujours exacts.* Il y aura lieu d'ailleurs, une fois ce premier résultat acquis, de fixer des classes, le plus étendues possibles, de méthodes de calcul dans lesquelles on est certain que la substitution du nombre à la série est légitime.

Il est d'ailleurs à peine utile d'observer qu'on ne peut guère espérer résoudre le problème précédent pour toutes les séries divergentes : l'infinité non dénombrable des modes de divergence paraît être un obstacle insurmontable[...]

On pourrait d'ailleurs être amené comme nous en verrons des exemples plus loin à attribuer plusieurs sommes différentes à un série divergente (et aussi à une série convergente); ce fait peut paraître tout d'abord étrange et paradoxal; il n'aurait pas paru moins étrange à un géomètre du XVIIIe siècle d'entendre affirmer que l'intégrale définie

$$\int_1^2 \frac{dz}{z}$$

n'a pas seulement comme valeur log 2, mais doit être considérée comme égale à $\log 2 + 2k\pi i$, k étant un nombre entier quelconque."[90]

Tout au long du XXe siècle, des mathématiciens vont s'attacher à suivre le programme de Borel, en imaginant des méthodes de sommation adaptées aux nombreux problèmes issus des mathématiques mais surtout de la physique : phénomène de Stokes, équation de Schrödinger, invariants adiabatiques, théorie quantique des champs... Ces recherches, jusqu'à celles en cours, sont exposées par Jean-Pierre Ramis[91], qui voit dans "le phénomène de multiplicité des "sommes naturelles un avantage considérable plutôt qu'un

[89] Introduction aux *Leçons sur les séries divergentes*, 1901, Paris, p.7-8

[90] Introduction aux *Leçons sur les séries divergentes*, 1901, Paris, p.14-15

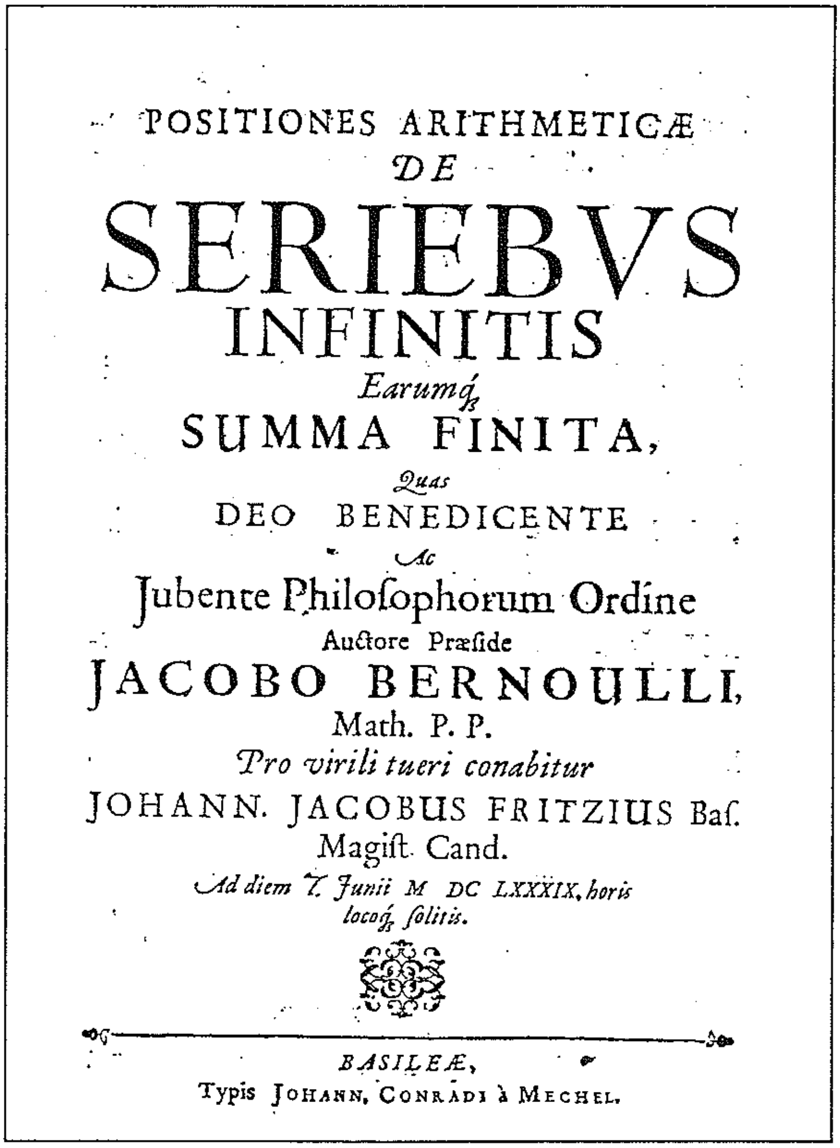
[91] Séries divergentes et théories asymptotiques, 1993, Supplément au Bulletin SMF, Tome 121

inconvénient". Il rattache certains résultats obtenus à la théorie de l'ambiguïté à laquelle faisait allusion Galois dans sa dernière lettre. Une fois de plus, les objets mathématiques construits (k-sommabilité, développements asymptotiques Gevrey, etc.) assument un paradoxe, celui de la multiplicité de la somme, en permettant de calculer son ambiguïté. Mais si, comme le prévoyait Borel, une nouvelle intervention de l'infini, celui des types de divergence, rend ce programme impossible à achever, il est à prévoir que de nouveaux paradoxes surgiront. Les mystères de la Création Divine et de l'intuition mathématique restent entiers, peut-être le poète a-t-il une réponse :

"Que la provocante démarche de l'amante obscure
plus insatisfaite que le palais tanné de dunes appelant de tous leurs voeux les sauts d'émeraude qui les séduiraient
la conduise en une promenade de zéros hallucinant le un
emportée par la tempête des zéros et des uns
vers l'aimant de terre promise tyran de son un""[91]

---

91 Benjamin PERET


POSITIONES ARITHMETICÆ
DE
SERIEBVS
INFINITIS
Earumq;
SUMMA FINITA,
Quas
DEO BENEDICENTE
Ac
Jubente Philosophorum Ordine
Auctore Præside
JACOBO BERNOULLI,
Math. P. P.
Pro virili tueri conabitur
JOHANN. JACOBUS FRITZIUS Bas.
Magist. Cand.
Ad diem 7. Junii M DC LXXXIX, horis locoq; solitis.

BASILEÆ,
Typis JOHANN. CONRADI à MECHEL.

XVI. *Summa seriei infinitæ harmonicè progressionalium,* $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ *&c. est infinita.*

Id primus deprehendit Frater : inventâ namque per præced. summâ seriei $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$, &c. visurus porrò, quid emergeret ex istâ serie, $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}$, &c. si resolveretur methodo prop. XIV. collegit propositionis veritatem ex absurditate manifestâ, quæ sequeretur, si summa seriei harmonicæ finita statueretur. Animadvertit enim,

Seriem A, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$, &c. ∞ (fractionibus singulis in alias, quarum numeratores sunt 1, 2, 3, 4, &c. transmutatis)

seriei B, $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\frac{6}{42}$, &c. ∞ C + D + E + F, &c.

$$\left.\begin{array}{lll}
C\;.\;\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \&c. & \infty \text{ per præc.} & \frac{1}{1} \\
D\;.\;.\;+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \&c. & \infty\ C-\frac{1}{2}\ \infty & \frac{1}{2} \\
E\;.\;.\;.\;.\;+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \&c. & \infty\ D-\frac{1}{6}\ \infty & \frac{1}{3} \\
F\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \&c. & \infty\ E-\frac{1}{12}\ \infty & \frac{1}{4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \&c.\ \infty & & \&c.
\end{array}\right\}\ \infty\ G;$$

unde sequitur, seriem $G \infty A$, (totum parti, si summa finita esset.

Ego postmodùm, cùm indicâsset, idem ostensivè hunc in modum : Summa seriei infinitæ harmonicæ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, &c. superat datum quemvis numerum. Ergò infinita est; per II. Esto datus numerus N quantumcunque magnus: Abscinde à principio seriei aliquot terminos, quorùm summa æquet vel superet unam unitatem numeri N, & à serie reliquâ iterum aliquos abscinde, quorum summa aliam unitatem numeri N superet, idque si fieri possit repete toties, quot in numero N sunt unitates ; sic termini abscissi omnes superabunt totum numerum, multò magis igitur tota series eundem superabit. Si neges, abscissis aliquot reliquos unitatem superare posse, esto primus reliquorum, qui post abscissionem ultimam remanserunt, $\frac{1}{a}$, & sequentes $\frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{a+2}$, $\frac{1}{a+3}$, &c. Constituatur ad duos primos terminos $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{a+1}$ Progressio Geometrica, cujus ideò singuli post secundum termini singulis respondentibus in Progressione Harmonicâ minores sunt ob denominatores majores, per IV. & continuetur hæc usque ad $\frac{1}{aa}$ (quod quidem fiet in terminis numero finitis propter a numerum finitum) eritque hæc series Geometrica finita ∞ 1, per VIII. Harmonica itaque terminorum totidem superabit unitatem. Q. E. D.

Extrait de l'ouvrage de Bernoulli dont la page de garde est ci-contre

EULER. - P.Grimm l'enleva de sa maison en flammes. (P. 495, col 1.)

Extrait de:

HISTOIRE POPULAIRE

DES

SCIENCES

INVENTIONS & DÉCOUVERTES

Depuis les premiers siècles jusqu'à nos jours

PAR

ADOLPHE BITARD

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET HISTORIQUE

Une approximation de π

Martine BÜHLER

L'activité que nous proposons ici à partir d'un texte d'Euler est destinée aux élèves de T S, spécialité mathématiques. Il s'agit d'un problème d'approximations d'intégrales qui permet d'écrire $\frac{\pi}{4}$ comme limite d'une série (la série de Leibniz : $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$). L'originalité d'Euler est de se préoccuper d'améliorer la convergence très lente de cette série par des méthodes de calcul accessibles à nos élèves.

Le texte sur lequel s'appuie cette activité est extrait de *l'Introduction à l'Analyse infinitésimale*, qui est considérée comme le premier livre d'analyse "moderne".

Dans la préface, EULER décrit l'ouvrage : "*Je me suis d'abord étendu dans le premier livre sur les fonctions de variables*". C'est effectivement sur ces définitions qu'ouvre le chapitre premier du livre I :

" 4 - *une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.*"

10 - *Il faut ensuite remarquer principalement la division des fonctions : uniformes et multiformes*".

Rappelons que c'est la reconnaissance du caractère multiforme des logarithmes de nombres imaginaires qui a permis à EULER de mettre un terme à la célèbre "controverse entre messieurs Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires" [1].

Les cinq premiers chapitres du livre I traitent des fonctions algébriques. "*Passant ensuite des puissances aux quantités exponentielles, qui sont elles-mêmes des puissances, dont les exposants sont variables, leur développement m'a fourni une idée fort naturelle et à la fois fort féconde des logarithmes.*" (Préface)

Le chapitre II commence en effet par un exposé sur "la quantité exponentielle a^z", où EULER explique ce qu'il entend par $a^{\frac{5}{2}}$ ou $a^{\sqrt{7}}$ ("*une valeur déterminée comprise entre les limites a^2 et a^3*). C'est à partir de cette notion qu'EULER définit le logarithme.

"102 - *Si étant donné le nombre a, on peut conclure de chaque valeur de z, celle de y ($y = a^z$) réciproquement ayant pris pour y une valeur quelconque positive, on conçoit qu'il existe pour z un nom-*

[1]EULER, *Mémoire de l'Académie des Sciences de Berlin*, 1751 (voir l'article de Jean-Luc Verley dans Fragments d'histoire des mathématiques n° I - Brochure APMEP N°41 - 1981 -)

bre convenable pour que $a^z = y$; cette valeur de z , en tant qu'elle peut être regardée comme une fonction de y, s'appelle ordinairement le LOGARITHME de y . La théorie des logarithmes suppose donc l'existence d'un nombre constant représenté par a, que pour cette raison, on appelle la Base des logarithmes".

De cette définition, EULER tire les propriétés habituelles des logarithmes ainsi que l'établissement des tables.

Le chapitre VII est consacré au "*Développement des quantités exponentielles et logarithmes en série*".

La méthode d'EULER repose sur le développement du binôme et une manipulation hardie de quantités infiniment petites ou infiniment grandes.

Si ω est un infiniment petit (positif), a^{ω} est infiniment proche de 1, il pose donc $a^{\omega} = 1 + k\omega$, k dépendant de a. Mais alors :

$$a^{i\omega} = (1 + k\,\omega)^i$$
$$= 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{2!}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{3!}k^3\omega^3 + \ldots$$

Si z est un nombre fini et si on prend $i = \frac{z}{\omega}$, i est un infiniment grand .

Comme $\omega = \frac{z}{i}$, on a: $a^z = 1 + \frac{i}{1!}\,k\frac{z}{i} + \frac{i(i-1)}{i^2}\,\frac{k^2z^2}{2!} + \frac{i(i-1)(i-2)}{i^3\;3!}k^3z^3 + .$

Comme i est infiniment grand, $1 = \frac{i}{i} = \frac{i(i-1)}{i^2} = \frac{i(i-1)(i-2)}{i^3} = \ldots$

$$\text{donc } a^z = 1 + kz + \frac{k^2z^2}{2!} + \frac{k^3z^3}{3!} + \ldots$$

Une méthode analogue donne le développement en série du logarithme :

Toujours pour ω infiniment petit, donc infiniment proche de 1, soit $a = 1 + k\omega$ (où k est un nombre réel dépendant de a), avec i infiniment grand dans $z = i\omega$, EULER pose:

$$(1 + k\omega)^i = a^{i\omega} = 1 + x$$
$$\text{et obtient } \ell(1 + x) = \ell\left(a^{i\omega}\right) = i\omega$$

(Euler désigne par ℓ (y) le logarithme de base a de y).

Mais alors

$$1 + k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}}$$
$$k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1$$
$$l(1 + x) = i\omega = \frac{i}{k}\left((1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right)$$

Un travail de même type que celui mené plus haut pour la fonction exponentielle mène alors au développement de ℓ (1+x), puis en changeant x en -x, de ℓ (1 - x) et de $\ell\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$.

Il est alors pratique de choisir comme base du logarithme le nombre a qui correspond à k = 1, donc défini par $a^{\omega} = 1 + \omega$. Si on applique à ce nombre, pour z = 1, le développement obtenu précédemment pour a^z, on trouve :

$a = a^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$ nombre qu'EULER désigne par e et dont il calcule une approximation décimale.

Le développement fournit pour z quelconque: $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots..$

Et on a aussi, parce que $e^{\omega} = 1 + \omega$,

$$e^z = e^{i\omega} = (1+\omega)^i = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$$ avec i infiniment grand.

C'est aussi le développement du binôme qui est l'origine des séries donnant les fonctions trigonométriques. La connaissance de formules de duplication amène EULER à affirmer :

$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz$ puis, à partir de

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2},$$

il prend z infiniment petit, n infiniment grand donc :

$v = nz$ est fini, $\sin z = z$, $\cos z = 1$

$$\text{d'où } \cos v = \frac{\left(\cos z + \sqrt{-1}\frac{v}{n}\right)^n + \left(\cos z - \sqrt{-1}\frac{v}{n}\right)^n}{2}$$

D'une part, le développement du binôme et une manipulation des infiniment grands semblable à celle qui a été faite pour les logarithmes lui donne le développement en série de cos z (et de même sin z), d'autre part, le fait que $e^{\sqrt{-1}v} = \left(1 + \sqrt{-1}\frac{v}{n}\right)^n$ pour n infiniment grand donne les célèbres formules d'EULER

$$\cos v = \frac{e^{\sqrt{-1}v} + e^{-\sqrt{-1}v}}{2} \quad \text{et} \quad \sin v = \frac{e^{\sqrt{-1}v} - e^{-\sqrt{-1}v}}{2}$$

En revenant à la variable z, on obtient donc l'arc z comme logarithme de quantités imaginaires dépendant de cos z et de sin z. :

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z}\right)$$

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{1 + \sqrt{-1}\tan z}{1 - \sqrt{-1}\tan z}\right)$$

d'où le développement de l'arc tan qui conduit à la "série de Leibniz" :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots.$$

C'est ce passage que nous avons choisi de faire étudier aux élèves (en leur faisant obtenir un développement en série d'Arctan par des méthodes plus "orthodoxes" que celles d'EULER, et qui permettent de majorer l'erreur). En effet, EULER se préoccupe d'améliorer la convergence très médiocre de la célèbre série. La lecture du texte permet donc une comparaison de vitesse de convergence et donne aux élèves un moyen d'obtenir le début du développement décimal de π.

C'est aussi bien sûr l'occasion de replacer EULER dans son contexte historique, de parler de l'émergence du concept de fonction.

Problème

A) Activités préliminaires.

Soit F définie sur R par $F(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx$

1) a) Justifier l'existence et la dérivabilité de F.
   b) Calculer F ' (t) et déterminer le sens de variation de F.

2) a) Montrer : pour $t \in R$, $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \frac{x^8}{1+x^2}$
   b) En déduire : $F(t) = P(t) + R(t)$ où P est un polynôme de degré 7

   et $R(t) = \int_0^t \frac{x^8}{1+x^2}\,dx$

   c) Montrer : pour $t \in [0;1]$, $0 \leq R(t) \leq \frac{t^9}{9}$

3) Soit G définie sur $I =]-\pi/2 ; \pi/2[$ par $G(z) = F(\tan z)$.
   a) Justifier la dérivabilité de G et calculer G'(z) pour z dans I
   b) Calculer G(0).
   c) Déduire de ce qui précède :pour z appartenant à I, G(z) = z.

4) a) Lire les lignes 1 à 5 du texte joint.
   b) Quel est le lien entre ce texte et les questions précédentes ?
   c) Expliciter le &c (et caetera).

5) a) Calculer F(1) et $F(1/\sqrt{3})$.
   b) Lire les lignes 5 à 9 du texte.
   c) Que signifie le mot "série" ?

B - Approximation de π.

1) a) Calculer P(1) à 0,01 près par défaut et déduire du A) un encadrement de F(1) -P(1), puis un encadrement de π. Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?
Expliciter le "&c" de la ligne 7.
   b) Lire les lignes 10 à 30 du texte.Traduire les termes d'EULER avec les notations du problème. En déduire un encadrement de π (mener les calculs intermédiaires à 10^{-4} près).
   Quelle est l'amplitude de l'encadrement obtenu ?

2) Amélioration de l'approximation.
   a) Lire les lignes 32 à 42. Vérifier les calculs d'EULER ; en particulier, démontrer la formule donnant tan(a+b).
   b) On suppose : tan a = 0,5. Calculer tan b (avec a+ b = π/4)
   Que valent F(1/2) et F(1/3) ?
   Calculer P(1/2) et P(1/3) à 0,000 001 près par défaut. Majorer R(1/2) et R(1/3).
   c) Lire la fin du texte. Expliquer, avec les notations du problème, l'égalité des lignes 46-47.

   Déterminer un encadrement de π (en explicitant la démarche suivie) et comparer l'amplitude de l'encadrement à celle du 1°)b).

Faiſons donc $tang.\, z = t$, de ſorte que z ſoit l'arc dont la tangente eſt t, & que nous déſignerons ainſi: $A.\ tang.\ t$, ce qui donne $z = A\ tang.\ t$. La tangente t étant connue, l'arc correſpondant ſera $z = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} -$ &c. Puis donc qu'en ſuppoſant la tangente t égale au rayon 1, l'arc z devient = à l'arc de 45° ou $z = \frac{\pi}{4}$, nous trouverons $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ &c; ſérie que LEIBNITZ a donnée le premier pour exprimer la valeur de la circonférence du cercle.

141. Mais pour obtenir promptement, au moyen d'une telle ſérie, la longueur d'un arc de cercle, il eſt clair qu'on doit prendre pour la tangente t une fraction aſſez petite. Ainſi, on trouveroit facilement, à l'aide de cette ſérie, la longueur de l'arc z, dont la tangente t ſeroit $\frac{1}{10}$; car cet arc ſeroit $z = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{500000} -$ &c. ſérie dont on peut aiſément obtenir la valeur par le moyen des décimales; mais la meſure d'un tel arc n'apprendroit rien pour la longueur de toute la circonférence, parce que le rapport de l'arc, dont la tangente $= \frac{1}{10}$, à la circonférence entiere eſt inaſſignable. C'eſt pourquoi, dans cette recherche, on doit prendre un arc qui ſoit une partie aliquote de la circonférence, & dont la tangente aſſez petite puiſſe être exprimée commodément. On choiſit ordinairement pour remplir ce but l'arc de 30° dont la tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$, parce que les tangentes des arcs plus petits, qui ont un rapport commenſurable avec la circonférence, ſont trop irrationnelles. Ainſi, à cauſe de l'arc de 30° $= \frac{\pi}{6}$, on aura $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2\sqrt{3}} -$ &c. & $\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} +$ &c. Et c'eſt par le moyen de cette ſérie, & avec un travail incroyable, qu'on eſt venu à bout de trouver la valeur de π que nous avons donnée ci-deſſus.

142. Ce calcul eſt d'autant plus pénible, que tous les termes ſont irrationnels, & que chacun d'eux n'eſt gueres plus petit, que le tiers de celui qui précede; mais on pourra remédier ainſi à cet inconvénient: prenons toujours l'arc de 45° ou $\frac{\pi}{4}$. Quoique cet arc ait une valeur exprimée par une ſérie à peine convergente $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ &c; conſervons-le cependant, & imaginons-le partagé en deux arcs a & b, de maniere que $a + b = \frac{\pi}{4} = 45°$. Puis donc que $tang.\,(a + b) = 1 = \frac{tang.\, a + tang.\, b}{1 - tang.\, a\ tang.\, b}$, nous aurons $1 - tang.\, a\ tang.\, b = tang.\, a + tang.\, b$ & $tang.\, b = \frac{1 - tang.\, a}{1 + tang.\, a}$. Soit maintenant $tang.\, a = \frac{1}{2}$; nous trouverons $tang.\, b = \frac{1}{3}$; alors les deux arcs a & b ſeront exprimés par une ſérie rationnelle beaucoup plus convergente que la précédente, & leur ſomme donnera la valeur de l'arc $\frac{\pi}{4}$. Donc . . . .

$$\pi = 4 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \&c. \\ \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \&c. \end{array} \right\}$$

On auroit donc pu trouver de cette maniere la longueur de la demi-circonférence beaucoup plus promptement qu'on ne l'a fait, en ſe ſervant de la ſérie que nous avons donnée auparavant.

NOTE DE LECTURE

"Histoires d'algorithmes du caillou à la puce"

Martine BÜHLER

Pressée par le temps, cherchant déséspérement à montrer à mes élèves de T.S. le fonctionnement et l'utilité de la "méthode des tangentes", voilà que je pense à consulter "Histoires d'algorithmes". Ouf, un chapitre est consacré aux méthodes de Newton ! On y trouve un extrait de la Méthode des fluxions où, certes, Newton donne une méthode d'approximation d'une solution d'équation, mais où je n'aperçois ni tangente ni dérivée. En revanche, les auteurs expliquent clairement la "géométrisation" possible de la méthode, l'importance des conditions initiales et les développements ultérieurs, avec un choix de textes originaux et un commentaire adéquat. C'est décidé ! Mes élèves liront le texte de Newton et feront ses calculs.

Mais ai-je vraiment gagné du temps ? Car me voilà plongée dans les autres chapitres : les diverses méthodes d'approximation de racines carrées sont tout-à-fait abordables par nos élèves (on y retrouve même "l'algorithme de la potence" que nous avons appris - puis oublié - en 4ème, comme étant un procédé habituel au Moyen-Age, exposé ici grâce à un texte du XIIIème siècle d'Ibn al Banna).

La table des cordes de Ptolémée (donnant la longueur des cordes d'un cercle en fonction des valeurs des arcs correspondants) peut être prétexte à des exercices de géométrie en première ou terminale.

Quant au nombre π, cette vedette des cours de mathématiques, on le retrouve à la tête d'un chapitre pour lui tout seul, où sont exposées des méthodes d'approximation qui vont de la géométrie "élémentaire" au calcul des séries.

De quoi passionner bien des jeunes de la 6ème à la terminale (et au-delà). Les enseignants de collège peuvent d'ailleurs trouver, dans divers chapitres, des activités réalisables par leurs élèves : sur les opérations arithmétiques (chap. 1) avec des algorithmes de multiplication ou de division, ou sur des méthodes de fausse position, qui permettent d'explorer des techniques - inhabituelles pour notre public - de résolution de problèmes du premier degré.

Au total, une mine d'idées de problèmes et d'activités pour les étudiants de tout âge, une approche historique qui manque trop souvent à notre formation d'enseignant, des textes originaux accessibles! ... et du travail en perspective.

Un livre qui figure sûrement déjà dans tous les C.D.I.... et dans les bibliothèques d'I.U.F.M.

Les thèmes abordés :

1 Algorithmes des opérations arithmétiques.

2 Les carrés magiques.

3 Autour des méthodes de fausse position.

4 Autour de l'algorithme d'Euclide.

5 De la mesure du cercle au calcul de π.

6 Les méthodes de Newton.

7 Résolutions d'équations par approximations successives.

8 Des algorithmes de l'arithmétique.

9 Résolution de systèmes d'équations linéaires.

10 Tables et interpolation.

11 Quadratures approchées.

12 Résolution approchée d'équations différentielles.

13 Approximations de fonctions.

14 Accélération de convergence.

15 Vers un concept d'algorithme.

Histoires d'algorithmes : du caillou à la puce.

J.L. CHABERT, E. BARBIN, M. GUILLEMOT, A. MICHEL- PAJUS et autres...

BELIN, Paris - 1994.

COURRIER DU LECTEUR

A propos de la note de lecture de l'ouvrage de Joseph " The Crest of the Peacock" par Marie-Françoise Jozeau.

Certaines affirmations de Marie-Françoise Jozeau dans sa note de lecture de l'ouvrage de Joseph "The Crest of the Peacock" m'ont amené à lire de manière approfondie ce livre et peut-être à étayer davantage quelques critiques.

En effet, Marie-Françoise Jozeau "regrette cependant qu'il y ait peu de textes originaux et de traductions, ce qui nous oblige à faire entièrement confiance à l'auteur quant à l'interprétation de ces textes"(p.76). Pour notre propos nous choisissons ici le problème 33 du papyrus Rhind que Joseph cite aux pages 70 à 73. Passons ici rapidement sur l'appellation papyrus d'Ahmes "named after the scribe who composed it, in about 1650 B-C" (p.60). Le scribe Ahmes a seulement recopié un papyrus plus ancien et nous ne pouvons pas savoir quelle part lui attribuer dans le document que nous possédons. Autrement dit il est tout aussi abusif d'associer à ce texte le nom d'Ahmes que celui de l'égyptologue Rhind qui se l'est procuré il y a plus d'un siècle ! Toutefois, ce changement d'appellation est à mettre en liaison avec le sous-titre de l'ouvrage "non-European Roots of Mathematics". Mais revenons au problème 33 dont l'énoncé est le suivant :

Une quantité, son $\frac{2}{3}$ son $\frac{1}{2}$ son $\frac{1}{7}$ lui est ajouté. Il advient 37.

que nous pouvons utilement comparer au texte de Joseph

The sum of a certain quantity together with its two-third, its half and its one seventh becomes 37. What is the quantity ? (p.70);

Bien sûr le scribe a en vue le calcul de la quantité, mais il ne nous le demande pas explicitement. En fait, à ses yeux, ce n'est pas le résultat qui importe mais seulement la manière utilisée pour y arriver. En d'autres termes, il s'agit ici d'un exemple de division : celui de 37 par $\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)$.

En quelque sorte Joseph s'approche de ceci lorsqu'il traduit algébriquement ce problème sous la forme

(1) $\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)x = 37.$

Mais cette dernière traduction est ici inexacte car nous devions écrire

(2) $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x= 37.$

Certes (1) et (2) sont équivalentes algébriquement mais elles ne correspondent pas au même énoncé et traduisent en un certain sens des conceptions numériques différentes. Toutefois, la première partie de la solution proposée par le scribe correspond effectivement au début de la division de 37 par $\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)$ puisqu'il écrit

1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$
2	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$
4	9	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{14}$	
8	18	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	
16	36	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$

Le scribe procède par doublements successifs et il utilise des "réductions" ou "simplifications".

Ainsi, puisqu'il ne peut écrire $\frac{2}{7}$ ceci se transforme en $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{28}$ d'après la table des "expressions de 2 à partir de n" qui figure au début du papyrus Rhind. Joseph le note mais il est moins heureux à la troisième ligne lorsqu'il écrit pour doublement $8\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$ (p.71).

Nous savons en effet que le scribe simplifie $\left(\frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\right)$ en $\left(1\ \frac{1}{6}\right)$ ce qui montre que Joseph n'a pas suivi le texte original même si, ici, ceci ne prête pas trop à conséquence et qu'il "retombe sur ses pieds" à la ligne suivante.

Nous pouvons noter comme Joseph que le scribe vient ainsi de trouver un nombre très près de 37. Mais il ajoute

What must be added to $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{28}$ *to make up 1 ? Whith our present method, we easily find the answer :* $\frac{1}{21}$. (p.71).

Joseph n'a pas saisi toute la pertinence de la technique mise en oeuvre par le scribe. Nous ne trouvons pas trace du $\frac{1}{21}$ et pour cause ? En effet nous pouvons noter que

(3) $\quad 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}=\frac{97}{42}$ $\quad$ et le scribe écrit en rouge ce que nous pourrions appeler aujourd'hui une "réduction au même dénominateur: 42"

28 $\quad$ **10 $\frac{1}{2}$** $\quad$ **1 $\frac{1}{2}$** (j'ai écrit en gras ce qui est écrit en rouge)

car $\frac{2}{3} = 28\left(\frac{1}{42}\right)$ $\quad \frac{1}{4} = \left(10+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{42}$ $\quad \frac{1}{28} = \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{42}$

relations qu'il formule comme suit

1	42
$\frac{2}{3}$	28
$\frac{1}{2}$	21
$\frac{1}{4}$	$10\ \frac{1}{2}$
$\frac{1}{28}$	$1\ \frac{1}{2}$

total 40 *reste* 2

Autrement dit, dans le langage de Joseph, il manque $\frac{2}{42}$ et non pas $\frac{1}{21}$ comme il l'écrit, preuve sans aucun doute qu'il n'a pas très bien compris la démarche du scribe.

Mais d'après (3) nous avons

$$\frac{1}{97}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{42}$$

Le scribe l'exprime comme suit et il termine ainsi

97	42	1
$\frac{1}{56}\ \frac{1}{679}\ \frac{1}{776}$	21	2

Total 37

La deuxième ligne découle du fait que d'après la table des "expressions de 2 à partir de n" le scribe sait doubler $\frac{1}{97}$ sous la forme $\frac{1}{56}\ \frac{1}{679}\ \frac{1}{776}$.

Dès lors, d'après le scribe, le résultat de la division de 37 par $\left(1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{7}\right)$est $\left(16\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{679}\ \frac{1}{776}\right)$.

Bien entendu, il y a d'autres résultats possibles mais ici nous voyons que 42 joue un rôle fondamental, rôle qui a échappé à Joseph. Point de *"incredible calculator"* ou de *"battery of tables"* ou encore d'un *"unfortunate choice of numbers"*. La technique est très opérationnelle et Joseph aurait pu mieux consulter le texte original pour mettre en valeur les algorithmes mis en oeuvre par les scribes de l'Ancienne Egypte.

De plus Joseph invoque justement ce manque par un propos indépendant de la solution mais lié au contraire à la preuve : *We have not followed the scribe all the way in his solution to the problem for the reason that at one stage his approach requires an addition* *of 16 unit fractions, the last six of which are* $\frac{1}{1164}$, $\frac{1}{1358}$, $\frac{1}{1552}$, $\frac{1}{4074}$, $\frac{1}{4753}$ and $\frac{1}{5432}$ (p.72).

Or cette dernière fraction intervient tout naturellement puisque $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{776}=\frac{1}{5432}$.

Naturellement, le scribe prend $\frac{1}{5432}$ comme "réducteur" dans ses écritures rouges qui figurent dans la preuve. Il écrit (nous avons écrit en gras ce qui est en rouge):

1	16	$\frac{1}{56}$ ***97***	$\frac{1}{679}$ ***8***	$\frac{1}{776}$ ***7*** -	
$\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$	$\frac{1}{84}$ ***64*** $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{1358}$ ***4***	$\frac{1}{4074}$ ***1*** $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{1184}$ ***4*** $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$
$\frac{1}{2}$	8	$\frac{1}{112}$ ***48*** $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{1358}$ ***4***	$\frac{1}{1552}$ ***3*** $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	
$\frac{1}{7}$	$2\frac{1}{4}\frac{1}{28}$	$\frac{1}{392}$ ***12*** $\boldsymbol{\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{14}\frac{1}{28}}$	$\frac{1}{4753}$ ***1*** $\boldsymbol{\frac{1}{7}}$	$\frac{1}{5432}$ ***1***	-

Ainsi il obtient pour total des quantités "non réduites" $36\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{28}$

et en utilisant à nouveau "le réducteur $\frac{1}{5432}$", il écrit en rouge:

3621 $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ **1358** **194** ce qui lui permet d'écrire le reste pour arriver à 5432

reste $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{84}$

194 **64** $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

Il termine comme suit pour nous montrer la pertinence de ce dernier reste :

1	5432
$\frac{2}{3}$	3621 $\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	2716
$\frac{1}{4}$	1358
$\frac{1}{28}$	194
Total	5173 $\frac{1}{3}$ *reste* 258 $\frac{2}{3}$

Certes cette épreuve peut paraître bien compliquée, mais "l'écriture rouge" permet de conclure aisément puisque les scribes connaissaient la simplification de $\left(\frac{1}{7}\ \ \frac{1}{14}\ \ \frac{1}{28}\right)$ en $\frac{1}{4}$.

Ce retour aux sources nous montre bien l'objectif de Joseph. Sans aucun doute profondément aigri par le manque de place attribué à certaines civilisations dans quelques ouvrages il n'hésite pas à prêter à ces dernières plus qu'elles ne méritent. Ainsi il met en avant une certaine algèbre rhétorique pour la civilisation égyptienne ou encore le calcul de quelques volumes dont les interprétations ne font pas aujourd'hui l'unanimité.
Plus sérieusement il aurait pu constater que des ouvrages qu'il cite en bibliographie, je pense par exemple à History of Mathematics de Boyer, accordent une large place aux civilisations non européennes : 17 pages sur l'Egypte pour ce dernier livre. Le silence est tout de même assez bruyant !
Autrement dit, Joseph fait de l'ethnocentrisme à rebours. Comme le dit fort bien Marie-Françoise Jozeau : " Je suis plus sceptique quant au troisième point : la continuité des traditions mathématiques jusqu'au XXe siècle peut être discutée" (p.79).
Certes la technique égyptienne de division a pu passer à travers la civilisation grecque qui a aussi adopté les quantièmes. Mais Joseph aurait été plus heureux de parler à cet endroit des papyrus démotiques où l'on trouve de véritables fractions. Dans l'exemple étudié, les scribes n'ont pas à leur disposition l'écriture $\frac{97}{42}$. Mais ils ont mis en évidence les nombres 97 et 42 et ils ont utilisé toutes les ressources de leur numération et ont pratiqué au mieux avec celle-ci. Pour s'en convaincre aisément, il suffit de demander à quelqu'un qui n'est pas familier des techniques égyptiennes, d'exprimer le résultat de la division 37 par $\left(1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{7}\right)$ avec seulement des entiers et des quantièmes.
En conclusion l'ethnomathématique mérite mieux. Avec un peu d'effort on peut sans difficulté mettre en avant les travaux des anciens : point n'est besoin de travestir la réalité. Elle suffit amplement et nous devons, autant qu'il nous est possible, consulter les textes originaux !

Michel GUILLEMOT
IREM de Toulouse.

Les LUNDIS du groupe M : A.T.H.

Le premier lundi de chaque mois

de 14h 15 à 16h 30, à l'IREM Paris-7,

Université Denis Diderot, tour 55-56, 3ème étage - salle 8.

Le thème choisi pour l'année 95-96 est :

La Construction de l'Algèbre

Le Rôle de la Géométrie

Pour chaque séance nous envisageons la rencontre d'un auteur par la lecture de textes significatifs et une réflexion commune sur la possibilité de leur utilisation en classe.

2 octobre : **Albert Girard** et son "Invention nouvelle en Algèbre" (1629).

6 novembre : **Michel Stifel** (1487 - 1567), auteur de l'"Arithmetica Integra", ouvrage de référence pour les algébristes de la Renaissance.

4 décembre : **Simon Stevin** (1548-1620)

Dates suivantes : 8 janvier, 5 février, 1er avril, 6 mai, 3 juin 1996.

Nous envisageons l'étude d'autres auteurs sur le même thème; vos propositions seront les bienvenues.

IREM PARIS VII - DENIS DIDEROT

groupe M : A.T.H.

Reproduction de textes anciens

Les brochures suivantes viennent de paraître :

CLAIRAUT : "Elemens d'algèbre" brochure n° 8 41F. (+ port)

Comme LACROIX, dont nous avons publié le"*traité de calcul des probabilités,* CLAIRAUT fût , non seulement un mathématicien précoce qui joua un rôle important dans de nombreuses branches des mathématiques mais il fit également preuve de qualités pédagogiques évidentes, comme en témoigne cet ouvrage. " *Il m'a paru beaucoup plus à propos d'occuper continuellement mes lecteurs à résoudre des problèmes; c'est à dire, ..., découvrir quelqie vérité inconnue.*"

FRENET : "Exercices de calcul infinitésimal" brochure n° 9 44F. (+ port)

Destinée aux élèves des grandes écoles et des facultés des sciences, cette première édition parut en 1856 et fut complétée et rééditée pendant un demi-siècle. Il semble bien que ce soit, sur le sujet, le premier livre d'exercices avec corrigés, mis à la disposition des étudiants français.

MASCHERONI : "Géométrie pour les arpenteurs" brochure n° 10 21F. (+ port)

Cet ouvrage peut être considéré de plusieurs manières :

— outil destiné aux arpenteurs qui y trouveront, sous un volume réduit, des méthodes, des résultats utiles. "Petit ouvrage " pratique qui, de plus, est rarement cité.

— ouvrage destiné aux étudiants en mathématiques qui pour qui ce sera un livre d'exercices, puisque, suivant la volonté de l'auteur, les théorèmes sont donnés sans démonstration. "*La recherche de ces démonstrations sera, pour les élèves, un exercice utile et agréable.*"

C'est donc un ouvrage qui concerne les étudiants comme les enseignants .

Comité de rédaction:

Philippe BRIN	*Lycée Technique E.Branly Créteil* *Animateur à l' IREM Paris VII*
Martine BÜHLER	*Lycée Flora Tristan Noisy le Grand* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Michèle GREGOIRE	*Lycée Lavoisier Paris* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Maryvonne HALLEZ	*Collège P. Bert Paris* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Marie Françoise JOZEAU	*Lycée G. de Nerval Luzarches* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Michèle LACOMBE	*Lycée J. Monod Clamart* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Anne MICHEL-PAJUS	*Lycée C. Bernard Paris* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Michel SERFATI	*Lycée Technique Raspail Paris* *Animateur à l' IREM Paris VII*
Jean Luc VERLEY	*Université Paris VII* *IREM Paris VII*

avec la collaboration

d'Helia GALCERAN

Lycée Lavoisier Paris

Courrier à adresser à : Groupe M: A.T.H.
IREM de l'université Denis DIDEROT
Paris VII
Tour 55-56 3ème etage
75005 PARIS

Pour échanger expériences et réflexions à propos de

l'histoire et l'enseignement des mathématiques

M.: *Mathématiques*
A. *Approche par les*
T. *Textes*
H. *Historiques*

SOMMAIRE

En vente au prix de 5,00 Euros

Editeur : IREM
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Dépôt légal : Juillet 1995
ISBN : 2–88612–091–4
IREM Université Paris VII Denis Diderot
Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel : 01 44 27 53 83