

**UNE RECHERCHE SUR LE LOGICIEL DERIVE**

**RAPPORT**

**EQUIPE DIDIREM**

**DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**

**UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT**



**ETUDE DES MODES D'APPROPRIATION DE CALCULATRICES  
COMPLEXES PAR DES ELEVES DE LYCEE ET DES  
STRATEGIES DEVELOPPEES PAR LES ENSEIGNANTS POUR  
L'INTEGRATION DE CES OUTILS A L'ENSEIGNEMENT DES  
MATHEMATIQUES**

**RAPPORT D'ETAPE**



## INTRODUCTION

Les logiciels incluant une composante de calcul symbolique, que nous nommerons dans ce rapport : "systèmes de mathématiques symboliques" ou plus brièvement SMS, reprenant la terminologie introduite par J.F.Canet dans (Canet, 1994) étaient, jusqu'à il y a peu, réservés aux mathématiciens ou utilisateurs professionnels des mathématiques. Ces dernières années ont vu l'apparition de logiciels, comme le logiciel DERIVE, moins puissants mais a priori suffisamment puissants pour les besoins de l'enseignement secondaire, implémentables sur des micro-ordinateurs relativement modestes voire des calculatrices et enfin, d'un coût raisonnable.

D'une part, l'enseignement ne peut rester aveugle à cette évolution, d'autre part, on imagine aisément que l'intégration réussie de SMS ne va pas aller de soi. Elle risque de remettre en cause, plus profondément encore que l'introduction des calculatrices numériques puis graphiques, les équilibres établis au sein des contenus d'enseignement, notamment les équilibres entre les composantes conceptuelles et techniques de l'enseignement des mathématiques.

Pour soutenir et guider efficacement les évolutions nécessaires ou inévitables, des travaux d'innovation et de recherche sont nécessaires. Il importe de se donner les moyens de dépasser dans ce domaine comme dans d'autres le registre de l'opinion pour arriver à cerner ce que peuvent réellement apporter les SMS à l'enseignement des mathématiques, et ce en fonction des niveaux d'enseignement concernés, pour préciser les conditions d'une gestion efficace de ces nouveaux outils, pour déterminer des formations appropriées pour les enseignants.

C'est dans cette problématique que se situe la recherche menée par l'équipe DIDIREM dans le cadre d'une convention passée en 1993 avec la Direction des Lycées et Collèges du Ministère de l'Éducation Nationale, convention reprise ensuite par la Direction de l'Information et des Technologies Nouvelles (D.I.T.E.N.) de ce même Ministère. Plus précisément, il s'agit ici d'essayer de cerner en quoi l'utilisation d'un logiciel comme DERIVE est susceptible d'agir sur les conceptions et pratiques mathématiques des élèves.

Nous avons fait le choix de nous placer, dans cette recherche, dans des conditions a priori favorables. Nous travaillons principalement avec les élèves d'enseignants familiers avec le logiciel et l'ayant intégré depuis plus d'un an à leur enseignement. Il ne s'agit pas ici en effet d'étudier directement le problème de la diffusion de l'utilisation de DERIVE mais, en amont, de préciser ses potentialités, de cerner des conditions de réalisation de ces potentialités, d'identifier d'éventuels obstacles, de battre en brèche éventuellement certaines idées naïves. Pour une telle étude, le travail avec des "experts" nous semble particulièrement bien adapté.

Sur le plan méthodologique, il nous a semblé nécessaire de croiser dans cette recherche des méthodologies internes et externes. Les questionnaires associés à la méthodologie externe sont destinés à donner une vision relativement large de l'effet sur les représentations et les pratiques. Mais il nous a semblé nécessaire de croiser ce type de données - opinions sur les représentations et pratiques, leur évolution, fournies par les différents acteurs - avec des données concernant directement les pratiques elles-mêmes. C'est cette réalité des pratiques que nous essayons d'approcher via la méthodologie interne d'analyse fine du fonctionnement de quelques situations "typiques". Toujours pour nous situer dans les conditions a priori les plus favorables, nous avons choisis de nous limiter à des situations présentées par des "experts" comme susceptibles de mettre en jeu telle ou telle potentialité du logiciel pour l'enseignement des mathématiques. Les experts sont ici les membres du groupe "Calcul Formel" de la D.I.T.E.N., groupe qui fonctionne depuis trois ans, sous la direction d'Anne Hirlimann.

Précisons que, de manière générale, la recherche est menée en collaboration étroite avec ce groupe aux réunions duquel Michèle Artigue, membre de l'Équipe DIDIREM et responsable de cette recherche, participe depuis octobre 1992.

La recherche s'est déroulée en trois phases :

- La première phase était une phase de mise au point des instruments de la recherche : repérage bibliographique et mise au point d'une grille d'analyse des publications, mise au point d'une grille d'observation et d'analyse des situations, mise à l'essai de la grille sur quelques situations a priori adaptées au niveau collège et lycée, préparation et test des premiers questionnaires, analyse des données recueillies.
- La deuxième phase, est celle où, les instruments ayant été définitivement mis au point, les questionnaires ont été soumis à un échantillon plus large d'enseignants et d'élèves et où l'ensemble des situations "typiques" retenues a fait l'objet d'une expérimentation.
- La troisième phase a été classiquement consacrée à l'analyse des données recueillies dans la deuxième phase et à la rédaction du rapport final.

Ce rapport est constitué de trois parties. La première est consacrée aux questionnaires, la seconde aux observations de situations de classe menées au niveau collège et au niveau lycée. La troisième partie intitulée : synthèse et conclusions résume les principaux apports du travail et propose des pistes de développement ultérieur. Le rapport s'achève enfin par un appendice bibliographique. Des annexes rassemblent des données qui alourdiraient le document principal.

Nous voudrions pour terminer cette introduction remercier tous les professeurs qui ont collaboré à cette recherche, en acceptant de remplir les questionnaires enseignants et de soumettre à leurs élèves les questionnaires élèves. Nous voudrions aussi remercier les membres du groupe "Calcul Formel" de la D.I.T.E.N. dont le soutien a été essentiel au développement de cette recherche et avec lesquels nous souhaitons continuer à collaborer, et tout particulièrement bien sûr, ceux qui nous ont proposé des situations pour l'observation et ont accepté de nous accueillir dans leurs classes : Gilles Aldon, Philippe Bethune, Michèle Dupérier, Guy Juge, Etienne Meyer et Michel Rousselet. Nous remercions aussi les professeurs étrangers, présents dans notre équipe en 1993-94, qui ont collaboré aux observations de classes : Rosa Maria Farfan, Maria Alice Gravina et Marie Winter.

Michèle Artigue, Maha Abboud, Jean Philippe Drouhard, Jean-Baptiste Lagrange

# **PREMIÈRE PARTIE**

## **LE RECUEIL D'INFORMATION PAR QUESTIONNAIRES**

### **I. INTRODUCTION**

Les questionnaires, comme nous l'avons précisé dans l'introduction, ont pour objectif de nous fournir une vision relativement large de l'effet de l'utilisation de DERIVE sur les représentations et pratiques de l'enseignement secondaire.

#### **I.1 LE QUESTIONNAIRE ÉLÈVES**

Dans la première phase de la recherche, nous avons élaboré, en concertation avec le groupe "Calcul Formel" de la D.I.T.E.N. (groupe D.I.T.E.N. dans la suite), une première version du questionnaire élèves. Cette version a été passée sur les élèves de classes des membres du groupe, à la fin de l'année scolaire. Nous avons ainsi obtenu des réponses de 8 classes : quatre classes de troisième, une classe de seconde, une classe de première S, deux classes de terminale C, représentatives des divers niveaux de l'expérimentation.

Pour cette première version, exploratoire, les réponses aux questions ont volontairement été laissées relativement ouvertes. C'est à partir de l'analyse des réponses à cette première version qu'a été élaborée la deuxième version. Dans cette version, davantage de questions sont fermées, de façon à faciliter le traitement quantitatif des réponses.

#### **I.2 LE QUESTIONNAIRE PROFESSEURS**

La recherche a pour objet les représentations et pratiques mathématiques des élèves. Il a semblé cependant important, pour compléter l'interprétation des réponses fournies, de rechercher auprès des enseignants des classes concernées, des éléments d'information sur l'intégration du logiciel DERIVE. C'est pourquoi, nous avons aussi élaboré un questionnaire professeurs, toujours en collaboration avec les membres du groupe D.I.T.E.N.

#### **I.3 LES ENSEIGNANTS CONTACTÉS ET LES RÉPONSES OBTENUES**

La deuxième version du questionnaire élèves et le questionnaire professeurs étaient destinés à être soumis, à la fin l'année scolaire 1994, à un large ensemble de classes. Dans un premier temps, nous avons constitué une première liste de 14 enseignants de mathématiques, répartis sur toute la France, familiers de l'utilisation d'environnements informatiques et ayant plusieurs années d'expérience DERIVE, acceptant de participer à l'opération "questionnaires". Cet échantillon a été constitué en s'appuyant sur le réseau IREM et plus particulièrement la commission inter-IREM "Informatique", via les membres du groupe "Calcul Formel" de la D.I.T.E.N. Dans un second temps, une seconde liste de 14 enseignants de mathématiques a été constituée à partir d'informations données lors d'une réunion nationale de formation de responsables académiques. Nous disposons alors, en comptant les 12 membres du groupe D.I.T.E.N. pouvant participer à l'opération, de 40 professeurs volontaires. Nous avons adjoint, à ce groupe, à titre de comparaison, 15 enseignants suivant sur l'année une formation à DERIVE avec l'un des membres du groupe "Calcul Formel" et n'ayant pas auparavant utilisé

DERIVE dans leurs classes, et deux professeurs s'étant fait connaître par la suite. L'échantillon final était donc constitué de 57 enseignants.

Malgré les précautions prises, le taux de retour n'a pas été celui que nous espérions. Les réponses des élèves de 20 classes ont été obtenues, et 25 questionnaires professeurs ont été considérés comme utiles, c'est-à-dire remplis par des professeurs dont les élèves ont effectivement utilisé DERIVE. Nous précisons ces retours catégorie par catégorie, dans le tableau de la page suivante.

Nous avons au début du mois de septembre adressé un courrier à toutes les personnes dont nous étions sans nouvelles, en leur demandant de nous indiquer quelles étaient les raisons de leur désistement. L'ensemble des lettres reçues renvoie à des raisons différentes :

- Pour les professeurs stagiaires, très majoritairement, ceux qui répondent indiquent qu'ils ne se sont pas sentis assez sûrs d'eux à l'issue de la formation pour tenter, dès cette première année, quelque chose dans leur classe.
- Pour les autres catégories, la raison la plus fréquemment avancée est la suivante : des difficultés d'organisation les ont empêchés d'utiliser DERIVE un nombre suffisant de séances pour que la passation du questionnaire ait une quelconque signification. Quelques uns également n'ont pas pu faire passer le questionnaire élève, ou n'ont pu le récupérer, la passation étant prévue à la fin de l'année scolaire, du fait de perturbations d'emplois du temps.

| Origine            | Nombre de personnes contactées | Nombre de réponses questionnaire prof | Nombre de professeurs ayant renvoyé des questionnaires élève |
|--------------------|--------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Groupe ministériel | 12                             | 12                                    | 8 (9 classes)                                                |
| Première liste     | 14                             | 4                                     | 5                                                            |
| Stage national     | 14                             | 6 dont 5 utiles                       | 6                                                            |
| Autres             | 17                             | 10 dont 4 utiles                      | 0                                                            |
| Total              | 57                             | 25 utiles                             | 19 (20 classes)                                              |

## **I.4 LES RÉSULTATS**

Dans cette partie, nous présentons d'abord un résumé des résultats obtenus à partir de réponses à la première version du questionnaire élève. Nous montrons ensuite comment cette analyse a conduit à la seconde version du questionnaire élève, puis dans une troisième partie les résultats de l'analyse des réponses à ce questionnaire, analyse réalisée en utilisant la méthodologie, notamment d'analyse statistique, mise au point sur le premier questionnaire. La quatrième partie porte sur le questionnaire professeurs. En conclusion de cette partie, nous donnons une synthèse des résultats obtenus à partir des deux versions du questionnaire élèves et des indications supplémentaires obtenues par le questionnaire professeurs.

## **II. RÉSULTATS DE LA PREMIÈRE VERSION DU QUESTIONNAIRE ÉLÈVES**

Voici le texte du questionnaire passé dans les 8 classes des professeurs du groupe D.I.T.E.N. à la fin de la première année d'expérimentation (92-93), puis une analyse des réponses obtenues.

## II.1 LE TEXTE DU QUESTIONNAIRE

1. Classe : 2. Etablissement :

3. Sexe : F G

4. Quelle calculatrice avez-vous ? Oui Non

Vous permet-elle de :

5. Tracer des Graphiques ? Oui Non

6. Faire du Calcul Formel ? Oui Non

(par exemple développer  $(2x+1)(x+3)$ )

Si oui, l'utilisez-vous pour :

7. Tracer des Graphiques ? Oui Non

8. Faire du Calcul Formel ? Oui Non

L'utilisez-vous :

9. En cours de maths ? Souvent Rarement

10. A la maison ? Souvent Rarement

11. Pouvez-vous utiliser un micro-ordinateur en dehors du collège ou du lycée ? Oui Non

12. Si oui, l'utilisez-vous :

Souvent Assez Souvent Rarement Jamais

13. Pour quoi faire ?

14. Avez-vous utilisé des logiciels en mathématiques avant cette année scolaire ?

Plus de 10 fois Entre 3 et 10 fois 1 ou 2 fois Jamais

15. Aimez-vous utiliser des logiciels en cours de mathématiques ?

Oui Non Indifférent

16. Pourquoi ?

17. C'est votre première année d'utilisation de DERIVE : Oui Non

Cette année, vous avez utilisé DERIVE (préciser approximativement le nombre d'heures, le cas échéant) :

18. En classe : heures

19. Au C.D.I. : heures

20. En atelier ou club : heures

21. A la maison : heures

22. Autres (préciser) :        heures

A votre avis, apprendre à se débrouiller avec DERIVE, c'est :

23. Facile        Oui    Non

24. Rapide        Oui    Non

A votre avis, apprendre à bien se servir de DERIVE, c'est :

25. Facile        Oui    Non

26. Rapide        Oui    Non

27. Avez-vous rencontré des difficultés pour apprendre à vous servir de DERIVE ?

Oui    Non

28. Si oui, donnez des exemples :

29. Vous sentez-vous maintenant à l'aise avec DERIVE ?    Oui    Non

30. Quelles commandes utilisez-vous ?

Notez la difficulté pour vous des apprentissages suivants (de 1 = facile à 10 = difficile)

31. (apprentissage au choix de l'enseignant : difficulté moyenne))

32. (apprentissage au choix de l'enseignant : difficile)

33. Apprendre à se servir de votre calculatrice

34. (apprentissage au choix de l'enseignant : facile)

35. Apprendre à utiliser DERIVE

36. Dans ce que DERIVE sait faire, qu'est-ce qui vous paraît le plus étonnant ?

37. Si l'on pouvait ajouter des possibilités à DERIVE, en priorité vous souhaiteriez :

38. DERIVE peut-il vous aider à faire des mathématiques ?

Oui    Non    Sans Opinion

39. Pour quoi faire et comment ?

40. A votre avis, est-ce que c'est différent de faire des mathématiques avec DERIVE ?

Oui Non Sans Opinion

41. Pourquoi ?

42. Est-ce que vous aimeriez avoir DERIVE en permanence pour faire des mathématiques ?

Oui Non Sans Opinion

43. DERIVE peut-il parfois donner des résultats faux ? Oui Non

44. Sur quoi fondez-vous votre opinion ?

45. Parmi les activités avec DERIVE, dites celles qui vous ont le plus intéressé(e) et pourquoi :

46. Parmi les activités avec DERIVE, dites celles qui vous ont le moins intéressé(e) et pourquoi :

47. Y-a-t-il des choses que vous avez l'impression d'avoir mieux comprises et apprises grâce aux activités avec DERIVE ? Si oui, lesquelles ?

48. Est-ce que vous aimeriez pouvoir utiliser DERIVE pendant les contrôles ?

Oui Non Sans Opinion

49. Pourquoi ?

50. Votre prof de maths vous laisse le choix pour le prochain contrôle : avoir ou non DERIVE, que choisissez-vous ?

Avoir DERIVE Ne pas avoir DERIVE Sans Opinion

51. Pourquoi ?

Pour chacune des phrases suivantes dites si vous êtes :

Tout à fait d'accord (1) Plutôt d'accord (2) Plutôt pas d'accord (3) Pas du tout d'accord (4) Sans Opinion (5)

|                                                                                                                                        |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 52. Avec DERIVE, même si on a des difficultés avec le calcul littéral, on peut faire des mathématiques                                 |  |
| 53. Avec DERIVE, il n'y a plus besoin d'apprendre à calculer ou à tracer des courbes, il le fait à notre place                         |  |
| 54. Ca ne sert à rien de travailler avec DERIVE puisqu'aux contrôles et aux examens, il faut rédiger les calculs et les démonstrations |  |

|                                                                                                |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 55.Quand on utilise DERIVE, il faut bien organiser son travail sinon on perd beaucoup de temps |  |
| 56.DERIVE, ça donne envie de faire des mathématiques                                           |  |
| 57.DERIVE, c'est compliqué et ça ne sert pas à grand chose pour apprendre des mathématiques    |  |
| 58.Quand DERIVE ne donne pas de réponse, c'est que le problème n'a pas de solution             |  |
| 59.DERIVE c'est bien pour se donner des idées dans des problèmes difficiles                    |  |
| 60.DERIVE c'est bien pour contrôler ses réponses                                               |  |
| 61.DERIVE c'est bien pour découvrir des règles de calcul                                       |  |
| 62.DERIVE c'est bien pour exécuter les calculs pénibles                                        |  |
| 63.DERIVE, ça permet de ne pas se noyer dans les calculs quand on résout un problème           |  |

## **II.2 ANALYSE DES RÉPONSES**

Nous rappelons ci-dessous les résultats les plus marquants des premières analyses effectuées. Ces résultats ont été présentés de façon détaillée dans le rapport intermédiaire remis au ministère en décembre 1994.

### **ÉQUIPEMENT EN CALCULATRICES ET UTILISATIONS** **(QUESTIONS 2 À 10)**

Nous avons noté que l'équipement est cohérent avec le niveau des classes, et que les calculatrices sont souvent utilisées à la maison aussi bien qu'en classe (autour de 80%). Seules les classes de Terminale présentaient un score d'utilisation "souvent" plus important "à la maison" qu'en classe.

### **POSSIBILITÉS D'ACCÈS A UN ORDINATEUR ET UTILISATIONS** **(QUESTIONS 11 À 14)**

Les possibilités d'accès à l'ordinateur semblaient élevées, ce qui pouvait indiquer une origine sociale plutôt favorisée. Nous avons cependant noté une utilisation peu intensive des machines, les utilisations principales étant le jeu et le traitement de texte, plus rarement celle de logiciels d'apprentissage scolaire.

### **LES LOGICIELS EN MATHÉMATIQUES** **(QUESTIONS 14 À 16)**

Sauf dans le cas des deux classes de 3ème du collège d'Herblay, l'utilisation antérieure de logiciels en mathématiques semblait marginale. Les élèves de troisième étaient dans leur grande majorité favorables à cette utilisation, les avis étant plus partagés dans les autres classes. Même si les utilisations de l'ordinateur étaient le plus souvent appréciées du fait du changement de pédagogie qu'elles impliquaient, et du rapport différent aux mathématiques qu'elles pouvaient instituer, elle ne semblaient pas apporter, selon l'opinion de ces élèves, une aide décisive à leur compréhension des mathématiques.

## **RENCONTRE AVEC DERIVE ET FAMILIARISATION**

### **(QUESTIONS 17 À 35)**

Nous avons constaté un nombre d'heures d'utilisation de DERIVE en classe très variable d'une classe à l'autre. Des utilisations "à la maison" pouvaient exister pour des élèves isolés qui annonçaient un nombre d'heures d'utilisation important (80 h). Les autres utilisations étaient très peu rencontrées.

Apprendre à "bien se servir" de DERIVE était généralement considéré comme moins facile et moins rapide qu'apprendre à "se débrouiller" avec le logiciel. Cette différence était plus marquée dans les classes de Première et de Terminale ; nous l'avons expliquée par le fait que ces élèves avaient pu rencontrer des usages du logiciel, particulièrement en analyse et en trigonométrie, impliquant une plus grande complexité de mise en oeuvre.

Le rangement suivant la moyenne des indices de difficultés ne faisait apparaître l'apprentissage de DERIVE ni comme particulièrement facile, ni comme exceptionnellement difficile, mais généralement comme plus difficile que l'apprentissage de la calculatrice.

## **PERCEPTION DES POSSIBILITÉS DE DERIVE ET DE SES LIMITES**

### **(QUESTIONS 36 ET 37)**

La majorité des fonctionnalités décrites comme "*étonnantes*" n'étaient pas spécifiques de DERIVE : concernant la rapidité et la complexité des calculs, ainsi que le graphisme, on aurait pu les attribuer à des solveurs, ou à des grapheurs purement numériques, ou à des calculatrices. Peu de réponses témoignaient d'une meilleure conscience de l'apport spécifique du calcul symbolique.

Les propositions de "possibilités à ajouter" allaient dans quatre directions : augmenter l'ergonomie du logiciel, rendre le logiciel capable d'accomplir aussi la part de la tâche qui, dans l'état actuel, reste à la charge de l'élève (mettre en équation, rédiger...), l'explicitation du processus de calcul, faire "tout" avec DERIVE (de la géométrie, de la physique, des langues).

## **DERIVE, L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES**

### **MATHÉMATIQUES (QUESTIONS 38 À 42)**

Une série de questions libres permettait d'apprécier qualitativement la façon dont les élèves se représentaient les apports possibles de DERIVE aux apprentissages en mathématiques. Nous avons classé ces réponses en trois groupes. Dans le premier groupe, les élèves considéraient naïvement que la manipulation de DERIVE pourrait se substituer à l'activité mathématique habituelle. Dans le second groupe, les élèves insistaient sur la démarche de calcul, par opposition au résultat, et s'interrogeaient sur l'apport de DERIVE dans ce cadre. Dans le troisième groupe, les élèves soulignaient les apports possibles de DERIVE à une pratique plus réflexive et conceptuelle des mathématiques. Nous avons constaté que les élèves des classes de troisième étaient plus présents dans la première et la troisième direction : nous avons interprété ceci par la coexistence d'une part d'élèves ayant une conception "naïve" de l'algèbre (l'utilisation de DERIVE ayant été centrée sur ce domaine), d'autre part d'élèves dominant suffisamment l'algèbre enseignée à ce niveau pour en envisager une pratique plus conceptuelle.

## **ADHÉSION À DES OPINIONS SUR DERIVE**

### **(QUESTIONS 52 À 63)**

Il s'agissait d'une série de 13 opinions pour lesquelles les élèves devaient indiquer leur degré d'accord (de "Pas du tout d'accord" à "Tout à fait d'accord"). Nous avons calculé un

pourcentage d'adhésion moyen dans les différentes classes, et montré que les opinions se répartissaient ainsi en quatre classes principales :

- Les opinions où DERIVE apparaissait comme une aide à la démarche de calcul (*se donner des idées, exécuter les calculs pénibles, contrôler les réponses...*) recueillaient un accord général.
- Les opinions où DERIVE apparaissait comme une aide mais comme une aide plus globale et pouvant impliquer une modification de démarche (*on peut réussir même si on a des difficultés, ça permet de ne pas se noyer, il faut organiser son travail, ...*) avaient un score moins nettement positif.
- Les opinions impliquant DERIVE dans une pratique plus ouverte et plus "conceptuelle" des mathématiques (*ça donne envie, c'est bien pour découvrir, ça aide à comprendre...*) obtenaient des scores moyens avec parfois une fréquence élevée de non réponse ou de sans-opinion.
- Les opinions négatives, enfin, (*Faire un problème avec DERIVE c'est tricher, DERIVE c'est compliqué...*) recueillaient un désaccord assez général.

### II.3 LE DÉPOUILLEMENT DES QUESTIONS FERMÉES À L'AIDE DE L'ANALYSE IMPLICATIVE

Après cette première analyse, nous avons voulu dépasser le simple constat, peu explicatif, d'une hiérarchie des opinions en fonction d'un degré moyen d'adhésion sur la population. Il nous a semblé intéressant d'organiser les opinions en fonction de la simultanéité de leur occurrence chez les élèves : deux opinions *a* et *b* pourraient ainsi être reliées si, pour "presque chaque élève", le degré d'adhésion à *a* était "peu différent" du degré d'adhésion à *b*. Parmi les méthodes les plus courantes en didactique, nous avons retenu l'analyse implicative (Gras, 1992) pour les raisons suivantes :

- Le calcul de coefficients de corrélation ou de  $\chi^2$  aurait permis de faire apparaître des relations de dépendance entre opinions. L'analyse implicative présentait cependant l'avantage d'établir une relation non symétrique entre les opinions et de les organiser dans un graphe.
- L'analyse factorielle des correspondances aurait fourni une représentation graphique faisant apparaître des proximités entre élèves, de par le degré d'adhésion qu'ils exprimaient aux différentes opinions. Celle-ci nous aurait permis de dégager des groupes d'élèves ayant des profils proches. Néanmoins, les graphes d'implication nous ont paru pouvoir apporter plus d'informations sur l'organisation des représentations.

La notion de base en analyse implicative est l'intensité d'implication. L'intensité d'implication d'une opinion *a* vers l'opinion *b* est une mesure de la propension à adhérer à *b* quand on adhère à *a*. Si on a une intensité implicative significative de *a* vers *b*, cela signifie qu'une personne adhérant à *a* adhérera significativement plus à *b* que la personne moyenne. La relation d'implication se représente dans un graphe orienté : une opinion largement partagée "se nourrit" d'opinions plus minoritaires, ce qui permet de dégager des "filiations" particulièrement informatives quand elles sont interprétées en terme de représentation.

Dans ses applications antérieures, l'analyse implicative a concerné surtout des variables binaires. Les questions à quatre modalités de réponse du questionnaire DERIVE nous ont

conduit à des propositions nouvelles concernant le calcul de l'intensité d'implication, et l'interprétation de la relation d'implication dans le cas de ces variables (Lagrange, 1995).

En appliquant la méthode sur la première version, nous avons obtenu des filiations intéressantes, d'une part entre opinions et d'autre part entre classes et opinions. Nous résumons ci-dessous ces résultats. On trouvera une présentation plus détaillée dans (Lagrange, 1994).

#### **LES IMPLICATIONS OPINION --> OPINION**

Nous avons obtenu quatre filiations.

- la première filiation est une filiation de refus de DERIVE, avec deux tendances : dans la première, le logiciel est perçu comme totalement divergent par rapport aux apprentissages mathématiques, alors que dans la deuxième, le refus semble résulter d'une centration sur l'aspect technique de l'activité mathématique.
- la seconde filiation est orientée vers l'utilisation de DERIVE pour "sécuriser" la démarche de calcul.
- dans une troisième filiation, DERIVE apparaît également comme un auxiliaire pour la démarche de calcul, mais l'apport de DERIVE est davantage perçu dans la construction de la démarche, que pour une validation a posteriori.
- la quatrième filiation est plus nettement "conceptuelle".

Les moyennes sur l'effectif des différentes opinions font apparaître que la filiation de "refus" et la filiation "conceptuelle" sont minoritaires par rapport à celles qui sont centrées sur les apports de DERIVE à la démarche de calcul.

#### **LES IMPLICATIONS CLASSE --> OPINION**

Dans les réponses des classes de Troisième à cette première version du questionnaire, on constatait deux tendances. L'une s'orientait vers des filiations centrées soit sur la technique, soit sur un apport faible à la démarche et l'autre vers la filiation conceptuelle. On peut donc penser que ces deux classes de Troisième comprennent des élèves très distincts. Les uns réduisent le calcul à la production d'un résultat, les autres dominent suffisamment les objets algébriques introduits à ce niveau pour envisager d'utiliser DERIVE pour une pratique plus "conceptuelle" des mathématiques.

Les implications issues des classes de Terminale montraient que DERIVE y est vu, plus que dans d'autres classes, comme un auxiliaire pour sécuriser la démarche ou pour construire cette démarche.

#### **INTÉRÊT DE LA MÉTHODE**

Cette organisation des opinions et des classes en filiations a ainsi confirmé l'impression qualitative issue des réponses aux questions libres de la partie "DERIVE, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques". De plus, les filiations dégagées sont reliées aux représentations de l'apport de DERIVE aux apprentissages mathématiques et nous avons pu les mettre en rapport avec les comportements observés dans les séquences en classe. C'est pourquoi nous avons décidé de limiter, dans le second questionnaire, les questions à réponses libres, et de privilégier des questions fermées susceptibles d'être traitées par l'analyse implicite.

### III. PRÉSENTATION DE LA SECONDE VERSION DU QUESTIONNAIRE ÉLÈVE

La seconde version comporte certaines modifications par rapport à la première version, en fonction de l'analyse rappelée ci-dessus. Nous indiquons ici ces modifications, partie par partie :

#### III.1 ENVIRONNEMENT TECHNIQUE DE L'ÉLÈVE

4. Quelle calculatrice utilisez-vous actuellement ?

*Sans changement.*

L'utilisez-vous

5. pour tracer des graphiques ?      oui ☐ non ☐  
6. pour programmer ? oui ☐ non ☐

*Nous avons supprimé les questions sur les possibilités des calculatrices, les élèves ne connaissant pas toujours ces possibilités.*

*La question sur l'utilisation pour faire du calcul formel avait surtout montré des confusions à ce sujet (de nombreux élèves indiquaient qu'ils utilisaient leurs TI81 pour faire du calcul formel). Nous ne l'avons pas conservée. Par contre nous avons inclus une question sur la programmation de façon à repérer les élèves qui font un usage plus poussé de leur calculatrice.*

L'utilisez-vous

7. en cours de math ? souvent ☐ rarement ☐  
8. à la maison ?      souvent ☐ rarement ☐

*Sans changement.*

- | Utilisez vous                   | un ordinateur en                  | dehors du lycée                        | pour                             |
|---------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------|
| 9. écrire des textes ?          |                                   |                                        |                                  |
| Jamais <input type="checkbox"/> | Rarement <input type="checkbox"/> | Assez souvent <input type="checkbox"/> | Souvent <input type="checkbox"/> |
| 10. jouer ?                     |                                   |                                        |                                  |
| Jamais <input type="checkbox"/> | Rarement <input type="checkbox"/> | Assez souvent <input type="checkbox"/> | Souvent <input type="checkbox"/> |
| 11. faire des mathématiques ?   |                                   |                                        |                                  |
| Jamais <input type="checkbox"/> | Rarement <input type="checkbox"/> | Assez souvent <input type="checkbox"/> | Souvent <input type="checkbox"/> |
| 12. autres (précisez) :         |                                   |                                        |                                  |

.....  
Rarement ☐ Assez souvent ☐ Souvent ☐

*A partir des réponses à la première version, nous avons "fermé" cette question, en proposant les usages les plus souvent constatés. Il nous sera ainsi plus facile d'opérer un traitement quantitatif.*

13. Avez-vous utilisé en classe avant cette année scolaire des logiciels de mathématiques  
Jamais ☐ Une ou deux fois ☐ Entre trois et dix fois ☐ Plus de dix fois ☐

14. Parmi les opinions suivantes, cochez les 3 opinions avec lesquelles vous êtes le plus en accord.

- ☐ J'aime utiliser les logiciels en classe de math, parce que ça change du cours habituel  
☐ J'aime utiliser les logiciels en classe de math, parce que ça aide à comprendre les maths

- ☐ J'aime utiliser les logiciels en classe de math, parce que ça fait voir les maths autrement
- ☐ Utiliser les logiciels en classe de math, c'est utile parce que ça apprend à utiliser un ordinateur
- ☐ Utiliser les logiciels en classe de math, c'est utile parce que ça fait gagner du temps
- ☐ Utiliser les logiciels en classe de math, c'est inutile parce que ça ne prépare pas aux examens
- ☐ Utiliser les logiciels en classe de math, ça fait perdre du temps
- ☐ Les logiciels en classe de math, c'est moins commode que la calculatrice
- ☐ Je n'aime pas utiliser les logiciels en classe de math, parce que je n'aime pas l'ordinateur
- ☐ Je n'aime pas utiliser les logiciels en classe de math, parce que les logiciels sont inintéressants.

*Nous avons de même fermé la question sur l'utilisation des logiciels en cours de mathématiques, en reprenant les opinions les plus couramment émises en réponse à la première version. Ce choix doit permettre un traitement par l'analyse implicative.*

### III.2 RENCONTRE AVEC DERIVE ET FAMILIARISATION

Cette année, vous avez utilisé DERIVE (précisez approximativement le nombre d'heures)

15. En classe heures

16. Au CDI heures

17. En atelier ou en club heures

18. A la maison heures

19. Autres, précisez heures

A votre avis, apprendre à se débrouiller avec DERIVE, c'est

20. Facile oui ☐ non ☐

21. Rapide oui ☐ non ☐

A votre avis, apprendre à bien se servir de DERIVE, c'est

22. Facile oui ☐ non ☐

23. Rapide oui ☐ non ☐

24. Vous sentez-vous maintenant à l'aise avec DERIVE ? oui ☐ non ☐

Cochez une case pour chacun des apprentissages suivants

|                                             | très facile              | plutôt facile            | plutôt difficile         | très difficile           |
|---------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 25.                                         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 26.                                         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 27. Apprendre à utiliser votre calculatrice | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 28.                                         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 29. Apprendre à utiliser DERIVE             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

*Nous avons peu modifié cette partie. Les questions 27 et 28, ainsi que la question 30 de la première version, qui demandaient des exemples de difficultés rencontrées, et de commandes*

*utilisées, ont été supprimées : très peu d'élèves avaient donné des réponses significatives à ces questions.*

### III.3 L'APPORT DE DERIVE AUX APPRENTISSAGE

30. Qu'est ce qui, en algèbre ou en analyse, vous a semblé cette année, le plus difficile à apprendre ?

31. Pensez-vous que DERIVE vous a aidé à l'apprendre ? oui ☐ non ☐

32. Pensez-vous que DERIVE aurait pu vous aider à l'apprendre ? oui ☐ non ☐

Précisez :

*Les questions 38 à 40 de la première version ont été précisées. Nous avons pensé aider l'élève à répondre, en se référant à un apprentissage précis, qui lui a posé le plus de difficultés.*

### III.4 PERCEPTION DES POSSIBILITÉS DE DERIVE ET DE SES LIMITES

33. Dans ce que peut faire DERIVE, qu'est-ce qui vous paraît étonnant, par rapport à votre calculatrice ?

34. Si l'on pouvait ajouter des possibilités à DERIVE, que souhaiteriez-vous en priorité ?

*La question 33 (ex. 36) a été modifiée, de façon à conduire les élèves à centrer leurs réponses de façon plus précise sur les possibilités de DERIVE, par différence avec un autre moyen technologique qui leur est familier.*

*La partie du questionnaire traitant de la fiabilité de DERIVE a été intégrée sous forme "fermée" aux "opinions" de la fin du questionnaire, de façon à ce que les réponses puissent être traitées avec ces opinions.*

### III.5 ACTIVITÉS AVEC DERIVE

35. Parmi les activités faites en classe avec DERIVE, dites celles qui vous ont le plus intéressé, et pourquoi

36. Parmi les activités faites en classe avec DERIVE, dites celles qui vous ont le moins intéressé, et pourquoi

*Sans changement.*

### III.6 DERIVE POUR LES CONTRÔLES

37. Est-ce que vous aimeriez pouvoir utiliser DERIVE tout le temps ? oui ☐ non ☐

38. Votre professeur de mathématiques vous laisse le choix entre utiliser DERIVE ou pas pour le prochain contrôle. Que choisissez-vous ?

Avoir DERIVE ☐ Ne pas avoir DERIVE ☐ Sans opinion ☐

39. Pourquoi ?

*Sans changement.*

### III.7 ADHÉSION À DES OPINIONS SUR DERIVE

Pour chacune des phrases suivantes, cochez la case qui correspond le plus à votre opinion

|                                                                                                                                           | Sans opinion             | Pas du tout d'accord     | Plutôt d'accord          | PasPlutôt d'accord       | Tout à fait d'accord     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 40. Avec DERIVE, même si on a des difficultés en algèbre, on peut faire des mathématiques                                                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 41. Avec DERIVE, il n'y a plus besoin d'apprendre à calculer, il le fait à notre place                                                    | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 42. Ca ne sert à rien de travailler avec DERIVE, puisque, aux contrôles et aux examens, il faut rédiger les calculs et les démonstrations | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 43. Quand on utilise DERIVE, il faut bien organiser son travail, sinon on perd beaucoup de temps                                          | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 44. DERIVE, ça donne envie de faire des mathématiques                                                                                     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 45. DERIVE, ça aide à comprendre les mathématiques                                                                                        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 46. DERIVE, ça complique plus que ça n'aide pour apprendre des mathématiques                                                              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 47. Quand DERIVE ne donne pas de réponse, c'est que le problème n'a pas de solution                                                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 48. DERIVE, c'est bien pour avoir une idée du résultat avant de se lancer dans les calculs                                                | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 49. DERIVE c'est bien pour contrôler ses réponses                                                                                         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 50. DERIVE, c'est bien pour découvrir des règles de calcul                                                                                | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

|                                                                                                            |                          |                          |                          |                          |                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 51. DERIVE, ça aide surtout quand les calculs sont longs et pénibles                                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 52. DERIVE, ça permet de résoudre des problèmes sans se perdre dans les calculs                            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 53. Avec DERIVE, on peut résoudre des problèmes différents des exercices habituels                         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 54. DERIVE, ça fait voir les maths autrement                                                               | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 55. DERIVE c'est bien car on peut travailler en même temps sur les équations et les graphiques             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 56. Si les données sont rentrées correctement, on peut faire confiance à 100% au résultat donné par DERIVE | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

*Nous avons ici 17 opinions au lieu de 13 dans la première version. Les questions 48 et 53 ont été précisées par rapport à cette première version. Nous avons inclus 4 questions (45, 53, 54 et 55) visant à proposer un plus large choix relatif à des utilisations "cognitives" de DERIVE : aide à la compréhension, vision différente des problèmes et des mathématiques... Une question (56) sur la fiabilité de DERIVE été incluse (Cf. ci-dessus).*

### III.8 QUESTION OUVERTE

Un camarade d'une autre classe te demande ce qu'on fait de plus en mathématiques avec DERIVE.

57. Que lui réponds-tu ?

58. Quels exemples lui donnes-tu ?

*Nous avons pensé intéressant de proposer également une question ouverte permettant aux élèves d'exprimer une opinion originale par rapport à celles qui sont proposées de façon "fermée".*

## IV. DÉPOUILLEMENT DE LA SECONDE VERSION DU QUESTIONNAIRE ÉLÈVE

Nous exposons ici un dépouillement du questionnaire portant sur l'environnement technologique des élèves, les représentations de l'utilisation de logiciels en mathématiques, l'apprentissage et les représentations de DERIVE. Les résultats obtenus sont très généralement conformes à ceux de la première version du questionnaire que nous avons résumés ci-dessus. Ils portent sur un nombre plus significatif d'élèves (459 dans 20 classes contre 180 dans 8 classes) et bénéficient de la méthodologie de dépouillement que nous avons construite pour la première version. C'est pourquoi nous les présentons en détail ci-dessous. Certaines questions auraient permis de pousser l'étude plus avant pour repérer l'influence des activités menées avec DERIVE sur ces représentations. Sur la durée du contrat, il ne nous a pas été possible d'effectuer ce repérage. Néanmoins, l'étude en profondeur des représentations des élèves que nous présentons ici devrait fournir une base particulièrement solide pour des recherches ultérieures.

### IV.1 LES CLASSES AYANT RÉPONDU AU QUESTIONNAIRE

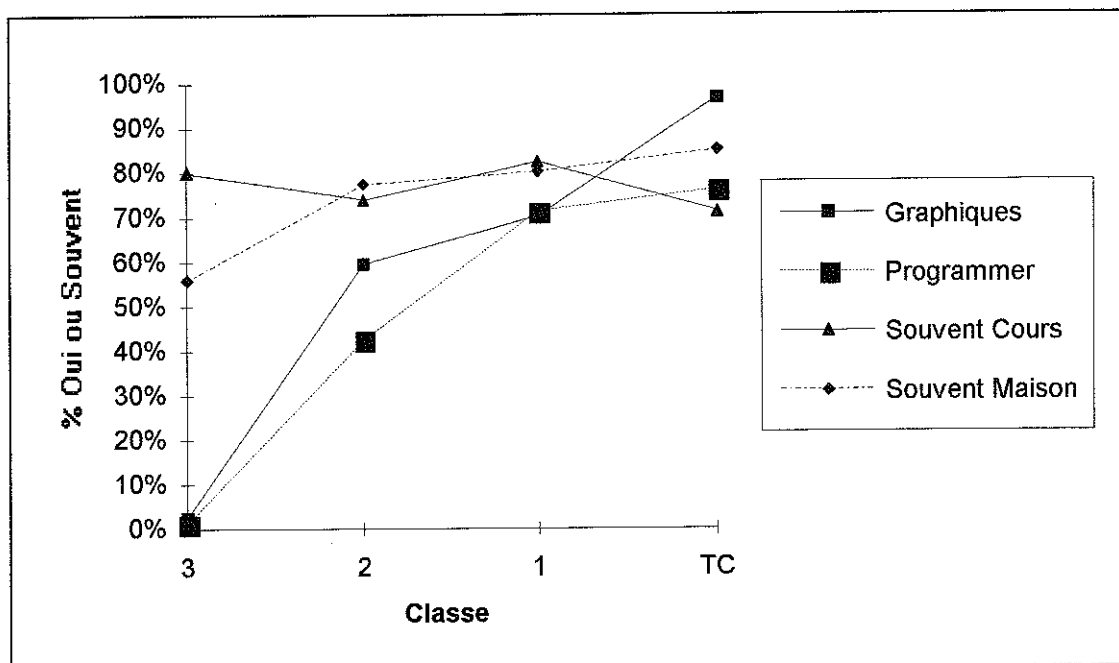
Le tableau ci-dessous donne la répartition des 20 classes, totalisant 459 élèves, ayant répondu au questionnaire. Les classes de Terminale sont les plus nombreuses, mais on a cependant un nombre significatif de classes dans les autres niveaux.

| Établissement      | Académie      | Classe | Filles           | Garçons          | Nb tot |
|--------------------|---------------|--------|------------------|------------------|--------|
| C. G. Duhamel      | Versailles    | 3eA    | 16               | 11               | 27     |
| C. de Rouillac     | Poitiers      | 3eA    | 4                | 5                | 9      |
| C. G. Duhamel      | Versailles    | 3eC    | 18               | 6                | 24     |
| C. Carpeaux        | Lille         | 3eF    | 11               | 4                | 15     |
| L. Mistral         | Aix-Marseille | 2      | 4                | 31               | 35     |
| L. J. Monnet       | Montpellier   | 2      | 15               | 12               | 28     |
| L. J. Perrin       | Lyon          | 2      | 22               | 6                | 28     |
| L. Armand          | Poitiers      | 2e     | 0                | 29               | 29     |
| L. Viète           | Besançon      | 2eC    | 0                | 26               | 26     |
| L. G. Monod        | Versailles    | 1eECO2 | 14               | 5                | 19     |
| L. Sorel           | Caen          | 1eS    | 5                | 15               | 21     |
| L. E. Herriot      | Grenoble      | 1eS    | 7                | 13               | 20     |
| L. J. Brel         | Lyon          | 1S3    | 7                | 23               | 31     |
| L. Voltaire        | Orléans-Tours | T5C    | 14               | 18               | 33     |
| L. Th. Deck        | Strasbourg    | TC     | 9                | 24               | 33     |
| L. Thiers          | Aix-Marseille | TC     | 2                | 13               | 15     |
| L.LPI              | Poitiers      | TC     | 9                | 6                | 15     |
| L. Vx-Condé        | Poitiers      | TC     | 3                | 7                | 10     |
| L. J. Monnet       | Montpellier   | TC4    | 5                | 10               | 16     |
| L. Jehan de Beauce | Orléans-Tours | TE2    | 3                | 22               | 25     |
|                    |               |        | <b>Nb Class.</b> | <b>Nb élèves</b> |        |
| 3ème               |               |        | 4                | 75               |        |
| 2nde               |               |        | 5                | 146              |        |
| 1ère               |               |        | 4                | 91               |        |
| Terminale          |               |        | 7                | 147              |        |
| <b>Totaux</b>      |               |        | <b>20</b>        | <b>459</b>       |        |

## IV.2 ENVIRONNEMENT TECHNIQUE DE L'ÉLÈVE (QUESTIONS 4 À 14)

### ÉQUIPEMENT EN CALCULATRICES ET UTILISATIONS

Nous donnons ici un dépouillement par niveau (3<sup>ème</sup> à Terminale).



Le graphique montre que l'utilisation de la calculatrice pour tracer des courbes progresse régulièrement, de 0% en troisième à 100% en terminale. La programmation progresse de même jusqu'en Première, où elle atteint 71%, mais augmente peu en Terminale. La progression sur les graphiques n'est pas étonnante. Par contre les niveaux atteints en programmation paraissent élevés.

Les calculatrices sont utilisées souvent en cours, de la troisième à la Terminale. L'utilisation à la maison progresse de 56% en Troisième à 85 % en Terminale. En Terminale, les élèves utilisent la calculatrice davantage à la maison qu'en classe. Nous avons observé cette "inversion" en dépouillant la première version, et nous l'avions attribuée à l'importance prise par le travail personnel à ce niveau.

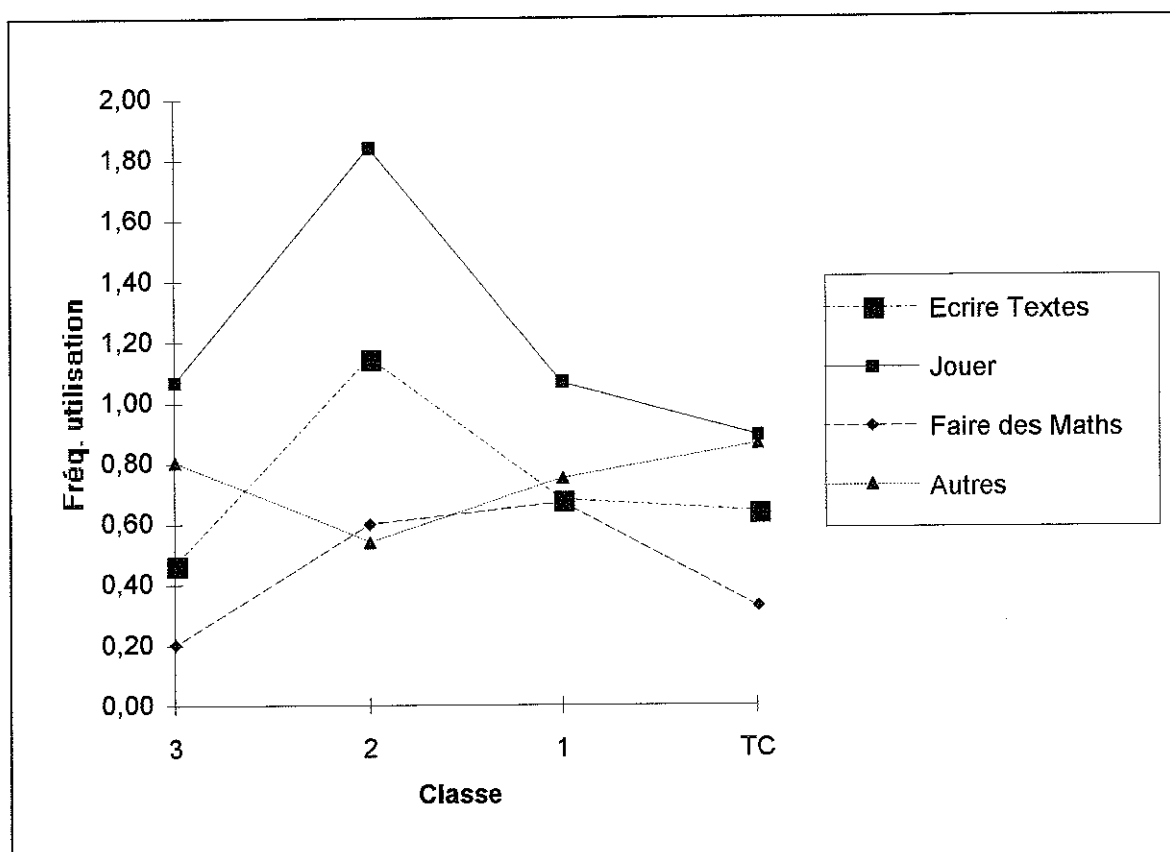
### POSSIBILITÉ D'ACCÈS À UN ORDINATEUR ET UTILISATIONS

#### *Dépouillement*

Nous avons de même procédé à des moyennes par niveau, en attribuant la valeur 0 à la réponse jamais, 1 pour rarement, 2 pour souvent, et 3 pour très souvent.

#### *Résultats*

Le graphique donne l'évolution des divers type d'utilisation. La moyenne par type d'utilisation est faible. Seuls les jeux en Seconde atteignent une utilisation significative. Les utilisations non proposées dans le questionnaire sont marginales à l'exception du dessin et de la programmation.



### LES LOGICIELS EN MATHÉMATIQUES

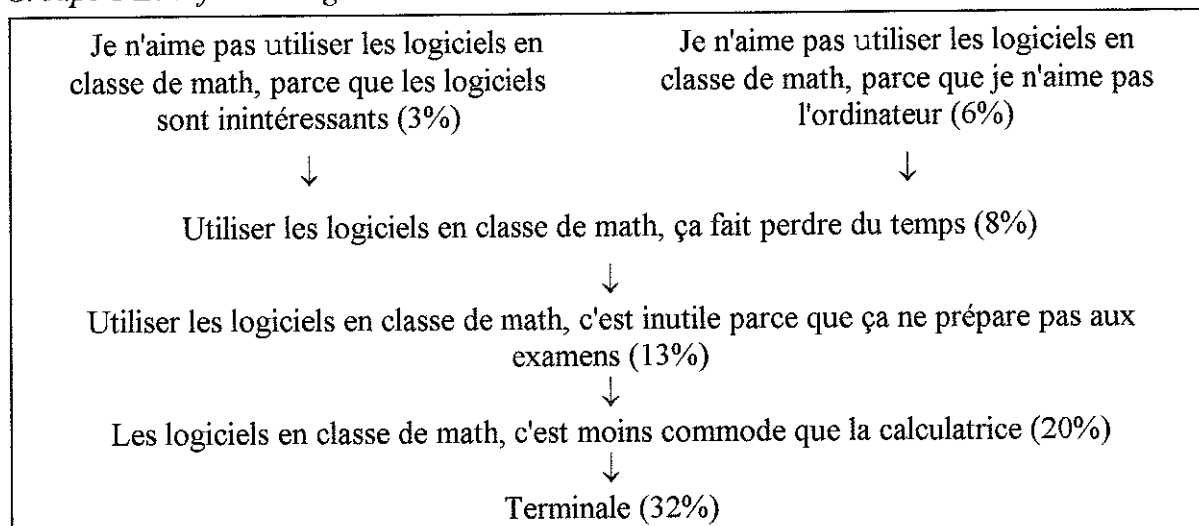
#### **Dépouillement**

Nous avons vu ci-dessus comment l'analyse implicative (Gras, 1992), (Lagrange, 1995), s'est montrée d'un intérêt remarquable pour le dépouillement de questions fermées exprimées sous forme d'un degré d'accord à des opinions. Elle est utilisée à nouveau ici pour mettre en rapport les opinions des élèves sur l'utilisation de logiciels en mathématiques, et étudier l'influence de facteurs comme le niveau de la classe et la durée d'utilisation.

#### **Résultats**

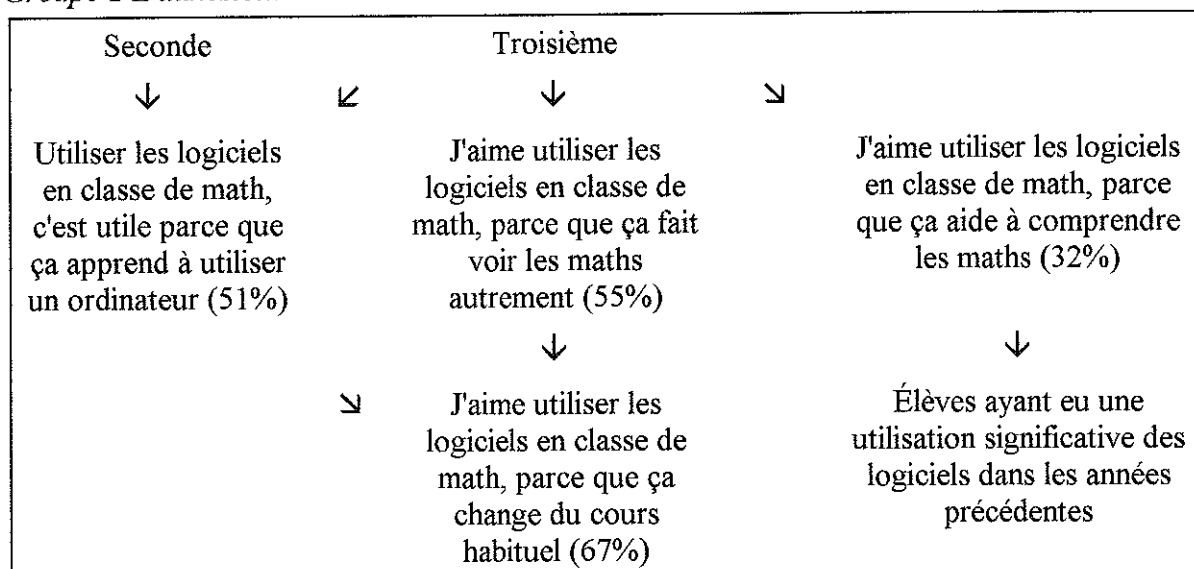
Nous obtenons trois groupes d'opinions organisées en filiations. Les filiations sont figurées dans les tableaux ci-dessous, où chaque opinion est suivie de son taux de réponses positives.

### Groupe 1 Le refus des logiciels



Cette filiation est minoritaire, et présente essentiellement en Terminale.

### Groupe 2 L'adhésion.



Les opinions favorables rencontrent l'adhésion la plus forte. Elles s'organisent moins linéairement que les opinions défavorables. On peut distinguer trois axes de gauche à droite :

- un axe "utilitaire" où l'apport de l'ordinateur est extérieur aux mathématiques,
- un axe "distraction", plus lié aux mathématiques,
- un axe "compréhension. Il est heureux de constater que, parmi les élèves qui ont eu une utilisation importante des logiciels, ceux qui voient un apport de l'ordinateur à leur compréhension des mathématiques sont significativement plus nombreux.

De façon générale, les élèves de troisième et de seconde sont significativement plus nombreux à partager ces opinions favorables.

### Groupe 3 : Le gain de temps

L'opinion restante est en relation avec deux classes, selon le schéma suivant :

|                                                                                                |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Première                                                                                       | Terminale |
| ↓                                                                                              | ↓         |
| Utiliser les logiciels en classe de math, c'est utile parce que ça fait gagner du temps (37 %) |           |

Les élèves qui partagent cette opinion sont significativement plus nombreux en Première et en Terminale. On peut y voir la centration sur le souci de ne pas perdre de temps.

#### IV.3 RENCONTRE AVEC DERIVE ET FAMILIARISATION (QUESTIONS 15 À 29)

##### DURÉE D'UTILISATION

Nous donnons pour chacune des classes un tableau des maximums et des moyennes d'utilisation de DERIVE déclarées par les élèves dans les différents lieux proposés. On trouve une grande diversité d'horaires. L'horaire le plus significatif correspond, comme on pouvait le prévoir, à l'horaire en classe. Il oscille, pour les valeurs moyennes, entre 2 et 15 heures, et ne dépasse 10 heures que dans 5 classes, ce qui reste relativement faible.

Des décalages importants peuvent exister entre les appréciations des élèves de certaines classes sur le nombre d'heures d'utilisation de DERIVE en classe. Nous avons déjà rencontré ce phénomène dans la première version. Certains élèves ne comptent peut-être que les séances où eux-mêmes ont manipulé DERIVE, tandis que d'autres comptent toutes les heures d'utilisation.

On a quelques utilisations en dehors de la classe, principalement à la maison. Le nombre d'heures peut, dans ce cas, être important, mais la moyenne sur la classe est en général pratiquement nulle. Les deux classes qui font exception (J. Brel et Deck) ont disposé de DERIVE en permanence, en classe et hors classe, pendant environ six mois de l'année scolaire. Encore n'est-elle dans ces classes que de 13h et 5h respectivement.

La durée déclarée d'utilisation de DERIVE sera étudiée ci-dessous comme une variable susceptible d'influencer la représentation que se fait l'élève du travail avec le logiciel. Dans le dépouillement du questionnaire professeur, nous retrouverons également la durée d'utilisation de DERIVE comme un indicateur de l'intégration du logiciel par l'enseignant.

| Classe   | En classe |   | CDI | Club | Maison | Autre |
|----------|-----------|---|-----|------|--------|-------|
| Carpeaux | Max       | 9 | 0   | 0    | 0      | 0     |
| 3eF      | Moy       | 7 | 0   | 0    | 0      | 0     |

|                   |     |    |   |    |    |   |
|-------------------|-----|----|---|----|----|---|
| <b>G. Duhamel</b> | Max | 16 | 0 | 40 | 30 | 0 |
| <b>3eA</b>        | Moy | 15 | 0 | 2  | 1  | 0 |

|               |     |    |   |   |    |   |
|---------------|-----|----|---|---|----|---|
| <b>Armand</b> | Max | 14 | 0 | 2 | 10 | 0 |
| <b>2e</b>     | Moy | 6  | 0 | 0 | 1  | 0 |

|              |     |    |    |    |    |   |
|--------------|-----|----|----|----|----|---|
| <b>Viète</b> | Max | 17 | 30 | 10 | 25 | 0 |
| <b>2eC</b>   | Moy | 10 | 3  | 0  | 1  | 0 |

|                  |     |    |   |   |    |   |
|------------------|-----|----|---|---|----|---|
| <b>J. Perrin</b> | Max | 15 | 0 | 0 | 10 | 0 |
| <b>2</b>         | Moy | 2  | 0 | 0 | 0  | 0 |

|                |     |    |    |   |    |   |
|----------------|-----|----|----|---|----|---|
| <b>J. Brel</b> | Max | 48 | 20 | 0 | 30 | 0 |
| <b>1S3</b>     | Moy | 14 | 4  | 0 | 13 | 0 |

|              |     |    |   |    |    |   |
|--------------|-----|----|---|----|----|---|
| <b>Sorel</b> | Max | 20 | 3 | 20 | 20 | 0 |
| <b>1eS</b>   | Moy | 12 | 0 | 4  | 1  | 0 |

|             |     |   |   |   |   |   |
|-------------|-----|---|---|---|---|---|
| <b>LPI</b>  | Max | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| <b>Term</b> | Moy | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

|                 |     |   |   |   |    |   |
|-----------------|-----|---|---|---|----|---|
| <b>Voltaire</b> | Max | 8 | 0 | 5 | 15 | 4 |
| <b>Term</b>     | Moy | 5 | 0 | 0 | 1  | 0 |

|                     |     |    |   |   |   |   |
|---------------------|-----|----|---|---|---|---|
| <b>J. de Beauce</b> | Max | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| <b>Term</b>         | Moy | 9  | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Classe     | En classe |    | CDI | Club | Maison | Autre |
|------------|-----------|----|-----|------|--------|-------|
| G. Duhamel | Max       | 15 | 0   | 2    | 0      | 10    |
| 3eC        | Moy       | 15 | 0   | 0    | 0      | 0     |

|                 |     |    |   |   |   |   |
|-----------------|-----|----|---|---|---|---|
| <b>Rouillac</b> | Max | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| <b>3eA</b>      | Moy | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

|                |     |    |   |   |    |   |
|----------------|-----|----|---|---|----|---|
| <b>Mistral</b> | Max | 15 | 0 | 5 | 10 | 0 |
| <b>2</b>       | Moy | 14 | 0 | 0 | 1  | 0 |

|                  |     |    |   |   |   |   |
|------------------|-----|----|---|---|---|---|
| <b>J. Monnet</b> | Max | 10 | 3 | 2 | 2 | 0 |
| <b>2</b>         | Moy | 8  | 0 | 0 | 0 | 0 |

|                 |     |   |   |   |   |   |
|-----------------|-----|---|---|---|---|---|
| <b>G. Monod</b> | Max | 7 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| <b>1eECO'2</b>  | Moy | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 |

|                |     |   |   |   |   |   |
|----------------|-----|---|---|---|---|---|
| <b>Herriot</b> | Max | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| <b>1eS</b>     | Moy | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

|               |     |   |   |   |   |   |
|---------------|-----|---|---|---|---|---|
| <b>Thiers</b> | Max | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| <b>Term</b>   | Moy | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

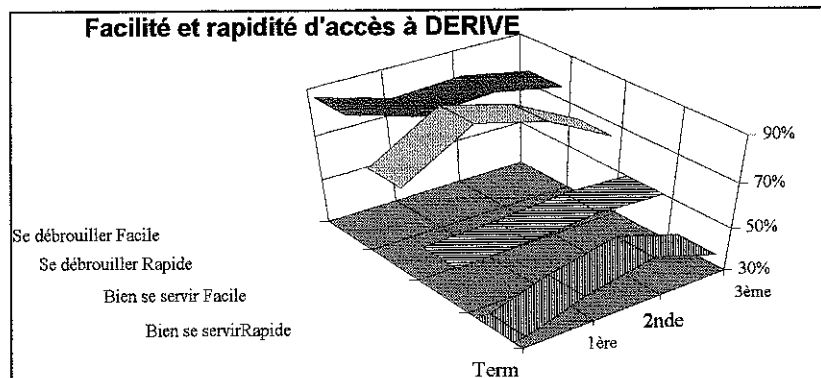
|                  |     |   |   |   |   |   |
|------------------|-----|---|---|---|---|---|
| <b>J. Monnet</b> | Max | 2 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| <b>Term</b>      | Moy | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

|             |     |    |   |   |    |    |
|-------------|-----|----|---|---|----|----|
| <b>Deck</b> | Max | 15 | 1 | 0 | 25 | 10 |
| <b>Term</b> | Moy | 7  | 0 | 0 | 5  | 0  |

|                 |     |   |   |   |    |   |
|-----------------|-----|---|---|---|----|---|
| <b>Vx-Condé</b> | Max | 6 | 8 | 3 | 20 | 0 |
| <b>Term</b>     | Moy | 5 | 2 | 0 | 2  | 0 |

### FAMILIARISATION

Le tableau suivant présente la courbe d'évolution des pourcentages de réponses positives aux questions 20 à 23 de la troisième à la terminale. La facilité d'accès au logiciel, constatée dans la première version se confirme ici. De même nous constatons à nouveau que "bien se servir" de DERIVE est généralement considéré comme moins facile et moins rapide que "se débrouiller", cette différence étant plus marquée dans les classes de Première et de Terminale.



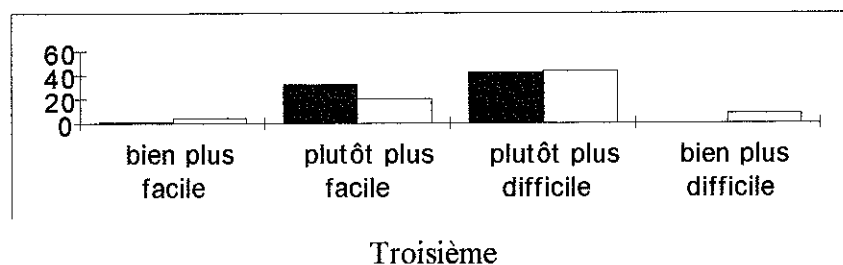
### DIFFICULTÉS RENCONTRÉES DANS L'APPRENTISSAGE

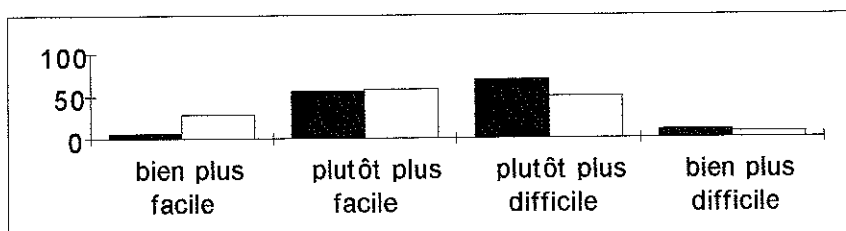
Nous avons comparé pour chaque élève, la difficulté ressentie pour l'apprentissage de DERIVE et la difficulté moyenne des apprentissages proposés. Ceci nous a permis de distinguer 4 groupes d'élèves :

- ceux pour qui DERIVE est bien plus facile que la moyenne des apprentissages,
- ceux pour qui DERIVE est plutôt plus facile que la moyenne des apprentissages,
- ceux pour qui DERIVE est plutôt plus difficile que la moyenne des apprentissages,
- ceux pour qui DERIVE est bien plus difficile que la moyenne des apprentissages.

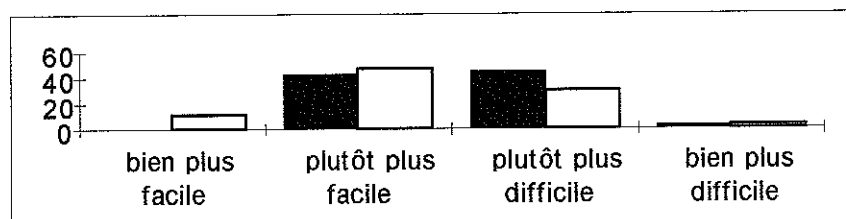
Nous avons fait de même en comparant DERIVE et les calculatrices.

Nous donnons un histogramme pour chaque niveau (noir pour la moyenne des apprentissages, blanc pour la calculatrice). Ils présentent un caractère gaussien, avec relativement peu de différences d'un niveau à l'autre. Seuls les Troisièmes peuvent penser que DERIVE est plus difficile à maîtriser que la calculatrice, mais les calculatrices utilisées à ce niveau ne présentent pas de difficulté d'utilisation.

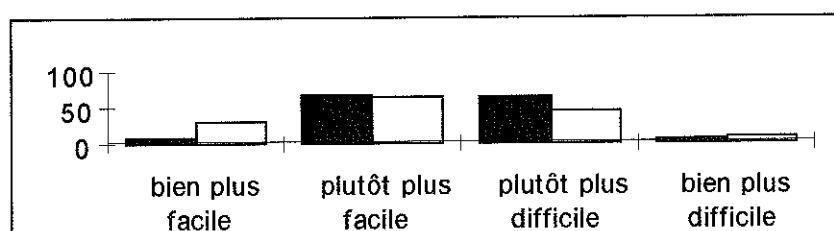




Seconde



Première



Terminale

#### IV.4 PERCEPTION DES POSSIBILITÉS DE DERIVE ET DE SES LIMITES (QUESTIONS 33 ET 34)

##### POSSIBILITÉS

Nous avons classé les réponses à la question 33 en 9 catégories. Pour chacune de ces catégories, nous donnons le pourcentage de réponses et des exemples de citations d'élèves.

##### **Fonctions en Algèbre (24%)**

- 3eF Simplifier des fractions. Équations et inéquations
- 3eC D. peut développer, réduire, etc. pas ma calculatrice
- 3eA Notre calculatrice n'est pas programmée pour développer, simplifier, etc. toute une expression par étape
- 2eC Factoriser par exemple ou résoudre des équations
- 2e Nous pouvons transformer une équation. Nous pouvons la développer, la factoriser
- 1S3 Les fonctions, développements, factorisations
- 1eS Le logiciel simplifie des équations avec des inconnues
- 2 Résolution d'équations, simplification d'écriture, toute la partie qui nécessite sur une calculatrice des programmes longs ou qui ne sont pas réalisables
- 2 Ce qui est bien dans Derive et qui me paraît étonnant c'est résoudre, factoriser, développer des équations
- 2 Par rapport à ma calculatrice, D. permet de résoudre des équations
- TE2 Simplifications de fonctions

- TC Les résolutions sans programmation auparavant d'équations parfois difficiles à résoudre
- T5C La simplification de formules. Les courbes.

#### **Rapidité (20%)**

- 3eC La rapidité de calcul en une fois
- 3eA Il calcule très rapidement et on le voit marquer sur l'écran
- 2e D. met peu de temps pour faire le calcul
- 2 Plus rapide que la calculatrice
- 1S3 Rapidité des calculs
- 1eS Vitesse d'exécution des calculs
- 1eECO2 Rapidité d'exécution, simplicité à l'emploi
- 1eECO2 D. est très rapide.
- TE2 Rien, si ce n'est la rapidité d'exécution
- TC<sup>2</sup> Il va vite
- TC D. est plus rapide et peut faire plus de choses.
- T5C Calculs plus rapides des dérivées

#### **Représentations graphiques (20%)**

- 3eC La manière de faire les figures
- 3eA Les graphiques avec plusieurs couleurs
- 2e Par rapport à ma calculatrice, l'ordinateur donne des graphiques
- 1S3 Des agrandissements, des changements d'échelle qui permet de mieux voir un graphe
- 1eS Le mouvement en 3D pour les graphiques
- 2 La rapidité à faire des courbes, le dessin est net, et il est en couleur
- 2 la 3D
- 2 Travail en parallèle avec les graphiques et les calculs
- 2 Avoir strictement un cercle, un carré...
- 2 Les graphiques sont plus faciles à tracer
- TC Calcul des primitives, intégrales et dérivées. Dessin d'une suite.
- T5C La vitesse de calcul. Les courbes en relief
- T5C Graphique en 3D (mais HP486X le fait)

#### **Fonctions en analyse, en trigo ou dans les complexes (19%)**

- 1S3 Calcul des limites, dérivées
- 1eS Calcul de dérivée, étude de fonctions
- TC Calcul sur les vecteurs. Linéarisation des fonctions trigonométriques
- T5C Le calcul de nombres dans C
- TC4 Le calcul des limites et la recherche des primitives et dérivées
- TC Possibilités avec les suites

#### **Plus de possibilités (mais pas qualitativement différentes) (19%)**

- 3eC Le nombre d'options
- 3eA On peut écrire une puissance supérieure à 99, contrairement à la calculatrice
- 2eC L'écran est plus gros
- 2e La possibilité de sortir sur imprimante les graphiques ; d'écrire et grapher les fonctions affines par morceaux (conditions, if, then).
- 2e Beaucoup plus de données et beaucoup plus de graphiques, mémoire plus importante

- 1eS Une plus grande mémoire
- 1eECO2 Il y a beaucoup plus de précisions
- 1eECO2 La précision (le nombre de chiffres après la virgule)
- TC Quantité de possibilités offertes par le logiciel

#### **Rien ou pas de réponse (14%)**

- 3eC Je sais pas
- 2eC Rien car ma calculatrice est graphique
- 2 Pas grand-chose
- 2 Je n'ai pas de calculatrice graphique
- TC Rien de vraiment notable
- TC Rien, c'est normal, c'est un programme d'ordinateur

#### **Résultats exacts, fractionnaires, calcul avec des variables (8%)**

- 3eF Simplifier. Donner le résultat sous forme d'une fraction. Équations. Inéquations
- 3eC C'est que l'on peut mettre dans les calculs des x
- 3eA On peut inscrire des lettres
- 3eA C'est qu'à D. on peut mettre des lettres
- 2eC Graphiques 3D. Résultats justes (non-arrondis). Équation. Simplification
- 2 On peut entrer une variable; résoudre des systèmes
- 2 La calculatrice nous donne un résultat approché d'une expression alors que D. nous le donne simplifié
- 1eS Développer ou simplifier sans devoir mettre des valeurs avec inconnues
- 1eECO2 La précision (le nombre de chiffres après la virgule), la rapidité de calcul. Le fait qu'on puisse introduire des X et des Y comme bon nous sommes (sic!)
- TE2 L'utilisation des variables. C'est-à-dire qu'il fait ses calculs sans se préoccuper des valeurs numériques.
- TE2 Elle calcule en fonction des lettres et ainsi donne une valeur exacte alors que ma calculette donne des résultats approchés
- TC Création de suites récurrents, résultat littéral
- TC D. Permet de trouver la dérivée ou l'intégrale d'une fonction en mode exact alors que la calculatrice donne une valeur approchée
- T5C Les résultats sous forme  $a+b..$
- T5C Dessins en 3D. Manipuler les inconnues. Expressions littérales

#### **Exploitation de l'écran (3%)**

- 2eC Les opérations posées autrement, les volumes, les étapes intermédiaires
- 2e La modification des graphiques(nombre de fenêtres, zoom,...). Pour les équations, l'équation reste affichée et peut être modifiée, même quand le résultat est apparu
- TC Les menus sont beaucoup plus accessibles que les touches d'une calculatrice. Scinder l'écran en deux est très utile également
- 1eECO2 Le fait que l'on peut toujours effacer une erreur sans pour autant recommencer tous les calculs
- TE2 La mémorisation (et affichage) en permanence des fonctions à l'écran
- TC4 On peut remonter dans chaque ligne de calcul précédente
- 3eA Avec D. les résultats trouvés antérieurement peuvent être réutilisés tandis qu'avec la calculatrice, il faut refaire les calculs

|                            |                                                                                      |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 2e                         | L'équation reste affichée. la modification du graphique                              |
| 1eS                        | On peut écrire comme sur une feuille                                                 |
| 2                          | La rédaction claire des fractions                                                    |
| <b>Aide cognitive (2%)</b> |                                                                                      |
| 3eF                        | Nous dire si on a faux ou non                                                        |
| 3eF                        | Approfondir les explications                                                         |
| 2eC                        | Si on a faux à une réponse, le logiciel répond incorrect                             |
| 2                          | Les calculs fastidieux                                                               |
| 1eECO2                     | C'est que l'on peut travailler sur des hypothèses                                    |
| TC4                        | Le fait qu'il puisse détailler un minimum les calculs                                |
| TC                         | TOUTE l'étude d'une fonction peut être faite avec D. contrairement à la calculatrice |
| TC                         | Méthode de calcul                                                                    |

#### FONCTIONNALITÉS À AJOUTER

Nous avons classé les réponses à la question 34 en 7 catégories. Pour chacune de ces catégories, nous donnons le pourcentage de réponses et des exemples de citations d'élèves :

#### **Rien ou pas de réponse (55%)**

|        |                                                                       |
|--------|-----------------------------------------------------------------------|
| 2      | Je n'ai pas d'idées sur la question                                   |
| 2      | Rien de particulier                                                   |
| 2      | C'est déjà bien équipé                                                |
| 2      | Manque de compétences pour m'exprimer sur ce sujet                    |
| 1S3    | Rien car le programme est assez complet                               |
| 1eS    | J'y connais rien                                                      |
| 1eECO2 | D. est un logiciel parfait                                            |
| TC4    | je ne sais pas                                                        |
| TC     | Je ne connais même pas la moitié des possibilités actuelles, alors... |
| TC     | Pas assez de temps sur le logiciel                                    |

#### **Ergonomie : Rapidité des tracés, couleurs, aides sur les fonctions, son, parole... (20%)**

|        |                                                                                                                        |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3eC    | Qu'il n'y ait pas de difficultés à charger, programmer                                                                 |
| 3eA    | Ce serait bien qu'il nomme les points sur le graphique                                                                 |
| 3eA    | Que l'on puisse "écrire" sur la partie graphique                                                                       |
| 2eC    | Musique de fond                                                                                                        |
| 1S3    | Plus de rapidité pour tracer certains graphes                                                                          |
| 1S3    | Plus de mémoire                                                                                                        |
| 1S3    | Des aides plus extensibles, plus précises. Plus de rapidité                                                            |
| 1eS    | Meilleure facilité de manipulation                                                                                     |
| 1eECO2 | Qu'il comprenne plus vite (sans avoir besoin d'appuyer sur les mêmes touches à la fois)                                |
| 2      | Certaines aides à l'écran : ex : sur quelles touches il faut appuyer pour avoir une $\sqrt{\quad}$ ou pour mettre $^2$ |
| 2      | Il faudrait que ce soit plus rapide                                                                                    |
| TE2    | La parole                                                                                                              |
| TC     | Prendre les mêmes symboles que dans le cours, comme pour les suites et les complexes                                   |
| TC     | L'utilisation de la souris                                                                                             |

TC Un mode graphique plus rapide d'accès et plus complet (comme GRAPH'X) + installation de la souris! Calculs plus rapides (pour les termes d'une suite par exemple)

**Démarche, Démonstration, Explications, Détails des calculs, Tuteur (11%)**

3eF Qu'il parle! Et nous explique plus précisément  
3eC Les théorèmes  
3eA Qu'il nous donne des idées pour résoudre un problème difficile  
3eA Qu'il donne les étapes de ses calculs  
3eA Décomposer les calculs  
2eC Rédiger les calculs ou intermédiaire des calculs  
2eC Les explications des calculs  
2eC De plus amples explications  
2eC Avoir un corrigé  
2 Je souhaiterais que l'ordinateur montre comment il fait les étapes  
1S3 Qu'il donne des cours comme en classe  
1S3 Des cours intégrés de maths  
1eS Pouvoir voir les étapes des calculs  
1eS Les justifications des calculs  
1eS Le détail systématique des calculs difficiles (sans qu'on lui en donne l'ordre)  
TC Détail des calculs divers.  
TC Justification du résultat, vitesse de tracé des graphiques  
TC Faire les démonstrations d'inégalités ou les récurrences  
TC Explication des formules utilisées pour aboutir à un résultat. Rappel de toutes les formules existantes, par thème (genre de formulaire, mais beaucoup plus complet)  
TC Apparition de calculs intermédiaires ou formules pour mieux comprendre les résultats quelquefois surprenants  
T5C Une méthode explicative

**Fonctionnalités existantes, mais inconnues des élèves (5%)**

2 Qu'il résolve des équations à 3 inconnues  
2 Tracer les fonctions du second degré. Résoudre des systèmes du second degré.  
2 Les possibilités d'écrire des programmes pour mieux s'y retrouver  
2 La résolution des équations du second degré non factorisables  
1eS Le produit scalaire  
1eS La simplification par la trigonométrie  
1eECO2 Les polynômes  
1eECO2 Les dérivations  
2 Des couleurs!  
TC4 Donner les coordonnées point par point de la courbe (fonction Trace sur la calculatrice)  
T5C Faire des calculs avec des lettres  
TC D ne peut employer qu'une seule fois un "nom" pour une fonction. Ce serait peut-être un défaut à éliminer  
TC Faire des calculs avec des complexes (calculer un module, un argument)

**Géométrie (4%)**

|     |                                                                                                                  |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2   | De résoudre les problèmes géométriques non analytiques.                                                          |
| 2   | Rajouter des possibilités en géométrie                                                                           |
| 2   | Application des transformations du plan                                                                          |
| 2eC | Géométrie dans l'espace                                                                                          |
| 1eS | Plus d'options concernant les figures en mouvement                                                               |
| TC4 | Simulation des transformations dans l'espace                                                                     |
| TC4 | De la géométrie, notamment dans l'espace                                                                         |
| TC  | Plus de possibilités pour traiter les problèmes géométriques (produit vectoriel, isométrie, similitude, conique) |

#### **Tâche de l'élève : rédaction, tableau de variations, devoir à la maison... (4%)**

|        |                                                                                                         |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3eF    | Qu'il fasse mes devoirs et les DM de maths                                                              |
| 2eC    | Tracer des tableaux de signes                                                                           |
| 2e     | Résolution des problèmes et sa mise en équation                                                         |
| 2e     | Que d'après les données d'un texte la résolution d'un texte soit faite                                  |
| 2e     | Qu'il résolve nos problèmes de maths                                                                    |
| 2e     | Les solutions des prochaines interro                                                                    |
| 2      | Une intelligence capable d'analyser et de trouver un problème (sans passer par une équation ou autres). |
| 1eECO2 | Qu'il puisse calculer et résoudre des problèmes difficiles, surtout en géométrie                        |
| 1eECO2 | Pouvoir faire TOUT ce que l'on n'arrive pas à faire à la main... c.à d. ?                               |
| 1eECO2 | Études des limites                                                                                      |
| TC     | Qu'il rédige                                                                                            |

#### **Autres fonctionnalités en dehors du champ du calcul formel : autres disciplines, jeux... (2%)**

|     |                   |
|-----|-------------------|
| T5C | Des jeux          |
| 2eC | Musique, dessins  |
| 1S3 | Physique-chimie.  |
| 1eS | Un moule à gaufre |

### **ANALYSE**

En demandant de situer DERIVE par différence avec la calculatrice, nous voulions mettre en évidence les représentations de ce logiciel en tant que système de calcul symbolique. Nous voulions voir en particulier si les élèves ont des images suffisamment précises des spécificités du calcul symbolique et l'aide qu'il peut apporter. Dans la gamme de réponses obtenues, les représentations les plus précises sont les moins souvent rencontrées :

- Les élèves citent fréquemment les fonctionnalités du logiciel qui les ont le plus frappées : ils sont 24% à citer une utilisation pour un calcul algébrique, et 19% pour une application de l'analyse. On ne peut cependant pas penser qu'une citation de ce type indique que l'élève qui l'exprime a conscience des principes d'un système symbolique : l'élève constate une (des) fonctionnalités qui ont marqué sa pratique, mais n'en tire pas d'appréciation générale.
- Les autres classes de réponse les plus nombreuses sont celles font référence à des propriétés de DERIVE en tant qu'outil technologique : ce sont la rapidité, le graphisme, l'ergonomie.
- Seule une petite minorité d'élèves (8 %) cite les résultats en valeur exacte ou le calcul littéral comme spécificité du logiciel : ils sont ainsi peu nombreux à mettre en évidence une propriété générale des systèmes symboliques.

- Très peu d'élèves (2%) notent que le logiciel leur apporte une aide. Ils sont relativement plus nombreux à demander cette aide dans les améliorations du logiciel : 11% demandent que DERIVE explique sa démarche de calcul, à titre d'aide pour leurs apprentissages ou même se transforme en véritable tuteur.
- Certains élèves souhaiteraient que le logiciel fasse aussi le reste de leur travail (mise en équation, rédaction...). Nous l'avions déjà constaté dans le dépouillement de la première version. Ils sont ici 4%.

## IV.5 MISE EN ÉVIDENCE DES REPRÉSENTATIONS (QUESTIONS 40 À 56)

### PRINCIPES DU DÉPOUILLEMENT

Nous avons conduit le dépouillement des questions 40 à 56 avec le souci de mettre en évidence des "représentations" de DERIVE chez les élèves utilisateurs, ce qui constitue un des thèmes principaux de la recherche. A cette fin, nous avons recherché s'il existe une(des) "organisation(s)" de ces opinions en système(s) de pensée cohérents, susceptibles d'expliquer les conduites des élèves lors de l'utilisation du logiciel.

Comme nous l'avons souligné ci-dessus (II 3), ceci impose de dépasser la seule mise en évidence d'un degré moyen d'adhésion des élèves utilisateurs de DERIVE à diverses opinions et d'utiliser une méthode d'analyse des données "multidimensionnelle", c'est à dire faisant intervenir des croisements entre variables. Nous avons présenté ci-dessus (II 3) l'analyse implicative et exposé les raisons qui nous ont conduit à choisir cette méthode dans la première version du questionnaire (II 3 ci-dessus), et pour organiser les opinions des élèves sur l'utilisation des logiciels en mathématiques (IV 2 ci-dessus). Nous l'utilisons à nouveau ici pour les mêmes raisons.

Les variables suivantes ont été prises en compte dans l'analyse :

- 17 variables modales correspondant aux 17 opinions sur lesquelles les élèves devaient exprimer un degré d'adhésion. L'organisation de ces variables doit permettre de dégager les représentations. Nous avons donné les valeurs respectives 0, 1/3, 2/3 et 1 aux choix "Pas du tout d'accord", "Plutôt pas d'accord", "Plutôt d'accord", et "Tout à fait d'accord".
- 1 variable numérique (ut. d.) correspondant à la durée totale d'utilisation de DERIVE. La prise en compte de cette variable dans l'analyse doit nous permettre d'examiner si la durée d'utilisation du logiciel a une influence sur les représentations. Pour chaque élève, la valeur de cette variable est calculée en divisant son nombre d'heures d'utilisation de DERIVE (réponse à la question 15), par la durée maximum constatée hors cas particulier (17 h).
- 4 variables binaires correspondant aux 4 niveaux de classes (3ème à Terminale). Elles doivent nous permettre de dégager des représentations préférentielles selon les niveaux de classe.

Les intensités d'implication entre les différentes variables ont été obtenues selon les principes du calcul modal tels qu'énoncés dans (Lagrange, 1995).

### LES IMPLICATIONS OPINION → OPINION

Le tableau ci-dessous donne les scores des différentes opinions (q40 à q56) c'est à dire leur moyenne d'adhésion sur le référentiel. Dans ce tableau comme dans les suivants, nous avons "grisé" les colonnes (et les lignes) correspondant aux questions dont le numéro est multiple de 5, dans le but de faciliter la recherche des intensités relatives à une question donnée.

Le "score" de chacune des opinions

|       | q40  | q41  | q42  | q43  | q44  | q45  | q46 | q47  | q48  | q49  | q50  | q51  | q52  | q53  | q54  | q55  | q56  |
|-------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| score | 0,59 | 0,41 | 0,48 | 0,68 | 0,46 | 0,51 | 0,3 | 0,31 | 0,72 | 0,85 | 0,44 | 0,83 | 0,72 | 0,61 | 0,64 | 0,75 | 0,68 |

Le second tableau ci-dessous est la matrice des intensités d'implication pour chacun des couples de variables pour lesquels une implication existe. Les valeurs sont données en pourcentage.

La matrice implicative au seuil de 50%

| ↗   | q40 | q41 | q42 | q43 | q44 | q45 | q46 | q47 | q48 | q49 | q50 | q51 | q52 | q53 | q54  | q55 | q56 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|
| q40 |     |     |     |     |     |     |     |     | 68% | 85% |     | 90% | 80% | 79% | 85%  | 91% | 90% |
| q41 | 92% |     | 98% |     |     |     |     |     | 61% | 59% |     | 68% | 80% | 62% |      | 74% | 97% |
| q42 |     |     |     | 60% |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |     | 58% |
| q43 |     |     |     |     |     |     |     |     | 65% | 63% |     | 60% |     |     |      |     | 57% |
| q44 | 83% |     |     | 57% |     | 98% |     |     | 66% | 73% |     | 77% | 86% | 93% | 100% | 93% | 80% |
| q45 | 80% |     |     | 50% |     |     |     |     | 82% | 54% |     | 69% | 85% | 78% | 96%  | 78% | 78% |
| q46 |     | 83% | 99% | 76% |     |     |     | 59% | 68% |     |     |     |     |     |      |     |     |
| q47 | 88% | 87% | 89% |     |     |     |     |     |     |     | 77% |     | 58% | 55% |      | 54% | 93% |
| q48 |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 92% |     | 79% | 71% |     |      |     | 55% |
| q49 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |     |     |
| q50 | 71% |     |     | 60% | 83% | 97% |     |     | 50% | 56% |     | 87% | 94% | 96% | 92%  | 76% | 74% |
| q51 |     |     |     |     |     |     |     |     | 89% |     |     |     |     |     |      |     |     |
| q52 |     |     |     |     |     |     |     |     | 94% |     |     | 99% |     |     |      | 85% |     |
| q53 |     |     |     | 52% |     |     |     |     | 66% | 64% |     | 92% | 91% |     | 95%  | 88% | 78% |
| q54 |     |     |     | 69% |     |     |     |     | 61% | 76% |     | 66% | 86% |     |      | 98% | 74% |
| q55 |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 89% |     | 85% |     |     |      |     |     |
| q56 |     |     |     | 54% |     |     |     |     | 56% |     |     | 75% | 53% |     |      | 84% |     |

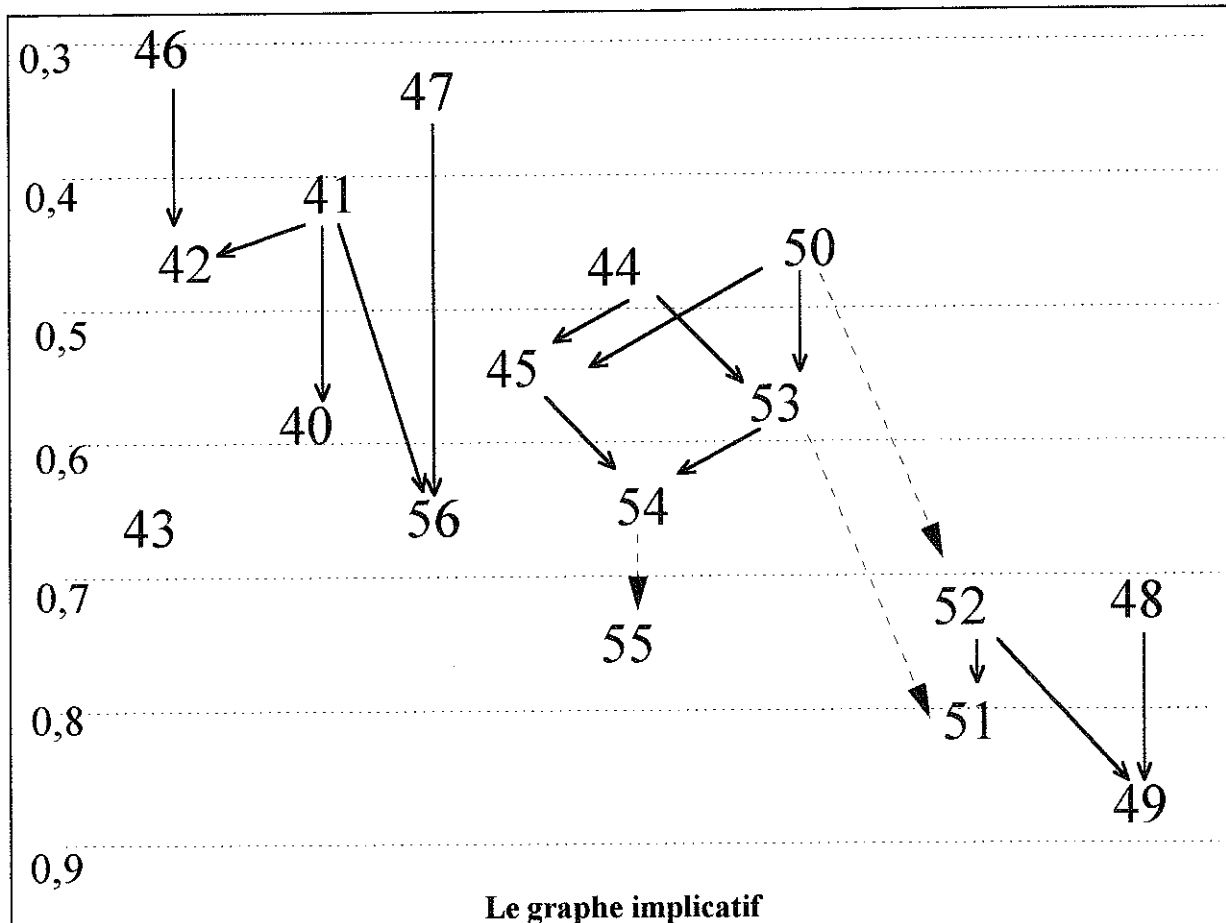
La matrice implicative au seuil de 92%

| ↗   | q40 | q41 | q42 | q43 | q44 | q45 | q46 | q47 | q48 | q49 | q50 | q51 | q52 | q53 | q54  | q55 | q56 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|
| q40 |     |     |     |     |     |     |     |     | #   | #   |     | #   | #   | #   | #    | #   | #   |
| q41 | 92% |     | 98% |     |     |     |     |     | #   | #   |     | #   | #   | #   |      | #   | 97% |
| q42 |     |     |     | #   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |     | #   |
| q43 |     |     |     |     |     |     |     |     | #   | #   |     | #   |     |     |      | #   |     |
| q44 | #   |     |     | #   |     | 98% |     |     | #   | #   |     | #   | #   | 93% | 100% | 93% | #   |
| q45 | #   |     |     | #   |     |     |     |     | #   | #   |     | #   | #   | #   | 96%  | #   | #   |
| q46 |     | #   | 99% | #   |     |     |     | #   | #   |     |     |     |     |     |      |     |     |
| q47 | #   | #   | #   |     |     |     |     |     |     |     | #   |     | #   | #   |      | #   | 93% |
| q48 |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 92% |     | #   | #   |     |      | #   |     |
| q49 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |     |     |
| q50 | #   |     |     | #   | #   | 97% |     |     | #   | #   |     | #   | 94% | 96% | 92%  | #   | #   |
| q51 |     |     |     |     |     |     |     |     | #   |     |     |     |     |     |      |     |     |
| q52 |     |     |     |     |     |     |     |     | 94% |     |     | 99% |     |     |      | #   |     |
| q53 |     |     |     | #   |     |     |     |     | #   | #   |     | 92% | #   |     | 95%  | #   | #   |
| q54 |     |     |     | #   |     |     |     |     | #   | #   |     | #   | #   |     |      | 98% | #   |
| q55 |     |     |     |     |     |     |     |     |     | #   |     | #   |     |     |      |     |     |
| q56 |     |     |     | #   |     |     |     |     | #   |     |     | #   | #   |     |      | #   |     |

Dans le troisième tableau ci-dessus, nous avons repris les intensités d'implication, en conservant seulement celles supérieures à 92%, de façon à faciliter la constitution du graphe

implicatif. Les intensités comprises entre 50% et 92% sont indiquées par un #, de façon à pouvoir éventuellement être utilisées dans la fermeture transitive du graphe.

La figure ci-dessous donne le graphe implicatif au seuil 92%. Comme il est classique en analyse implicative, nous avons choisi ce seuil pour obtenir un graphe assez fourni, tout en isolant des filiations. Il s'agit d'un seuil statistique exprimant un degré de confiance attribué à l'analyse. La valeur de 92% est un seuil suffisamment élevé pour que nous ayons confiance dans les conclusions qui découlent de ce graphe.



Les opinions ont été portées sur une échelle verticale selon leur score (au sens donné ci-dessus). Les opinions avec lesquelles les élèves sont, en moyenne, le plus en désaccord, sont donc situées dans la partie supérieure du graphe, et de même, les opinions avec lesquelles les élèves sont, en moyenne, le plus en accord, sont donc situées dans la partie inférieure du graphe. Cette présentation est intéressante, car elle permet de visualiser les scores respectifs des variables, en même temps que leurs relations implicatives.

Les flèches portées sur le graphe correspondent à des implications d'intensité supérieure ou égale à 92%. Les flèches "pleines" sont représentatives d'implications dont la fermeture transitive est constituée elle-même d'implications d'intensité supérieure ou égale à 92%. Les flèches pointillées (54 → 55, 50 → 52 et 53 → 51) introduisent dans la fermeture transitive des implications dont l'intensité est comprise entre 50% et 92%.

Voici l'analyse de ce graphe.

#### Une opinion "isolée"

L'opinion 43 (*Quand on utilise DERIVE, il faut bien organiser son travail, sinon on perd beaucoup de temps*) obtient un score d'adhésion assez positif. Elle ne présente pas d'implication significative, ni vers une autre opinion, ni venant d'une autre opinion. Cette situation "isolée" dans le graphe montre qu'elle ne s'insère pas dans un système.

### Opinions "fédératrices" et filiations

4 opinions "collectent" au moins deux implications de score inférieur, et ne sont pas en relation implicative avec des opinions de score supérieur. Chacune d'entre elle rassemble ou "fédère" des opinions plus minoritaires, en un système que nous appelons "filiation". Nous étudions les filiations ainsi dégagées dans l'ordre des scores croissants.

42. *Ca ne sert à rien de travailler avec DERIVE, puisque, aux contrôles et aux examens, il faut rédiger les calculs et les démonstrations*

Il s'agit d'une opinion négative sur l'emploi de DERIVE, liée aux contraintes de l'évaluation institutionnelle. Nous regroupons les implications convergeant vers cette opinion dans une filiation "Refus de DERIVE".

56. *Si les données sont rentrées correctement, on peut faire confiance à 100% au résultat donné par DERIVE*

Cette opinion fait aveuglément confiance aux résultats de DERIVE, éliminant ainsi le contrôle que permettraient le calcul à la main ou les connaissances mathématiques. Nous regroupons les implications convergeant vers cette opinion dans une filiation "Utilisation aveugle des résultats de DERIVE".

55. *DERIVE c'est bien car on peut travailler en même temps sur les équations et les graphiques.*

En fonction des autres opinions "pointant" vers cette opinion, il convient de retenir surtout une appréciation positive sur les pratiques mathématiques avec DERIVE (*DERIVE c'est bien...*). Ces autres opinions insistent en effet à divers titres sur le changement de "pratique mathématique" ou la "compréhension". Nous regroupons les implications convergeant vers cette opinion dans une filiation "Apports positifs de DERIVE à l'activité mathématique".

49. *DERIVE c'est bien pour contrôler ses réponses.*

Dans cette opinion, DERIVE est également vu positivement, mais le logiciel apparaît moins directement impliqué dans la pratique mathématique, puisqu'il intervient seulement comme moyen de contrôle. Nous regroupons les implications convergeant vers cette opinion dans une filiation "DERIVE outil pour faciliter et contrôler les calculs".

Les quatre filiations ainsi distinguées "partagent" certaines opinions (q41 et q50). Elles nous semblent cependant constituer des systèmes bien distincts. Le "Refus de DERIVE" se distingue clairement des autres filiations qui donnent une appréciation positive sur DERIVE. L'"Utilisation aveugle des résultats de DERIVE" s'oppose aux autres filiations, en ce qu'elle tend à considérer DERIVE comme un "substitut" à la pratique mathématique, alors que les filiations "Apports positifs de DERIVE à l'activité mathématique" et "DERIVE outil pour faciliter et contrôler les calculs" insistent sur l'insertion de DERIVE dans cette pratique. Ces deux dernières filiations considèrent elle-même l'apport de DERIVE selon deux directions différentes : dans la première, DERIVE apporte réellement un changement aux activités mathématiques (opinion q54) alors que dans la seconde, le logiciel s'ajoute simplement à titre d'aide technique, ou d'outil de contrôle, à une activité mathématique inchangée.

## Filiations et sous-filiations

Les opinions "terminales" ci-dessus "fédèrent" des opinions qui ne sont pas nécessairement elles-mêmes dans une relation implicative. En se restreignant à des suites d'opinions organisées dans une relation implicative, les transitions éventuelles étant assurées au seuil de 92 %, nous distinguons des sous-filiations contribuant à chacune des filiations distinguées ci-dessus.

### *La filiation "Refus de DERIVE"*

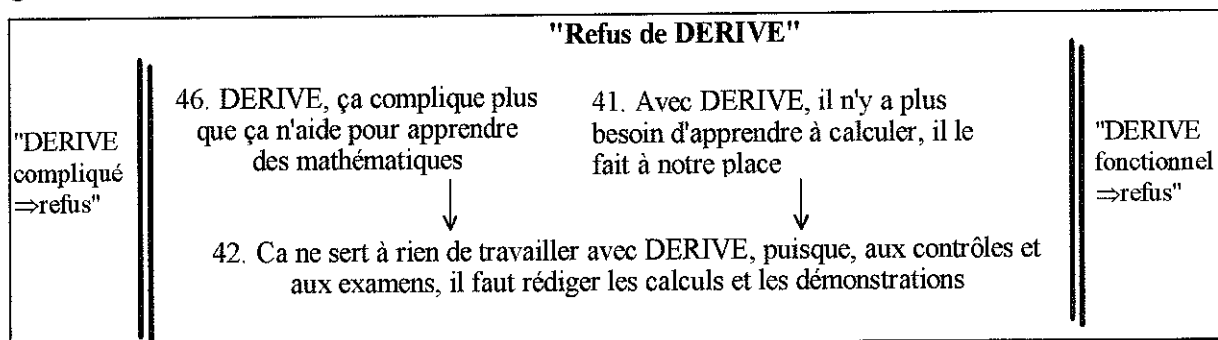
Elle s'organise en deux sous-filiations chacune réduite à deux opinions.

#### 46→42 ("DERIVE compliqué ⇒ refus").

Le refus de DERIVE est motivé par la "complication" apportée par le logiciel. DERIVE est rejeté car il fait "obstacle" aux mathématiques. Nous vérifierons ci-dessous que cette sous-filiation est liée à des difficultés rencontrées avec le logiciel et/ou l'ordinateur.

#### 41→42 ("DERIVE fonctionnel ⇒ refus").

Au contraire, DERIVE est ici considéré comme un outil performant, et c'est précisément ce caractère performant qui motive le refus du logiciel : l'élève pense que DERIVE peut le remplacer dans son activité mathématique, et que donc l'utilisation du logiciel élimine la légitimité de cette activité : "DERIVE fait tout, donc il n'y a rien à apprendre".



### *La filiation "Utilisation aveugle des résultats de DERIVE"*

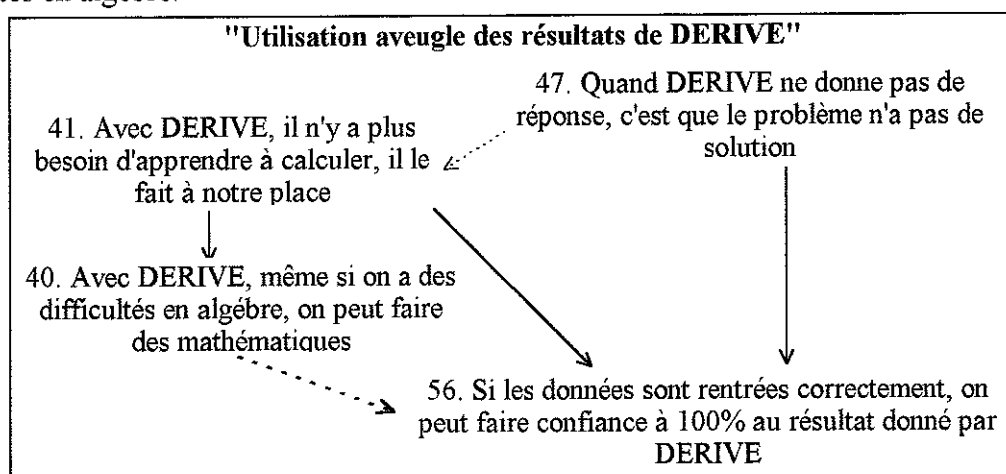
Les opinions q47, q41, et q56 sont présentes dans cette filiation. q47→q56 et q41→q56 sont significatives au seuil choisi. q47→q41 n'est pas significatif à ce seuil. Néanmoins la valeur de l'intensité de cette implication (87%) est trop élevée pour qu'on considère deux branches distinctes. Nous considérons donc une seule filiation regroupant ces trois opinions.

L'opinion q47 constitue une conception fausse des possibilités du calcul formel. En effet, de nombreux problèmes mathématiques sont "non algorithmiques", et le fait qu'un opérateur (humain ou machine) ne puisse en trouver une solution, ne garantit pas qu'il n'en existe pas.

Dans l'implication q47→q56, la confiance dans DERIVE (opinion q56) s'explique donc par cette conception fausse.

Nous avons analysé ci-dessus l'implication q41→q42, où le fait que DERIVE puisse remplacer l'élève dans ses tâches de calcul, conduisait celui-ci à porter une appréciation négative sur l'utilisation de DERIVE. Dans l'implication q41→q56, au contraire, l'élève n'est pas particulièrement troublé par ce fait. Pour lui, l'activité calculatoire peut légitimement être remplacée par une entrée "correcte" des données.

Il existe une implication significative  $q41 \rightarrow q40$  et une implication  $q40 \rightarrow q56$  d'intensité 90% donc proche du seuil. L'opinion  $q40$ , représentative d'un espoir de remédiation grâce à DERIVE, s'insère donc "presque" dans la filiation "Utilisation aveugle des résultats de DERIVE". Cette filiation serait ainsi partagée assez largement par des élèves présentant des difficultés en algèbre.



*La filiation "Apports positifs de DERIVE à l'activité mathématique "*

Les opinions de cette filiation marquent une conception d'assez haut niveau de l'activité mathématique :

"Découverte des règles de calcul" (opinion  $q50$ )

"Plaisir des mathématiques" (opinion  $q44$ )

"Compréhension" (opinion  $q45$ )

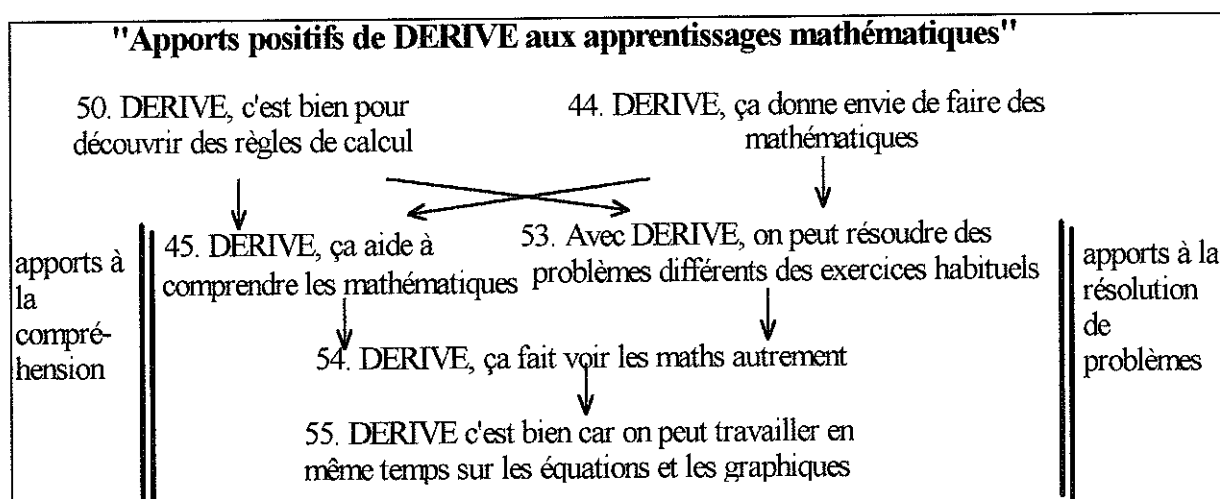
"Problèmes différents" (opinion  $q53$ )

Le changement dans la vision des mathématiques (opinion  $q54$ ) est un point de passage obligé.

Il y a par contre, une divergence assez nette entre l'aspect "Compréhension" et l'aspect "Problèmes différents" puisque l'intensité  $q45 \rightarrow q53$  est de 78% seulement. Les élèves reconnaissant les apports positifs du logiciel à l'activité mathématique, insistent donc pour certains sur un apport à leur compréhension des mathématiques, et pour d'autres, sur le fait qu'ils ont pu se confronter à "d'autres problèmes". Dans la suite, nous distinguerons donc deux sous-filiations :

$q45 \rightarrow q54 \rightarrow q55$  "Apports à la compréhension"

$q53 \rightarrow q54 \rightarrow q55$  "Apports à la résolution de problèmes"

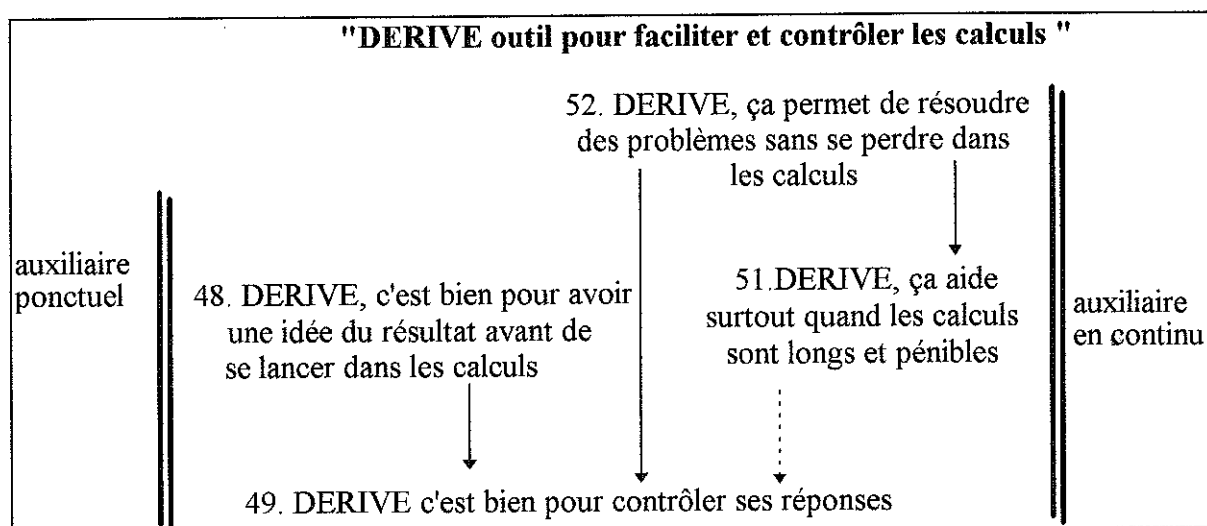


*La filiation "DERIVE outil pour faciliter et contrôler les calculs"*

Cette filiation s'organise en deux sous-filiations, chacune représentative d'un type d'aide reconnu par l'élève.

q48 → q49 "Auxiliaire ponctuel". L'aide est assez faible ; elle se réduit à une anticipation du résultat, un peu comme celle que donnerait un recueil d'exercices incluant les solutions.

q52 → q51 → q49 "Auxiliaire en continu". Les implications q52 → q51 et q52 → q49 sont significatives au seuil choisi (92%), et il existe une implication q51 → q49 d'intensité assez proche du seuil. (89%). L'opinion q51 insiste sur l'apport de DERIVE "quand les calculs sont longs et pénibles". L'opinion q52 insiste sur la résolution de problèmes. On a dans cette sous-filiation, une utilisation réfléchie de DERIVE comme auxiliaire technique, ce qui la rapproche de la filiation "Apports positifs" à laquelle elle est d'ailleurs reliée par des implications à transitivité faible.



## V. ETUDE DES REPRESENTATIONS

Dans ce paragraphe, nous croisons les représentations (filiations ou sous-filiations) obtenues grâce à l'analyse implicative avec d'autres données issues des réponses des élèves. Nous examinons tout d'abord l'influence sur ces représentations de certaines variables caractéristiques de l'utilisation de DERIVE: niveau de classe, durée d'utilisation, familiarité

avec DERIVE. Puis nous analysons les réponses de chaque élève aux questions ouvertes en fonction de la représentation à laquelle il adhère prioritairement: il s'agit de dégager comment, dans chaque représentation, les élèves voient l'intérêt du logiciel pour leur apprentissage des mathématiques, l'avantage que leur procurerait la disponibilité du logiciel, ainsi que leur avis personnel sur DERIVE.

Les deux premières variables ont été introduites dans l'analyse implicative, et nous interprétons les intensités obtenues. Pour la troisième variable, et pour les réponses aux questions ouvertes, nous avons mis au point une méthode permettant, pour chaque représentation, de dégager un certain nombre d'élèves y adhérant prioritairement.

## V.1 INFLUENCE DU NIVEAU DE CLASSE

Quelle est l'influence du niveau de classe (de 3ème à Terminale) sur les représentations des élèves ? Pour répondre à cette question, nous avons introduit dans l'analyse implicative, des variables binaires correspondant à ces niveaux. Le tableau ci-dessous fait apparaître l'intensité des implications Niveau → Opinion (écriture normale) et Opinion → Niveau (italique). L'orientation de l'implication est déterminée par l'effectif des niveaux et n'a pas ici de signification particulière. Comme indiqué dans (Lagrange, 1995), une implication  $C \rightarrow O$  mesure sur une échelle probabiliste la différence entre le taux d'adhésion à  $O$  dans  $C$ , et le même taux dans le référentiel.

|     | Refus |     |     | Aveugle |      |     | Apports activité |     |     |     |     |     | Outil calcul |     |     |     |
|-----|-------|-----|-----|---------|------|-----|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|--------------|-----|-----|-----|
|     | q42   | q46 | q41 | q40     | q56  | q47 | q44              | q45 | q50 | q53 | q54 | q55 | q48          | q49 | q51 | q52 |
| 3è  | 84%   |     |     | 66%     | 96%  | 77% | 56%              | 65% | 64% |     | 69% |     |              |     |     |     |
| 2nd |       | 57% | 76% | 91%     | 100% | 95% | 87%              | 75% | 76% | 76% | 59% | 94% |              |     | 61% |     |
| 1èr |       |     |     |         |      |     |                  | 68% | 88% | 87% | 89% |     | 94%          | 64% | 54% |     |
| Ter |       | 59% | 60% |         |      |     |                  |     |     |     |     |     | 96%          | 98% | 70% | 90% |

Il résulte du tableau que :

- Les élèves de Troisième sont plus sensibles que les autres niveaux aux contraintes de l'examen.
- Les opinions de la filiation "Utilisation aveugle des résultats de DERIVE" se rencontrent préférentiellement en 3ème et Seconde.
- Les opinions de la filiation "Apports positifs à l'activité mathématique" se rencontrent préférentiellement en Seconde et Première. Pour les Secondes, l'aspect "Grapheur" apparaît le plus appréciable, alors que les Premières s'attachent davantage aux changements de tâche et de perception des maths.
- Les opinions de la filiation "DERIVE outil pour faciliter et contrôler les calculs" se rencontrent préférentiellement en Première et Terminale. Pour les Premières, la composante "anticipation" apparaît primordiale, alors que les Terminales s'attachent à presque tous les aspects de cette filiation.

Le nombre d'élèves par niveau est assez significatif (de 75 à 147). Cependant le nombre de classes par niveau reste faible (de 4 à 7). On constate que, à la différence des autres résultats, les conclusions ci-dessus ne concordent pas totalement avec celles exprimées suite à la

première version du questionnaire. Donc il est possible que des choix des professeurs introduisent des biais dans ces conclusions.

Néanmoins quelques commentaires généraux semblent possibles :

- Le BEPC en fin de troisième expliquerait la sensibilité des Troisièmes aux contraintes de l'examen. La maturité supérieure des élèves de Terminale expliquerait-elle qu'on ne trouve pas cette sensibilité en Terminale, classe marquée par la préparation du baccalauréat ?
- Les élèves de Troisième et Seconde pratiquent l'algèbre avec DERIVE, alors que les autres niveaux abordent l'analyse. La pratique de l'algèbre avec DERIVE pourrait autoriser une confiance trop grande dans le logiciel, alors que, avec l'analyse, on voit mieux ses limites.
- Les élèves conçoivent mieux une pratique "ouverte" du logiciel en Seconde et en Première, qu'en Terminale. A ce niveau, la préparation du baccalauréat impose ses contraintes sur l'activité mathématique et l'utilisation de DERIVE doit satisfaire ces contraintes. Les contraintes de l'examen apparaissent ainsi sous une autre forme qu'en Troisième.

## V.2 INFLUENCE DE LA DURÉE D'UTILISATION DE DERIVE

La durée d'utilisation déclarée par les élèves varie selon les classes de 2h à 17h, et il semble important de la prendre en compte. Un élève qui a utilisé DERIVE 2h n'en aura qu'un aperçu très sommaire. Au contraire, un élève l'ayant fréquenté plus de 15 h aura une vision plus pertinente des possibilités du logiciel, mais aussi des difficultés qu'on peut rencontrer, des situations où l'apport lui paraît attesté, et celles où il est moins évident.

La variable ut. d. correspond à la durée totale d'utilisation de DERIVE. L'analyse implicative fournit des valeurs de l'intensité d'implication de la variable ut. d. vers les différentes opinions (q40 à q56). Ces valeurs permettent de savoir dans quelle mesure l'utilisation de DERIVE a une influence sur l'opinion qu'a l'élève du logiciel. Nous les faisons apparaître, filiation par filiation, dans le tableau ci-dessous.

|       | Refus |     |     | Aveugle |     |     | Apports activité |     |     |     |     |     | Outil calcul |     |     |     |
|-------|-------|-----|-----|---------|-----|-----|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|--------------|-----|-----|-----|
| ↗     | q42   | q46 | q41 | q40     | q56 | q47 | q44              | q45 | q50 | q53 | q54 | q55 | q48          | q49 | q51 | q52 |
| ut. d |       |     |     | 62%     | 52% |     | 76%              | 68% | 60% | 85% | 86% | 81% | 59%          | 81% | 77% |     |

Les implications sont inexistantes ou peu élevées vers les opinions des deux premières filiations.

Les implications vers les opinions de la filiation "Apports positifs de DERIVE à l'activité mathématique " existent toutes et peuvent avoir des intensités assez élevées (bien qu'inférieures au seuil de 92% que nous avons retenu dans l'analyse précédente).

Trois implications sur quatre existent vers la filiation "DERIVE outil pour faciliter et contrôler les calculs". Elles sont en moyenne moins élevées que vers la filiation précédente.

Nous considérons donc que l'utilisation prolongée de DERIVE conduit plutôt à adhérer à la filiation "Apports positifs de DERIVE à l'activité mathématique ", et éloigne d'attitudes de refus ou d'une représentation naïve du logiciel. Elle pousserait également à mieux apercevoir les implications "cognitives" de l'utilisation du logiciel, au delà de la simple aide au calcul. Ceci constitue un résultat intéressant et encourageant pour les professeurs qui tentent de dépasser l'utilisation ponctuelle du logiciel et de l'intégrer réellement à leur enseignement.

A l'intérieur de la filiation "Apports positifs de DERIVE à l'activité mathématique ", nous avons mis en évidence plus haut l'absence de liens entre les opinions q45 et q53 qui détermine deux sous filiations, respectivement, "apports à la compréhension" et "apports à la résolution de problèmes" . ut. d.  $\rightarrow$ q45 apparaît avec une intensité de 68% peu significative, alors que ut. d.  $\rightarrow$ q53 apparaît avec une intensité de 85% assez significative. Il en résulte que l'utilisation prolongée de DERIVE amène les élèves à identifier l'apport du logiciel comme un élément de changement de l'activité mathématique, plutôt que comme une aide décisive à leur compréhension.

On peut penser que dans les classes qui ont utilisé DERIVE le plus longtemps, le temps passé avec DERIVE a été mis à profit pour des activités de résolution de problèmes différents des exercices habituels, et que les élèves de ces classes associent DERIVE à ces activités, sans nécessairement percevoir une amélioration de leur compréhension.

### **V.3 ETUDE D'ELEVES EN FONCTION DE LEUR ADHÉSION À UNE REPRÉSENTATION**

Dans le rapport intérimaire de décembre 1994, à la suite des observations, nous avons pensé que la familiarité avec DERIVE constituait un facteur important dans les relations que l'élève entretient avec le logiciel. Cette familiarité peut s'apprécier à l'aide de la réponse fermée à la question q24 : "*Vous sentez-vous maintenant à l'aise avec DERIVE ?*"

D'autres questions cruciales sur les apports de DERIVE étaient posées de façon ouverte, ou sous forme de réponse OUI/NON avec demande de justification.(q30/q32 ; q37/q38/q39 ; q57/q58)

Ainsi, dans les questions q30 à q32, on demandait à l'élève si DERIVE l'a aidé à apprendre ce qui, en algèbre ou en analyse lui a semblé cette année le plus difficile, et sinon, s'il aurait pu. On demandait de préciser sous forme libre.

Dans les questions q37 à q39, on demandait à l'élève s'il aimerait pouvoir utiliser DERIVE tout le temps, puis au prochain contrôle. On demandait de même de justifier sous forme libre.

Dans les questions q57 et q58, on demandait un avis personnel, illustré par un exemple.

Nous avons pensé qu'un classement des élèves en fonction des "filiations" ou "représentations" dégagées ci-dessus pouvait constituer un filtre efficace pour l'interprétation de ces réponses. En effet, les réponses à ces questions sont d'une grande diversité, et des regroupements de réponses comme ceux que nous avons opérés pour les questions q33 et q34 seraient délicats. Ayant déterminé la présence d'une représentation donnée chez un élève à partir de ses réponses aux questions fermées, on peut plus facilement interpréter ses réponses aux questions ouvertes, en fonction de cette représentation. En retour, ces réponses aident à mieux caractériser les représentations .

#### **MISE EN ÉVIDENCE D'ÉLÈVES ADHÉRANTS À UNE REPRÉSENTATION**

Le projet ci-dessus suppose la détermination, pour chaque (sous)filiation, d'un certain nombre d'élèves adhérant aux différentes opinions qui la composent.

Bien que le problème posé soit en apparence de même nature, nous n'avons pas choisi la voie décrite par (Bailleul, 1994). En effet, dans celle-ci, on cherche des individus "contribuant" à une implication  $a \rightarrow b$ , ce qui signifie en fait que leur adhésion à  $a$  est inférieure à leur adhésion

à b. Au contraire, nous cherchons des élèves qui adhèrent à la fois à a et à b, plus que la moyenne.

La méthode que nous avons adoptée est la suivante :

Pour chaque élève, nous calculons le produit des valeurs des variables correspondant aux opinions de la (sous)filiation. Nous obtenons ainsi une valeur d'adhésion à la (sous)filiation. Le produit permet que cette valeur soit nulle si l'élève n'est pas du tout d'accord avec une seule des opinions de la (sous)filiation.

Ensuite, nous retenons les élèves pour lesquels cette valeur  $v$  est significativement supérieure à la moyenne observée  $\bar{v}$ , c'est-à-dire tels que  $P(V > \bar{v}) \leq 0,1$ ,  $V$  étant une variable aléatoire de loi normale  $N(\bar{v}, var)$ ,  $var$  étant la variance observée. Pour les quelques élèves apparaissant dans deux filiations, nous retenons seulement celle où la valeur de  $P(V > \bar{v})$  est la plus faible.

On obtient ainsi 279 élèves classés en 7 groupes représentatifs des 7 (sous) filiations, et nous tirons parti dans la suite des réponses de ces élèves aux différentes questions rappelées ci-dessus.

Quand il s'agit de réponses fermées, il est possible d'établir dans chaque groupe, un pourcentage de réponses positives et de le comparer aux taux dans le référentiel. Le tableau ci-dessous présente ces résultats.

| Filiations                        | Sous-filiations                      | nb élèves | q24<br>(A l'aise avec DERIVE) | q31<br>(Aidé à apprendre) | q32<br>(Aurait pu aider à apprendre) | q37<br>(Avoir DERIVE en perman.) | q38<br>(DERIVE pour contrôle) |
|-----------------------------------|--------------------------------------|-----------|-------------------------------|---------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|
| Refus                             | DERIVE fonctionnel<br>⇒ refus        | 48        | 63%                           | 19%                       | 40%                                  | 29%                              | 53%                           |
|                                   | DERIVE compliqué<br>⇒ refus          | 43        | 29%                           | 15%                       | 34%                                  | 19%                              | 46%                           |
| Utilisation aveugle ...           |                                      | 35        | 64%                           | 34%                       | 62%                                  | 45%                              | 76%                           |
| Apports à l'activité mathématique | Apports à la compréhension           | 38        | 82%                           | 64%                       | 59%                                  | 71%                              | 79%                           |
|                                   | Apports à la résolution de problèmes | 35        | 72%                           | 27%                       | 35%                                  | 60%                              | 63%                           |
| DERIVE outil de calcul            | Auxiliaire en continu                | 38        | 86%                           | 23%                       | 40%                                  | 60%                              | 81%                           |
|                                   | Auxiliaire ponctuel                  | 42        | 68%                           | 26%                       | 45%                                  | 54%                              | 66%                           |
| Population totale                 |                                      | 459       | 65%                           | 26%                       | 47%                                  | 46%                              | 69%                           |

Les réponses aux questions ouvertes sont d'une grande diversité. Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, les représentations doivent servir de filtre pour leur interprétation, et permettre en retour d'enrichir notre compréhension de ces représentations. C'est pourquoi nous retenons seulement les réponses ayant un lien avec ces représentations. Notre méthode consiste donc, pour chacune des 7 (sous)filiations, à rechercher parmi les réponses des élèves de cette (sous)filiation, celles qui sont en rapport direct avec la représentation de DERIVE sous-jacente. Nous analysons ces réponses dans la suite, et nous en donnons des exemples pour illustrer les analyses.

### **INFLUENCE DE LA FAMILIARITÉ AVEC DERIVE**

La question q24 porte sur la familiarité "actuelle" de l'élève, après la phase d'apprentissage : *Vous sentez-vous maintenant à l'aise avec DERIVE ?* La quatrième colonne du tableau ci-dessus montre, à l'intérieur de deux filiations, des différences significatives entre sous-filiations.

#### **"Le refus de DERIVE"**

Dans cette filiation, 63% des élèves qui refusent DERIVE à cause de son caractère fonctionnel sont à l'aise avec le logiciel; ils sont, de ce point de vue, très peu différents de l'élève moyen. Par contre ceux qui refusent le logiciel à cause de son caractère "compliqué" ne sont plus que 29% à être à l'aise. Ce n'est donc pas le logiciel en lui-même qui fait écran aux mathématiques, mais bien les difficultés que l'élève rencontre dans l'utilisation du logiciel.

On vérifie ainsi l'existence de deux représentations distinctes de DERIVE, déterminées par deux niveaux distincts de familiarité, qui convergent en un même refus du logiciel.

#### **"DERIVE outil pour faciliter et contrôler les calculs"**

Les élèves qui admettent DERIVE seulement comme un outil à des endroits isolés du calcul ont une familiarité avec le logiciel peu différente de l'élève moyen. Au contraire, ceux qui conçoivent une utilisation en continu ont un taux de familiarité très supérieur à la moyenne. Ceci confirme qu'une utilisation de DERIVE "intelligente", "souple", suppose une plus grande familiarité avec le logiciel.

### **REPRÉSENTATION DE L'APPORT DE DERIVE AUX APPRENTISSAGES.**

Les réponses à la question q31, sont dans leur grande majorité négatives (26 % de oui). Elles sont un peu plus positives à la question q32.

#### **"Le refus de DERIVE".**

On trouve des taux inférieurs aux moyennes dans cette filiation. Pour motiver leur refus, les élèves se placent donc bien sur le terrain des apprentissages, et non sur le seul plan des contraintes de l'évaluation. Pour expliquer cette non-contribution de DERIVE à leurs apprentissages, ils sont nombreux à mettre en avant la non transparence des calculs effectués par le logiciel :

"Il donne simplement les réponses sans explication"

Il leur semble que l'utilisation du logiciel aurait dû s'accompagner d'une intervention enseignante plus importante

"Si un professeur aurait été tout le temps à notre disposition pour nous aider à apprendre"

On retrouve également dans la sous-filiation "DERIVE compliqué  $\Rightarrow$  refus", les difficultés rencontrées dans l'utilisation du logiciel :

"Logiciel dur d'abordage"

### **"Apports à la compréhension"**

Cette sous-filiation est la seule à présenter un taux important de réponses positives à la question q31. Pour les élèves, comprendre avec DERIVE, c'est donc apprendre des mathématiques.

### **Les autres sous-filiations "favorables" à DERIVE**

"Apports à la résolution de problèmes" et les deux sous-filiations "Outil de calcul" présentent au contraire un taux faible de réponses positives à la question 31, proche de la moyenne. Pour ces élèves, l'appréciation positive portée sur DERIVE ne semble donc pas résulter d'un apport du logiciel à leurs apprentissages, et l'on trouve, dans ces sous-filiations, les mêmes arguments sur la non-transparence des calculs que dans la filiation du refus : on aime travailler avec DERIVE, car c'est plus pratique, on fait des choses différentes, mais on n'apprend pas davantage.

## **SOUHAITS QUANT À LA DISPONIBILITÉ DE DERIVE**

### **"Le refus de DERIVE".**

Peu d'élèves souhaitent disposer de DERIVE en permanence. Cependant près d'un sur deux choisirait d'utiliser DERIVE au prochain contrôle, si cela leur était proposé.

*DERIVE fonctionnel  $\Rightarrow$  refus*

Parmi les explications d'un refus d'utiliser DERIVE, voici des réponses qui confirment l'idée que pour les élèves de cette sous-filiation, le logiciel "fait le travail de l'élève" et que, par là, il perd son intérêt :

" Car le travail est mâché, il suffit de donner l'énoncé pour avoir la réponse"

"Il faut pouvoir raisonner par soi-même, sinon dans quelques années nous n'allons plus savoir faire quelque chose sans des programmes sur ordinateur"

*DERIVE compliqué  $\Rightarrow$  refus*

Le choix d'utiliser DERIVE en contrôle est le plus faible dans cette sous-filiation. Les difficultés de l'élève avec le logiciel prennent en effet toute leur importance en temps limité :

"Personnellement, c'est une perte de temps. Je ne sais pas bien utiliser D. J'ai plus vite fait de calculer moi-même"

"Trop long à utiliser, erreurs possibles sur le clavier"

### **"Utilisation aveugle"**

Le choix d'utiliser DERIVE en contrôle est supérieur à la moyenne. Les élèves invoquent le plus souvent la rapidité et l'exactitude des résultats

"Car cela serait plus rapide et les réponses seront totalement correctes"

"Car c'est plus rapide et plus efficace"

### **Les filiations favorables à DERIVE**

### *"Apports à la compréhension"*

Le taux le plus important d'élèves souhaitant avoir DERIVE en permanence est logiquement obtenu dans cette sous-filiation. Voici des justifications :

"Cela permet de revoir rapidement tout ce qui a été vu, pour bien comprendre certaines choses mal comprises"

"Parce que D., ça aide à comprendre les maths"

### *"Apports à la résolution de problèmes "*

Parmi les filiations favorables à DERIVE, le choix d'utiliser DERIVE en contrôle est le plus faible dans cette sous-filiation. Pour ces élèves, DERIVE est intéressant car il "change les problèmes". Mais pour eux, le logiciel intervient sans doute dans un contrat différent du contrat auquel le contrôle est associé, et c'est pourquoi ils sont moins nombreux à souhaiter l'utiliser en contrôle. Un élève souligne bien que DERIVE "change le contrôle" :

"Les interrogations écrites avec D. sont souvent plus difficiles que les autres"

D'autres élèves, favorables à l'utilisation de DERIVE en permanence, précisent leur opposition à une utilisation en contrôle par référence aux examens :

"Ca ne nous prépare pas aux examens et nous fait prendre de mauvaises habitudes".

Le contrat établi lors de l'examen "fait référence" lorsqu'il s'agit d'un contrôle, et l'élève ne voit pas la place de DERIVE dans ce contrat.

### *"Auxiliaire en continu".*

Au contraire, le choix d'utiliser DERIVE en contrôle est le plus élevé dans cette sous-filiation. Nous avons souligné déjà qu'il s'agit d'élèves ayant une utilisation "souple" de DERIVE, leur permettant sans doute de produire la rédaction attendue à la suite d'une résolution manuelle, tout en bénéficiant de l'aide de DERIVE.

"Cela permet de vérifier les calculs intermédiaires, les études de fonctions, de manière simple et rapide"

"Je trouve qu'il est plus facile de montrer si une solution est vraie ou fausse, plutôt que de chercher une solution"

"D. est intéressant pour vérifier les calculs qui, s'ils sont inexacts, faussent tout le reste du problème"

## **AVIS PERSONNEL SUR DERIVE**

### **"Le refus de DERIVE".**

Curieusement les avis négatifs sur DERIVE ne sont pas majoritaires parmi les réponses à cette question. Peut-être le libellé de la question conduisait-il les élèves à montrer les aspects positifs du logiciel ("*Que fait-on de plus ..*"). Les avis négatifs éclairent cependant les représentations dans les sous-filiations.

### *DERIVE fonctionnel $\Rightarrow$ refus*

"On travaille plus rapidement, D. fait les calculs et nous survolons le problème sans y rentrer en profondeur "

"On peut résoudre certaines choses qui ne sont pas de notre niveau. mais à part ça on ne peut rien inventer avec D."

"Difficile à exploiter dans le sens que souvent on fait pas les rapports avec le cours et surtout on est pressés"

La rapidité d'exécution, la possibilité de travailler sur des problèmes plus difficiles sont soulignées en fonction de leurs conséquences négatives sur l'apprentissage.

*DERIVE compliqué  $\Rightarrow$  refus*

"On perd du temps et on a du mal à finir le programme de math en fin d'année / De 9 heures de math au programme, on passe à 11 voire 12h de maths mais les résultats de la classe ne suivent pas"

"C'est pas terrible, ça n'avance pas beaucoup le travail de maths proprement dit"

A nouveau, il est clair que le refus de DERIVE dans cette sous-filiation se situe bien en fonction des apprentissages, et non relativement aux seuls examens.

### **Utilisation aveugle**

Les élèves de cette filiation soulignent, plus que d'autres, l'intérêt qu'ils ont trouvé à travailler sur ordinateur.

"On apprend à se servir d'un ordinateur"

"On rédige notre travail sur écran"

### **Apports à la pratique mathématique**

*Apports à la compréhension*

Voici quelques avis permettant de mieux voir comment les élèves de cette sous-filiation se représentent l'apport de DERIVE

"On change sa façon de comprendre les maths, car on en a une autre approche. En quelque sorte, on se donne d'autres moyens pour comprendre les maths / Des suites "

"Grâce à D., on arrive à mieux comprendre les exercices car si on ne comprend pas, D. nous explique à chaque fois / Je lui dirais que je n'avais pas compris les fractions et grâce à D. maintenant j'ai compris!"

"On a eu la chance de travailler avec D. parce qu'on a découvert que sur l'ordinateur, on pouvait découvrir plus de choses qu'en cours normal et en plus, ça nous intéresse plus de taper sur un clavier plutôt que d'écrire nos cours et exercices"

"Esprit d'analyse car on doit voir ce qu'on a planifié comme résolution avant de transcrire sur D. Donc il faut réfléchir"/ Calcul complexe, ex. savoir mettre les parenthèses pour définir, découper le calcul que l'on veut faire exécuter à D."

Les trois idées qui semblent présentes sont les suivantes : possibilité de points de vue différents sur un sujet mathématique, relation personnelle au logiciel qui permet une relation personnelle aux mathématiques, décentration par rapport au calcul.

*Apports à la résolution de problèmes*

Logiquement, des élèves de cette sous-filiation insistent sur les problèmes nouveaux traités avec DERIVE

"Peut-être que l'on peut aborder des exercices intéressants sans que les calculs n'entravent la démarche, ou encore des problèmes différents des exercices habituels. / L'étude des familles de droites"

"Je lui réponds que l'on approfondit des résultats et que l'on change des exercices traditionnels / "Présumés" théorèmes. La voiture"

D'autres élèves insistent sur le changement de mode de travail.

"On travaille davantage et autrement, travail en équipes de deux."

### **DERIVE outil pour faciliter et contrôler les calculs**

Voici pour chaque sous-filiation, des réponses qui permettent de voir comment les élèves se représentent l'aide de DERIVE dans une pratique mathématique, qui, dans cette filiation, n'est pas modifiée par l'introduction de DERIVE.

#### *Auxiliaire en continu*

Certains élèves insistent sur l'efficacité nouvelle que leur apporte DERIVE

"L'on travaille peut-être plus efficacement"

"Des calculs plus rapides, on apprend à s'organiser / Suites "

"On a une illustration immédiate des exercices effectués"

D'autres insistent sur l'autonomie que leur permet DERIVE

"On gagne du temps car on trouve nos erreurs plus facilement sans appeler le prof"

"Disons que c'est une aide pour s'entraîner en math"

#### *Auxiliaire ponctuel*

Pour certains élèves, l'aide est surtout une vérification a posteriori

"Contrôler correctement les résultats obtenus / Ca permet de voir la correction d'un développement, par exemple"

Pour d'autres, il est plus intéressant de chercher d'abord avec DERIVE, car cela donne une méthode de résolution plus facile.

"On sait dans quelle voie se lancer et en plus D. nous rassure / Par exemple si on doit chercher une primitive et qu'à la main on ne la trouve pas; on demande à D. la primitive et il nous reste plus qu'à vérifier en dérivant"

## **VI. LE QUESTIONNAIRE "PROFESSEURS"**

Parmi les 32 questionnaires professeurs retournés (Cf. paragraphe I), nous avons fait le choix de dépouiller seulement les 25 réponses de professeurs dont les élèves ont effectivement utilisé DERIVE. En effet, 7 professeurs ont utilisé le logiciel uniquement en phase collective (avec un rétroprojecteur). Leurs élèves n'ont donc pas utilisé le logiciel, et par conséquent, ces professeurs n'entrent pas dans le cadre de notre étude.

### **VI.1 LE TEXTE DU QUESTIONNAIRE**

---

**Si vous utilisez DERIVE dans plusieurs classes, remplissez s'il vous plaît un questionnaire par classe à partir de la question 4, merci**

#### **I. INFORMATIONS GENERALES**

1. Comment avez-vous connu DERIVE ?
  2. Avez-vous reçu une formation spécifique à propos de ce logiciel et de son utilisation pour l'enseignement (si oui, préciser) ?
  3. Depuis combien de temps utilisez-vous DERIVE
    - pour votre usage personnel et la préparation de vos cours ?
    - avec vos élèves ?
  4. Classe :
  5. Nombre d'élèves :            F :            G :
  6. De quel équipement informatique (fixe ou mobile) pouvez-vous disposer dans votre établissement pour l'enseignement des mathématiques dans cette classe ?
  7. Y avez-vous facilement accès ? Sinon, quels sont les principaux problèmes rencontrés ?
  8. Quels logiciels avez-vous utilisés pendant l'année avec cette classe ?
    - occasionnellement (préciser si possible pour chacun le nombre d'utilisations) :
    - régulièrement (préciser si possible pour chacun le rythme d'utilisation) :
  9. Organisez-vous par ailleurs des activités nécessitant l'utilisation des calculatrices ?

régulièrement   occasionnellement   rarement   jamais
- Commentaires éventuels :
10. Comment avez-vous utilisé DERIVE cette année avec les élèves de cette classe ?
    - utilisation collective en classe :

Oui   Non   Nombre de séances :
    - TD en salle informatique :

Oui   Non   Nombre de séances :
- 

Il peut s'agir bien sûr d'une utilisation partielle pendant la séance

- autres (préciser) :

11. Vos élèves ont-ils accès à DERIVE en dehors de la classe :

- au CDI ? Oui Non

- dans un club mathématique ? Oui Non

- autres (préciser) :

12. Si oui, quelle proportion d'élèves profite de ces possibilités :

- régulièrement :

- occasionnellement :

## II. INITIATION A DERIVE

13. Avez-vous organisé une ou plusieurs séances spécifiques pour l'initiation à DERIVE (si oui préciser combien de séances, si non préciser pourquoi) ?

14. Pensez-vous que l'initiation à DERIVE est :

très facile facile assez difficile difficile

15. Quelle proportion de vos élèves vous semble maintenant vraiment à l'aise avec DERIVE ?

16. Quelles commandes DERIVE avez-vous introduites et fait utiliser par les élèves (entourer les commandes utilisées régulièrement et souligner les commandes utilisées occasionnellement) :

Fenêtre algèbre : Auteur Bâtis Calcul ( Dérive - Intègre - Limite - Produit - Somme )  
Declare ( Fonction - Variable - Matrice - Vecteur ) Développe Factor Saute Resol Choix ( Simplifie ) Options ( Notation - Précision ) Graph Supprime Simplifie Transfert ( Charge - Sauve ) Mouv Fenêtre ( Inverse - Vers - Ouvre - Coupe ) Approx

Fenêtre de traçage 2D : Algèbre Centre Supprime Vers Options ( Couleur - Affiche - Notation - Précision - Etat ) Graph Ech. Zoom

Fenêtre de traçage 3D : Algèbre Centre Oeil Focale Grilles Cache Taille Options ( Axes - Couleur - Affiche - Notation - Précision ) Graph Zoom

Touches de fonctions : F1 F2 F3 F4

Autres commandes :

17. Avez-vous rencontré certaines difficultés techniques, pédagogiques, dans l'utilisation de DERIVE avec les élèves et si oui lesquelles ?

## III. SEANCES AVEC DERIVE

18. Pour chacune<sup>2</sup> des séances utilisant DERIVE que vous avez organisées, pouvez-vous préciser :

- le thème de la séance et ses objectifs,
- le mode d'utilisation de DERIVE choisi (collectif, TD avec fonctionnement par binômes ou individuel...),
- ce qu'apporte à votre avis l'utilisation de DERIVE (prise en charge de calculs pénibles, moyen de contrôle, aide à l'exploration et à la formulation de conjectures, aide à la visualisation, articulation entre les cadres algébrique et graphique ....)

#### IV. EVALUATION, BILAN

19. Globalement, qu'attendiez-vous de l'utilisation de DERIVE dans cette classe ?

20. Quelles sont les séances qui, à votre avis, ont le mieux marché et pourquoi ?

21. Quelles sont les séances qui, à votre avis, ont le moins bien marché et pourquoi ?

22. Quel bilan faites-vous de l'utilisation de DERIVE dans cette classe (donner une appréciation de 0 à 4 : 0 bilan très négatif, 4 bilan très positif) ?

0      1      2      3      4

23. Pouvez-vous préciser cette appréciation en indiquant :

- ce qui vous a semblé le plus positif dans cette utilisation de DERIVE pour l'enseignement des mathématiques dans cette classe,
- les déceptions éventuelles que vous avez éprouvées par rapport à vos attentes.

24. Si vous aviez une classe comparable l'an prochain :

- utiliseriez-vous de nouveau DERIVE ?
- apporteriez-vous des modifications dans son utilisation (séances modifiées, ajoutées, supprimées, modifications techniques...) et si oui lesquelles ?

---

<sup>2</sup> Si vous utilisez DERIVE très fréquemment, répondez aux questions posées pour un ensemble de séances qui vous semble représentatif des utilisations faites et décrivez plus rapidement les autres séances.

## VI.2 BUTS DE L'ÉTUDE

Plutôt que de dépouiller de façon exhaustive les nombreux items du questionnaire, nous avons cherché à tirer parti des réponses à certaines questions, en fonction de nos interrogations sur l'utilisation de DERIVE :

1. Quels modes d'utilisation de DERIVE rencontre-t-on dans les classes : durée sur une année, répartition collectif/TD, type d'initiation, fonctionnalités utilisées etc ?
2. Sur quels contenus mathématiques les professeurs conduisent-ils des activités avec DERIVE ? Que pensent-ils a posteriori des ces activités ?
3. Quels types d'activité mathématique les professeurs privilégient-ils quand ils utilisent DERIVE avec les élèves ? Quels apports de DERIVE anticipent-ils dans cette activité ? Dans leur expérience, quels apports ont été reconnus valides ? Quelles ont été leurs déceptions ?

Les données brutes issues des réponses des professeurs ont été regroupées dans des tableaux sur lesquels nous fondons les analyses ci-dessous. Pour des questions de présentation, ces tableaux sont regroupés en annexe page 61. Dans ces tableaux, chaque professeur est repéré par un numéro d'identification de 1 à 25, auquel nous faisons référence entre parenthèses dans les analyses.

## VI.3 MODES D'UTILISATION DE DERIVE

Pour cette partie, nous tirons parti des réponses aux questions 8 (logiciels utilisés régulièrement) , 10 (nombre de séances collectives et TD avec DERIVE), 13 (initiation à DERIVE) et 16 (fonctionnalités de DERIVE introduites par le professeur). En fonction des réponses à la question 10, nous déterminons des catégories d'utilisation de DERIVE par les professeurs. Puis nous exploitons cette classification pour interpréter les réponses aux autres questions.

### CATÉGORIES D'UTILISATION

Nous avons déterminé 4 catégories (tableau 1 de l'annexe page 61 ci-dessous) correspondant à des "modes" ou "projets" d'utilisation de DERIVE.

#### **Utilisation ponctuelle**

Il s'agit de 7 professeurs ayant utilisé DERIVE pour 1 à 5 séances dans l'année. Dans ce cas, il ne s'agit pas d'un "projet d'utilisation", mais plutôt d'une tentative à caractère exploratoire.

#### **Utilisation occasionnelle**

Ces 8 professeurs ont un projet plus conséquent, mais le logiciel n'est pas utilisé plus d'une fois par mois, ou seulement sur une période réduite de l'année

#### **Utilisation régulière**

Ces 6 professeurs ont utilisé DERIVE dans une perspective d'intégration du logiciel aux activités mathématiques. Pour certains (14, 17, 18, 23) cette intégration se fait plutôt par des travaux dirigés réguliers en salle informatique, éventuellement complétés par une utilisation collective. Pour les autres (7, 11), l'utilisation hors salle informatique à l'aide d'un rétroprojecteur est la règle, et les travaux dirigés sont moins nombreux.

#### **Utilisation intensive**

Ces 4 professeurs réalisent une intégration complète du logiciel dans leur enseignement de mathématiques. Pour deux professeurs (6 et 20), cette intégration s'opère par la réalisation de nombreuses séances collectives et de TD. Chacun des élèves des deux autres professeurs (1 et 3) a à sa disposition un ordinateur avec DERIVE dans les séances de mathématiques.

### **EXPLOITATION**

#### **Diversité des modes d'utilisation**

La répartition des 25 professeurs dans les 4 catégories ci-dessus, montre que l'utilisation du logiciel peut se faire avec des projets très divers : d'une utilisation à caractère exploratoire jusqu'à une intégration complète. Nous avons écarté les réponses de professeurs dont les élèves n'ont jamais utilisé eux-mêmes le logiciel ; ce mode d'utilisation "entièrement collectif" aurait constitué une catégorie supplémentaire.

#### **Les professeurs du groupe D.I.T.E.N.**

On pouvait s'attendre, à trouver les 12 professeurs du groupe D.I.T.E.N.<sup>3</sup> dans les deux catégories réalisant l'intégration du logiciel, puisqu'il s'agit d'un objectif explicite de ce groupe. On trouve cependant 4 professeurs du groupe dans les catégories "ponctuel", et "occasionnel". Dans deux cas, les réponses au questionnaire permettent de savoir pourquoi les professeurs n'ont pas poursuivi cet objectif : dans la classe de Math. Spé. de l'un (22) l'utilisation de l'informatique se fait de façon séparée des mathématiques, l'autre (15) utilise de façon intensive d'autres logiciels (Imagiciels, Cabri).

Dans les deux catégories réalisant une intégration significative du logiciel, sur 10 professeurs, on trouve 2 personnes hors groupe D.I.T.E.N.. Ce petit nombre semble indiquer qu'une telle intégration est actuellement difficile en dehors d'un projet institutionnel.

#### **Les ordinateurs de poche**

Deux professeurs du groupe D.I.T.E.N. (identifiés 5 et 17) ont équipé leur classe d'ordinateurs de poche avec DERIVE. On s'étonnera peut-être de trouver ces professeurs dans deux modes d'utilisation distincts. En fait, les ordinateurs de poche semblent exploités de façon assez différente. Dans la classe du professeur 5 (mode "intensif"), l'ordinateur de poche est présent à toutes les séances pour tous les élèves. Dans la classe du professeur 17 (mode "régulier") la mise à disposition d'ordinateurs de poche répond à un besoin d'utilisation en travail personnel ("à la maison"), et d'ailleurs, les ordinateurs de poche sont disponibles seulement trois mois dans l'année et doivent être empruntés pour un temps limité (il n'y en a pas un pour chaque élève). Ce professeur n'utilise pas exclusivement DERIVE : il utilise un grapheur pour 4 séances, et Cabri-géomètre pour 6 autres séances. Il réalise donc bien une intégration partielle du logiciel DERIVE.

Sans tirer de conclusion à valeur statistique, on remarquera que ces deux "exploitations" des ordinateurs de poche se situent l'une en Première, l'autre en Terminale. Nous avons déjà remarqué avec les calculatrices que l'utilisation "à la maison" dépassait l'utilisation "en classe" à partir de la classe de Terminale. Peut-être y-a-t-il une détermination forte à faire passer l'utilisation de moyens technologiques dans le domaine privé de l'élève à partir de cette classe.

#### **L'initiation (cinquième ligne des tableaux page 61)**

---

3 Les numéros d'identification des professeurs du groupe ministériel sont soulignés dans les tableaux.

On rencontre trois modes d'initiation :

- dans le premier, que nous qualifions de mode "court" ( 5 professeurs), l'initiation est très courte ou inexistante, les activités commencent d'emblée, et les fonctionnalités (souvent en nombre réduit) sont introduites au fur et à mesure des besoins.
- dans le second mode dit "spécifique" (16 professeurs) une séance au moins est consacrée à une initiation spécifique au logiciel
- dans le troisième mode dit "mixte" (4 professeurs), une même séance permet l'initiation au logiciel et des révisions sur des notions mathématiques.

Dans les réponses des professeurs, il n'est pas toujours facile de déterminer les raisons qui ont conduit au choix d'un mode d'initiation.

- Dans le mode "court", on peut penser que, pour les professeurs, le logiciel présente seulement des caractéristiques techniques qu'il est possible de décrire rapidement, les aspects "mathématiques" du logiciel apparaissant de façon "naturelle" au moment de leur utilisation.
- Le mode "spécifique" correspond souvent à une volonté de permettre une utilisation autonome du logiciel par l'élève : il apparaît particulièrement nécessaire dans des modes d'utilisation individuelle intensif par les élèves (1, 3).
- Le mode "mixte" correspond probablement à la volonté d'intégrer une initiation spécifique au logiciel dans un contrat didactique qui privilégie les mathématiques habituelles.

On constate de façon logique que, dans la catégorie "utilisation intensive", le mode d'initiation est mixte (6) ou spécifique (20, 1, 3).

Les autres catégories ne présentent pas de différences significatives : une ou deux initiations "courtes", une initiation "mixte" et le reste en "spécifique". Il est curieux de constater que, dans la catégorie "ponctuel" par exemple, 5 professeurs sur 7 consacrent une heure ou plus à l'initiation. Doit-on en déduire que, dans leur majorité, les professeurs pensent qu'une initiation conséquent à DERIVE est nécessaire, quelque soit le projet d'utilisation du logiciel ? Et que d'autres pensent qu'il n'y a pas besoin d'initiation spécifique, indépendamment de la durée d'utilisation.

### **Les fonctionnalités de DERIVE utilisées par les élèves**

- Les fonctionnalités de la fenêtre d'algèbre (Simplification, résolution, développement ...) sont les premières fonctions offertes à l'utilisateur de DERIVE. Elles sont vues dans toutes les classes.
- Les touches de fonction (F3 et F4) permettent la "réutilisation" d'expressions entrées ou obtenues par une action dans DERIVE. Elles permettent un usage plus rationnel du logiciel, tout en conduisant à penser les expressions comme objets manipulables. Elles sont vues dans 17 classes sur 25.
- Les fonctionnalités des fenêtres de tracé (2D et 3D) font de DERIVE un grapheur, et permettent ainsi une interaction entre algèbre et graphisme. La fenêtre de tracé de courbes (Fen. 2D) a été présentée par 16 professeurs sur 25. La fenêtre de tracé des expressions à deux variables (Fen. 3D) a été utilisée dans les classes de 3 professeurs, mais deux de ces professeurs précisent qu'il s'agit seulement d'un "aperçu". On peut donc penser que DERIVE a été utilisé dans la majorité des cas comme grapheur 2D (en concurrence avec la

calculatrice graphique), mais pratiquement pas en 3D. Il est clair que les programmes du secondaire privilégient les fonctions d'une variable, et donc les graphes 2D, mais on aurait pu penser que dans les classes post-baccalauréat, DERIVE aurait été intéressant à utiliser comme grapheur 3D, ce qui n'est pas le cas pour les 3 professeurs enseignant dans ces classes.

Il y a donc des utilisations différenciées qui peuvent s'apercevoir à partir des fonctionnalités utilisées par les élèves. Une surprise est que ces différences ne semblent pas liées aux catégories d'utilisation : dans les différentes catégories d'utilisation, on rencontre en effet des professeurs déclarant présenter seulement la fenêtre d'algèbre, et d'autres présenter pratiquement toutes les fonctionnalités proposées dans le questionnaire.

#### **VI.4 ACTIVITÉS CONDUITES AVEC DERIVE : CONTENUS, SPÉCIFICITÉS, INSATISFACTIONS.**

Comment les professeurs articulent-ils les activités d'utilisation de DERIVE et les notions aux programmes des classes ? Y a-t-il des activités qui ne pourraient avoir lieu sans DERIVE ? Que pensent les professeurs a posteriori des séances qu'ils ont mises en place ?

On peut répondre à ces interrogations à l'aide des réponses à la question 18, où les professeurs décrivent les séances d'utilisation de DERIVE qu'ils ont organisées, en précisant pour certaines séances l'apport attendu de DERIVE et à l'aide des réponses aux questions 20 et 21, où les professeurs précisent respectivement "les séances qui ont le mieux marché", et celles "qui le moins bien marché". A l'aide de ces réponses, nous établissons en colonne 3 du tableau 2 de l'annexe page 61, pour chaque professeur, une série de une à cinq "activités" en précisant, lorsque c'est possible, l'apport de l'utilisation de DERIVE dans ces activités et l'appréciation positive ou négative portée par le professeur à l'issue de cette activité. Les activités sont de "unités de cours", se référant au même sujet, et le temps consacré à chacune de ces activités peut différer notablement d'une réponse à l'autre. Dans certains cas, nous avons pu nous aider de textes écrits par les professeurs en dehors de ce questionnaire, pour mieux comprendre leurs réponses. Le renvoi à ces textes est fait sous forme de notes de bas de pages.

##### **CONTENUS ET PROGRAMMES DES CLASSES**

Dans le tableau 2, nous avons rangé les réponses dans l'ordre des classes (de la 3ème à la Terminale). Le niveau de classe est indiqué en colonne 2. Ceci nous permet de mettre en relation les activités organisées par les professeurs et le niveau de classe auquel ces activités s'adressent.

- Dans les 3 classes de 3ème
  - Expressions algébriques, développements, simplifications
  - Résolution d'équations et de systèmes
  - Équations de droites et géométrie analytique
- Dans les 6 classes de Seconde
  - Révisions sur les expressions algébriques
  - (In)équations et systèmes linéaires
  - Fonctions et représentations graphiques. Familles de courbes

- Géométrie analytique (cercle)
- Dans les 6 classes de Première
  - Fonctions et représentations graphiques (effet de transformations algébriques : translations, affinités)
  - Expressions, Factorisations, Équations
  - Dérivation
  - Combinatoire
  - Signe d'une expression
  - Étude d'une fonction (variations, représentation graphique)
  - Trigonométrie
- Dans les 7 classes de Terminale
  - Statistique (ajustement linéaire)
  - Dérivation, Primitives, Intégration, Équations différentielles
  - Étude de fonctions. Recherche de fonctions sous contraintes
  - Géométrie analytique, transformations géométriques
  - Calculs et équations dans les complexes
  - Suites
  - Résolution de systèmes par la méthode du pivot
  - Courbes paramétrées
- Dans les 3 classes "Post-Baccalauréat"
  - Calculs d'intégrales, dérivées, limites
  - Équations différentielles
  - Suites récurrentes
  - Fonction de 2 variables
  - Calcul matriciel, déterminants et géométrie analytique

Nous constatons ainsi que les connaissances recherchées dans ces activités s'insèrent dans le contenu normal des programmes de ces classes. Dans les classes de 3ème et de lycée, ces activités couvrent la quasi totalité du programme d'algèbre ou d'analyse, et la géométrie est parfois abordée par le biais de l'analytique.

### **LES ACTIVITÉS SPÉCIFIQUES À DERIVE**

Nous constatons aussi la présence d'activités difficilement envisageables sans DERIVE

- Étude formelle de méthodes de résolution (4, 9)

- Tracé de familles de courbes (avec la fonction VECTEUR), recherche de fonctions sous contraintes (18, 3, 7)
- Résolution de problèmes ouverts, modélisation (10, 3, 19, 1)

Dans cette catégorie, les activités décrites par les enseignants ne fonctionneraient sans doute pas sans un logiciel de mathématiques symboliques. Elles ne s'éloignent pas des objectifs des programmes des classes, tout en ajoutant une dimension nouvelle à ces objectifs :

- Résolution de problèmes ouverts. Une étude attentive de ces activités dans les classes de lycée de montre qu'elles sont organisées en fonction des contenus notionnels des classes (étude des fonctions, factorisations des polynômes). Dans la classe "BTS + 1", la modélisation contribue fortement à une liaison entre l'enseignement des mathématiques et l'enseignement professionnel. Dans les deux cas, ces activités ont pour but d'ajouter une dimension supplémentaire de motivation, de signification aux contenus.
- Étude des équations et systèmes d'équations. Au delà de la "résolution effective", la dimension formelle est développée : résolution de systèmes généraux, comparaison de méthodes.
- Représentations et problèmes sur les familles de courbes. Ces activités renvoient à l'étude d'ensembles de fonctions, à partir de leurs représentations sous forme de familles de courbes. On peut ainsi avoir une activité de résolution de problème sur des objets "fonctions", ce qui donne une dimension notablement plus générale à la notion de fonction.

Ces activités spécifiques à DERIVE sont importantes à observer dans la perspective d'une diffusion de l'utilisation de S.M.S. dans les classes. Les professeurs pourraient développer des activités de modélisation ayant pour fonction de motiver le travail des élèves et de donner un supplément de signification aux notions. Ils pourraient aussi chercher à ajouter des dimensions supplémentaires aux notions : ils pourraient par exemple plus facilement présenter les fonctions comme éléments d'ensembles, ou dégager plus facilement la notion de solution générale des équations...

Ces activités spécifiques à DERIVE ne sont pas cependant pas majoritaires parmi les activités décrites par les professeurs. On peut penser qu'une raison en est qu'elles sont notablement plus difficiles à mettre en place.

### INSATISFACTIONS SUITE AUX ACTIVITÉS

Dans les appréciations portées sur les séances qu'ils ont organisées, des insatisfactions rapportées par les professeurs sont très riches en informations sur les conditions concrètes de mise en place des activités avec DERIVE :

- Difficultés techniques ou d'appropriation du logiciel (10, 25, 24)
- Mode d'expression des fonctions (2, 9, 12, 15) et mode de simplification des expressions trigonométriques (14) non conforme aux usages mathématiques
- Difficulté pour l'élève de trouver une signification aux feed back de DERIVE (20, 10, 14)
- Non transfert des connaissances nouvelles construites dans DERIVE vers l'environnement habituel (21)
- Choix des objets par le professeur non approprié (5, 19)

- Complexité ou abstraction trop grande dans les activités de résolution (16, 17, 1, 7)
- Difficultés des élèves à articuler algèbre et graphisme (4, 7, 17, 11)

Ces insatisfactions sont à mettre en relation avec les difficultés de l'analyse a priori que nous rapportons dans les observations (partie II). Dans de nombreux cas, il semble en effet que ces insatisfactions soient liées à une prise en compte insuffisante de la spécificité des situations d'apprentissage avec un S.M.S..

Une autre tendance est la sous-estimation des difficultés dans les activités "ouvertes" et dans l'interaction algèbre-graphique : le S.M.S. supprime certains obstacles calculatoires, mais les difficultés inhérentes à ces activités vont bien au delà du calcul.

Les réponses des professeurs ne permettent pas d'analyser plus en profondeur ces insatisfactions. Dans la suite, nous étudierons cette question sous l'angle d'une appréciation plus globale portée par les professeurs sur l'utilisation de DERIVE, en fonction de leurs anticipations.

## **VI.5 TYPES D'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE ANTICIPÉE PAR LES PROFESSEURS. ASPECTS POSITIFS CONSTATÉS ET DÉCEPTIONS.**

### **ANTICIPATIONS SUR L'UTILISATION DE DERIVE EN CLASSE**

La lecture des réponses à la question 19 nous permet de dégager trois grandes classes d'arguments en faveur de l'utilisation de DERIVE en classe. Dans l'une, DERIVE apparaît comme un "facilitateur" dans les phases de calcul. Dans une deuxième, DERIVE doit permettre à de nouveaux problèmes d'exister dans la classe. Dans la troisième, DERIVE intervient dans la construction et l'assimilation des connaissances. Ces classes ne réalisent pas une partition de la population des professeurs : des professeurs se situent préférentiellement dans une classe, tandis que d'autres justifient l'introduction de DERIVE en avançant des arguments de plusieurs classes.

Chaque classe d'arguments renvoie en fait à un type singulier d'activité mathématique dans lequel le professeur prévoit l'utilisation de DERIVE : calcul dans la première, résolution de "vrais" problèmes dans la seconde, apprentissage de notions ou techniques par des situations spécifiques dans la troisième.

Nous décrivons ci-dessous ces types d'activité en tirant partie, outre des réponses à la question 19 (colonne 2 du tableau 3 de l'annexe page 61), des apports de DERIVE anticipés ou constatés par les professeurs lorsqu'ils décrivent leurs activités (question 18, colonne 3 du tableau 2 de l'annexe page 61).

#### **Type 1. DERIVE "facilitateur" dans les phases de calcul : de la validation aux méthodes.**

Dans ce type d'activité, DERIVE est vu d'abord comme un moyen commode pour résoudre certaines difficultés de gestion de l'activité calculatoire dans la classe :

- suppléer aux difficultés techniques des élèves (6, 11)
- permettre l'(auto)validation (25)
- se "libérer" des calculs peu signifiants (pénibles (22), cachant la théorie (22) ou les méthodes (24, 10, 11))

Pour certains, l'utilisation de DERIVE va plus loin : on attend un changement de point de vue sur l'activité calculatoire, et l'accent est mis sur les méthodes :

- méthodes vues comme plus importantes que le calcul (11)
- réflexion sur les méthodes (10, 17)
- mémorisation des méthodes (12)

### **Type 2. Problèmes, expérimentation**

Dans ce type d'activité les professeurs utilisent DERIVE pour introduire un travail de recherche dans la classe :

- Des problèmes qui seraient impossibles sans DERIVE pour motiver les élèves (12)
- De "vrais" problèmes avec de "vraies" valeurs (1) : il s'agit d'activités de modélisation en liaison avec un enseignement professionnel en classe de BTS (1) ou au service de connaissances plus classiques du programme de 1ère (3).
- La possibilité pour les élèves de conjecturer (12), d'expérimenter (18), d'aborder de façon différente la résolution de problèmes (19), de développer leurs "initiatives" (7)

La pédagogie du problème, avec ses composantes "motivation", "modélisation", "ouverture" légitime ainsi l'introduction de DERIVE.

### **Type 3. Connaissances, compréhension, notions.**

Ces réponses insistent davantage sur l'apport de DERIVE à la construction des connaissances. Dans la première catégorie, la réflexion sur les méthodes apparaît comme un "sous-produit" de l'utilisation de DERIVE. Ici, des apports conceptuels diversifiés sont recherchés à travers des activités spécifiques construites avec DERIVE :

Ces apports peuvent concerner des connaissances en algèbre :

- "règles syntaxiques" (20),
- "sens d'une expression" (21)

ou en analyse :

- compréhension des suites (17)
- "appropriation d'une formule" d'intégration par parties (7)
- primitive comme dérivée inverse (17)

Les apports spécifiques de l'environnement DERIVE sont soulignés :

- Possibilité de faire interagir les aspects graphiques, numériques et algébriques (4, 7, 16, 2)
- Possibilité d'"anticiper" (17, 20), c'est à dire de construire des concepts comme "inverses" (développement comme factorisation inverse, primitive comme dérivée inverse).

### **ASPECTS POSITIFS ET DÉCEPTIONS DANS CHAQUE TYPE**

Nous rapportons, pour chaque type, les aspects positifs constatés dans les activités, et les déceptions ressenties par rapport aux attentes. Ceci doit permettre d'examiner comment les potentialités de DERIVE s'actualisent dans l'expérience des professeurs.

## Type 1

**Aspects positifs constatés :** autonomie de l'élève dans son travail (5, 15, 10)

**Déceptions :** utilisation pas assez générale pour que DERIVE joue vraiment le rôle assigné : le temps d'utilisation est trop court (8, 13, 25), ou trop discontinu (5), l'interface reste difficile à utiliser (10, 13), la calculatrice reste l'outil de référence (7, 8).

**Commentaire :** Dans cette catégorie les professeurs envisagent DERIVE comme un outil quotidien dans la classe. Ils reconnaissent généralement que l'élève s'approprie suffisamment l'outil pour une utilisation autonome. Leur déception montre cependant que DERIVE ne joue pas pleinement le rôle de facilitateur qu'ils avaient anticipé. L'outil n'est pas suffisamment familier, il reste "coûteux" en temps et en énergie et ainsi ne permet pas réellement de "libérer" l'élève des calculs. Peut-être aussi ces enseignants ont-ils sous-estimé les connaissances mathématiques nécessaires pour piloter le logiciel de façon autonome.

## Type 2

**Aspects positifs constatés :**

- motivation, participation des élèves (1, 12, 23)
- changement d'attitude vis à vis de la recherche de problèmes (1, 3, 19, 4)

**Déceptions :**

Certaines tiennent à la nature "ouverte" des problèmes :

- Difficultés de dévolution du problème (7,3)
- Difficulté de gestion de l'activité de recherche (19)
- Difficultés des élèves relative aux objets du problème (1),
- Difficulté d'évaluation (3)

D'autres sont plus spécifiques de l'environnement DERIVE

- DERIVE peut encourager un processus de "pêche au résultat" plutôt qu'une démarche réflexive (19)
- "Difficulté du professeur à expliquer les réponses données par le logiciel" (9), qui doit se produire particulièrement dans les situations ouvertes.

**Commentaire :**

Comme nous l'avons vu, l'introduction de DERIVE peut permettre un nouvel essor des activités de résolution de problèmes ouverts et de la modélisation. Les élèves y adhèrent en général, même si des difficultés de dévolution sont signalées.

L'expérience de certains professeurs montre que les difficultés inhérentes à ces activités ne disparaissent pas avec l'introduction du logiciel et nous avons vu ci-dessus qu'elles pouvaient avoir été minorées au moment de la mise en place des séquences.

A ceci s'ajoutent les caractéristiques des environnements informatiques : le comportement d'essai/erreur autorisé par la facilité des essais sur ordinateur peut éloigner d'une démarche réflexive ; la modification des rôles dans le système d'enseignement, consécutive à l'introduction d'un "oracle" informatique (Drouhard, Paquelier, 1992), met le professeur dans une situation nouvelle, souvent moins confortable que la situation habituelle.

### **Type 3**

#### **Aspects positifs constatés :**

Autonomie des élèves (7, 17), utilisation des feed-back de la machine (21)

Implication dans le travail mathématique : "les élèves parlent de math" (20) ; "travail en profondeur sur les concepts" (17), "concentration sur le phénomène mathématique" (16)

#### **Déceptions :**

Obstacle des connaissances antérieures des élèves : "Activités d'approfondissement ne fonctionnent pas par suite de "blocages" antérieurs" (17).

Utilisation réelle de DERIVE non conforme aux prévisions : "Logiciel pas assez souple" (14) ; "Moins facile à utiliser avec les élèves que prévu" (16) ; "Factorisation trop globale" (21).

#### **Commentaire :**

Les professeurs de cette catégorie sont attachés aux apports de DERIVE à la compréhension. Dans leurs constatations, ils insistent sur la qualité du travail mathématique des élèves.

Comme dans la catégorie précédente, des difficultés non anticipées viennent du contexte général d'apprentissage (les connaissances antérieures des élèves) et des caractéristiques de l'environnement DERIVE.

# **ANNEXE**

## **DONNÉES ISSUES DU QUESTIONNAIRE PROFESSEURS**

**Tableau 1**

**Ponctuel**

|                                     |                 |                 |                         |                            |                       |                 |                       |
|-------------------------------------|-----------------|-----------------|-------------------------|----------------------------|-----------------------|-----------------|-----------------------|
| Id. Pr.                             | 2               | 8               | 10                      | 16                         | 19                    | 22              | 24                    |
| Classe(s)                           | 2nde            | Term. C         | 2nde                    | Term. C                    | 1ère S                | Math Spé        | Term. C               |
| Nb sc. collec                       |                 |                 | 0                       |                            | 1                     |                 | 0                     |
| Nb sc. TD                           | 2               | 5               | 4                       | quelques                   | 3                     | 2               | 1                     |
| Initiation                          | mixte           | spécif          | spécif                  | spécif.                    | spécif.               | court           | court                 |
| Fonctionnalités vues par les élèves | Algèbre Fen. 2D | Algèbre Fen. 2D | Algèbre 2DTouches fonc. | Algèbre Fen. Touches fonc. | Algèbre Touches fonc. | Algèbre Fen. 2D | Algèbre Touches fonc. |

**Occasionnel**

|                                     |                               |         |                              |                               |                               |                               |                 |                       |
|-------------------------------------|-------------------------------|---------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------|-----------------------|
| Id. Pr.                             | 4                             | 5       | 9                            | 12                            | 13                            | 15                            | 21              | 25                    |
| Classe(s)                           | 1ère ES                       | 3ème    | Term. C                      | Term. C                       | 2nde                          | 2nde                          | 3ème            | 2nde                  |
| Nb sc. collec                       | 2                             |         | 2                            |                               | 1                             | 1                             | 1               | ?                     |
| Nb sc. TD                           | 6                             | 8       | 6                            | 8x2h                          | 8                             | 8                             | 6               | 4                     |
| Initiation                          | spécif                        | court   | spécif                       | spécif.                       | mixte                         | court                         | spécif. (coll.) | court                 |
| Fonctionnalités vues par les élèves | Algèbre Fen. 2D Touches fonc. | Algèbre | Algèbre Fen. 2DTouches fonc. | Algèbre Fen. 2D Touches fonc. | Algèbre Fen. 2D Touches fonc. | Algèbre Fen. 2D Touches fonc. | Algèbre         | Algèbre Touches fonc. |

### Régulier

|                                     | dominante TD                  |                               |                               |                  | dominante collectif           |                   |
|-------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|------------------|-------------------------------|-------------------|
| Id. Pr.                             | 14                            | 17                            | 18                            | 23               | 7                             | 11                |
| Classe(s)                           | 1ère S                        | Term. C                       | 2nde                          | 1ère S           | Term. E                       | Math Sup          |
| Nb sc. collec                       | 6                             | 6                             |                               |                  | utilis. en cours              | impos. à chiffrer |
| Nb sc. TD                           | 8                             | 9                             | 14                            | 2/ mois (module) | >7                            | 4                 |
| Initiation                          | spécif.                       | court                         | spécif.                       | spécif           | mixte                         | spécif            |
| Fonctionnalités vues par les élèves | Algèbre Fen. 2D Touches fonc. | Algèbre Fen. 2D Touches fonc. | Algèbre Fen. 2D Touches fonc. | Algèbre          | Algèbre Fen. 2D Touches fonc. | Algèbre           |

### Intensif

|                                     | TD + collectif  |                               | A disposition                                           |                                                |
|-------------------------------------|-----------------|-------------------------------|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Id. Pr.                             | 6               | 20                            | 1                                                       | 3                                              |
| Classe(s)                           | 1ère A          | 3ème                          | BTS+1                                                   | 1ère S                                         |
| Nb sc. collec                       | 20              | 20                            |                                                         |                                                |
| Nb sc. TD                           | 10              | 12                            |                                                         |                                                |
| Initiation                          | mixte           | spécif. (collectif)           | spécif.                                                 | spécif                                         |
| Fonctionnalités vues par les élèves | Algèbre Fen. 2D | Algèbre Fen. 2D Touches fonc. | Algèbre Fen. 2D Fen. 3D (aperçu) Touches fonc. (aperçu) | Algèbre Fen. 2D Fen. 3D (aperçu) Touches fonc. |

Tableau 2

| Id. Pr. | Classe(Pr.) | Activités , apports de DERIVE et appréciation                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5       | 3ème        | <p><b>Activité 1 :</b> Fractions (parenthésage et priorité) <sup>4</sup><br/> <b>Apport de DERIVE :</b> DERIVE présente les expressions (presque) comme en math<br/> <b>Appréciation :</b> Bien, contrôle par l'élève des expressions entrées. Intérêt de travailler sur ses propres expressions; moins bien: temps non négligeable de prise en main; 2 objectifs c'est trop.</p> <p><b>Activité 2 :</b> Résolution d'équations <math>ax=b</math> . travailler la technique de résolution<br/> <b>Apport de DERIVE :</b> Visualiser immédiatement l'effet d'une commande proposée par l'élève.<br/> <b>Appréciation :</b> Bien, élèves expérimentent à leur rythme, acquisition de réflexes utiles; acquisition de mécanismes réinvestissables</p> <p><b>Activité 3 :</b> Simplification de radicaux (travail technique de réduction d'expressions)<br/> <b>Apport de DERIVE :</b> DERIVE, calculateur formel et exact<br/> <b>Appréciation :</b> Difficulté sur certaines expressions (3rac20; rac(36+64))</p> |
| 20      | 3ème        | <p><b>Activité 1 :</b> Reproduire des expressions<sup>5</sup><b>Apport de DERIVE :</b> Compréhension des règles syntaxiques</p> <p><b>Activité 2 :</b> Équation d'une droite      <b>Apport de DERIVE :</b> Découverte de la notion      <b>Appréciation :</b> "Clarté"</p> <p><b>Activité 3 :</b> Résolution de système      <b>Apport de DERIVE :</b> Découverte d'une méthode<b>Appréciation :</b> Plus facile à comprendre avec DERIVE</p> <p><b>Activité 4 :</b> Géométrie analytique      <b>Apport de DERIVE :</b> Séparer analyse et calcul      <b>Appréciation :</b> Bien</p> <p><b>Activité 5 :</b> Carré de sommes<sup>6</sup>      <b>Apport de DERIVE :</b> Anticipations de développements</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

<sup>4</sup> Reproduction d'expressions fractionnaires in (Hirliman, 1994)

<sup>5</sup> Reproduction d'expressions fractionnaires in (Hirliman, 1994)

|    |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 21 | 3ème       | <p><b>Activité 1 :</b> Écriture expressions</p> <p><b>Activité 2 :</b> Calculs avec des expressions fractionnaires...</p> <p><b>Activité 3 :</b> Identités remarquables, développement numérique, puis avec des variables</p> <p><b>Activité 4 :</b> Factorisations; substitutions...</p>                                                                                                | <p><b>Apport de DERIVE :</b> Prise de sens d'une expression</p> <p><b>Apport de DERIVE :</b> Analyse en sous expressions</p> <p><b>Apport de DERIVE :</b> forme et comparaison sur une expression d'abord</p> <p><b>Appréciation :</b> Transfert plus difficile (nouvelles connaissances)</p> |
| 2  | 2nde<br>TF | <p><b>Activité 1 :</b> Résolution d'(in)équations, fonctions affines/morceaux segment</p> <p><b>Activité 2 :</b> vérif. de calcul et graphiques, résolution approchée d'équations</p> <p><b>Activité 3 :</b> Intro. notion de fonction</p> <p><b>Activité 4 :</b> Limites, asymptotes, solutions équ. diff. Calc. Intégral</p>                                                           | <p><b>Appréciation :</b> Non. Difficulté de définir un</p> <p><b>Appréciation :</b> Bien: illustration ou recherche</p>                                                                                                                                                                       |
| 10 | 2nde       | <p><b>Activité 1 :</b> Apprentissage algèbre, valeurs exactes et valeurs approchées vérifier factorisations</p> <p><b>Activité 2 :</b> Tracés, familles de courbes</p> <p><b>Activité 3 :</b> Conjectures, composition des fonctions risques, ni trop longtemps logiciel.</p> <p><b>Activité 4 :</b> Résolution systèmes linéaires</p> <p><b>Activité 5 :</b> Équations du 2nd degré</p> | <p><b>Apport de DERIVE :</b> Visualiser valeurs approchées,</p> <p><b>Apport de DERIVE :</b> Grapheur puissant</p> <p><b>Apport de DERIVE :</b> Outil permettant la conjecture et les essais sans</p> <p><b>Appréciation :</b> Pas bien passé. Élèves n'ont pas compris ce que fait le</p>    |

<sup>6</sup> Carrés de somme in (Hirliman, 1994)

|    |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 13 | 2nde | <p><b>Activité 1 :</b> Entrer des expressions et les corriger éventuellement<br/> <b>Apport de DERIVE :</b> aide à la visualisation</p> <p><b>Activité 2 :</b> Développements, factorisations<br/> <b>Apport de DERIVE :</b> Moyen de contrôle</p> <p><b>Activité 3 :</b> Travail + conséquent sur les fonctions, systèmes<br/> <b>Apport de DERIVE :</b> Prise charge des calculs, conjectures, visualisation, articulation entre cadres.<br/> <b>Appréciation :</b> B. Élèves apprécient avoir simultanément résolu algèbre+ repr. graph. Négatif: fonctions définies par des conditionnelles</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 15 | 2nde | <p><b>Activité 1 :</b> Prise en mains (3 Séances) Révisions: fractions, transfo d'expressions, factor et développ+ lecture d'expressions<br/> <b>Apport de DERIVE :</b> Moyen de contrôle. Aide pour localiser les erreurs. Aide à lecture d'expressions.<br/> <b>Appréciation :</b> trop long et un peu fastidieux.</p> <p><b>Activité 2 :</b> 4h: Résolution d'(in)équations, de systèmes<br/> <b>Apport de DERIVE :</b> Autonomie des élèves, autocorrection. Recherche de pistes pour démarrer un calcul.<br/> <b>Appréciation :</b> B. les élèves avaient DERIVE bien en main. J'ai pu consacrer mon temps à l'aide aux élèves ou à les faire réfléchir aux stratégies.</p> <p><b>Activité 3:</b> recherche de fonctions sous contraintes + recherche d'une erreur de calcul.<br/> <b>Apport de DERIVE :</b> prise en charge des calculs, aide à l'exploration, à la conjecture.</p> <p><b>Activité 4:</b> évaluation avec DERIVE sur des pbs différents des pbs habituels<br/> <b>Apport de DERIVE :</b> prise en charge des calculs, aide à l'exploration, aux conjectures</p> <p><b>Activité 5:</b> visualisation de surfaces, recherche d'expressions pour une surface d'allure donnée.<br/> <b>Appréciation :</b> B. Élèves bien entrés dans le travail, ont appréhendé les fonctions de façon qualitative.</p> |

|    |        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 18 | 2nde   | <p><b>Activité 1</b> : Déclarations, substitutions</p> <p><b>Activité 2</b> : Représentations graphique, familles de droite<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Définition fonctions affines/intervalle, fonction <b>VECTEUR</b><br/> <b>Appréciation</b> : Mieux marché</p> <p><b>Activité 3</b> : Correction partie technique d'un dv /maison</p> <p><b>Activité 4</b> : Familles de paraboles et d'hyperboles</p> <p><b>Activité 5</b> : Cercle en géométrie plane</p> |
| 25 | 2nde   | <p><b>Activité 1</b> : Évaluation d'expressions numériques et littérales (frapper expression en ligne et contrôle de conformité avec l'original<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : "vérificateur", réflexion sur priorités opératoires<br/> <b>Appréciation</b> : Moins bien marché (informatique pas innée)</p> <p><b>Activité 2</b> : Vérification de résolution de systèmes du premier degré<br/> <b>Appréciation</b> : Mieux marché (élèves plus autonomes)</p>      |
| 3  | 1ère S | <p>DERIVE à disposition de chaque élève sur "Palmtop" en permanence. Deux activités marquantes : <sup>7</sup></p> <p><b>Activité1</b> : Nombre de points d'intersection entre une parabole et une courbe du troisième degré.</p> <p><b>Activité2</b> : Modélisation du profil d'une voiture</p> <p><b>Apport de DERIVE</b> : aide à la résolution de systèmes, grapheur</p>                                                                                          |

---

<sup>7</sup> Un logiciel de calcul formel dans la classe in (Juge, 1994)

|           |        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <u>14</u> | 1ère S | <p><b>Activité 1</b> : Initiation<br/> <b>Appréciation</b> : Bien marché</p> <p><b>Activité 2</b> : Calculs de dérivées et étude graphiques<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Contrôle des résultats</p> <p><b>Activité 3</b> : Transformations trigonométriques<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Prise en charge des calculs<br/> <b>Appréciation</b> : Logiciel pas assez souple et pas toujours facile de comprendre résultat donné par D</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <u>19</u> | 1ère S | <p><b>Activité 1</b> : Initiation : factorisation, développements, équations...<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : vérification de résolution à la main</p> <p><b>Activité 2</b> : Pb ouvert (Factorisation de <math>x^{n-1}</math>)<sup>8</sup><br/> <b>Appréciation</b> : B. Suscité beaucoup de productions. Reprise en classe entière a fait jaillir beaucoup d'idées (sens de <math>x^0, 5</math> ?)</p> <p><b>Activité 3</b> : Recherche de fonctions dont la dérivée est une fonction donnée<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Commande de dérivation (sans connaissance de la commande Intégrale)<br/> <b>Appréciation</b> : Mal marché. Exemples proposés trop simples ou trop difficiles.</p> <p><b>Activité 4</b> : courbes représentative de <math>f+k</math> (<math>f(x-a)</math>)...</p> |
| <u>23</u> | 1ère S | <p><b>Activité 1</b> : Construire un objet (nombre, fonction)</p> <p><b>Activité 2</b> : Étude de signe, de variations, et représentations graphique</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |

---

<sup>8</sup> Recherche de problème assistée par logiciel de calcul formel in (Hirliman, 1994)

|   |         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4 | 1ère ES | <p><b>Activité 1 :</b> Formule du binôme, combinaisons, factorielles (consolidation et généralisation)<br/> <b>Apport de DERIVE :</b> Calculs pénibles; médiateur pour reconnaissance de formes, conjecture, contrôle<br/> <b>Appréciation :</b> B (motivation ludique)</p> <p><b>Activité 2 :</b> Manipulation d'équations (étude sur 1 plan formel, comparaisons DERIVE/ méthodes connues)<br/> <b>Apport 2 :</b> Prise en charge calculs, accent mis sur le "niveau formel"<br/> <b>Appréciation :</b> B</p> <p><b>Activité 3 :</b> Signe d'une expression et représentation graphique<br/> <b>Apport de DERIVE :</b> interaction algèbre/graphisme<br/> <b>Appréciation :</b> Surestimation de la capacité à lire une représentation</p> |
| 6 | 1ère A  | <p><b>Activité :</b> Introduction de la notion de fonction dérivée<sup>9</sup>. En première phase, la tangente est obtenue comme "zoom" de la fonction dans un grapheur, puis le nombre dérivé est introduit comme pente de la tangente, et la fonction est découverte à partir de plusieurs valeurs. En seconde phase, DERIVE est utilisé comme "auxiliaire de résolution" pour l'étude de fonctions<br/> <b>Apport de DERIVE :</b> "auxiliaire de résolution"</p>                                                                                                                                                                                                                                                                          |

---

<sup>9</sup> Dérivée en Première non scientifique in (Juge, 1994)

|   |         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7 | Term. E | <p><b>Activité 1</b> : Calculs de dérivées et de primitives<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Révisions, vérification des résultats obtenus à la main, refaire pas à pas<br/> <b>Appréciation</b> : bien marché</p> <p><b>Activité 2</b> : Suites<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : exploration, aide à la visualisation (fichier MTH)</p> <p><b>Activité 3</b> : Intégration par parties<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : aide à l'appropriation de la formule. Vérification des calculs faits à la main (pas à pas)</p> <p><b>Activité 4</b> : étude de fonctions<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : DERIVE disponible</p> <p><b>Activité 5</b> : Fonctions dont le graphe vérifie des contraintes<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Pb ouvert, réinvestissement, cadre graphique/algébrique<br/> <b>Appréciation</b> : Moins bien marché</p> |
| 8 | Term. C | <p><b>Activité 1</b> : Exercices de géométrie analytique</p> <p><b>Activité 2</b> : Appropriation du logiciel</p> <p><b>Activité 3</b> : Étude fonctions</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 9 | Term. C | <p><b>Activité 1</b> : Présentation (calculs simples dans C)</p> <p><b>Activité 2</b> : Calculs dans C. Ensemble de points pour une équation dans C<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Visualisation immédiate</p> <p><b>Activité 3</b> : Suites récurrentes. recherche et découverte de critères de définition et de convergence<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Facilité de changement de paramètres<br/> <b>Appréciation</b> : Plus. Côté découverte. Bonne participation à la justification théorique</p> <p><b>Activité 4</b> : calculs d'aire par méthode des rectangles<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : calcul formel d'une somme d'aires et passage à la limite<br/> <b>Appréciation</b> : Notation (Riemann) difficile à assimiler</p>                                                                                        |

|    |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 12 | Term.<br>C | <p><b>Activité 1</b> : Pivot de Gauss, dérivation, intégration<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : mémorisation méthode + contrôle</p> <p><b>Activité 2</b> : Suites numériques<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Conjectures (exemples, contre-exemples)<br/> <b>Appréciation</b> : Difficulté dans la mise en place de l'écriture de récurrence.</p> <p><b>Activité 3</b> : Courbes paramétrées<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Recherche de lieux géométriques à l'aide de Cabri et de DERIVE</p> <p><b>Activité 4</b> : Courbes paramétrées<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Exemples, dérivation, construction (articulation algébrique/graphique)</p> <p><b>Activité 5</b> : Fonction <math>\ln x</math><br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Construction point par point avec méthode de Simpson<br/> <b>Appréciation</b> : La plus belle Activité: calculs fastidieux faits par PC. On peut se consacrer à l'étude théorique, à la mise en place des équations -&gt; résultat super et comparaison avec la fonction de la machine</p> |
|----|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|    |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 16 | Term.<br>C | <p><b>Activité 1</b> : Intro à l'ajustement linéaire<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Visualiser, interpréter sans obstacle calcul<br/> <b>Appréciation</b> : Oui</p> <p><b>Activité 2</b> : Représenter graphique. fonction et dérivée<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Voir le lien entre les 2 courbes<br/> <b>Appréciation</b> : Oui</p> <p><b>Activité 3</b> : Résolution Equa diff<br/> <b>Appréciation</b> : Non, cumulation de difficultés (notions math. phys. + info.)</p> <p><b>Activité en 2nde</b> : Construction polygones réguliers<sup>10</sup><br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Associer graphique, numérique, algébrique<br/> <b>Appréciation</b> : Intérêt des élèves</p> |
|----|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

---

<sup>10</sup> Des activités pour le lycée avec Derive in (Juge, 1994)

|    |             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 17 | Term.<br>C  | <p><b>Activité 1</b> : questions classiques d'analyse<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Prise en main logiciel, mise au point<br/> <b>Appréciation</b> : Bien</p> <p><b>Activité 2</b> : suites (conceptualiser les 2 types de suite du pgm)<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : comprendre, explorer, approfondir<br/> <b>Appréciation</b> : 1 ère non réussie (bases) 2nde bien (suites récurrentes fait expliciter fonction)</p> <p><b>Activité 3</b> : Recherche de primitives<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Vérifier, anticiper</p> <p><b>Activité 4</b> : Transfo géométriques (effet sur 1 courbe)<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : permet à l'élève de se concentrer sur 1 méthode)<br/> <b>Appréciation</b> : DERIVE allège le calcul, mais abstraction reste trop grande</p> <p><b>Activité 5</b> : Suites (2 groupes avec modalités d'échange)<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Vérifier, réfléchir sur la nature des questions</p> |
| 24 | Term.<br>C  | <p><b>Activité 1</b> : Systèmes par méthode du pivot de gauss<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : se concentrer sur méthode, être libre des calculs, se concentrer sur stabilité des solutions<br/> <b>Appréciation</b> : Un peu déroutés au début par manipulations</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 11 | Math<br>Sup | <p><b>11</b> <b>Activité 1</b> : Calculs d'intégrales, dérivées, limites déterminants. Les élèves peuvent utiliser DERIVE, mais le correcteur ne devra pas pouvoir "se douter qu'un logiciel de calcul formel a été utilisé"<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : Prise en charge des calculs<br/> <b>Appréciation</b> : Bien marché</p> <p><b>Activité 2</b> : Investigation de suites récurrentes à partir des propriétés des fonctions <math>f</math>, <math>f \circ f</math>, ...<br/> <b>Apport de DERIVE</b> : DERIVE est utilisé pour les factorisations. La calculatrice graphique est utilisée pour les visualisations<br/> <b>Appréciation</b> : Moins bien marché</p>                                                                                                                                                                                                                                                          |

<sup>11</sup> "Deux utilisations de DERIVE en mathématiques spéciales" in (Hirliman, 1994)

|    |             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 22 | Math<br>Spé | <p><b>Activité 1</b> : Minimum d'une fonction réelle de 2 variables réelles<br/><b>Apport de DERIVE</b> : Prise en charge calculs pénibles visualisation</p> <p><b>Activité 2</b> : Base de Jordan d'une matrice carrée<br/><b>Apport de DERIVE</b> : Illustrer sur plusieurs exemples numériques la théorie</p> <p><b>Activité 3</b> : equa diff <math>y''=f(x)</math> y<br/><b>Apport de DERIVE</b> : Calcul de primitives, développ. de Taylor</p>                                                                                                                                                                                        |
| 1  | BTS+1       | <p><b>Activité 1</b> : Étude classique de fonctions "productique" (4Activités de 2h)</p> <p><b>Activité 2</b> : Calcul matriciel (8x2h) pour démonstrations (formelles) et problèmes technologiques (matrices 6x6), et rotations</p> <p><b>Activité 3</b> : Géométrie analytique (pour techno tuyauteur): intersections, distances, résolution de surface plane)<br/><b>Appréciation</b> : Bien: supériorité du logiciel sur calculatrice (ex: longueur perpendiculaire commune). négatif: exos où calculs sont longs et nombreux (grand nombre de variables à gérer =&gt; nécessité de préparer le travail avant de passer sur machine)</p> |

**Tableau 3**

| <b>Id.<br/>Pr.</b> | Apports de DERIVE Dans les activités | Anticipations (19), aspects positifs et déceptions (23)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                  |                                      | <p>1. Motivation pour pbs difficiles 2. apprentissage de logiciels utilisables en entreprise</p> <p><b>Positif</b> : Vrais pbs avec vraies valeurs. Nécessité d'analyser le problème, établir liste de procédures pour arriver à la résolution. Prise de recul-&gt; vraie nature des mathématiques</p> <p><b>Déception</b> : Difficile pour l'élève d'apprécier les résultats numériques. Ordre de grandeur est très obscur -&gt; vrai travail à faire</p> |
| 2                  |                                      | Notation mathématique, lien algèbre graphique, calcul exact ou approché                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

|   |                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3 | Aide à la résolution de systèmes, graphheur                                                                                                                             | <p>Outil facilitant la mise en place de recherche de problèmes</p> <p><b>Positif</b> : Changement de cadre vite intégré par les élèves, maîtrise par les élèves de notations formelles, mise en évidence de la distinction entre recherche de pb (stratégie de résolution), exemples, conjectures, calculs, vérification...</p> <p><b>Déception</b> : Pb des élèves qui n'ont pas su/voulu utiliser le logiciel ? Problèmes liés à l'évaluation...</p> |
| 4 | Calculs pénibles<br>Médiateur pour reconnaissance de formes, conjecture, contrôle<br>Interaction algèbre/graphisme                                                      | <p>Prendre du recul/ connaissances</p> <p><b>Positif</b> : Modification du regard sur les maths</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 5 | DERIVE Présente les expressions (presque) comme en math<br>Visualiser immédiatement l'effet d'une commande proposée par l'élève.<br>DERIVE, Calculateur formel et exact | <p>Travail autonome, aborder autrement des notions déjà vues.</p> <p><b>Positif</b> : Élèves travaillent 1 heure en étant attentifs, ne se découragent pas. Objectifs impossibles sans Derive.</p> <p><b>Déception</b> : Impossible sur inéquations et notation scientifique.</p>                                                                                                                                                                      |
| 6 | "Auxiliaire de résolution"                                                                                                                                              | <p>Les concepts sont introduits à l'aide du graphisme. DERIVE sert comme "auxiliaire de résolution" pour la partie "technique" de l'étude des fonctions.</p> <p><b>Positif</b> : DERIVE remplace avantageusement la feuille de brouillon.</p> <p><b>Déception</b> : Il y a un risque d'identification DERIVE= calcul de la fonction dérivée (l'utilisation des outils info. ne va pas jusqu'à pénétrer la pratique de résolution des problèmes).</p>   |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7  | <p>Vérification des résultats obtenus à la main, refaire pas à pas</p> <p>Exploration, aide à la visualisation</p> <p>Aide à l'appropriation d'une formule.</p> <p>Pb ouvert, réinvestissement, cadre graphique/algébrique</p>                                                                     | <p>Compréhension des concepts, organisation des tâches calculatoires, initiatives dans un problème ouvert</p> <p><b>Positif</b> : Recherche d'erreurs et interprétation des erreurs. Autonomie dans la gestion des calculs</p> <p><b>Déception</b> : Élèves peu motivés par recherche pbs ouverts. calculatrice reste outil privilégié.</p> |
| 8  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <p>Auto évaluation; se "débarrasser" de tâches techniques; anticiper (géométrie analytique)</p> <p><b>Déception</b> : Pas assez utilisé; situer/ calculatrice (bacc.)</p>                                                                                                                                                                   |
| 9  | <p>Visualisation immédiate</p> <p>Facilité de changement de paramètres</p> <p>Calcul formel d'une somme d'aires et passage à la limite.</p>                                                                                                                                                        | <p>Changement, familiarisation avec calcul formel</p> <p><b>Positif</b> : Travail de groupe. Modestie (intégrales qu'on ne sait pas calculer)</p> <p><b>Déception</b> : Difficulté à expliquer les réponses données par le logiciel</p>                                                                                                     |
| 10 | <p>Visualiser valeurs approchées, vérifier factorisations</p> <p>Grapheur puissant</p> <p>Outil permettant la conjecture et les essais sans risques, ni trop longtemps</p> <p>Centration sur la méthode sans pb de calculs</p> <p>Outil pour découverte d'une méthode, liaison avec graphiques</p> | <p>Découverte calcul formel, réflexion sur méthodes, assistant en calcul, manipulation courbes et familles, motivation</p> <p><b>Positif</b> : Assistant à la disposition de l'élève. Il peut expérimenter seul et avoir une meilleure confiance en lui</p> <p><b>Déception</b> : Interface pas facile à manipuler</p>                      |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 11 | Prise en charge des calculs (factorisations)                                                                                                                                                                                                                  | <p>Suppléer aux incapacités calculatoires des élèves</p> <p><b>Positif</b> : Certains ont compris que les méthodes importent plus que les techniques calculatoires</p> <p><b>Déception</b> : d'autres ont compris le contraire.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 12 | <p>Mémorisation méthode + contrôle</p> <p>Conjectures (exemples, contre-exemples)</p> <p>Articulation algébrique/graphique</p> <p>Calcul de valeurs pour construction point par point</p>                                                                     | <p>Un "plus" pour donner du goût, pour attirer les élèves moyens</p> <p><b>Positif</b> : Participation effective plus importante</p> <p><b>Déception</b> : faiblesse du langage de programmation (pas pour les élèves)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 13 | <p>Aide à la visualisation</p> <p>Moyen de contrôle</p> <p>Prise charge des calculs, conjectures, visualisation, articulation entre cadres.</p>                                                                                                               | <p>Appropriation de l'outil par l'élève</p> <p><b>Positif</b> : Découverte de l'outil par les élèves (en vue CDI)</p> <p><b>Déception</b> : pb de gestion du temps. pb matériels et maîtrise de certaines commandes font perdre de vue les mathématiques.</p>                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 14 | <p>Contrôle des résultats</p> <p>Prise en charge des calculs</p>                                                                                                                                                                                              | <p><b>Positif</b> : Meilleure motivation pour l'apprentissage</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 15 | <p>Moyen de contrôle. Aide pour localiser les erreurs. Aide à lecture d'expressions.</p> <p>Autonomie des élèves, autocorrection. Recherche de pistes pour démarrer un calcul.</p> <p>Prise en charge des calculs, aide à l'exploration, à la conjecture.</p> | <p>Une plus grande réflexion sur le travail algébrique, que cette activité soit moins algorithmique dans la mesure où l'élève n'a plus seulement à résoudre le problème posé, mais aussi à retrouver ses erreurs, à analyser les résultats proposés par l'ordinateur.</p> <p><b>Positif</b> : Autonomie dans le travail des élèves. Travail de recherche d'erreurs. Travail plus expérimental dans le domaine algébrique.</p> <p><b>Déception</b> : Difficultés d'intégration de DERIVE (utilisation trop ponctuelle).</p> |

|    |                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 16 | Visualiser, interpréter sans obstacle calcul<br>Voir le lien entre 2 courbes<br>Associer graphique, numérique, algébrique                  | Meilleure compréhension des notions mathématiques, manière plus simple d'apprendre et d'enseigner.<br><b>Positif</b> : Concentration sur le phénomène mathématique, visualisation graphique et accès à l'info.<br><b>Déception</b> : Moins facile à utiliser avec les élèves que prévu                                                                                                                                                                                                        |
| 17 | Comprendre, explorer, approfondir<br>Se concentrer sur une méthode<br>Vérifier, anticiper, réfléchir sur la nature des questions           | Motivation, compréhension, approfondissement, efficacité<br><b>Positif</b> : Autonomie, travail en profondeur sur les concepts<br><b>Déception</b> : Activités d'approfondissement ne fonctionnent pas ("blocages" antérieurs)                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 18 | Définition fonctions affines/intervalle, fonction VECTEUR                                                                                  | Recherche et vérification<br><b>Positif</b> : Pouvoir expérimenter                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 19 | Vérification de résolution à la main<br>Commande de dérivation (pour anticiper primitives)                                                 | Aider les élèves à modifier l'image qu'ils ont de la recherche de problèmes dans un sens plus ouvert, s'écarter de l'idée "si on ne trouve pas dans les 5 mn, c'est qu'on ne connaît pas le cours"<br><b>Positif</b> : Changement d'image des maths<br><b>Déception</b> : Lorsque des groupes piétinent, le prof, pris par un autre groupe, peut mettre longtemps à intervenir. Contexte informatique pousse les élèves à faire beaucoup d'essais avec DERIVE, plutôt qu'à prendre un papier. |
| 20 | Compréhension des règles syntaxiques<br>Découverte d'une notion ou méthode<br>Séparer analyse et calcul<br>Anticipations de développements | Compréhension de notions, sens des démarches, approfondir ou découvrir de nouveaux aspects<br><b>Positif</b> : Les élèves "parlent de math" même les plus faibles                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

|    |                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 21 | Prise de sens d'une expression et analyse en sous-expressions<br>Forme et comparaison sur une expression d'abord numérique, puis avec des variables | Aisance et réflexion en calcul littéral (étude des sous-expressions, prise de sens des mots-clé de DERIVE Simplifie, calcul, développe)<br><b>Positif</b> : réflexion sur expressions ressentie comme a-didactique; droit à l'erreur; Meilleure acceptation comme feed-back de la machine.<br><b>Déception</b> : Identification des commandes ambiguë. Factorisation trop globale                                 |
| 22 | Prise en charge calculs pénibles Visualisation<br>Illustrer la théorie                                                                              | Meilleure compréhension de la théorie<br><b>Positif</b> : Prise en charge calculs<br><b>Déception</b> : Pas de programmation, fenêtre graphique                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 23 |                                                                                                                                                     | Rendre aux maths un statut expérimental souvent négligé<br><b>Positif</b> : Participation active de tous                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 24 | Se concentrer sur méthode, être libre des calculs, se concentrer sur stabilité des solutions                                                        | "Libération" des problèmes de calcul                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 25 | "Vérificateur", réflexion sur priorités opératoires                                                                                                 | Avoir le temps de s'occuper des élèves en difficulté en déléguant la validation à l'ordinateur<br><b>Positif</b> : Prise de conscience de ce qu'il est nécessaire et aisé de contrôler ses résultats. le travail du matheux doit se situer en amont de ce que peut faire l'ordinateur (réfléchir et trouver ce que l'ordinateur ne sait pas exécuter)<br><b>Déception</b> : Manque de temps. Séances trop courtes |

## VII. RÉSULTATS PRINCIPAUX

### VII.1 APPORTS DU QUESTIONNAIRE ÉLÈVE

Le nombre de réponses obtenues aux deux versions du questionnaire, la cohérence entre les résultats obtenus dans les deux versions, ainsi que les méthodes statistiques employées nous permettent de proposer comme résultats un certain nombre de phénomènes mis en évidence dans les classes utilisant DERIVE :

1. Les élèves de ces classes bénéficient d'un environnement technologique favorable : ils ont généralement une calculatrice, et cette calculatrice est graphique à partir des classes de lycée ; ils ont accès à l'ordinateur, principalement pour des jeux et du traitement de texte. En revanche, l'utilisation qu'ils ont eu de logiciels pour apprendre des maths est en général faible.
2. Les opinions sur l'utilisation de logiciels en math s'organisent en trois tendances, l'une de refus, l'autre d'adhésion pour des raisons liées aux apprentissages, la troisième d'adhésion pour des raisons plus banales comme le gain de temps. Les opinions favorables ont dans l'ensemble des taux d'adhésions plus forts que les opinions défavorables.
3. Ces tendances s'affinent avec les opinions sur DERIVE :
  - Certains élèves refusent DERIVE parce qu'ils rencontrent des difficultés avec le logiciel. Pour d'autres, le refus est motivé par l'idée que le logiciel peut remplacer l'élève dans son travail mathématique.
  - Des élèves apprécient DERIVE pour son apport à leur activité mathématique (principalement en Seconde et Première). Pour certains, une meilleure compréhension des notions est à porter au crédit de DERIVE. Pour d'autres, l'apport se traduit surtout par un changement de la tâche (davantage de vrais problèmes) et de la vision des maths, sans véritable effet sur l'apprentissage. L'utilisation prolongée du logiciel tend à renforcer cette dernière représentation.
  - Des élèves insistent sur DERIVE en tant qu'outil de calcul. Ils sont les plus nombreux et sont principalement en Première et Terminale. Parmi ces élèves, ceux qui sont le plus à l'aise avec le logiciel conçoivent une utilisation du logiciel "en continu" pour piloter leurs calculs, et dépassent ainsi la représentation du logiciel comme simple outil de contrôle ou de lecture du résultat.
4. On observe une tendance supplémentaire, avec des élèves surtout en 3ème et Seconde qui font une confiance "aveugle" au logiciel. Ainsi, ils voient DERIVE comme un outil dont toutes les réponses pourraient être acceptées telles quelles sans contrôle, reproduisant ainsi le fonctionnement observé majoritairement chez les élèves quand ils utilisent leur calculatrice (Trouche, 1994). Ceci nous semble à mettre en relation avec l'observation selon laquelle les élèves, dans leur majorité, méconnaissent les caractéristiques de DERIVE comme logiciel de calcul symbolique, et tendent à le considérer comme une "super-calculatrice".
5. Ces tendances, ou représentations de DERIVE sont de nature à interférer avec l'activité de l'élève quand il utilise le logiciel. On ne peut donc les négliger. Les facteurs qui influencent ces représentations sont également importants à prendre en compte. Un élève à l'aise avec le logiciel l'acceptera plus facilement et en aura un usage plus intelligent. Un élève ayant une

utilisation prolongée de DERIVE verra mieux son effet sur sa pratique mathématique (au delà de la simple aide calculatoire).

6. La question d'un apport à la compréhension reste posée, car les facteurs énoncés ci-dessus ne semblent avoir une grande influence sur ce point.

## **VII.2 APPORTS DU QUESTIONNAIRE "PROFESSEURS"**

Établie à partir des réponses de 25 professeurs dont les élèves ont utilisé DERIVE, l'étude n'a pas de prétention statistique. Néanmoins, elle fournit des éléments qualitatifs intéressants sur les usages réels du logiciel :

1. Les modes d'utilisation peuvent être très divers, d'une simple utilisation ponctuelle à une intégration complète. Un usage régulier ou une intégration complète supposent des conditions institutionnelles particulières : les professeurs sont très peu nombreux à parvenir à cette intégration en dehors du groupe D.I.T.E.N.
2. Certains professeurs privilégient l'utilisation individuelle ou en binôme du logiciel par les élèves, soit par de nombreux travaux dirigés, soit par la mise à disposition d'ordinateurs pour tous les cours. D'autres utilisent davantage le logiciel en mode collectif à l'aide d'un rétroprojecteur. Cette répartition semble ne pas résulter seulement de contingences telles que l'équipement de l'établissement.
3. Les modes d'utilisation semblent avoir peu d'influence sur l'initiation au logiciel et sur les fonctionnalités de DERIVE introduites par le professeur.
4. Les contenus abordés à l'aide du logiciel couvrent une partie importante des programmes d'algèbre et d'analyse des classes de 3ème et de lycée. Certaines approches spécifiques (problèmes ouverts motivant les notions, aspects formels de la résolution d'équations, familles de fonctions) montrent comment l'utilisation de DERIVE peut contribuer à changer de point de vue sur les notions abordées. Mais elles sont minoritaires, car plus difficiles à mettre en place.
5. Pour certains professeurs l'apport de DERIVE se situerait dans les phases calculatoires : il rendrait possible ces phases en jouant le rôle d'auxiliaire de calcul. Ces professeurs constatent généralement que l'utilisation autonome du logiciel par l'élève dans ce cadre est effective, mais qu'elle ne supprime pas toutes les difficultés de l'activité calculatoire. En dehors des difficultés liées à l'interface, la raison la plus souvent invoquée est l'usage discontinu qui ne permet pas l'appropriation. Le logiciel ne devient pas un outil familier au même titre que la calculatrice.
6. D'autres professeurs voient dans l'introduction de DERIVE la possibilité d'aborder des problèmes ouverts, ou de modélisation. Dans l'expérience de ces professeurs, l'utilisation du logiciel rend possible ce type d'activité. Néanmoins les difficultés inhérentes à ces activités ne sont pas seulement calculatoires : les professeurs relèvent que la complexité ou l'abstraction des problèmes, non anticipées dans l'analyse préalable, peuvent être des obstacles pour les élèves. Dans le contexte spécifique de l'utilisation de l'informatique, ceci peut conduire à un comportement de "pêche au résultat" peu réflexif.
7. Une troisième catégorie de réponses insiste sur les apports possibles de DERIVE à la compréhension. Ces apports sont généralement recherchés dans des séances construites spécifiquement. Les difficultés constatées proviennent généralement d'un comportement du logiciel non conforme aux anticipations du professeur. Comme cela se confirmera dans certaines observations de la partie II, celui-ci tend à anticiper le comportement du S.M.S.

qui serait souhaitable pour que la tâche qu'il a prévue prenne du sens. Or il se peut que le comportement réel soit différent, soit pour des raisons contingentes, soit à cause de caractéristiques des S.M.S. Les professeurs tendent à minimiser ces différences dans leurs analyses préalables.

### **VII.3 REMARQUES DE SYNTHÈSE**

Les résultats obtenus à partir des deux questionnaires tempèrent l'enthousiasme que pourrait entraîner l'apparition d'un outil comme DERIVE. La représentation dominante de DERIVE chez les élèves n'est pas celle d'un apport décisif à la compréhension en mathématiques. Les professeurs soulignent les difficultés qu'ils ont rencontrées dans les usages les plus "cognitifs" du logiciel. Les résultats témoignent sans doute assez bien des limites actuelles des modifications des représentations et des pratiques liées à l'utilisation des SMS.

Ils indiquent également qu'un dépassement de ces limites est possible. Un usage prolongé où DERIVE devient un élément familier de l'environnement de travail de l'élève semble autoriser une utilisation plus souple dans les calculs et une activité mathématique plus ouverte. Il est aussi associé à des appréciations plus positives sur les potentialités de DERIVE pour l'apprentissage.

On peut cependant estimer, au vu des réponses, qu'une utilisation régulière ne suffit pas à elle seule, à faire de DERIVE un instrument efficace d'aide à la compréhension en mathématiques. Sans aucun doute, le choix des situations proposées aux élèves, comme de leur gestion a pour cela un rôle essentiel à jouer. C'est ce que nous chercherons à étudier dans la partie suivante à partir des observations effectuées au collège et au lycée.

## **DEUXIEME PARTIE**

### **OBSERVATION DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT AVEC DERIVE**

#### **I. INTRODUCTION**

Cette observation est la seconde composante de la recherche menée. Il s'agit d'aborder ici de manière interne la question de l'évolution des représentations et pratiques mathématiques des élèves à travers l'utilisation du logiciel DERIVE. Comme nous le précisons dans le rapport intermédiaire, cette approche interne nous semble incontournable et doit en particulier aider à mettre en regard les discours tenus par élèves et enseignants sur leurs pratiques et la réalité de ces pratiques. Il s'agit donc d'analyser le fonctionnement des élèves dans des séances d'enseignement utilisant le logiciel DERIVE, d'analyser le rapport aux mathématiques qu'ils y développent, rapport susceptible d'influencer plus globalement leurs représentations et pratiques mathématiques.

Différentes formes d'observation auraient pu être a priori élaborées si l'on considère le problème à l'étude dans cette recherche : l'influence de l'utilisation de DERIVE sur les pratiques et représentations des élèves. Nous aurions pu notamment envisager de centrer l'observation sur une classe précise et, pour cette classe, observer systématiquement toutes les séances utilisant DERIVE. Vu le peu de connaissance que nous avons du fonctionnement réel des élèves sous DERIVE, il nous a semblé préférable, dans ce travail qui a nécessairement donc un aspect exploratoire, de privilégier la diversité : diversité au niveau des classes, des enseignants, des types de situation proposés. Il va de soi que le choix ainsi effectué n'a pas que des avantages. En particulier, il est clair que les observations faites, vu leur caractère ponctuel, ne pourront être directement exploitées pour prouver une évolution des pratiques et représentations des élèves.

Le choix effectué nous semble cependant raisonnable. En effet, ce sont les questionnaires enseignants et élèves qui sont censés nous fournir des informations interprétables en termes d'évolution des représentations et des pratiques. Les observations ont été organisées notamment pour contrôler les informations recueillies à ce niveau externe. Les questionnaires concernant a priori tous les niveaux d'enseignement secondaire à partir de la fin du collège, il nous semble préférable de disposer, via les observations, d'une vision large des pratiques réelles d'enseignement avec DERIVE.

Nous avons donc choisi, pour cette partie, d'observer des situations proposées par les membres du groupe "Calcul Formel" de la D.L.C. - que nous considérons comme des experts - comme des situations susceptibles de mettre en évidence les potentialités offertes à l'enseignement des mathématiques par l'utilisation de DERIVE.

Cette partie de la recherche s'est déroulée en deux temps :

- Quelques observations ont été effectuées d'abord. Elles nous ont essentiellement servi à mettre au point le dispositif d'observation utilisé dans le deuxième temps, à préciser le questionnement initial et les types de situations à observer en priorité.
- Dans un deuxième temps, nous avons observé et analysé précisément le fonctionnement de 8 situations : 4 au collège, 4 au lycée. Les observations au niveau collège ont toutes été réalisées avec le même enseignant, en classe de troisième, les observations de niveau lycée

ont été, à une exception près, toutes réalisées avec des enseignants différents. Le tableau ci-après donne les niveaux concernés et les thèmes :

| Établissement                    | Classe            | Thème                                     |
|----------------------------------|-------------------|-------------------------------------------|
| Collège Duhamel (Herblay)        | 2 classes de 3ème | Parenthésage, fractions                   |
|                                  |                   | Généralisation des identités remarquables |
|                                  |                   | Géométrie analytique                      |
|                                  |                   | Résolution de systèmes linéaires          |
| Lycée J.Brel (Vénissieux)        | Première S        | Factorisations de $X^n-1$                 |
| Lycée Jehan de Beauce (Chartres) | Terminale E       | Recherche de fonctions avec contraintes   |
| Lycée Th.Deck (Guebwiller)       | Terminale C       | Trigonométrie                             |
| Lycée A.Sorel (Honfleur)         | Première S        | Trigonométrie                             |

Précisons que deux des classes observées (celles de Première S et Terminale C) étaient constituées d'élèves disposant de DERIVE en permanence, sur quadernos.

Dans ce chapitre, nous précisons tout d'abord, dans une première partie, les questions transversales sur lesquelles nous avons choisi de centrer l'analyse des observations, puis nous présenterons, dans une seconde partie, la méthodologie utilisée pour ces observations. Nous reprenons ainsi dans ce rapport les éléments déjà présents dans le rapport intermédiaire qui nous ont semblé indispensables à une lecture autonome. Dans la troisième partie, nous présenterons et analyserons les observations réalisées au collège et, dans la quatrième partie les observations réalisées au lycée.

## II. LES QUESTIONS A L'ETUDE

Nous avons, dans la première phase de la recherche, décidé de centrer l'analyse des observations sur un certain nombre de dimensions transversales :

- Le rôle joué par la familiarité ou non familiarité des élèves avec les environnements informatiques et plus spécifiquement avec le logiciel DERIVE
- Les rapports entre l'environnement DERIVE et l'environnement calculatrice
- L'articulation entre l'ergonomie de DERIVE et le fonctionnement papier / crayon usuel
- La centration sur la démarche, sur les aspects conceptuels de l'apprentissage
- La dimension expérimentale et le niveau d'activité mathématique des élèves
- Le rôle de DERIVE dans le statut et la manipulation des objets algébriques
- L'expertise DERIVE du côté de l'enseignant.

Ces dimensions, à l'exception de la dernière, qui nous semble-t-il, nécessiterait une recherche spécifique, sont celles que nous avons retenues finalement. Nous y avons cependant adjoint

une dimension supplémentaire dont l'intérêt nous est apparu au fil des observations elles-mêmes :

- Les rapports entre les stratégies formelles utilisées par DERIVE, les stratégies favorisées par les utilisations de DERIVE et les stratégies visées par l'enseignement usuel.

Il nous est en effet apparu que, pour comprendre le fonctionnement de certaines des situations observées, il était nécessaire d'analyser les décalages éventuellement existant entre les trois niveaux répertoriés et leurs effets sur le fonctionnement des situations. On touche de fait ici, dans un de leurs aspects particuliers, les questions de transposition informatique et de légitimité épistémologique des environnements informatiques, dont l'importance est particulièrement soulignée par Balacheff dans (Balacheff, 1994).

Nous reprenons ci-après, sans modification, la présentation des six premières dimensions d'analyse effectuée dans le rapport intermédiaire, tout en renvoyant le lecteur à ce rapport intermédiaire pour une présentation plus globale du questionnement relatif aux observations.

## **II.1 LE ROLE JOUE PAR LA FAMILIARITE AVEC LE LOGICIEL DERIVE**

Comme tout logiciel informatique utilisé dans l'enseignement secondaire en France actuellement, DERIVE n'est pas un instrument en permanence à la disposition des élèves. C'est un objet que l'élève rencontre, sauf contextes très particuliers, uniquement à l'intérieur de l'école, voire même dans certains cas, uniquement dans le cadre des heures de mathématiques. Le contact avec le logiciel est de ce fait un contact épisodique, morcelé. Divers travaux ont montré les problèmes posés par un contact de ce type. Même, pour des logiciels dont l'accès est facile, et cela semble a priori le cas pour DERIVE, se pose la question de l'entretien des connaissances DERIVE nécessaires et celle du parasitage possible de l'activité mathématique par des difficultés situées à ce niveau.

Nous porterons donc dans l'observation une attention particulière à ces questions : quelles connaissances DERIVE sont nécessaires au fonctionnement des situations observées ? Quelles connaissances, sans être indispensables, sont particulièrement utiles ? Celles supposées connues sont-elles réellement disponibles ? Quels problèmes sont éventuellement provoqués par la non disponibilité ? Comment l'enseignant les gère-t-il ? Les problèmes induits par ce type de fonctionnement empêchent-ils une opérationnalisation raisonnable de DERIVE ou sont-ils gérables dans les conditions de fonctionnement actuelles et si oui comment ?

## **II.2 DERIVE ET LA CALCULATRICE**

A l'inverse de DERIVE, la calculatrice est un outil à la disposition permanente de l'élève. Même si l'enseignement des mathématiques ne prend pas en charge l'apprentissage de son utilisation, elle est dans l'enseignement secondaire un instrument familier à l'élève. Les calculatrices disposant de capacités de calcul formel restent peu répandues mais, de plus en plus, les élèves de lycée disposent de calculatrices graphiques et utilisent les capacités graphiques de leur calculatrice. Dans ce domaine graphique au moins donc, la calculatrice se pose en concurrente de DERIVE.

On peut donc supposer que, si les tâches proposées aux élèves n'exploitent pas vraiment des spécificités propres du logiciel DERIVE, les élèves, excepté si le contrat de la tâche impose l'utilisation de DERIVE, seront plus tentés d'utiliser leur calculatrice que DERIVE, et ceci même si a priori DERIVE semble mieux adapté à la situation proposée.

Nous porterons donc dans l'observation une attention particulière à ces questions. Les tâches proposées mettent-elles réellement en jeu les possibilités spécifiques de DERIVE par rapport aux calculatrices graphiques dans les cadres numérique, algébrique et graphique ou à l'interaction de ces cadres ? Quel outil choisit l'élève s'il a réellement le choix de l'outil ? Comment éventuellement s'opère l'interaction entre les outils disponibles ? Avec quel effet sur le fonctionnement de la situation ? Quel rôle joue ou peut jouer l'enseignant à ce niveau ? Que peut-on en inférer sur les conditions à satisfaire par les situations proposées ?

### **II.3 L'ARTICULATION ENTRE L'ERGONOMIE DE DERIVE ET LE FONCTIONNEMENT PAPIER / CRAYON**

Les questions précédemment posées rejoignent indirectement celles de l'articulation entre le fonctionnement sous DERIVE et le fonctionnement en papier / crayon (P/C dans la suite). L'élève est habitué à développer ses activités mathématiques dans un environnement P/C essentiellement. Va-t-il intégrer facilement l'utilisation de DERIVE à ce fonctionnement ? Comment vont s'articuler pour lui le travail avec DERIVE et le travail P/C ? Quelles fonctions va-t-il attribuer au logiciel ? Quelles difficultés éventuelles va poser le fonctionnement sous DERIVE et, en particulier, la gestion des informations fournies à l'écran, dans une organisation linéaire qui n'est pas forcément celle utilisée en P/C, sous des registres sémiotiques standardisés qui n'ont pas la souplesse des écritures et représentations diverses utilisées en P/C ?

Il nous semble important dans l'observation d'étudier ces questions via des situations où une certaine autonomie est laissée à l'élève dans son fonctionnement mathématique.

### **II.4 LA CENTRATION SUR LA DÉMARCHE, SUR LES ASPECTS CONCEPTUELS**

De nombreux auteurs, comme le montre l'appendice bibliographique, soulignent l'intérêt de logiciels comme DERIVE qui, effectuant les calculs techniques à la place de l'élève, lui permettent de se concentrer sur la démarche de résolution d'un problème, voire sur les aspects conceptuels de la tâche.

En fait, est posée, via cette affirmation, la question complexe des rapports entre le technique et le conceptuel. Ces deux aspects de la connaissance ne peuvent être considérés comme indépendants. Quel rôle joue dans la résolution et la compréhension d'un problème le travail technique que l'on y effectue ? Quelles connaissances suppose la possibilité de piloter le technique sans passer par la phase de réalisation effective ? A partir de quel seuil de connaissances, la centration sur la démarche peut-elle être effective, productive ? Comment organiser dans ce registre des situations qui ne fonctionnent pas uniquement avec les élèves qui savent déjà ?

Il nous semble particulièrement important donc d'inclure dans l'observation des situations où cette potentialité de DERIVE soit explicitement mise en jeu et d'étudier ce que nous apprend sur ces questions difficiles l'observation fine du comportement des élèves.

### **II.5 LA DIMENSION EXPÉRIMENTALE ET LES QUESTIONS DE NIVEAU D'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE**

De nombreux auteurs soulignent également l'intérêt de logiciels comme DERIVE pour le développement d'une démarche expérimentale en mathématique. Divers travaux de recherche ont cependant montré que l'utilisation de logiciels ne s'accompagnait pas nécessairement, dans les classes, d'une réelle activité mathématique des élèves et que se produisait assez facilement

une dérive pseudo-expérimentale. Si les situations d'enseignement ne sont pas profondément repensées à la fois sur le plan de leur contenu et de leur gestion, on court en effet le risque de voir se développer des situations où, le travail technique usuel étant pris en charge par le logiciel, le travail de l'élève se réduit à des tâches d'exécution presse-bouton et d'observation. : l'élève suit une fiche d'instructions, note les données et résultats qui apparaissent sur l'écran, son activité expérimentale se bornant à faire des remarques et constatations sur ces données.

Il nous semble donc important d'étudier dans une situation mathématique avec DERIVE ce qui, du travail mathématique, est pris en charge par le logiciel et ce qui est de la responsabilité de l'élève, à quel niveau se situe réellement l'activité mathématique de ce dernier et ce que l'on peut en attendre en termes de connaissances. En particulier, dans une situation qui se veut expérimentale, on étudiera comment est ménagé le travail expérimental par le jeu des anticipations et des contrôles, par le degré d'autonomie laissé à l'élève dans l'organisation de l'exploration.

Ceci devrait conduire à l'explicitation pour le moins d'un questionnement guidant la construction de ce type de situations.

## **II.6 LE RÔLE DE DERIVE DANS LE STATUT ET LA MANIPULATION DES OBJETS ALGÈBRIQUES**

Les problèmes posés par l'apprentissage de l'algèbre élémentaire, les insuffisances des stratégies usuelles de l'enseignement dans ce domaine ont été étudiés par de nombreux chercheurs (cf. (Kieran, 1992) par exemple pour une synthèse). Différents facteurs ont été mis en évidence, notamment :

- Le fait que l'entrée dans le monde de l'algèbre suppose une rupture avec le fonctionnement arithmétique antérieur de l'élève : il faut accepter de passer du travail sur des quantités où chaque opération effectuée a un sens précis, où l'égalité peut vivre avec un sens de production à un travail où sont essentiellement en jeu des relations entre expressions littérales, où l'égalité doit donc prendre nécessairement un autre sens, où le contrôle par le sens n'est pas forcément toujours possible et où justement l'efficacité du détour algébrique tient à la possibilité de s'affranchir de cette nécessité pour s'en remettre à des règles de fonctionnement formelles à certaines étapes de la résolution,
- Le fait que l'équilibre, propre au travail algébrique, entre un contrôle par le sens et un contrôle formel est très difficile à mettre en place, faisant de ce domaine un domaine qui pour l'élève est souvent privé de sens, où les règles de manipulation formelle relèvent du droit plutôt que du vrai et se prêtent à des dérapages de toutes sortes,
- Le fait enfin que le langage algébrique a ses règles sémiotiques propres nécessitant un apprentissage spécifique, qui ne va pas de soi, et que l'enseignement a beaucoup de mal à faire vivre de façon satisfaisante dans les classes des situations visant cet apprentissage.

DERIVE étant un logiciel doté de possibilités de calcul formel, on peut faire l'hypothèse qu'il peut aider à rendre plus efficace cet enseignement de l'algèbre, notamment :

- Par l'attention qu'il conduit à apporter au langage algébrique lui-même, pour les besoins de la communication avec l'ordinateur et non pour de simples raisons de contrat didactique,
- Par l'obligation qui est faite d'explicitier via les commandes DERIVE certains gestes qui, dans le fonctionnement usuel, restent implicites et de les relier à des opérations mathématiques,

- Par la possibilité qu'il offre de travailler relativement tôt dans l'apprentissage sur des expressions relativement complexes, sans avoir à assurer l'intégralité du travail mathématique mais en centrant ce dernier sur tel ou tel point particulier, et ce faisant de motiver des recherches de régularités, des interrogations qui aident à construire les règles du jeu algébrique, sans le réduire à l'application de quelques recettes,

à condition bien sûr de construire des situations adéquates.

Mais d'un autre côté, les expérimentations menées avec DERIVE ont concerné pour l'instant presque exclusivement des niveaux d'enseignement se situant au delà de l'initiation algébrique. On ne sait donc pas à l'heure actuelle s'il existe un seuil dans les connaissances et compétences algébriques en dessous duquel l'intégration de DERIVE à l'enseignement, surtout dans les conditions d'utilisation actuelles, poserait plus de problèmes qu'elle ne permettrait d'en résoudre.

Il nous semble donc important d'inclure dans les observations des situations où les hypothèses formulées ci-dessus sur les potentialités théoriques de DERIVE soient réellement à l'oeuvre avec, en particulier, des observations au niveau du collège.

### **III. METHODOLOGIE DEVELOPPEE POUR L'OBSERVATION**

Nous décrivons dans cette partie le dispositif d'observation mis au point dans la première phase de la recherche, reprenant et la complétant la partie correspondante du rapport intermédiaire.

Ce dispositif, pour chaque situation observée, est classiquement constitué de trois phases :

- la préparation de l'observation,
- l'observation proprement dite,
- l'entretien post-observation.

Précisons que les observations effectuées ont toutes concerné des séances où l'utilisation de DERIVE n'était pas collective, sauf éventuellement dans les phases de synthèse. Le dispositif décrit, en particulier au niveau des observations proprement dites, est donc conçu en fonction de ce type de situations. Ceci bien sûr n'implique pas que cela ait été le seul type d'utilisation présent dans les classes observées ou que ce soit le type toujours le plus adéquat, à nos yeux.

#### **III.1 LA PRÉPARATION DE L'OBSERVATION**

Cette première phase doit permettre de disposer à l'avance d'informations sur la situation qui sera observée. Ces informations sont nécessaires pour réaliser une analyse a priori<sup>12</sup> de la situation à laquelle seront confrontées ultérieurement, dans une méthodologie classique en didactique, la ou les réalisations effectives. Elles sont aussi nécessaires pour préciser les points auxquels l'observation sera a priori particulièrement attentive.

Nous souhaitons, vu les objectifs assignés à l'observation, limiter le plus possible la perturbation qui serait apportée au fonctionnement usuel des enseignants observés ; nous souhaitons aussi que la participation aux observations n'induisse pas pour eux une charge de travail trop importante. C'est pourquoi, nous avons choisi de mettre au point un questionnaire préalable à l'observation respectant les contraintes suivantes :

---

<sup>12</sup>Compte-tenu de ce qui suit, il ne s'agit pas d'une analyse a priori au sens classique de l'ingénierie didactique mais d'un objet adapté et plus restreint.

- il devait fournir les principales informations nécessaires à la réalisation de l'analyse a priori,
- il devait être concis,
- il devait respecter le plus possible les modes d'anticipation et d'explicitation usuels des enseignants,
- il devait enfin être formulé dans un langage accessible à un non didacticien.

En particulier, nous avons essayé de tenir compte du fait que l'expertise, en majeure partie, relève davantage des compétences que des connaissances et reste donc largement informulable ou difficilement formulable. Nous avons aussi essayé de tenir compte du fait qu'un enseignant, même s'il effectue une préparation soignée d'une séance d'enseignement, ne prévoit à l'avance qu'une petite partie des décisions qu'il aura à prendre en classe et se réserve une large possibilité d'adaptation en temps réel.

Nous fournissons ci-après la version définitive du questionnaire, utilisée dans les expérimentations de la deuxième phase.

### **QUESTIONNAIRE PREPARATOIRE A UNE OBSERVATION DE TYPE T.P.**

1. Combien de fois avez-vous utilisé DERIVE dans votre enseignement cette année avant cette séance ?
2. A quand remonte la dernière utilisation :
  - a) collective en classe ?
  - b) en TP ?
3. Quels sont les objectifs de cette séance et comment s'insère-t-elle, le cas échéant, dans la progression de l'enseignement ?
4. En quoi l'utilisation de DERIVE vous semble-t-elle intéressante ici ?
5. Est-elle à votre avis nécessaire au bon fonctionnement de la situation et si oui pourquoi ?
6. Les élèves sont-ils libres d'utiliser ou non DERIVE pendant la séance ?
7. Peuvent-ils utiliser aussi leur calculatrice ?
8. Connaissances informatiques et connaissances sur DERIVE nécessaires. Parmi ces connaissances, lesquelles :
  - a) supposez-vous bien connues,
  - b) pensez-vous avoir besoin de rappeler (pour chacune précisez sous quelle forme vous prévoyez de le faire : rappel écrit, rappel collectif oral, rappel individuel ou par groupes en cas de besoin),
  - c) allez-vous devoir introduire et comment prévoyez-vous de le faire.
9. Pouvez-vous décrire brièvement les principales phases de la séance et le déroulement temporel prévu ?
10. Pour chacune des phases de travail individuel ou en petits groupes des élèves, pouvez-vous préciser :
  - a) quel est le travail mathématique que doivent réaliser les élèves,

- b) quel(s) rôle(s) va jouer DERIVE (contrôle de résultats, aide à l'exploration, à l'élaboration de conjectures, outil de calcul numérique ou algébrique, outil de représentation graphique ...),

- c) à quels comportements vous vous attendez de la part des élèves,

- d) quelles interventions éventuelles vous prévoyez de faire.

11. Pensez-vous faire un ou plusieurs bilans collectifs pendant la séance ? Si oui, à quel(s) moment(s), sous quelle forme et avec quel(s) objectif(s) ?

12. Prévoyez-vous une institutionnalisation pendant la séance ou après ? Sur quels contenus ?

13. Pensez-vous rencontrer des difficultés mathématiques ou informatiques ? Si oui lesquelles et comment envisagez-vous d'y faire face ?

14. Autres points que vous souhaitez mentionner.

Le questionnaire était envoyé aux enseignants au moins une quinzaine de jours avant l'observation prévue. Il devait être retourné aux observateurs quelques jours avant l'observation. Les chercheurs pouvaient, le cas échéant, compléter les informations ainsi recueillies par un entretien avec l'enseignant avant l'observation.

### III.2 L'OBSERVATION

Elle est réalisée par des observateurs qui observent chacun un groupe d'élèves choisi par l'enseignant suivant des critères précisés avec les observateurs dans chaque cas. Les observateurs n'ont pas a priori à intervenir dans le déroulement de la séance ou dans le travail des groupes. La seule intervention a priori prévue est de conseiller aux élèves de faire appel à l'enseignant, en cas de blocage prolongé.

Les échanges entre ces élèves ainsi que les phases collectives sont enregistrés. Les productions écrites des élèves dans la séance (brouillons, fiches...) sont recueillies et photocopiées avant de leur être rendues. Le travail réalisé avec DERIVE est sauvegardé et imprimé à l'issue de la séance.

Une grille d'observation souple a été élaborée à l'issue des premières observations. Elle est constituée de la façon suivante :

| Temps | Forme du travail :<br>P/C<br>DERIVE | Écran<br>DERIVE | Problèmes<br>informatiques | Actions des<br>élèves | Interventions<br>de l'enseignant<br>et de<br>l'observateur | Explications,<br>commentaires |
|-------|-------------------------------------|-----------------|----------------------------|-----------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------|
|       |                                     |                 |                            |                       |                                                            |                               |

La colonne "explications, commentaires" correspond aux éléments qui semblent nécessaires à l'observateur pour comprendre le contenu des autres colonnes.

Pour toutes les séances, nous avons pu disposer de plusieurs observateurs, le nombre d'observateurs variant de 2 à 5. D'autre part la majorité des séances a donné lieu à deux

expérimentations, dans deux classes différentes au collège, dans la même classe séparée en deux groupes au lycée.

### **III.3 L'ENTRETIEN APRÈS OBSERVATION**

Cet entretien a pour objet :

- de compléter les informations recueillies par les observateurs pendant la séance par celles obtenues par l'enseignant,
- d'élucider éventuellement des points qui posent problème aux observateurs,
- d'essayer de pointer les décalages existant entre les prévisions et le déroulement effectif et d'en chercher des raisons,
- de recueillir les impressions de l'enseignant à chaud sur le fonctionnement de la séance,
- de recueillir des informations sur la façon dont il pense donner suite au travail effectué dans la séance, compte-tenu du déroulement effectif.

Il n'y a pas de grille prévue a priori pour cet entretien qui est enregistré.

### **III.4 PROBLÈMES MÉTHODOLOGIQUES RENCONTRÉS**

Ces problèmes ont été essentiellement liés au recueil des données : difficulté de noter en temps réel tout ce que faisaient les élèves vu la rapidité des interactions élève/machine, en particulier au niveau lycée. Ces difficultés n'ont été que partiellement compensées par les enregistrements et les fichiers DERIVE. En effet, lorsque les élèves travaillent par groupes de 2, ils parlent souvent à voix basse, les phrases prononcées, même lorsqu'elles sont compréhensibles, ne sont pas forcément facilement interprétables car la communication est tout autant gestuelle qu'orale : on montre quelque chose sur l'écran en disant : "ça", par exemple. Au niveau des fichiers, nous nous sommes heurtés au fait que, dans certaines situations, le fait d'obliger l'élève à ne rien effacer, semblait une contrainte par trop exigeante. Souvent, après avoir suivi une fausse piste par exemple, les élèves ont envie d'effacer, de nettoyer l'écran. Le fait d'interdire l'effacement contribue à son encombrement, il peut aussi rendre difficile le rapprochement d'expressions intermédiaires qu'il serait bon de faire. Lorsque nous avions l'impression de contraindre trop fortement le fonctionnement du groupe, nous avons ainsi renoncé à interdire l'effacement. Il est clair que, dans ce cas, la reconstitution exacte des interactions dépend fortement des capacités de prise de note en temps réel.

D'autre part, il n'a pas toujours été possible aux observateurs, face aux difficultés rencontrées par les élèves, de rester dans le rôle qui leur avait été prescrit et la lecture des comptes-rendus montre des interventions d'aides non prévues. En général, il y en a cependant peu, et elles ne nous ont pas gênés énormément pour l'analyse. Les protocoles où ces interventions nous semblaient moins contrôlables ont été systématiquement écartés.

Enfin, les entretiens après les observations n'ont pas toujours été menés avec le sérieux nécessaire. Les observateurs étaient fatigués, nous ne disposions pas nécessairement d'un temps suffisant. Ils sont en général peu exploitables.

#### IV. OBSERVATIONS AU COLLEGE

Ces observations ont été réalisées, comme nous l'avons précisé dans l'introduction, dans le même collège en troisième, avec le même professeur. Il y a eu quatre observations réparties dans l'année, sur des thèmes différents. Toutes sauf la dernière ont été réalisées dans deux classes successivement : la première de bon niveau, la seconde plus faible. Ces deux classes avaient des effectifs de 26 et 27 élèves. Ceci nous a en particulier permis de tester la plus ou moins bonne adéquation des situations proposées à différentes catégories d'élèves. Le nombre d'observateurs a été variable d'une séance à l'autre (de 2 à 5) et nous disposons donc, même si toutes les observations de groupes ne sont pas de la même qualité, d'idées relativement précises sur le fonctionnement réel de ces situations, avec des élèves de profils sensiblement différents.

Les thèmes concernés rappelons-le sont les suivants :

- parenthésage, fractions,
- généralisation d'identités remarquables,
- géométrie analytique,
- résolution de systèmes d'équations.

Pour chacune de ces séances, les élèves ont travaillé en salle informatique durant une heure par groupes de 2., en suivant une ou plusieurs fiches distribuées par l'enseignant au début de la séance. Il n'y avait pas de phase de bilan collectif pendant la séance, celui-ci étant systématiquement effectué au cours d'une séance ultérieure.

Nous avons organisé le rapport, séance par séance. Pour chacune d'elles, il sera structuré de la façon suivante :

1. Contexte de l'observation,
2. Présentation des activités proposées,
3. Analyse a priori effectuée par l'enseignant,
4. Exemples de déroulements,
5. Analyse a posteriori.

Dans la partie 3, nous synthétiserons l'analyse a priori effectuée par l'enseignant en l'organisant autour de trois rubriques : les objectifs de la situation, l'intérêt supposé de DERIVE, les connaissances DERIVE nécessaires et utiles, les comportements et difficultés prévus. Dans la partie 4, nous présenterons, sous forme résumée, le fonctionnement de deux groupes, choisis pour permettre au lecteur de se faire une idée plus précise de la diversité des fonctionnements possibles. Dans la partie 5, nous nous appuierons sur ces exemples mais aussi plus globalement sur l'ensemble des données recueillies. Nous centrerons notre analyse, pour chacune des observations, sur les points qui nous semblent, en l'état actuel de l'analyse, les points essentiels, compte tenu des questions à l'étude.

Les documents distribués aux élèves sont annexés à la fin de chaque observation.

## **IV.1 PARENTHESESAGES - FRACTIONS**

### **CONTEXTE DE L'OBSERVATION**

Cette observation a été réalisée le 15 novembre 1993. Quatre groupes ont été observés (2 dans chaque classe), les productions écrites des élèves ont été recueillies en fin de séance.

Elle s'est déroulée alors que DERIVE avait déjà été utilisé collectivement à 5 reprises pour la correction de devoirs et des bilans de TP et, par groupes, à 3 reprises dans des séances de TP (les 19 octobre, 2 novembre, 9 novembre). La séance du 9 novembre concernait le développement de carrés de deux termes.

### **PRÉSENTATION DES ACTIVITÉS PROPOSÉES**

Les élèves doivent entrer sous DERIVE douze expressions numériques et algébriques données dans une fiche (cf. annexe page 105). Ces expressions sont de complexité variée et comportent pour la plupart des écritures fractionnaires. L'entrée est correcte si l'affichage DERIVE "correspond" à l'écriture P/C. La plupart des entrées supposent le déplacement et/ou l'adjonction de parenthèses à l'expression figurant sur la fiche. Les élèves doivent ensuite utiliser DERIVE pour simplifier ces expressions et noter les résultats obtenus. Ces derniers doivent fournir à l'enseignant un feed-back indirect sur la correction des entrées. Deux exercices complémentaires sont proposés pour les élèves qui auraient terminé avant la fin de l'heure le travail demandé : déterminer l'inverse d'une expression fractionnaire numérique complexe (4 réponses sont proposées), résoudre avec DERIVE une équation fractionnaire complexe se ramenant à une équation du second degré.

### **ANALYSE A PRIORI DE LA SÉANCE EFFECTUÉE PAR L'ENSEIGNANT**

#### **Objectifs :**

Depuis le début de l'année, en s'appuyant notamment sur l'usage des calculatrices, l'enseignant a abordé un certain nombre de questions : gestion de calculs numériques un peu complexes, réduction de sommes algébriques, développement, factorisation. Il attache dit-il "une extrême importance à l'analyse des expressions. C'est là un point sensible qui conditionne en grande partie le succès dans les calculs formels. Savoir "déchiffrer" une expression, c'est se créer des possibilités de travail."

L'activité proposée dans cette séance doit contribuer à développer ces capacités d'analyse d'expressions, dans le cas notamment d'expressions complexes imbriquant parenthésage, fractions et radicaux.

#### **Intérêt supposé de DERIVE :**

La saisie des expressions sous DERIVE demandée nécessite le passage de l'écriture spatiale P/C à une écriture linéaire, donc une analyse de cette expression permettant la transcription. DERIVE présente, par rapport à la calculatrice, l'intérêt de restituer l'écriture dans sa dimension spatiale. L'élève dispose donc d'une validation immédiate de son travail susceptible de lui permettre en cas d'erreur de progresser vers la solution. En effet, puisque DERIVE affiche la représentation spatiale de l'expression entrée, il peut chercher à interpréter les décalages existants entre l'expression initiale et l'expression produite par DERIVE.

Dans cette activité, de plus, les règles d'écriture deviennent des contraintes du « milieu » (Brousseau, 1988). Elles ne relèvent pas, comme c'est souvent le cas, de contraintes du contrat

didactique mais deviennent une nécessité objective. L'enseignant mentionne ainsi dans son analyse a priori : "Les élèves devront prendre conscience qu'il existe des contraintes très importantes qui régissent la saisie des expressions sur ordinateur. Ce "truc" étant une machine, on devra donc éliminer radicalement toute ambiguïté dans l'écriture. Ils admettront donc que les règles d'écriture et de lecture qu'ils ont apprises reposent sur une nécessité."

Il souligne également que la rigidité de l'ordinateur peut amener les élèves à apprécier, par comparaison, la souplesse des règles "habituelles".

#### Connaissances DERIVE nécessaires :

Elles sont pour cette situation très limitées :

- savoir utiliser le clavier (touches ENTREE, touches fléchées, barre d'espace, etc...),
- savoir charger et lancer DERIVE,
- savoir entrer une expression avec la commande Auteur, savoir la corriger. A ce niveau, la connaissance de l'action de la touche F3 peut être utile, même si elle n'est pas nécessaire. L'enseignant précise qu'il n'a pratiquement pas parlé des touches F3 et F4 et qu'il en parlera "peut-être selon la tournure des événements".

L'enseignant pense devoir rappeler l'expression de l'exponentiation par la touche puissance mais il prévoit de le faire en fonction des demandes des groupes.

La seule connaissance nouvelle apparaissant dans la séance concerne l'expression de la racine carrée par SQRT.

L'une des fiches distribuées aux élèves présente un paragraphe intitulé : "Les commandes à utiliser", dans lequel figurent les commandes : Auteur, Simplifie, suppRime, la désignation d'une racine carrée et où la touche F3 est introduite comme touche utile : "F3 pour reproduire l'expression sélectionnée sur la ligne d'écriture". Mais il n'y a pas de rappel sur la sélection, le déplacement dans les sous-expressions et sur les modes de correction de formules. L'enseignant interrogé sur ce point, précise qu'il préfère montrer directement les gestes correspondants, si nécessaire, à chaque élève.

#### Comportements, difficultés attendus :

L'enseignant pense que, pour la plupart des groupes, l'heure sera nécessaire pour entrer les douze expressions de la fiche. Il espère ne pas avoir à intervenir beaucoup et pouvoir se limiter à des interventions groupe par groupe, en fonction des besoins. Il ne s'attend pas à rencontrer de problème particulier. Il pense que les élèves seront peut-être surpris par certaines expressions, comme les fractions superposées, et auront l'impression qu'il s'agit là d'expressions "tordues", mais ceci ne devrait pas, à son avis, empêcher leur investissement dans la tâche proposée. Il aimerait que les élèves remarquent que la commande Simplifie de DERIVE ne produit pas toujours des expressions plus simples.

En ce qui concerne les deux exercices supplémentaires qui "vont plus loin", il prévoit que certains élèves auront du mal à comprendre ce qu'ils doivent faire, qu'ils peuvent ainsi penser qu'il existe une commande pour inverser une expression et la chercher dans les commandes DERIVE. Il se demande aussi comment ils réagiront aux deux solutions proposées par DERIVE pour l'équation, vu que cela correspond pour eux à une situation totalement nouvelle.

Il n'est pas prévu de bilan collectif pendant la séance, mais un bilan sera fait ensuite collectivement en classe en fonction des productions des élèves. L'enseignant pense aussi revenir à cette occasion sur le sens du verbe « simplifier ».

### EXEMPLES DE DÉROULEMENTS

#### Groupe I :

Il s'agit de deux filles de bon niveau en mathématiques que nous désignerons par S. et L.

Elles se partagent les rôles : S. tape, L. dicte et contrôle, mais il n'y a pas de véritable leader et l'interaction des deux élèves est permanente. Elles travaillent vite, sans se laisser distraire et leur attention est très soutenue tout au long de la séance.

9h30

Début de la séance . L'enseignant présente le travail à faire.

Les élèves ne rencontrent aucune difficulté à lancer DERIVE.

#### *Expressions 1 et 2 (~ 3mn) :*

Elles rentrent l'expression 1, en introduisant les parenthèses prévues a priori, c'est à dire, en tapant :  $(8/15)/(4/9)$ , trouvent le résultat fourni par DERIVE satisfaisant et obtiennent par simplification :  $\frac{6}{5}$ .

Elles tapent ensuite l'expression 2 comme elle se présente et obtiennent une expression identique à l'expression papier. Elles passent à la suite.

#### *Expressions 3 et 4 (~ 5mn) :*

Elles tapent l'expression 3 après avoir dit qu'il fallait rajouter des parenthèses. Elles en rajoutent en fait deux couples :  $3+(3/(3+3/5))$ . Le rajout des parenthèses s'est fait directement lors de la frappe, sans intermédiaire P/C. Elles ont cependant une petite incertitude sur leur production, hésitent un peu avant de faire "Enter", puis décident de voir ce que donne DERIVE. Le résultat est conforme et elles sont contentes d'elles : "On est bonnes, hein !" dit l'une.

Elles passent ensuite à l'expression 4 et, dans un premier temps, la tapent, sans déplacement des parenthèses. Elles repèrent à l'affichage la non-conformité, l'interprètent en "oubli de parenthèses" et en rajoutent autour de  $a+2$  :  $a+2/5-((a+2)/5)$ .

A l'affichage, toutes les parenthèses disparaissent. Elles se demandent si leur production est ou non correcte et, interprétant la consigne comme : il faut faire afficher à DERIVE ce qui est écrit sur le papier, elles essayent d'obtenir un affichage parenthésé. Très vite, L. suggère d'utiliser des crochets, ce qui conduit à l'affichage :

$$a + \frac{2}{5} - \left[ \frac{a+2}{5} \right]$$

Cette expression les satisfait. Dans la simplification, l'expression ne se réduit pas, du fait des crochets, et elles obtiennent :  $[-\frac{a+2}{5}] + a + \frac{2}{5}$ . Elles recopient le résultat sur la fiche, sans s'étonner ni faire le moindre commentaire puis passent à la suite.

#### *Expressions 5, 6, 7 et 8 (~ 5mn) :*

L'expression 5 est rentrée directement avec un parenthésage minimal, organisé ici aussi mentalement. Elles repèrent que la simplification prend plus de temps. Le résultat obtenu :  $\frac{5a(2b+5)+2b(b+10)}{5b(b+5)}$  les laisse perplexes mais elles ne cherchent pas à l'interpréter, notent et passent à la suite.

Pour l'expression 6, le parenthésage minimum est là aussi entré d'emblée.

Pour l'expression 7, S. pense qu'elles vont "encore s'embêter avec les carrés" mais elles retrouvent très vite la syntaxe et tapent l'expression, comme elle se présente.

Pour l'expression 8, elles décident d'ajouter deux couples de parenthèses correspondant au parenthésage minimum, oublient le second à la frappe, mais s'en aperçoivent tout de suite et corrigent avant d'entrer l'expression tapée.

Tout va très vite.

#### *Expressions 9 et 10 (~ 10mn)*

L'enseignant fait une intervention collective pour suggérer que ce ne soit pas toujours le ou la même dans les groupes qui soit au clavier. Au passage à l'expression 9, L. prend donc le clavier, mais elle le maîtrise visiblement moins bien que S. ; elle cherche les touches, ce qui énerve un peu S.

Pour l'expression 9, elles décident de rajouter deux couples de parenthèses mais le premier est mal situé :  $(1/3+\text{SQRT}5)-1/(3-\text{SQRT}5)$ . Elles obtiennent à l'affichage :  $\frac{1}{3} + \sqrt{5} - \frac{1}{3-\sqrt{5}}$

S. interprète immédiatement l'erreur commise et dicte le parenthésage minimum correct à L.

Elles passent à l'expression 10 qui les effraie un peu du fait de l'abondance de racines carrées, mais là encore très vite, elles restituent un parenthésage de tête, avec 5 couples de parenthèses et tapent :  $\text{SQRT}(1+10(\text{SQRT}(2-5(\text{SQRT}(8)))))$ , comptant le nombre de parenthèses ouvertes pour déterminer le nombre de parenthèses à fermer.

La production DERIVE les étonne puisque DERIVE ne prolongeant pas les barres de radicaux, elles obtiennent :  $\sqrt{(1+10\sqrt{(2-5\sqrt{8})})}$ . Elles appellent le professeur pour lui demander si c'est bien la même chose. Ce dernier leur renvoie la question en leur demandant si elles ont des critères pour savoir si ce qui est sur l'écran est bien ce qu'elles veulent obtenir. Elles ne peuvent lui répondre. Il les aide alors à pointer les différences entre l'écriture P/C et l'affichage DERIVE et leur en explique les raisons techniques. Il les prévient, avant de repartir, que la simplification va les surprendre, que c'est dû au fait qu'il n'a pas réfléchi en tapant l'expression et qu'il expliquera en classe un peu, au moment du bilan, ce qui se passe. Elles font simplifier, obtiennent :

$$\sqrt{[\sqrt{250\sqrt{2} - \frac{199}{4}}] + \frac{1}{2}} + i\sqrt{[\sqrt{250\sqrt{2} - \frac{199}{4}}] - \frac{1}{2}}$$

et ne sont pas étonnées outre mesure vu ce qu'a dit le professeur. S. remarque que les deux parties de l'expression sont presque les mêmes. Elles notent la réponse sur leur fiche et passent à la suite.

#### *Expressions 11 et 12 (~ 15mn) :*

L'expression 11 est tapée par L. avec 4 couples de parenthèses :  $(1-3*\sin X)/(\cos X)-(1+2*\sin X)/(\cos X)$ . S. pense que ça ne suffit pas et veut faire rajouter une parenthèse globale. Ceci suppose un retour en arrière pour corriger l'expression. L. ne sait pas faire, S. le lui explique mais L. s'embrouille dans les touches et S. lui reprend le clavier. L. se remet alors à dicter.

A la simplification, elles sont un peu étonnées de voir apparaître la fonction  $\tan(x)$  mais notent le résultat sans chercher plus avant pourquoi on obtient ce résultat.

Elles passent à l'expression 12 et ici aussi essaient de fonctionner sans écriture intermédiaire. Elles tapent :  $(1+(2/(3+(4/5+x))))/(6/(7+(8/9+x)+10))$

Elles jouent visiblement ici la sécurité face à la complexité. L'affichage n'est pas conforme puisqu'il manque des parenthèses autour de  $5+x$  et  $9+x$ . La non-conformité est repérée. S. dit qu'il doit y avoir trop de parenthèses. L. lui fait remarquer le  $\frac{4}{5}$  et le  $\frac{8}{9}$  qui apparaissent à l'affichage et conclut qu'au contraire, il manque des parenthèses.

Elles effacent l'expression, recommencent à taper, hésitent, puis décident de passer en P/C et d'écrire ce qu'elles veulent taper :  $(1+2/(3+4/(5+x)))$ , puis de même pour le dénominateur. Lors de l'entrée DERIVE, elles décident de rajouter par sécurité un couple de parenthèses au dénominateur, tout en pensant que ces parenthèses sont sans doute inutiles : "par sécurité mais sans doute de trop".

L'affichage est, encore une fois, non conforme car elles ont oublié le premier signe / dans la frappe du numérateur. Elles interprètent l'affichage très vite, effacent et retapent tout. Elles font une nouvelle erreur de frappe, tapant 4 au lieu de 5 au numérateur. Elles repèrent l'erreur à l'affichage, tout en étant maintenant convaincues de leur réussite, effacent et retapent le tout une fois de plus.

#### *Résolution de l'équation (~ 5mn) :*

Elles ont fini la première fiche et passent à la suite. Elles commencent à chercher dans leurs cahiers comment faire l'inverse avec DERIVE, ne trouvent pas et décident de passer à la résolution de l'équation. En rentrant l'expression, elles refont la même erreur que dans l'expression 12, tapant :  $(5/x+5)$  au lieu de :  $5/(x+5)$ . L'erreur est immédiatement repérée à l'affichage. Elles effacent et retapent, oubliant cette fois un signe /. Là encore, elles repèrent tout de suite l'oubli en voyant l'affichage, effacent et commencent à retaper. Elles en ont un peu marre mais ne pensent pas du tout à utiliser la touche F3. Elles décident de faire plus attention et de bien contrôler la frappe avant d'entrer les expressions.

L'expression étant enfin correctement rentrée, elles utilisent la commande resoL pour résoudre, obtiennent les deux racines, les notent sans faire le moindre commentaire et repassent à l'exercice 1.

#### *Inverse (~ 10mn)*

Elles rentrent la première fraction proposée :  $\frac{55}{21}$ , demandent, via DERIVE, sa simplification, sa factorisation, son développement et constatent que ça ne donne rien. L. suggère de rentrer l'expression. Comme pour les deux dernières expressions complexes, elles commencent par écrire sur papier ce qu'elles veulent taper. Elles rentrent ensuite l'expression, L. dictant et vérifiant soigneusement. L'affichage est conforme d'emblée. Elles font ensuite simplifier par DERIVE et obtiennent :  $\frac{21}{55}$ . Elles repèrent tout de suite que c'est l'inverse de la première valeur proposée mais ne comprennent pas ce qui se passe. Elles appellent l'enseignant pour lui demander s'il n'y a pas une erreur d'énoncé. Il répond que non. Elles discutent alors un bon moment puis comprennent que c'est normal puisqu'elles veulent l'inverse de l'expression tapée.

#### Groupe 2 :

Il s'agit cette fois de deux filles assez faibles, nous les désignerons par M. et N. Elles alternent au clavier régulièrement. Elles essaient d'avancer dans la fiche, rencontrent des difficultés certaines mais vont travailler toute la séance.

Le professeur introduit la séance et demande de corriger l'expression 10 en remplaçant le - par un + pour éviter l'intervention de complexes dans la simplification.

Les élèves lancent DERIVE sans difficulté et commencent à travailler.

#### *Expressions 1 et 2 (~ 3mn) :*

Elles tapent l'expression 1 sans introduire de parenthèses :  $8/15/4/9$ . L'affichage obtenu leur convient tout à fait, elles simplifient et notent le résultat :  $\frac{2}{135}$ .

Elles passent ensuite à l'expression 2 qu'elles tapent avec des crochets qui restent à l'affichage. Elles se demandent si c'est correct ou pas et n'arrivent pas à se mettre d'accord. Elles appellent alors l'enseignant qui confirme que "crochets ou parenthèses, c'est équivalent".

Elles font simplifier et notent le résultat sur leur fiche.

#### *Expression 3 - première phase (~ 10mn) :*

Elles passent à l'expression 3 et rencontrent immédiatement un problème car N. veut différencier la taille des traits de fractions comme dans l'expression P/C et se demande comment faire. M. ne sait pas mais lui conseille d'utiliser la barre ordinaire et de voir ce que ça donne. N. hésite, M. demande au groupe voisin comment faire mais ce dernier n'est pas plus avancé. Elles décident donc de rentrer l'expression en utilisant la barre de fraction du clavier et tapent, sans introduire de parenthésage et en oubliant de plus l'un des 3 :  $3+/3+3/5$ .

Rien ne s'affiche sur l'écran et aucun message d'erreur n'est fourni. N. efface et M. suggère d'introduire des parenthèses. N. retape, toujours sans parenthèses, en oubliant cette fois le dernier 3. DERIVE ne fournit encore une fois aucune réponse. Désespérées par cette absence de réaction de l'ordinateur, les élèves appellent le professeur.

Quand le professeur arrive, N. lui demande comment faire la grande barre de fraction. Le professeur explique que, sur le clavier, il n'y a qu'un symbole pour la division mais que DERIVE se débrouille ensuite et différencie à l'écran les tailles des barres de fraction.

N. recommence à taper, toujours sans parenthèses, contre l'avis de M., puis veut lui donner le clavier : "Prends-le, je sais pas faire, moi !". M. résiste, N. continue sa frappe, M. lui prédit que ce sera faux et, effectivement, elles obtiennent :  $3 + \frac{3}{3} + \frac{3}{5}$ .

M. accepte alors de prendre le clavier mais dit qu'elle doit réfléchir avant de taper. Elle réfléchit un moment en silence puis tape en introduisant un couple de parenthèses autour de deux des 3 :  $3 + (3/3) + 3/5$ .

L'affichage obtenu est identique au précédent. N. reprend alors le clavier. Elles essaient de trouver de l'aide auprès des voisines, mais en formulant toujours leur demande en termes de longueur de barre de fraction : "Comment vous faites pour avoir une grande barre ?". Les voisines, qui ont terminé l'exercice mais ne sont pas sur la même longueur d'onde, visiblement ne comprennent pas la question.

Le professeur repasse et elles lui reposent le même problème, qui visiblement correspond à la lecture qu'elles font de la non-conformité de l'expression obtenue : le trait de fraction n'est pas assez long !

Pour savoir ce qu'elles ont rentré comme expression, le professeur utilise la touche F3 pour faire réapparaître l'expression linéaire. Dans ce réaffichage, les parenthèses initialement introduites ont disparu, du fait du fonctionnement de DERIVE. Le professeur leur demande si elles n'ont pas l'impression d'avoir oublié quelque chose. Elles pensent tout de suite au parenthèses et répondent qu'elles en avaient mis et qu'elles ont disparu.

Le professeur leur conseille alors de repasser en P/C et de préparer à l'avance le parenthésage sur les expressions de la fiche.

### *Expression 3 - phase 2 (~ 7mn) :*

Elles ne suivent pas ce conseil, repassent en DERIVE, retapent la même expression que précédemment et obtiennent le même résultat.

L'observateur intervient et leur rappelle le conseil donné par le professeur. M. et N. semblent surtout intriguées par la disparition des parenthèses entre la frappe et l'affichage. M., sur sa feuille, rajoute des parenthèses autour de la fraction puis entre l'expression correspondante :

$3 + (3/3 + 3/5)$ . A l'affichage, les parenthèses disparaissent une fois de plus et les élèves se retrouvent encore avec la même expression. Découragées, elles appellent le professeur et, ne le voyant pas venir, décident de passer à l'expression 4.

Sur ce, le professeur arrive. Elles lui disent qu'elles n'y arrivent pas. Il leur fait préciser les parenthèses qu'elles ont mises et leur demande si ce sont les seules que l'on peut mettre, puis comment elles ont choisi.

Elles ne savent visiblement pas trop quoi répondre, puis M. dit : "Quand il y a un plus."

Le professeur demande : « Pourquoi plus et pas moins, multiplié ou divisé ? ». Silence. Il explique alors que normalement on rajoute un couple de parenthèses pour chaque opération et le leur fait faire sur l'expression 3. Il aborde ensuite, en termes de reconnaissance de formes, la question des "conventions" qui font qu'il y a des parenthèses dont on peut se passer. Il passe en revue successivement tous les couples de parenthèses introduits dans l'expression 3 et demande, pour chacun d'eux, si on peut le supprimer ou pas. L'observateur a l'impression que les élèves ne comprennent pas grand chose à ces explications et répondent : oui / non, plutôt en fonction de l'intonation de voix de l'enseignant. Quand il part, elles disposent néanmoins de

l'expression parenthésée minimale. Elles l'entrent en se dépêchant car elles sont conscientes d'avoir pris beaucoup de retard.

#### *Expressions 4 et 5 (~ 5mn) :*

Elles simplifient, recopient le résultat puis passent à l'expression 4 qu'elles tapent sans modification :  $a+2/5-(a+2/5)$ . C'est M. qui a maintenant le clavier. L'affichage donne :

$$a + \frac{2}{5} - [a + \frac{2}{5}]$$

N. presse M. de simplifier pour rattraper le temps perdu. M. veut s'assurer de la conformité de l'affichage. N. lui dit que l'on voit bien que c'est bon. Elles font simplifier et notent le résultat obtenu : 0

N. reprend le clavier pour l'exercice suivant en faisant remarquer que c'est toujours sur elle que tombent les exercices difficiles. Elle passe en P/C pour préparer le parenthésage et rajoute sur la fiche deux couples de parenthèses :  $(...)+(...)$ . M. lui dit qu'elle n'est pas d'accord et se met à préparer de son côté le parenthésage de l'expression 6. N. tape, conformément à son parenthésage :  $(a+2/b+5)+(a/b+2/5)$ , ce qui à l'affichage donne :  $a + \frac{2}{b} + 5 + \frac{a}{b} + \frac{2}{5}$

Face à cette expression, N. se rend compte que ça ne va pas. M. lui dit que c'était prévisible, que c'est une question de parenthèses. N. lui donne alors le clavier et en fait M. retape la même chose, obtenant le même affichage. Les deux élèves se retrouvent bloquées.

#### *Expressions 6 et 7 (~ 5mn) :*

Très vite, N. conseille, vu le retard, de passer à l'expression suivante et elle prend le clavier. Elles passent donc à l'expression 6 et N. prépare le parenthésage en P/C. Il s'agit cette fois du parenthésage correct minimum. M. n'est pas d'accord avec cette proposition mais N. tape et l'affichage lui donne raison. Elles simplifient, notent le résultat et M. reprend le clavier pour l'expression suivante. Elle tape lentement l'expression 7 sans modification et se fait expliquer par N. la syntaxe du carré. Pas de problème.

#### *Expressions 8 et 9 (~ 5mn) :*

Le professeur passe. Elles lui expliquent qu'elles ont sauté une expression qu'elles n'arrivaient pas à faire, elles demandent si elles ont le droit. Il leur répond que oui et elles continuent leur travail, satisfaites. L'expression 8 les effraye. M. suggère de préparer les parenthèses sur la fiche. N. suggère de sauter directement à l'expression 11 qui lui semble plus simple. M. refuse et introduit sur la fiche deux couples de parenthèses qui correspondent au parenthésage correct minimum. N. prend le clavier et M. lui dicte ce qu'elle doit taper. Une discussion s'amorce car N. voudrait fermer le premier couple après le carré. M. ne cède pas et N. finit par s'exécuter. L'affichage donne raison à M., au grand étonnement de N.

Elles traitent de la même façon l'expression 9 : parenthésage préparé en P/C et ajout de deux couples de parenthèses correspondant au parenthésage correct minimum. Elles demandent au professeur comment faire les racines et il leur montre l'information donnée dans la fiche.

#### *Expressions 10 et 11 (~ 8mn) :*

Elles passent à l'expression 10. C'est N. qui a le clavier. M. se désintéresse de la situation après avoir dit que c'était une expression difficile et essaie de bavarder avec le groupe voisin. N. tape l'expression telle que, sans ajouter de parenthèses. Ceci donne l'affichage :

$\sqrt{1+\sqrt{10}\sqrt{2+5}\sqrt{8}}$ . M. dit que ça ne va pas, N. soutient que oui. M. est persuadée qu'il faudrait des parenthèses. Finalement N. fait simplifier l'expression affichée et note le résultat puis elles passent à l'exercice 11. Cet exercice est traité en rajoutant deux couples de parenthèses : (...) - (...). Ceci donne à l'affichage :  $1 - \frac{3\sin(x)}{\cos(x)} - [1 + \frac{2\sin(x)}{\cos(x)}]$ . Encore une fois, il y a désaccord entre les deux élèves : N. pense que c'est bon et M. que c'est mauvais car "à l'affichage il n'y a qu'une parenthèse".

Elles appellent le professeur pour qu'il les départage mais c'est la fin de la séance.

### ANALYSE A POSTERIORI

L'analyse des productions écrites des élèves pour les deux classes (la classe A étant la bonne classe) donne les résultats présentés dans le tableau ci-après.

Pour l'expression 1, toutes les productions ont été comptabilisées comme correctes, vu ambiguïté de l'écriture P/C. En fait, dans la classe A, 24 élèves ont trouvé 6/5, ce qui correspond au parenthésage attendu et 2 élèves ont trouvé 2/135, ce qui correspond sans doute à une entrée non parenthésée, même si cela peut être obtenu avec parenthésage. Dans la classe C, les nombres correspondants sont respectivement : 22 et 5.

| Expressions | % Réussite<br>Classe A (27 élèves) | % Réussite<br>Classe C (26 élèves) |
|-------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1           | 100%                               | 100%                               |
| 2           | 88%                                | 100%                               |
| 3           | 100%                               | 93%                                |
| 4           | 50%                                | 63%                                |
| 5           | 88%                                | 96%                                |
| 6           | 96%                                | 89%                                |
| 7           | 88%                                | 96%                                |
| 8           | 92%                                | 93%                                |
| 9           | 73%                                | 100%                               |
| 10          | 58%                                | 44%                                |
| 11          | 85%                                | 96%                                |
| 12          | 62%                                | 22%                                |
| Inverse     | 46%                                | 15%                                |
| Equation    | 27%                                | 15%                                |

Ces résultats donnent une impression de réussite de la situation. Pour la plupart des expressions proposées, le taux de réussite est en effet supérieur à 80%. On note cependant un fléchissement :

- pour l'expression 4 où l'erreur très largement majoritaire, qui consiste à taper les parenthèses dans l'ordre linéaire d'apparition, conduit par simplification à la réponse 0, bien identifiable.,

- pour l'expression 10 contenant les radicaux où l'interprétation des productions DERIVE, nous y reviendrons, n'a rien d'évident,
- pour l'expression 12, la dernière, très complexe, la baisse affectant ici surtout la classe C.

On notera que beaucoup d'élèves ont terminé la fiche avant la fin de l'heure puisque le nombre de réponses correctes au premier exercice supplémentaire est de 46% dans la classe A. Il est évident que la complexité de l'expression à entrer rendait difficile la résolution de cet exercice à quelqu'un qui n'aurait pas réussi l'entrée correcte de l'expression 12. Excepté au niveau de ces deux exercices et du 12, on ne note pas non plus de différences vraiment apparentes entre les deux classes.

L'analyse du fonctionnement des différents groupes nous montre que, de fait, des résultats en apparence proches peuvent cacher des fonctionnements mathématiques et un niveau de maîtrise de la tâche très différents. Il faudrait se garder de voir, dans les résultats précédents, la preuve d'une maîtrise tout à fait satisfaisante des problèmes de parenthésage dans les deux classes observées, et ce, malgré la complexité des expressions proposées. C'est par ce point, non directement lié à l'utilisation de DERIVE, que nous voudrions débiter l'analyse.

#### Complexité apparente / complexité réelle de la tâche :

Si nous examinons plus attentivement les différentes expressions proposées, en considérant non pas leur complexité apparente mais la complexité à l'oeuvre dans la résolution de la tâche proposée, nous sommes amenés à classer ces expressions en fonction des transformations à effectuer dans la transcription en écriture linéaire. Ces transformations sont de plusieurs types : passage de dispositions haut / bas à des dispositions gauche / droite, actions de parenthésage. Les premières visiblement ne posent de problèmes à aucun groupe. Pour ce qui est du parenthésage, les transformations sont a priori de deux types : déplacement de parenthèses existantes, comme dans l'expression 4, ajout de parenthèses, comme dans la plupart des autres expressions. On peut alors classer la complexité en fonction du nombre minimum de couples de parenthèses à rajouter et de leur degré d'imbrication. Il s'agit là bien sûr d'une analyse théorique de complexité qui ne correspond pas nécessairement aux stratégies mises en oeuvre par les élèves, qui ne recherchent pas nécessairement un parenthésage minimum, ou peuvent transformer un problème de déplacement de parenthèses en un problème d'ajout de parenthèses (cf. groupe 1), mais elle permet de dépasser la seule appréhension perceptive.

Si l'on considère le nombre minimum de couples de parenthèses à rajouter, il est nul pour 1, 2 et 7, égal à un pour 3, à deux pour 5, 6, 8, 9, 10 et 11, à six pour 12. L'expression 4 relève a priori du seul déplacement de parenthèses, ce qui au vu des observations semble plus difficile que le simple ajout de parenthèses, mais elle peut aussi être gérée par un ajout (c'est d'ailleurs la solution qu'adopte le groupe 1 après avoir remarqué son erreur). Il y a imbrication nécessaire uniquement pour 10 et 12 ainsi que pour 3, dans le traitement par ajout.

Ceci a pour conséquence de permettre une réussite raisonnable avec des stratégies de parenthésage relativement sommaires. Le second groupe observé nous en donne l'exemple. L'observation de ces élèves nous a en effet montré que, perdues au départ (cf. le traitement de l'expression 3), elles se stabilisaient au fil de la séance sur la stratégie suivante :

1. chercher dans l'expression un signe d'opération principal qui la sépare en deux parties relativement équilibrées : pour 5, c'est le signe + après la première fraction, pour 6, le grand trait de division, pour 8, 9 et 11 le signe -,
2. ajouter deux couples de parenthèses de part et d'autre de ce signe,

3. si un des couples entoure une fraction et si l'un des termes de la fraction : numérateur ou dénominateur, se réduit à un nombre, faire glisser le couple de parenthèses à l'autre terme.

Ceci permet d'obtenir la réussite aux expressions : 3, 4, 6, 8 et 9. Si on ajoute à ceci les expressions 1, 2 et 7 qui ne nécessitent pas de réécriture pour donner une apparence conforme et la 10 où la non-conformité est peu visible, on voit bien que les élèves peuvent réussir à cette tâche en apparence complexe sans maîtriser réellement le parenthésage. Nous ne l'aurions a priori pas pensé, impressionnés que nous étions par la complexité perceptive des expressions. C'est l'observation fine des comportements d'élèves qui nous a permis d'en prendre conscience.

Ceci ne veut pas dire que la situation ne suscite pas un travail réel sur le parenthésage. Le fonctionnement des groupes observés atteste la réalité de la centration des élèves sur ce travail. Nous voulions simplement signaler l'importance qu'il y a à choisir les expressions, suivant des critères précis et non sur leur simple complexité perceptive, si l'on veut faire d'une tâche comme celle-ci un test de compétences sur le parenthésage.

#### DERIVE dans cette situation :

Nous voudrions en venir maintenant plus directement aux questions concernant l'utilisation de DERIVE et examiner comment les hypothèses faites à son sujet se sont trouvées confirmées ou non par la réalisation effective.

1. Les hypothèses faites sur la possibilité d'assurer la dévolution de ce type de situation d'analyse syntaxique d'expressions et de faire apparaître les règles d'écriture comme les contraintes d'un milieu a-didactique et non comme relevant de contraintes du contrat didactique, nous semblent tout à fait confirmées. Tous les groupes, même ceux rencontrant le plus de difficultés, se sont investis dans cette tâche et ils n'ont à aucun moment renoncé. Il est clair que la complexité des expressions donnait une allure de défi à cette tâche, par ailleurs accessible avec une maîtrise moyenne du parenthésage, ce qui en renforçait l'intérêt.

2. DERIVE, dans cette situation, devait fonctionner comme instrument de validation. Il a joué clairement ce rôle, mais il nous semble nécessaire de pointer à ce niveau un certain nombre de phénomènes :

- a) Les problèmes liés à ce que l'on pourrait qualifier la "pseudo-transparence" de DERIVE. En effet, DERIVE affiche les expressions dans une disposition spatiale très proche de la représentation spatiale usuelle en P/C. Mais d'une part, il y a des différences, d'autre part ces différences ne sont pas nécessairement clairement identifiables et compréhensibles. L'observation du groupe 2 montre le problème joué par les différences existantes au niveau des longueurs des traits de fraction (moyen de repérage usuel des élèves du signe "principal" d'opération, généralement institutionnalisé). Il apparaît ici dans l'expression 3, mais aurait pu tout aussi bien intervenir dans l'expression 1, si l'enseignant avait clairement différencié la longueur des traits dessinés. En effet, le parenthésage  $(8/15)/(4/9)$  conduit, en affichage DERIVE, à trois traits de fraction de longueurs différentes, le plus grand étant cependant situé là où il est attendu. On voit également à l'oeuvre les différences liées à la distinction parenthèses, crochets, au fait qu'il existe deux sortes de crochets : ceux introduits par l'élève, qui ne disparaissent pas à l'affichage, et ceux introduits par DERIVE lorsqu'interviennent des expressions fractionnaires, qui eux peuvent disparaître à l'affichage et sont aussi gérés différemment dans les simplifications. On a vu aussi les problèmes posés par la disparition des parenthèses entre la frappe et l'affichage qui va apparaître aux élèves comme un phénomène incompréhensible et incontrôlable si justement ils ne maîtrisent pas le parenthésage. Enfin, mentionnons les différences évidentes dans la gestion des symboles de racine carrée qui faisait

que l'expression théoriquement conforme pouvait paraître à certains élèves moins conforme que des expressions non conformes.

Il s'ensuit que l'idée de conformité des deux affichages : P/C et DERIVE, sur laquelle repose la tâche est nécessairement ambiguë et que des élèves qui prendraient cette conformité trop au pied de la lettre peuvent, si l'enseignant n'intervient pas, perdre beaucoup de temps dans des recherches de conformité, mathématiquement sans intérêt.

En revanche, il nous semble que l'existence de ces différences, si l'enseignant arrive à gérer cette ambiguïté, n'est pas en elle-même sans intérêt. En phase de bilan, par exemple, elle peut susciter une discussion intéressante et utile sur les distinction entre le monde des règles mathématiques et celui des conventions.

b) Le fait que la validation DERIVE et l'outil des feed-back fournis pour aider l'élève à corriger ses erreurs ne fonctionnent visiblement pas aussi automatiquement que l'on aurait pu le supposer, et ce indépendamment de toute question de spécificité DERIVE dans la gestion de l'écriture. Il faut d'une part que les élèves repèrent les non-conformités et ceci déjà suppose un certain seuil de connaissance (on notera en particulier le nombre important d'erreurs dans l'expression 4). Il faut d'autre part que les feed-back soient correctement interprétés, ce qui là aussi suppose des connaissances. On notera à ce niveau la différence de fonctionnement entre les groupes 1 et 2. Il semble clair que, pour beaucoup de groupes, l'interprétation des feed-back ne peut se faire à la seule vue de l'affichage DERIVE. Il leur faudrait au moins disposer simultanément de l'écriture linéaire, ce qui nécessite l'utilisation de la touche F3, qui semble encore peu familière. Soulignons aussi que, même en utilisant F3, on ne retrouve pas nécessairement cette écriture puisque DERIVE peut, au passage, supprimer des parenthèses.

Ceci montre que la situation est en fait bien adaptée à des élèves qui, tout en ne maîtrisant pas encore bien les questions de parenthésage, disposent cependant de connaissances dans le domaine. Ceci montre également qu'il serait souhaitable d'attirer davantage l'attention des élèves sur le rôle que peut jouer la touche F3, pour éviter des corrections fastidieuses mais, aussi et sinon plus, pour faciliter l'interprétation des productions DERIVE.

Nous voudrions enfin revenir brièvement sur quelques traits du comportement des élèves qui n'avaient pas fait l'objet d'hypothèses dans l'analyse a priori mais qu'il nous semble néanmoins important de souligner. Nous nous référerons ici au comportement du groupe 1, visiblement un groupe de bons élèves. Ces élèves s'investissent bien dans la tâche proposée et réussissent parfaitement. Pourtant, on remarquera que, dans toute la première partie, ils suivent les instructions données, sans se poser trop de questions, sans chercher en particulier à comprendre plus avant les réponses qui les étonnent un peu. La priorité est clairement à l'avancement dans la fiche. Il n'est peut-être donc pas raisonnable d'attendre d'élèves, même de bons élèves, qu'ils aillent spontanément au delà de ce qui leur est directement demandé, pour adopter des attitudes plus conformes à ce que seraient les nôtres face à cette situation.

ANNEXE : LE TEXTE DU POLYCOPIÉ DISTRIBUÉ AUX ÉLÈVES  
(PARENTHESEAGE, FRACTIONS)

DERIVE

TRAVAUX PRATIQUES

3<sup>ème</sup>

---

*Commandes à utiliser:*

Auteur: pour créer des expressions

Simplifie: pour simplifier

suppRime pour supprimer une expression qui ne reproduit pas exactement le modèle

D désignation d'une racine carrée: pour entrer  $\sqrt{x}$  taper sqrt(x)

*Touches utiles*

F3 pour reproduire l'expression sélectionnée sur la ligne d'écriture

---

1. La feuille jointe montre 12 expressions numérotées de #1 à #12.

Tu devras entrer chaque expression puis la simplifier.

Sur la feuille jointe, tu recopieras le résultat de la simplification faite par DERIVE.

2. Pour aller plus loin (si tu as le temps):

• L'inverse de  $\frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3}}}}$  est-il  $\frac{55}{21}$ ,  $\frac{7}{3}$ ,  $\frac{3}{8}$  ou  $\frac{8}{3}$  ?

Tu expliqueras la méthode employée pour trouver la réponse (avec DERIVE bien entendu !).

• Fais résoudre par DERIVE l'équation  $x = 5 + \frac{5}{10 + \frac{5}{x+5}}$ . Ecris ta réponse sur le compte-rendu.

NOMS:

CLASSE:

1.

| Numéros | Expressions à simplifier                                        | Expressions simplifiées |
|---------|-----------------------------------------------------------------|-------------------------|
| #1      | $\frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{9}}$                              |                         |
| #2      | $(1+\frac{3}{5})(1-\frac{3}{5})$                                |                         |
| #3      | $3+\frac{3}{3+\frac{3}{5}}$                                     |                         |
| #4      | $a+\frac{2}{5}-\left(\frac{a+2}{5}\right)$                      |                         |
| #5      | $\frac{a+2}{b+5} \div \frac{a}{b} + \frac{2}{5}$                |                         |
| #6      | $\frac{a+\frac{2}{5}}{\frac{b-3}{3}-\frac{3}{8}}$               |                         |
| #7      | $(1+(1+x))^2 - ((1+x)^2 - 1)$                                   |                         |
| #8      | $\frac{1}{1+\frac{3^2}{5}} - \frac{1}{\frac{3}{5^2}}$           |                         |
| #9      | $\frac{1}{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{3-\sqrt{5}}$                   |                         |
| #10     | $\sqrt{1+10\sqrt{2}-5\sqrt{8}}$                                 |                         |
| #11     | $\frac{1-3\sin x}{\cos x} - \frac{1+2\sin x}{\cos x}$           |                         |
| #12     | $1+\frac{2}{3+\frac{4}{5+x}}$<br>$\frac{6}{7+\frac{8}{9+x}}+10$ |                         |

2.

- L'inverse demandé est: .....
- La solution de l'équation est x = .....

## IV.2 GENERALISATION D'IDENTITES REMARQUABLES : CARRES DE SOMMES

### CONTEXTE DE L'OBSERVATION

Cette séance se situe un mois plus tard, le 13 décembre 1994. Entre-temps, les élèves ont travaillé notamment sur les identités remarquables. La dernière séance DERIVE en TP a eu lieu le 30 novembre. Elle concernait le développement de  $(a+b)^n$  et a permis en particulier de découvrir le tableau de Pascal. La dernière séance collective a eu lieu le 7 décembre. Il s'agissait de la correction et du bilan de la séance de TP du 30 novembre.

### PRÉSENTATION DES ACTIVITÉS PROPOSÉES

Les élèves reçoivent une fiche de TP organisée en cinq parties (cf. annexe page 116). Dans la première, on leur demande d'entrer sous DERIVE cinq carrés de sommes allant de  $(a+b)^2$  à  $(a+b+c+d+e)^2$ , de les faire développer par DERIVE, de noter les résultats. Puis, pour attirer leur attention sur la structure de ces résultats, on leur demande de donner pour chacun : le nombre total de blocs<sup>13</sup>, le nombre de blocs qui sont des carrés, le nombre de blocs qui ne sont pas des carrés. Dans la deuxième partie, on leur propose trois nouveaux carrés de sommes et on leur demande d'essayer de deviner, sans utiliser DERIVE, les développements correspondants. La première expression est identique à une déjà rencontrée, au nom des variables près, les deux autres, à trois termes introduisent des coefficients non égaux à 1 :  $2a$ ,  $2y$  et  $3z$ . Les élèves doivent ensuite entrer les développements sous DERIVE et les faire factoriser pour contrôler leur production. La troisième partie reprend le principe de la première, cette fois en introduisant des signes -. On demande aux élèves de plus de comparer ces développements à ceux obtenus dans la première partie. La quatrième partie reprend le principe de la partie 2 mais ne contient qu'une devinette :  $(a+2b-c)^2$ . On demande cette fois encore de contrôler avec DERIVE, mais sans imposer le mode de vérification. Dans la cinquième partie, enfin, on demande aux élèves de compléter des expressions à trous correspondant à la factorisation de carrés de sommes. Tous les termes à trouver sauf un sont à coefficient 1 et il n'y a pas de signe -.

Le professeur a de plus prévu de proposer aux élèves qui auraient terminé avant la fin de l'heure, le problème suivant : trouver le nombre de termes du développement de :

$$(a+b+ \dots +z)^2.$$

### ANALYSE A PRIORI DE LA SÉANCE EFFECTUÉE PAR L'ENSEIGNANT

#### Objectifs :

La séance proposée se situe en continuité avec la séance précédente. Il s'agit cette fois de généraliser les produits remarquables "horizontalement", en accroissant le nombre de termes et non "verticalement" en accroissant la valeur des exposants.

---

<sup>13</sup>La notion de bloc a été introduite par l'enseignant comme unité d'écriture commençant par un signe + ou - hors parenthèses, excepté éventuellement pour le premier bloc. Une somme algébrique est alors lue comme un ensemble de blocs dont on peut permuter l'ordre.

Il s'agit d'aider ainsi les élèves à se construire des points de repères pour gérer des calculs un peu compliqués, en les aidant à voir qu'il existe des régularités dans les calculs complexes, de contribuer aussi à donner du sens aux identités remarquables, en les situant dans un contexte plus large. L'enseignant écrit, à ce propos : "Il m'apparaît nécessaire et souhaitable de faire en sorte que des débutants puissent se "frotter" quelquefois à des questions qui leur semblent assez complexes. C'est ce qui donne du sens à leurs activités".

Il s'agit aussi de faire vivre dans cette situation la fonction de "généralisation" de l'algèbre et de montrer aux élèves qu'en algèbre, comme en géométrie, on peut faire des conjectures. L'enseignant souligne : "C'est ce qui explique en particulier l'emploi du mot DEVINETTE qui figure dans le texte donné aux élèves."

Enfin l'enseignant veut, à travers cette situation, continuer à mettre l'accent sur les liens qui existent entre les actions désignées par les verbes : "développer" et "factoriser".

#### Intérêt supposé de DERIVE :

DERIVE fonctionne ici d'abord comme un outil qui "permet de mettre en oeuvre des calculs qu'il serait très difficile d'envisager de faire à la main dans un laps de temps limité." C'est la complexité de ces calculs qui semble intéressante à l'enseignant, "car elle permet de découvrir des règles." Dans ce contexte, DERIVE va, dans un premier temps, permettre "l'observation, la découverte, la réflexion, la conjecture." Dans un second temps, il interviendra comme moyen de contrôle pragmatique des conjectures faites.

#### Connaissances DERIVE nécessaires :

Ce sont les mêmes que pour la séance précédente. Et, comme pour la précédente séance observée, les commandes à utiliser sont rappelées dans la fiche distribuée. Précisons que l'enseignant n'a pas rappelé dans cette fiche l'expression de l'exponentiation par l'accent circonflexe et qu'il n'a pas inclus non plus de précisions concernant les commandes "Factorise" et "dévEloppe" qui contiennent diverses options. Il envisage de le faire dans le courant de la séance, au fur et à mesure des besoins. Il écrit ainsi :

"J'aurais probablement à rappeler quelques points :

- le rôle de l'accent circonflexe dans l'exponentiation,
- le choix du domaine rationnel lorsqu'on factorisera
- le sens du message "pour quelle variable ?" lorsqu'on développera."

#### Comportements, difficultés attendus :

Le texte distribué aux élèves, écrit l'enseignant, organise complètement leur travail. Il s'attend à un comportement actif, "comme à l'habitude". Il pense avoir peu d'interventions collectives à faire et ne prévoit pas de difficultés particulières, d'ordre mathématique ou informatique.

Un bilan est prévu, collectivement, à la séance suivante.

#### EXEMPLES DE DÉROULEMENTS

##### Groupe 1 :

Il s'agit d'un groupe de deux garçons de la classe A, que nous désignerons par N. et Y. Ils collaborent activement.

9h35 :

Début de la séance. Le professeur présente le travail à effectuer. Les deux élèves lancent DERIVE sans difficulté et commencent à rentrer les expressions de la partie 1. Développements.

*Partie 1 (~ 4mn) :*

Cette première partie est traitée très rapidement. les élèves se partagent la tâche : l'un tape, l'autre note au fur et à mesure les développements sur la fiche de réponse. Ils ne rencontrent pas non plus de difficulté à interpréter les termes du tableau.

*Partie 2 (~ 10mn) :*

Ils passent à la partie 2. Devinettes. Pour la première expression, ils repèrent aussitôt qu'il suffit de reproduire l'expression 3 de la première partie, en changeant les lettres et le font. Pour l'expression 2, ils font de même, en adaptant l'expression 2 de la partie 1, mais ne font qu'une adaptation partielle : en effet, ils écrivent correctement les doubles produits :  $4ab$  et  $4ac$ , mais oublient d'élever 2 au carré dans le terme  $(2a)^2$ , écrivant, de ce fait :  $2a^2$ . Ils commettent ensuite la même erreur dans l'expression 3, écrivant :  $2y^2$  et  $3z^2$  au lieu de  $4y^2$  et  $9z^2$ .

Ils notent, comme indiqué, les développements sur la fiche de compte-rendu, mais lorsqu'il s'agit de vérifier avec DERIVE, ils ne suivent pas les consignes données et rentrent les expressions factorisées pour demander ensuite leur développement.

Pour la première expression, ils repèrent que les termes sont les mêmes mais qu'ils ne sont pas dans le même ordre. Ils se demandent si ça a de l'importance et appellent le professeur pour avoir son avis. Celui-ci leur rappelle la notion de "bloc" introduite dans le cours et le fait que l'on peut déplacer librement les blocs dans une somme algébrique, donc qu'ici il n'y a pas de problème, il y a simplement le fait que DERIVE ne prend pas le même ordre qu'eux.

Les élèves passent ensuite à l'expression 2. Ils repèrent la différence entre le développement DERIVE et celui qu'ils ont proposé et l'interprètent tout de suite en : "On avait oublié de faire le carré". Ils corrigent la proposition sur leur fiche réponse, puis passent à l'expression 3, développent, constatent qu'ils ont fait la même erreur et une fois de plus corrigent leur fiche.

*Partie 3 (~ 8mn) :*

Ils passent à la partie 3. Et avec des signes - et suivent les instructions données.

Lorsqu'il s'agit de comparer les développements avec ceux du paragraphe 1, Ils repèrent que dans l'expression 2, les termes contenant  $c$  sont tous négatifs sauf celui en  $c^2$ . N. explique que c'est normal puisque moins par moins ça fait plus. Ils vérifient que ça marche pareil pour les autres expressions.

En revanche, ils rencontrent quelques difficultés à l'exprimer par écrit d'une façon qui les satisfasse. Finalement, ils arrivent à la formulation de compromis suivante : "J'observe que quand un nombre est négatif, le terme comprenant ce nombre sera négatif, mais quand il est multiplié par lui-même il devient positif car un carré est toujours positif."

*Partie 4 (~ 4mn) :*

Ils passent à la partie 4. Une autre Devinette. Ils proposent, sans la moindre hésitation :

$$a^2 + 4ab - 2ac + 4b^2 - 4bc + c^2.$$

Ils le notent sur la fiche et contrôlent avec DERIVE, comme demandé, toujours dans le sens : Factorisation --> Développement.

Puis ils passent à la suite.

#### Partie 5 (~ 5mn) :

Pour la première expression, ils trouvent tout de suite que c'est z qui manque à gauche et  $x^2$ ,  $y^2$ , à droite. Ils contrôlent en P/C qu'ils ont bien ainsi tous les termes.

Pour l'expression 2, N. pense très vite à  $2x$  à cause du  $4x$  et en déduit le terme manquant à droite :  $4x^2$ .

Ils traitent tout aussi vite les deux expressions suivantes, puis passent en DERIVE pour contrôler les trois dernières.

Ils notent les réponses dans la fiche réponse, appellent le professeur pour dire qu'ils ont fini et l'attendent.

#### Exercice supplémentaire (~ 20mn) :

L'enseignant leur propose alors le problème de recherche prévu pour compléter cette séance : trouver le nombre de blocs du développement de  $(a + b + \dots + z)^2$ , en précisant qu'il y a 26 lettres dans l'alphabet.

Pour les aider, il leur trace également le tableau à double entrée suivant :

| x | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a |   |   |   |   |
| b |   |   |   |   |
| c |   |   |   |   |
| d |   |   |   |   |

et leur demande de compter les termes sur la diagonale et les termes hors de la diagonale.

Les élèves repèrent que le tableau a 16 cases, 4 sur la diagonale, 12 en dehors et essayent de généraliser directement ces données au problème posé.

Ceci donne :  $26 \times 4$  termes corrigé rapidement en  $26 \times 26$  termes, puis  $26 \times 26 - 26$  termes hors de la diagonale, soit 676 termes en tout, 26 sur la diagonale et 650 en dehors.

Ils considèrent alors qu'ils ont résolu le problème posé. N. dit que de toutes façons, la vérification est impossible même avec DERIVE, car il y a trop de termes.

Y. voudrait pourtant vérifier, il suggère de faire avec cinq et dit que l'on devrait avoir alors :

$$25 - 5 = 20 \text{ termes.}$$

N. résiste à la vérification puis reprend  $(a+b)^2$  et constate que la formule ne marche pas dans ce cas là puisqu'il n'y a que trois termes. Il passe alors en DERIVE et entre l'expression  $(a+b+\dots+z)^2$ , exactement sous cette forme avec les pointillés et s'arrête.

Le professeur passe et leur demande où ils en sont. Ils répondent qu'ils ont trouvé : 676 termes, 26 fois 26. Le professeur leur dit qu'ils ont avancé mais que ce n'est pas tout à fait réglé. Si c'était le cas, pour  $(a+b)^2$ , ils devraient avoir quatre termes or il n'y en a que trois, ils le savent bien. Il leur conseille de faire des conjectures et de les tester sur des cas particuliers : 3, 4, 5. Ceci ne leur garantira pas que la conjecture est vraie mais ce sera au moins plus solide.

N. refait un tableau 2x2 avec a et b, et écrit à côté le développement de  $(a+b)^2$ , en se demandant comment passer de l'un à l'autre, de quatre termes à trois.

Ils constatent que sur la diagonale c'est bon : 2 termes et 2 carrés. Ils regardent hors diagonale. Y. dit que 12 c'est 4 fois 3, donc que pour 26, ça devrait faire 26 fois 25.

Le professeur, qui repasse, leur demande ce que ça doit donner avec  $n=2$ . Ils constatent que ce n'est pas 2 fois 1 mais 1, mais ne voient pas comment avancer. C'est alors la fin de la séance et l'observateur leur explique le regroupement par deux des termes hors diagonale.

### Groupe 2 :

Il s'agit de deux filles de la classe C qui travaillent de façon interactive. Nous les désignerons par Sa et So. L'une tape, l'autre note. Elles échangent les rôles très régulièrement.

#### 10h45 : Début de la séance

Le professeur présente le travail à faire.

Elles lancent DERIVE mais rencontrent un problème : l'unité de lecture n'est pas prête. Elles repartent à zéro et s'en sortent seules.

Le professeur fait une brève intervention collective pour expliquer comment utiliser les flèches de déplacement pour aller lire les termes au delà de la partie visible à l'écran.

#### Partie 1 (~ 6mn) :

Elles entrent les expressions de la première partie et les développent, notent les développements sur la fiche de réponse, puis passent au remplissage du tableau. Elles se demandent ce que veulent dire les expressions : "blocs qui sont des carrés", "blocs qui ne sont pas des carrés", mais font très vite le lien avec les termes des expressions développées et remplissent le tableau.

#### Partie 2 (~ 14mn) :

Pour la première expression, elles repèrent tout de suite qu'il suffit de changer les noms des lettres dans l'expression 3 de la première partie. Elles écrivent au brouillon le développement puis recopient sur la fiche. Leur écriture est bien organisée :

$$a^2 + 2ax + 2ay + 2ak + x^2 + 2xy + 2xk + y^2 + k^2,$$

mais elles oublient néanmoins un terme :  $2yk$ .

Elles passent à l'expression 2 et pensent très vite à substituer  $2a$  à  $a$  dans le développement de l'expression 2 de la première partie. Elles effectuent directement sur la fiche cette fois-ci une substitution très mot à mot, écrivant :

$$2a^2 + 22ab + 22ac + b^2 + 2bc + c^2.$$

Elles rajoutent ensuite des signes \* entre les 2 pour éviter la confusion avec 22, mais en restent là. Peut-être ne veulent-elles pas raturer.

Elles procèdent ensuite de même avec la troisième expression, toujours en deux temps, substitution "mot à mot", puis rajout de signes de multiplication entre 2x et 2y, entre 2x et 3z, entre 2 et 2y, entre 2y et 3z.

Elles rentrent ensuite les développements sous DERIVE et demandent leur factorisation.

Pour l'expression 1, elles obtiennent :  $x^2 + 2x(y + a + k) + y^2 + 2y(a + k) + a^2 + k^2$

Elles voient bien sûr que ce n'est pas la factorisation attendue mais ne savent pas quoi faire de l'expression donnée par DERIVE. Après l'avoir contemplée un moment, elles décident de passer à l'expression 2. Cette fois-ci, elles obtiennent :  $2a^2 + 4a(b + c) + (b+c)^2$ .

Elles se retrouvent dans la même situation que précédemment, discutent avec le groupe voisin qui rencontre le même type de problèmes, puis passent à l'expression 3. Elles obtiennent, par factorisation :

$$x^2 + 2x(2y + 3z) + 2y^2 + 12yz + 3z^2.$$

Elles décident de remplir la fiche des réponses. Sa se demande d'où vient le 12 de la dernière expression; Cette valeur l'étonne peut-être par rapport aux autres : 2, 3, 4. Elle finit par reconstituer que ce 12 correspond en fait au :  $2*2*3$  intervenant dans le terme :  $2*2y*3z$ . Elle l'explique à So mais ne va pas plus loin.

### Partie 3 (~ 10mn) :

Elles oublient de taper la première expression et, pour la seconde, tapent par erreur :  $(a+b+c)^2$ , font développer et notent le résultat, sans rien remarquer.

Elles s'aperçoivent qu'elles ont oublié la première expression, l'entrent, la développent et remarquent alors qu'il s'agit d'une identité remarquable.

Elles tapent l'expression 3, en oubliant une fois encore le signe -, mais s'en aperçoivent avant d'entrer l'expression et corrigent. Elles développent, notent et font ensuite de même pour l'expression 4, cette fois-ci sans se tromper.

Elles passent à la question suivante et repèrent les changements de signe. Mais l'alternance des signes va évoquer chez elles les tableaux de signes déjà utilisés pour étudier le signe d'expressions et elles vont faire une analogie formelle avec cette situation. Elles écrivent ainsi :

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | + |   |   |   |
| 2 | + | + | + | + | + |
| 3 | - | + | + | - | + |
| 4 | - | - | + | + | + |

On notera que le premier terme qui n'a pas de signe apparent n'est pas comptabilisé dans ce tableau.

So continue sans beaucoup de conviction : "Il faudrait voir le rapport avec ça". Elle tente de faire des comptes par ligne et par colonne du type : « - + - - ça fait -, + + + -, ça fait - », mais ne voit visiblement pas bien où ça va la mener. Elles reviennent alors aux expressions

développées et repèrent que les termes sont toujours les mêmes d'une ligne à l'autre, au signe près. Cela leur semble convenir comme remarque, elles l'écrivent et passent à la suite.

#### *Partie 4 (~ 4mn) :*

Pour trouver le développement de  $(a+2b-c)^2$ , elles décident, comme dans la partie 2 de suivre un modèle et prennent par manque de chance le développement qui a tous ses signes positifs par erreur. Elles proposent donc :  $a^2 + 2a2b + 2ac + 2b^2 + 2*2bc + c^2$ , faisant les mêmes erreurs que précédemment.

Elles contrôlent ensuite comme indiqué avec DERIVE, utilisant cette fois le sens : factorisation --> développement, puisqu'on leur laisse le choix. Elles repèrent les différences, que  $2*2$  est remplacé par 4, mais ne cherchent pas à aller plus loin, notent leur réponse et passent à la suite.

#### *Partie 5 (~ 10 mn) :*

Visiblement, ceci leur convient mieux et elles se mettent à raisonner.

Sa se demande si ce ne serait pas un z à gauche dans l'expression 1, So lui répond que ce n'est pas une lettre puisqu'il n'y a pas de  $x^2$  (?). Sa défend son z en disant qu'il doit y avoir un z puisqu'il y a  $2xz$ ,  $2yz$  et  $2z^2$ . Elle se demande si c'est z,  $2z$  ou  $3z$ . Elles proposent de rentrer :  $(x+y+z)^2$  et de demander à DERIVE de développer. L'observateur intervient pour leur demander de compléter les deux côtés avant de vérifier avec DERIVE. Elles réfléchissent puis So propose de mettre  $x^2$  et  $y^2$ . A ce moment là, elles reconnaissent le développement du carré à trois termes dans le désordre et se disent que c'est sûrement bon. Elles vérifient avec DERIVE.

Elles sautent ensuite l'expression 2 qui leur semble trop compliquée pour passer à l'expression 3. Cette dernière ne les inspire pas plus. Elles reviennent alors à l'expression 2 en disant que, de toutes façons, dans les exercices, c'est toujours de plus en plus difficile. Elles hésitent pour le coefficient de x entre 2 et 4 mais se décident assez vite pour 2, sans donner cependant de raison argumentée. A droite, elles hésitent entre  $2x^2$  et  $4x^2$ , mais n'arrivent pas à se décider. Là encore, il n'y a pas d'intervention explicite d'opération mais une hésitation explicitée entre deux nombres : 2 et 4. Finalement, elles décident de passer à DERIVE, rentrent l'expression et la font développer, constatent que c'est  $4x^2$  et le notent sans plus de commentaire.

Pour l'expression 3, So propose très vite d'ajouter a et 1. Sa hésite entre a et autre chose, comme  $a^2$ . So tape et factorise, sa proposition est validée.

Elles passent à l'expression 4 et la trouvent évidente. Elles complètent et vérifient avec DERIVE.

#### **ANALYSE A POSTERIORI**

Dans l'analyse de cette séance, nous voudrions mettre l'accent sur un certain nombre de points : le rôle effectif que peut jouer DERIVE dans la mise en place d'activités de généralisation et de reconnaissance formelle en algèbre, le problème du contrôle du niveau d'activité mathématique des élèves et du dépassement des seules adaptations formelles induites par le fonctionnement en environnement DERIVE, l'importance enfin de l'exploitabilité des feed-back.

Comme dans la situation précédente, on voit les élèves, quel que soit leur niveau, intéressés par les tâches proposées, susceptibles de percevoir des régularités de formes, de proposer des

généralisations de formules, travailler de façon continue pendant toute la séance. Encore une fois, on imagine mal la vie d'une situation de ce type, avec des élèves débutants en algèbre dans un environnement qui ne prendrait pas, au moins partiellement, en charge les calculs liés à l'exploration et où la validation serait en permanence tributaire de l'enseignant.

A partir des données dont nous disposons, le problème nous semble plus ici de jouer sur les variables de la situation qui sont à notre disposition pour optimiser le niveau mathématique de l'activité de l'élève. Et, sur ce point, il nous semble que la situation n'est pas assez contrainte.

La première phase (Développements) est une phase d'entrée dans le problème où DERIVE fonctionne comme boîte noire. L'attention de l'élève est portée, via le tableau 1, sur le nombre de termes des différents développements et leur structure, dans le but de faciliter le travail de généralisation qui sera demandé. Dans la partie qui suit, une anticipation est demandée aux élèves et DERIVE prend le rôle d'outil de contrôle et validation. La première expression proposée correspond au type déjà rencontré dans la phase 1, les deux autres introduisent le problème des coefficients. On attend ici bien sûr des erreurs mais on fait l'hypothèse que les feed-back obtenus vont permettre à l'élève, via la remise en cause des procédures erronées de généralisation, de s'interroger sur le sens des coefficients numériques obtenus et d'engager le travail d'approfondissement visé.

Les observations montrent que c'est loin d'être nécessairement le cas, et deux phénomènes jouent ici un rôle important :

- Le fait qu'il est très facile de ne pas respecter les consignes et d'opérer le contrôle DERIVE en sens inverse de celui indiqué,
- Le fait que si l'élève joue réellement le jeu, les feed back qu'il va recevoir sont difficilement interprétables au delà de la seule validation et que, d'autre part, comme il n'a droit qu'à une réponse, une fois qu'il a constaté que cette réponse est fausse, que les feed back ne parlent pas de manière évidente, il est fortement tenté d'arrêter les frais et d'avancer dans la fiche de TP qui lui est donnée.

Encore une fois, le contrat implicite très majoritaire semble pour les élèves, même les bons, de fournir des réponses aux questions successivement posées, sans rentrer nécessairement dans un questionnement quelconque.

La demande d'anticipation est sans aucun doute essentielle à l'engagement d'un travail expérimental où l'avancée se joue par preuves (DERIVE étant ici instrument de preuve) et réfutations. Mais pour que le jeu des preuves et réfutations puisse vivre de façon productive, dans ces conditions scolaires, il faut de plus que les feed-back reçus de la machine soient suffisamment chargés d'information pour l'élève pour permettre une avancée relativement rapide. L'activité de la phase 2, certes s'inscrit dans une demande d'anticipation mais d'une part, la façon dont elle est présentée n'oblige pas l'élève à s'engager dans le jeu voulu (et ce d'autant plus que les expressions sont envisagées simultanément et non l'une après l'autre), d'autre part, elle ne fournit pas à l'élève, en cas d'erreur, des feed-back suffisamment exploitables.

Il est intéressant de ce point de vue de comparer cette phase du travail au dernier exercice, où l'on ne pourrait voir a priori qu'une variante des activités précédentes. Pourtant, elle en diffère par un certain nombre de variables qui vont en faire une tâche beaucoup mieux adaptée. En effet, si l'on peut procéder par ajustements successifs, l'existence de trous des deux côtés de l'égalité rend impossible le détournement de la tâche constaté plus haut. Le fait qu'un certain nombre de facteurs du développement soient déjà fournis limite par ailleurs les risques d'erreur par oubli et en même temps induit l'élève à tirer des informations de ces données. Enfin, s'il

propose une solution sous forme de carré et demande son développement à DERIVE (démarche normale ici), l'élève reçoit des feed-back bien plus exploitables que ceux reçus dans une démarche inverse de factorisation.

Et, effectivement, les observations menées montrent que ces modifications de variables sont suffisantes pour induire, de la part de la quasi-totalité des élèves, cette fois, les comportements attendus. On peut alors penser, après expérimentation, que la situation induirait une activité mathématique des élèves plus intéressante si les deux types de tâches étaient intervertis, le premier pouvant d'ailleurs être suivant les caractéristiques des expressions et des trous, de complexité plus variée que ce qui est proposé dans la situation initiale, les tâches de prévision intervenant plus tard.

Nous voudrions insister aussi à propos de cette situation sur des caractéristiques du fonctionnement dans l'environnement DERIVE qu'elle met clairement en évidence. Il est évident que le jeu joué ici, et c'est voulu, est un jeu de reconnaissance de formes. Cette reconnaissance, même lorsqu'elle fonctionne, fonctionne le plus souvent, on le voit, à travers des analogies de forme sans que ces dernières n'aient réellement besoin d'être relayées à un niveau plus analytique. Il n'y a pas, nous semble-t-il, à rejeter ce type de fonctionnement permis et favorisé par DERIVE. En revanche, il nous semble nécessaire que l'on n'en reste pas là si l'on veut réellement contribuer par ce type de situation au développement de la pensée algébrique et que l'on s'interroge, comme cela a été le cas ici dans le bilan qui a suivi la séance, sur les raisons de ces régularités, qu'on les relie aux savoirs en jeu dans l'enseignement, pour les utiliser dans le pilotage et le contrôle des calculs, hors de l'environnement DERIVE.

Il semble aussi que ces considérations à la fois sur l'intérêt et les limites de l'analogie formelle, sur les prolongements du travail fourni dans l'environnement DERIVE, nécessaires pour assurer sa rentabilité, doivent absolument être présents dans les descriptions de situations fournies aux enseignants.

ANNEXE : LE TEXTE DU POLYCOPIÉ DISTRIBUÉ AUX ÉLÈVES (CARRÉS DE SOMMES)

Classe de troisième

Travaux pratiques avec Derive: Carrés de sommes.

---

**Commandes à utiliser:**

|           |                                          |
|-----------|------------------------------------------|
| Auteur    | pour entrer une expression               |
| dévEloppe | pour développer                          |
| factor.   | pour factoriser                          |
| suppRime  | pour supprimer l'expression sélectionnée |

**Touche de fonction à utiliser:**

F3 pour recopier l'expression sélectionnée sur la ligne de commande

---

**1. DEVELOPPEMENTS**

Chacune des cinq expressions qui suivent est le carré d'une somme.

$$(a + b)^2, \quad (a + b + c)^2, \quad (a + b + c + d)^2, \quad (a + b + c + d + e)^2$$

Entre et développe chacune de ces expressions. Note tes résultats dans le tableau 1.

**2. DEVINETTES**

Voici trois nouvelles expressions:

$$(a + x + y + k)^2, \quad (2a + b + c)^2, \quad (x + 2y + 3z)^2$$

Essaye de deviner le développement de chaque expression SANS DERIVE. Note ces développements sur ton compte-rendu.

Entre les développement puis factorise-les AVEC DERIVE cette fois.

Note les factorisations sur ton compte-rendu.

**3. ET AVEC DES SIGNES - ?**

Voici encore quatre expressions:

$$(a - b)^2, \quad (a + b - c)^2, \quad (a - b + c)^2, \quad (a - b - c)^2$$

Entre et développe ces expressions avec DERIVE. Recopie les développements dans ton compte-rendu.

Compare les développements obtenus avec ceux du paragraphe 1. Que peux-tu observer

**4. UNE AUTRE DEVINETTE**

Essaye de deviner SANS DERIVE le développement de  $(a + 2b - c)^2$ .

Contrôle avec DERIVE.

**5. POUR ALLER PLUS LOIN**

Complète les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}(x + y + \dots)^2 &= 2xy + 2xz + 2yz + z^2 + \dots + \dots \\ (\dots x + y + 1)^2 &= \dots + 4xy + 4x + y^2 + 2y + 1 \\ (x + \dots + 1)^2 &= x^2 + 2ax + 2x + a^2 + 2a + 1 \\ (u + v + \dots)^2 &= 2uv + 2uw + 2vw + \dots + \dots + \dots\end{aligned}$$

CLASSE:

NOMS:

### 1. DEVELOPPEMENTS

$$(a + b)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(a + b + c)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(a + b + c + d)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(a + b + c + d + e)^2 = \dots\dots\dots$$

| Expressions     | Nombre total des blocs du développement | Nombres des blocs qui sont des carrés | Nombre des blocs qui ne sont pas des carrés |
|-----------------|-----------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------------|
| $(a+b)^2$       | 3                                       | 2                                     | 1                                           |
| $(a+b+c)^2$     |                                         |                                       |                                             |
| $(a+b+c+d)^2$   |                                         |                                       |                                             |
| $(a+b+c+d+e)^2$ |                                         |                                       |                                             |

### 2. DEVINETTES

$$(a + x + y + k)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(2a + b + c)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(x + 2y + 3z)^2 = \dots\dots\dots$$

Factorisations données par DERIVE:

- 1) .....
- 2) .....
- 3) .....

### 3. ET AVEC DES SIGNES - ?

$$(a + b - c)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(a - b + c)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(a - b - c)^2 = \dots\dots\dots$$

Observations .....  
.....  
.....

### 4. UNE AUTRE DEVINETTE

$$(a + 2b - c)^2 = \dots\dots\dots$$

Comment as-tu contrôlé avec DERIVE ? .....  
.....  
.....

### 5. POUR ALLER PLUS LOIN

$$(x + y + \dots)^2 = 2xy + 2xz + 2yz + z^2 + \dots\dots\dots$$

$$(\dots x + y + 1)^2 = \dots\dots + 4xy + 4x + y^2 + 2y + 1$$

$$(x + \dots + )^2 = x^2 + 2ax + 2x + a^2 + 2a + 1$$

$$(u + v + \dots)^2 = 2uv + 2uw + 2vw + \dots\dots\dots$$

### **IV.3 GEOMETRIE ANALYTIQUE**

#### **CONTEXTE DE L'OBSERVATION**

Cette séance se situe en fin d'année (16 mai 1994). Elle concerne la géométrie analytique. C'est la troisième séance sur ce thème utilisant le logiciel DERIVE. DERIVE a aussi été utilisé collectivement pour corriger des exercices P/C et faire les bilans de trois TP précédents.

Pour cette utilisation de DERIVE, l'enseignant a construit deux fichiers auxiliaires de commandes permettant de définir des points par leurs coordonnées, des milieux et des symétriques, de calculer les coordonnées du milieu de deux points, du symétrique d'un point par rapport à un autre, d'un vecteur, la distance de deux points, de tracer des segments, triangles et quadrilatères. Ce sont le fichier GEOM, qui a été utilisé dans les séances précédentes, et le fichier GEOM1 qui sera utilisé cette séance et rajoute à GEOM la possibilité d'obtenir des équations de droites définies soit par deux points, soit par un point et une droite (droite parallèle ou droite perpendiculaire), d'obtenir aussi directement le coefficient directeur d'une droite donnée.

#### **PRÉSENTATION DES ACTIVITÉS PROPOSÉES**

Cette séance est organisée autour de la résolution de 6 exercices donnés sur fiche aux élèves. Dans le premier, quatre points sont donnés par leurs coordonnées, il s'agit de montrer qu'ils forment un parallélogramme. Dans le second, trois points sont donnés, on demande de dessiner le triangle correspondant et de montrer qu'il est rectangle. On demande ensuite les équations des deux droites supports de l'angle droit et le produit de leurs coefficients directeurs. Dans le quatrième, quatre points sont de nouveau donnés par leurs coordonnées ; ils forment un trapèze rectangle. On demande de démontrer l'orthogonalité et le parallélisme des droites correspondantes, puis que l'un des sommets appartient à la médiatrice du segment formé par les deux autres. Dans le quatrième, trois points sont donnés et il faut trouver les coordonnées d'un quatrième pour former un parallélogramme. Dans le cinquième, on demande de montrer que trois points donnés sont alignés. Dans le sixième enfin, deux points A et B sont donnés et il s'agit de trouver C, d'abscisse donnée, pour que le triangle ABC soit rectangle en B.

Il est demandé aux élèves d'utiliser DERIVE pour les calculs et de rédiger les solutions en indiquant les étapes du raisonnement (cf. annexe page 131).

#### **ANALYSE A PRIORI DE LA SÉANCE EFFECTUE PAR L'ENSEIGNANT**

##### **Objectifs :**

Les objectifs de la séance sont les suivants : développer les capacités des élèves à mobiliser les connaissances déjà enseignées dans la résolution de problèmes plus ou moins complexes faisant intervenir la géométrie analytique. L'enseignant précise que "les deux premiers exercices sont faciles et mobilisent le cours au niveau le plus immédiat tandis que les trois exercices suivants font appel à des raisonnements plus élaborés."

La plupart des exercices sont susceptibles d'être résolus par plusieurs méthodes (par exemple pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, pour montrer que trois points sont alignés), il s'agit donc aussi pour l'enseignant de voir quelles méthodes apparaissent, quelles

méthodes ont les faveurs des élèves, et, au cours de la séance de bilan qui suivra, de mener un travail de type méthodologique, en comparant les différentes méthodes.

L'enseignant voudrait aussi exploiter cette situation pour amener les élèves à réfléchir sur la conduite et l'économie des calculs : "On pourra également réfléchir sur l'organisation des calculs et l'occupation de l'écran. C'est ainsi que, pour prouver que  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ , on peut procéder au coup par coup (entrer  $DIST(A,B)^2$ , simplifier cette expression, entrer  $DIST(A,C)^2$ , etc.) ou bien travailler plus globalement et, par exemple, demander :  $DIST(A,B)^2 + DIST(A,C)^2 - DIST(B,C)^2$ . Il ne s'agit pas bien sûr de chercher à établir des records, à exécuter un calcul avec le minimum de lignes, mais bien de réfléchir à la manière de conduire des calculs."

#### Intérêt supposé de DERIVE :

DERIVE joue ici le rôle d'outil technique qui prend en charge les calculs et doit, de ce fait, permettre à l'élève de se concentrer sur la démarche, les stratégies de résolution, le pilotage des calculs et non leur exécution. Cette centration se fera en liaison avec la réflexion sur le choix des commandes DERIVE à utiliser parmi celles disponibles dans le fichier GEOM1. On fait aussi l'hypothèse qu'on limite ainsi tous les errements liés aux erreurs de calculs susceptibles d'intervenir en P/C.

#### Connaissances DERIVE nécessaires :

Il s'agit, outre les connaissances usuelles, déjà en jeu dans les précédentes observations, de connaissances liées à l'utilisation du fichier GEOM1. Il s'agit de savoir charger ce fichier mais aussi de savoir ouvrir une fenêtre graphique, effectuer les réglages qui permettront d'effectuer des graphiques satisfaisants, effectuer les changements d'échelle demandés, ensuite de savoir gérer les commandes de tracé et d'effaçage graphique, ainsi que l'articulation entre cadre graphique et cadre algébrique.

Pour limiter les problèmes, l'enseignant a précisé dans une fiche annexe (page 131), la succession des commandes à exécuter pour charger le fichier GEOM1, puis pour créer une fenêtre graphique et obtenir des réglages adaptés à cette séance. Les élèves disposent par ailleurs de la liste de toutes les commandes du fichier GEOM1, classées en catégories. En tête de la feuille d'exercices, il rappelle aussi à l'élève comment passer d'une fenêtre à l'autre ainsi que les principales commandes à utiliser dans les deux fenêtres.

#### Comportements, difficultés attendus :

Sur le plan mathématique, le professeur pense que, dans les deux classes, les élèves sauront résoudre les exercices 1, 2 et 4 ainsi qu'une partie de l'exercice 3. Il se peut cependant que certains élèves n'arrivent pas jusqu'à l'exercice 4. En revanche, il pense que les exercices 5 et 6 ne seront traités que par quelques groupes.

Sur le plan informatique, il s'attend à rencontrer un certain nombre de problèmes, qu'il classe en plusieurs groupes :

- Les réglages défectueux : au moment des "réglages", il peut arriver qu'on passe en coordonnées polaires par inadvertance, ce qui donne aux figures tracées des caractéristiques inattendues.
- Le mode de fonctionnement rigide de DERIVE : il a constaté en effet que des élèves demandaient, en appuyant deux fois sur P, le tracé d'expressions comme  $DIST(A,B)$ . Si

cette expression a été évaluée, DERIVE trace alors la droite d'équation  $y=\text{constante}$ , la constante étant la valeur attribuée à  $\text{DIST}(A,B)$ . De la même façon, si l'élève demande le tracé d'un point variable défini sous la forme  $F := [x,y]$ , considérant qu'il s'agit là d'une fonction de deux variables, DERIVE passe en 3D.

- L'opposition de syntaxes différentes : il s'agit là de difficultés liées aux décalages existant entre la syntaxe de DERIVE et la syntaxe P/C, par exemple, dans la définition de points :  $[2,3]$  dans un cas,  $(2,3)$  dans l'autre ; ou de difficultés liées aux différences de syntaxe entre des commandes DERIVE qui peuvent sembler de même nature pour les élèves : par exemple, utilisation de parenthèses au lieu de crochets pour définir un point à partir de ses coordonnées ou utilisation de crochets dans les commandes qui fonctionnent avec des parenthèses.

Par rapport à ces problèmes, le professeur prévoit d'intervenir dans les groupes si besoin est.

Comme pour les autres séances observées, une séance de bilan est prévue.

### EXEMPLES DE DÉROULEMENT

#### Groupe 1 :

Il s'agit de deux filles, élèves de bon niveau de la classe forte : C. et N. Les élèves collaborent bien sans qu'il y ait de leader affiché.

Au départ, C. est à la frappe, N. dicte et note.

#### *9h35 : début de la séance :*

Le professeur donne les consignes. Les élèves chargent le fichier GEOM1 et effectuent les réglages sans rencontrer de problème particulier. Puis elles passent à l'exercice 1. Elles décident d'entrer les coordonnées des points. Rien ne s'affiche. Elles appellent le professeur qui diagnostique aussitôt l'activation de la sortie imprimante. Elles sont obligées de repartir à zéro mais refont toutes les manipulations très vite.

#### *Exercice 1 (~ 9mn) :*

Le groupe voisin les interroge car il n'arrive pas à obtenir un parallélogramme. Elles jettent un coup d'oeil, conseillent de changer d'échelle et se mettent à définir les quatre points A, B, C et D.

Elles font tracer les quatre points, manifestant beaucoup d'aisance dans le passage d'une fenêtre à l'autre et la gestion des commandes graphiques. A l'oeil, elles constatent qu'il n'y aura pas un parallélogramme mais le font tracer tout de même. Le professeur intervient collectivement à ce moment là pour rectifier les coordonnées du point D. Elles redéfinissent D et demandent un nouveau tracé. Elles obtiennent cette fois-ci un quadrilatère croisé et appellent l'enseignant pour lui demander, en lui montrant le tracé, s'il ne s'est pas trompé dans l'ordre des points. Le professeur rectifie.

Elles changent de rôle pour passer à la démonstration du fait que ABDC est un parallélogramme. Tout de suite, elles décident d'utiliser les diagonales. Elles les font tracer, puis elles font afficher les coordonnées des milieux de  $[A,D]$  et  $[B,C]$ , constatent que ce sont les mêmes, donc qu'on a bien un parallélogramme. N. se demande si ce ne serait pas en plus un losange, elle fait donc afficher  $\text{DIST}(A,B)$  et  $\text{DIST}(B,D)$ , obtient respectivement : 34 et 26 et

conclut négativement. C. rédige la réponse. pendant ce temps, N. efface le contenu des deux fenêtres.

### *Exercice 2 (~ 6mn) :*

Elles changent à nouveau de rôle et commencent à rentrer les points. En tapant les coordonnées de B, C. les sépare par un point-virgule au lieu d'une virgule mais N. s'en aperçoit immédiatement et cette erreur n'a pas d'incidence sur la suite. C. hésite dans les corrections, N. lui reprend le clavier.

Après avoir rentré les points, elles font dessiner les trois points puis le triangle et constatent qu'il a bien l'air rectangle en A.

Pour démontrer qu'il est rectangle, elles décident d'utiliser Pythagore et le font dans une écriture condensée, tapant :  $\text{DIST}(B,C)^2 = \text{DIST}(A,B)^2 + \text{DIST}(A,C)^2$ , puis faisant simplifier cette expression pour aboutir à :  $8 = 8$ .

Elles passent ensuite tout de suite à la question suivante et cherchent dans la fiche la syntaxe de l'instruction EQUA.

Le groupe voisin les interrompt pour demander s'il faut taper  $\text{SQRT}(-2)$  ou  $-\text{SQRT}(2)$  pour entrer :  $-\sqrt{2}$ . Elles répondent puis reprennent leur travail.

Elles font afficher par DERIVE les équations de (AB) et (AC) demandées :

$$y = x + 2 \text{ et } y = -x$$

puis lisent la question suivante à haute voix. Elles se demandent ce que sont les coefficients directeurs. C. dit qu'ils sont nuls et que le produit est donc 0. (effectivement les coefficients étant égaux à 1 et -1, il n'y a pas de coefficient apparent). N. se demande, elle, s'il ne faut pas inclure le x dans le coefficient. C. lui disant qu'elle est sûre que non, elle se range à son avis et elles rédigent la solution de l'exercice.

### *Exercice 3 (~ 17mn) :*

Elles définissent les quatre points A, B, C et D.

Le groupe voisin les interrompt pour demander comment elles ont montré que le triangle était rectangle. Elles répondent qu'elles ont fait Pythagore en tapant :

$$\text{DIST}(B,C)^2 = \text{DIST}(A,B)^2 + \text{DIST}(A,C)^2$$

puis reviennent à leur exercice. Elles font tracer le quadrilatère ABCD, remarquent qu'il n'y a pas le parallélisme demandé. Elles localisent les quatre sommets puis appellent le professeur qui trouve rapidement l'erreur et rectifie les coordonnées de D.

Elles redéfinissent D et retracent le quadrilatère.

Elles décident de montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires et se demandent comment le faire. Elles se souviennent qu'il y a une histoire de -1 et vont chercher dans leurs cahiers. N. trouve assez vite le théorème qui dit que le produit des coefficients directeurs est alors égal à -1. Elles font afficher par DERIVE les équations des deux droites, qui sont :

$$y = 6 - x \text{ et } y = x - 4.$$

Ces équations les laissent perplexes, toujours sans doute pour la même raison de coefficients directeurs non apparents. C., du coup, se demande s'il ne faudrait pas inclure le  $x$  dans le coefficient mais elle réalise vite que  $x \cdot x$ , ce n'est pas  $-1$ .

N. lui propose de montrer plutôt que le triangle ABC est rectangle en utilisant Pythagore comme tout à l'heure.

A ce moment là, le professeur passe. N. lui demande : "Monsieur, on a trouvé comment montrer qu'elles sont perpendiculaires avec le coefficient directeur, mais quand y en a pas qu'est-ce-qu'on fait ?"

Le professeur leur demande d'expliquer ce qu'elles ont fait. Elles expliquent qu'elles ont cherché les équations des deux droites, mais qu'elles ne voient pas bien, car il faut faire le produit des coefficients directeurs et trouver  $-1$ . le professeur est un peu perplexe puis C. tout d'un coup dit : "mais,  $x$  fois  $-1$ , ça fait bien  $-x$  !"

N. confirme. Le professeur leur demande : "Alors, c'est bon ? vous avez répondu à votre question ?"

Elles acquiescent et rédigent en écrivant les équations des deux droites, le théorème et la relation :  $x \cdot -1 = -x$ .

Elles passent ensuite à la démonstration du parallélisme, se demandent si (AB) et (CD) vont avoir la même équation puis concluent immédiatement que non puisque ce n'est pas la même droite. Elles font afficher les deux équations et obtiennent :  $y = 6 - x$  et  $y = 2 - x$  et là sont tout à fait satisfaites car elles ont, disent-elles, le même coefficient directeur (elles ne précisent pas exactement ce qu'il est, on peut penser que c'est :  $-x$ ).

Elles passent ensuite à la démonstration du fait que D est sur la médiatrice de [A,B] et se demandent s'il existe dans leur fichier une commande pour la médiatrice. Elles constatent que non et reviennent alors à la définition : "c'est perpendiculaire et ça passe par le milieu". Visuellement, D ne leur paraît pas vraiment sur la médiatrice. Elles décident alors de placer le milieu de [A,B] et de tracer le segment joignant D à ce milieu pour mieux voir.

C. dicte à N. les instructions avec un niveau de condensation optimal : SEG (MIL(A,B),D). N. est un peu réticente et voudrait procéder par étapes mais finalement elle accepte. Elle tape ensuite d'elle-même l'équation EQUA(A, MIL(A,B)). C. proteste que ça ne sert à rien. N. répond qu'elle veut voir l'équation et les coefficients directeurs. C. rétorque que si c'est pour avoir le coefficient directeur de (AB), c'est vraiment pas la peine de faire ça puisqu'elle l'a déjà. N. persiste néanmoins et réobtient bien sûr l'équation de (AB).

Le groupe voisin leur demande comment montrer le parallélisme. Elles le lui expliquent.

Elles reviennent ensuite à leur exercice et entrent : EQUA(MIL(A,B),D). Elles obtiennent après simplification :  $y = x$  et sont tout à fait satisfaites : " $x$  et  $-x$ , ça va !". Elles écrivent sur le compte-rendu :  $(-x) \cdot x = -x$ . Elles remarquent aussi que la médiatrice est parallèle à (BC) et se demandent si elles vont le mettre. Après discussion, elles décident que non parce que c'est évident puisque les deux droites sont perpendiculaires à (AB).

#### *Exercice 4 (~ 8mn) :*

Elles effacent tout puis changent de nouveau de rôle. Elles définissent A,B et C.

Le groupe voisin qui n'a pas bien compris l'explication sur le parallélisme les sollicite de nouveau. Elles réexpliquent ce qu'elles ont fait, puis tracent les points et le triangle ABC.

N. a tout de suite l'idée d'une méthode "symétrie" : "il suffit de faire milieu puis symétrique de ça, par rapport à milieu". Elles identifient les trois points sur l'écran pour vérifier. N. reprend la frappe.

Elles demandent les coordonnées du milieu de  $[A,C]$ , celles du symétrique de B par rapport à ce milieu en tapant :  $\text{SYM}(B, \text{MIL}(A,C))$ , puis elles font tracer ABCD. Elles n'obtiennent pas le quadrilatère prévu et se demandent ce qui se passe.

Interruption une fois de plus du groupe voisin qui demande si, pour perpendiculaires, elles ont fait l'opposé de l'inverse ou l'inverse de l'opposé. Elles répondent qu'elles ont fait le produit et reviennent à leur problème.

Assez vite, N. comprend l'erreur : le point D n'ayant pas été redéfini, le tracé a été effectué avec l'ancien point D. Elles vérifient que le nouveau point D est bien à l'endroit où il doit être en utilisant ses coordonnées puis demandent le tracé :  $\text{QUADRI}(A,B,C, \text{SYM}(B, \text{MIL}(A,C)))$ . C. trouve ça un peu compliqué et voudrait mettre plutôt les coordonnées de D mais N. tient bon et effectivement, ça marche.

#### *Exercice 5 (~ 3mn) :*

Elles définissent les trois points et les font tracer. Deux points seulement apparaissent à l'écran. Ceci ne les affole pas. Elles situent A et B, estiment que C est hors écran et font un geste dans sa direction.

Elles hésitent ici un peu sur la stratégie à adopter. C. voudrait tracer les segments et vérifier l'alignement. N. veut faire les équations et vérifier que ce sont les mêmes. Elle finit par l'emporter en disant que c'est plus direct. Elles font afficher les équations de (AB) et (BC), obtiennent dans les deux cas :  $7 - 2x$  et sont satisfaites.

#### *Groupe 2 :*

Ce sont deux élèves qui travaillent en étroite collaboration, que nous désignerons par E. et F. E. est plutôt à la frappe.

#### *Mise en route - réglages (~ 5mn) :*

En créant la fenêtre graphique, elles ne suivent pas bien les instructions données et se retrouvent avec une fenêtre graphique plein écran. Elles essaient sans succès pendant un moment de modifier cette fenêtre en jouant sur les divers réglages de la fenêtre graphique puis appellent l'enseignant. Celui-ci refait avec elles, en les commentant au fur et à mesure, la série des manoeuvres, depuis le début.

#### *Exercice 1 (~ 15mn)*

Elles passent à l'exercice 1, définissent les points (d'emblée les bons, vu le retard pris), tracent le quadrilatère et ABCD et obtiennent la ligne brisée ABCD au lieu du quadrilatère (phénomène que l'observateur ne parvient pas à interpréter). Elles ne comprennent pas ce qui se passe puis finissent par imputer ce phénomène au fait qu'elles n'ont pas fait tracer préalablement les 4 points, les font donc tracer puis le quadrilatère lui-même et cette fois-ci, elles obtiennent un quadrilatère croisé. Elles se renseignent auprès du groupe voisin et échangent alors les points D et C pour obtenir enfin un parallélogramme.

Elles reconnaissent un parallélogramme et l'écrivent sur leur feuille de compte-rendu sans chercher plus avant une démonstration.

Elles effacent ensuite une à une les lignes de la fenêtre algébrique avant de passer à l'exercice 2.

### *Exercice 2 (≈ 25mn)*

Elles rentrent les trois points en commettant diverses erreurs. E. définit le point A en oubliant les « : », puis en mettant des parenthèses au lieu des crochets, puis en reproduisant les coordonnées du point A du premier exercice. F. qui contrôle, repère à la frappe les deux premières erreurs et les corrige mais pas la troisième. Après s'être renseignées auprès du groupe voisin sur la syntaxe de  $\sqrt{\quad}$ , elles définissent les coordonnées de B et C sans s'apercevoir qu'elles tapent deux fois les mêmes coordonnées. Elles font tracer les trois points : deux seulement apparaissent à l'écran. Elles appellent alors le professeur qui leur demande de regarder dans la fenêtre algèbre pour essayer de comprendre. Elles repèrent alors que B et C ont les mêmes coordonnées, redéfinissent C et refont tracer les 3 points et le triangle. Cette fois-ci, elles obtiennent bien un triangle, mais il n'est pas rectangle. Elles appellent de nouveau l'enseignant qui, avec l'aide de l'observateur, repère rapidement l'erreur sur A. Le professeur aide les élèves à effacer la fenêtre graphique et à repasser dans la fenêtre algèbre pour redéfinir A. Elles veulent ensuite retracer les trois points. Le professeur leur explique que c'est inutile et qu'elles peuvent tracer le triangle directement. Elles sont un peu réticentes à cause de ce qui leur est arrivé en début de séance et qu'elles ont fausement interprété (elles lui disent qu'elles ont essayé mais que ça n'a pas marché) mais font ce que dit le professeur. Elles obtiennent enfin un triangle rectangle.

Elles sont interrompues par le groupe voisin qui a lui aussi tapé les mêmes coordonnées pour B et C et elles l'aident.

Elles se demandent alors comment montrer que le triangle est rectangle et pensent tout de suite à Pythagore mais sous la forme erronée :  $BC = AB + AC$ . Elles font afficher les trois distances et obtiennent respectivement : 2, 2 et  $2\sqrt{2}$ . Elles vont alors essayer de montrer que :  $2 + 2 = 2\sqrt{2}$ . Par un tour de passe-passe, F. semble y arriver. E. n'est pas convaincue mais F. commence à noter quand même sur la fiche de compte-rendu la version erronée du théorème de Pythagore, les valeurs de BC, AB et AC, ainsi que l'égalité  $2 + 2 = 2\sqrt{2}$ . E. repère que le triangle est isocèle mais a toujours des doutes sur l'égalité. F. lui explique que  $2\sqrt{2} = 4$  : "Si tu fais passer le 2 de l'autre côté, il rentre sous la racine et ça fait bien  $\sqrt{4}$  et  $\sqrt{4}$ , c'est bien 2.". E. réfléchit puis revient à la formule de Pythagore, hésite et dit : "Mais là, c'est pas au carré ?". F. est d'accord et rajoute les carrés aux deux premières lignes écrites tout en laissant  $2\sqrt{2} = 4$  à la dernière. Elles rajoutent au compte-rendu que le triangle est isocèle et passent à la question suivante.

Elles font afficher les équations de (AB) et (AC) puis font calculer par DERIVE les deux coefficients directeurs. Elles notent leurs valeurs mais ne comprennent pas la question posée. Elles se demandent ce que veut dire produit, si elles doivent ajouter ou faire autre chose. Le professeur passe et elles lui disent qu'elles ne comprennent pas la question. En les interrogeant, il s'aperçoit qu'effectivement le mot "produit" ne leur évoque pas d'opération précise et il leur explique son sens. Il leur demande ce que vaut donc ce produit. Elles répondent : -1. Il leur rappelle qu'elles ont vu ça en cours, qu'il y a un théorème qui dit que si le produit des coefficients directeurs est : -1, les droites sont... E. répond successivement : parallèles, puis égales et le professeur donne alors la réponse correcte avant de s'en aller. Elles ne sont pas

fières d'elles et disent aux élèves du groupe voisin qui leur demandent si elles ont fait Pythagore qu'elles ont été nulles, nulles avec l'histoire du produit.

E. efface une fois de plus ligne à ligne. L'observateur lui dit comment effacer tout d'un coup. E. répond qu'elle a déjà essayé une autre fois mais que ça n'a pas marché alors qu'elle préfère faire comme ça.

### *Exercice 3 (~ 10 mn) :*

Elles définissent les 4 points sans problèmes et font tracer le quadrilatère. Elles repèrent le parallélisme et se demandent comment le démontrer. F. cherche dans son cahier et tombe sur les énoncés liant parallélisme, orthogonalité et coefficients directeurs. Elles font alors calculer les coefficients directeurs de (AB), (BC), (AB), (CD), puis appliquent les théorèmes en reprenant les questions dans l'ordre.

Elles passent ensuite à la médiatrice et essaient de se rappeler ce que c'est. E. dit qu'elle est perpendiculaire et qu'elle passe par D et qu'ici elle doit aussi passer par le milieu de [A,B]. Elles décident d'appeler H l'intersection avec (AB).

Elles voudraient faire tracer [DH], mais ne voient pas comment entrer H. Elles cherchent alors s'il existe dans les commandes du fichier une commande "médiatrice", mais ne la trouvent pas. C'est la fin de la séance et elles s'arrêtent là.

### **ANALYSE A POSTERIORI**

Nous présentons ci-après le résultat du dépouillement des productions des groupes des deux classes.

Pour l'exercice 1, les codes : "milieux", "distances", "vecteurs" font référence aux méthodes de preuve correspondantes. Entre parenthèses, nous précisons dans les deux derniers cas, s'il y a référence à 2 objets ou 4. Nous précisons également s'il y a absence de conclusion et si d'autres calculs et conclusions sont mentionnés (calcul de longueurs de diagonales, précision qu'il ne s'agit pas d'un losange, par exemple).

Pour l'exercice 2, question 2, Pythagore et Réciproque Pythagore renvoient à l'utilisation du théorème avec mention explicite de ce dernier. Nous détaillons le calcul fait uniquement dans le cas d'utilisation d'expressions DERIVE condensée en une seule ligne ou de calculs erronés.

Pour l'exercice 2, question 3, "Équation", "Coef.", "Produit" signifient que les informations correspondantes sont données explicitement dans la copie. Nous précisons les copies où interviennent des modes de calcul qui ne sont pas la simple lecture ou l'utilisation de la commande du fichier.

Pour l'exercice 3, Équations signifie que les élèves ont demandé à DERIVE, les équations des droites (AB) et (BC) dans la question 2, (AB) et (CD) dans la question 3. Nous précisons les autres méthodes utilisées, comme la demande des équations de (BC) et de PERP(A,B,C) dans la question 2, ou celle des équations de (AB) et PAR(A,B,C) dans la question 3. Pour la question 4, nous résumons les méthodes utilisées.

Nous faisons de même pour les exercices 4 et 5, peu abordés, dans un tableau spécifique.

Précisons également que nous mentionnons explicitement, les productions où les données numériques ou équations sont fournies sans conclusion, ainsi que les justifications qui décrivent la méthode ou le théorème utilisé sans fournir le détail des calculs, qu'enfin le code "Coef."

correspond presque toujours, non pas à la lecture d'un coefficient directeur à partir d'une équation, mais à l'utilisation de la commande coefficient directeur du fichier GEOM1.

Classe A :

| N° groupe | Ex. 1                                                           | Ex. 2 q. 2                                                                               | Ex. 2 q. 3                             | Ex. 3 q. 2                                     | Ex.3 q. 3                                          | Ex. 3 q. 4                                                                                                                   |
|-----------|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1         | Milieux +<br>Non losange<br>avec calcul<br>longueurs            | Pythagore                                                                                | Équations<br>Coef. nuls<br>Produit nul | Équations<br>$x*(-x)=-x$                       | Équations<br>Coef.<br>Même coef.                   | Équations<br>(ab) et<br>(mil(a,b)d)<br>⊥ comme 3.2                                                                           |
| 2         |                                                                 | Pythagore                                                                                | Équations                              | Affirmation                                    |                                                    |                                                                                                                              |
| 3         | Coef. (ab) et<br>(cd)<br>Parallélisme                           | Calcul P/C<br>$ab^2$ et ab<br>Arrêt                                                      | Équations                              | Calcul ab                                      | Coef.<br>Pas de<br>conclusion                      |                                                                                                                              |
| 4         | Instructions<br>de tracés<br>diagonales<br>et coord.<br>Milieux | $\text{dist}(a,b)^2 + \text{dist}(a,c)^2 - \text{dist}(b,c)^2 = 0$<br>Sans<br>conclusion | Équations<br>Coef.<br>Somme nulle      | Équations<br>Coef.<br>Idem 2.2                 | Coef.<br>Différence<br>coef. nulle                 | $\text{Dist}(d, \text{mil}(a, b))^2 + \text{dist}(a, \text{mil}(a, b))^2 - \text{dist}(a, b)^2 = 0$<br>et def.<br>médiatrice |
| 5         | Milieux                                                         | Pythagore                                                                                | Equations<br>Coef.<br>Produit          | Affirmation                                    | Coef.<br>Egalité                                   |                                                                                                                              |
| 6         | Vecteurs (4)                                                    | Calculs<br>$ab^2, ac^2, bc^2$<br>Conclusion                                              | Equations                              | Equations<br>(bc) et<br>$\text{perp}(a, b, c)$ | Equations<br>(cd) et<br>$\text{par}(a, b, c)$      |                                                                                                                              |
| 7         | Justification<br>par milieux<br>sans calculs                    | Justification<br>par<br>Pythagore<br>sans calculs                                        | Equations<br>Produit : -1              | Affirmation                                    | Justification<br>par même<br>coef. sans<br>calculs | Stratégie<br>sans calculs<br>(la ⊥ à (ab)<br>par d passe<br>par le milieu<br>de [a,b])                                       |
| 8         | Distances<br>(4)                                                | Réciproque<br>Pythagore                                                                  |                                        |                                                |                                                    |                                                                                                                              |
| 9         | Distances<br>(4)                                                |                                                                                          |                                        |                                                |                                                    |                                                                                                                              |
| 10        | Justification<br>par milieux<br>sans calculs                    |                                                                                          |                                        |                                                |                                                    |                                                                                                                              |
| 11        | Vecteurs (4)<br>sans<br>conclusion                              | Pythagore                                                                                | Equations                              | Equation<br>$\text{perp}(a, b, c)$             |                                                    |                                                                                                                              |
| 12        | Milieux +<br>long. demi<br>diagonales                           | Réciproque<br>Pythagore                                                                  | Equations<br>Coef.*<br>Produit         | Coef. *<br>Produit : -1                        | Coef. (P/C)<br>Egalité                             |                                                                                                                              |

|    |              |                          |                                                      |                                                             |      |                                              |
|----|--------------|--------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|------|----------------------------------------------|
| 13 | Vecteurs (4) |                          | Equations<br>Coef. : x et -<br>x<br>Produit : $-x^2$ | Justification<br>par égalité<br>d'équations<br>sans calculs | Idem | Justification<br>par $da=db$<br>sans calculs |
| 14 | Vecteurs (2) | Réciprocité<br>Pythagore | Equations<br>Coef.<br>Produit : -1                   | Equations<br>(bc) et<br>perp(a,b,c)<br>Conclusion           |      |                                              |

\* Ce groupe n'utilise pas la commande de GEOM1 pour calculer les coefficients angulaires mais fait calculer par DERIVE l'expression :  $\frac{\text{ord}(b)-\text{ord}(a)}{\text{abs}(b)-\text{abs}(a)}$ .

Dans cette classe, quatre groupes ont abordé les exercices suivants :

| N° groupe | Exercice 4                                                                                  | Exercice 5                                           |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| 1         | Mil(a,c), sym(b,mil(a,c))<br>Conclusion                                                     | Equations (ab), (bc), (ac)<br>Conclusion par égalité |
| 4         | Liste instructions seg(a,c)<br>mil(a,c) d := sym(b,mil(a,c))<br>absc(d), ord(d) et résultat | Coef. (ab) et (bc)<br>Conclusion par égalité         |
| 7         | Donne les coordonnées de d                                                                  |                                                      |
| 13        | Donne les coordonnées de d                                                                  |                                                      |

Classe C :

| N° groupe | Ex. 1                                    | Ex. 2 q. 2                                             | Ex. 2 q. 3                                      | Ex. 3 q. 2                                 | Ex. 3 q. 3         | Ex. 3 q. 4                                                      |
|-----------|------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1         | Vecteurs (4)                             | Calcul P/C<br>$ab^2$ et $ac^2$ .<br>Erreur et<br>arrêt |                                                 |                                            |                    |                                                                 |
| 2         | Distances (4)                            | Justification<br>par $ab=ac$                           |                                                 |                                            |                    |                                                                 |
| 3         | Distances (2)<br>Parallélisme<br>affirmé |                                                        | Equations                                       | Affirmation                                | Oui car<br>trapèze | $o:=\text{Mil}(a,b)$<br>tracé[o,d]<br>affirmation<br>dabc carré |
| 4         | Distances (2)                            |                                                        | Equations                                       |                                            |                    |                                                                 |
| 5         | Distances (4)                            |                                                        |                                                 |                                            |                    |                                                                 |
| 6         | Distances (4)<br>Sans<br>conclusion      | Réciproque<br>Pythagore                                |                                                 |                                            |                    |                                                                 |
| 7         | Vecteurs (4)                             | Equa<br>perp(a,b,c)<br>Affirmation                     | Equations<br>Coef. : 1 et -<br>1<br>Produit : 0 | Vecteurs ab<br>et cd<br>Sans<br>conclusion |                    |                                                                 |

|    |                               |                                                      |                                                  |                                   |                                   |  |
|----|-------------------------------|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--|
| 8  | Distances (4)<br>+ diagonales | Calcul $ab^2$ ,<br>$ac^2$ , $bc^2$<br>Conclusion     |                                                  |                                   |                                   |  |
| 9  | Distances (2)                 | Distances<br>Equations<br>(ab) et (ac)<br>Arrêt      |                                                  |                                   |                                   |  |
| 10 | Description<br>Affirmation    | Calcul<br>ab,ac,bc<br>Pythagore<br>faux +<br>isocèle | Equations<br>Coef.<br>Produit : -1<br>Conclusion | Coef.<br>Produit et<br>conclusion | Coef.<br>Egalité et<br>conclusion |  |

Ces deux tableaux nous permettent de situer, sans rentrer dans tous les détails, les comportements des deux groupes décrits précédemment (le 1 de la classe A et le 10 de la classe C) dans l'ensemble des productions des deux classes. Visiblement, la majorité des élèves, en particulier ceux de la classe C, a rencontré des difficultés dans cette situation.

Sur le plan de l'utilisation de DERIVE, on voit nettement le saut qualitatif qui sépare les premières situations observées où le travail se situait entièrement dans la fenêtre algébrique et la situation présente qui mobilise de façon interactive les deux fenêtres. Plusieurs groupes rencontrent des difficultés à effectuer correctement la succession d'instructions décrite dans la fiche pour régler la fenêtre graphique, puis dans le va et vient entre fenêtres (par exemple, il s'étonnent qu'appuyant une fois sur P (commande graPh) pour obtenir un tracé, rien ne se passe, et les moments où DERIVE ne répond pas sont clairement les plus difficiles à gérer). Les trois séances précédentes n'ont pas réussi pour un bon nombre d'élèves à assurer la familiarité qui permettrait de ne pas perturber par des problèmes annexes la résolution mathématique des problèmes posés.

On note à ce niveau des décalages bien plus grands que dans les séances précédemment observées. Nous avons par exemple été étonnées par la maîtrise du premier groupe décrit, à la fois dans la gestion des deux fenêtres, dans la gestion syntaxique, dans l'interprétation des productions DERIVE. Le fait, en particulier que, dans l'exercice 4, elles aient assez rapidement compris que la non-conformité du tracé venait du fait que l'expression utilisée pour D ne l'avait pas défini et que D restait l'ancien D, est assez impressionnante. A côté de cela, d'autres groupes nous semblent avoir été aux prises avec un monde qui les dépassait.

Cette situation est faite pour que l'élève, dégagé du calcul lui-même, se centre sur les démarches de résolution. Et effectivement, dans la plupart des groupes observés, même les faibles, on peut voir à certains moments au moins, cette centration sur la démarche. On voit d'ailleurs apparaître, au moins dans la classe A, une diversité de méthodes, tout à fait susceptible de nourrir la synthèse envisagée a priori.

Mais on peut noter aussi que, dès qu'un fonctionnement plus proche de la simple exécution est possible, les élèves tendent à s'en contenter, s'il permet de répondre aux questions posées. On se retrouve donc avec le problème déjà rencontré dans les autres situations d'un contrôle des variables de commande de la situation visant à garantir un niveau d'activité mathématique maximum à la majorité des élèves. Ceci, encore une fois, ne va pas de soi.

Dans le premier exercice, quelques élèves en restent à des affirmations perceptives mais la plupart s'engagent dans des preuves et le fichier commande fourni permet à ce niveau la diversité. L'exercice 2 est en un sens le moins intéressant. La question : "Démontre que le triangle ABC est rectangle" active en effet comme un réflexe le théorème de Pythagore. Là encore, la mise en oeuvre de la stratégie avec le fichier de commandes, ne pose pas de problèmes. La suite de l'exercice peut être vue à un pur niveau d'exécution, compte tenu des commandes DERIVE existantes. On notera que beaucoup de groupes n'ont pourtant pas donné la valeur du produit, soit qu'ils n'aient pas utilisé la commande, soit que, comme le groupe 2, ils n'aient pas compris le sens du mot "produit". On peut aussi noter la perturbation créée par le caractère caché des coefficients directeurs dans cette situation, même pour le groupe 1. Les équations en apparence les plus simples ne sont pas nécessairement les plus faciles à interpréter ! Vu les difficultés connues dans ce domaine, on peut se demander s'il est bienvenu d'inclure la commande "Coef." dans le fichier, même si bien sûr, l'essentiel du travail sur les droites ne se produit pas dans l'environnement DERIVE. Si l'on dispose d'une commande qui donne l'équation, pourquoi rajouter une commande pour remplacer une action sans aucun coût calculatoire ? Bon nombre de groupes ne dépasseront pas cet exercice et n'aborderont donc pas l'exercice 3 et, en particulier la question 4, on l'on sort vraiment du registre des questions de cours.

ANNEXE : LE TEXTE DU POLYCOPIÉ DISTRIBUÉ AUX ÉLÈVES  
(GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE)

3ème

**Travaux pratiques sur DERIVE**

---

Voici cinq exercices à résoudre avec DERIVE.

Les calculs seront faits par DERIVE, avec le fichier GEOM, mais tu rédigeras les solutions en indiquant les étapes de tes raisonnements.

A chaque fois, le repère utilisé est *orthonormal*.

**Exercice 1**

On donne  $A(-2 ; 4)$ ,  $B(3 ; 1)$ ,  $C(-1 ; -1)$  et  $D(4 ; 4)$ . Démontre que ABCD est un parallélogramme.

**Exercice 2**

On donne  $A(-1 ; 1)$ ,  $B(\sqrt{2} - 1 ; \sqrt{2} + 1)$  et  $C(\sqrt{2} - 1 ; -\sqrt{2} + 1)$ .

- 1) Fais un dessin avec DERIVE.
- 2) Démontre que le triangle ABC est rectangle.
- 3) Quelles sont les équations des droites (AB) et (AC) ? Quel est le produit de leurs coefficients directeurs ?

**Exercice 3**

On donne  $A(1 ; 5)$ ,  $B(5 ; 1)$ ,  $C(3 ; -1)$  et  $D(1 ; -1)$ .

- 1) Dessine le quadrilatère ABCD avec DERIVE.
- 2) Que peut-on dire des droites (AB) et (BC) ?
- 3) Démontre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- 4) Démontre que D appartient à la médiatrice du segment [AB]

**Exercice 4**

On donne  $A(-4 ; 1)$ ,  $B(-1 ; 3)$  et  $C(5 ; -4)$ . Trouve les coordonnées  $x$  et  $y$  du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Vérifie en faisant un dessin.

**Exercice 5**

On donne  $A(3 ; 1)$ ,  $B(5 ; -3)$  et  $C(-5 ; 17)$ . Démontre que les points A, B et C sont alignés.

**Exercice 6**

On donne  $A(1 ; 2)$  et  $B(4 ; 4)$ . Un point C a pour abscisse 2 et pour ordonnée un nombre  $x$  inconnu. On sait que le triangle ABC est rectangle en B. Quelle est la valeur de  $x$  ?

**1. Comment charger le fichier GEOM ?**

- faire successivement Transfert Charger Utilité
- écrire *Geom* derrière le mot Utilité
- valider

**2. Comment créer une fenêtre graphique ?**

- appuyer sur **P** pour sélectionner la commande **graPh**
- valider l'option à côté
- valider l'option 40 colonnes

**3. Réglages à effectuer**

Dans le menu de la fenêtre graphique:

- choisir **Options Etat Continu** afin d'obtenir le dessin des segments.
- choisir la commande **Ech.** pour régler l'échelle du dessin. Prendre  $x = 4$  et  $y = 4$ .
- choisir la commande **Marques**. Prendre **Lignes = 6** et **Colonnes = 9** pour que les carrés soient bien carrés.

**4. Comment revenir à la fenêtre Algèbre ?**

- choisir la commande **Algèbre**

## Les commandes

Le fichier GEOM1 ajoute de nouvelles commandes à toutes celles de DERIVE.

1°) Trois commandes pour définir des points

| Commandes     | Usages                                                                                         |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A := [2,5]    | définit le point A et lui attribue des coordonnées ici 2 et 5. <b>Attention aux crochets !</b> |
| M := MIL(A,B) | définit M comme milieu du segment [AB]                                                         |
| C := SYM(A,B) | définit C comme le symétrique de A par rapport à B                                             |

2°) Cinq commandes pour calculer

| Commandes | Usages                                                   |
|-----------|----------------------------------------------------------|
| ABSC(A)   | donne l'abscisse de A                                    |
| ORD(A)    | donne l'ordonnée de A                                    |
| DIST(A,B) | donne la distance de A à B                               |
| MIL(A,B)  | donne les coordonnées du milieu de [AB]                  |
| SYM(A,B)  | donne les coordonnées du symétrique de A par rapport à B |

3°) Trois commandes pour dessiner dans la fenêtre graphique.

| Commandes       | Usages                       |
|-----------------|------------------------------|
| SEG(A,B)        | dessine le segment AB        |
| TRI(A,B,C)      | dessine le triangle ABC      |
| QUADRI(A,B,C,D) | dessine le quadrilatère ABCD |

4°) Une commande qui donne les coordonnées d'un vecteur

| Commandes | Usage                               |
|-----------|-------------------------------------|
| VECT(A,B) | donne les coordonnées du vecteur AB |

5°) Quatre commandes pour obtenir des équations de droite

| Commandes       | Usages                                                        |
|-----------------|---------------------------------------------------------------|
| COEFF(A,B)      | donne le coeff. directeur de (AB)                             |
| EQUA(A,B)       | donne l'équation de la droite (AB)                            |
| EQUAPER(A,B,P)  | donne l'équation de la perpendiculaire à (AB) qui passe par P |
| EQUAPARA(A,B,P) | donne l'équation de la parallèle à (AB) qui passe par P       |

## IV.4 RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS.

### CONTEXTE DE L'OBSERVATION

Cette observation a eu lieu le 30 mai 1994. Elle se situe à un moment où les élèves ont déjà abordé les points suivants :

- résolution d'un système :  $ax+by=c$ ,  $a'x+b'y=c'$ , en se ramenant à l'équation :  $\frac{c-ax}{b} = \frac{c'-a'x}{b'}$  cette approche ayant été choisie par l'enseignant "pour son caractère concret"<sup>14</sup>,
- calcul des coordonnées du point d'intersection des deux droites d'équations données par résolution du système correspondant.

Il s'agit ici de faire travailler les élèves, en utilisant DERIVE, sur la méthode de résolution par combinaison linéaires.

Cette séance sera suivie d'une séance consacrée à la résolution graphique, elle aussi menée dans l'environnement DERIVE. L'enseignant reviendra ensuite plus globalement sur les différentes méthodes de résolution introduites et sur le problème de la validation de ces méthodes, en particulier sur la question suivante : comment s'assurer qu'on a résolu correctement un système du premier degré à deux inconnues ?

Sur ce plan, selon lui, trois approches sont à envisager

- le raisonnement par équivalences successives,
- le fait que si l'on sait que le système à une solution unique, l'une quelconque des méthodes permet de la déterminer,
- la vérification a posteriori des solutions trouvées.

Ces trois méthodes présentent selon lui des inconvénients :

- la première est basée sur un mode de raisonnement, hors programme,
- la seconde suppose l'utilisation de résultats relevant de l'étude générale des systèmes  $2 \times 2$ , elle aussi hors programme,
- la troisième risque de créer chez les élèves "une confusion avec la vérification envisagée comme moyen de détecter d'éventuelles erreurs de calcul".

Il préfère passer dans un premier temps, par l'intermédiaire du cadre graphique, qui lui semble ici plus parlant. L'unicité de la solution sera alors liée à la position respective des deux droites : droites sécantes, la non-unicité ou l'absence de solutions aux cas de parallélisme. Ce fonctionnement est économique dans l'environnement DERIVE. Pratiquement, il débouchera sur les critères suivants qui éviteront ensuite le calcul systématique des coefficients directeurs :

- lorsque l'on rencontre, au cours de la résolution d'un système, une équation du genre  $0x+0y=0$ , c'est que le système est indéterminé,
- si l'on obtient une équation du genre  $0x+0y=k$  avec  $k \neq 0$ , c'est qu'il n'y a aucune solution,

---

<sup>14</sup>Soulignons que nous avons montré dans le rapport intermédiaire comment cette méthode est particulièrement bien adaptée, ergonomiquement, au fonctionnement DERIVE.

- dans tous les autres cas, la solution calculée est unique.

### **PRÉSENTATION DES ACTIVITÉS PROPOSÉES**

Cette situation est organisée en plusieurs temps (voir document en annexe page 143). On introduit d'abord l'utilisation du symbole  $:=$  (déjà utilisé pour nommer des points), pour nommer des équations algébriques. Les deux premières tâches proposées dans l'exercice 1 visent à explorer le fonctionnement de cette commande sur une équation particulière et à montrer la possibilité qu'elle donne de faire des opérations directement sur cette équation : additionner ou soustraire un nombre à cette équation, la multiplier par un nombre donné. Cet exercice se termine par une demande de prévision : "Écrire sans DERIVE ce que donnera la simplification de l'expression  $2 * \text{equa} - 3$ ".

Dans l'exercice 2, une seconde équation est introduite et on demande cette fois aux élèves les opérations à faire pour passer de cette équation à 4 équations données. Il s'agit de multiplications et, dans le premier cas, la réponse est donnée. On demande d'utiliser DERIVE pour vérifier les réponses.

Avec l'exercice 3, on aborde les systèmes : 2 équations sont cette fois introduites et on fait explorer aux élèves avec DERIVE, des combinaisons linéaires de ces deux équations. Les deux dernières font disparaître respectivement les termes en  $x$  et  $y$ .

L'exercice 4 est du même type : deux équations sont données, ainsi que des combinaisons linéaires qui suppriment respectivement les termes en  $x$  et  $y$ . On demande aux élèves d'effectuer les combinaisons avec DERIVE et de noter leurs remarques.

Dans l'exercice 5, on aborde explicitement la résolution des systèmes. Un système est donné, on demande aux élèves de nommer les équations correspondantes, puis de trouver eux-mêmes les coefficients qui vont permettre d'éliminer les termes en  $x$  et en  $y$ , puis d'achever la résolution.

Dans l'exercice 6, qui leur est proposé ensuite, ils doivent utiliser la même méthode pour résoudre avec DERIVE, 5 systèmes numériques admettant une solution unique. Un dernier exercice, l'exercice 7, leur propose enfin de résoudre deux systèmes avec la même méthode et d'essayer d'interpréter les réponses données par DERIVE. Ces deux systèmes correspondent aux cas d'impossibilité et d'indétermination.

### **ANALYSE A PRIORI EFFECTUÉE PAR L'ENSEIGNANT**

#### **Objectifs :**

L'objectif de la séance est, pour l'enseignant : "de faire découvrir aux élèves une méthode de résolution nouvelle, moins intuitive mais riche de possibilités puisqu'elle constitue une propédeutique à la méthode dite du pivot".

#### **Intérêt et rôle de DERIVE :**

DERIVE présente ici l'intérêt de permettre de nommer les équations et d'opérer sur elles un certain nombre d'opérations en les considérant comme des entités. Il permet donc d'introduire le calcul sur une nouvelle classe d'objets et de bien mettre en évidence le fait que la méthode par combinaisons linéaires de résolution des systèmes met en jeu des opérations sur des équations.

Même si DERIVE ne fonctionne pas ici comme une boîte noire, ce TP présente, selon l'enseignant, "un aspect inhabituel qui provient de la nature des objets manipulés."

#### Connaissances DERIVE nécessaires :

Les commandes usuelles du calcul algébrique : Auteur, Simplifie, devEloppe, la commande resoL, pour la dernière partie, ainsi que le symbole de nomination  $:=$ . Toutes ces commandes devraient être maintenant familières aux élèves. Le symbole de nomination a été déjà utilisé par le professeur, dans les séances collectives, pour nommer des expressions algébriques et par les élèves, en géométrie analytique, pour nommer des points.

#### Comportements, difficultés attendus :

L'idéal pour l'enseignant serait "qu'à la fin de la séance, les élèves sachent résoudre un système (avec des coefficients simples) par la méthode des combinaisons."

Il s'attend à quelques erreurs dues à la confusion entre  $:=$  et  $=$ . Il est possible aussi, lui semble-t-il, que notamment dans la classe faible, certains élèves saisissent mal le sens d'une écriture comme :  $2 * \text{equa}1 + 3 * \text{equa}2$  et qu'il doive intervenir à ce niveau. Mais il estime que très peu d'élèves devraient se trouver dans ce cas et que la difficulté essentielle sera sans doute liée à la longueur du texte distribué aux élèves. L'expérience, écrit-il, "montre qu'il vaut mieux des textes courts sinon l'arbre risque de cacher la forêt". C'est la première fois qu'il expérimente ce TP et il ne sait pas, dit-il, jusqu'où pourront aller les élèves.

Comme pour les autres séances, un bilan est prévu ultérieurement.

#### EXEMPLES DE DÉROULEMENT

##### Groupe 1 :

Il s'agit d'un groupe d'élèves de la classe A, que nous désignerons par S. et T. Elles travaillent en bonne collaboration.

##### *Entrée dans la séance :*

Elles ne rencontrent aucun problème.

##### *Exercice 1, partie 1 ( $\approx 8mn$ ) :*

S. est à la frappe, T. prépare un tableau sur la feuille de compte-rendu, ce qui prend beaucoup plus de temps que l'entrée et la simplification des expressions sous DERIVE. Au bout de 4mn, S. a fini et veut passer à la suite, T. est toujours en train de noter.

Le professeur intervient collectivement pour demander aux élèves de ne pas fonctionner mécaniquement mais d'essayer de prévoir. Il précise ce que fait DERIVE quand on entre l'expression :  $\text{equa} - 8$  (la deuxième expression) et qu'on la fait simplifier. Il leur dit que l'objectif de la séance n'est pas d'abattre des calculs, qu'il faut réfléchir au sens de ces calculs.

Pendant ce temps, T. a fini de noter et elles passent à la partie suivante.

##### *Exercice 1, partie 2 ( $\approx 5mn$ ) :*

Encore une fois cela va très vite. S. est toujours à la frappe. le professeur passe et leur demande d'expliquer le résultat de  $5 * \text{equa}$  (la deuxième expression). S. explique sans difficulté.

T. commence à préparer le tableau suivant et S. repère alors la question de prévision.

*Exercice 1, prévision (≈ 10mn) :*

Elles repassent en P/C pour traiter cette question. La résolution, tout en ne posant pas de problème de fond, va prendre du temps. S., au départ, dicte à T. ce qu'elle doit écrire sur le compte-rendu : "2 facteur de  $3x-4$ ". T. rectifie : " $-4y$ , non ?" S. continue : " $-4y$  et  $-3$ ", puis elle se dit qu'elle a oublié quelque chose et prend un papier, en disant : "Il faut que je fasse sur une feuille." Elle écrit alors :  $6x - 8y = 2$  (donc exactement  $2 \times \text{equa}$ ), puis :  $6x - 8y - 3 = -1$ .

On peut donc penser que c'est terminé. Mais S. n'est pas tout à fait sûre et demande à T. si c'est bien ça qui se passe quand on fait  $-3$  avec DERIVE. T. ne se prononce pas et écrit sur sa feuille :  $2(3x - 4y) - 3$  puis dit que ça ne va pas, qu'entre parenthèses, il faut mettre la première ligne écrite par S. Elle efface donc et écrit :  $(2(3x - 4y = 1) - 3$ . S. remarque : "On a le résultat mais on ne sait pas l'écrire" (elles veulent, semble-t-il, reproduire l'expression parenthésée que donne DERIVE après simplification et avant développement).

Elles vont alors écrire successivement :  $2(3x - 4y - 3 = -2)$ , ce qui correspond au calcul de  $2(\text{equa} - 3)$ , puis  $6x - 8y - 6 = -4$ , puis conclure que normalement, ça doit être ça. S. dit : "On peut toujours vérifier avec DERIVE et, si c'est pas bon, on recommence." T. proteste que ce n'est pas ce qu'il faut faire. Mais, finalement, elles le font et passent en DERIVE. Elles entrent successivement :

#1 :  $\text{equa} := 3x-4y=1$

#2 :  $2 \times \text{equa} - 3$

et obtiennent, par simplification :

#3 :  $6x-8y-3=-1$

S. remarque qu'elle avait bon finalement au tout début, puis elle dicte à T. ce qu'il faut écrire sur le compte-rendu :  $(6x - 8y = 2) - 3$  puis :  $6x - 8y - 3 = -1$ . Ensuite, elles effacent rapidement l'écran de DERIVE et passent à la suite.

*Exercice 2 (≈ 10mn) :*

S. lit le texte pendant que T. prépare le tableau, puis elle rentre l'équation. Elle a des doutes et dit : "Il doit y avoir un truc. Faut pas diviser quand même !" Elle réfléchit puis ajoute : "Je me vois mal diviser ça (l'équation :  $12x - 30y = 48$ ) par ça : 6 . Et elle répète : "Il doit y avoir un truc."

Elle commence à dire que l'exercice n'est pas pour elles, hésite encore, puis se décide à essayer quelque chose qui, à son avis, ne va pas marcher. Elle tape alors :

$(6x - 15y = 24)/(2x - 5y = 8)$

L'affichage donne le quotient des deux équations. Elle simplifie et obtient :  $3 = 3$ . Les deux se mettent à rire. T. dit à S. d'essayer de faire la première pareil, pour voir, puisqu'on leur donne la réponse. S. le fait et obtient cette fois-ci :  $6 = 6$ . Elles sont alors convaincues d'avoir trouvé le truc.

Le professeur passe à ce moment là et leur demande comment elles interprètent ce 6. Elles ne comprennent pas bien la question qui leur est posée et expliquent ce qu'elles ont fait. Le

professeur leur dit qu'elles ont eu une idée intéressante et les aide à interpréter ce qu'a fait DERIVE puis il s'en va.

T. dit que, du coup, pour la suivante, ça doit être : 3 et elle l'écrit. S. est d'accord. T. lui dicte le quotient des deux équations suivantes à rentrer sous DERIVE. Elles entrent par erreur :

$-10x + 25y = 40$  au lieu de :  $-10x + 25y = -40$ , et obtiennent, en simplifiant le quotient :  $5 = -5$

Ceci les fait rire, une fois de plus, et S. conclut que c'est : -5 puisque  $-5 \times 2 = -10$  (elle regarde alors uniquement les coefficients de x).

Elles rentrent ensuite l'équation et le quotient suivant, en rajoutant des parenthèses autour de la fraction  $15/2$ . Elles procèdent en deux temps, entrant d'abord l'équation. Visiblement l'écriture préliminaire de l'équation leur sert à tester ce parenthésage dont elles ne sont pas tout à fait sûres. Elles obtiennent alors :  $3/2 = 3/2$ .

S. revient à l'exemple précédent et dit qu'il y a un truc qu'elle ne comprend pas. Elle croyait que la multiplication prenait tout, dit-elle, mais en fait elle ne prend que le premier terme. Parce que, si on met -5, normalement, ça devrait faire : -40. et pas : 40. T. ne réagit pas. Voyant cela, l'observateur intervient pour détromper S. et lui montrer son erreur de frappe dans l'exercice précédent. Il confirme que la multiplication prend bien en compte toute l'équation.

### *Exercice 3 (≈ 7mn) :*

S. efface et rentre les deux équations. T. commence à tracer le tableau. Puis elles font le travail demandé, en se demandant pourquoi on les fait développer si ça ne change rien. Elles posent la question au professeur qui passe et qui les rassure : oui, dans ce cas, le développement ne change rien, c'est dû au fonctionnement de la syntaxe DERIVE. Elles constatent dans les deux derniers cas la disparition des x et des y mais ne font pas plus de commentaire et notent les résultats avant de passer à l'exercice suivant.

### *Exercice 4 (≈ 10mn) :*

Trouver m et n ne leur pose pas de difficulté particulière. Elles rentrent  $5 \times \text{equal} - 4 \times \text{equa}2$ , et obtiennent, après simplification :  $23x = 115$ . S. dit alors que ça pourrait faire :  $x = 115/23$ , mais elle se demande si c'est bien ce que l'on attend d'elles puisque le texte mentionne : "après simplification et développement". T. regarde ce que fait le groupe voisin. S. veut qu'elle écrive directement :  $x = 115/23$  mais T. lui dit de suivre les instructions et de développer.

L'observateur intervient alors pour leur dire de ne pas se préoccuper de ces instructions, que l'objectif de l'exercice ce n'est pas ça, c'est de résoudre le système d'équations, de trouver x et y.

Elles continuent alors et trouvent sans difficulté la valeur de y :  $-184/23$ . Elles constatent que les dénominateurs sont les mêmes et qu'elles ont bien x et y. C'est la fin de la séance.

### *Groupe 2 :*

Il s'agit d'un groupe de deux filles de la classe A de niveau moyen. Nous les désignerons par A. et B.

### *Début de la séance :*

Elles partagent l'écran en deux fenêtres, sans doute une réminiscence des séances proches de géométrie analytique et font les réglages puis elles passent à l'exercice 1.

*Exercice 1, partie 1 (≈ 15mn) :*

Elles entrent l'équation : #1 :  $\text{equa} := 3x - 4y = 1$ , comme indiqué mais ne comprennent pas très bien ce qu'elles doivent faire ensuite. Alors elles tapent #2 :  $\text{equa} := -5$ , puis simplifient et obtiennent #3 : -5. Elles tapent ensuite #4 :  $\text{equa} -5$ , ce qui leur donne par simplification :

#5 : -10, puisque la définition de l'équation a changé. Ca ne leur convient pas et elles se sentent perdues.

A ce moment là, l'enseignant intervient collectivement pour expliquer ce que signifie l'écriture :  $\text{equa} - 8$ , ce que fait DERIVE et pour demander de réfléchir au lieu d'agir mécaniquement.

Elles effacent tout et recommencent, tapent cette fois :

#1 :  $\text{equa} := 3x - 4y = 1$

#2 :  $\text{equa} - 5$

et obtiennent, par simplification : -10, comme précédemment. Elles ne comprennent pas ce qui se passe et appellent le professeur qui diagnostique tout de suite un problème rencontré par plusieurs groupes. C'est un problème de syntaxe DERIVE : elles ont mis des intervalles entre les nombres et les lettres et l'ordinateur n'a pas lu correctement l'équation.

Elles effacent tout et recommencent. Cette fois-ci, tout se passe bien. B. complète son tableau et elles passent rapidement à la suite.

*Exercice 1, partie 2 (≈ 4mn) :*

B. tape et remplit en même temps le tableau 2, sans rencontrer de problème particulier. A., de son côté, a décidé qu'elle préférerait faire les opérations en P/C et ne regarde pas l'écran.

*Exercice 1, prévision (≈ 3mn) :*

A. fait la question de prévision et écrit, sur le compte-rendu, après avoir montré à B :

$2 * \text{equa} - 3$

$2(3x - 4y - 3) = -4 \quad \rightarrow \quad 6x - 8y - 6 = -4$  (en fait, elles ont fait comme le groupe 1 et calculé :  $2(\text{equa} - 3)$  qui est bien sûr une équation équivalente)

Le professeur passe et leur demande si elles ont bien compris le codage :  $2 * \text{equa} - 3$ . Elles répondent que oui.

Elles se demandent si elles doivent vérifier avec DERIVE mais ce n'est pas explicitement demandé et elles ont perdu du temps au début alors elles préfèrent passer à l'exercice suivant.

*Exercice 2 (≈ 20mn) :*

B. est toujours à la frappe et A. lit le texte. Elles discutent pour comprendre ce qu'il faut faire puis rentrent les deux équations. A. a l'idée de demander la factorisation de :  $6x - 15y = 24$ . Elle obtient :  $3(2x - 5y) = 2^3 \cdot 3$ . Elle explique à B. : "Le contraire de développer, c'est factoriser. Tu peux diviser ça ( $2^3 \cdot 3$ ) par ça (8) et ça te donne le numéro."

B. est moyennement convaincue et veut essayer autre chose. Elle tape :

$$-10x + 25y = 40 / \text{equa}$$

Ca ne donne rien et elle revient à la stratégie de A. Pour cette équation, la factorisation donne :  $5(5y - 2x) = -2^3 \cdot 5$  et celle de la dernière équation :  $3x - 15/2y = 12$  ne donne rien.

Elles ne savent pas en fait comment utiliser les résultats qu'elles obtiennent, bien que le premier soit très comparable au premier cas qu'elles avaient interprété, au changement d'ordre des termes et du signe du premier membre près. Elles réfléchissent et discutent longuement puis, au bout d'une dizaine de minutes, effacent tout et décident de travailler en P/C.

Elles travaillent en P/C, en gardant visiblement la stratégie de mise en facteur et en tentant de deviner les coefficients puis se fixent sur : 3, 5 (donc erreur de signe) et  $3/2$  (correct). Elles écrivent ces résultats.

Elles repassent ensuite en DERIVE pour vérifier. A. entre l'équation initiale puis une transformation incompréhensible ( $7/10 * \text{equa}$ ), développe, puis retape l'équation et enfin :

$$3/2 * \text{equa}.$$

Elle obtient l'équation cherchée et est satisfaite.

### *Exercice 3 (~ 5mn) :*

Rien de particulier à signaler dans cet exercice. Elles rentrent les expressions demandées et notent, tout en s'étonnant, comme le groupe précédent, qu'on leur demande de développer si ça ne change rien.

### *Exercice 4 (~ 5mn) :*

Elles observent que "les x et les y s'annulent alternativement" et se demandent comment elles peuvent écrire ça, s'il y a un nom spécial pour cette opération. Elles posent cette question au professeur qui leur répond que non. A aucun moment, elles ne font le lien avec la résolution du système. C'est la fin de la séance.

### **ANALYSE A POSTERIORI**

Dans cette situation, l'accent est mis sur le travail sur les équations. Il ne s'agit pas d'utiliser directement la capacité de DERIVE à résoudre des systèmes mais sa capacité à résoudre des équations pour organiser la résolution de systèmes. DERIVE permet de nommer l'équation et donc de la considérer comme un tout qui peut être soumis comme les expressions algébriques à des calculs. L'ambition est de lier les gestes de la résolution, souvent trop tôt mécanisés, à des opérations sur les équations.

La séance est organisée pour permettre aux élèves de se familiariser avec cette idée d'opérations avant de passer à la résolution de systèmes proprement dite. En fait, l'analyse des productions montre que 5 groupes sur 15 seulement feront la partie 5, au moins partiellement et que deux seulement aborderont la partie 6. De plus, on note que, pour les élèves, le lien avec la résolution des systèmes ne se fait pas spontanément. Dans l'exercice 4, où ils sont conduits implicitement à résoudre un système, les remarques des élèves, prouvent souvent, lorsqu'ils en font, qu'ils ne sont pas forcément attentifs à cet aspect. Plusieurs groupes écrivent par exemple que le développement donne le même résultat que la simplification. Il y a là un décalage avec ce que recouvrent ces termes dans leur environnement usuel qui les intrigue. Un groupe remarque que x et y n'ont pas les mêmes valeurs, trois que les x et les y disparaissent

alternativement et deux soulignent quand même que, du coup, on peut trouver facilement  $x$  et  $y$ .

Les observations des groupes montrent bien comment les élèves peuvent être facilement détournés du sens profond que l'on veut donner à la tâche, pour focaliser leur attention sur d'autres aspects auxquels nous resterions sans doute relativement indifférents, par exemple ceux liés au fonctionnement qui leur semble parfois un peu incompréhensible de DERIVE.

On retrouve aussi dans cette situation des phénomènes déjà rencontrés dans les séances précédentes. DERIVE incite au jeu formel et il n'est pas facile de contrôler la charge mathématique de ce jeu. Ceci est bien visible dans l'exercice 2 où les élèves doivent trouver les coefficients permettant de passer multiplicativement d'une équation à une autre. Les élèves vont essayer des choses sans trop savoir où cela peut les mener, simplement parce que DERIVE permet de le faire économiquement. Ensuite, ils examinent les productions, essayant d'en tirer des informations, en restant souvent au niveau des jeux de formes. Ce jeu possible et favorisé par DERIVE, de pêche un peu aveugle, que nous avons rencontré à diverses reprises au cours des observations, n'est pas forcément improductif, loin de là, comme on le voit avec le groupe 1. Ce groupe cherche un truc, tente la division des deux équations en pensant qu'elle ne va rien donner, récupère une trivialité surprenante :  $3=3$ . Elles ne cherchent pas à en trouver la raison mais testent sa capacité à se reproduire sur un autre exemple et, quand elles obtiennent :  $6=6$ , justement dans le cas où la réponse est donnée, elles sont convaincues d'avoir gagné. En faisant pareil, elles vont pouvoir répondre aux questions posées, trouver les nombres demandés ! Faisant une erreur de frappe, elles arrivent à :  $-5=5$  et ceci ne les perturbe pas outre mesure : il y a toujours un invariant : 5, qui peut jouer le rôle joué précédemment par 3 et 6, il suffit de trier entre 5 et -5, ce qui est fait à partir des coefficients de  $x$ . Un moment plus tard, une élève du groupe reviendra sur cette égalité bizarre (d'autant plus bizarre peut-être que le professeur les avait aidées à lui donner un autre sens que formel) pour en conclure que finalement ce qu'elle croyait était faux, ce qui déclenchera la réaction de l'observateur.

Pour cet exercice, l'analyse des productions des élèves montre un nombre non négligeable de réponses 5 au lieu de -5 et, pour les groupes observés, un fonctionnement très majoritaire de pêche formelle s'appuyant sur l'utilisation de DERIVE.

Il aurait peut-être été souhaitable de ne pas se limiter dans cet exercice à un seul type de transformations et d'inclure également, pour forcer le raisonnement, des équations qui ne se ramèneraient pas à l'équation initiale, par un des types de transformations introduits, en demander de trier entre les cas de possibilité et d'impossibilité, de façon justifiée (en donnant une transformation pour les réponses positives, une raison d'impossibilité sinon).

De façon générale, si l'on considère l'ensemble de la séance, on voit bien qu'elle amène les élèves à considérer les équations comme des entités accessibles au calcul algébrique et qu'elle remplit en cela son objectif principal. Mais, compte tenu des résultats des observations, il semble qu'il faudrait trouver un meilleur équilibre entre les tâches de pure exécution qui aident à rentrer dans le problème et les tâches qui exigent de l'élève plus d'engagement mathématique. De plus, la résolution des systèmes y arrive trop tard, après un exercice 4 qui, visiblement, n'apporte pas grand chose aux élèves. Il semble plus raisonnable soit d'organiser toute la séance autour du jeu sur les équations, en construisant des tâches de complexité variée, sans évoquer encore la résolution des systèmes, soit, si l'on pense pouvoir dès cette séance aborder la résolution, y entrer comparativement plus tôt, en limitant au strict nécessaire les tâches d'exécution.

Il serait aussi souhaitable de ne pas rajouter aux difficultés de la séance, dans ce dernier cas, des problèmes liés à ce que nous avons déjà qualifié de « pseudo-transparence » de DERIVE (ici dans le fonctionnement des commandes de simplification et développement) qui, visiblement, tendent à prendre le pas pour certains élèves sur l'enjeu mathématique réel et, bien préciser, dans le tâches d'anticipation, que ce qui est demandé, ce n'est pas de reproduire le cheminement DERIVE, mais de donner l'expression terminale réduite sans parenthèses.

## ANNEXE 1 : FICHE DISTRIBUEE AUX ELEVES

3ème

Travaux pratiques avec DERIVE

Résolution d'un système de 2 équations du premier degré à 2 inconnues

### Commandes et symboles à utiliser

Auteur : pour entrer une expression  
 dévelOppe : pour développer  
 Simplifie : pour simplifier ou modifier l'écriture d'une expression  
 résoL : pour résoudre une équation  
 suppRime : pour supprimer une ou plusieurs expressions  
 \* : pour multiplier  
 / : pour diviser  
 := : pour donner un nom

Tu as déjà donné des noms à des points grâce au symbole := Aujourd'hui, tu vas utiliser ce symbole pour donner des noms à des expressions. Ces noms pourront, à leur tour, définir de nouveaux calculs.

### Exercice 1

Commence par écrire l'expression  $\text{equa} := 3x - 4y = 1$

Quand l'expression sera enregistrée, le nom *equa* désignera l'équation  $3x - 4y = 1$ .

1) Reproduis le tableau 1 ci-dessous.

| Expression à écrire puis à simplifier avec DERIVE | Expressions obtenues |
|---------------------------------------------------|----------------------|
| $\text{equa} - +5$                                |                      |
| $\text{equa} - 8$                                 |                      |
| $\text{equa} - 1$                                 |                      |

Utilise DERIVE pour le compléter.

2) Voici 5 nouvelles expressions à écrire et à simplifier avec DERIVE. A chaque fois, le résultat sera développé.

| Expression à écrire         | après simplification | après développement |
|-----------------------------|----------------------|---------------------|
| $2 * \text{equa}$           |                      |                     |
| $5 * \text{equa}$           |                      |                     |
| $-3 * \text{equa}$          |                      |                     |
| $\text{equa} / 4$           |                      |                     |
| $\frac{3}{4} * \text{equa}$ |                      |                     |

Reproduis et complète le tableau.

3) Ecris, sans DERIVE, ce que donnera la simplification de l'expression  $2 * \text{equa} - 3$

### Exercice 2

Supprime toutes les expressions utilisées puis écris  $\text{equa} := 2x - 5y = 8$

Reproduis et complète ce tableau.

| Pour obtenir              | il faut multiplier les deux membres de l'équation $2x - 5y = 8$ par |
|---------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $12x - 30y = 48$          | 6                                                                   |
| $6x - 15y = 24$           |                                                                     |
| $-10x + 25y = -40$        |                                                                     |
| $3x - \frac{15}{2}y = 12$ |                                                                     |

Vérifie avec tes résultats avec DERIVE.

### Exercice 3

Supprime toutes les expressions utilisées. Nomme *equal* et *equa2* les deux équations  $3x - 4y = 7$  et  $2x + 3y = 12$ .

Le tableau qui suit présente 5 expressions à entrer et à simplifier. Pour les trois dernières, les expressions obtenues seront développées.

| Expression à écrire  | après simplification | après développement |
|----------------------|----------------------|---------------------|
| $equal + equa2$      |                      | -                   |
| $3*equal + 2*equa2$  |                      |                     |
| $-5*equal + 3*equa2$ |                      |                     |
| $3*equal + 4*equa2$  |                      |                     |
| $2*equal - 3*equa2$  |                      |                     |

Reproduis le tableau et utilise DERIVE pour le compléter.

### Exercice 4

Supprime toutes les expressions utilisées. Nomme *equal* et *equa2* les deux équations  $3x - 4y = -17$  et  $2x + 5y = 50$ .

Simplifie et développe l'expression  $5*equal + 4*equa2$ .

Ensuite, simplifie et développe l'expression  $2*equal - 3*equa2$ .

Quelles remarques peut-tu faire à propos des expressions obtenues ?

### Exercice 5

Supprime toutes les expressions utilisées.

On considère le système

$$2x - 5y = 12$$

$$3x + 4y = -5.$$

Nomme *equal* et *equa2* les deux équations  $2x - 5y = 12$  et  $3x + 4y = -5$ .

1) Peux-tu trouver deux nombres *m* et *n* tels que l'expression  $m*equal + n*equa2$  ne contienne plus la variable *y* après simplification et développement ? Si oui, résous l'équation en *x* obtenue. Que trouves-tu ?

2) Peux-tu trouver deux nombres *p* et *q* tels que l'expression  $p*equal + q*equa2$  ne contienne plus la variable *x* après simplification et développement ? Si oui, résous l'équation en *y* obtenue. Que trouves-tu ?

### Exercice 6

Résous, avec DERIVE, chacun des systèmes qui suivent, en utilisant la méthode de l'exercice 5.

$$3x + 2y = 4$$

$$2x - 5y = 11$$

$$19x + 10y = 30$$

$$78x - 64y = 112$$

$$5x + 3y = 2$$

$$3x + 7y = 2$$

$$40x + 21y = 38$$

$$32x + 48y = -223$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{4}{5}y = 1$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = -1$$

### Exercice 7

Applique la même méthode aux deux systèmes suivants:

$$3x - 2y = 5$$

$$-2x + 7y = -15$$

$$6x - 4y = 10$$

$$6x - 21y = -48$$

Quelles sont les indications données par DERIVE ? Peux-tu les interpréter ?

## ANNEXE 2 : FICHE ASSOCIEE AU TP COMPLEMENTAIRE SUR LA RESOLUTION GRAPHIQUE

3ème

Travaux pratiques avec DERIVE

Résolution d'un système de 2 équations du premier degré à 2 inconnues

---

### Commandes à utiliser dans la fenêtre calcul

|           |                                                             |
|-----------|-------------------------------------------------------------|
| Auteur    | : pour entrer une expression                                |
| Simplifie | : pour simplifier ou modifier l'écriture d'une expression   |
| résoL     | : pour résoudre une équation                                |
| suppRime  | : pour supprimer une ou plusieurs expressions               |
| graPh     | : pour ouvrir une fenêtre graphique                         |
| F3        | : touche de fonction qui permet de recopier des expressions |
| :=        | : pour attribuer une valeur numérique à une variable        |

### Commandes à utiliser dans la fenêtre graphique

|          |                                                                    |
|----------|--------------------------------------------------------------------|
| Algèbre  | : pour quitter la fenêtre graphique et revenir à la fenêtre calcul |
| Supprime | : pour supprimer les tracés dans la fenêtre graphique              |

Rappelons qu'un double appui sur la touche P donne le tracé qui correspond à l'expression sélectionnée dans la fenêtre calcul.

---

Charge DERIVE et ouvre une fenêtre graphique (commandes graPh, à côté, colonnes: 40).  
Règle l'échelle à  $x = 4$  et  $y = 4$  (commande Ech. du menu de la fenêtre graphique).

### Exercice 1

Entre les deux expressions suivantes:

# 1  $3x - 2y = -1$

# 2  $4x + 3y = 10$

1) Dans chaque cas, utilise la commande résoL pour exprimer y en fonction de x. Tu dois obtenir deux nouvelles expressions # 3 et # 4.

Sur ton compte-rendu, écris les résultats trouvés.

2) Avec la touche de fonction F3 (ou à la main), écris l'équation obtenue en égalant les deux expressions obtenues en # 3 et # 4. Résous cette équation. Quelle valeur de x trouves-tu ?

3) Avec le symbole :=, donne la valeur que tu viens de trouver à la variable x puis évalue y avec la commande Simplifie. Que trouves-tu ?

4) Demande la dessin des droites dont les équations sont définies par les expressions # 3 et # 4. Quelles sont les coordonnées de leur point de rencontre ?

Quel rapport vois-tu avec la solution du système constitué des deux expressions # 1 et # 2 ?

### Exercice 2

Utilise la méthode de l'exercice 1 pour résoudre graphiquement les systèmes

$$2x - 3y = -2$$

$$5x + 3y = 1$$

$$-3x + 4y = 2$$

$$3x - 4y = -5$$

### Exercice 3

Applique la même méthode aux deux systèmes suivants:

$$3x - 2y = 5$$

$$-2x + 7y = -15$$

$$6x - 4y = 10$$

$$6x - 21y = -48$$

Que peux-tu observer ? Calcule les coefficients directeurs de chaque droite ? Quelles conclusions peux-tu tirer de ces calculs ?

### ANNEXE 3 : LE PROBLEME DE LA VALIDATION (TEXTE REDIGE PAR L'ENSEIGNANT POUR LE GROUPE CALCUL FORMEL)

Comment s'assurer qu'on a résolu correctement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues ?

#### La démarche classique

Pour résoudre un système, il existe trois méthodes de calcul différentes, deux méthodes *par substitution* et une méthode appelée *méthode par combinaison*. Mais, lorsqu'on applique l'une de ces méthodes à un système donné et qu'on obtient une réponse, qu'est-ce qui prouve que cette réponse est **unique** ? N'y a-t-il pas d'autres réponses possibles ?

En troisième, on peut répondre à cette question de trois façons différentes.

1) On peut raisonner par équivalences successives.

2) Si on sait que le système admet une solution unique, alors n'importe laquelle des trois méthodes exposées permet de la trouver.

3) La dernière approche suppose un travail en deux temps:

- s'il y a une solution au système, ce ne peut être que celle donnée par l'une des méthodes indiquées;

- il suffit alors de vérifier que les valeurs trouvées pour  $x$  et pour  $y$  **vérifient effectivement le système proposé** en remplaçant  $x$  et  $y$  par ces deux valeurs dans les deux équations qui composent le système.

#### **Critiques de ces trois approches**

Dans la première démarche, il faut être capable de démontrer que deux systèmes sont équivalents. Ceci revient à prouver que l'ensemble des solutions du premier système est identique à l'ensemble des solutions du second. On est manifestement hors programme !

La seconde démarche semble inapplicable puisque l'étude générale d'un système

$$ax + by = c$$

$$a'x + b'y = c'$$

est elle aussi hors programmepas au programme

La troisième démarche quant à elle risque de créer chez nos élèves une confusion avec la vérification envisagée comme moyen de détecter d'éventuelles erreurs de calcul.

#### **Laquelle des trois ?**

En général, c'est la troisième approche qui a les faveurs des manuels et des enseignants. Rappelons-la sur un exemple. Il s'agit de résoudre la système suivant:

$$2x - 3y = 1 \quad (1)$$

$$5x + 2y = 12 \quad (2)$$

Premier temps : Supposons qu'il existe au moins un couple  $(x; y)$  solution du système. En adoptant une méthode de substitution, on peut écrire  $y = \frac{2x-1}{3}$  ainsi que  $y = \frac{12-5x}{2}$ .

En égalant ces deux valeurs, on obtient une équation du premier degré à une inconnue :  $\frac{2x-1}{3} = \frac{12-5x}{2}$ .

On peut écrire successivement:

$$2(2x - 1) = 3(12 - 5x)$$

$$4x - 2 = 36 - 15x$$

$$4x + 15 = 36 + 2$$

$$19x = 38$$

$$\text{On en tire } x = \frac{38}{19} = 2.$$

$$\text{En reportant cette valeur dans l'équation (1) on obtient } 4 - 3y = 1 \text{ d'où } y = \frac{2*2-1}{3} = 1.$$

146

Nous savons alors que, si le système admet une solution, ce ne peut être que  $x = 2$  et  $y = 1$ .

Second temps : Il faut vérifier que les valeurs trouvées *constituent bien une solution du système*.

Conclusion : *Le système proposé admet une solution unique.*

**Une autre approche est possible**

Cette méthode nous paraît passer "très au dessus de la tête des élèves". C'est pourquoi nous lui préférons une autre méthode basée sur la méthode graphique, plus parlante aux yeux de nos élèves.

Reprenons le cas du système

$$2x - 3y = 1 \quad (1)$$

$$5x + 2y = 12 \quad (2)$$

De ces deux équations on tire respectivement  $y = \frac{2x-1}{3}$  et  $y = \frac{12-5x}{2}$  d'où  $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$  et  $y = -\frac{5}{2}x + 6$ .

Les droites représentatives ne sont pas ni parallèles ni confondues *car elles n'ont pas les mêmes coefficients directeurs*. Elles ont donc un unique point de rencontre dont les coordonnées constituent alors LA solution du système. Nous sommes ramenés, en fait, à la seconde des trois méthodes.

On conçoit que la même démarche permette de montrer qu'un système est *indéterminé* ou *sans solution*. Quelques exemples "concrets" étudiés avec DERIVE permettront aux élèves de comprendre cela.!

**En pratique, comment faire ?**

Dans la pratique, on n'aura guère envie de calculer sans cesse les coefficients directeurs des droites associées aux deux équations d'un système. Quelles justifications les élèves devront-ils donner ? Nous proposons ceci:

Après avoir expliqué le problème sur quelques exemples, on pourra PRATIQUEMENT se contenter du critère suivant:

- lorsqu'on rencontre, au cours de la résolution d'un système, une équation du genre  $0x + 0y = 0$  c'est que le système est *indéterminé*;
- si on obtient une équation du genre  $0x + 0y = k$  avec  $k \neq 0$ , c'est qu'il n'y a *aucune solution*;
- dans tous les autres cas, la solution calculée est unique.

## **V. OBSERVATIONS AU LYCEE**

Les quatre observations dont nous rendons compte ici ont été réalisées, comme nous l'avons précisé dans l'introduction de cette partie, dans quatre classes différentes, deux classes de Première et deux classes de Terminale. Deux autres observations ont été réalisées à ce niveau : l'une en classe de seconde, analysée de façon détaillée dans le rapport intermédiaire, l'autre, dans la classe de Première déjà citée, concernant l'étude de fonctions polynômes. Les données que nous avons recueillies sur cette dernière n'étant pas suffisantes pour permettre une analyse comparable à celle effectuée pour les autres observations, nous ne l'avons pas intégrée à ce rapport.

Les thèmes concernés sont les suivants :

- la factorisation des polynômes,
- la recherche de fonctions satisfaisant des contraintes données,
- la trigonométrie.

Les séances observées sont cette fois de durée variable, de une heure pour la première à quatre heures pour la dernière. Il faut souligner également que les élèves de la classe de Première et ceux d'une des classes de Terminale disposaient d'ordinateurs de poche (quadernos).

Nous reprenons pour présenter ces observations l'organisation utilisée dans la partie précédente.

### **V.1 FACTORISATION DE POLYNÔMES**

#### **CONTEXTE DE L'OBSERVATION**

Cette séance a été observée le 14 janvier 1994, dans la classe de Première S. Les élèves disposaient chacun d'un micro-ordinateur quaderno avec DERIVE depuis le mois de décembre et ce dernier était utilisé couramment en classe. La séance est une séance de recherche qui fait suite à l'enseignement sur les polynômes. Elle avait déjà été expérimentée par un autre enseignant du groupe Calcul Formel de la DITEN, cette expérimentation étant relatée dans la brochure produite par le groupe (Hirlimann, 1994).

#### **PRÉSENTATION DE L'ACTIVITÉ PROPOSÉE**

Il s'agit pour les élèves de trouver des factorisations du polynôme :  $X^n-1$ , pour  $n$  entier supérieur à 1. Ils travaillent par binômes et chaque groupe doit présenter les résultats obtenus sous forme de «présumés-théorèmes». L'enseignant précise qu'ils ne doivent pas se limiter à la présentation des résultats qu'ils savent démontrer et que tous les documents sont autorisés. Il demande aussi de commencer la séance par cinq minutes de recherche individuelle. Une séance de bilan collectif est prévue. Elle devrait conduire notamment à donner le statut de théorèmes du cours à un certain nombre de conjectures produites par les élèves.

#### **ANALYSE A PRIORI EFFECTUÉE PAR L'ENSEIGNANT**

Objectifs :

Les objectifs de cette séance sont les suivants :

- permettre un réinvestissement des connaissances construites sur les polynômes dans une situation de recherche non guidée, complexe,
- générer des questions qui ne seront sans doute pas résolues pendant la recherche mais sur lesquelles on espère voir les élèves continuer à travailler, hors enseignement officiel, en profitant de la disponibilité permanente de DERIVE,
- permettre aussi aux élèves à l'occasion de cette recherche de s'approprier des heuristiques variées.

#### Intérêt supposé de DERIVE :

L'enseignant voit un double intérêt à l'utilisation de DERIVE dans cette situation :

- à un premier niveau, en permettant d'obtenir rapidement de nombreux exemples de factorisations pour des valeurs variées de  $n$ , DERIVE peut aider à faire apparaître des régularités de formes et faciliter le travail de généralisation demandé,
- à un second niveau, l'enseignant estime que l'utilisation de DERIVE, dans cette situation de recherche très ouverte, doit permettre d'engager un travail sur les méthodes de résolution de problèmes.

L'enseignant pense également que certains élèves, comme dans l'expérimentation précédente de cette situation, sortiront du champ des seuls exposants entiers, par exemple en voulant généraliser à  $n$  quelconque la factorisation :  $X^n - 1 = (X^{n/2} - 1)(X^{n/2} + 1)$ . L'utilisation de DERIVE comme boîte noire, dans les cadres algébrique et graphique pourrait alors aider à poser la question du sens à donner à des puissances fractionnaires de  $X$  et engager un autre processus de généralisation.

#### Connaissances DERIVE nécessaires :

Il s'agit essentiellement des commandes algébriques usuelles que l'on suppose familières à ces élèves qui disposent de DERIVE en permanence depuis un mois ainsi que des commandes de tracé graphique 2D déjà utilisées à plusieurs reprises, si les élèves décident de changer de cadre.

#### Comportements, difficultés attendus :

Le problème posé est volontairement très ouvert. Selon l'enseignant, la proximité du cours sur les fonctions polynômes devrait faciliter la dévolution du problème et faire émerger la factorisation par  $X-1$ . En revanche, les dernières séances ont porté sur les limites (problèmes de définition et de recherche, avec interaction des cadres numériques et graphiques). Elles ne se situent donc pas en continuité directe avec le travail sur les polynômes et les élèves devront s'en détacher pour mener une recherche efficace.

Selon l'enseignant, les élèves pourraient découvrir les factorisations suivantes :

- $X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + 1)$
- $X^n - 1 = (X^2 - 1)(X^{n-2} + X^{n-4} + \dots + X^2 + 1)$ , pour  $n$  pair
- $X^n - 1 = (X^{n/2} - 1)(X^{n/2} + 1)$ , pour  $n$  pair

et pour  $n$  impair :

- $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$  puis  $X^{3p} - 1 = (X^p - 1)(X^{2p} + X^p + 1)$

puis chercher des résultats analogues pour les multiples de 5, 7, 9 ....

Enfin la question déjà évoquée de la généralisation de la troisième formule à n impair pourrait conduire à des questions comme : quel sens donner à  $X^{5/2}$ ,  $X^{5/3}$  ... ?

Plusieurs relances sont prévues par l'enseignant, en cas de blocage de la recherche à un moment ou à un autre : «demander la forme du second facteur, proposer de distinguer les cas n pair et n impair, demander de chercher une factorisation avec des facteurs de degrés le plus proche possible l'un de l'autre.»

S'il pense que la séance devrait bien se passer et aboutir à d'intéressantes conjectures, l'enseignant s'interroge sur l'utilisation réelle que les élèves feront de DERIVE au cours de la recherche, sur la façon dont s'articulera le travail avec DERIVE et le travail P/C. Il se demande également si la familiarité acquise avec le logiciel, vu sa disponibilité permanente, va avoir une influence sur la recherche, en permettant de mieux cerner ses possibilités mathématiques.

### EXEMPLES DE DÉROULEMENT

#### Groupe I :

Il s'agit de deux filles que nous désignerons par M. et R. Elles collaborent activement.

14h10 :

Début de la séance. Le professeur présente la séance et le travail demandé.

14h15 :

R. feuillette son cours sur les polynômes. M. écrit l'énoncé du problème puis lance DERIVE. Elle coupe l'écran en deux fenêtres : une fenêtre algébrique et une fenêtre graphique, comme elle l'a fait lors des séances précédentes sur les limites. Dans la fenêtre d'algèbre, elle entre le polynôme  $x^2-1$  et le fait factoriser, obtenant :  $(x-1)(x+1)$ , puis le polynôme  $x^3-1$ . La factorisation par défaut choisie lui donne  $(x-1)(x^2+x+1)$ . Elle demande alors la factorisation de cette expression et réobtient la même expression.

R. lance à son tour DERIVE mais sans partager l'écran, puis se lance dans l'exploration systématique des factorisations de  $x^n-1$ , à partir de  $n=3$ . Elle obtient ainsi les factorisations :

- $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$
- $x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$
- $x^5-1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ .

M., après avoir souligné le titre sur sa feuille, regarde ce que fait R. et elles se mettent à travailler ensemble, chacune devant son écran, M. écrivant au fur et à mesure les résultats obtenus sur son cahier.

14h20 :

R. n'est pas satisfaite de la factorisation obtenue pour  $x^5-1$  et propose de demander la factorisation de cette factorisation. M. lui fait alors remarquer que dans toutes les expressions, il y a le facteur  $(x-1)$ .

Le professeur passe et elles lui demandent si c'est toujours «x exposant quelque chose moins 1» qu'il faut considérer. Il confirme et s'en va.

R., reprenant l'exploration systématique, fait alors factoriser  $x^6-1$ , obtenant :

- $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ .

Elle montre les deux premiers facteurs à M. qui fait le rapprochement avec le début de la factorisation de  $x^4-1$ .

M. reprend à son tour DERIVE et fait factoriser  $x^5-1$  en choisissant cette fois l'option «Radical». Elle obtient :

- $(x-1)[x^2+x(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})+1][x^2+x(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})+1]$ .

Elle montre le résultat obtenu à R. en lui disant qu'il est trop compliqué et décide de repasser à l'option «Rationnel». Elle fait ensuite à son tour factoriser  $x^6-1$ , remarquant que la machine met cette fois-ci un peu plus de temps.

R., pendant ce temps, a fait factoriser  $3x^5-1$  « pour voir ce que ça donne », deux fois, en ne changeant pas d'option, sans rien obtenir.

14h25 :

Elles repassent toutes deux en P/C. M. note la factorisation de  $x^6-1$  puis elles regardent le cahier de M. Elles repèrent qu'il y a toujours un facteur  $(x-1)$  et lorsque n est pair, un facteur  $(x+1)$ , mais elles n'arrivent pas à déduire de ces régularités un présumé-théorème comme demandé. Elles décident de continuer l'exploration.

M. constate alors que sa machine est bloquée. Elle appuie sur diverses touches sans succès, pour essayer de la débloquer.

Le professeur passe à ce moment là. M. ne signale pas le blocage de la machine et R. lui demande : «x, c'est toujours 1 ?». Devant l'incompréhension de l'enseignant, elle montre ses essais avec  $3x^5-1$ . Il réalise alors qu'elle veut parler du coefficient de  $x^n$  et confirme que l'on se place bien dans le cas où le coefficient est égal à 1. R. conclut alors : «Sinon, sans doute ce ne serait pas possible», interprétant ainsi, nous pensons, le fait qu'elle n'ait rien obtenu lors de ses essais.

M. demande s'il faut «chercher une généralité». Le professeur confirme qu'il faut essayer de trouver un résultat assez général puis s'en va.

R. propose alors d'essayer  $x^8-1$ . M., qui a toujours sa machine bloquée, l'éteint, ouvre le boîtier de piles, bouge les piles, referme et relance la machine qui redémarre puis DERIVE.

Pendant ce temps, R. a factorisé  $x^8-1$  et  $x^9-1$ , obtenant :

- $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
- $(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$ .

Elle fait remarquer à M. que la factorisation de  $x^9-1$  débute comme celle de  $x^3-1$  puis décide d'essayer  $x^{10}-1$ . M. estime «qu'elles tournent autour du pot» mais essaye elle aussi, s'attendant à ce que la machine fournisse la factorisation de  $x^5-1$  plus d'autres termes. Elles obtiennent :

- $(x-1)(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

ce qui, a priori, confirme la conjecture faite mais sont alors frappées par l'alternance de signes du troisième facteur. Elles reviennent aux factorisations précédentes pour voir si le même phénomène s'est déjà produit et repèrent alors que l'alternance de signes est aussi présente dans la factorisation de  $x^6-1$ . Elles essaient de formuler cette régularité sous forme de règle, en cherchant un rapport entre les deux cas, puis concluent que l'on change de signe quand on passe du simple au double.

Elles ne cherchent pas vérifier plus avant cette conjecture invalidée par le passage de 4 à 8 par exemple et M. propose de séparer les exposants pairs des exposants impairs. Elle fait remarquer que les impairs, on a « $x-1$  puis quelque chose de degré -1 et ensuite toujours positif». M. et R. vérifient sur l'écran de R. que ça marche bien pour  $x^9-1$ , en additionnant les degrés des facteurs autres que  $x-1$  et M. propose de l'écrire.

14h35 :

En fait, elles décident de commencer à écrire un présumé-théorème pour les entiers pairs. M. le formule ainsi : «Lorsque  $n$  est pair, on a une fonction de la forme  $f(x)=(x-1)(x+1)$  ensuite la moitié» (fonction est dit à la place de factorisation comme dans le titre de la séance qu'elle a recopié sur sa feuille). Elle décide ensuite de vérifier pour 6 et s'aperçoit que ça ne marche pas. R. rectifie aussitôt : «Si, ça marche, 6-2, c'est 4 et on divise par 2, ça fait 2 et c'est bon» (elle montre pour appuyer son raisonnement les termes de plus haut degré de chaque facteur). Elle vérifie ensuite sur sa feuille pour  $x^4-1$ , M. propose de le faire aussi pour  $x^{10}-1$ . Elles sont alors satisfaites et aboutissent à la règle :

«Pour  $n$  pair :  $(x-1)(x+1)$  ça fait toujours 2 et les deux autres c'est la division par 2 de ce qui reste».

M. propose de tester la règle avec  $x^{12}-1$  et elles le font chacune de leur côté, obtenant :

- $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$ .

Elles sont déçues car leur règle ne marche plus alors qu'elle marchait jusqu'à 10 (elle ne marchait pas non plus pour  $x^4-1$  mais elles ne s'en sont pas aperçu). M. essaie alors  $x^{14}-1$  :

- $(x-1)(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

et est un peu étonnée car «ça redevient normal». Elle fait aussi remarquer à R. que, lorsque ça marche, il y a toujours des « $x$  truc plus ça descend plus  $x$  plus 1». Elles ne savent trop quoi faire de ce qu'elles ont trouvé, se retournent pour voir ce que font les élèves du groupe de derrière mais ne peuvent rien voir à cause des écrans. Elles se décident alors à appeler le professeur.

Le professeur arrive et M. essaie de lui expliquer ce qu'elles ont trouvé pour  $n$  pair : «ça fait :

$(x-1)(x+1)$ , quand on développe, ça fait  $x^2$  ». L'enseignant, qui n'a pas de raison de savoir qu'elle raisonne sur les degrés, s'étonne. M. explique alors qu'elle ne regarde que le degré en montrant les deux facteurs  $x$ , puis explique le partage en deux des termes restants, tout en

signalant qu'elles ont trouvé des exceptions. Ses explications sont très sibyllines et le professeur demande de préciser. M. reprend, toujours très elliptique, en montrant les termes de plus haut degré, calculant sur les degrés sans dire clairement ce dont elle parle. Le professeur se fait réexpliquer une fois de plus puis reformule : «tu veux dire que quand on a une puissance paire on va pouvoir mettre  $(x-1)(x+1)$  en facteur et qu'ensuite on a des facteurs, des termes en  $x^2...$ ». M. réplique, en montrant le cas  $n=14$  que ce n'est pas nécessairement en  $x^2$ . Le professeur leur demande alors d'essayer d'écrire ce qu'elles ont dit et de voir le domaine de validité, puis s'en va.

14h50 :

R. fait factoriser par DERIVE :  $x^{16}-1$ , obtenant :  $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$ . Elle regarde l'expression, perplexe, puis repère que :  $2+4+8=14$ . M. regarde, trouve cela normal puis commence à écrire sur la feuille de bilan qui, pour l'instant ne contient que les exemples de factorisation de  $x^2-1$  à  $x^6-1$  :

$$n=2 \quad f(x)=(x-1)(x+1) \\ x^2$$

$$n=6 \quad f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) \\ x^2 \quad x^4 \\ x^6$$

R. proteste devant les accolades car le produit ne concerne que les termes de plus haut degré.

M. rajoute alors  $x^2 = \text{degré}$ , puis elle continue :

$$\langle x^{6-2} \rightarrow x^4 \rightarrow x^4 : 2 \rightarrow 2 \text{ parenthèses de degré } x^2 \rangle.$$

R. fait remplacer « : » par « / » et « parenthèse » par « facteur », puis elles décident d'écrire aussi la factorisation pour  $n=14$  qui marche de la même façon.

Elle l'écrit donc puis complète par :

$$\langle x^{14-2} \rightarrow x^{12} \rightarrow x^{12} : 2 \rightarrow 2 \text{ facteurs de degré } 6 \rangle.$$

R. contrôle ce qui est écrit.

14h55 :

M. dit que ça ne marche pas pour 12 et R. qui remonte sur son écran, que ça ne marche pas non plus pour 8. M. conclut qu'il doit s'agir de cas particuliers. Finalement elles écrivent :

«En fait, d'après tous les exemples pris, on a affaire à des cas particuliers mais une chose est certaine, c'est qu'ils commencent tous par  $(x-1)(x+1)$  pour  $n$  pair.»

Elles décident ensuite de faire vite les impairs. M., après avoir regardé sa feuille écrit :

«Lorsque  $n$  est impair, la fonction (R. fait corriger en la factorisation) est de la forme :

$$(x-1)(x^{n-1}+...+x+1) \rangle$$

Elle se demande ce que ça donnait pour 9. R., en remontant les écrans, trouve la factorisation correspondante et constate que ça ne marche pas. M; rajoute alors sur la feuille :

«ne marche pas dans tous les cas

ex :  $f(x)=x^9-1$

$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$

multiples»

C'est la fin de la séance.

#### Groupe 2 :

C'est un groupe de deux garçons que nous noterons respectivement A. et B. Ils sont filmés pendant cette séance.

14h15 :

Ils regardent l'énoncé et le recopient sur leur feuille. A. ouvre DERIVE et commence à faire des essais, factorisant successivement :  $x^2-1$ ,  $x^3-1$ ,  $x^4-1$  et  $x^5-1$  (factorisation rationnelle). B. regarde ce que fait A. et son écran. A. écrit ces factorisations sur sa feuille puis ajoute :

- $x^n-1 = (x-1)(x^{n-1} + \dots)$

B. recopie cette formule générale que A. entre sous DERIVE telle que.

L'enseignant passe et demande : «Est-ce la seule factorisation, peut-on en trouver d'autres ?» puis précise : «Il peut y en avoir plusieurs.»

A. et B. reviennent sur les différentes écritures obtenues sur l'écran.

14h25 :

A. envisage de distinguer les deux cas : n pair et n impair. Il décide de faire factoriser par DERIVE :  $x^9-1$ . Pendant ce temps, B. écrit extensivement ce que donne la formule générale trouvée dans ce cas :  $(x-1)(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ .

A. recopie la factorisation obtenue par DERIVE, B. aussi puis il entreprend de vérifier en P/C que la factorisation donnée par DERIVE est compatible avec celle dérivée de la formule générale.

Pendant ce temps A. fait factoriser  $x^{13}-1$  et retrouve la formule générale, puis il revient à  $n=4$  en essayant cette fois l'option de factorisation : «Radical». La factorisation est la même et il fait alors un essai avec  $x^7-1$ , obtenant :

- $x^7-1 = (x-1)[2x\sin\frac{\pi}{14}+x^2+1][2x\cos\frac{\pi}{7}+x^2+1][-2x\sin\frac{3\pi}{14}+x^2+1]$

Cette expression les laisse perplexes et ils reviennent à l'option «Rationnel» pour factoriser :

$x^{12}-1$ . Ils notent tous les deux la factorisation obtenue.

14h32 :

Le professeur passe et leur suggère de chercher des factorisations avec des facteurs de degrés proches : «Essayez de factoriser en deux polynômes de degrés proches. Avec  $x^7-1$ , vous avez... Mmmh. ; j'aimerais avoir un certain équilibre au niveau des polynômes facteurs.»

B. se répète la consigne : «polynômes de même degré». A. fait divers essais de division de polynômes avec DERIVE :

$$\frac{x^2-1}{x^2}$$

$$\frac{x^3-1}{x^2+1}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x+1}$$

mais la simplification ne donne rien de particulier.

Il revient alors aux factorisations et vérifie avec DERIVE que :  $x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1)$ .

Pendant ce temps, B. divise à la main  $x^2+x+1$  par  $x+1$  et obtient  $x$  comme quotient et 1 comme reste.

A. obtient, sans que l'on sache comment :  $(x^3+2x^2+2x+1)(x^3-2x^2+2x-1)$  comme factorisation de  $x^6-1$ . Il l'écrit sur sa feuille et B. aussi.

A. vérifie ensuite que :  $x^8-1 = (x^4-1)(x^4+1)$

Il recopie puis écrit dessous la formule générale :

- $x^{2p}-1 = (x^{2p/2}-1)(x^{2p/2}+1)$ .

14h35 :

Le professeur arrive et dit : «Il faudrait trouver différents types de factorisations...»

A. propose : «Si l'exposant est pair...»

L'enseignant reprend : «Il existe différents cas : exposant pair, impair...»

A. rajoute : «Si l'exposant est une puissance de deux ?»

L'enseignant demande alors de préciser le vocabulaire : puissances, multiples...

Par analogie avec l'égalité écrite pour  $x^8-1$ , ils vérifient successivement avec DERIVE que :  $x^{16}-1 = (x^8-1)(x^8+1)$  puis que :  $x^{24}-1 = (x^{12}-1)(x^{12}+1)$ .

A. satisfait écrit alors :  $x^{2k}-1 = (x^k-1)(x^k+1)$ , puis comme B. lui signale que ça ne marche pas pour le cas impair, il rajoute :

$$\Leftrightarrow x^n-1 = (x^{n/2}-1)(x^{n/2}+1)$$

et souligne en rouge cette dernière relation.

14h45 :

A. revient à DERIVE et fait factoriser  $x^7-1$ , obtenant la factorisation canonique. Il veut refactoriser le second terme, mais n'obtient rien de plus. Après avoir réfléchi, il remonte alors à la première expression trouvée, avec l'option de factorisation «Radical», sans trouver comment l'exploiter. B., pendant ce temps, repasse en P/C et développe :  $x^3-1$  en :

- $x(x-1)(x+1+\frac{1}{x})$

puis s'arrête pour suivre ce que fait A.

A. entre sous DERIVE de nouveau  $x^7-1$ , puis  $x^{2,5}x^{2,5}$ , fait simplifier cette expression et obtient :  $x^5$ . Très excité par le résultat obtenu, il appelle l'enseignant et lui demande ce qu'est :  $x^{2,5}$ . L'enseignant explique que DERIVE calcule en utilisant la formule  $x^n x^p = x^{n+p}$ , leur dit d'essayer de regarder, puis repart.

B. écrit en marge de sa feuille :  $x.x.x/2$  A. n'est pas d'accord et écrit, de son côté :  $x^2.x^{1/2}$ , puis, dessous : 4 et  $\sqrt{2}$  (il a sans doute remplacé mentalement  $x$  par 2). Il ajoute ensuite :  $\sqrt{x}$  à côté de  $x^{1/2}$  et dit :

« $x^{1/2}$  c'est  $\sqrt{x}$  si on réfléchit bien».

Pour vérifier, il fait calculer à DERIVE :  $4^{2,5}$  et obtient 32. C'est la fin de la séance.

#### ANALYSE A POSTERIORI

Les deux déroulements décrits montrent clairement un phénomène important : le fait que, dans l'environnement DERIVE, l'activité proposée est susceptible de deux interprétations distinctes :

- produire des présumés-théorèmes sur les factorisations produites par DERIVE,
- produire des présumés-théorèmes de façon générale, sans s'assujettir aux productions de DERIVE.

La grande majorité des groupes semble-t-il, au vu des productions écrites, se situe dans la deuxième interprétation, sans que l'on puisse savoir exactement comment ont pesé sur l'activité du groupe les factorisations fournies par DERIVE. Le groupe 1 observé est, en revanche, celui qui semble le plus assujetti à l'environnement DERIVE.

Si l'on revient à l'analyse a priori et aux prévisions effectuées, il apparaît de manière claire que ces prévisions ne prennent en compte, ni cette possibilité de double interprétation, ni même le fait que les conjectures attendues ne correspondent que rarement à des factorisations directement accessibles par l'une des options de la commande Factorisation de DERIVE et que donc, leur production va nécessiter une distanciation des factorisations DERIVE et un travail mathématique spécifique. Tout se passe un peu comme si l'environnement DERIVE n'introduisait pas de spécificité par rapport au savoir en jeu.

De fait, cinq possibilités de factorisations sont offertes par DERIVE : trivial, sans carré, rationnel, radical et complexe, celle par défaut étant la factorisation rationnelle<sup>15</sup>. On peut

---

<sup>15</sup>La factorisation triviale, dans le cas de polynômes qui nous intéresse ici réalise les mises en facteurs de nombres et de puissances des variables (ex :  $2x^3-12x^2+18x \rightarrow 2x(x^2-6x+9)$ ) ; la factorisation "sans carrés" complète la factorisation triviale et met en facteur les puissances de

penser que les élèves vont très vite se limiter, quelle que soit l'interprétation donnée à la tâche, comme on le voit ici, aux factorisations rationnelles, les plus riches et parlantes à la fois, à leur niveau.

Or ces factorisations, comme nous l'avons indiqué, sont rarement celles correspondant aux conjectures attendues :

- la factorisation canonique par  $(x-1)$  n'est obtenue que pour  $n$  premier,
- la factorisation en trois termes pour  $n$  pair n'est obtenue que pour  $n=4$  et sous une forme, vue la faible valeur de  $n$  :  $(x-1)(x+1)(x^2+1)$  qui ne rend pas évidente la généralisation,
- la factorisation en  $(x^{n/2}-1)(x^{n/2}+1)$  pour  $n$  pair, n'est obtenue que pour  $n=2$ , donc sous une forme elle aussi peu propice à la généralisation.

La production de ces conjectures suppose donc, si l'élève veut exploiter l'environnement DERIVE, un travail spécifique à partir des productions DERIVE. Ce travail peut consister par exemple à combiner des facteurs pour effectuer des produits partiels, mentalement, par écrit ou en utilisant DERIVE (il faut souligner à ce sujet que la représentation interne des expressions algébriques sous DERIVE en arborescence ne permet pas de sélectionner librement plusieurs facteurs contigus ou non pour effectuer ces produits, ce qui rend techniquement relativement coûteuse cette stratégie). On peut aussi faire effectuer par DERIVE les divisions correspondantes et demander la simplification du résultat obtenu. Quel que soit le mode de fonctionnement choisi, ceci nous semble conduire à un travail sur les expressions algébriques et polynômes mathématiquement non négligeable, différent de celui qu'induirait le travail sur le même problème dans un environnement usuel.

Même si nous disposons, via les productions écrites de renseignements limités sur le travail réel des différents groupes, l'analyse des conjectures produites laisse penser que ce travail a bien eu lieu. En effet, presque tous les groupes ont formulé le théorème correspondant à la factorisation par  $(x-1)$ , en le présentant vrai pour tout  $n$  ou seulement pour les  $n$  impairs. En général l'écriture générale associée est développée sous la forme :  $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)$ , le nombre de termes explicités pouvant varier au début et à la fin de l'expression. On note une erreur (fin en  $x_0+1$ ) et une écriture correcte en  $\Sigma$ .

La formule est, dans un seul cas, justifiée en référence au fait que 1 est racine du polynôme  $x^n-1$ . En général elle est soit illustrée par des exemples où la factorisation DERIVE est justement la factorisation canonique, soit instanciée sur quelques cas sans que l'on sache comment les résultats correspondants ont été obtenus. Parfois, la factorisation DERIVE est donnée sur quelques exemples à partir de  $n=2$  puis égalée à la factorisation canonique.

Plusieurs groupes ont aussi formulé des théorèmes concernant le cas où  $n$  est pair :

- la formule  $(x-1)(x+1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)$  est proposée par un groupe à partir visiblement du cas  $n=6$
- la formule :  $x^{2n}-1=(x^n-1)(x^n+1)$  est proposée par trois groupes,

---

sommes ou les produits des sommes de puissances différentes (ex :  $x^4+2x^3-3x^2-8x-4 \rightarrow (x+1)^2(x^2-4)$  ; la factorisation radicale ajoute à la factorisation rationnelle la possibilité d'introduire des coefficients irrationnels (ex :  $x^2-2 \rightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ ).

- la formule  $x^n-1=(x-1)(x+1)(x^{n-2}+x^{n-4}+\dots+1)$  est proposée par deux groupes, cinq autres en proposant des variantes erronées (terminaison en  $x+1$  ou  $x_0+1$ , présence de tous les exposants à partir de  $n-1$  ou  $n-2$ ),
- deux groupes enfin, dont le groupe 1 observé, se bornent à signaler la factorisation possible par  $(x-1)(x+1)$  ou  $(x^2-1)$ .

Là encore, les justifications se limitent à des exemples dont on ne sait pas toujours comment ils ont été produits, lorsqu'ils ne correspondent pas aux factorisations DERIVE et sont donnés sans explications.

On ne trouve pas en revanche de formulation de présumés-théorèmes concernant d'autres catégories comme nombres premiers, puissances de 2, multiples de 3.....

Pour les élèves qui interprètent la tâche comme «produire des conjectures sur les factorisations données par DERIVE», il est plus difficile encore d'avancer et dépasser des conjectures limitées comme : on peut toujours factoriser par  $(x-1)$  et, pour  $n$  pair, par  $(x+1)$ , conjectures qui; on le voit pour le groupe 1 observé, sont considérées par les élèves comme «inabouties». Il est hors de question en effet de les voir reconstruire la théorie mathématique associée à ces factorisations qui est celle des polynômes cyclotomiques<sup>16</sup>, ni retrouver l'algorithme implémenté sous DERIVE pour obtenir cette factorisation qui passe, lui, par des factorisations intermédiaires dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (cf. la brochure DITEN citée plus haut, p.33-37).

Pour ces élèves de première, DERIVE ne peut fonctionner que comme une boîte noire productrice de résultats divers dans lesquels il s'agit de repérer des régularités et ce repérage n'a rien d'évident, les conjectures tentantes étant, de façon décourageante, démolies dès qu'on les teste un peu sérieusement, comme le montre le travail du groupe 1.

L'identification de régularités résistantes suppose d'abord l'abandon de la recherche d'une forme générale, y compris pour les catégories :  $n$  pair et  $n$  impair, ce qui n'est pas nécessairement considéré comme légitime par les élèves, vu la formulation du problème et le niveau de généralité qu'ils peuvent attribuer à la notion de présumé-théorème, du fait de leurs expériences antérieures. Si ce pas est franchi, l'identification suppose aussi l'accessibilité de catégories de classification des nombres basées sur des propriétés numériques comme celles de divisibilité que les élèves actuels sont peu habitués à utiliser. En effet, par exemple :

- la factorisation canonique par  $(x-1)$  est la factorisation rationnelle si et seulement si  $n$  est un nombre premier,
- la factorisation en 4 facteurs, pour  $n$  pair :

$$(x-1)(x+1)(x^{n/2-1}-x^{n/2-2}+\dots+1)(x^{n/2-1}+x^{n/2-2}+\dots+1),$$

---

<sup>16</sup>si  $n>1$ , et si l'on désigne par  $P_n$  l'ensemble des racines primitives de l'unité (c'est à dire l'ensemble des  $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$  tels que  $k$  et  $n$  soient premiers entre eux), le polynôme cyclotomique d'ordre  $n$  :  $\Phi_n(X)$  est défini comme le produit des polynômes  $(X-\xi)$  pour  $\xi$  dans  $P_n$ .  $\Phi_n(X)$  est dans  $\mathbb{Z}[X]$  et irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$  et  $X^n-1$  est le produit des  $\Phi_d(X)$  pour  $d|n$ . D'où la factorisation rationnelle maximale de  $X^n-1$ , qui est bien celle donnée par DERIVE.

qui est en germe dans le travail du groupe 1, est la factorisation rationnelle, si et seulement si  $n/2$  est premier. Il est donc normal que les élèves repèrent cette régularité pour  $n=6, 10, 14$ , mais qu'elle soit détruite par le test sur  $n=12$ ,

- la factorisation rationnelle pour  $n$  de la forme  $2^k$  est de la forme :

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)\dots(x^{k+1}+1).$$

Soulignons que les élèves pourraient être tentés également, bien qu'on ne l'observe pas ici, par une conjecture sur les valeurs possibles des coefficients et postuler par exemple qu'ils ne peuvent prendre que les valeurs : 0, 1 et -1. Cette conjecture n'est pas vraie mais il n'y a pratiquement aucune chance que les élèves s'en aperçoivent puisqu'ils n'ont accès qu'à des validations pragmatiques et que le premier contre-exemple correspond à  $n=105$ .

Bien sûr, a posteriori, il semble raisonnable de penser que l'on obtiendrait un fonctionnement plus satisfaisant de la situation en ne laissant pas vivre au début de la recherche cette interprétation de la tâche qui, même si elle induit un travail réel, est peu gratifiante pour les élèves. En revanche, après une synthèse liée au travail effectué avec la première interprétation, il pourrait être tout à fait intéressant de relancer la recherche en posant le problème de la prévision des productions DERIVE. Il ne s'agirait pas là d'établir des conjectures mais plutôt, dans une sorte de travail de modélisation où les productions de DERIVE tiendraient lieu de «réel», de créer des modèles sous forme de techniques de factorisation qui permettent d'engendrer des factorisations DERIVE. On peut vérifier, en se référant à l'annexe page 161, que pour la quasi-totalité des factorisations jusqu'à  $n=30$  par exemple, c'est une modélisation tout à fait réalisable en ne mettant en jeu qu'un petit nombre de techniques et règles.

Nous voudrions souligner à cette occasion que le problème de recherche posé ici nous semble intéressant dans la mesure où il permet effectivement, avec l'aide de DERIVE, d'engager les élèves dans une activité de recherche productive, à leur niveau. La productivité de cette activité de recherche ne se mesure pas uniquement à l'aune des conjectures trouvées. Pour nous, elle se situe plus encore à la fois dans la mise en place d'une attitude de recherche avec toutes ses caractéristiques, et dans le type de travail mathématique engagé par les élèves dans cette activité, à la fois liée à la progression de l'enseignement dans la classe, permettant son réinvestissement et en même temps permettant de développer un mode d'appréhension des polynômes important mais peu nécessité par les activités usuelles de ce niveau. Ici encore, de plus, il nous semble essentiel de ne pas en rester au niveau de la découverte mais de prolonger la séance, comme cela a été fait dans l'expérimentation menée, par un travail de retour sur la phase de découverte assistée par DERIVE, visant à obtenir des validations qui s'affranchissent de la dépendance de DERIVE (l'observation montre bien, comme l'on pouvait s'y attendre que ce besoin de justification n'émerge pas spontanément pendant la phase de découverte et nécessite donc une véritable dévolution, du fait de la rupture qu'il introduit). Même si ce travail est resté ici, faute de temps, relativement limité, l'expérience menée tend à montrer qu'il est tout à fait négociable (l'équivalence d'expressions algébriques de formes très différentes n'allant pas encore pour ces élèves de soi), à leur portée et que l'engagement du travail est facilité par la confrontation des différentes conjectures, certaines correctes, d'autres erronées<sup>17</sup>.

---

<sup>17</sup>Ce qui précède ne signifie pas qu'il faille systématiquement bannir toute activité de recherche qui ne permettrait pas une validation complètement indépendante de DERIVE mais que cette question de la validation doit être sérieusement prise en compte dans le choix des situations et dans les scénarios didactiques élaborés à leur propos.

Tout ceci nous conduit naturellement à un autre point. L'observation menée a été effectuée pendant une séance de classe ordinaire de 1h. Il est clair, et les observations le montrent bien, que cette durée ne permet que d'engager un travail de recherche conséquent. Un problème comme celui-ci, dont justement cette expérimentation pour limitée qu'elle soit, nous a aidé à prendre la mesure, nécessite pour vivre et dépasser le statut d'activité gadget, qu'on lui consacre du temps et ce, même si l'on dispose pour soutenir le travail, d'outils puissants comme DERIVE<sup>18</sup>. Il est clair aussi que le temps effectif d'enseignement n'est pas extensible et que des choix s'imposent. On ne peut donc à la fois multiplier les activités de recherche et donner à chacune un temps suffisant pour la rendre significative et productrice. On ne peut non plus espérer qu'une activité de recherche conséquente soit entièrement intégrée au temps effectif d'enseignement. Il faut trouver les moyens de la faire vivre dans le travail privé des élèves, hors temps scolaire. Ceci pose bien sûr aussi le problème de l'accessibilité des outils nécessaires à la recherche, ici de DERIVE, hors temps d'enseignement officiel, loin d'être résolu à l'heure actuelle.

Dans l'exemple qui précède, DERIVE fonctionne comme une boîte noire dont les stratégies formelles sont inaccessibles mais où cette inaccessibilité en soi ne pose pas de problèmes spécifiques. En effet, les résultats obtenus sont ici fiables, des moyens de validation hors DERIVE sont de plus accessibles aux élèves, il est possible enfin, dans un nombre non négligeable de cas, de retrouver les productions DERIVE par des processus de factorisation élémentaires, à la portée des élèves (bien sûr différents de ceux employés par DERIVE). Ces caractéristiques suffisent pour engager et faire vivre une activité de recherche tout à fait consistante. Il est clair aussi que les méthodes favorisées par cette activité ne sont pas forcément celles qui sont particulièrement visées par l'enseignement à ce niveau, par exemple le théorème assurant que si  $a$  est racine du polynôme  $P(X)$  alors  $P(X)$  est factorisable par  $(X-a)$ . Ce sont, l'observation le montre, des procédures d'identification plus formelles et les calculs associés qui sont majoritairement en jeu ; mais le travail mathématique effectué n'en est pas moins potentiellement intéressant, nous semble-t-il, à ce niveau.

Nous voudrions en conclusion revenir à ce que nous soulignons au début de cette analyse a posteriori : les manques de l'analyse a priori dans l'analyse de l'impact de l'environnement DERIVE sur le savoir et l'activité mathématique en jeu dans la tâche proposée. Il ne faudrait pas, nous semble-t-il voir là un phénomène anecdotique ou un phénomène lié à une quelconque incompétence de l'enseignant qui a réalisé cette analyse. A nos yeux, on est confronté là à la manifestation d'un phénomène didactique crucial : la difficulté que nous avons, du fait des caractéristiques des environnements dans lesquels notre culture mathématique s'est forgée et dans lesquels elle fonctionne principalement, à relativiser le poids des transpositions didactiques dominantes et à accorder l'attention qu'elle mérite à la transposition informatique introduite nécessairement par ce type d'environnement. Même lorsque nous simulons dans le cadre d'une analyse a priori une situation projetée, nous restons prisonniers des normes et habitus qui nous sont les plus familiers, nous établissons des hiérarchies de légitimité entre les productions de l'environnement DERIVE et les productions que nous sommes susceptibles d'obtenir dans un fonctionnement usuel P/C, qui pilotent insidieusement notre utilisation de l'environnement informatique, l'interprétation, l'exploitation que nous faisons des données qu'il

---

<sup>18</sup>On pourra sur ce plan se référer à l'article de G.Aldon à paraître dans la nouvelle brochure du groupe Calcul Formel de la DITEN qui fournit un compte-rendu de l'activité de recherche qui a été organisée en 1ereS en 1994-95 autour de ce même problème de factorisation, suite à cette expérimentation et à son analyse, étalée sur une période de trois mois.

nous fournit. Il nous est de ce fait particulièrement difficile d'anticiper le fonctionnement d'élèves qui n'ont pas subi les mêmes assujettissements que nous, n'ont pas le même vécu mathématique.

## ANNEXE

### **Factorisations rationnelles de $x^n-1$ pour $n$ inférieur à 20 et exemple de dérivation élémentaire d'une factorisation donnée**

|      |                                                                                                                                  |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| n=2  | $(x-1)(x+1)$                                                                                                                     |
| n=3  | $(x-1)(x^2+x+1)$                                                                                                                 |
| n=4  | $(x-1)(x+1)(x^2+1)$                                                                                                              |
| n=5  | $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$                                                                                                         |
| n=6  | $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$                                                                                                   |
| n=7  | $(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$                                                                                                 |
| n=8  | $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$                                                                                                       |
| n=9  | $(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$                                                                                                      |
| n=10 | $(x-1)(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$                                                                                   |
| n=11 | $(x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$                                                                              |
| n=12 | $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$                                                                                 |
| n=13 | $(x-1)(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$                                                                |
| n=14 | $(x-1)(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$                                                                   |
| n=15 | $(x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$                                                                       |
| n=16 | $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$                                                                                                |
| n=17 | $(x-1)(x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$                                    |
| n=18 | $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^6-x^3+1)(x^6+x^3+1)$                                                                             |
| n=19 | $(x-1)(x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$                      |
| n=20 | $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$                                                         |
| n=21 | $(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6+x^5-x^4+x^3-x+1)$                                             |
| n=22 | $(x-1)(x+1)(x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$                             |
| n=24 | $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^4+1)(x^8-x^4+1)$                                                               |
| n=25 | $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)$                                                                             |
| n=26 | $(x-1)(x+1)(x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ |
| n=27 | $(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x^{18}+x^9+1)$                                                                                        |
| n=30 | $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$               |

#### **Exemple d'obtention de factorisation rationnelle par des méthodes élémentaires**

1. Par changement de variable :  $x \rightarrow x^6$  dans la factorisation de  $x^3-1$  :  $x^{18}-1 \rightarrow (x^6-1)(x^{12}+x^6+1)$
2. Par le processus « identité remarquable » :  $x^6-1 \rightarrow (x^3-1)(x^3+1)$
3. Par le processus « standard » :  $(x^3-1) \rightarrow (x-1)(x^2+x+1)$
4. Par changement de variable :  $x \rightarrow -x$ , dans la factorisation ci-dessus :  $(x^3+1) \rightarrow (x+1)(x^2-x+1)$
5. Par le changement de variable :  $x \rightarrow x^3$  dans la factorisation :  $x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$   
 $(x^{12}+x^6+1) \rightarrow (x^6-x^3+1)(x^6+x^3+1)$

## V.2 RECHERCHE DE FONCTIONS SOUS CONTRAINTES

### CONTEXTE DE L'OBSERVATION

Cette séance se situe en fin d'année (31 mai 1994), en Terminale E, à la fin du cours d'analyse (il ne reste plus que les équations différentielles à traiter). Elle concerne la recherche de fonctions satisfaisant des contraintes données. DERIVE a été utilisé dans la courant de l'année cinq fois dans des séances de travaux dirigés et plusieurs fois collectivement. Le dernier TP remonte à 6 semaines et la dernière utilisation collective à la veille. La séance de la veille a été une séance de synthèse portant sur les fonctions usuelles (fonctions polynômes du second degré, homographiques et exponentielles), ainsi que sur les fonctions conjointes associées. L'interprétation géométrique de modifications de paramètres a donc été rappelée. Cette séance a aussi donné lieu à un rappel sur les fonctions composées et, à cette occasion, on a notamment étudié le sens de variation et représenté les fonctions :

$x \rightarrow \exp(x^2)$  et  $x \rightarrow \exp(-x^2)$ . Ce travail était en partie destiné à préparer la séance observée.

Les élèves travaillent en demi-groupes : 1h15 pour le premier et presque 1h30 pour le second. Ce travail en demi-groupe est immédiatement suivi d'une synthèse collective.

### PRÉSENTATION DE L'ACTIVITÉ PROPOSÉE

Le problème posé consiste à déterminer des fonctions  $f$  vérifiant les conditions suivantes :

- $f$  dérivable sur  $[0,6]$
- $f(0) = 4$
- la partie de la courbe représentative de  $f$  correspondant à l'intervalle  $[0,6]$  doit être située dans la zone :  $[0,0.4] \times [0,4] \cup [0,6] \times [0,0.4]$  donnée graphiquement par son contour.

Lorsque de telles fonctions sont trouvées, on demande aux élèves de chercher des fonctions qui, de plus, satisfont la condition :  $f'(0) = 0$ .

Un fichier contenant les coordonnées des points définissant la zone a été réalisé par l'enseignante et doit être chargé par les élèves en début de séance. Il leur est demandé de partager l'écran verticalement en deux fenêtres l'une algébrique, l'autre graphique.

La fiche de travail distribuée (cf. annexe page 207) contient les consignes, le dessin de la zone ainsi que divers rappels concernant l'utilisation de DERIVE (rôle des touches F1, F3, F4 et F6, obtention de l'exponentielle par la commande ALT-e, commandes : cHoix Substitue, Option Etat Continu et fonction VECTEUR pour obtenir le tracé d'une famille de fonctions dépendant d'un paramètre.

### ANALYSE A PRIORI EFFECTUÉE PAR L'ENSEIGNANTE

Objectifs :

Il s'agit d'une séance visant à mobiliser et coordonner, dans la résolution d'un problème proposé de façon ouverte, des connaissances diverses sur les fonctions relevant à la fois des cadres graphique et algébrique et de leur articulation : «traduire algébriquement des informations à lire sur un graphique, choisir les fonctions à utiliser en fonction de critères pertinents, réinvestir les propriétés (sens de variation, asymptotes, allure de la courbe) des

fonctions connues, utiliser les fonctions composées, ne pas utiliser systématiquement la dérivée pour étudier le sens de variation.»

#### Intérêt supposé de DERIVE :

DERIVE, selon l'enseignante, est appelé à jouer plusieurs rôles dans cette séance : aide à l'exploration et à la formulation de conjectures via la possibilité de tracés graphiques, outil de calcul numérique et algébrique via la résolution d'équations et inéquations associées aux contraintes notamment, outil de vérification et de contrôle des résultats.

Son utilisation doit permettre de faire des calculs dans un temps raisonnable. Elle doit permettre aussi aux élèves d'oser essayer des fonctions sans que cela soit coûteux en temps. La possibilité d'utiliser conjointement calcul formel et graphisme est ici un atout, vu le problème posé, et devrait faire de DERIVE un outil plus performant que la calculatrice.

Enfin DERIVE est bien adapté à l'exploitation de la non-unicité des solutions. En effet, il permet de tracer facilement, via la fonction VECTEUR, des familles de fonctions.

#### Connaissances DERIVE nécessaires :

Un certain nombre de connaissances DERIVE sont supposées bien connues : ce qui concerne le calcul algébrique ordinaire, en incluant ici «calcul de dérivées, simplifications, approximations et résolution d'équations», ce qui concerne le partage vertical de l'écran et les tracés graphiques 2D.

L'enseignante a d'autre part rappelé dans la fiche distribuée aux élèves (cf. ci-dessus), le fonctionnement des principales touches et commandes, nécessaires ou utiles et qui pouvaient être moins familières.

Si le besoin s'en fait sentir, elle introduira dans le courant de la séance la fonction SI permettant de définir des fonctions par intervalles.

#### Comportements, difficultés attendus :

L'enseignante s'attend dans cette séance à une bonne activité de la grande majorité des élèves et à une utilisation massive de DERIVE dans la résolution. Selon elle, les élèves devraient commencer par essayer de trouver des fonctions rationnelles et elle a prévu de suggérer l'utilisation de fonctions exponentielles si ce type n'apparaît pas spontanément. Le tracé de la zone devrait inciter à chercher des fonctions décroissantes ayant pour limite 0 à l'infini. Là encore, des interventions dans les groupes pourront être faites pour amener, si besoin, les élèves à élargir leur champ de recherche.

Le principal problème lui semble être celui de la systématisation de la recherche et du contrôle des solutions. L'enseignante ne souhaite pas que les groupes se limitent à une recherche empirique par essais-erreurs, alliée à un contrôle graphique de l'adéquation des fonctions proposées. Elle voudrait que les élèves traduisent algébriquement les contraintes imposées, fassent la distinction entre les contraintes de l'énoncé et celles qu'ils vont imposer mais ne sont pas nécessaires. Elle voudrait obtenir des justifications algébriques de l'adéquation des solutions proposées et, au delà de solutions particulières, des familles de fonctions dépendant d'un paramètre, avec identification de l'ensemble des valeurs du paramètre solution (au moins pour les fonctions classiques monotones, homographiques ou exponentielles). Elle pense que ce ne sera pas facile à obtenir. Elle incitera les groupes à travailler dans ce sens au cours de la

séance et, de toutes façons, prévoit une réorganisation systématique de la recherche a posteriori dans le bilan collectif qui suivra.

### **EXEMPLES DE DÉROULEMENTS**

Nous présenterons pour cette séance qui a donné lieu à diverses observations, six exemples de déroulements. C'est sur ces six déroulements ainsi que sur le fonctionnement de la synthèse collective, également observée, que nous nous baserons pour l'analyse. Pour faciliter la lecture, nous associons à chaque déroulement, une fiche graphique qui donne à voir les principaux tracés effectués par les élèves du groupe à l'ordinateur.

Pour la première séance de travail en groupes, l'enseignante introduit la séance de façon classique, en présentant les consignes, en demandant aux élèves de charger DERIVE et le fichier ZONE, de séparer l'écran verticalement et de passer en tracé continu, puis de régler échelle et centre de la fenêtre de manière à bien voir la zone (on peut par exemple, dans un premier temps, choisir une échelle  $2 \times 2^{19}$  et centrer l'écran au point de coordonnées (3,2) ; c'est ce que conseillera l'enseignante dans les interventions collectives et individuelles qu'elle sera amenée à faire, vu les nombreuses difficultés rencontrées par les élèves).

Vu ces difficultés et la perte de temps qu'elles ont occasionné, avec le deuxième groupe, l'enseignante prendra en charge collectivement toutes ces manipulations au début de la séance. Elle insistera aussi davantage dès cette phase d'introduction sur le fait qu'elle attend une recherche systématique et non une recherche par simple accumulation d'essais/erreurs.

#### **Groupe 1 (séance 1 - Élèves notés J. et F.) :**

Les élèves du groupe 1 commencent par charger le fichier ZONE et ensuite passent près d'un quart d'heure à régler l'échelle et à centrer la zone par une stratégie d'essai/erreur. En écoutant une intervention collective de l'enseignante expliquant le mode de réglage graphique, puis son intervention auprès d'un groupe voisin auquel elle fournit une échelle convenable, ils réussissent à régler l'échelle. Mais ils n'arrivent, à la fin de ce premier quart d'heure, à centrer convenablement la zone que grâce à l'intervention de l'enseignante qui les guide pas à pas dans cette opération.

Après avoir lu l'énoncé, ils travaillent en P/C pour trouver une solution. J. propose rapidement d'essayer la fonction :  $\exp(x) + 3$ , F. lui fait remarquer que cette fonction est croissante et non décroissante comme la fonction recherchée doit l'être. Ils se mettent alors d'accord pour essayer avec DERIVE la fonction :  $\exp(-x) + 3$ . Une fausse manoeuvre les fait sortir de DERIVE et il faut l'intervention de l'enseignante pour de nouveau charger, régler et centrer la zone.

Vingt minutes après le début de la séance, ils tapent leur première proposition de fonction sous la forme :  $\hat{e}(-x) + 3^{20}$ . Ils demandent le tracé de cette fonction et obtiennent une droite. Ils n'arrivent pas à comprendre pourquoi et essaient une autre fonction :  $-\hat{e}(-x) + 5$ , qui, tracée, donne de nouveau une droite. L'enseignante, qui passe à ce moment là, leur rappelle qu'il faut

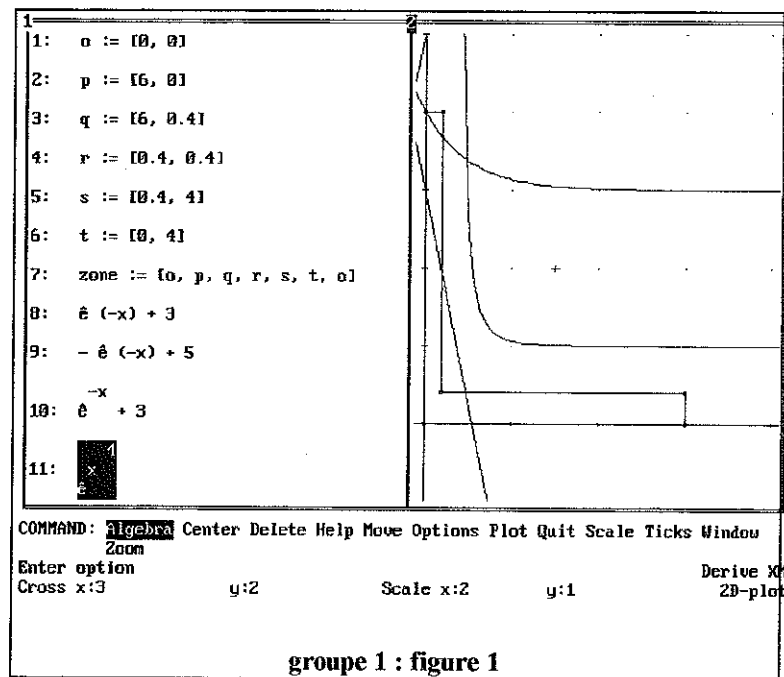
---

<sup>19</sup>Dans les tracés joints, nous avons préféré une échelle  $2 \times 1$ .

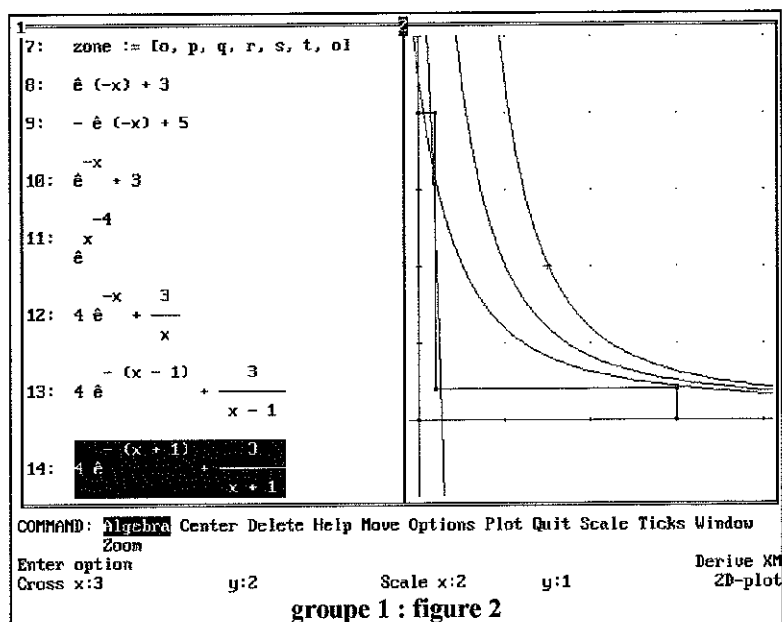
<sup>20</sup>est le symbole affiché suite à l'utilisation de la commande Alt-e, comme indiqué dans la fiche.

mettre  $(-x)$  en exposant, en utilisant la touche de puissance. Ils cherchent cette dernière pendant plusieurs minutes en essayant plusieurs touches du clavier avant de la trouver.

Ils tapent alors correctement leur proposition qui s'affiche sous la forme :  $\hat{e}^{-x} + 3$  et ils demandent le tracé. La courbe obtenue est située presque entièrement hors de la zone. L'enseignante intervient pour leur demander la limite de la fonction qu'ils ont proposée en  $+\infty$ . Obtenant la réponse : «elle converge vers 3», elle demande ce qu'il faut faire pour que la fonction «réponde à la question» puis s'en va. Ils essaient alors la fonction :  $\hat{e}^{x-4}$ , mais abandonnent aussitôt parce que la courbe correspondante est cette fois entièrement hors de la zone.



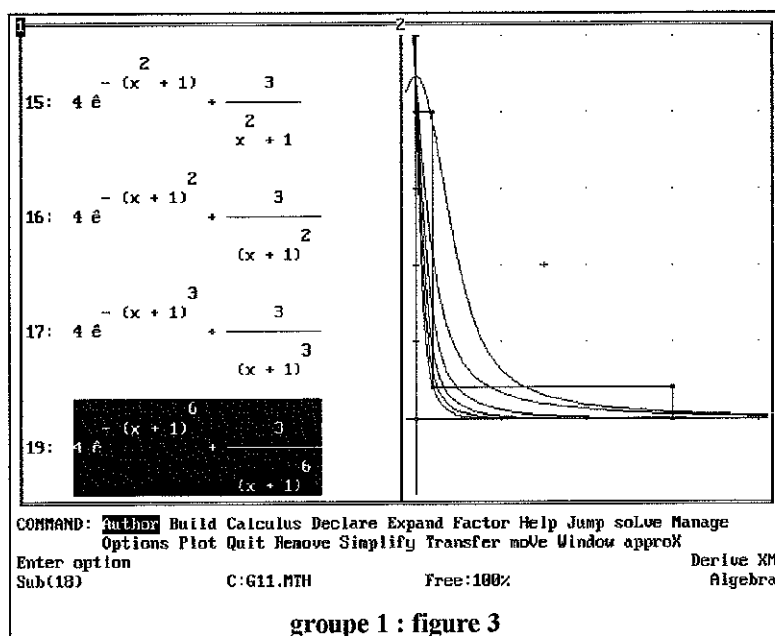
Après une réflexion silencieuse en P/C, J. entre :  $4\hat{e}^{-x} + \frac{3}{x}$ , puis demande le tracé. Celui-ci reste en dehors de la zone. La réflexion continue pendant une dizaine de minutes sans se traduire par de nouveaux essais. Passe alors l'enseignante qui demande la transformation à faire pour amener la courbe représentative de cette fonction dans la zone. Elle les laisse réfléchir puis revient au bout de quelques minutes. Ils lui proposent alors de faire une translation horizontale. Elle approuve, en les guidant, pour substituer selon leur proposition,  $x-1$  à  $x$ , dans l'expression DERIVE. Au tracé, ils remarquent que la translation s'est effectuée vers la droite, dans le sens contraire à celui souhaité, et que de plus une seconde branche est apparue presque droite (du fait de l'asymptote verticale d'équation  $x=1$ ). L'enseignante leur suggère alors de remplacer  $x$  par  $x+1$ , ce qu'ils font. La situation s'est un peu améliorée mais la courbe reste toujours principalement en dehors de la zone.



F. propose alors de «la descendre un peu», en remplaçant dans la dernière expression  $x$  par  $x^2$ . La courbe n'est toujours pas entièrement dans la zone. Il propose alors de «la descendre encore un petit peu» en remplaçant  $x+1$  par  $(x+1)^2$ , l'expression obtenue est alors :

$$4e^{-(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^2}$$

La courbe correspondante n'est toujours pas entièrement dans la zone. Ils augmentent alors la puissance de  $(x+1)$  en essayant successivement : 3, 4, 5 et 6. L'enseignante passe à ce moment là et leur demande si la seule façon de travailler consiste à faire des essais et s'il n'y avait pas des conditions à traduire.

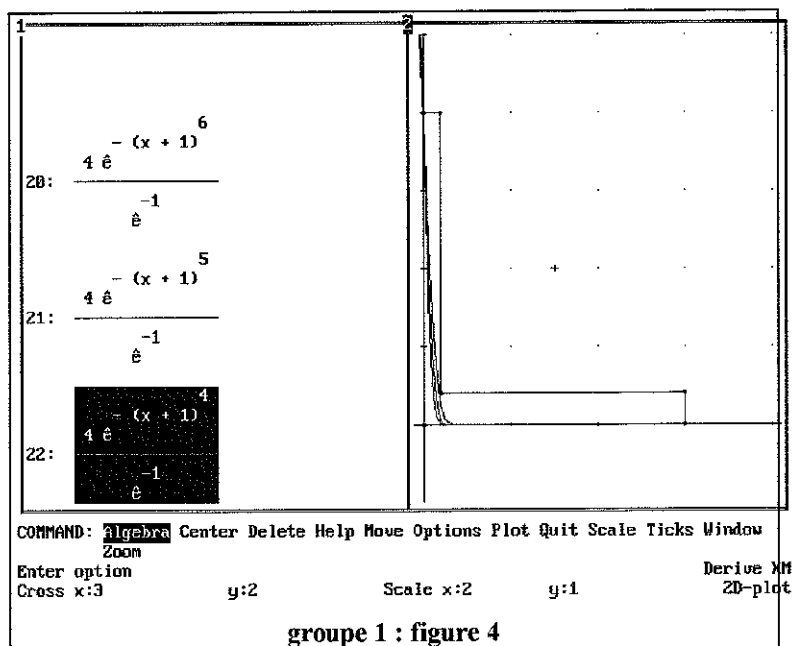


Après son passage, ils remarquent que la courbe correspondant à la puissance 6 se situe bien dans la zone mais ne passe pas par le point (0,4). Il s'ensuit une réflexion silencieuse qui dure quelques minutes et est interrompue par l'enseignante qui leur demande pourquoi ils ont ajouté

le terme :  $\frac{3}{(x+1)^6}$ . Leur réponse est : «pour que ça tende vers 0». Elle leur demande alors si le premier terme exponentiel ne tendait pas déjà vers 0 en  $+\infty$  puis s'en va.

Après quelques minutes de réflexion, F. entre :  $4 \frac{e^{-(x+1)^6}}{e^{-1}}$  et fait tracer. Ils constatent que le tracé reste dans la zone, vérifient que  $f(0)$  est égal à 4 et sont contents d'avoir enfin trouvé.

J. relie l'énoncé et remarque qu'il est demandé de déterminer non pas une mais des fonctions. Ils remplacent alors la puissance 6 par 5 puis par 4, remarquent que «ça marche aussi» et concluent que «ça marchera aussi pour 7, 8, etc.»

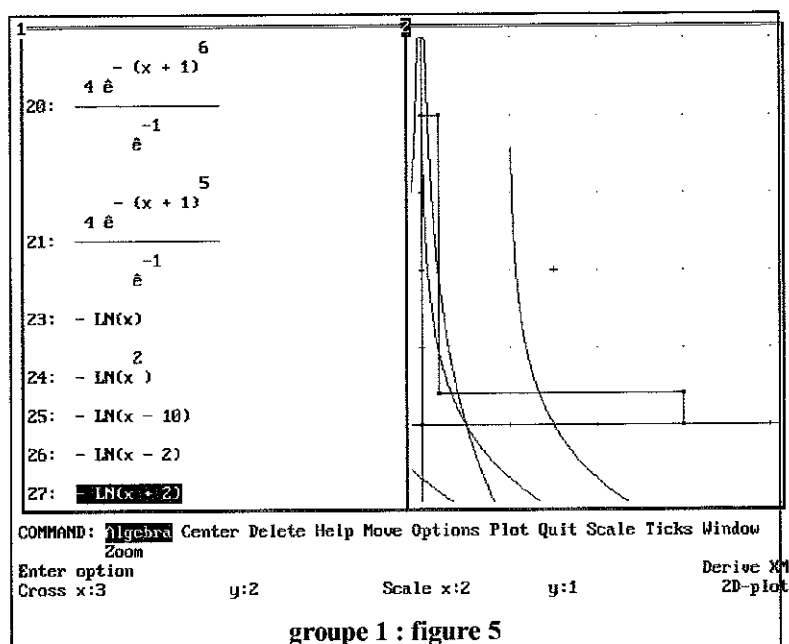


F suggère de chercher d'autres fonctions, par exemple «dans les ln». Ils essayent alors successivement :  $-\ln(x)$ ,  $-\ln(x^2)$ .

L'enseignante passe à ce moment et dit qu'il faut la convaincre que la fonction (exponentielle) qu'ils ont trouvée, vérifie bien les conditions données dans l'énoncé. Elle s'en va et les deux élèves disent, en parlant de ce qu'elle a demandé : «on verra ça tout à l'heure».

Ils continuent leurs essais avec les logarithmes en essayant successivement :

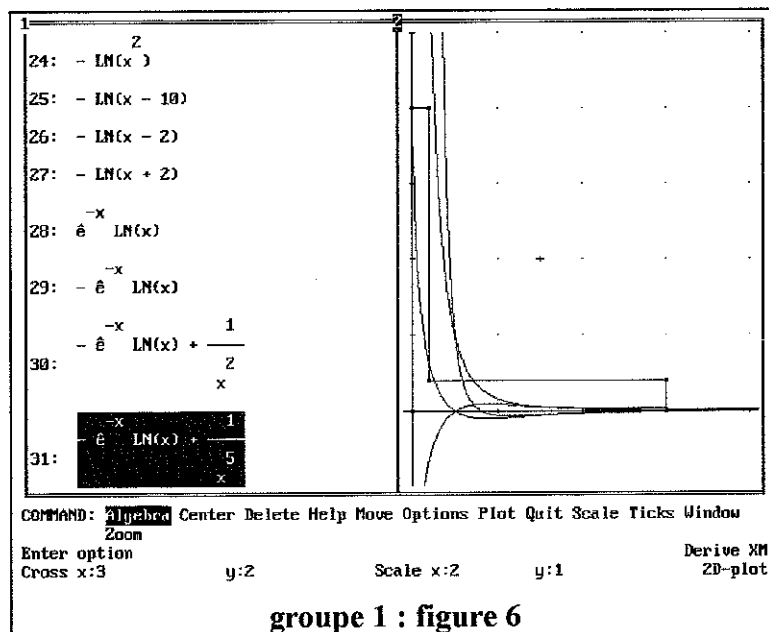
$-\ln(x-10)$ ,  $-\ln(x-2)$  et  $-\ln(x+2)$ .



Le tracé de la première n'est pas visible à l'écran et les deux autres ne conviennent pas à l'évidence.

L'enseignante arrive alors que J. essaie l'expression :  $e^{-x}\ln(x)$  et lui demande s'il ne faut pas faire symétriser la courbe ainsi obtenue. J. ajoute alors un «-» devant l'expression précédente. Elle insiste aussi de nouveau sur le fait qu'il faut essayer de «formaliser des critères mathématiques» au lieu d'adopter une stratégie par essai/erreur.

Après son départ, les deux élèves continuent leurs essais en ajoutant à l'expression précédente  $\frac{1}{x^2}$  puis  $\frac{1}{x^5}$ , et ceci, pour que «la courbe descende vers l'axe des x», reprenant ainsi une stratégie déjà utilisée au début de la séance. La séance se termine là.



Groupe 2 (séance 2 - Élèves notés Y. et D.) :

L'enseignante. introduit cette deuxième séance comme indiqué plus haut.

Une fois le tracé de la zone obtenu, en suivant les indications collectives données, les deux élèves du groupe 2 commencent à réfléchir en P/C. Ils essayent d'imaginer la courbe représentative de la fonction demandée en traçant une, décroissante, ayant une tangente horizontale au point (0,4), incluse dans la zone. L'un d'eux propose alors la fonction :  $e^{-x^2}$ . L'enseignante, qui passe à ce moment là, leur dit que cette fonction lui convient, mais qu'il faut que la courbe représentative soit bien située dans la zone. D. sort sa calculatrice et fait tracer cette fonction. Ils engagent alors une discussion (non accessible à l'observateur<sup>21</sup>) sur l'ajustement de la courbe, toujours sur l'écran de la calculatrice.

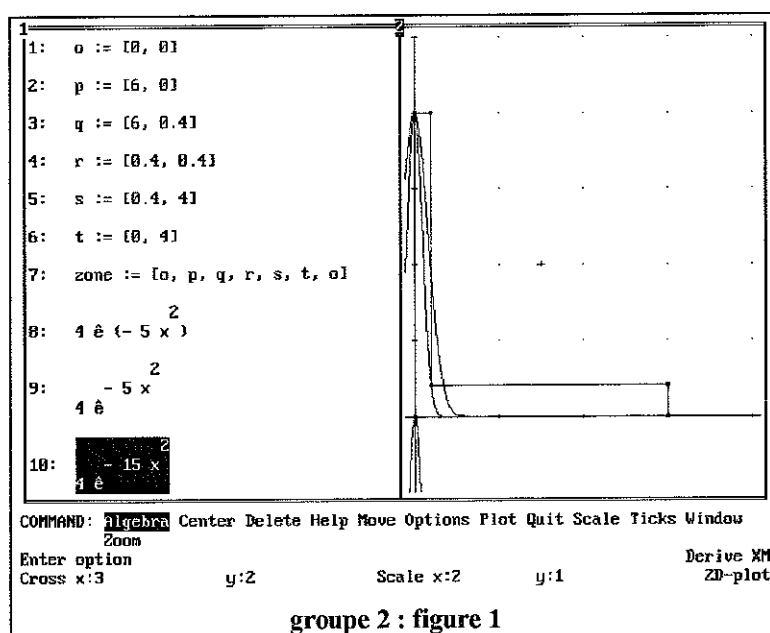
Y. se met au clavier pour entrer cette fonction. Par une fausse manoeuvre, il quitte DERIVE puis y rentre, sans recharger la zone. Il se rend compte qu'il a besoin de la zone, la charge (sans régler, ni centrer) et demande le tracé de la fonction :  $4e(-5x^2)$ . «e» étant alors considéré comme une seconde variable, DERIVE crée une fenêtre 3D et ils obtiennent une courbe dans l'espace. Ils n'arrivent pas à comprendre ce qui leur arrive et l'enseignante doit intervenir pour fermer la fenêtre 3D. Ils recommencent alors de nouveau à charger la zone, à régler et à centrer.

Une demi-heure après le début de la séance, Y. tape l'expression :  $4e(-5x^2)$  et demande le tracé. Ils sont surpris de la courbe obtenue : une parabole que «DERIVE a faite en dessous» (en dessous de l'axe des abscisses). D. revient à sa calculatrice, trace la courbe correspondant à  $4\exp(-5x^2)$  et obtient bien sûr une exponentielle. Y. de son côté essaye de comprendre pourquoi «ça ne marche pas». L'enseignante passe à ce moment là et leur explique qu'il faut utiliser la fonction puissance.

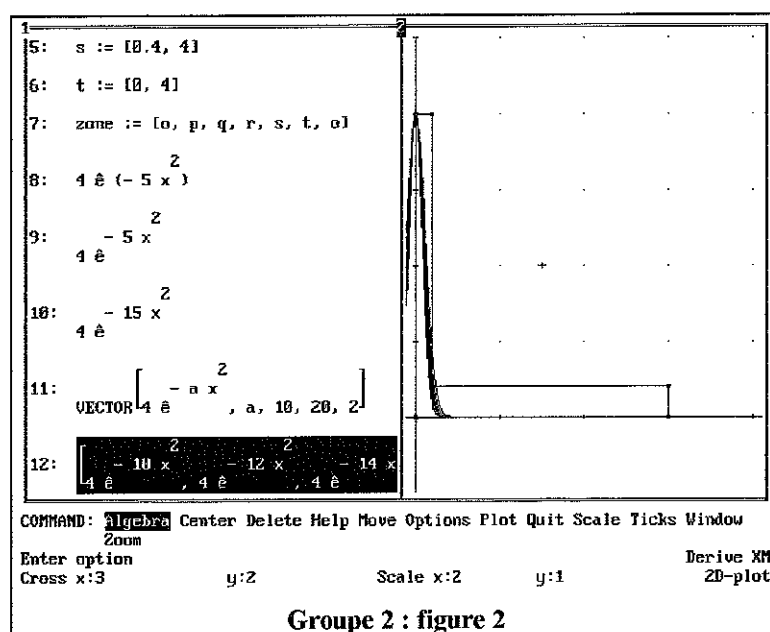
Y entre alors correctement :  $4e^{-5x^2}$  et demande le tracé. Ils sont contents de trouver la courbe à laquelle ils s'attendaient. D. passe en P/C et pose :  $4\exp(-ax(0.4)^2) = 0.4$ , résout cette équation avec la calculatrice et trouve une valeur approchée : 14.39. Il dit alors à Y. de remplacer le 5 par 15, en lui expliquant que de cette façon la courbe passera en dessous du point (0.4,0.4). L'enseignante passe à ce moment là et remarque que le travail a été fait plutôt avec la calculatrice qu'avec DERIVE.

---

21 Nous qualifions une discussion ou un travail, avec l'utilisation de la calculatrice, de non accessible à l'observateur, quand les élèves parlent à voix basses et essayent "discrètement" d'éloigner l'écran de la calculatrice du champ de vision de l'observateur.



Les deux élèves relisent la fiche donnée et tentent d'utiliser la fonction VECTEUR. L'enseignante repasse et leur fait une démonstration en prenant les choix de paramètres dictés par D. : VECTEUR ( $4e^{-ax^2}$ , a, 10, 20, 2). En simplifiant et demandant le tracé, ils remarquent que la première fonction ( $4e^{-10x^2}$ ) «ne marche pas».



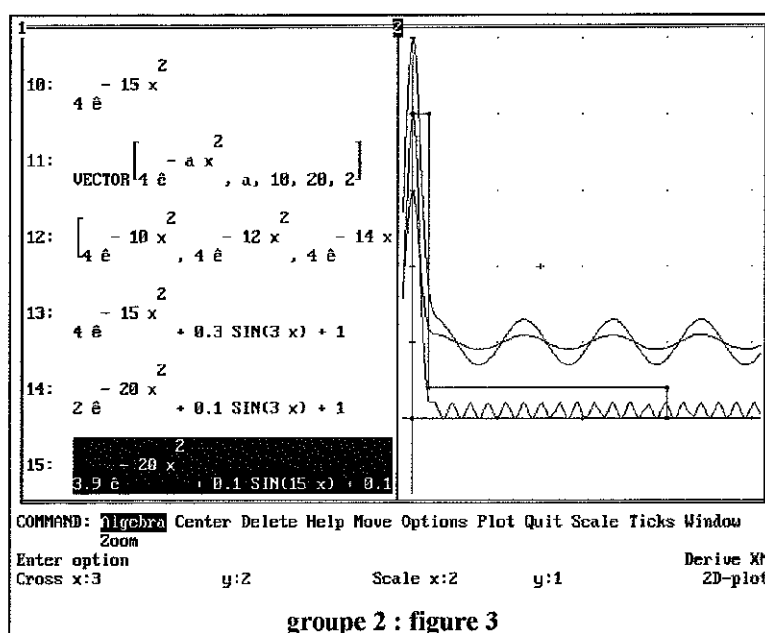
L'enseignante leur demande alors de trouver la condition «mathématique» pour que «ça marche». Ils essayent de zoomer autour du point (0.4,0.4), pour voir les positions des différentes courbes de la famille au voisinage de ce point, mais n'arrivent pas à faire correctement le zoom. Ils demandent alors l'aide de l'enseignante, qui leur explique comment faire. Ils essayent de nouveau mais ne notent rien de spécial. A ce moment, l'enseignante repasse et leur demande de chercher une autre famille de fonctions qui réponde à la question.

Les deux élèves repassent en P/C et essayent de trouver, sur une proposition de D., une fonction qui décroît entre 0 et 0.4 puis oscille entre 0.4 et 6. Y. sort à son tour sa calculatrice

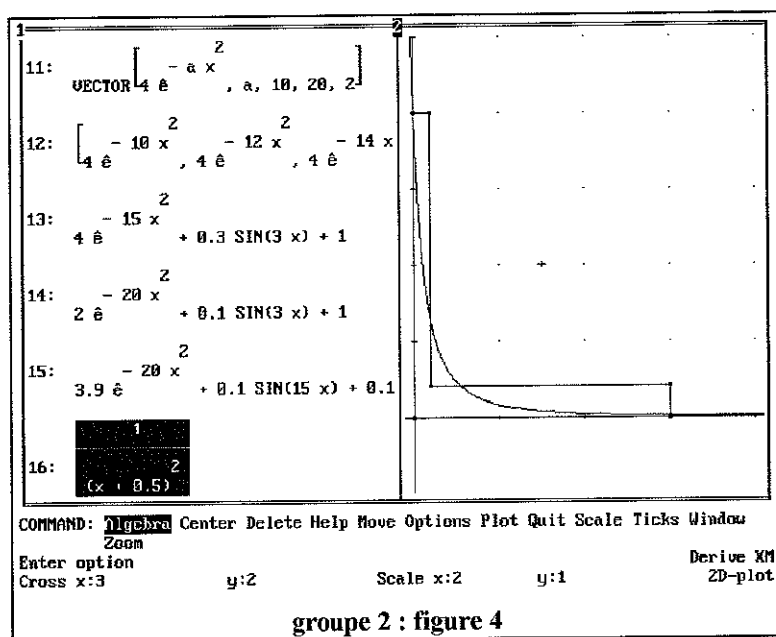
et les deux discutent (discussion non accessible à l'observateur) en traçant diverses courbes avec leurs calculatrices. Au bout de quelques minutes, D. propose à Y. de taper l'expression :  $4e^{-15x^2} + 0,3\sin(3x) + 1$ . Y. lui demande comment il l'a trouvé, D. répond qu'il ne sait pas. Y. exécute et demande le tracé de la courbe représentative. Ils remarquent alors que cette courbe oscille en dehors de la zone.

D. propose «de mettre une amplitude plus petite pour que ça descende». Ils veulent aussi utiliser la fonction VECTEUR. Suit une période de dix minutes où ils se demandent s'ils peuvent rentrer plusieurs paramètres pour cette dernière fonction et si les valeurs des paramètres peuvent être décimales. Ils font plusieurs essais qu'ils abandonnent aussitôt et les effacent. L'enseignante passe et dit qu'ils peuvent exploiter l'idée de la somme d'une fonction exponentielle et d'une fonction trigonométrique.

D. travaille alors sur sa calculatrice puis dicte à Y. :  $2e^{-20x^2} + 0.1\sin(3x) + 1$ . Il continue à travailler sur sa calculatrice et lui propose au fur et à mesure de rentrer d'autres expressions. La dernière qu'il propose lui semble être la bonne :  $3.9e^{-20x^2} + 0.1\sin(15x) + 0.1$ . Il explique à Y. que « $3.9 + 0.1$  vont faire 4 en 0» et que « $15x$  va la faire osciller plus». Ils sont satisfaits de la courbe obtenue et la montrent à l'enseignante, qui demande de lui expliquer un peu puis de trouver d'autres fonctions qui ne soient pas exponentielles.



Ils repassent à un travail P/C et sur calculatrices en essayant de trouver des fonctions homographiques. Après une discussion (non accessible à l'observateur) devant les écrans de leurs calculatrices, Y. entre sous DERIVE :  $\frac{1}{(x + 0,5)^2}$  et demande le tracé. L'enseignante intervient et les encourage à faire une recherche plus systématique. Ils continuent leurs essais empiriques, P/C et calculatrices, sans résultats satisfaisants. L'enseignante repasse et leur demande de nouveau d'explicitier les conditions et de faire une recherche systématique. La séance se termine là.



Groupe 3 (séance 1 - élève notés S. et T.) :

S. et T. chargent le fichier, discutent du changement d'échelle.

5minutes :

L'enseignante passe et les aide à centrer. Elle fait elle-même les manipulations en les commentant au fur et à mesure. Elle fait tracer la zone, s'aperçoit qu'ils ne sont pas en mode continu et fait la modification.

Ils commencent ensuite à travailler en P/C. T. pense à  $x \rightarrow x+4$ , S. verrait plutôt des fonctions « racine ».

10minutes :

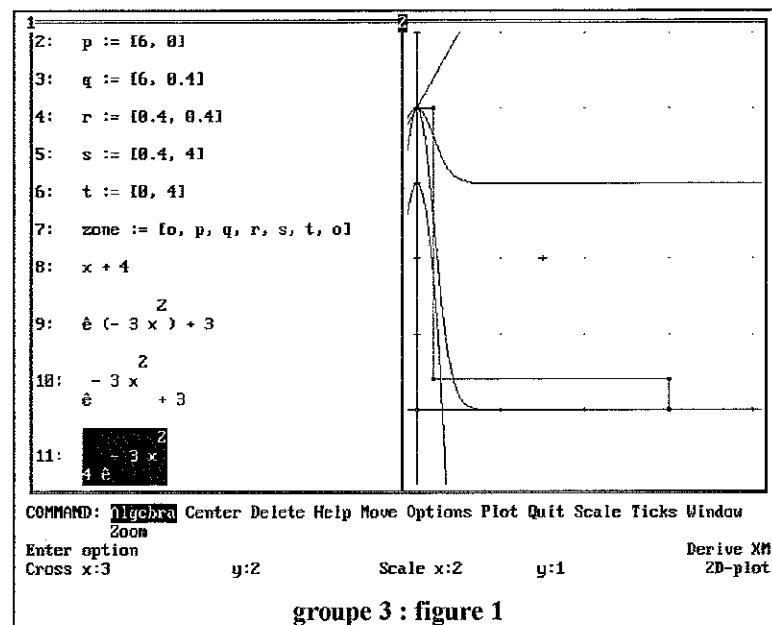
Ils passent en DERIVE, entrent la fonction :  $f(x) := x+4$ , la font tracer et obtiennent une droite entièrement hors de la zone. Ils rient, effacent et S. propose de modifier en :  $-x+4$ . T. lui explique que ça ne va pas marcher car il faut que toute la courbe reste dans la zone et que la droite va sortir. L'enseignante, qui passe, confirme qu'entre 0 et 6, la courbe doit rester dans la zone puis s'en va.

S. sort les notes prises à la séance de la veille et montre à T. les représentations graphiques de fonctions du type  $\exp(x^2)$  et  $\exp(-x^2)$ . Il propose de prendre  $\exp(-3x^2)+3$  et explique à T. que le 3 permettra d'avoir  $f(0)=4$ .

15minutes :

T. entre sous DERIVE cette fonction en commettant plusieurs erreurs successives. D'abord, il tape e au lieu de Alt-e, pour l'exponentielle, ce qui produit un tracé 3D. L'enseignante qui passe l'aide à interpréter. Il corrige cette erreur mais oublie de retaper la touche de puissance. Le tracé donne une parabole qui sort nettement de la zone. Ils comprennent leur erreur, effacent et recommencent. Ils obtiennent enfin le tracé de  $f(x) = e^{-3x^2} + 3$ .

La courbe est trop haute. Très vite, ils décident d'essayer alors :  $4e^{-3x^2}$ , l'entrent sous DERIVE et la font tracer. Cette fois, ils sont satisfaits : «Ca s'approche».



L'enseignante passe à ce moment là et leur demande de noter ce qui va et ce qui ne va pas. Ils expliquent qu'ils voudraient serrer la courbe sur l'axe Oy. Elle demande quelle transformation géométrique il faut faire pour serrer la courbe. Un propose une translation. Elle a l'air sceptique. Il propose alors une affinité de rapport -1/2. Elle conseille de faire un dessin avec un point et son image pour contrôler, puis s'en va.

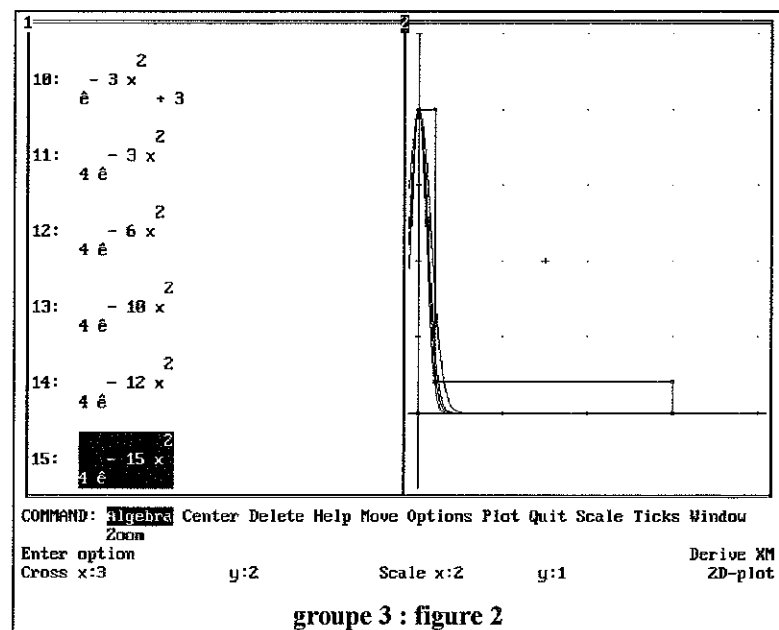
20 minutes :

Ils ne font pas le dessin mais très vite décident d'augmenter le coefficient de  $x^2$  et entrent sous DERIVE la fonction  $f(x) := 4e^{-6x^2}$ . Le tracé leur montre une évolution dans le bon sens et T. conclut : «Tu vois, c'est bien ça, il faut bouger le coefficient de la puissance.»

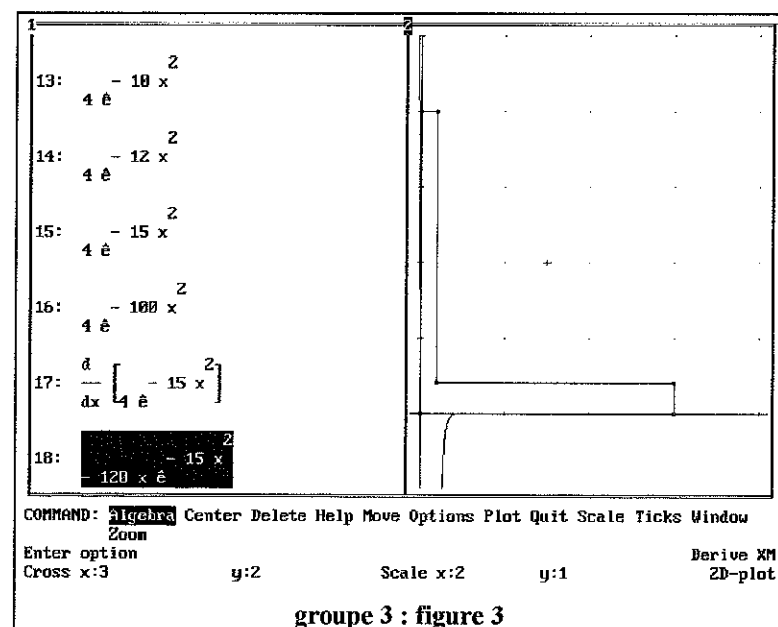
Ils essaient ensuite successivement  $4e^{-10x^2}$ ,  $4e^{-12x^2}$  et enfin  $4e^{-15x^2}$  qui graphiquement, semble convenir. Ils sont satisfaits.

25 minutes :

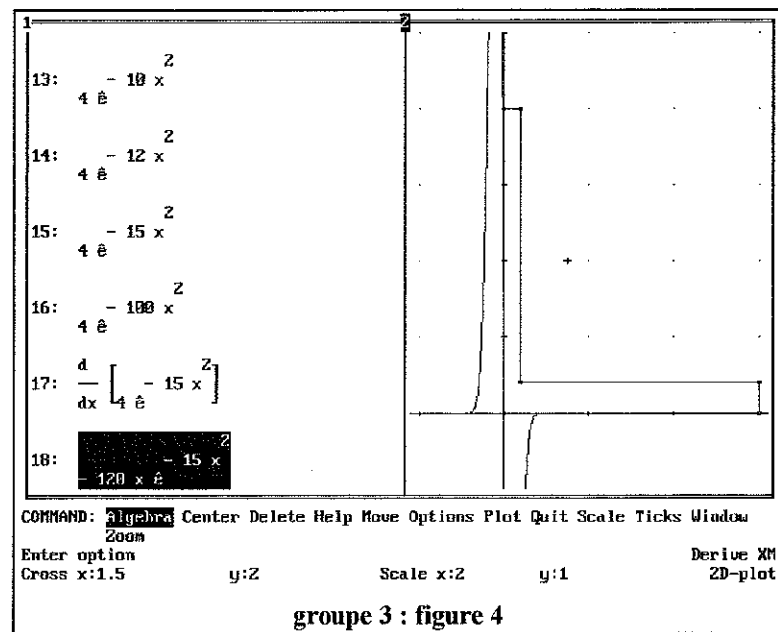
Ils essaient  $4e^{-100x^2}$  et constatent que pour celle-là, il n'y a aucun doute : elle reste bien dans la zone.



T. relit la fiche, s'intéresse à la condition de dérivabilité et dit qu'il ne faut pas y aller au hasard. Ils font dériver par DERIVE :  $4e^{-15x^2}$  et obtiennent  $-120xe^{-15x^2}$ , après simplification. Ils n'en déduisent pas immédiatement que la condition  $f'(0)=0$  est satisfaite et décident de faire tracer cette dérivée. Le tracé n'est pas conforme à ce qu'ils attendaient (un morceau vertical semble suivre l'axe Oy et une branche négative qui rejoint l'axe Ox) et le fait que  $f(0)=0$  n'est en rien visible.



Ils sont perturbés et décident de changer le centre de la fenêtre pour avoir aussi des valeurs négatives de x. Le nouveau tracé est tout aussi surprenant mais il les rassure : «Elle est d'abord positive et ça monte, puis négative et alors ça descend». La valeur de  $f'(0)$  n'est toujours pas identifiable. T. se rapporte au tracé du graphe de la fonction elle-même qu'il trouve très pointu en 0. Il n'est pas du tout sûr que la dérivée soit nulle.



30 minutes :

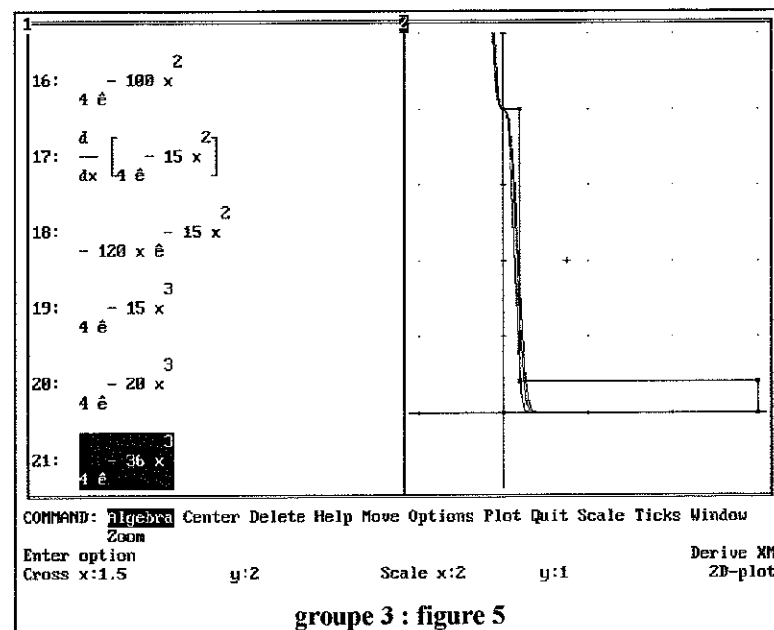
Ils décident d'essayer  $4e^{-15x^3}$  pour arrondir en 0. T. le fait avec DERIVE et S. sur sa calculatrice Casio. S. est satisfait du résultat obtenu (la zone n'est pas tracée sur la calculatrice) mais T. lui montre que le tracé DERIVE sort de la zone.

Ils essaient ensuite :  $4e^{-20x^3}$  qui sort elle aussi.

35 minutes :

Ils ont alors l'idée de faire intervenir la condition :  $f(0.4)=0.4$  pour chercher la valeur du coefficient qui correspond à la courbe qui passe juste au coin. Ils utilisent leurs calculatrices pour résoudre cette équation qui les conduit au calcul de  $\frac{\ln(0.1)}{(0.4)^3}$  et obtiennent : 35.97. Ils

choisissent alors pour coefficient de  $x^3$  : -36, définissent  $G(x) := 4e^{-36x^3}$  et la font tracer. Elle semble bonne mais longe le coin. Ils déplacent le curseur et obtiennent l'affichage :  $x=0.388$   $y=0.4062$ . T. modifie alors l'échelle pour agrandir la zone et est satisfait du résultat obtenu.

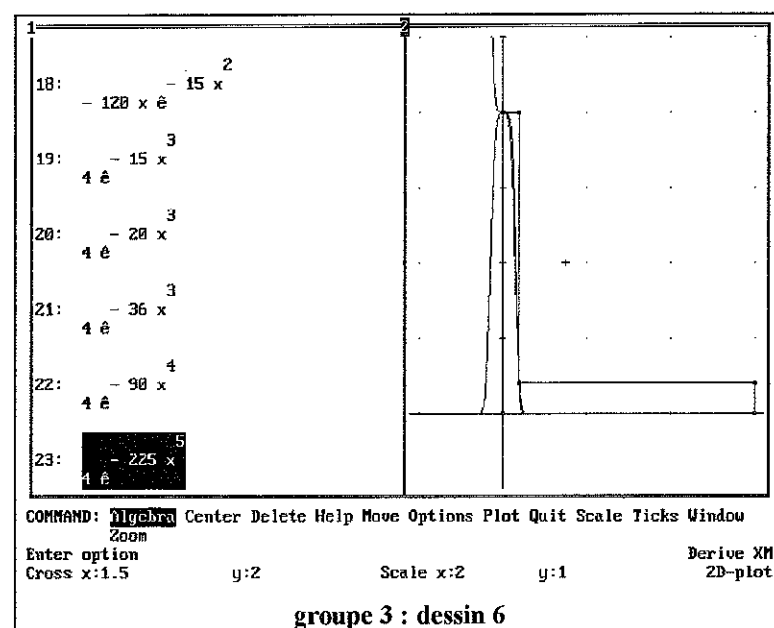


Pendant ce temps, S. est passé aux puissances 4 et résout l'équation correspondant à  $f(0.4)=0.4$  dans ce cas là, avec sa calculatrice. Il obtient pour  $\frac{\ln(0.1)}{(0.4)^4}$  : -89.94 et dit à T. de prendre : -90.

T. entre :  $H(x) := 4e^{-90x^4}$ .

Ils font ensuite de même avec les puissances 5, obtiennent par résolution de l'équation :

-224.86, choisissent : -225, définissent  $I(x) := 4e^{-225x^5}$  et la font tracer.



45minutes :

Ils décident de changer de type et S. reprend son cours de la veille. L'enseignante passe, leur fait expliquer ce qu'ils ont fait et leur demande s'ils ont bien vérifié que les conditions étaient réalisées. Ils se réfèrent au contrôle graphique, sans parler des calculs qui leur ont permis de déterminer les coefficients. Elle leur demande alors d'essayer de formaliser les choix effectués

avant de chercher d'autres types de fonctions. Elle les aide à démarrer, en particulier à formaliser le fait que le tracé est intérieur à la zone. Ils proposent :

si  $x \in [0,0.4]$ ,  $f(x) \in [0,4]$  et si  $x \in [0.4,6]$ ,  $f(x) \in [0,0.4]$

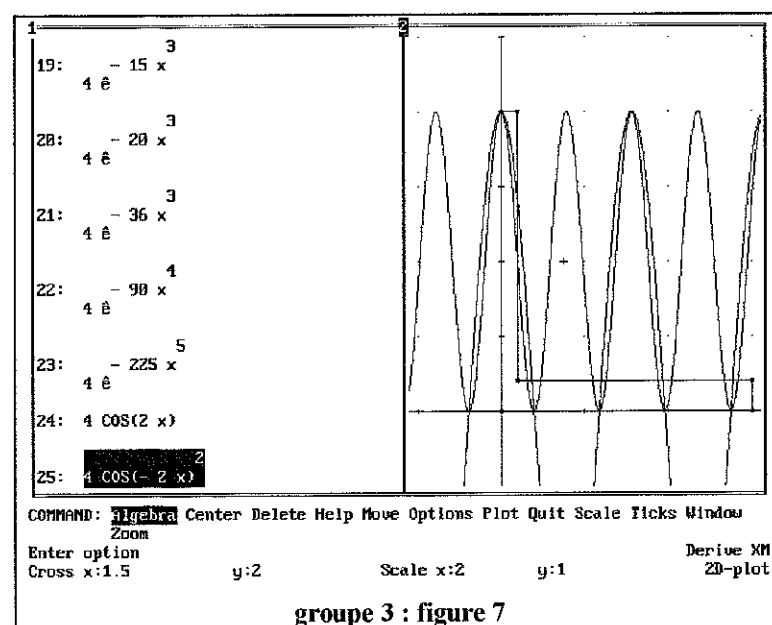
Elle leur demande de traduire autrement que par des appartenances à des intervalles puis s'en va.

*50 minutes :*

Ils réfléchissent à ce problème de traduction sans voir quoi faire. Assez vite, l'enseignante repasse et les incite cette fois à chercher d'autres types de fonctions. Ils proposent de chercher des fonctions qui tendent vers 0.4. Elle leur demande alors pourquoi ils s'intéressent tant aux limites puisque ce qui les intéresse c'est juste ce qui se passe entre 0 et 6. Puis elle essaie de les aiguiller plus directement vers la recherche de fonctions non monotones. Les avis sont partagés : l'un pense que les fonctions doivent décroître au début mais qu'ensuite elles peuvent faire n'importe quoi et il fait un geste montrant un tracé oscillant, l'autre pense qu'il faudrait une grande oscillation et après des petites et que ce n'est pas possible. L'enseignante les incite à chercher et s'en va.

*55 minutes :*

Ils entrent la fonction  $J(x) := 4\cos(2x)$  et la font tracer. Elle sort de manière évidente de la zone. Ils voudraient resserrer les oscillations mais ne savent pas comment faire. T. se demande si, en changeant de puissance, ça pourrait s'arranger, mais ils ne le font pas et essaient ensuite :  $4\cos^2(-2x)$ . Ça ne fait qu'augmenter le nombre d'oscillations. Ils concluent que ça ne sert à rien et se trouvent bloqués.



*60 minutes :*

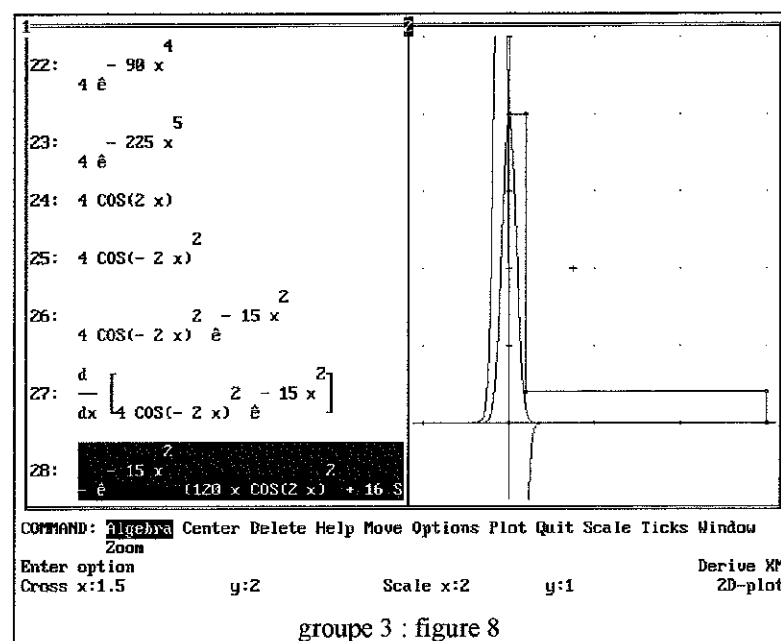
L'enseignante passe et ils expliquent qu'ils sont bloqués. Ils voudraient réduire les oscillations mais pas partout pareil et ils ne voient pas comment faire. Elle les aide : «Tout à l'heure, pour réduire les oscillations, vous aviez quelque chose qui décroissait très vite...» Ils ne s'emparent pas tout de suite de son idée car ils ont toujours l'idée de resserrer les premières oscillations

sans modifier l'amplitude pour couvrir la première partie «verticale» de la zone puis de réduire l'amplitude dans la seconde partie «horizontale». L'enseignante insiste un peu en leur montrant que les exponentielles tendent vers 0 et ils proposent alors de multiplier les cosinus par :

$$e^{-15x^2}$$

A l'entrée DERIVE, ils font une erreur de frappe (oubli d'exposant) repérée dès l'affichage puis définissent  $K(x) := 4[\cos^2(-2x)e^{-15x^2}]$ . Le tracé est dans la zone mais on ne voit pas d'oscillations. L'enseignante passe, ils le lui font remarquer et elle leur conseille de regarder la dérivée. T., lui, propose de faire un zoom. Elle les aide à faire le zoom, en centrant et en changeant l'échelle, parce que c'est plus pratique. Elle leur conseille de prendre au moins 0.1 (ils proposaient 0.5). Elle va trop vite et ils sont un peu perdus, elle réexplique. On ne voit toujours pas les oscillations.

Ils font alors tracer la dérivée et n'obtiennent pas du tout ce qu'ils attendaient. C'est la fin de la séance.



Groupe 4 (séance 2 - élèves notés H. et P.) :

Ils suivent les instructions collectives données mais n'arrivent pas à tracer la zone car ils n'utilisent qu'une fois la commande graPh. L'enseignant vient les aider, s'aperçoit qu'ils ne sont pas en mode Continu et fait la modification de mode en expliquant. Au bout de 7 minutes environ, les réglages sont terminés et la zone est tracée.

Ils entrent d'abord  $e(-x)+3$  comme expression, puis décident de la déclarer comme fonction, font quelques fausses manoeuvres qu'ils n'arrivent pas à interpréter.

12minutes :

Ils repassent en mode auteur, entrent :  $f(x) := e(-x)+3$ , la font tracer et obtiennent une droite. P. contrôle avec sa calculatrice et obtient, bien sûr, une exponentielle. Il constate par la même occasion qu'elle ne conviendra certainement pas.

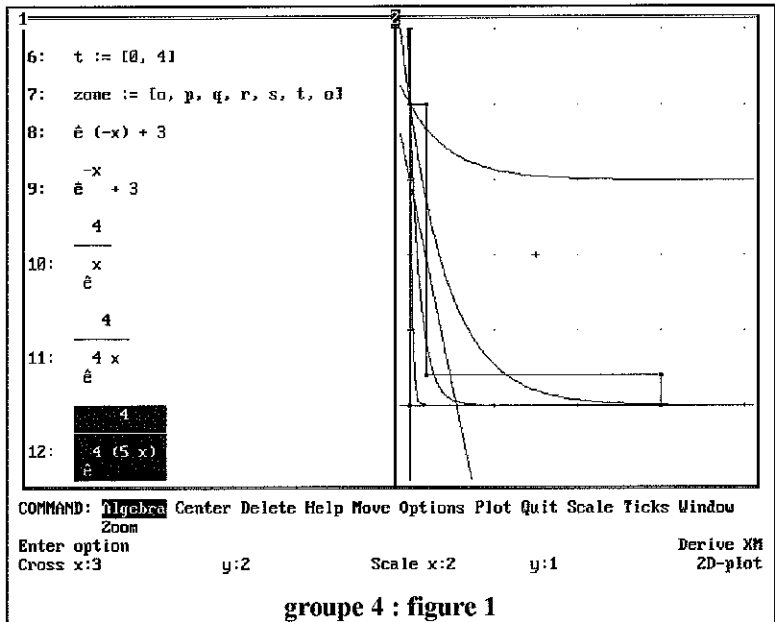
15 minutes :

Ils identifient l'oubli d'exposant, corrigent et font tracer. Ils voudraient descendre la fonction, réfléchissent assez longuement, remarquent qu'elle tend vers 3...

L'enseignante passe, se fait expliquer ce qu'ils ont fait, confirme que ça ne va pas. Ils lui expliquent que la fonction tend vers 3 alors qu'elle devrait tendre vers 0. L'enseignante leur fait préciser que la limite 0 ne suffit pas à garantir que le tracé reste dans la zone puis revient à la condition  $f(0)=4$  en leur demandant si «ajouter 3 est la seule méthode pour avoir  $f(0)=4$ ». Ils répondent que non et elle s'en va.

20 minutes :

Ils repassent en P/C et prennent leurs calculatrices. Assez vite, ils pensent à la multiplication par 4. H. trace le graphe de  $\frac{4}{e^{-x}}$  à la calculatrice et P. celui de  $\frac{4}{e^x}$ . Ils repassent ensuite en DERIVE et entrent  $f(x) := \frac{4}{e^x}$  puis la font tracer. La courbe sort de la zone mais y rentre ensuite, ce qui les satisfait. Ils décident de mettre un exposant plus grand à l'exponentielle pour rendre la courbe plus pentue. Ils le font, en substituant à x la valeur 4x, puis en substituant à x, la valeur 5x. Ils obtiennent ainsi le tracé de  $\frac{4}{e^{4(5x)}}$  qui, perceptivement, est bien dans la zone et ils sont satisfaits.

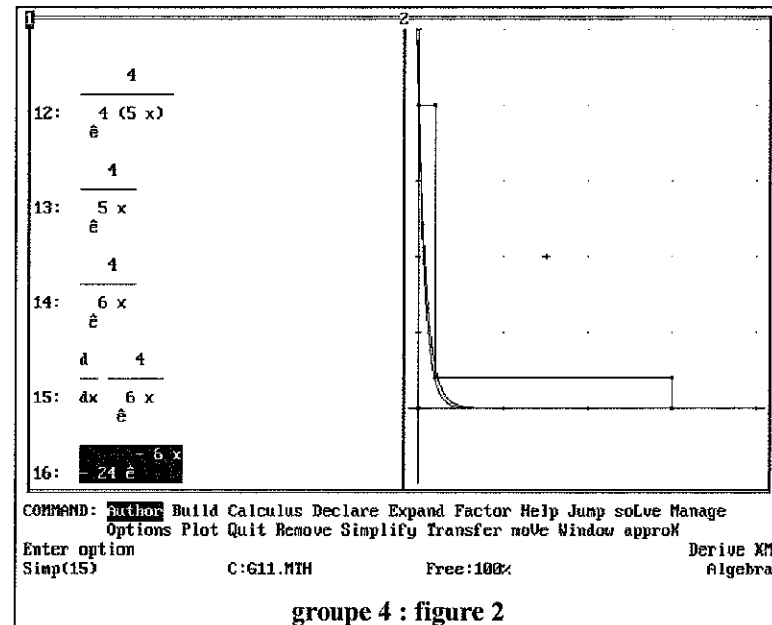


L'enseignante passe et se fait expliquer ce qu'ils ont trouvé. Ils lui demandent comment effacer les graphes déjà tracés pour chercher d'autres fonctions. Elle le leur montre puis les incite à prendre des notes avant d'effacer et à justifier pourquoi la fonction tracée convient avant d'en chercher d'autres.

25 minutes :

Ils effacent tout, essaient  $\frac{4}{e^{5x}}$  (en fait c'est elle qu'ils voulaient tracer au départ et non  $\frac{4}{e^{20x}}$  qui s'est trouvée tracée, du fait du fonctionnement de la commande de substitution). Ils constatent qu'elle sort, effacent et essaient  $\frac{4}{e^{6x}}$ . Celle-ci perceptivement convient.

L'enseignante passe, leur demande si la fonction trouvée vérifie bien la condition supplémentaire  $f(0)=0$ , puis s'en va. Ils font dériver la fonction par DERIVE et, après simplification, obtiennent :  $24e^{-6x}$  puis : -24 pour  $f(0)$ .



groupe 4 : figure 2

Ils repassent en P/C et réfléchissent. H. pense qu'il faudrait une fonction symétrique mais qu'on peut avoir aussi une fonction avec une inflexion en 0 puisqu'on ne connaît pas le signe pour  $x$  négatif. Il trace à main levée l'allure d'une telle courbe. P., de son côté, se demande comment peut être le tableau de variation si  $f(0)=0$ . Il en fait un, avec une fonction d'abord croissante puis décroissante. H. conteste et montre son tracé avec point d'inflexion à tangente horizontale.

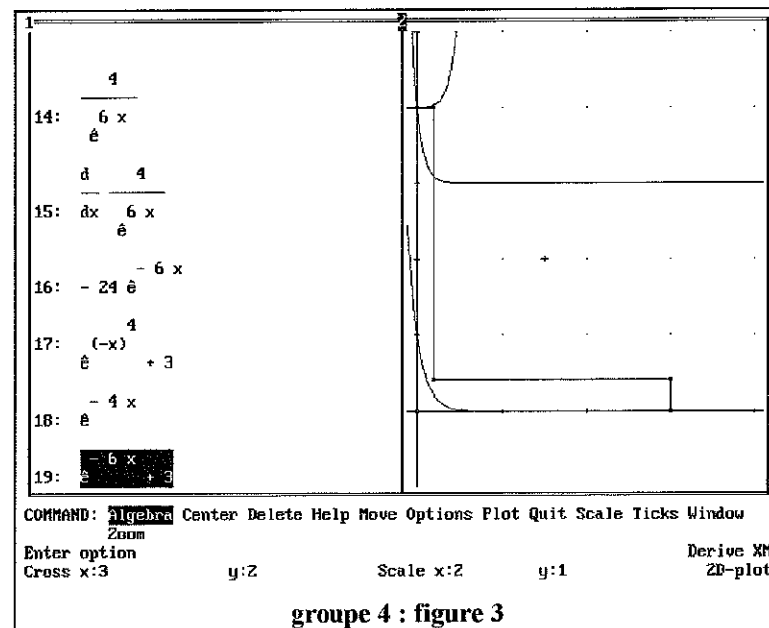
P. est d'accord. H. fait calculer par sa HP les dérivées de  $\frac{4}{e^{7x}}$ ,  $\frac{4}{e^{8x}}$ , prévoit les valeurs en 0, les fait calculer quand même et constate que ça ne marche pas.

Ils semblent bloqués.

30 minutes :

Ils reviennent à leurs notes de la séance précédente et ceci les fait penser à introduire des puissances dans les exponentielles. Ils repassent en DERIVE et P. entre  $f(x) := e^{(-x)^4} + 3$ .

Ils voulaient en fait entrer sans doute  $\exp(-x^4) + 3$ . Le tracé obtenu est entièrement hors de la zone. H. trouve tout de suite l'erreur. Mais, bizarrement, au lieu de corriger, S. rentre ensuite  $f(x) := e^{-4x}$ , puis  $f(x) := e^{-6x} + 3$ , «en montant l'exposant comme au début». Ils constatent bien sûr que la situation ne s'améliore pas.



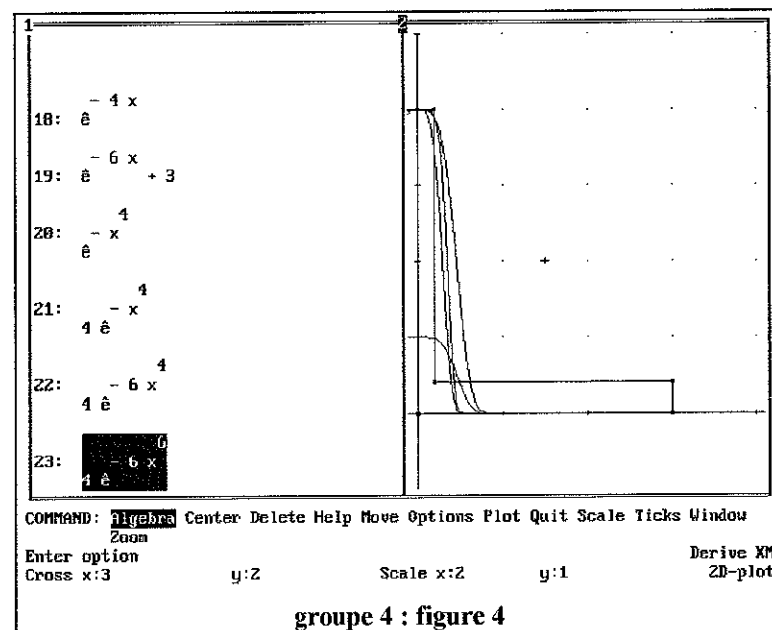
38 minutes :

L'enseignante passe et leur demande où ils en sont. P. explique qu'ils ont fait plusieurs essais mais sans aboutir et H. dit que maintenant ils vont chercher une fonction paire. Elle les encourage et s'en va.

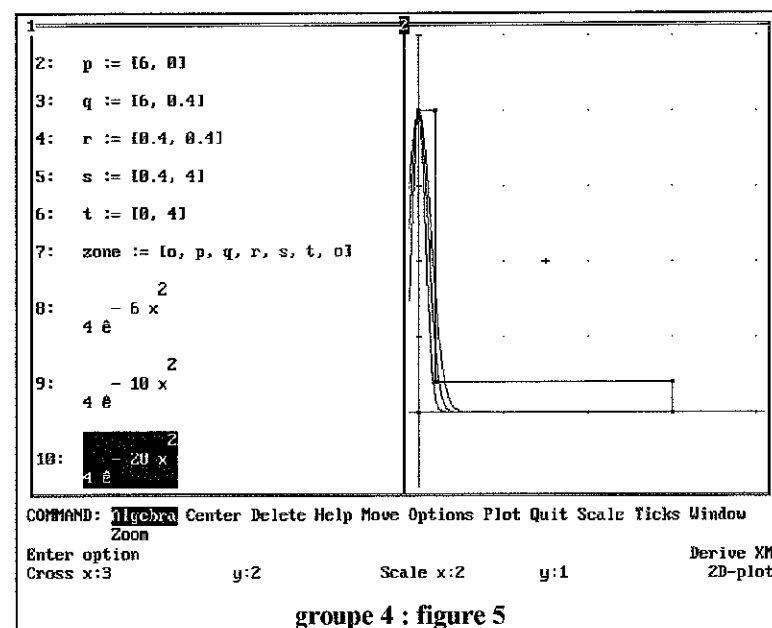
Ils repassent en P/C. P. essaie  $e^x + 3$  sur sa Casio. H. lui dit que ça ne peut pas marcher qu'elle ne montera pas assez en 0 et qu'en plus, elle va monter au lieu de descendre. Ils retracent sur papier différentes courbes déjà obtenues pour essayer d'y voir plus clair. H. écrit  $f(-x) = f(x)$ . P. dérive  $e^{-4x}$  à la main et constate que ça ne peut pas marcher. Ils continuent à chercher mais ils tournent en rond et sont un peu découragés.

48 minutes :

L'enseignante passe. P. voudrait utiliser la fonction VECTEUR pour tracer plusieurs courbes, il demande comment faire. Elle explique en commentant les informations données par la fiche puis leur demande ce qu'ils veulent faire. Ils avouent qu'ils sont bloqués. Elle demande quelles fonctions ils ont essayé puis reprend sur un plan plus général, leur faisant calculer la dérivée de  $e^{-ax}$  et vérifier qu'en 0, elle n'est nulle pour aucune fonction de ce type. H. propose alors de mettre une puissance. L'enseignante saisit l'idée et prend le clavier. Sous leur dictée, elle entre la fonction  $x \rightarrow e^{-x^4}$  et la fait tracer. Ils constatent que ça ne marche pas sauf la dérivée et proposent de rajouter 3. Elle leur demande alors s'ils avaient fait comme cela au début. Ils sont un peu perdus. Elle ramène  $4e^{-6x}$  à l'écran et leur demande pourquoi ils avaient mis ce 4. Ils réalisent et lui font corriger la fonction entrée en multipliant par 4. Elle fait tracer et ils constatent que ça va mieux : la courbe passe par (0,4), elle a une dérivée nulle en 0, elle sort de la zone mais en augmentant le coefficient, on doit y arriver. L'enseignante s'en va.



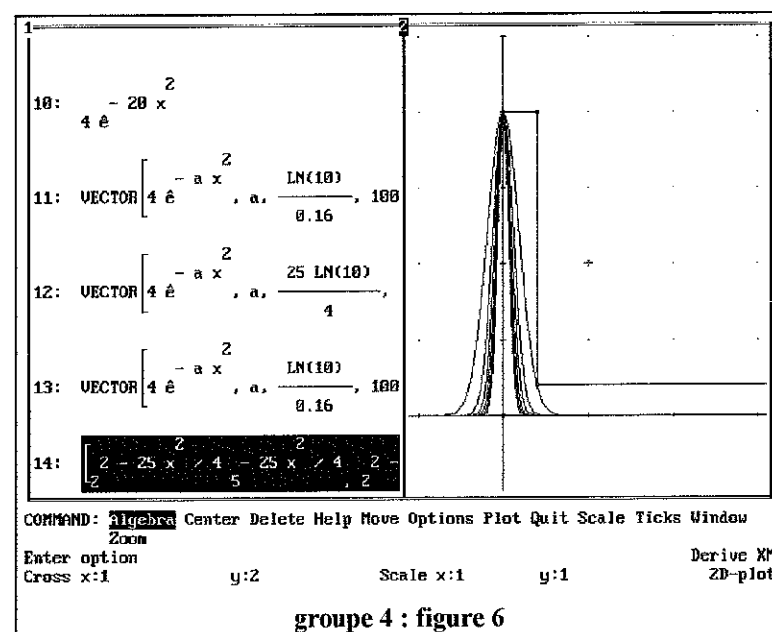
Ils entrent ensuite  $H(x) := 4e^{-6x^4}$ . La courbe sort encore de la zone. H. propose d'essayer avec 10 mais P. qui a le clavier préfère augmenter la puissance de x et essayer  $H(x) := 4e^{-6x^6}$ . Le tracé obtenu le fait déchanter : la courbe est au départ à l'extérieur de la précédente, presque horizontale, puis se confond avec elle sur l'axe des abscisses. Voyant cela, ils décident de repasser en  $x^2$  et essaient successivement  $4e^{-6x^2}$ ,  $4e^{-10x^2}$  puis enfin  $4e^{-20x^2}$  qui convient.



~ 58 minutes :

Ils déplacent le centre pour bien voir la dérivée en 0 (les courbes paraissant plutôt pointues) puis décident de tracer plusieurs courbes en utilisant la fonction VECTEUR. Ils entrent :  $VECTEUR(4e^{-ax^2}, a, 20, 50, 5)$ , simplifient et font tracer. Toutes les courbes apparaissent quasiment confondues. Ils cherchent ensuite à modifier la fenêtre graphique pour pouvoir

différencier les courbes. Cela prend beaucoup de temps car, à chaque fois, les fonctions sont retracées automatiquement. Finalement, ils arrivent à quelque chose de satisfaisant.



65 minutes :

L'enseignante passe et leur demande s'ils ont trouvé les valeurs par essai/erreur ou s'ils ont résolu une équation. Ils répondent qu'ils ont fait des essais. Elle les aide alors à formuler la condition  $f(0.4) \leq 0.4$  qu'ils ont implicitement utilisée dans le contrôle graphique et leur demande de faire les calculs en écrivant la condition  $f(0.4) = 0.4$  et en résolvant l'équation associée.

H. se sert de sa HP pour écrire et résoudre cette équation et obtient environ 14.40. P. vérifie en P/C et lui dit qu'il a une erreur de calcul. Ils se mettent d'accord.

70 minutes :

Ils décident de tracer par pas de 20 de  $\frac{\ln(10)}{0.16}$  (valeur exacte du paramètre trouvée dans la résolution de l'équation) à 100. Ils écrivent la commande correspondante, simplifient, font tracer et sont très contents de voir la première courbe tracée passer bien au coin. H. la retrace sur sa HP.

80 minutes :

L'enseignante arrive, demande ce qu'ils ont trouvé puis pose la question de la monotonie. H. dessine aussitôt sur sa feuille une sinusoïde amortie. P. prend sa Casio. H. dit qu'il faudrait mettre une exponentielle et l'enseignante acquiesce, mais il essaie sur sa HP :  $10\cos(4x)$ . Ils continuent à chercher chacun sur sa calculatrice jusqu'à la fin de la séance, sans jamais faire intervenir d'exponentielle.

Groupe 5 (séance 1 - élèves notés F. et J.L.) :

F. et J.L. lancent DERIVE et chargent le fichier. F. est à la frappe. Il se demande comment on fait pour ouvrir une fenêtre graphique mais arrive assez vite à obtenir la disposition de fenêtres demandée. Il. échoue ensuite à passer en mode de tracé continu.

Ils repassent en P/C, lisent la fiche et tracent la zone sur une feuille.

L'enseignante passe et demande si les réglages sont corrects. Elle les aide à changer l'échelle puis leur fait préciser quelle position ils souhaitent pour le centre avant de s'en aller.

F. et J.L. travaillent ensemble mais ne savent pas comment faire pour modifier la position du centre de l'écran. Ils activent la commande Centre plusieurs fois, essaient diverses autres commandes sans aboutir. L'observateur intervient pour leur conseiller de déplacer d'abord la croix au point choisi. Ils commencent à le faire mais trouvent que ça ne va pas assez vite et se demandent s'il n'y a pas un moyen plus rapide.

*10 minutes :*

L'enseignante passe et remarque que la zone n'est toujours pas tracée. J.L. lui demande s'il n'y a pas une façon plus simple de définir le centre, par exemple en entrant ses coordonnées. Elle répond que non, qu'il faut utiliser les flèches. J.L. insiste pour savoir s'il existe alors des déplacements plus rapides. L'enseignante rappelle les différents modes de déplacement et J.L. note au fur et à mesure.

Ils sortent leurs calculatrices (Casio 8500G pour F. et TI85 pour J.L.) et décident «d'essayer quelques courbes»

F. trace sur sa calculatrice des représentations graphiques de  $f(x) = x^2$ ,  $e^x$ ,  $e^{-x}$ . Il rajoute ensuite un coefficient et voit le décalage. Il écrit ensuite sur sa feuille des calculs moyennement compréhensibles :

- si  $e^{-x} f(0) = 4$
- $e^{a \ln x}$
- $e^{-a} \quad e^{-0} + A = 4 \quad 1 + 3 = 4$

L'observateur lui demande ce qu'il fait. F. explique que la courbe obtenue vérifie  $f(0) = 4$  mais qu'elle est trop haute, qu'il faut l'aplatir et qu'il cherche.

Pendant ce temps, J.L. trace le graphe de  $e^{-x}$  sur  $[0,6]$ , puis celui de  $x^2$  et se fait confirmer par F. que la courbe doit bien rester à l'intérieur de la zone.

F. écrit :  $f$  est forcément décroissante :  $f' < 0$ , puis il essaie  $f(x) = e^{-x+x/6}$  sur sa calculatrice.

J.L. passe à DERIVE, entre  $\hat{e}^{-x}$  puis se demande s'il ne devrait pas déclarer plutôt une fonction.

*20 minutes :*

F. lui demande comment il a fait pour l'exponentielle. J.L. répond : Alt e puis dit qu'il vaudrait mieux déclarer et entre donc :  $F(x) := \hat{e}^{-x}$  puis la fait tracer.

L'enseignante passe et leur demande où ils en sont. Ils répondent qu'ils font des essais mais ont un problème : quand ils s'arrangent pour avoir  $f(0)=4$ , la courbe se décale. Elle les incite à

chercher et leur demande s'ils ont effacé le tracé de la zone. Ils répondent qu'ils ne l'ont pas encore faite tracer. Elle leur dit que ça pourrait les aider à mieux voir puis s'en va.

Ils essaient alors de tracer la zone, sans y arriver. F. déplace le curseur jusqu'à un point de la courbe, puis essaie le menu : Marque, puis le menu : Option puis, sans succès, diverses commandes. L'observateur leur conseille d'appeler l'enseignante.

L'enseignante arrive. F. lui demande comment on trace la zone. Elle explique que c'est en mettant en surbrillance et en utilisant la commande graPh comme pour les fonctions. F. le fait et l'enseignante s'aperçoit à cette occasion qu'ils sont toujours en mode discret. Elle les aide à passer en mode continu. F. se répète pour lui-même visiblement que «donc la zone, en fait, on la définit comme une fonction».

Ils quittent ensuite DERIVE et reprennent leur calculatrice. F. dit que la fonction doit être

dérivable même en dehors de  $[0,6]$  et propose d'essayer :  $\frac{1}{x+\frac{1}{4}}$

J.L. la fait aussitôt tracer par sa calculatrice. F. lui, entre sous DERIVE :

$$G(x) := \frac{1}{x+\frac{1}{4}}$$

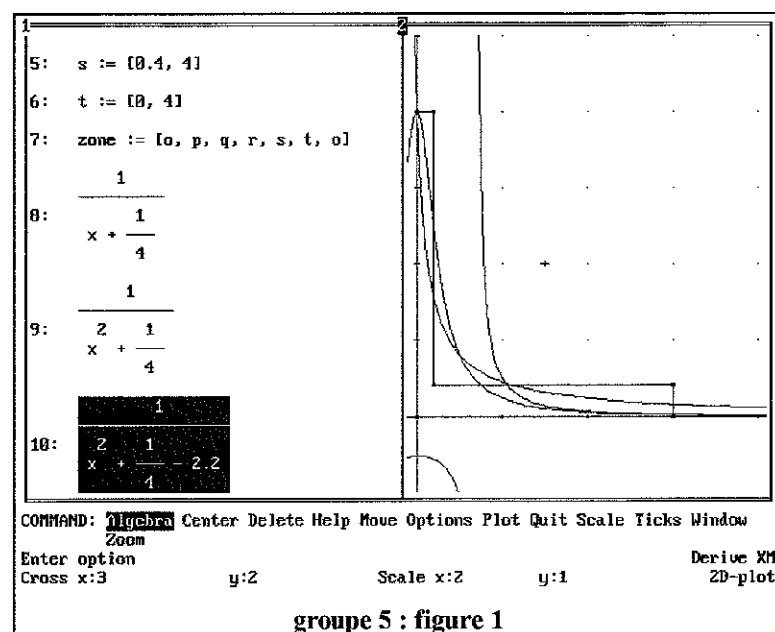
Le tracé ne reste pas dans la zone et J.L. en conclut qu'il faut la pousser, faire une translation.

F. rétorque que l'on n'aura plus alors  $f(0) = 4$ . Ils émettent l'idée qu'il faudrait rapprocher la courbe de l'axe des ordonnées puis J.L. se met à écrire un programme pour tracer la zone sur sa calculatrice, tandis F. essaie avec DERIVE :

$H(x) := \frac{1}{x^2+\frac{1}{4}}$  et la fait tracer. Elle sort aussi de la zone et il conclut : «C'est pas mieux».

Il écrit ensuite sur sa feuille :  $f(0.4) = 0.4$ , regarde cette égalité puis entre :  $K(x) := \frac{1}{x^2+\frac{1}{4}-2.2}$

et la fait tracer (peut-être a-t-il calculé  $H(0.4)$ , trouvé 2.4 et cherché à diminuer la valeur en enlevant 2.2). Le résultat est encore moins satisfaisant : la courbe passe dans les négatifs et a une asymptote verticale sur l'intervalle  $[0,6]$ . F. dit alors qu'il faudrait mettre un x.



30 minutes :

J.L. revient à son cahier de cours et cherche les notes du TD précédent. Il trouve des informations sur les fonctions conjointes : passage de la représentation de :  $x \rightarrow f(x)$  à celle de :  $x \rightarrow f(-x)$  et de celle de :  $x \rightarrow f(x)$  à celle de :  $x \rightarrow f(1-x)$ .

L'enseignante passe et leur demande quelle catégorie de fonctions ils cherchent. F. répond qu'ils cherchent des fonctions de la forme  $\frac{1}{x^2 + \text{cste}}$ , mais qu'ils pourraient aussi faire  $e^{-x}$ . Elle

les incite à ne pas mélanger les types, se fait montrer le graphe de H. F. explique qu'ils la trouvent pas mal mais qu'ils voudraient plus coller à l'axe des ordonnées. L'enseignante lui demande quelle transformation géométrique permet de le faire et F. répond : «une translation». Devant son air sceptique, il avoue ne pas savoir comment pousser la courbe comme il le veut, il lui semble qu'il «manque un x, quelque chose, je le sens parce que quand je veux remplacer ...»

L'enseignante lui demande alors comment il est passé de H à K. F. répond qu'il a essayé d'avoir à peu près :  $f(0.4) = 0.4$ . L'enseignante dit que DERIVE peut peut-être l'aider à faire ça et s'en va.

J.L. a une idée : poser la constante comme inconnue et faire  $H(0) = 4$ . Il propose d'essayer avec :  $\frac{1}{x^2 + bx + c}$  qu'ils décident d'appeler A, en revenant au début de l'alphabet.

F. rentre sous DERIVE :  $A(x, b, c) := \frac{1}{x^2 + bx + c}$

J.L. demande si le degré est «déterminé». F. se demande, lui, si on a assez d'informations pour déterminer b et c. Ils les passent en revue :

«J.L. : On sait que  $A(0) = 4$ , qu'elle est dérivable et qu'elle est décroissante, enfin pas forcément décroissante mais ...

F. : Obligatoirement de là à là (montre la partie correspondant à x inférieur à 0.4), ce qui veut dire que la dérivée sera négative.

J.L. : Il faudrait lui mettre  $A(0) = 4$ »

L'enseignante passe, regarde ce qu'ils font et s'en va.

F. fait calculer la dérivée, puis la déclare comme fonction :  $DA(x,b,c)$ . Ils veulent ensuite entrer les informations mais se demandent comment faire, vu qu'il y a trois variables :  $x$ ,  $b$  et  $c$  dans  $A$  et  $DA$ . Ils pensent que  $DERIVE$  n'acceptera pas de calculer  $A(0)$ . F. propose de déclarer  $A(0) = 4$ , active Declare puis Fonction mais quand il doit donner un nom, il se sent perdu et appelle l'enseignante.

L'enseignante arrive. Ils lui demandent si pour donner à  $DERIVE$   $A(0) = 4$ , on fait avec Declare. Elle répond que non, que c'est une variable, pas une fonction puis leur demande ce qu'ils veulent faire. Ils expliquent leur problème d'inconnues. L'enseignante leur demande alors si la fonction a été introduite par Déclare. Ils répondent que oui. Elle leur explique qu'alors la machine a bien pris trois variables et va les aider à se sortir de cette situation.

*40 minutes :*

Elle leur fait entrer  $A$  comme seule fonction de  $x$  : «tu vas retaper :  $A(x) :=$  et tu vas mettre ton second membre». (elle les aide à le faire avec les touches de recopie) puis leur indique qu'ils vont résoudre maintenant l'équation  $A(0) = 4$  et pour cela soit remplacer  $x$  par 0, soit plus simplement taper  $A(0)$ . J.L. lui demande si  $A(0)$  doit être fait avec Declare. Elle explique que non, qu'il ne s'agit pas de définir une fonction mais de calculer  $A(0)$ .

F. tape donc  $A(0)$  puis active la commande : *dévEloppe*. L'enseignante lui demande d'expliquer ce qu'il veut faire. F. répond qu'il veut que  $DERIVE$  écrive  $A(0)$ . Elle lui rappelle que c'est la commande *Simplifie* qu'il faut alors utiliser et non la commande *dévEloppe* puis s'en va. Ils le font et obtiennent :  $\frac{1}{c}$ .

J.L. anticipe ensuite ce qui reste à faire : écrire l'égalité avec 4 et utiliser la commande *resoL*. Il dit aussi qu'il est inutile d'utiliser  $DERIVE$  pour faire ce calcul mais l'utilise quand même et arrive ainsi à :  $c = \frac{1}{4}$ .

Ils tapent ensuite :  $A(0.4)$  et font simplifier cette expression, ce qui donne :  $\frac{25}{10b+25c+4}$

J.L. est étonné de la disparition des nombres décimaux mais il n'insiste pas et suit F. qui veut maintenant remplacer  $c$  par  $\frac{1}{4}$ . Ils le font par la commande *Substitue* et arrivent ainsi à :

$$\frac{25}{10b+25\frac{1}{4}+4}$$

F. utilise ensuite la commande *Auteur* et la touche  $F3$ , pour fabriquer l'équation :  $f(0.4)=0.4$ , tout en se demandant s'il pourrait faire aussi des inégalités.

J.L. lui répond que ce n'est pas la peine de faire des inégalités puisqu'il va trouver directement son inconnue :  $b$ . F. fait simplifier l'équation et obtient ainsi :  $\frac{100}{40b+41} = \frac{2}{5}$ , puis par la commande *resoL* :  $b = \frac{209}{40}$ . Il note le résultat sur sa feuille.

J.L. sort sa calculatrice pour tracer la fonction correspondante.

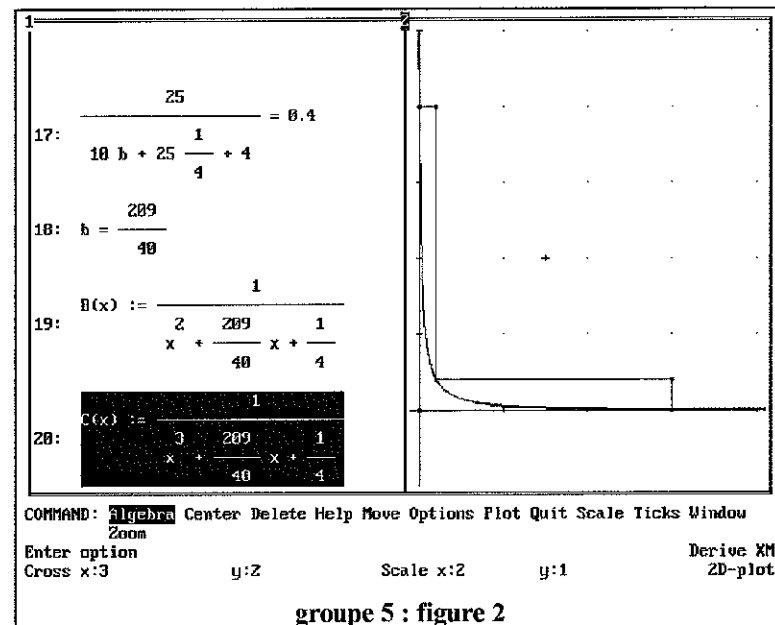
L'enseignante passe et leur conseille de nettoyer un peu l'écran graphique pour y voir plus clair.

45 minutes :

F. râle parce que les menus d'effaçage ne proposent pas d'effacer tout sauf la zone. Finalement il efface tout et fait retracer la zone. Ensuite, il déclare :  $B(x) := \frac{1}{x^2 + \frac{209}{40}x + \frac{1}{4}}$  et fait tracer. Il

constate que c'est bon. Ils sont tous les deux contents mais remarquent que la dérivée n'est pas nulle en 0.

J.L. propose d'écraser la courbe. et F. de remplacer  $x^2$  par  $x^3$ . Il le fait, de façon astucieuse, pour éviter de recopier toute l'expression, sans hésiter, et renomme la nouvelle fonction C. En faisant tracer, ils constatent qu'il n'y a pratiquement pas de différence avec B.



J.L. émet l'hypothèse que les changements concernent peut-être la partie correspondant à  $x < 0$  et F. propose de résoudre :  $f'(0) = 0$ . Il revient alors à l'expression de la dérivée dans la fenêtre Algèbre et décide de redéclarer la dérivée comme fonction d'une seule variable :  $x$ , comme ils l'ont fait pour A. J.L. n'est pas tout à fait sûr que ça va marcher mais lui dit d'y aller.

50 minutes :

Ils recopient l'expression de la dérivée et obtiennent un beep d'erreur avec un positionnement du curseur à la fin de l'expression. Ils pensent à une erreur de syntaxe : les deux points du début, les parenthèses ..., mais rejettent assez vite ces possibilités.

Ils retapent et obtiennent le même résultat.

L'enseignante arrive à ce moment là et ils lui racontent leur problème. Elle relit ce qui est tapé et ne voit rien à première vue (l'erreur est due aux affectations préalables de  $b$  et  $c$ , comme fonctions, et la fonction B n'apparaît même plus sur l'écran puisqu'elle a été effacée après son remplacement par C). Ils cherchent un moment, sans trouver puis l'enseignante se fait expliquer

en détail ce qu'ils ont fait. Ca ne lui donne pas d'idée. Elle vérifie sans y croire des questions d'intervalles.

J.L. dit alors que ça pourrait être b. Elle réagit aussitôt : «Qu'est-ce-que tu lui as fait à b ? b, tu l'as affecté à quelque chose ? Tu es en mode indifférencié majuscule / minuscule. T'as pas une fonction qui s'appelle b ?»

J.L. convient que oui et le problème est alors très vite résolu. L'enseignante fait désaffecter b en tapant :  $b :=$  , tout en leur rappelant qu'ils ont déjà rencontré ce problème à une séance précédente et qu'il faut y être attentif. Puis elle s'en va.

Ils recommencent et retapent l'expression de  $DA(x)$  . Ils rencontrent le même problème avec c, lui aussi affecté, mais cette fois-ci l'identifient tout de suite et désaffectent c.

*55 minutes :*

Ils recommencent et cette fois, ça marche. Ils poussent un Ouf de soulagement. Ils ont maintenant deux constantes et se demandent dans quel ordre écrire les conditions. F. est partisan de garder  $c = \frac{1}{4}$  puisque ça garantit que  $f(0) = 4$ .

Ils demandent donc la valeur de  $DA(0)$  et obtiennent :  $\frac{-b}{c^2}$  . Ils remplacent ensuite c par  $\frac{1}{4}$  , rajoutent un second membre (= 0) puis font résoudre par DERIVE pour obtenir  $b = 0$ .

Visiblement, ils ne sont pas satisfaits de ce résultat. J.L. réalise qu'en fait ils sont en train de changer la fonction qu'ils avaient complètement déterminée par les autres contraintes et que donc ça ne peut pas marcher. Il pense qu'ils devraient changer de type et prendre une fonction «comme celle de l'autre jour» (il fait un geste de courbe en cloche). Il prend sa calculatrice et teste :  $4\exp(-x^2)$  puis conseille à F. de faire de même. F. le fait.

J.L. lui explique pourquoi il a mis le coefficient 4 ; il précise aussi qu'il a repéré que le tracé se courbe très vite mais pas encore tout à fait assez et qu'il faut le baisser plus.

F. écrit sur sa feuille :  $4e^{-(x^2+ax+c)}$  puis : si  $x = 0$ , j'ai  $4e^{-c}$  donc  $c = 0$ .

*60 minutes :*

F. déclare sous DERIVE la fonction  $M(x,b,c) := 4\hat{e}^{-(x^2+A(x))}$

J.L. lui demande pourquoi il ne met pas de c. F. répond que ça le gênerait en 0

L'enseignante arrive, leur demande où ils en sont et repère qu'ils ont de nouveau une variable A déjà affectée comme fonction. Elle leur demande : «Alors, qu'est-ce-qu'il vous arrive ? Vous refaites les mêmes choses que tout à l'heure ?». Ils ne comprennent pas la question et l'interprètent visiblement au niveau de la stratégie gagnante utilisée qui consistait à introduire des paramètres puis à calculer leurs valeurs en écrivant les équations de contraintes. Ils répondent donc qu'ils recommencent pareil parce que ça a marché. Elle n'insiste pas et leur fait remarquer qu'ils ont oublié la puissance après l'exponentielle. F. s'étonne car il croyait que c'était automatique, puis remarque à cette occasion que la variable b figure dans le membre de gauche mais pas dans celui de droite. L'enseignante essaie une fois encore d'attirer son attention sur les problèmes qu'il va rencontrer («Mais, dis-donc, tu sais bien qu'il y a une différence : ton écran et la mémoire de la machine c'est pareil ?») mais F. ne comprend pas

l'allusion et propose alors de tout effacer. L'enseignante lui conseille alors de sauver d'abord sur le disque et l'observateur intervient pour suggérer à F. de choisir simplement d'autres noms que b et c.

J.L. répond : «Oh ! Nous dès que ça dépasse d, on est perdus» et ils rient.

Ils effacent les deux dernières entrées (expression de la fonction M) puis F. commence à déclarer une fonction. J.L. l'interrompt et lui dit de faire ça directement dans Auteur en tapant

$M(x) :=$  pour éviter les problèmes. Ils entrent  $M(x) := 4e^{-(x^2+1x)}$  . puis font calculer  $M(0.4)$  et

obtiennent :  $e^{\left(\frac{21}{5} - \frac{4}{25}\right)}$  . A partir de cette expression, ils fabriquent, par recopie, l'équation de

second membre 0.4 et font résoudre cette équation, obtenant :  $l = \frac{2}{5} - \frac{5\ln(10)}{2}$

*65 minutes :*

La valeur de l obtenue est substituée dans l'expression de  $M(x)$  et ils font tracer. Ils remarquent tout de suite que  $f'(0)$  n'est pas nul. L'observateur leur demande si la fonction est bien dans la zone (cette dernière n'est plus tracée). Ils décident de remonter jusqu'à l'expression 7 pour faire tracer la zone mais en sont à l'expression 43. Ils commencent à remonter les expressions puis appellent l'enseignante et lui demandent comment aller plus vite. Elle leur montre comment remonter page par page puis s'en va.

Ils font tracer la zone, constatent que la fonction est bien dedans mais ne savent plus quoi faire. L'observateur leur conseille d'écrire la condition  $f(0) = 0$  qu'ils veulent réaliser.

Ils font alors dériver  $M(x)$  et obtiennent :  $4e^{1x-x^2}(1-2x)$  .

F. note puis écrit sur sa feuille :  $f(0) = 0$ . Ils utilisent DERIVE pour résoudre cette équation. F. entre :  $M'(x) = 0$  mais J.L. lui conseille de substituer d'abord 0 à x. F. efface et suit ce conseil.

Ils arrivent ainsi à l'équation :  $4e^{1 \cdot 0 - 0^2}(1-2 \cdot 0) = 0$  , la font résoudre et obtiennent :

$l = 0$ .

*70 minutes :*

Ils constatent que ça ne marche pas, se demandent ce qu'il faudrait faire. Ils commencent par remettre en cause le 4, puis décident d'augmenter le nombre de paramètres. Ils entrent alors la fonction :  $N(x) := te^{-xY+ux+o}$  et F. commente : «Comme ça, je suis sûr de la trouver». Ils écrivent les conditions. C'est la fin de la séance.

Groupe 6 (séance 2 - élèves notés G. et F.) :

Les deux élèves ne travaillent pas réellement ensemble et F. s'investit peu dans cette activité de recherche, au début de la séance.

Les élèves chargent le fichier, tracent la zone mais n'arrivent pas à passer en mode continu (ils sont revenus en effet dans la fenêtre algèbre et ils ne trouvent pas Etat dans le menu Options). L'enseignante passe, leur explique leur erreur puis reprend les explications collectives de réglage du centre et de l'échelle.

*10 minutes :*

G. et F. lisent la fiche et G. note les noms des points qui définissent la zone : P, Q, R, S et T. Il écrit ensuite :

- $f(x) \in [0,6]$
- $f(0) = 4$
- $e^0 = 1 \quad 4e^x$

F. de son côté écrit :  $x=0 \quad e^x = 1 \quad 4e^x = 4$ , puis regarde ce que fait G.

L'enseignante passe, fait remarquer à G. que sa première ligne ne correspond à aucune des contraintes données et leur demande ce qu'ils cherchent. G. répond : «des exponentielles». Elle lui demande pourquoi des exponentielles et G. répond que c'est pour avoir une courbe dans le domaine. L'enseignante lui demande ensuite à quel type d'exponentielle il s'intéresse et G. précise qu'il cherche des exponentielles décroissantes, en donnant l'exemple de  $e^{-x}$ . L'enseignante lui demande alors de préciser les indications qu'il extrait de l'énoncé et s'éloigne un peu. Très vite, elle revient et fait préciser ces conditions par G. En guidant un peu, elle obtient :

- quand  $x \in [0,0.4]$ ,  $f(x) \in [0,4]$
- quand  $x \in [0.4, 6]$ ,  $f(x) \in [0,0.4]$

Elle refait aussi préciser le type de fonction cherché et G. répond : «des inverses d'exponentielles», en écrivant :  $e^{-kx}$ .

G. prend sa calculatrice puis la range. F. lit sa feuille et réfléchit sans écrire. G. regarde ce qu'il a déjà écrit. Il y a un long temps d'arrêt.

*20 minutes :*

G. passe sous DERIVE. L'enseignante arrive et G. lui demande comment on fait l'exponentielle. Elle rappelle l'information de la fiche et repart. G. entre  $f(x) := 4e^{-3x}$  et fait tracer. Il obtient une droite, supprime le tracé et dit à F. : j'ai dû oublier les parenthèses. Puis il prend sa calculatrice (Casio 7800G). Pendant ce temps, F., lui, a juste écrit sur sa feuille les conditions liées à la zone.

G. écrit :

- $\leq e^{-kx} \leq$
- $0.4 \leq x \leq 6$
- $0.20 \leq e^{-4x} \leq \sim 0$  (il calcule les valeurs d'encadrement avec la calculatrice et normalement devrait trouver, en limitant à deux décimales :  $0.11 \leq e^{-4x} \leq 2.68$ )
- $0 \leq x \leq 0.4$
- $1 \leq e^x \leq 1.4$  (on obtient à la calculatrice en fait : 1.49 environ pour 0.4)
- $0.67 \leq e^{-x} \leq 1$

F. de son côté écrit les conditions à vérifier sur  $[0,0.4]$  :

- $0 \leq x \leq 0.4$

- $0 \leq 4e^{-kx} \leq 4$
- $0 \leq e^{-kx} \leq 1$

L'enseignante passe et leur demande où ils en sont. Ils expliquent qu'ils cherchent la valeur de  $k$ . Elle leur demande alors s'ils cherchent la valeur de  $k$  précisément ou une condition sur  $k$ , puis, n'obtenant pas de réponse, elle reprend la première condition :  $f(0) = 4$  et demande à G. ce que vaut  $f(0)$  pour  $f(x) = e^{-kx}$ . G. répond d'abord 0, puis corrige en  $-k$ . L'enseignante demande alors la valeur de  $e^0$ , que G. donne correctement et il en conclut que  $f(0) = 1$ . Elle demande ensuite à G. ce qu'il faut faire pour obtenir  $f(0) = 4$  et G. pense tout de suite à multiplier par 4. Elle continue et lui demande de traduire les conditions pour une fonction du type :  $f(x) = 4e^{-kx}$ . G. commence à parler de dérivée. Elle l'arrête et lui demande si les fonctions de ce type sont ou non dérivables. G. répond qu'elles le sont. Avant de partir, l'enseignante lui demande s'il préfère faire les calculs à la main et G. répond que oui.

G. continue à écrire des inéquations sur sa feuille en s'aidant de la calculatrice :

- $0 \leq x \leq 0.4$
- $4(0.67)^k \leq 4e^{-kx} \leq 4$  (rappelons que  $e^{-0.4} \sim 0.67$ )
- $0.4 \leq x \leq 6$
- $4(2,5 \cdot 10^{-3})^k \leq 4e^{-kx} \leq 4(0.67)^k$  ( $e^{-6} \sim 2,5 \cdot 10^{-3}$ )
- $0 \leq f(x) \leq 0.4$

F. écrit de son côté :

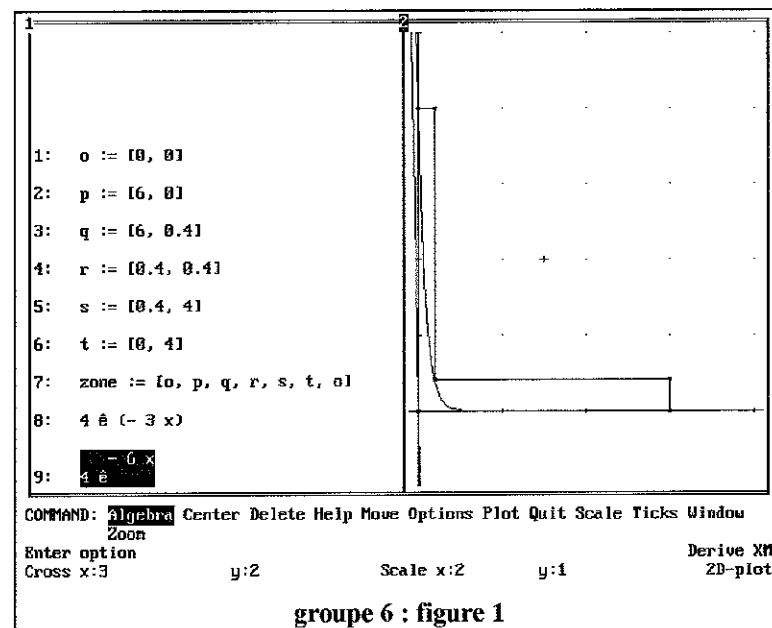
- $-\infty \leq -kx \leq 0$  et  $k > 0$

*30 minutes :*

G. continue et passe à la résolution de l'équation approchée correspondant à  $f(0.4) = 0.4$ , c'est

à dire :  $4(0.67)^k = 0.4$  qu'il transforme en plusieurs étapes en :  $\sqrt[k]{0.1} = 0.67$ . Il transforme ensuite les  $=$  en  $\leq$  et le dernier  $=$  en  $\geq$ . En effectuant des essais avec sa calculatrice, il trouve que la valeur 6 convient (en effet,  $0.1^{1/5} \sim 0.63$  et  $0.1^{1/6} \sim 0.68$ ). Il repasse alors en DERIVE et tape :  $f(x) := 4e^{-6x}$ .

L'observateur lui signale l'absence d'exponentiation et rappelle comment l'obtenir avec la touche  $^$ . Le tracé est bien situé dans la zone. Les deux élèves sont très contents, ils ne s'y attendaient visiblement pas tout à fait. F. conclut qu'on peut prendre n'importe quel  $k$  supérieur à 6.



groupe 6 : figure 1

L'enseignante passe et constate qu'ils ont obtenu une fonction qui marche en résolvant une inéquation. Elle demande à G. comment il a résolu son inéquation. Il répond que c'est en tâtonnant. Elle lui demande s'il n'avait pas d'autres moyens mais G. explique qu'il avait des racines kièmes, alors qu'il ne savait pas faire autrement. L'enseignante se fait montrer l'inéquation, se fait expliquer d'où sort le 0.67 et suggère à G. qu'il pourrait utiliser DERIVE, avant de lui demander comment il ferait, si c'était un devoir. G. pense aussitôt aux logarithmes, le dit et l'enseignante s'en va.

G. reprend la résolution. Il écrit successivement :

- $e^{-k0.4} \leq 0.1$
- $-0.4k \leq \ln 0.1$
- $k \geq -\frac{\ln 0.1}{0.4}$
- $k \geq 5.75$  (calculé à la calculatrice)

F., de son côté, a juste écrit :  $k \geq 6$   $f(x) = 4e^{-kx}$  et  $k \geq 6$

35minutes :

G. passe à la condition sur la dérivée :  $f'(0) = 0$  et réfléchit. Pendant ce temps, F. regarde l'écran puis copie sur G. ses deux dernières lignes. G. dérive f et obtient :  $f'(x) = -4ke^{-kx}$  puis :  $f'(0) = -4k$ . Il rit en disant à F. : «Je trouve  $k = 0$ »

L'enseignante passe, regarde ce que G. a fait et lui demande s'il a une seule solution ou plusieurs. G. répond : «une infinité». Elle lui demande alors de passer à la recherche de fonctions satisfaisant en plus :  $f(0) = 0$ . G. demande : «Avec d'autres fonctions ?». L'enseignante lui renvoie sa question en lui demandant si ses fonctions vérifient  $f'(0) = 0$ . G. convient que non et elle s'en va.

40 minutes :

G. réécrit la condition :  $f(0) = 0$ , puis l'équation de la tangente (en mélangeant forme générale et forme relative à  $x = 0$ ) :  $y - f(0) = f'(0)(x - x_0)$  et, au-dessous :  $y = f(0)$ . F. écrit de son côté :  $f'(0) = 0$ . Ils se mettent à discuter :

G. : « $f'(0) = 0$ , c'est la tangente, elle est sur (Ox).»

F. : «Je sais pas s'il faut prendre une exponentielle.»

G. : «Mais non, tu peux pas... parce que ta dérivée t'auras obligatoirement une exponentielle, donc t'auras -1.»

F. : «On pourrait prendre une droite à partir d'ici. Il fait un dessin et montre à G.»

L'enseignante passe et leur demande ce qu'ils cherchent. G. répond de façon très hésitante, en parlant de tangente «qui doit être comme ça» (il s'agit de la tangente en 0), puis en traçant par geste une courbe en cloche. Elle lui demande comment obtenir une courbe qui ait cette allure et G. propose une exponentielle avec des  $x^2$ . Elle lui demande pourquoi. G. ne répond pas et elle s'en va.

G. trace  $e^{-x^2}$  sur sa calculatrice, puis remplace par  $e^{-kx^2}$  et se demande pourquoi la dérivée serait nulle. Il rajoute un coefficient 4 devant puis calcule la dérivée  $f'(x) = -8kxe^{-kx^2}$ . Il réfléchit, réécrit la dernière ligne, dit : «Ben si !» mais ne semble pas trop sûr et n'écrit rien de plus. F. pendant ce temps trace sur sa calculatrice plusieurs exponentielles :  $e^{-x^2}$ ,  $2e^{-x^2}$

G. écrit à nouveau divers encadrements :

- $0.4 \leq x \leq 6$
- $0.16 \leq x \leq 36$  (calculatrice)
- $e^{-36} \leq e^{-x^2} \leq e^{-0.16}$
- $4e^{-k36} \leq 4e^{-kx^2} \leq 4e^{-k0.16}$

L'enseignante passe, incite F. à travailler et s'en va.

G. continue à écrire des encadrements :  $4e^{-k36} \geq 0.4$  et  $4e^{-k0.16} \leq 6$ . Il écrit donc que les encadrements initialement obtenus sont compris entre 0.4 et 6 puis résout en passant aux logarithmes pour obtenir :

- $k \geq \frac{\ln(3/2)}{0.4}$
- $k \geq 2.53$

*50 minutes :*

G. passe à l'autre inéquation qu'il résout de la même façon pour obtenir :

- $-k36 \geq \ln(0.1)$
- $k \leq \frac{\ln(0.1)}{36}$

L'observateur intervient pour demander si les inéquations écrites correspondent bien aux conditions. Ils repassent les deux inéquations et leur résolution en revue, lentement. G. regarde ensuite le graphique et corrige :  $0 \leq f(x) \leq 0.4$

F. écrit, lui :  $f(0) = 0$  et trace un tableau de variation :

|       |           |   |           |
|-------|-----------|---|-----------|
| x     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| f'(x) |           | + | -         |
| f(x)  |           | 4 |           |

G., pendant ce temps, résout l'inéquation correspondant à  $f(0.4) \leq 0.4$  et arrive aux conditions :

$$k \geq -\frac{\ln(0.1)}{0.16}$$

$$k \geq 14.39$$

Il propose alors d'essayer avec 15. Il passe en DERIVE, entre la fonction  $G(x) := 4e^{-15x^2}$  et la fait tracer. Le tracé est bien intérieur à la zone et ils sont satisfaits.

55 minutes :

L'enseignante passe et demande à G. s'il a trouvé -15 en résolvant son inéquation, puis si la fonction G trouvée vérifie bien  $G'(0) = 0$ . G. répond que oui. Elle insiste en demandant s'il a calculé  $G'(x)$  et bien vérifié. G. répond que oui. Elle lui demande ensuite comment il prouve que la fonction reste bien dans la zone. G. répond qu'il a vérifié toutes les équations. Elle demande des précisions. G. montre les inéquations et dit qu'il a utilisé le graphique pour résoudre. Elle semble sceptique et, lui montrant deux lignes successives de son calcul, lui demande comment il est passé de l'une à l'autre. G. semble enfin comprendre ce que l'enseignante attend de lui et dit qu'il a utilisé le fait que l'exponentielle est strictement décroissante. L'enseignante commente et conclut qu'il peut alors effectivement démontrer que quand k est plus grand que la valeur qu'il a trouvée, la fonction vérifie bien toutes les conditions. Elle en vient ensuite au sens de variation et demande, avant de s'en aller, si la décroissance est nécessaire. G. n'est pas sûr.

60 minutes :

G. réfléchit puis discute avec F. de la décroissance. F. dit que rien ne prouve que la fonction doit être décroissante puis dessine sur sa feuille une courbe qui débute comme une exponentielle puis oscille sur  $[0.4,6]$ . Il efface sans montrer à G.

L'enseignante repasse et demande à G. ce qui le gêne. G. fait des gestes pour montrer qu'il n'a pas le choix : en partant de  $x=0$ , il est bien obligé d'avoir une fonction décroissante. Elle lui demande alors s'il pourrait dessiner, dans la partie horizontale de la zone, des allures de fonctions autres que celles qu'il a déjà trouvées. F. fait un geste de remontée mais l'enseignante ne le voit pas. Elle précise :

«Est-ce que tu pourrais par exemple en avoir une, telle que  $f(6) = 0.4$  ?»

G. reste d'abord silencieux puis répond que oui et montre une courbe qui descend jusqu'à la valeur 0 puis remonte pour atteindre 0.4 pour  $x = 6$ . L'enseignante acquiesce et lui demande de citer des exemples de fonctions qui sont pas monotones. G. cite les paraboles. Elle essaie de l'orienter vers les fonctions trigonométriques en évoquant la physique, mais il ne saisit pas

l'allusion. F., de son côté, redessine des oscillations et l'enseignante voit son tracé. Aussitôt elle s'adresse à lui et lui demande ce qu'il dessine, puis comment on peut obtenir de telles oscillations. C'est G. qui répond : «avec des cosinus et des sinus». L'enseignante s'en va.

G. reprend sa calculatrice et fait tracer la fonction  $e^{\cos x}$ , qui est monotone sur le tracé.

L'enseignante repasse et leur fait prendre conscience que le cosinus variant entre -1 et +1, l'exponentielle va varier entre  $\frac{1}{e}$  et  $e$  et que donc, ça ne peut marcher. Elle conclut que la composition n'est pas ici l'opération pertinente et demande ce qu'ils pourraient faire d'autre. G. propose d'ajouter. Elle conseille d'essayer et s'en va.

*70 minutes :*

G. écrit à nouveau les encadrements correspondant aux contraintes sur  $[0.4, 6]$  :

- $0.4 \leq x \leq 6$
- $0 \leq f(x) \leq 0.4$
- $\cos 0.4 \leq \cos x \leq \cos 6$

puis prend sa calculatrice et dit que ça ne marche pas car  $\cos 6$  est plus grand que 0.4. Il passe alors aux sinus, calcule  $\sin 0.4$  et  $\sin 6$ , trouve environ -0.27 et 0.38 et, satisfait cette fois-ci, écrit :

- $-0.27 \leq \sin x \leq 0.38$
- $e^{0.4} < e^x < e^6$
- $e^{0.16} \leq e^{x^2} \leq e^{36}$

puis il s'arrête et reprend sa calculatrice.

F. de son côté écrit :

- $f(x) = 4e^{kx}$
- $g(x) = \cos x$

puis essaie d'imaginer des tracés mais sans poser le crayon.

L'enseignante passe, repère le passage erroné de l'encadrement de  $x$  à l'encadrement de  $\cos x$  et fait voir à G. son erreur, en le questionnant sur le sens de variation de la fonction cosinus. G. se plaint qu'il n'y arrive pas. Elle essaie de les aider en faisant référence aux mouvements amortis vus en physique. G. répond que le programme de révision n'est pas encore passé. Elle leur demande d'essayer quand même de se souvenir des courbes des mouvements amortis vus en physique. Ils le font tous les deux et produisent des allures correctes. Elle les aide alors à interpréter ces tracés comme résultant de produits de cosinus et d'exponentielles décroissantes puis leur demande d'écrire tout ça proprement et s'en va.

G. écrit :  $f(x) = e^{-kx^2} \cos bx$  ( $f$  oscille entre  $e^{-kx^2}$  et  $e^{kx^2}$ ) puis s'arrête.

F. écrit :  $f(x) = 4e^{-15x^2}$   $g(x) = \cos bx$   $4e^{-15x^2} \cos bx =$

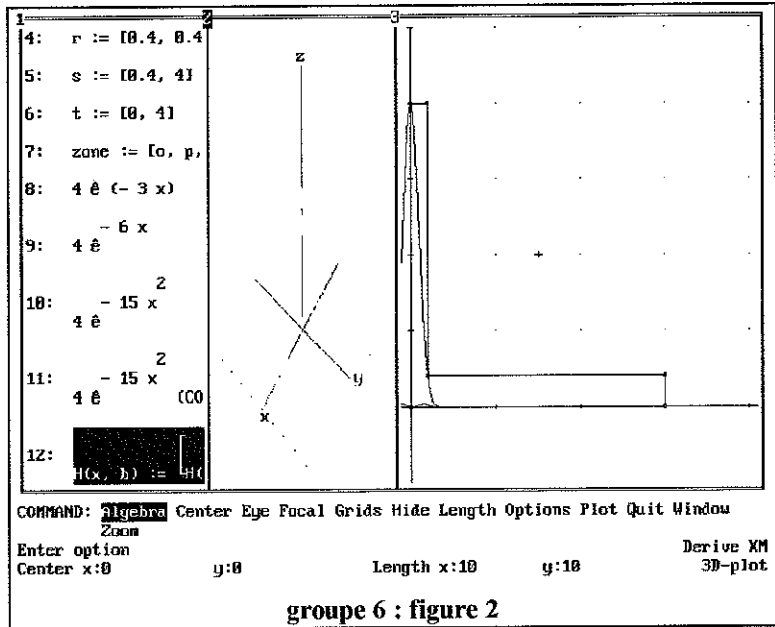
*80 minutes :*

L'enseignante revient. G. lui dit qu'il va falloir un cosinus carré et attend son approbation comme s'il n'avait pas osé prendre la décision lui-même. Elle acquiesce puis attire son attention sur le fait que la valeur en 0 doit être 4 Elle lui indique ensuite qu'en utilisant la fonction VECTEUR et en faisant varier b, il pourrait obtenir toute une famille de fonctions.

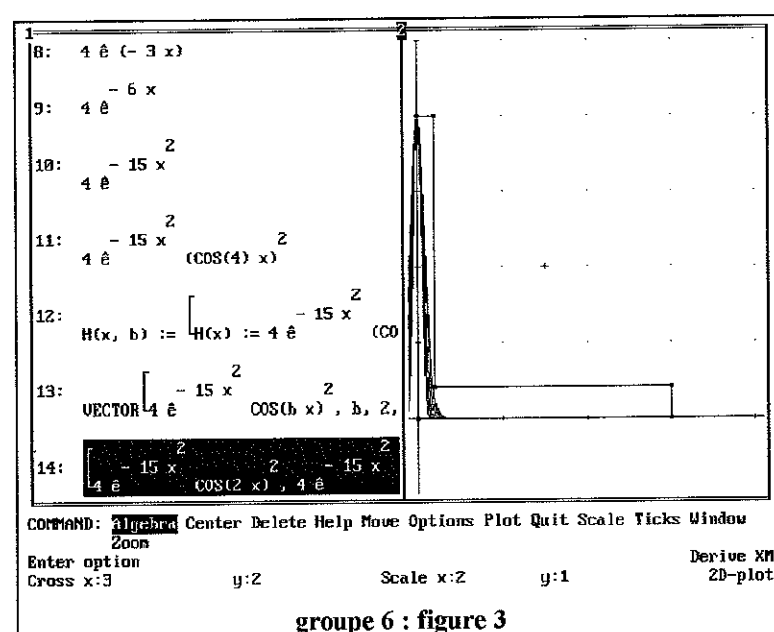
G. passe à DERIVE et entre  $H(x) := 4e^{-15x^2} (\cos(b)x)^2$ .

Il se demande ensuite comment choisir b. F. s'associe à la recherche. En utilisant la commande : Substitue, il substitue b à x. Visiblement, ce qu'il obtient ne le satisfait pas. Il revient à l'expression initiale et, cette fois-ci, substitue 4 à b. Ils font tracer et constatent que la courbe ne convient pas : elle passe par l'origine et si elle oscille au départ, se confond très vite avec l'axe Ox.

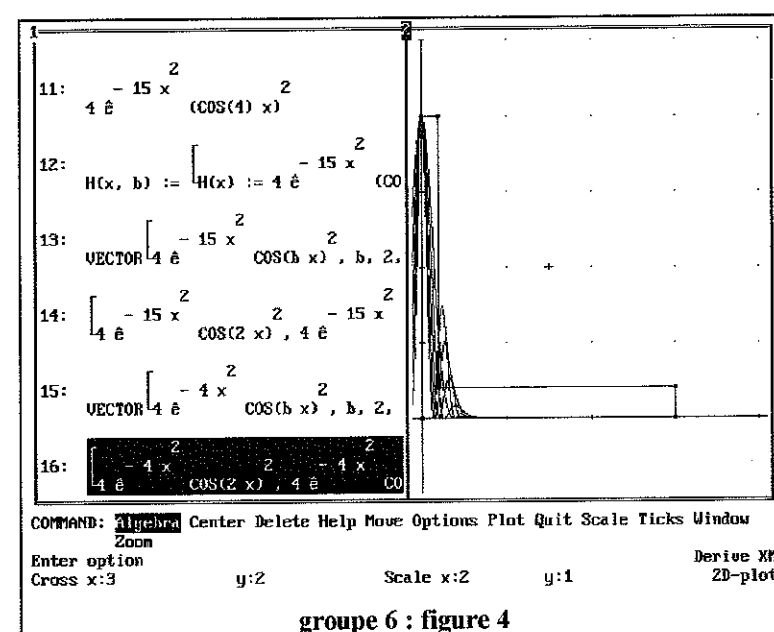
G. entre alors l'expression :  $H(x,b) := H(x) := 4e^{-15x^2} (\cos(b)x)^2$  et fait tracer.



Le fait qu'il y ait deux variables branche sur un tracé 3D. L'observateur leur explique ce qui se passe ainsi que l'erreur de parenthésage faite dans le cosinus. Ils corrigent donc, puis veulent utiliser la fonction VECTEUR. L'enseignante passe et, en réponse à une question de G., indique la syntaxe de la fonction VECTEUR : parenthèses, valeur minimum, valeur maximum et pas. Elle guide ensuite le choix des valeurs de b en interrogeant G. sur les zéros de la fonction cosinus et leur abscisses approximatives. G. propose finalement d'aller de 2 à 6 par pas de 1



Au tracé, on ne voit pas les oscillations car la courbe est trop amortie. L'enseignante explique ce qui se passe et conseille d'essayer un amortissement moins fort. G. au départ propose un  $k$  plus grand mais elle le fait rectifier et finalement il essaie avec  $k=4$ , guidé pour effectuer les changements. La séance se termine sur le tracé correspondant. Il y a bien des oscillations cette fois mais les courbes ne restent pas toutes dans la zone.



### SYNTHÈSE COLLECTIVE

L'enseignante rencontre au départ des problèmes matériels : la salle est trop éclairée, l'écran n'est pas bien adapté. On baisse en partie les stores, on recule la machine, ce n'est pas merveilleux mais on y voit un peu.

Elle charge le fichier Zone, règle le tracé de la zone puis écrit les conditions à satisfaire au tableau, en les faisant formuler sous forme algébrique par les élèves. Elle souligne que

beaucoup n'ont pas écrit ces inégalités mais écrit simplement l'équation  $f(0.4) = 0.4$ , en imposant à la courbe de passer par le coin de la zone.

Elle demande ensuite les grandes familles qui ont été explorées et note, au fur et à mesure, les familles citées par les élèves, tout en précisant que beaucoup ont travaillé par essais et erreurs mais qu'on veut maintenant travailler de façon plus systématique. Sortent ainsi successivement : les exponentielles, les hyperboles et les courbes définies par intervalles incluant exponentielles, cosinus, hyperboles et droites.

L'enseignante choisit de débiter par les fonctions définies par intervalles et plus particulièrement par celles affines par morceaux. Sur la suggestion d'un élève, elle propose de prendre deux droites d'équations respectives :  $y = ax+b$  et  $y = cx+d$  et aide à formuler deux conditions à vérifier pour chaque fonction affine :  $f(0) = 4$  et  $f(0.4) = 0.4$  pour la première,  $f(0.4) = 0.4$  et  $f(6) = 0$  pour la seconde.

Elle attire ensuite l'attention sur les dérivées à gauche et à droite en 0.4, demande ce que vaudront ces deux dérivées, à savoir respectivement  $a$  et  $c$ , puis fait remarquer que l'on n'aura donc une fonction dérivable que si  $a=c$ .

On conclut ensuite collectivement que les deux droites sont alors les mêmes puisqu'elles sont parallèles et ont un point commun. L'enseignante fait alors chercher l'équation d'une telle droite. La condition  $f(0) = 4$  donne directement  $b = 4$ . Revenant à DERIVE, l'enseignante substitue 4 à  $b$  puis fait résoudre par DERIVE l'inéquation :  $f(0.4) \leq 0.4$ , obtenant :  $a \leq -9$ . Elle fait ensuite dessiner la droite correspondant à  $a = -9$ . Celle-ci n'est guère visible. L'enseignante essaie d'améliorer cette visibilité en projetant sur un autre support, sans grand succès. Elle reproduit alors le tracé au tableau pour démontrer que la droite coupe l'axe horizontal avant  $x = 6$  et donc ne peut convenir. Les droites et les fonctions affines par morceaux sont donc ainsi éliminées.

Les élèves proposent ensuite différents types de raccord, par exemple des raccords de deux paraboles, l'une décroissante, l'autre croissante (l'enseignante leur donne ce problème à chercher chez eux), des raccords parabole, droite, parabole, sur lesquels elle décide de ne pas s'attarder.

Un élève propose ensuite d'utiliser un polynôme du quatrième degré. L'enseignante fait préciser le nombre de paramètres et les conditions utilisables pour les déterminer, puis demande que l'on se concentre sur les familles de fonctions réellement essayées. Ceci fait resurgir les exponentielles et les hyperboles.

L'enseignante choisit de commencer par les exponentielles de la forme  $4e^{-ax}$ . Elle fait préciser la raison du 4 et évoque les essais infructueux effectués par divers groupes consistant à ajouter 3 à  $e^{-ax}$  au lieu de multiplier par 4. Elle démontre ensuite la dérivabilité, en utilisant le cours, puis passe aux conditions de zone. Elle fait reformuler la condition :  $f(0.4) \leq 0.4$ , puis entre la

fonction  $f(x) := 4e^{-ax}$  sous DERIVE, fait calculer  $f(0.4)$ , ce qui donne :  $4e^{\frac{-2a}{5}}$ , construit

l'inéquation :  $4e^{\frac{-2a}{5}} \leq 0.4$  et la fait résoudre pour aboutir à :  $a \geq \frac{5\ln(10)}{2}$ . ou en valeur approchée :  $a \geq 5.75...$

L'enseignante demande ensuite si cette condition nécessaire est bien suffisante. Plusieurs élèves répondent que oui et l'un d'eux explique que c'est parce que la dérivée de  $f$  étant négative,  $f$  est

décroissante. Elle commente et détaille cette justification pour conclure qu'on a donc obtenu toute une famille de fonctions exponentielles dont on va faire tracer des représentants avec la fonction VECTEUR comme certains l'ont fait pendant le TP.

Elle entre donc : VECTEUR ( $4e^{-ax}$ ,  $a$ ,  $\frac{5\ln(10)}{2}$ , 10, 1) fait simplifier et tracer. Rien ne se passe. Elle corrige alors l'expression en remplaçant 10 par  $\frac{5\ln(10)}{2} + 10$ , et demande de nouveau le tracé. On ne voit pas grand chose. Certains proposent de faire un zoom. L'enseignante intervertit les fenêtres algébrique et graphique car l'algébrique a l'air mieux éclairée ; cela ne change rien. Elle change ensuite les couleurs et, après deux essais, obtient une visibilité à peu près correcte. Les courbes tracées sont très fortement décroissantes et s'écrasent très vite sur l'axe Ox. L'enseignante commente le phénomène et explique que si l'on voulait bien les distinguer, il faudrait zoomer très très fort. Elle conclut en rappelant que l'on a montré que, pour tous les  $a$  plus grands que  $\frac{5\ln(10)}{2}$ , la courbe représentative reste dans la zone.

L'enseignante passe ensuite aux autres types d'exponentielles utilisées pour arriver à satisfaire la contrainte :  $f(0) = 0$ , ce qui n'est pas possible avec le type précédent. Des élèves proposent aussitôt les fonctions de la forme  $e^{-ax^2}$ . Elle demande la raison du  $ax^2$ , puis se place tout de suite dans un cadre plus général, celui de fonctions de la forme :  $f(x) = 4e^{u(x)}$  dont elle demande la dérivée, écrivant sous la dictée des élèves :  $f'(x) = 4u'(x)e^{u(x)}$ . Elle retraduit ensuite la contrainte de dérivée en :  $u'(0) = 0$  et les amène à remarquer que le premier choix effectué :  $u(x) = -ax$ , conduisait à une dérivée  $u'$  constante égale à  $-a$ , donc ne s'annulant pas pour  $a$  non nul, tandis que le choix :  $u(x) = ax^2$ , en conduisant à :  $u'(x) = 2ax$ , donne une dérivée qui s'annule bien en 0.

L'enseignante demande ensuite le sens de variation de ce type de fonction. Les élèves répondent qu'elles seront décroissantes et, se replaçant dans le cadre général, elle fait le lien avec le signe de  $u'$ , négatif pour  $x$  positif si  $a$  bien sûr est positif.

On passe ensuite aux conditions à satisfaire pour assurer une représentation graphique dans la zone. L'enseignante demande à ceux qui ont résolu la condition de dire ce qu'ils ont trouvé. La valeur  $a = 15$  sort. Elle fait expliquer comment cette valeur  $a$  a été obtenue.

H. explique qu'il a obtenu l'inégalité :  $a \geq \frac{25\ln(10)}{4}$ , et que ça fait 14.33.

L'enseignante écrit ceci au tableau et lui demande comment il en est arrivé là. H. fouille dans ses notes et s'y perd un peu. Elle reprend alors la main et, utilisant DERIVE, entre l'inéquation :  $f(0.4) \leq 0.4$  et la fait résoudre, tout en commentant la résolution.

#27  $F(x) := 4e^{-ax^2}$

#28  $f(0.4) \leq 0.4$

#29  $a \geq \frac{25\ln(10)}{4}$

aboutissant donc à l'inéquation donnée par H.

L'enseignante demande ensuite si cette condition suffit à garantir que la courbe soit dans la zone. C'est un autre élève Fa. qui répond et elle l'aide à formuler que la condition est bien suffisante puisque la fonction est positive et décroissante sur l'intervalle considéré.

Revenant à DERIVE, elle fait tracer une famille de courbes solutions en utilisant la fonction VECTEUR :

$$\#30 \quad \text{VECTEUR} \left( 4e^{-ax^2}, a, \frac{25\ln(10)}{4}, \frac{25\ln(10)}{4} + 4, 1 \right)$$

Les courbes obtenues n'ont pas de façon évidente, à l'oeil, une tangente horizontale en  $x = 0$ . Elle se confondent très vite aussi avec l'axe des abscisses. En revanche, on voit bien la première tracée «passer» par le point (0.4,0.4). L'enseignante commente tous ces phénomènes et évoque des zooms possibles pour mieux voir la forme au voisinage de  $x = 0$ .

Elle fait ensuite remarquer que toutes les fonctions considérées jusqu'à présent ont une asymptote horizontale : l'axe Ox et demande si c'est nécessaire. Les élèves, visiblement, n'en sont pas convaincus, mais le plus souvent n'ont pas réussi à trouver d'autres solutions. Même ceux qui ont introduit des fonctions trigonométriques, l'ont fait en général en amortissant par des exponentielles, donc se sont retrouvés avec la même asymptote.

L'enseignante donne la parole à S. qui dit avoir introduit des cosinus. S. propose :

$$f(x) = \cos^2(x)4e^{-ax^2}$$

Elle replace cette proposition dans le cadre plus général de ceux qui ont cherché des fonctions de la forme  $f(x) = \cos^2(bx)4e^{-ax^2}$  et demande à quel objectif ce choix correspondait. S. reparle d'asymptote. L'enseignante lui fait remarquer que justement ça ne change rien au niveau de l'asymptote et S., aidé, finit par exprimer que les cosinus rajoutent des ondulations et que l'on veut obtenir ainsi des fonctions qui ne sont pas nécessairement monotones. Il rajoute cependant que ça ne marche pas. L'enseignante lui fait préciser s'il a fait des zooms pour vérifier qu'il n'y avait pas d'oscillations. S. confirme que oui. Elle décide donc de le faire collectivement pour essayer de comprendre. Les valeurs des coefficients sont fixés par les élèves et elle entre :

$$\#31 \quad f(x) := 4\cos^2(4x).e^{-15x^2}$$

puis fait tracer. On ne voit effectivement pas d'oscillations, la courbe est très amortie. L'enseignante conclut que la valeur 15 choisie est trop grande et s'apprête à la diminuer, mais c'est la fin de la séance et des problèmes de transports empêchent tout débordement. Elle termine en déclarant qu'elle reviendra sur cette question le lendemain.

#### ANALYSE A POSTERIORI

L'observation de cette séquence est, nous semble-t-il, tout à fait intéressante si l'on se réfère à notre questionnement initial ainsi qu'aux potentialités généralement attribuées au logiciel DERIVE pour l'enseignement des mathématiques.

Comme dans la plupart des situations observées, les élèves se lancent dans la recherche proposée et y travaillent sans manifester la moindre lassitude toute la durée de la séance, à tel point que la seconde séance dépassera le temps prévu de près d'un quart d'heure sans que personne ne le fasse remarquer. Le problème proposé est visiblement à leur portée, tout en constituant un vrai problème. Il offre l'avantage de pouvoir être relancé de diverses façons, en

ajoutant certaines contraintes, ce qui aide à gérer l'hétérogénéité dans l'avance des différents groupes. Il n'est d'ailleurs nullement épuisé quand s'achève la séance.

L'éventail des fonctions produites par l'ensemble des groupes est plus large que ce que l'enseignante avait prévu dans son analyse a priori. Il n'y a manifestement aucune réticence des élèves à faire intervenir des fonctions exponentielles, encore relativement nouvelles pour eux - le rappel de la séance précédente et l'introduction à cette occasion de la fonction :  $x \rightarrow \exp(-x^2)$  n'y est sans doute pas complètement étranger. Les six groupes observés démarrent par des exponentielles. Ceci a l'avantage a priori de limiter le nombre de paramètres intervenant dans la définition de la fonction par rapport au choix de fonctions homographiques, mais il faut souligner que le groupe 5 qui revient très vite à des fonctions rationnelles gère tout à fait économiquement et efficacement, tant que la question de la dérivabilité n'est pas posée, le choix des paramètres. L'habitude de se situer par rapport aux fonctions de référence y contribue sans doute pour beaucoup. On peut souligner également que les recherches ne se limitent pas, dans la catégorie des fonctions exponentielles, aux seules fonctions de la forme :  $x \rightarrow \exp(-ax)$  et  $x \rightarrow \exp(-ax^2)$ , mais que plusieurs groupes cherchent à jouer aussi sur la valeur de l'exposant de  $x$ . Les relances en termes de recherche de fonctions non monotones aboutissent, plus ou moins aidées, à la production de tels objets, dans plusieurs groupes, sous des formes diverses : sinusoides amorties par des exponentielles ou sommes de sinusoides et d'exponentielles. Il y a donc, au terme de cette phase de recherche en groupes, une richesse de production évidente de l'ensemble de la classe.

Comme l'enseignante le mentionnait dans l'analyse a priori de la situation, il semble bien que l'utilisation de DERIVE ait aidé, de façon non négligeable, cette production. Mais il est utilisé essentiellement pour les potentialités de tracé rapide, voire de tracé de familles de fonctions et de contrôle perceptif des tracés qu'il offre, une fois la zone tracée à l'écran. Il sert plus marginalement à résoudre des équations et à calculer des dérivées. De ce point de vue, il y a un écart certain entre la gestion de l'articulation graphique / algébrique sous DERIVE que l'enseignante met en oeuvre dans la synthèse et l'articulation telle que la font fonctionner les élèves pendant le travail en groupes.

Si cette articulation graphique / algébrique interne à DERIVE reste limitée dans le fonctionnement des élèves, c'est, on le voit clairement ici, parce que pour ces élèves la calculatrice est visiblement l'outil technologique familier, spontanément utilisé. Très peu d'élèves possèdent des calculatrices dotées de possibilités de calcul formel mais ceci ne semble pas doter DERIVE automatiquement d'un fort plus algébrique. Pour les tâches numériques ou algébriques mais qu'ils arrivent à ramener au numérique (par exemple, pour la résolution d'équation, en couplant avec la résolution à la main ou en bricolant une résolution approchée par essais/erreurs) la tendance générale consiste à revenir à la calculatrice. Le groupe 6 le met tout particulièrement en évidence mais ce n'est pas le seul, tous les groupes sauf le groupe 1 utilisant les calculatrices. Le groupe 2, par exemple, après avoir vérifié perceptivement avec DERIVE la conformité de la forme de la représentation graphique de la fonction  $x \rightarrow 4\exp(-5x^2)$ , repasse en P/C pour trouver une valeur convenable du coefficient de  $x^2$  et, au lieu d'utiliser la puissance formelle de DERIVE, bricole la résolution approchée de l'équation  $f(0.4)=0.4$ . C'est aussi le cas du groupe 3, qui repasse en P/C pour résoudre l'équation et utilise ensuite la calculatrice pour obtenir une valeur numérique approchée. Le travail du groupe 5 sur lequel nous reviendrons montre bien d'ailleurs les connaissances DERIVE nécessaires pour piloter efficacement une telle résolution et les incertitudes que peuvent rencontrer des élèves moyennement familiers avec DERIVE comme ceux-ci face à ce pilotage. En revanche, on

notera que le calcul des dérivées, même lorsqu'il est élémentaire comme dans le cas des exponentielles, est le plus souvent effectué avec DERIVE et non à la main.

La calculatrice sert souvent aussi à effectuer des premiers essais de fonctions, à s'assurer de la conformité de l'allure. En revanche, très peu d'élèves vont se lancer dans la programmation du tracé de zone sur leur calculatrice - tracé qui est déjà implanté sous DERIVE et ne correspond pas sans doute à leur utilisation ordinaire de la calculatrice, même s'il est tout à fait possible (F. essaie dans le groupe 5 mais abandonne assez rapidement). Même sans effectuer de tracé de zone, dans le cas de fonctions monotones, il serait tout à fait possible de tester la conformité des tracés à la calculatrice puisqu'il suffit de contrôler la valeur de la fonction choisie en 0.4, ce que permet le déplacement du curseur. En fait, les élèves ne se lancent pas non plus dans cette voie et préfèrent contrôler perceptivement sous DERIVE l'adéquation des tracés, ce qui est effectivement plus économique et tout à fait efficace, vu la taille de l'écran. Il semble donc que c'est via l'existence de cette zone et via les contrôles perceptifs commodes qu'elle permet que se manifeste principalement pour les élèves observés l'utilité particulière de DERIVE par rapport à la calculatrice dans cette situation et que se trouve compensée la différence de familiarité avec les deux environnements.

Cette observation montre également les connaissances DERIVE nécessaires à une résolution non perturbée du problème posé, connaissances qui sont loin d'être stabilisées dans la plupart des groupes. On ne peut manquer d'être frappé par exemple par les difficultés rencontrées en début de séance pour aboutir à un tracé convenable de la zone (problèmes de réglage de l'échelle, de centrage, de passage en mode continu) et le fait que les rappels fournis dans la fiche élève (cf. annexe page 207) sont tout à fait insuffisants à ce niveau. Dans la première séance, l'enseignante doit intervenir personnellement dans la plupart des groupes et certains errent un quart d'heure à vingt minutes avant d'obtenir le tracé de la zone. Dans la seconde séance, forte de l'expérience précédente, l'enseignante gère collectivement cette première phase et cette gestion se révèle beaucoup mieux adaptée au public considéré.

Les difficultés rencontrées ne s'arrêtent pas là. Quelques groupes, en dépit du rappel de la fiche, n'introduisent pas l'exponentielle par  $\text{Alt } e$  et se retrouvent avec des tracés 3D sans comprendre ce qui leur arrive. Là encore, l'intervention de l'enseignante est nécessaire. Plus nombreux sont ceux qui ayant introduit correctement l'exponentielle, par analogie sans doute avec le fonctionnement de la calculatrice, oublient l'exponentiation - non rappelée dans la fiche - et se retrouvent donc, suivant l'exposant de  $x$  choisi avec des droites ou paraboles. Plusieurs, dans ce cas, s'en sortent cependant de façon autonome.

Ce n'est que lorsque ces premières difficultés sont franchies que va commencer véritablement la recherche assistée par DERIVE. D'autres difficultés interviendront ensuite dans certains groupes mais marginales par rapport à celles que nous venons de citer comme celle rencontrée par le groupe 5, liée à la double affectation des lettres que l'enseignante aura d'autant plus de mal à repérer que le curseur clignotant ne se positionne pas sur la lettre incriminée et que les expressions correspondantes ont été entre-temps effacées. On notera aussi dans l'utilisation de la fonction VECTEUR la nécessité d'avoir un intervalle  $[a,b]$  pour les valeurs du paramètre tel que  $b=a+np$ ,  $p$  étant le pas, nécessité qu'il n'est pas évident de repérer puisque si elle n'est pas remplie, il ne se passe rien.

Mais, même si les élèves, une fois franchie la première phase, ne rencontrent pas de difficultés majeures liées à DERIVE dans leur recherche et arrivent à se débrouiller avec ce qu'ils en connaissent, du fait du couplage P/C et calculatrice, leur comportement montre dans beaucoup de cas des incertitudes sur la façon d'entrer et manipuler les fonctions : faut-il les déclarer ?

suffit-il d'écrire  $f(x) := ?$  comment faire évaluer une fonction en un point ? ainsi qu'au niveau du déplacement à l'intérieur des expressions et la gestion des éventuelles substitutions. A l'écoute des bandes enregistrées, on ne peut manquer d'être frappé par le nombre de frappes de touches et le temps pris par des opérations qui nous semblent tout à fait élémentaires, preuve que ces dernières ne sont pas encore routinisées de façon économique. Ceux qui se débrouillent le mieux semblent ceux qui conjuguent astucieusement l'utilisation des commandes F3 et F6 dans des recopies relativement artisanales, mais tout à fait efficaces.

Cette observation montre bien aussi l'économie de la recherche dans un tel environnement et le rôle joué par les stratégies d'essai/ erreur appuyées sur des contrôles perceptifs directs. Elle montre aussi que l'exploitation des feed back reçus reste, comme on pouvait s'y attendre, relativement superficielle : les élèves préfèrent essayer directement autre chose que se lancer dans une interprétation fouillée des feed back reçus. Le groupe 4 par exemple, à un moment, fait tracer la courbe représentative de  $x \rightarrow 4\exp(-6x^4)$  puis décide d'augmenter l'exposant de  $x$  pour faire rentrer la courbe dans la zone. Contrairement aux attentes, la nouvelle courbe se trouve au voisinage de 0 extérieure à la précédente et quasiment horizontale. Les élèves se bornent à enregistrer le phénomène et repassent à l'exposant 2.

L'enseignante prévoyait dans son analyse a priori des difficultés pour enclencher une recherche systématique, une traduction algébrique des contraintes imposées, la justification que les fonctions trouvées satisfont bien ces contraintes. Elle prévoyait de faire des interventions systématiques dans ce sens auprès des groupes. Ces interventions sont manifestes dans les groupes observées tout comme le succès limité qu'elles obtiennent. Les élèves cherchant au départ, et cela est naturel, des fonctions décroissantes, les contraintes assurant que le tracé reste dans la zone se traduisent en fait par la seule contrainte :  $f(0.4) \leq 0.4$  Cette contrainte n'est pas en général explicitée d'emblée par les élèves. C'est une contrainte qui va apparaître dans l'action, par le repérage de la position stratégique du coin de la zone, l'essai d'obtenir une valeur du paramètre choisi faisant passer la courbe sous le coin et si possible exactement au coin. Les essais effectués pour y parvenir montrent bien l'effet des modifications du paramètre choisi et donc lorsqu'une courbe est trouvée, les élèves n'ont plus de doute sur les valeurs du paramètre qui conviennent. Ils n'éprouvent pas le besoin de justifier davantage leur proposition et préfèrent avancer dans la recherche, soit en rajoutant la contrainte de dérivabilité soit, si cela a déjà été réalisé, en cherchant d'autres fonctions. La recherche ne s'épuisant pas rapidement, il y a peu de chances d'obtenir spontanément un autre fonctionnement. On retrouve là un phénomène classique : la validation intellectuelle ne se situe pas dans la continuité de l'action et si cette dernière offre des modes de validation pragmatiques suffisamment convaincants, elle a peu de chances d'intervenir spontanément tant que le registre de l'action ne se trouve pas épuisé. Sa mise en place nécessite une autre mise en scène didactique et une nouvelle dévolution. Ici, la synthèse collective jouera ce rôle. On pourrait envisager d'autres dispositifs, engageant plus personnellement les élèves, comme la production de narrations de recherches et la production, justifiée hors DERIVE, de familles de fonctions réalisant les conditions indiquées. Il est clair que, si ce travail est absent, si les élèves ne s'y engagent pas réellement, le travail fourni, quelle que soit par ailleurs sa richesse mathématique, risque de rester un simple bricolage dont l'enjeu ne sera pas réellement perçu.

Si la méthode par essais et erreurs contrôlée perceptivement est la tendance dominante, certains groupes s'en affranchissent pourtant, plus ou moins momentanément. Ainsi le groupe 2, qui résout l'équation  $f(0.4)=0.4$  pour trouver une valeur adaptée du paramètre de l'exponentielle, ici 15, tout en faisant tracer un instant plus tard les exponentielles pour des valeurs du paramètre de 10 à 20 par pas de 2 et en ayant l'air de s'étonner que le premier tracé

ne convienne pas. Ainsi aussi de façon plus systématique le groupe 5 dans son travail avec les fonctions rationnelles et le groupe 3, lorsqu'il se lance dans la recherche de fonctions exponentielles en  $x^3$  puis  $x^4$  et  $x^5$ . Sans doute les modifications ici introduites favorisent-elles le passage à une stratégie plus construite puisque lorsque l'exposant de  $x$  augmente, les valeurs du paramètre limite augmentent elles aussi, mais de façon conséquente (de 15 à 36, 90, 225). Il y a moins d'espoir qu'en deux, trois essais, on arrive au résultat.

Le rôle joué par les aspects perceptifs dans la recherche est également mis en évidence, de façon plus inattendue, par la façon dont certains groupes gèrent la contrainte de dérivée nulle en 0. Ainsi, par exemple, le groupe 3 qui, après avoir trouvé la fonction  $x \rightarrow \exp(-15x^2)$ , fait calculer sa dérivée par DERIVE et décide de tracer cette dérivée plutôt que de simplement calculer sa valeur en 0. Le tracé obtenu est tout à fait déroutant, un bout de graphe qui se confond avec une partie de l'axe Oy, pas nécessairement perçu, un bout de graphe dans le quatrième quadrant, laissant plutôt penser à une valeur de la dérivée infinie en 0. Ils n'en tirent pas cette conclusion, n'en reviennent pas non plus à l'expression algébrique mais décident de modifier le cadrage de la fenêtre graphique pour mieux voir. Le nouveau tracé laisse aussi peu penser que  $f'(0)=0$  mais présente l'avantage de montrer une dérivée positive pour  $x$  négatif et négative pour  $x$  positif, ce qui les rassure. Ils reviennent ensuite au tracé lui-même de la fonction, le trouvent pointu en 0 et décident d'essayer autre chose...

Il est aussi mis en évidence par le problème de la visualisation des oscillations. Les groupes qui tracent des sinusoides amorties sont visiblement très étonnés de ne pas voir d'oscillations à l'écran. Il est clair qu'il y aurait là une bonne occasion de motiver un raisonnement mathématique, par ailleurs relativement facile, pour justifier la présence de ces oscillations invisibles. Mais on voit que les intentions des élèves sont ailleurs : il faut rendre les oscillations visibles en faisant des zooms et, si ça ne marche pas, on sent bien qu'ils sont prêts à douter. Le vrai est d'abord à chercher du côté du tracé.

Les observations faites sur cette situation de recherche mettent bien en évidence, voudrions-nous souligner pour conclure, des caractéristiques importantes du fonctionnement des élèves et des situations d'enseignement dans l'environnement DERIVE, compte tenu des conditions actuelles de disponibilité de ce matériel pour les élèves, des caractéristiques qu'il est important de prendre en compte dans l'élaboration et la gestion de situations sous cet environnement :

- Le rôle à ne pas sous-estimer de la familiarité avec le logiciel, en particulier dans la gestion des fenêtres graphiques et les interactions graphiques/algébriques, plus difficiles à maîtriser que les seules commandes algébriques élémentaires, les problèmes de déclaration qu'il importe sans doute, dans une approche limitée en temps de gérer de façon simplifiée sans prendre en compte toute la richesse de DERIVE. Les différences constatées dans le fonctionnement des deux séances montrent également que l'enseignant, conscient des difficultés qu'il va rencontrer, peut aisément, dans une telle situation, limiter les dégâts dus à cette faible familiarité.
- L'interaction du travail sous DERIVE et du travail avec les calculatrices. Il est clair que la calculatrice est l'instrument privilégié et que, dans ces conditions, l'actualisation d'un certain nombre de potentialités théoriques de DERIVE n'a rien d'automatique, qu'il est faiblement exploité dans ses potentialités algébriques comme dans l'articulation algébrique/graphique. On peut estimer qu'il s'agit là d'une situation provisoire et que la diffusion imminente à des prix plus abordables de calculatrices dotées de DERIVE modifiera profondément cette donne.

- L'économie du travail sous DERIVE, qui favorise les stratégies d'exploration, d'essais/erreurs avec interprétation limitée des feed-back, les contrôles perceptifs (ici au niveau graphique comme nous l'avons vu dans d'autres situations au niveau formel), une économie du travail mathématique dont la productivité est ici évidente mais qui est différente de celle du fonctionnement P/C usuel. Le passage à des justifications et preuves moins pragmatiques ne va pas de soi et nécessite des renégociations didactiques.

Mais nous voudrions pour terminer insister sur la richesse et l'intérêt de cette activité, rappeler aussi que le fait que nous n'y retrouvions pas nécessairement les comportements mathématiques associés à une résolution P/C ne doit pas nous faire sous-estimer les compétences mathématiques, à la fois techniques et conceptuelles sous-jacentes au travail mené ici par les élèves. Une familiarité évidente avec les familles de fonctions usuelles s'y manifeste ainsi que la capacité de penser et piloter, en sachant exploiter les facilités de l'environnement, les transformations algébriques susceptibles de produire les effets graphiques recherchés. Le lecteur peu habitué à des narrations de recherche aussi détaillées pourra aussi s'étonner des errances de certaines recherches, du fait que des propriétés évidentes comme la nullité ou la non nullité de la dérivée en 0 pour les différents types d'exponentielles ne saute pas immédiatement aux yeux des élèves, au moment où ils disposent de l'expression algébrique des dérivées. Ce que nous observons là est pourtant le lot commun de l'activité de recherche en résolution de problème. Ce n'est que dans les reformulations et reconstructions ultérieures que ces démarches, toujours un peu chaotiques dès que nous n'avons pas à résoudre des problèmes routiniers ou quasi-routiniers, peuvent apparaître lisses, linéaires, les actions s'y succédant l'une l'autre dans un ordre quasi nécessaire. C'est d'ailleurs pourquoi aussi, ces reformulations et reconstructions sont incontournables si l'on veut que chaque résolution ne reste pas un cas d'espèce isolé.

ANNEXE 1 : LE TEXTE DU POLYCOPIÉ DISTRIBUÉ AUX ÉLÈVES  
(FONCTIONS SOUS CONTRAINTES)

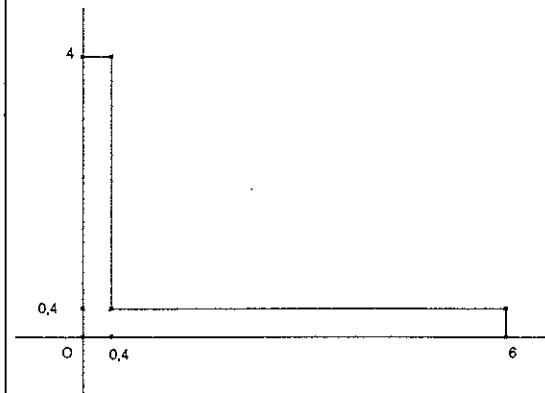
SEANCE DE TRAVAUX DIRIGES  
Mercredi 31 Mai 1994  
CLASSE : Term E

Vous devez déterminer des fonctions  $f$  :

- dérivables sur  $[0;6]$ ,
- telles que  $f(0) = 4$ ,
- dont la partie de la courbe représentative correspondant à l'intervalle  $[0;6]$  soit située dans le domaine ci-contre.

Cherchez ensuite des fonctions qui, en plus des conditions précédentes vérifient :  
 $f'(0) = 0$ .

Vous avez à votre disposition toutes les fonctions que vous connaissez,



1. Vous utiliserez le fichier "ZONE" qui contient les coordonnées des points qui définissent la zone.
2. Vous partagerez l'écran en deux fenêtres : les formules et les graphiques.

*Pour faciliter l'observation, n'effacez pas vos essais.*

*En fin de séance sauvegardez votre travail sur la disquette sous un de vos noms.*

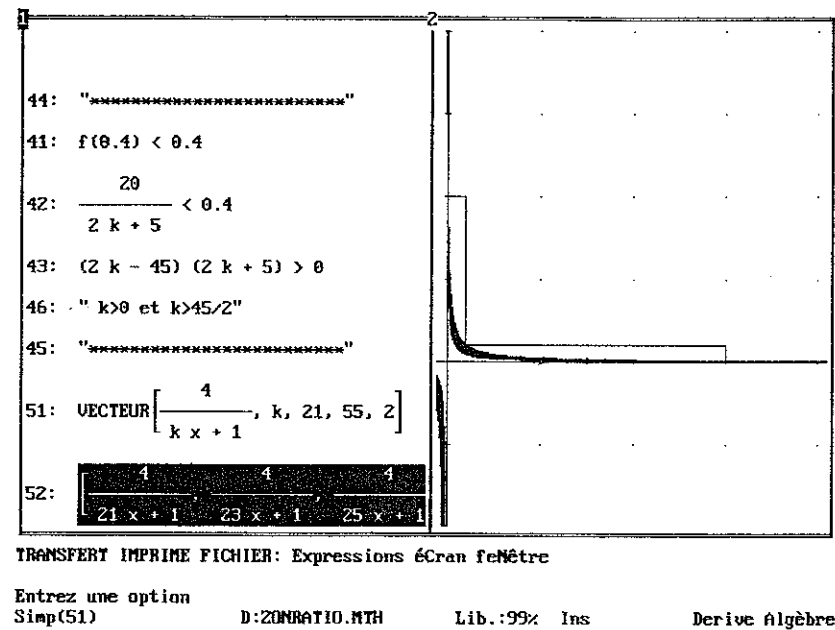
**Rappels concernant l'utilisation de DERIVE :**

1. la touche **F1** bascule d'une fenêtre à l'autre,
2. la touche **F3** et la touche **F4** permettent de recopier le contenu de la surbrillance (sans ou avec parenthèses)
3. la touche **F6** permet de changer le rôle des flèches de direction (dans les formules ou dans l'éditeur)
4. le e de la fonction exponentielle s'obtient avec **ALT e**
5. La commande **cHoix Substitue** permet de remplacer une variable par une valeur numérique ou par une expression.
6. Si la zone ne se trace qu'avec les points isolés, pensez dans la fenêtre graphique à la commande **Option Etat Continu**
7. La fonction **VECTEUR** permet d'obtenir une famille de fonctions dépendants d'un paramètre.  
 $\text{VECTEUR}(a \cdot x, a, -2, 3, 1)$  donne après simplification :  $[-2x, -x, 0, x, 2x, 3x]$

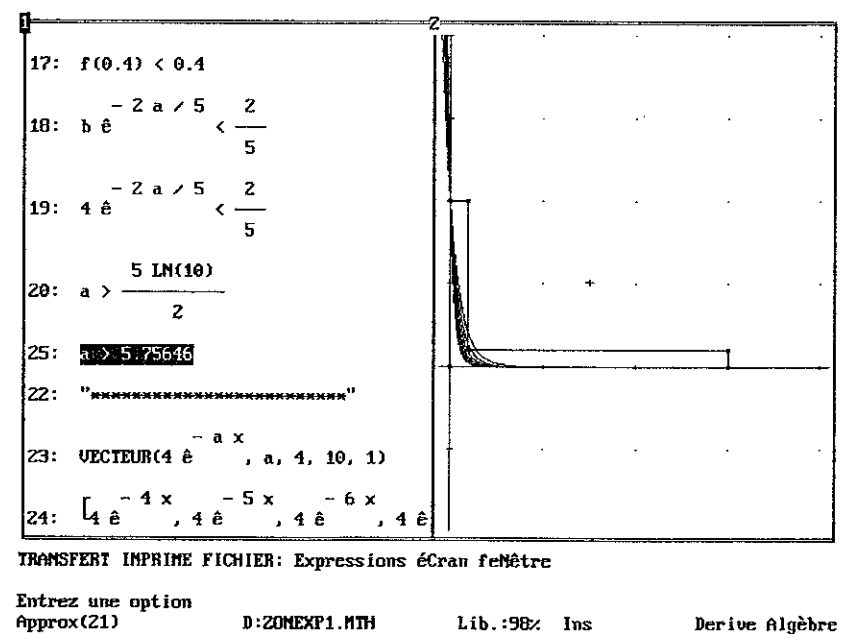
ANNEXE 2 : TRACÉS ACCOMPAGNANT L'ANALYSE A PRIORI DE  
L'ENSEIGNANTE

**Quelques résultats possibles**

Avec des fonctions homographiques :



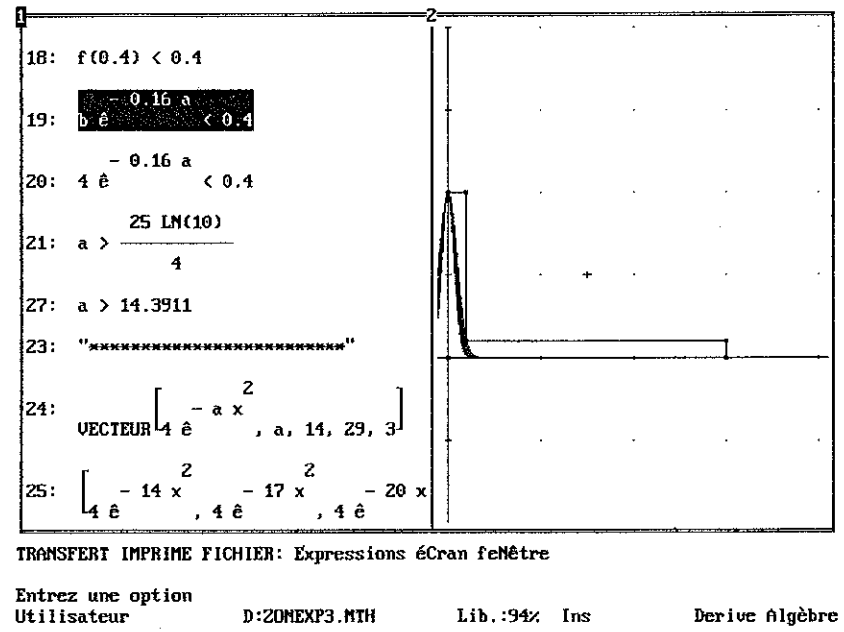
Avec  $\exp(-ax)$  :



On aurait pu ajouter  $f(x) = 0.2 + 3.8\cos(6x)e^{-ax}$

$$\underline{f'(0) = 0}$$

Avec  $\exp(-a x^2)$

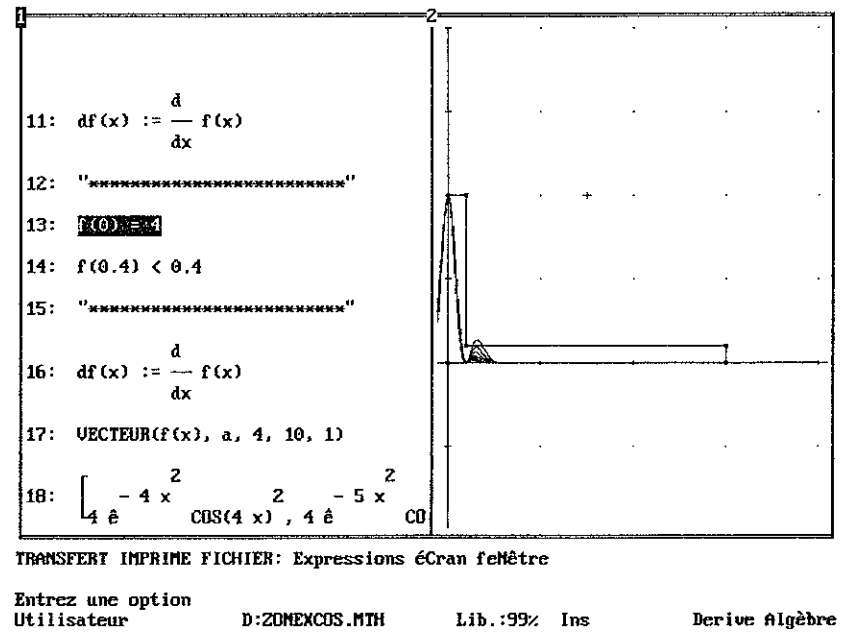


Avec une fonction non monotone

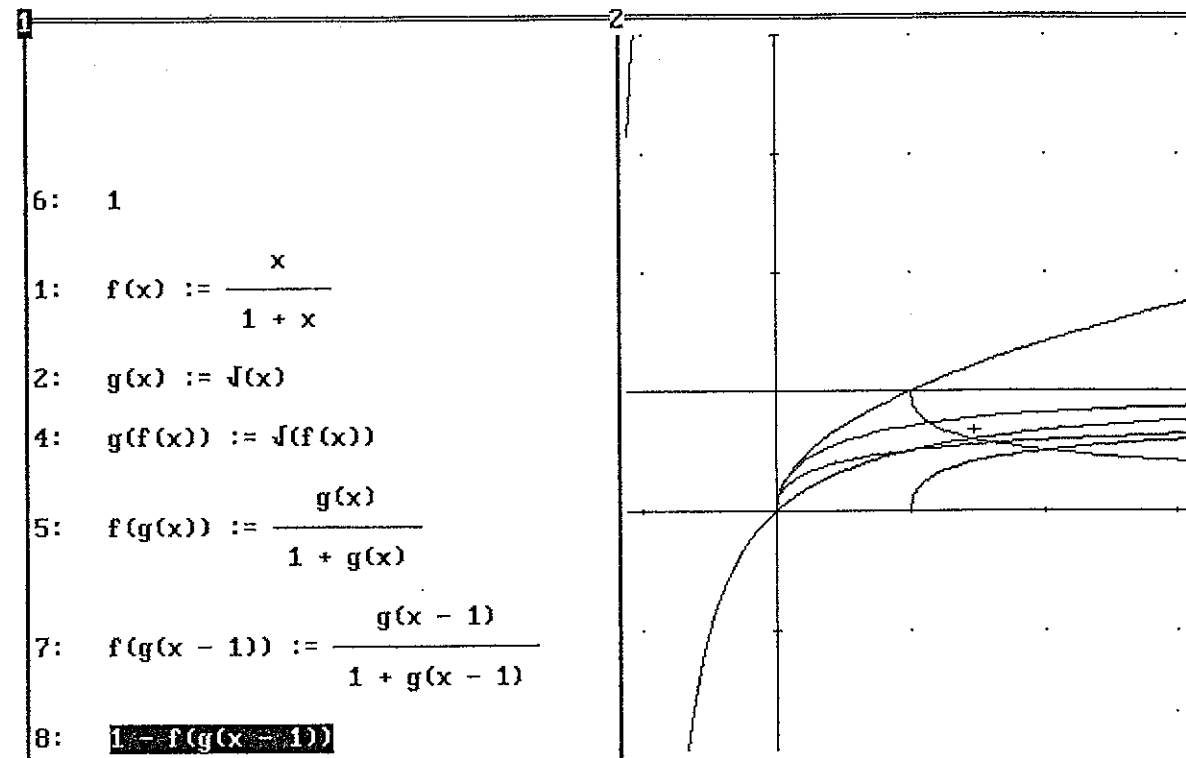
Ici la recherche systématique devient très vite trop compliquée pour les élèves.

si  $f(x) = 4 \cos^2(4x)e^{-ax^2}$ .

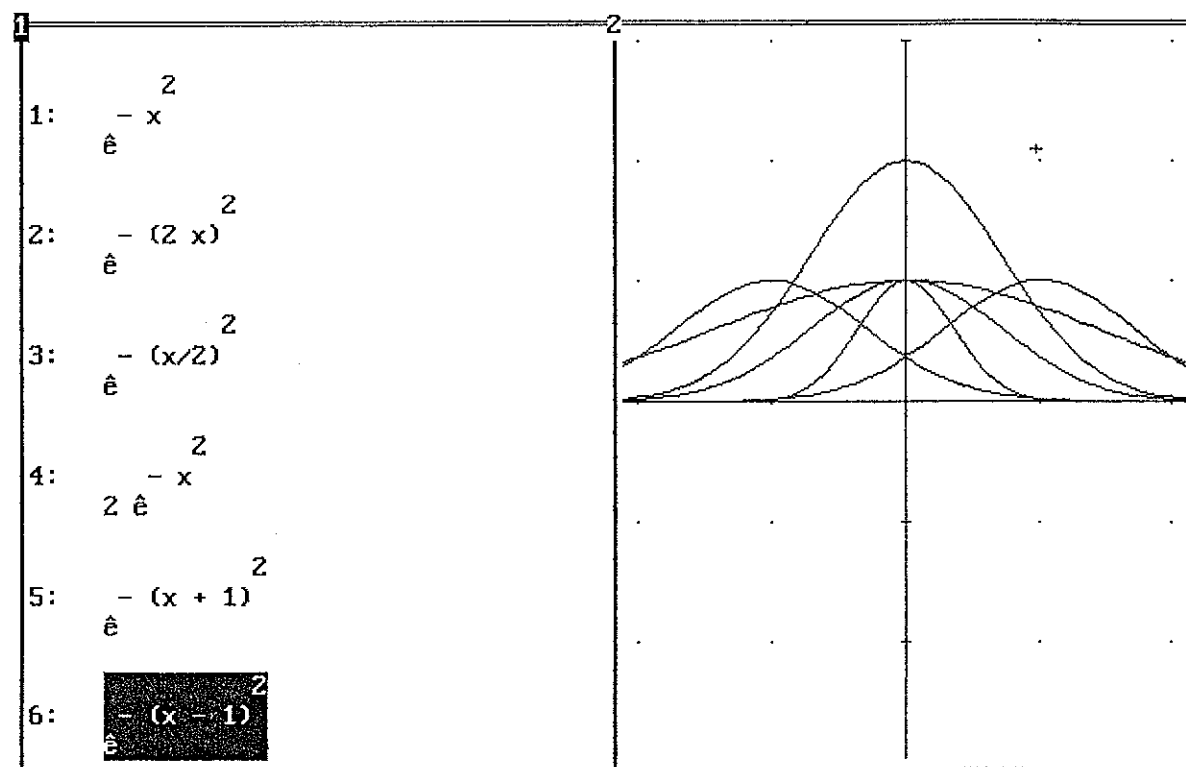
On pourra faire observer ce qui se passe quand on change 4 x en 8 x par exemple.



# TRAVAIL EFFECTUÉ À LA SÉANCE PRÉCÉDENTE



TRANSFERT IMPRIME IMPRIMANTE: Expressions écran fenêtre



TRANSFERT IMPRIME IMPRIMANTE: Expressions écran fenêtre

### V.3 TRIGONOMETRIE 1

#### CONTEXTE DE L'OBSERVATION

Cette séance a été observée en fin d'année (17 mai 1994). Il s'agit d'une séance de révision de trigonométrie, pour laquelle la classe était dédoublée. DERIVE a été régulièrement utilisé dans la classe pendant l'année scolaire : une dizaine d'interventions ponctuelles sur poste unique avec rétro-projection, piloté par l'enseignant ou des élèves, pour des corrections d'exercices ou l'introduction de notions nouvelles, dix séances de TD en salle informatique par demi-classe (cinq avec utilisation imposée de DERIVE, cinq avec utilisation possible mais non imposée). D'autre part, la classe a bénéficié de 13 quadernos équipés de DERIVE pendant 6 mois, utilisés en rotation (chaque élève disposant d'un quaderno une semaine sur deux). Il n'y a pas eu de familiarisation spécifique avec la trigonométrie sous DERIVE.

Pour cette séance, les élèves disposaient, outre DERIVE, du formulaire officiel et de leur calculatrice. Ils pouvaient travailler seuls ou par groupes de deux. La plupart ont travaillé en groupe.

#### PRÉSENTATION DES ACTIVITÉS PROPOSÉES

La séance est organisée autour de l'étude de l'équation trigonométrique :

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$$

Dans un premier temps les élèves doivent trouver plusieurs expressions différentes du premier membre de cette équation, en s'aidant éventuellement de DERIVE. Ils n'ont pas à justifier leurs propositions qu'ils doivent noter sur une feuille de réponse où des lignes numérotées de 1 à 8 sont prévues à cet effet (cf. annexe page 236). Ils doivent ensuite indiquer les numéros des expressions qui leur semblent a priori bien adaptées à la résolution de l'équation. Enfin, ils doivent résoudre l'équation et, même s'ils utilisent DERIVE, produire une résolution complète comme s'ils n'avaient pas disposé du logiciel. Il est prévu de demander à ceux qui auraient éventuellement terminé avant la fin de la séance de commencer à étudier la fonction associée au premier membre de l'équation.

#### ANALYSE DE LA SÉANCE EFFECTUÉE PAR L'ENSEIGNANT

Objectifs :

La séance vise une révision du chapitre de trigonométrie qui a été traité depuis quelque temps déjà, plus précisément il s'agit de «revoir qu'une expression trigonométrique peut revêtir plusieurs formes, diversement adaptées à la résolution d'un problème donné, revoir également la forme particulière de la multiplicité des solutions des équations trigonométriques», et raviver et manipuler à nouveau à cette occasion les formules de trigonométrie au programme.

Intérêt supposé de DERIVE :

L'enseignant souligne dans l'analyse a priori quatre points :

- DERIVE peut fournir à l'élève rapidement diverses expressions équivalentes à l'expression donnée, sans qu'il ait besoin d'effectuer les calculs correspondants. Ceci devrait permettre à tous les élèves de prendre conscience de cette multiplicité de formes possibles et de se lancer dans la réflexion souhaitée sur l'adéquation respective des formes obtenues pour la résolution de l'équation, en s'affranchissant de difficultés éventuelles de calcul.

- DERIVE ne résolvant pas une équation trigonométrique indépendamment de sa forme de présentation, l'utilisation du logiciel constitue un moyen de faire apparaître l'intérêt d'une réflexion sur l'adéquation de telle ou telle forme à la résolution comme une nécessité de la situation et non seulement comme une attente de l'enseignant.
- Lorsque DERIVE arrive à résoudre une équation trigonométrique, il ne présente pas les solutions sous la forme habituelle faisant intervenir la période mais fournit la liste des solutions situées dans un certain intervalle, variable d'une équation à l'autre. Donc, l'élève qui utilise DERIVE doit, de toutes façons, à partir des solutions DERIVE, fournir un travail mathématique pour reconstituer l'ensemble de toutes les solutions.
- DERIVE enfin permet, comme les calculatrices graphiques, de mener une approche graphique de la résolution. Dans ce cas précis, une telle approche peut conduire aisément à conjecturer la forme des solutions, puisque l'expression proposée pouvant aussi s'exprimer sous la forme :  $\sin(6x)/2\sin x$ , la périodicité des racines et leurs valeurs sont graphiquement repérables, même sur un intervalle assez limité (cf. annexe page 242 pour le tracé).

L'enseignant estime également que, si DERIVE fournit aisément des expressions équivalentes à l'expression initiale, la façon dont ces expressions sont obtenues reste, elle, relativement opaque. Ceci, de son point de vue, peut engendrer un travail ultérieur sur la façon de parvenir aux expressions proposées en utilisant les moyens disponibles en Terminale C. Ce travail est d'ailleurs amorcé dans la séance par la demande d'une rédaction de la résolution de l'équation de type bac.

L'enseignant est par ailleurs bien conscient que DERIVE, même s'il peut l'aider, n'est pas nécessaire au fonctionnement de cette activité. Certains élèves peuvent spontanément mettre en oeuvre la stratégie particulièrement efficace consistant à regrouper soit  $\cos x$  et  $\cos 5x$ , soit  $\cos 3x$  et  $\cos 5x$ , aboutir ainsi à une expression factorisée simple :  $(\cos 3x)(1+2\cos x)$  dans le premier cas,  $(\cos x)(1+2\cos 4x)$  dans le second puis résoudre l'équation proposée sans aucun recours à DERIVE. C'est pour ces élèves que la question supplémentaire d'étude de la fonction associée est prévue, une étude qui met en jeu des équations trigonométriques plus complexes à résoudre en P/C.

#### Connaissances DERIVE nécessaires :

Sont supposées connues : l'introduction des données, l'utilisation des commandes algébriques usuelles : Simplifie, Factor, dévEloppe, résoL... ainsi que l'entrée de fonctions et les commandes liées à leur représentation graphique.

La commande de substitution qui a été moins fréquemment utilisée, fait l'objet d'un rappel dans la fiche distribuée aux élèves (cf. annexe page 236).

Les options concernant les transformations trigonométriques ont été à l'occasion utilisées en classe avec tel ou tel groupe d'élèves mais n'ont jamais fait l'objet d'une présentation systématique. Elles sont présentées succinctement dans la fiche distribuée aux élèves : les neuf possibilités résultant des trois options (Auto, dévEloppé, Contracté) et des trois directions (Auto, vers Sinus, vers Cosinus) sont indiquées et il est précisé que les commandes Simplifie, Factor, résoL peuvent agir différemment suivant l'option choisie. Il est conseillé d'essayer, en faisant jouer prioritairement les options, la direction étant fixée à «Auto».

#### Comportements, difficultés attendus :

Dans cette situation, l'utilisation de DERIVE n'est pas imposée, elle est cependant suggérée par l'énoncé et favorisée bien évidemment par l'organisation matérielle de la séance. L'enseignant pense que certains élèves, n'aimant pas l'informatique ou désireux de se mettre dans les conditions du baccalauréat préféreront utiliser le formulaire que DERIVE. Il n'est pas sûr qu'ils parviennent ainsi à des formes bien variées, ni à résoudre l'équation, soit qu'ils n'obtiennent pas de forme adaptée, soit qu'ils ne résolvent que partiellement les équations du type :  $\cos x = a$ .

Pour ceux qui utiliseront tout de suite DERIVE (sans doute dans le cadre algébrique et non dans le cadre graphique), l'enseignant pense qu'ils arriveront à obtenir plusieurs formes en variant les options et directions trigonométriques et les commandes mais il fait l'hypothèse qu'ils n'exploiteront que faiblement les possibilités du logiciel et qu'en particulier, ils n'utiliseront pas très spontanément des transformations portant sur des sous-expressions. En ce qui concerne la résolution de l'équation proprement dite, il s'attend à une dispersion assez forte des comportements et à quelques résolutions correctes, au moins partielles. L'enseignant ne pense pas que l'utilisation de DERIVE amènera les élèves vers la stratégie la plus efficace pour l'équation proposée. En effet, les formes les plus aisées à obtenir avec DERIVE semblent les expressions polynomiales :  $16\cos^5 x - 16\cos^3 x + 3\cos x$  (directement obtenue avec la commande Simplifie pour l'option «dévEloppé» - directions : «Auto» et «vers Cosinus») et  $\cos x(16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 3)$  obtenue par la même commande avec l'option «dévEloppé» - direction : «vers Sinus», les modes «Auto» et «Contracté» n'ayant aucun effet sur l'expression initiale, en dehors de modifications d'ordres de termes. Certains élèves penseront peut-être au changement de variable  $X = \cos x$ , mais l'enseignant se demande s'ils penseront à utiliser DERIVE pour la factorisation ou la résolution de l'équation correspondante.

L'enseignant pense intervenir au bout de 20mn en utilisant la tablette de rétro-projection pour faire un premier bilan et mettre en évidence le fait que, seul l'option «dévEloppé» permet de transformer l'expression initiale, la factoriser et obtenir des solutions à l'équation par la commande resoL. Il pense également leur demander de réfléchir à la question suivante : est-ce que les solutions obtenues avec DERIVE conviennent toutes et sont complètes ?

Il pense aussi intervenir auprès des élèves qui rédigeront une solution se limitant à vérifier des résultats obtenus par DERIVE pour leur rappeler que la consigne consiste à rédiger une résolution acceptable un jour d'examen, donc indépendante de l'utilisation de DERIVE.

Une séance de bilan et institutionnalisation est prévue trois jours après, en classe entière. L'enseignant prévoit d'y insister sur les points suivants :

- 1 intérêt de la factorisation pour la résolution d'équations non triviales,
- 2 résolution des équations de la forme  $\cos x = a$  et  $\sin x = a$ , représentation des solutions sur le cercle trigonométrique, gestion des  $2k\pi$ ,
- 3 méthodes de factorisation d'expressions trigonométriques :
  - par utilisation de formules trigonométriques, en particulier formules de transformation de sommes en produits,
  - par utilisation de la formule de Moivre qui permet de transformer  $\cos(nx)$  et  $\sin(nx)$  en polynômes en  $\cos x$  et  $\sin x$  et utilisation de la relation :  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  pour se ramener à un polynôme en  $\sin x$  ou  $\cos x$ ,

et souligner que l'intégration des expressions trigonométriques pose le problème inverse : celui de la linéarisation.

## EXEMPLES DE DÉROULEMENT

### Groupe 1 (première séance) :

Il est constitué de deux filles notées E. et M.

L'enseignant distribue la fiche d'activité, la fiche réponse et introduit la séance en sept à huit minutes, en demandant aux élèves de lire attentivement la fiche d'activité. Il souligne la présence dans cette fiche de conseils utiles sur l'utilisation de DERIVE. Il rappelle aux élèves qu'ils ont le droit d'utiliser aussi leur formulaire et leur calculatrice, qu'ils peuvent travailler individuellement ou par groupes de deux, que bien sûr, ils ont le droit de faire des brouillons. Il commente ensuite brièvement la fiche en précisant que, pour la troisième question, résolution de l'équation, ce qui est demandé, c'est de trouver d'abord les solutions, par n'importe quel moyen, puis ensuite de rédiger une solution acceptable un jour d'examen.

E. lit le formulaire : «Ce truc là  $\cos 5x$ , c'est comme  $(a+b)^n$  dans le cours avec les complexes». Elle prend son cours et pendant ce temps, M. lance DERIVE et entre l'expression sous la forme :  $f(x) := \cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x)$ , en se posant des questions sur la nécessité d'espaces après := et de parenthèses autour de x.

E. a retrouvé dans son cours les formules d'Euler et de Moivre ainsi que le calcul détaillé de  $\cos 3\theta$ . Elle est satisfaite et suggère de faire de même pour  $\cos 5\theta$  : développer  $(\cos\theta + i\sin\theta)^5$  puis identifier à la partie réelle.

M. sort sa calculatrice Casio graphique. E., qui voit l'expression entrée sous DERIVE, a une autre idée. Elle propose d'utiliser la commande «dévEloppe», ça lui paraît plus simple que de se lancer dans les calculs. DERIVE retourne la même expression, à l'ordre des termes près et elles sont déçues. M. cherche dans les mémoires de sa calculatrice où elle se souvient vaguement d'avoir stocké des formules et calculs trigonométriques puis, ne trouvant pas, abandonne et revient à DERIVE. Elle commence à recopier l'expression et E. lui montre comme aller plus vite avec la touche F3. M. rentre alors l'équation et demande à DERIVE sa résolution, deux fois de suite, sans succès.

Le professeur passe et leur demande où elles en sont. Elles lui disent que DERIVE ne fait rien et il leur demande si elles ont bien utilisé toutes les possibilités offertes par le mode trigonométrique. Elles conviennent que non et il s'en va.

### 15 minutes :

Elles font divers essais sous DERIVE mais en restant dans l'option «Auto» : Simplifie, resolu, Factor..., rien ne se passe. Elles en sont à leur douzième expression quand elles changent d'option et passent «dévEloppé». Via la commande resolu, elles obtiennent alors l'affichage de 15 solutions :

$$-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$$

E. dicte à M. qui note.

### 20 minutes :

Elles remontent ensuite à l'expression initiale et la font simplifier par DERIVE obtenant :

$$16\cos^5 x - 16\cos^3 x + 3\cos x$$

E. repère le  $\cos^5 x$  qui doit venir de  $\cos 5x$  et M. note. E. demande une nouvelle simplification, puis un développement. Il ne se passe rien. Elle remonte alors à la première expression et demande sa factorisation, obtenant :  $\cos x(1-4\sin^2 x)(2\cos x-1)(2\cos x+1)$ . Elles sont satisfaites et M. note cette factorisation.

A ce moment-là, l'enseignant interrompt le travail en groupes pour la mise au point collective prévue, en disant qu'il va juste donner quelques indications pour la première question. Il rappelle les trois options et les trois directions disponibles dans le mode trigonométrique et le fait, constaté par la plupart des groupes que les options «Contracté» et «Auto» ne donnent rien mais qu'en utilisant l'option *dévEloppé*, on obtient des expressions différentes. Il active successivement pour cette option les commandes : *Simplifie*, *dévEloppe*, *Factor* en essayant les différents niveaux de factorisation. Il insiste sur le fait que l'on obtient ainsi différentes expressions, conseille à ceux qui n'ont pas avancé de faire eux-mêmes quelques essais et, à tout le monde, de ne pas rester trop longtemps sur cette première question, de passer assez vite à la résolution de l'équation.

*30 minutes :*

Quand cette phase collective s'arrête, E. et M. reviennent à la partie 1. Elles utilisent diverses commandes : *Simplifie*, *dévEloppe*, *resoL*, obtiennent de nouveau la même liste de solutions, puis l'expression nouvelle :  $\cos^3 x(4-16\sin^2 x)+\cos x(4\sin^2 x-1)$ .

M. suggère d'arrêter : «C'est bon, on en a trois !»

E. est un peu réticente car il y a huit lignes sur la feuille, elle tente une autre factorisation et obtient :  $\cos x(1-4\sin^2 x)(4\cos^2 x-1)$ .

M. insiste pour passer à la question suivante et l'emporte. Elles ont alors écrit :

1.  $f(x) = 16\cos^5 x - 16\cos^3 x + 3\cos x$
2.  $f(x) = \cos x(1-4\sin^2 x)(2\cos x-1)(2\cos x+1)$
3.  $f(x) = \cos^3 x(4-16\sin^2 x)+\cos x(4\sin^2 x-1)$
4.  $f(x) = \cos x(1-4\sin^2 x)(4\cos^2 x-1)$

Sans hésiter, E. déclare que ce sont les formes 2 et 4 qui sont bien adaptées à la résolution de l'équation et M. est d'accord.

Elles passent à la résolution proprement dite. M. demande à E. de faire résoudre  $\cos x = 0$ . E. met  $\cos x$  en surbrillance, tout en disant que  $\cos x = 0$ , M. pourrait le faire à la main. M., d'accord, suggère alors de faire la suivante. E. le fait et les réponses s'affichent. E. fait remarquer qu'elles devraient trouver des réponses qu'elles ont déjà et elle décide de noter pour

comparer plus facilement. La première réponse :  $-\frac{7\pi}{6}$  n'est justement pas dans la première liste.

Elles passent alors toutes les solutions en revue, constatent qu'il y en a le même nombre : 15, que toutes sont les mêmes sauf aux extrémités : il y a  $-\frac{7\pi}{6}$  en plus et il manque  $\frac{11\pi}{6}$ . « En plus, ce n'est pas le même signe » dit E.

*35 minutes :*

M., après réflexion, suggère que  $-\frac{7\pi}{6}$ , c'est peut-être la même chose que  $\frac{11\pi}{6}$  et prend sa calculatrice pour comparer. Le professeur passe et leur demande où elles en sont. Elles expliquent leur problème avec ces solutions qui devraient être les mêmes et ne le sont pas tout à fait.

Le professeur leur demande comment voir avec les mesures si c'est les mêmes ou pas. M. propose de dessiner, E. dit que c'est peut-être  $2\pi$  moins... mais le professeur ne l'entend pas et, reprenant la proposition de M., demande de placer les deux angles sur le cercle trigonométrique.

M. essaie de placer  $-\frac{7\pi}{6}$  mais, visiblement, a du mal. Elle transforme l'angle en degrés. E.

poursuivant son idée, écrit :  $\frac{12\pi}{6} - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ .

Le professeur explique à M. comment placer  $-\frac{7\pi}{6}$  sur le cercle trigonométrique et s'en va.

*40 minutes :*

E. constate que ce n'est pas  $\frac{11\pi}{6}$  puisque  $\frac{11\pi}{6}$  c'est comme  $-\frac{\pi}{6}$ . Elles commencent à être perdues, pensent « qu'elles se compliquent inutilement la vie » et décident de revenir à la résolution des équations partielles associées aux facteurs de l'expression 4.

Elles font donc résoudre :  $1-4\sin^2x=0$  et notent les réponses données par DERIVE : les six solutions comprises entre  $-\frac{7\pi}{6}$  et  $\frac{7\pi}{6}$ .

Elles résolvent ensuite :  $4\cos^2x-1=0$  et DERIVE leur fournit les 6 solutions comprises entre  $-\frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{5\pi}{3}$ . Elles notent.

E. dit à M. : «Il nous manque plus que  $\cos x = 0$  ; je te le laisse.»

M. répond : «C'est  $\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$ .»

Le professeur passe et leur demande si elles ont avancé. M. lui dit qu'elles n'ont pas résolu le problème de tout à l'heure, c'était trop compliqué, mais qu'elles ont trouvé quand même les solutions. E. explique comment elles ont fait.

Le professeur leur demande si elles ont comme ça toutes les solutions. E. ne sait pas, M. propose de rajouter chaque fois  $2\pi$ . Il leur demande alors comment elles feraient si elles avaient à résoudre à la main. Elles reparlent de  $2\pi$  et  $2k\pi$ , sans beaucoup de conviction. Le professeur demande alors à M. de représenter toutes les solutions trouvées sur le cercle trigonométrique comme tout à l'heure. M. retrace un cercle trigonométrique et place  $\frac{5\pi}{6}$ .

*45 minutes :*

Elle s'aperçoit alors que  $\frac{5\pi}{6}$  occupe la même position que le  $-\frac{7\pi}{6}$ , placé la première fois. Elle en déduit tout de suite que  $-\frac{5\pi}{6}$  correspond lui à  $\frac{7\pi}{6}$ . Elles sont toutes les deux satisfaites d'avoir relié ces deux valeurs. Cela suffit visiblement à les rassurer sur la compatibilité des deux listes de solutions obtenues avec DERIVE et elles ne creusent pas plus loin la recherche, par exemple en trouvant l'angle de la première liste qui correspond au  $\frac{11\pi}{6}$  qui apparaît uniquement sur la seconde liste d'ailleurs maintenant invisible à l'écran.

Elles décident de placer systématiquement tous les angles solutions, en barrant au fur et à mesure les angles de la liste recopiée.

L'enseignant annonce collectivement qu'il ne reste plus que cinq minutes environ et demande de se centrer sur la rédaction de la fiche de réponses.

M. propose à E. de recopier en mettant, sous équation par sous équation, les valeurs trouvées par DERIVE, en rajoutant chaque fois :  $+k.2\pi$ . E. pense, elle, qu'il vaut mieux garder les valeurs les plus simples et M. se rallie à son opinion. Elles décident pour cela de suivre toutes les listes données par DERIVE et de rayer au fur et à mesure les doublons, M. vérifiant de son côté sur le cercle trigonométrique. En fait, M. retrace un cercle (elle dit à E. que finalement «elle aime bien ça») et, par erreur, partage le cercle en six, donc modulo  $\frac{\pi}{3}$  en croyant faire un partage modulo  $\frac{\pi}{6}$ .

50 minutes :

$-\frac{7\pi}{6}$  est d'abord rayé car elles ont déjà trouvé que «c'est la même chose que  $\frac{5\pi}{6}$ ». Par la suite,  $\frac{5\pi}{6}$  sera lui aussi rayé car, sur le cercle trigonométrique erroné, il se trouve confondu avec  $-\frac{\pi}{6}$ .

Elles ne repèrent pas l'incohérence avec ce qui précède. M. est arrêtée avec  $\frac{2\pi}{3}$  qu'elle trouve égal à  $\pi$  ; E. lui montre en comptant sur le cercle qu'elle se trompe, puis revient à  $\frac{7\pi}{6}$  et se sert elle aussi du cercle trigonométrique de M. pour l'évaluer. Elle trouve qu'il correspond à  $\frac{\pi}{6}$  et décide de le barrer lui aussi de la liste. Finalement, elle se retrouvent avec, comme ensemble de solutions :  $-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ .

Elles passent à la rédaction mais n'ont que le temps d'écrire :  $\cos x = 0 : x = \frac{\pi}{2}$  ou  $x = -\frac{\pi}{2}$  avant la fin de la séance, pour cette partie 3.

Groupe 2 (deuxième séance) :

Il s'agit d'un groupe de deux garçons notés dans la suite F. et J. Le professeur introduit cette seconde séance comme il l'a fait pour la première, en une dizaine de minutes et les élèves lancent tout de suite DERIVE.

F. tape l'expression sans parenthèses puis rajoute des parenthèses. J lui dit : «Tu peux faire résoudre tout de suite» mais F. n'est pas satisfait de son entrée et préfère effacer et recommencer en déclarant une fonction f. J. commente que c'est inutile pour ce qu'ils veulent faire et se plonge dans son formulaire. Il recopie sur son brouillon :

$$\cos(a+b)=\cos a \cos b - \sin a \sin b$$

contemple cette formule un moment, puis l'efface et recopie dessous :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Il pose ensuite :  $p = x$ ,  $q = 3x$  et fait la substitution, arrivant ainsi à :

$$\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cdot \cos x \quad \text{et} \quad \cos 5x + \cos x = 2 \cos 3x \cdot \cos x$$

Il semble déçu que l'expression obtenue ne se simplifie pas davantage.

Pendant ce temps, F. a essayé diverses commandes DERIVE : Simplifie, développe, Factor, obtenant chaque fois la même expression. Au début, il efface systématiquement ses essais infructueux et l'observateur intervient pour lui demander d'éviter d'effacer le plus possible. Après ces divers essais, F. change d'option et passe en option «Contracté». Il essaye à nouveau les différentes commandes, sans plus de succès et décide d'abandonner DERIVE. Il le dit au professeur qui passe et lui demande où il en est : «J'ai essayé factorise, simplifie, développe en mode auto et contracté et ça ne donne rien, alors je vais faire à la main.»

*15 minutes :*

J. applique la formule  $\cos p + \cos q$  à  $\cos 3x + \cos 5x$  puis à  $\cos x + \cos 5x$  faisant donc les deux transformations les plus efficaces pour la résolution de l'équation. Il note :

- $\cos 3x + \cos 5x = 2 \cos 4x \cdot \cos x$
- $\cos x + \cos 5x = 2 \cos 3x \cdot \cos 2x$

puis :

- $f(x) = 2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 5x$
- $f(x) = 2 \cos 4x \cdot \cos x + \cos x$
- $f(x) = 2 \cos 3x \cdot \cos 2x + \cos 2x$

et il encadre ces trois expressions.

F. s'est lui lancé dans la transformation de  $\cos 3x$  en utilisant la formule  $\cos(a+b)=\dots$ . J. lui dit que ça ne va pas marcher car il va avoir des sinus. F. continue quand même et arrive à :

$\cos x(2 \cos^2 x - 1) - 2(1 - \cos^2 x)$  qu'il factorise :  $\cos x(4 \cos^2 x - 3)$ . Il veut ensuite utiliser DERIVE pour vérifier son calcul. Il en discute avec J. puis, sur sa suggestion, décide d'utiliser plutôt la calculatrice et de faire tracer les deux expressions pour contrôler le calcul.

J., lui, semble en panne. Il a contemplé un moment les trois expressions encadrées sans rien dire puis est revenu à son formulaire.

Le professeur passe, regarde ce qu'ils font et ne fait aucun commentaire.

*20 minutes :*

F. obtient sur la calculatrice une sinusoïde et en est très étonné. Il regarde les expressions obtenues par J., compare avec la sienne et conclut qu'il a du se tromper. Assez vite cependant, il réalise qu'il n'a calculé que  $\cos 3x$  et que c'est pour cela qu'il a une sinusoïde et sans doute des expressions différentes de celles de J. Il passe alors au calcul de  $\cos 5x$ .

Pendant ce temps J. écrit :  $f(x) = \cos x(2\cos 4x + 1)$  puis, à l'aide du formulaire retransforme cette expression en :  $\cos x(2(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 1)$ . Il reprend ensuite la forme :  $f(x) = \cos 3x(2\cos 2x + 1)$  et la transforme à son tour en :

$$\cos 3x(2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1) \text{ puis : } \cos 3x(2(\cos^2 x - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + 1).$$

Il s'arrête alors et dit à F. : «Ca y est, j'en ai plusieurs et toi, tu en as combien ?»

F. répond : «Pas même encore une !» Il en est en effet toujours à décomposer  $\cos 5x$  et est arrivé à :

$$2(2\cos^2 x - 1)^2 \cos x - 4\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x(2\cos^2 x - 1).$$

*25 minutes :*

Le professeur interrompt alors le travail en groupes pour un point collectif similaire à celui déjà décrit pour l'autre groupe. Il montre de plus qu'à partir de l'expression polynomiale de degré 5 en  $\cos x$  factorisée sous la forme :  $\cos x(16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 3)$  obtenue en option «dévEloppé», en repassant en option «Contracté» et en demandant la simplification du second facteur, on obtient l'expression :  $\cos x(2\cos 4x + 1)$ . Comme dans l'autre groupe, il demande aux élèves de ne pas s'attarder sur cette première partie et d'en venir assez vite à la résolution de l'équation.

*30 minutes :*

J. et F., après cette intervention collective, essaient de reproduire les manipulations du professeur. Ils obtiennent ainsi successivement :

- $16\cos^5 x - 16\cos^3 x + 3\cos x$
- $\cos x(1 - 4\sin^2 x)(2\cos x - 1)(2\cos x + 1)$
- $16\cos x(\cos x - \frac{1}{2})(\cos x + \frac{1}{2})(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2})(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2})$
- $\cos x(16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 3)$

et enfin :

- $\cos x[16(\cos x - \frac{1}{2})(\cos x + \frac{1}{2})(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2})(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2})]$

par factorisation radicale du second facteur de l'expression précédente.

J. commente : «C'est vrai que c'est plus simple mais le problème c'est qu'on ne sait pas ce qu'on va obtenir».

Ils décident d'écrire sur la feuille de réponse ce qu'ils ont obtenu avec DERIVE. En fait, ils ne reproduisent que les quatre premières ayant repéré que la cinquième est identique à la troisième, à l'ordre près.

Le professeur passe et ils lui demandent s'il faut en mettre huit. Il répond que ce n'est pas nécessaire et les encourage à passer rapidement à la résolution de l'équation, avant de repartir.

*35 minutes :*

Visiblement, F. et J. ne sont pas très satisfaits de n'écrire que quatre expressions alors qu'il y a huit lignes prévues. J. pense alors aux expressions qu'il avait trouvées au début en travaillant en P/C. F. lui demande si elles sont justes et J. répond qu'il ne sait pas. F. lui conseille de tracer pour contrôler (il l'avait lui même fait précédemment, rappelons-le). De fait, il ne le fera pas et dictera simplement à F. les deux premières expressions trouvées :

- $2\cos 2x \cdot \cos x + \cos 5x$
- $2\cos 3x \cdot \cos 2x + \cos 3x$

F. lui demande s'il en a d'autres et J. répond que ce n'est pas la peine de les prendre car «ça devient trop compliqué».

Ils passent ensuite à la question 2 et répondent très vite que ce sont les formes 2 et 3 qui sont le mieux adaptées car, dit J., «il faut prendre les produits de facteurs».

Le professeur passe et F. lui demande si, pour la résolution, il faut partir de l'équation ou des expressions. Le professeur répondant : «ce que vous voulez», F. conclut «qu'ils vont avoir fini en trois minutes». Il écrit alors directement sur la feuille de réponse :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \cos x - \frac{1}{2} = 0 \text{ ou } \cos x + \frac{1}{2} = 0 \text{ ou } \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \text{ ou } \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\text{puis : } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2}$$

J. regarde puis trace un cercle trigonométrique. F. aussi et il se sert du cercle pour obtenir les solutions des autres équations partielles, écrivant sur sa feuille de réponse :

$$\cos x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}$$

$$\cos x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6}$$

$$\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6}$$

J., de son côté, écrit sur son brouillon :

$$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} (\pi)$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad x = \frac{\pi}{3} (2\pi) \text{ ou } -\frac{\pi}{3} (2\pi)$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad x = \frac{2\pi}{3} (2\pi) \quad \frac{7\pi}{3} (2\pi)$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad x = \frac{\pi}{6} (2\pi) \quad -\frac{\pi}{6} (2\pi)$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} (2\pi) \quad \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} (2\pi)$$

puis, regardant les solutions de F., il corrige les deux erreurs sans rien dire.

J. propose ensuite de tracer pour voir et active la commande graPh. mais il ne sait pas bien ce qu'il doit faire ensuite et F. le guide efficacement. Après avoir convenablement partagé la fenêtre, F. s'attend en revanche à ce que le graphe soit tracé automatiquement et trouve que DERIVE met beaucoup de temps. Puis il réalise qu'il a oublié le second graPh, le fait et obtient le graphe (cf. figure page 242).

*45 minutes :*

Le professeur passe à ce moment là et leur demande ce qu'ils font. J. répond : «Un graphique». Le professeur demande pourquoi. F. répond : «Bof ça ne sert pas à grand chose, c'est pour vérifier les solutions». Le professeur lui fait alors remarquer qu'alors ça ne sert pas à rien et leur explique comment se déplacer le long de la courbe avec le curseur.

F. et J. déplacent le curseur, s'arrêtant sur les racines, mais ne faisant pas de commentaires particuliers et ne notant rien. J. se demande s'ils les voient toutes et propose de faire un zoom. F. l'aide à effectuer le zoom et ils obtiennent la figure 2, qu'ils regardent mais ne cherchent pas vraiment à interpréter. Ils repassent dans la fenêtre d'algèbre, écrivent l'équation :  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$  et demandent sa résolution.

*50 minutes :*

Le professeur passe juste à ce moment là, regarde ce qu'ils ont écrit sur les feuilles de réponse et leur demande s'ils ont justifié l'expression dont ils sont partis pour résoudre l'équation. J. répond qu'elle peut être justifiée puisqu'elle est juste mais visiblement il n'a pas trop envie de se lancer dans le calcul ou ne voit pas comment faire de façon immédiate. F. repense à ce qu'il a fait au début et dit qu'on peut développer  $\cos 3x$ , on obtient des formules avec des  $\cos^3 x$  puis  $\cos 5x$ .

Le professeur leur suggère d'essayer peut-être d'arriver plus directement à l'expression factorisée et s'en va.

Les deux élèves remontent dans DERIVE pour voir les différentes expressions et sont très hésitants. J. recopie les solutions au propre sur sa feuille et F. rajoute sur la sienne :

«f(x) a pour période  $2\pi$ , donc on étudie la fonction entre  $-\pi$  et  $\pi$ .»

La séance s'achève peu après.

groupe 3 (première séance) :

Il s'agit d'un groupe constitué de deux garçons, que nous noterons H. et T. ; ces deux garçons communiquent peu verbalement pendant la séance.

Le professeur introduit la séance et T. sort chercher sa calculatrice. Pendant ce temps, H. lance DERIVE et entre l'expression sous la forme  $f(x) := \dots$ .

Ils essaient ensuite les diverses commandes possibles, avec l'option par défaut : «Auto», puis l'option «Contracté», obtenant successivement huit expressions qui ne se différencient que par l'ordre des termes.

*15 minutes :*

Ils finissent par essayer l'option «dévEloppé» et obtenir l'expression polynomiale en  $\cos x$ . Ils sont contents et disent au professeur qui passe à ce moment là que ça marche. Deux essais successifs les ramènent ensuite à l'expression initiale puis ils essaient la commande de factorisation, en choisissant d'emblée l'option «Radical». Ils obtiennent ainsi l'expression :

$$16\cos x(\cos x - \frac{1}{2})(\cos x + \frac{1}{2})(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2})(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Ils notent cette expression, puis font résoudre l'équation associée, obtenant les 15 solutions comprises entre  $-\frac{5\pi}{6}$  et  $\frac{11\pi}{6}$ . Ils les recopient au brouillon.

Ils passent ensuite cinq bonnes minutes à essayer les diverses options, en particulier l'option Contracté, les commandes de simplification et factorisation, sans rien obtenir de nouveau (le fichier informatique reproduit 10 fois de suite soit l'expression initiale, soit l'équation).

*25 minutes :*

Interruption collective de l'enseignant.

*30 minutes :*

H. et T. examinent leurs expressions pour voir lesquelles, parmi celles montrées par l'enseignant, ils avaient déjà trouvées et H. demande à T. si la troisième est bien la factorisée de la deuxième. T. confirme puis ils décident de faire tracer la fonction. Ils ne rencontrent pas de difficultés à couper la fenêtre et obtenir un tracé avec trois oscillations principales. Constatant qu'ils n'ont pas assez de racines, ils décident de faire un zoom. Pour le faire, ils utilisent F8, qui zoome en éloignant verticalement. Appuyant plusieurs fois, ils se retrouvent alors avec un tracé horizontal en haut de l'écran. H. regarde alors l'échelle affichée et note que celle sur  $x$  est de : 0.01.

Il la modifie, avec l'aide de l'enseignant qui passe à ce moment là pour revenir au premier dessin tracé. H. note alors sur son brouillon la forme du graphique puis, revenant à l'expression polynomiale en  $\cos x$  obtenue, demande au professeur si on ne pourrait pas transformer en posant :  $X = \cos x$ . Ce dernier répond que c'est une bonne idée et s'en va.

*35 minutes :*

Ils entrent alors sous DERIVE :

- $G(n) := 16n^5 - 16n^3 + 3n$

demandent la simplification de cette expression, ce qui redonne la même, puis sa factorisation toujours avec l'option de factorisation radicale utilisée précédemment. Ils obtiennent ainsi :

$$\bullet \quad 16n(n - \frac{1}{2})(n + \frac{1}{2})(n - \frac{\sqrt{3}}{2})(n + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

H. fait alors le rapprochement avec la troisième expression factorisée obtenue et vérifie terme à terme, puis note au brouillon :

$$\bullet \quad n=0, n = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}, n = \frac{\sqrt{3}}{2}, n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

H. trace un cercle trigonométrique et écrit :  $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

Il entre ensuite sous DERIVE l'équation :  $\cos x = 0$ , demande sa simplification, ce qui ne la modifie pas, puis sa résolution. DERIVE fournit trois solutions :  $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ .

*40 minutes :*

R. recopie sur son brouillon, H. lui fait remarquer que :  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$  c'est la même chose, en montrant sur le cercle trigonométrique. Ils passent ensuite à l'équation  $\cos x = \frac{1}{2}$ , l'entrent sous

DERIVE, demandent cette fois directement la résolution et notent les résultats obtenus :  $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ .

Ils passent rapidement à  $\cos x = -\frac{1}{2}$ . H. commence à s'inquiéter de l'heure. Tout en continuant lui-même à demander les résolutions à DERIVE, il dit à T. de recopier les solutions. Ils obtiennent ainsi trois solutions pour  $\cos x = \frac{1}{2}$  et  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

L'enseignant passe à ce moment là et leur demande où ils en sont. Ils le lui expliquent et il s'en va après avoir marqué son accord.

*40 minutes :*

Ils font résoudre la dernière équation puis décident de commencer à remplir la fiche de réponses. C'est T. qui s'en charge et, pendant ce temps, H. remonte dans les écrans DERIVE pour revenir à la première résolution obtenue (qui était une résolution globale) et s'assurer que les valeurs obtenues sont les mêmes. Il coche au fur et à mesure avec un crayon sur son brouillon.

Pendant cette période, l'enseignant intervient pour dire qu'il ne reste que cinq minutes et qu'il faut rédiger.

La rédaction de T. est la suivante :

$$\cos x = X$$

on obtient :  $f(X) = 16X^5 - 16X^3 + 3X$

$$f(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = \frac{1}{2} \text{ ou } X = -\frac{1}{2} \text{ ou } X = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } X = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or  $\cos x = X$

$$\text{donc } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \left[ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

Il n'a donc conservé pour chaque sous-équation que les deux premières solutions données par DERIVE.

*50 minutes :*

L'enseignant leur demande comment ils ont obtenu l'expression dont ils sont partis pour la résolution et leur rappelle que, dans la résolution rédigée, tout doit être justifié indépendamment de DERIVE.

La séance en fait s'achève peu après, sans que les deux élèves se soient lancés sérieusement dans le travail de justification demandé.

Groupe 4 (deuxième séance) :

C'est un groupe constitué de deux garçons que nous noterons respectivement E. et P.

Après introduction de la séance par l'enseignant, les deux élèves lisent la fiche distribuée puis E. sort son formulaire tandis que P. lance DERIVE et entre l'expression initiale  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x$

P. commence à travailler dans l'option par défaut : «Auto», en faisant varier les trois directions alors disponibles. Il obtient ainsi trois fois la même expression, passe ensuite à l'équation, demande sa simplification, sa résolution, sous différentes options, obtenant cinq écritures identiques puis revient à l'expression, sans plus de succès.

Pendant ce temps, E. travaille en P/C, en s'aidant de son formulaire. Il écrit :

$$2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) + \cos 5x$$

puis :

$$2\cos x \cdot \cos x + \cos 5x, \text{ faisant une erreur de calcul.}$$

Il montre l'expression obtenue à P. Visiblement, ni l'un ni l'autre ne sont enthousiasmés par ce qu'ils ont fait.

*15 minutes :*

L'enseignant passe et ils lui demandent s'il faut travailler au brouillon ou avec DERIVE. Le professeur répond qu'ils peuvent faire comme ils veulent, l'important étant d'obtenir différentes expressions de  $f(x)$ . E. continue alors à travailler en P/C. Il transforme son expression erronée en :  $1 + \cos 2x + \cos 5x$  puis, prend sa calculatrice CASIO, entre en mémoire l'expression ci-dessus et la calcule pour différentes valeurs de  $x$ .

P., de son côté, abandonne DERIVE pour repasser en P/C, devant le peu de succès de ses essais. Il met le formulaire devant l'écran, regroupe les deux derniers termes :  $\cos 3x$  et  $\cos 5x$  et obtient :  $\cos x + 2\cos 4x \cdot \cos x$ , expression qu'il factorise.

*20 minutes :*

Le professeur passe. P. enlève le formulaire de l'écran et lui dit qu'il n'a pas réussi à obtenir des expressions différentes avec DERIVE. L'enseignant regarde alors les options choisies et conseille à P. de se mettre en option «dévEloppé» puis il s'en va.

P. revient au travail sous DERIVE, passe en option : «dévEloppé» laissant la deuxième option à sa valeur par défaut : «Auto» et obtient :  $\cos x(1-4\sin^2 x)(2\cos x-1)(2\cos x+1)$  en demandant la factorisation de l'expression initiale. Il recopie cette expression.

P. demande la résolution de l'équation automatiquement associée à l'expression par la commande «resoL» et obtient les quinze solutions comprises entre :  $-\frac{7\pi}{6}$  et  $\frac{5\pi}{3}$ . Il recopie ensuite ces solutions sur son brouillon.

Pendant ce temps, E. travaille toujours en P/C avec sa calculatrice CASIO. Il a fait divers essais, sa calculatrice étant en mode degré, a noté les valeurs puis contemple son papier sans regarder ce que fait son co-équipier.

P. repasse en DERIVE, cette fois utilise la commande Simplife et obtient l'expression polynomiale en  $\cos x$ . Il demande ensuite la résolution et obtient les quinze solutions comprises entre  $-\frac{5\pi}{6}$  et  $\frac{11\pi}{6}$ . E. se décide à regarder l'écran.

*25 minutes :*

Le professeur interrompt la séance pour faire un point collectif. Lorsqu'il arrive à l'expression  $\cos x(2\cos 4x+1)$ , P. dit à E. qu'il l'avait lui aussi obtenue mais sans utiliser DERIVE.

*30 minutes :*

Après cette phase collective, E. appelle l'enseignant et lui explique ce qu'il a fait. L'enseignant repère l'erreur de calcul faite au départ et la lui fait remarquer.

P. a commencé, lui, à recopier les expressions trouvées sur la feuille de réponse :

1.  $\cos x(1 - 4\sin^2 x)(2\cos x-1)(2\cos x+1)$
2.  $16\cos^5 x - 16\cos^3 x + 3\cos x$
3.  $\cos x(1 + 2\cos 4x)$

Il demande à l'enseignant s'il faut justifier toutes les expressions trouvées. Le professeur répond que ce n'est pas nécessaire, qu'il n'a qu'à le faire pour la 3.

E. reprend le formulaire et se remet au travail, toujours en P/C. Il corrige son expression initiale et la recopie :

1.  $f(x) = 2\cos(2x) \cdot \cos(-x) + \cos 5x$

*35 minutes :*

E. recopie sur sa feuille les expressions 2 et 3 de P., note que l'expression 3 est la mieux adaptée pour la résolution de l'équation puis pense à regrouper  $\cos x$  et  $\cos 5x$  pour obtenir une quatrième expression. Il écrit alors :

$$4. f(x) = 2\cos 3x \cdot \cos 2x + \cos 3x$$

mais ne factorise pas cette expression.

Il passe ensuite à la résolution en P/C de l'équation à partir de la forme :  $\cos x(1+2\cos 4x)$  qu'il a déclarée la plus adaptée. Il reprend sa calculatrice CASIO pour trouver un angle de cosinus égal à  $-1/2$ . Il obtient la réponse 120 puisqu'il est toujours en mode degré et passe alors en radians pour arriver à  $\frac{2\pi}{3}$ .

P., pendant ce temps, a pris la fiche de réponse et s'apprête à répondre à la question 3. Il regarde les solutions sur l'écran pendant un assez long moment puis emprunte son formulaire à E. Il rédige ensuite sa solution tout en se déplaçant dans les solutions DERIVE avec le curseur pour contrôler ses réponses. La rédaction fournie est la suivante :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } 1 + 2\cos 4x = 0$$

$$\bullet \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} (k\pi)$$

$$\bullet \quad 1 + 2\cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\text{ou} \quad 4x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

~ 40 minutes :

P. a terminé sa rédaction. Il repasse sous DERIVE, recopie l'expression polynomiale en  $\cos x$  puis essaie de la transformer une fois de plus. Il essaie d'abord la commande dévEloppe qui lui redonne la même expression puis diverses options de factorisation : l'option «Trivial» lui donne :

$\cos x(16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 3)$  ; l'option «Sans Carrés» redonne la même expression, l'option «Rationnel» lui redonne l'expression 1.

E., pendant ce temps, a rédigé sa solution et c'est la suivante :

$$\cos x(2\cos(4x)+1) = 0$$

$$\text{donc } \cos x = 0$$

$$\text{ou } 2\cos(4x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{ou } \cos(4x) = -\frac{1}{2}$$

$$4x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi$$

$$\text{donc } x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}$$

Et il encadre les deux expressions trouvées pour x.

Il reprend ensuite sa CASIO, entre en mémoire l'expression  $2\cos 4x + 1$  puis calcule ses valeurs pour  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$  (il est repassé en mode degré). Ceci ne correspond pas à la formulation qu'il a donné pour les solutions, mais il obtient 0 à chaque calcul et semble satisfait.

*45 minutes :*

E. regarde ce que fait P. qui vient d'obtenir la factorisation rationnelle et lui demande : «Tu cherches encore ?» P. confirme que oui, mais qu'il ne trouve rien d'intéressant. Il a l'air un peu découragé.

L'enseignant passe et E. lui montre sa réponse à la question 3. L'enseignant lui demande comment il a justifié l'expression de départ. P. intervient pour dire qu'il l'a fait et montre aussi sa résolution. L'enseignant donne son accord et revient à la solution de E. Il remarque alors l'oubli de solutions dans la résolution de  $\cos(4x) = -\frac{1}{2}$  et demande à E. si cette équation se

résoud bien en :  $4x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi$ , puis s'en va.

P. revient à DERIVE et à ses essais de factorisation. Il essaie l'option suivante : «Radical» et obtient enfin une nouvelle expression :

$$16\cos x \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) \left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

*50 minutes :*

P. est très satisfait et trace alors au compas un cercle trigonométrique. Puis il demande la résolution, obtenant, une fois de plus, les quinze solutions entre  $-\frac{5\pi}{6}$  et  $\frac{11\pi}{6}$ .

Pendant ce temps, E. a lui aussi tracé un cercle trigonométrique qu'il partage en prenant en compte ses solutions : d'abord horizontalement et verticalement, puis suivant les droites d'angle polaire  $\frac{\pi}{6}$  et  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$ . Il reprend ensuite sa CASIO.

Visiblement ces deux élèves ne savent pas trop quoi faire d'autre et ils ne feront plus grande chose jusqu'à la fin de la séance, quelques minutes plus tard.

#### **BILAN COLLECTIF :**

Ce bilan aura lieu, comme prévu, trois jours plus tard.

En premier lieu, l'enseignant fait un rapide bilan des expressions différentes de  $f(x)$  trouvées par les élèves, en s'intéressant plus particulièrement aux 10 expressions données en annexe qui sont photocopiées pour tous les élèves. C'est à partir de ces dix expressions qu'est lancée la discussion collective relative à la question 2 : quelles sont les formes a priori les mieux

adaptées à la résolution de l'équation donnée ? Cette discussion est brève, les élèves étant bien convaincus que ce sont les formes factorisées qui sont les mieux adaptées et sachant les différencier suivant leur complexité.

Le bilan se poursuit par la résolution à partir des deux formes les plus simples :

$$\cos 3x(1+2\cos 2x) \text{ et } \cos x(1+2\cos 4x)$$

Dans chaque cas, la démarche suivie est la suivante :

- 1 Etablissement de la formule
- 2 Résolution des deux équations partielles
- 3
  - a) Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique
  - b) Ecriture de l'ensemble des solutions
  - c) Commentaires sur les solutions fournies par DERIVE
  - d) Lien avec la période de la fonction  $f$

Ensuite est posé le problème de l'obtention d'autres formes à partir de l'expression :

$$f(x) = \cos x(4\cos^2 x - 3)(4\cos^2 x - 1)$$

Une stratégie est explicitée collectivement : utiliser la formule de Moivre pour transformer  $\cos 3x$  et  $\cos 5x$  en polynômes en  $\cos x$  et  $\sin x$ , puis la formule  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  pour éliminer les sinus, factoriser le polynôme en  $X$  obtenu en faisant le changement de variable :  $X = \cos x$ .

Les élèves doivent ensuite effectuer le calcul pour  $\cos 3x$ , tandis que pour  $\cos 5x$  on utilise le logiciel DERIVE. La factorisation est, elle, faite à la main, facilitée par le fait qu'après la mise en facteurs de  $X$ , on se retrouve avec un polynôme du second degré en  $X^2$ .

L'expression étant établie, la résolution de  $f(x) = 0$ , à partir de cette nouvelle forme, est menée collectivement puis une discussion engagée sur les avantages et inconvénients de cette dernière méthode.

En renforcement, il est demandé aux élèves de faire chez eux un travail analogue pour prouver l'égalité :  $f(x) = \cos x(4\sin^2 x - 1)(4\sin^2 x - 3)$  puis résoudre l'équation à partir de cette forme.

Le bilan se termine par la dimension nombres complexes. Le document intitulé : « Différentes résolutions possibles de l'équation  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$  », reproduit en annexe page 238 est distribué aux élèves et un travail collectif est mené sur les deux paragraphes :

- Le plongement dans les complexes
- L'utilisation des formules d'Euler.

#### ANALYSE A POSTERIORI

Nous avons donné dans le compte-rendu de cette séance quatre exemples de déroulement. Ce sont ceux pour lesquels nous disposons, de par les observations réalisées, des informations les plus détaillées. Le nombre d'observateurs étant élevé, nous avons cependant pour plusieurs autres groupes des informations intéressantes même si elles sont plus partielles. Nous disposons aussi des fiches de réponse de tous les élèves.

Un certain nombre de régularités apparaissent à l'étude des données recueillies qui concernent donc le travail d'un groupe de trois élèves, de dix groupes de deux élèves, de trois pseudo-groupes comme le groupe quatre ci-dessus et de trois élèves travaillant complètement seuls.

D'abord, comme l'on pouvait s'y attendre, la plupart des élèves ont largement utilisé DERIVE. Trois groupes seulement ont travaillé pratiquement toute la séance sans DERIVE et un élève seul n'a commencé à utiliser DERIVE qu'après l'intervention collective du professeur. Se bornant à mettre en oeuvre les transformations liées aux arcs doubles, il n'avait obtenu à ce moment là aucune expression «intéressante».

Si presque tous les groupes ont largement utilisé DERIVE, cette utilisation n'a cependant pas été sans poser problème, en particulier au début de la séance. Nombreux sont les fichiers qui attestent les errances des élèves confrontés à la multiplicité des options possibles en mode trigonométrique et au fait que l'utilisation de six des neuf choix possibles ne fait qu'inverser l'ordre des termes de l'expression initiale. A ceci s'ajoute la multiplicité des commandes qui a priori pourraient donner quelque chose : Simplifie, dévEloppe, resoL ainsi que la commande Factor avec ses cinq options propres, ce qui tend à multiplier les essais infructueux. Quelques élèves mais assez peu renonceront à DERIVE, comme dans le groupe 2 décrit ci-dessus, jusqu'à l'interruption collective. Plus régulièrement, il y aura intervention de l'enseignant ou des observateurs qui, voyant filer le temps et se multiplier les essais inutiles, n'arrivent plus à tenir leur rôle d'observateurs avant l'intervention collective prévue.

Lorsque la situation se débloque, spontanément ou non, par passage à l'option «dévEloppé», le nombre d'expressions susceptibles d'être rapidement obtenues avec les différentes commandes, même si là encore, on note dans les fichiers des répétitions fréquentes, est intéressant. Nous avons reporté dans les deux tableaux ci-dessous le nombre d'expressions obtenues par les différents élèves travaillant seuls ou en groupes ainsi que les diverses expressions apparues.

| Nombre Expressions<br>Obtenues | Nombre Elèves<br>(avec DERIVE) | Nombre d'Elèves<br>(sans DERIVE) |
|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| 1                              | 0                              | 0                                |
| 2                              | 1g                             | 2                                |
| 3                              | 1                              | 1g                               |
| 4                              | 3g + 1                         | 1                                |
| 5                              | 1g+1                           | 0                                |
| 6                              | 3g                             | 1g                               |
| 7                              | 1                              | 0                                |
| 8                              | 2g                             | 0                                |

Tableau 1 : Nombre d'expressions obtenues

| Expressions                                                                                                      | Nombre de propositions |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| $\cos x(1+2\cos 4x)$                                                                                             | 8                      |
| $\cos 3x(1+2\cos 2x)$                                                                                            | 8                      |
| $2\cos 2x \cdot \cos x + \cos 5x$                                                                                | 8                      |
| $16\cos^5 x - 16\cos^3 x + 3\cos x$                                                                              | 24                     |
| $\cos x(16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 3)$                                                                            | 16                     |
| $\cos x(16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 3)$                                                                            | 8                      |
| $\cos x(1-4\sin^2 x)(2\cos x-1)(2\cos x+1)$                                                                      | 16                     |
| $\cos x(1-2\sin x)(2\sin x+1)(2\cos x-1)(2\cos x+1)$                                                             | 10                     |
| $\cos x(2\cos x-1)(2\cos x+1)(4\cos^2 x-3)$                                                                      | 7                      |
| $\cos x(2\sin x-1)(2\sin x+1)(4\sin^2 x-3)$                                                                      | 2                      |
| $\cos x(1-4\sin^2 x)(4\cos^2 x-1)$                                                                               | 2                      |
| $16\cos x(\cos x - \frac{1}{2})(\cos x + \frac{1}{2})(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2})(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2})$ | 18                     |
| $16\sin^2 x \cos^3 x + 4\cos^3 x + 4\sin^2 x \cos x - \cos x$                                                    | 6                      |
| $\cos^3 x(4-16\sin^2 x) + \cos x(4\sin^2 x-1)$                                                                   | 8                      |
| $16\cos^5 x - 12\cos^3 x + \cos x(3-4\cos^2 x)$                                                                  | 2                      |
| $16\sin^4 x \cos x - 16\sin^2 x \cos x + 3\cos x$                                                                | 2                      |
| $\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x + \cos 5x$                                                                         | 2                      |
| $\cos x + \cos 3x + 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$                                                           | 2                      |
| $1/2(e^{ix} + e^{-ix} + e^{3ix} + e^{-3ix} + e^{5ix} + e^{-5ix})$                                                | 4                      |
| $-\cos(\pi-x) - \cos(3\pi-x) - \cos(5\pi-x)$                                                                     | 2                      |
| $\cos 3x(2(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 1)$                                                                          | 1                      |
| $\cos 3x(2(\cos^2 x - 1/2(1-\cos 2x)) + 1)$                                                                      | 1                      |
| $\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} - x) + \sin(\frac{5\pi}{2} - x)$                                  | 2                      |
| $\sin x / \tan x + \sin 3x / \tan 3x + \sin 5x / \tan 5x$                                                        | 1                      |

Tableau 2 : Expressions obtenues par les élèves

A ceci s'ajoutent deux expressions erronées obtenues par un élève à partir des deux premières citées :

$$\cos x \cdot 4\cos^2 2x$$

$$\cos 3x \cdot 4\cos^2 x$$

Précisons que les trois premières expressions et les six dernières ont été obtenues en fonctionnement P/C, les autres en utilisant DERIVE.

Comme on le note dans quelques groupes observés, plusieurs élèves auront du mal à abandonner cette première phase de l'activité proposée, même lorsqu'ils ont un nombre

raisonnable d'expressions différentes, estimant peut-être, vu les huit lignes figurant sur la fiche réponse, que le contrat à respecter est de fournir huit réponses. De plus, même s'il semble bien que presque tous les élèves aient obtenu plusieurs expressions avant le bilan collectif, beaucoup, après le bilan, en reviendront à cette première phase, malgré les conseils de l'enseignant, pour essayer d'obtenir ce qui a été montré collectivement et/ou enrichir leur liste d'expressions.

Comme on pouvait s'y attendre aussi, presque aucun élève n'utilisera spontanément les commandes DERIVE sur des sous-expressions. Personne n'obtiendra en particulier avec DERIVE la première expression citée avant que le professeur ne montre comment faire.

Lorsque les élèves se décident à l'aborder, la deuxième question est en revanche résolue très vite. Les élèves savent bien que les expressions qu'ils savent traiter lorsqu'il s'agit de résoudre une équation sont les expressions factorisées et, même s'ils en ont obtenu plusieurs, en général ils ne citent que les plus simples.

La résolution de l'équation, qui est malheureusement abordée par de nombreux groupes assez tard dans la séance, se fait très majoritairement avec l'assistance de DERIVE, en mode algébrique et le fonctionnement des quatre groupes décrits illustre bien les problèmes rencontrés par les élèves dans cette résolution.

Si l'on analyse les solutions rédigées, en désignant par :

- *résolution partielle de type 1*, les résolutions du type :

$$\cos nx = \cos a \Leftrightarrow nx = a + k.2\pi \Leftrightarrow x = a/n + k.2\pi/n,$$

- *résolution partielle de type 2*, les résolutions du type :  $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a$  ou  $x = -a$ ,
- *résolution de type 3*, les résolutions du type  $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + k.\pi$ ,
- *résolution globale DERIVE*, une résolution DERIVE portant sur l'ensemble de l'équation,
- *résolution séparée DERIVE*, une résolution DERIVE, sous-équation par sous-équation (en général effectuée à partir des facteurs de la factorisation radicale),

on obtient les résultats suivants, hors les quatre groupes précédemment décrits :

Elèves travaillant en P/C :

- Justification de l'expression 1 - résolution correcte de  $\cos x = 0$  - arrêt sur  $4x = \pi + k.2\pi$  (1 élève)
- Justification des expressions 1 et 2 - résolution partielle de type 1 de ces deux expressions ce qui conduit à deux ensembles de solutions distincts. (2 élèves)
- Justification des expressions 1 et 2 - résolution partielle de type 2 de ces deux expressions ce qui conduit à deux ensembles de solutions distincts. (2 élèves)
- Justification de l'expression 1 - résolution incorrecte du type :

$$\cos x = \cos a + k.2\pi \Leftrightarrow x = a + k.2\pi \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = a + 2\pi \text{ (1 élève)}$$

Elèves travaillant avec DERIVE :

- Résolution globale DERIVE - justification de la forme polynomiale en  $\cos x$  (2 élèves)

- Résolution globale DERIVE - solution rédigée à partir de la factorisation radicale admise - résolution partielle de type 2 (9 élèves)
- Résolution globale puis séparée DERIVE - solution rédigée à partir de la factorisation radicale admise et les trois solutions DERIVE données pour chaque sous-équation (1 élève)
- Résolution globale DERIVE à partir de l'expression 1 (qui ne donne que trois solutions : -  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ ) puis résolution DERIVE séparée à partir de l'expression 1 (qui donne, elle, bien 15 solutions) - rédaction à partir de l'expression 1 admise - résolution de type 3 et donnée entre parenthèses des solutions DERIVE correspondantes à la sous-équation (2 élèves).
- Résolution globale DERIVE - pas de rédaction ou simple début de recopie des solutions DERIVE (3 élèves).

Comme on peut le constater, que les élèves travaillent en P/C ou avec DERIVE, ils ont souvent obtenu plusieurs ensembles de solution distincts : en P/C, parce qu'ils conduisaient la résolution parallèlement à partir des deux expressions factorisées et n'obtenaient pas les mêmes ensembles de solutions, vu les règles utilisées, en DERIVE, parce que les solutions données par DERIVE n'étaient pas nécessairement les mêmes suivant les équations dont on partait et que d'autre part, elles ne correspondaient pas aux solutions issues d'une résolution P/C. On faisait l'hypothèse que les élèves cherchaient à comprendre les différences constatées et que ceci pouvait engager un travail mathématique intéressant. Le fonctionnement du groupe 1 montre bien d'ailleurs ce type d'engagement des élèves, les difficultés qu'ils rencontrent et le fait que les conflits cognitifs ne sont pas nécessairement résolus de la façon attendue. Au vu des productions des élèves et des informations dont nous disposons, il semble bien que d'une part tous les élèves n'aient pas été sensibles aux contradictions, que d'autre part, même s'il les remarquaient, un certain nombre se soit borné à juxtaposer les deux types de résolutions (celle DERIVE et celle P/C) sans éprouver nécessairement le besoin de les coordonner.

On peut constater également que la plupart des élèves ayant utilisé DERIVE sont partis de la factorisation radicale. Dans ce cas, la factorisation est toujours admise. Un seul groupe justifie une expression obtenue avec DERIVE, c'est le groupe qui justifie la forme polynomiale avec les formules de Moivre mais, malheureusement, il n'achève pas la rédaction de la résolution. Les observations menées montrent d'ailleurs les grandes difficultés que rencontre l'enseignant, en fin de séance, à négocier la demande que les élèves reprennent leur résolution pour l'affranchir de toute trace de l'utilisation de DERIVE.

Cette séance, dans la perspective d'étude des problèmes d'intégration qui est la nôtre nous semble tout à fait intéressante car elle met particulièrement bien en lumière un certain nombre de difficultés et phénomènes qu'il est nécessaire de prendre en compte dans la réflexion sur l'intégration de logiciels comme DERIVE. C'est sur ces points que nous voudrions insister maintenant.

### **1. La question de la gestion des savoirs mathématiques par DERIVE :**

Les précédentes observations ne nous avaient pas confrontés de manière aussi vive aux problèmes liés à la transposition mathématique effectuée par DERIVE. Ici les iatus existant entre les modes de gestion des expressions trigonométriques que l'enseignement se propose de mettre en place chez les élèves, dans une économie qui est étroitement liée aux conditions de fonctionnement P/C et les modes de gestion qui sont ceux de DERIVE, sont évidents. Les deux expressions factorisées par lesquelles va passer une résolution économique en P/C sont

simples à obtenir par application d'une seule formule de transformation, à condition de ne pas se borner à vouloir combiner les deux premiers termes. Les obtenir avec DERIVE relève de l'acrobatie de haut vol.

La question de la gestion des savoirs mathématiques par DERIVE, des éventuels décalages voire incompatibilités avec la gestion de ces savoirs dans les environnements scolaires usuels se pose aussi ici pour la résolution de l'équation. D'une part, suivant les options et directions choisis, une même équation sera résolue par DERIVE ou ne le sera pas, si elle est résolue, un ensemble fini de solutions est donné : 3 pour chaque équation élémentaire, 15 pour l'équation globale (à l'exception de la résolution à partir de l'expression 1 qui ne donne bizarrement que 3 solutions, comme signalé plus haut). Les listes, même si elles comportent le même nombre de solutions ne sont pas forcément identiques pour des équations équivalentes et, dans tous les cas, la formulation donnée ne correspond à aucune des formulations attendues à ce niveau d'enseignement. Dans l'analyse a priori de la situation, on faisait l'hypothèse que ces décalages pourraient engendrer un travail mathématique intéressant chez des élèves pour lesquels les raisons de travailler modulo  $2\pi$  peuvent relever plus du rite à accomplir que d'une compréhension réelle. Les observations faites confirment cette hypothèse, en montrant que le travail peut effectivement spontanément s'engager mais elles montrent aussi que les conflits rencontrés sont loin d'être toujours résolus de façon satisfaisante par les élèves. Ceci résulte, nous semble-t-il de différents facteurs :

- La confusion entre les angles et leurs mesures qui peut conduire à penser que ce qui est recherché quand on résout une équation trigonométrique, ce sont des angles et que, dans ces conditions, il suffit de donner une mesure par angle. Le passage au cercle trigonométrique, tout en étant une aide précieuse, peut renforcer cette confusion et amener les élèves à considérer, comme dans le groupe 1, qu'on peut éliminer les solutions qui conduisent au même point qu'un point déjà trouvé.
- Le fait que les élèves ne vivent pas les conflits comme nous les vivons nous-mêmes. Pour nous, vu la façon dont notre culture mathématique s'est constituée, il y a une légitimité dominante : celle liée aux transpositions didactiques usuelles en environnement P/C. Toute discordance est vue dans cette perspective et d'autre part notre souci de cohérence globale nous conduit systématiquement à vouloir la réduire. Nos élèves ne sont pas dans la même situation et les comportements observés ici sont de même nature que ceux observés par d'autres chercheurs avec les calculatrices (Trouche, 1994). D'une part, leurs exigences se situent plus au niveau de la cohérence locale que de la cohérence globale, d'autre part, la validité de leurs productions en P/C n'est que peu assurée, DERIVE est sans doute à leurs yeux plus fiable. Dans ces conditions, il n'est pas étonnant de voir se juxtaposer des solutions à nos yeux non-juxtaposables. Soulignons à ce propos que le groupe 1 se lance dans un tel travail de mise en cohérence, non à partir d'un décalage entre production DERIVE et production P/C mais à partir du décalage entre deux productions DERIVE.

## **2. Les problèmes posés par le passage de solutions DERIVE à des solutions indépendantes de DERIVE :**

Les observations faites montrent bien la difficulté qu'il y a à négocier le changement de contrat didactique entre une résolution où tous les outils sont permis pour arriver au résultat et une résolution où l'on impose de se limiter aux outils usuels de l'environnement P/C. La difficulté de la renégociation est ici d'autant plus visible que reconstruire le passage de l'expression initiale aux expressions les plus faciles à obtenir avec DERIVE, par exemple l'expression polynomiale, impose de reconstruire un nombre important d'intermédiaires et des calculs d'une

complexité technique non négligeable. Bien sûr, un pilotage intelligent de DERIVE pourrait amener à produire certains de ces intermédiaires mais les élèves concernés sont loin de maîtriser un tel pilotage. La difficulté de la négociation saute ici aux yeux mais, sous des formes moins évidentes, nous l'avons rencontrée dans de nombreuses situations observées. Il s'agit là d'une nouvelle tâche dont la dévolution doit être particulièrement soignée si l'on ne veut pas que certains élèves se demandent un peu à quel jeu on joue avec DERIVE.

### 3. La difficulté à développer une démarche stratégique et réflexive dans un environnement par trop incompréhensible et ouvert :

Là encore, nous sommes confrontés à un phénomène que les différentes observations ont contribué à mettre en évidence. Le fonctionnement de DERIVE est en effet incompréhensible pour ces élèves. Ils ne savent pas sur quels principes fonctionnent les options et directions et le fait d'obtenir, pour de nombreuses commandes, la simple reproduction de l'expression initiale n'aide pas à décrypter ce fonctionnement. Quant aux expressions différentes obtenues, elles sont bien trop complexes et éloignées de l'expression initiale pour que les transformations effectuées par DERIVE y soient facilement repérables. Ces caractéristiques du fonctionnement DERIVE favorisent ici, comme nous l'avons vu dans d'autres situations, des phénomènes de pêche au hasard qui ne sont pas forcément d'un grand intérêt mathématique. Dans la situation présente, il semble cependant assez facile de remédier à cet inconvénient en imposant, dans un premier temps au moins, l'option dévEloppé.

#### Faut-il conclure de ce qui précède que le domaine mathématique de la trigonométrie est un domaine peu adapté à l'utilisation de DERIVE dans l'enseignement secondaire ?

Notre conclusion n'est pas celle-là, même si ce domaine nécessite plus de précautions que d'autres et nous voudrions pour conclure cette analyse, souligner un certain nombre de pistes que l'observation effectuée nous semble suggérer.

Pour cela, il nous semble nécessaire d'identifier dans la séance observée plusieurs situations didactiques distinctes, condensées en une trop courte durée pour pouvoir se déployer chacune de façon réellement satisfaisante.

1. La première correspond à la première phase. L'enjeu en est un travail relativement formel sur l'équivalence d'expressions trigonométriques, les stratégies de pilotage des transformations qui permettent de passer de l'une à l'autre. Le fait que DERIVE permette d'obtenir rapidement des expressions très diverses équivalentes à une expression trigonométrique donnée, plus ou moins éloignées de cette dernière si l'on compte en nombre de transformations élémentaires nécessaires pour assurer l'équivalence, du fait des diverses options et commandes utilisables, peut sans doute permettre de mettre en scène des activités mathématiques intéressantes à ce niveau. On peut par exemple autour d'une exploration un peu systématique, sur la base de quelques expressions soigneusement choisies, organiser une activité dont l'objectif serait d'identifier les transformations utilisées par DERIVE dans les différentes options<sup>22</sup> et de reconstruire des intermédiaires plausibles

---

<sup>22</sup>En mode dévEloppé, selon le manuel d'utilisation, la version de DERIVE concernée utilise les transformations  $\sin(z+w) \rightarrow \sin z \cdot \cos w + \sin w \cdot \cos z$  et  $\sin^m z \rightarrow 2 \cos((m-1)z) \cdot \sin z + \sin((m-2)z)$  (et les transformations analogues pour les cosinus). En mode Contracté, il applique les transformations  $\sin z \cdot \sin w \rightarrow 1/2(\cos(z-w) - \cos(z+w))$  et  $\sin^m z \rightarrow 1/2(1 - \cos 2z) \sin^{m-2} z$  (et les transformations identiques sur les cosinus). En mode Auto, le manuel précise que ces transformations sont appliquées uniquement si elles conduisent à une nette simplification. De

dans le passage d'une expression à une autre. Les connaissances trigonométriques seraient alors mises en oeuvre pour reproduire des effets de DERIVE, dans une optique comparable à celle proposée pour les factorisations de  $X^n-1$ .

2. La deuxième correspond à la résolution de l'équation assistée par DERIVE. Dans la situation observée, on a du mal à considérer DERIVE réellement comme une aide à cette résolution, la stratégie usuelle P/C étant bien plus simple que celles accessibles avec DERIVE. Mais, même pour des équations que l'on sait aisément résoudre, il peut être intéressant d'exploiter didactiquement les conflits cognitifs potentiels créés le décalage entre les solutions d'équations trigonométriques proposées par DERIVE et les formulations standard, dans le prolongement de ce qui a été observé dans cette séance, pour travailler sur le sens de gestes un peu rituels comme l'ajout de  $k.2\pi$ . Mais là encore, pour que le travail s'engage à coup sûr et puisse aboutir, sans doute serait-il nécessaire de prévoir une mise en scène qui permette de centrer plus précisément l'activité sur ces problèmes de décalages et leur éclaircissement.
3. La troisième concerne l'étude prévue de la fonction, assistée par DERIVE, qui n'a pu être abordée dans le court espace de cette séance. Il nous semble que des activités comme celles citées précédemment permettraient d'aborder, dans un second temps, de façon plus maîtrisée des situations où DERIVE serait susceptible d'apporter une aide substantielle à la résolution des problèmes posés, qu'il s'agisse de résolutions d'équations et inéquations ou d'études de fonctions, en veillant bien sûr dans ce cas à ce que les résolutions entièrement P/C soient difficilement accessibles ou nettement plus coûteuses, et en admettant, dans ces situations plus complexes, des solutions qui utilisent toute la puissance de DERIVE, quitte à mettre en place dans une séance de bilan, collectivement, des justifications plus complètes comme cela a été le cas pour l'observation : «recherche de fonctions sous contraintes».

---

même pour les directions, vers Cosinus transforme les sinus en cosinus par application de la transformation :  $\sin 2z \rightarrow 1 - \cos 2z$  ; vers Sinus, transforme sur le même mode les cosinus en sinus et Auto n'applique ces transformations que dans le cas d'une simplification nette (ce qui reste assez sybillin). Il est de plus précisé qu'une utilisation sans discernement des modes développée et Contractée, comme des directions vers Cosinus et vers Sinus, peut produire des résultats compliqués et que la simplification peut prendre beaucoup de temps. C'est parce qu'elles donnent "une forme plus agréable et plus compacte" que les options par défaut correspondent à Auto.

ANNEXE : POLYCOPIÉ DISTRIBUÉ AUX  
ÉLÈVES (TRIGONOMÉTRIE 1)

Observation d'une séance de T.D. avec utilisation de DERIVE en classe de T.C. du lycée T. Deck de Guebwiller

**Révision "formules de trigonométrie" T.C. 1993/94**

**Question :**

- 1°) On pose  $f(x) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x$ . Donnez différentes expressions possibles de  $f(x)$ . (Donnez au moins trois expressions différentes ; seuls les résultats sont demandés ; vous n'avez pas pour l'instant à les démontrer.)
- 2°) Donner les numéros des expressions qui vous paraissent adaptées à la résolution dans  $\mathbb{R}$  de l'équation d'inconnue  $x$  :  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$ .
- 3°) Rédigez une résolution complète de l'équation (avec toutes les explications nécessaires, comme si vous ne disposiez pas du logiciel DERIVE)

**Consignes :**

- Vous disposez du formulaire officiel, de votre calculatrice et du logiciel DERIVE (sur un ordinateur de la salle informatique)
- Vous pouvez travailler seul ou par groupe de deux
- Répondez sur la feuille de réponses

**Indications sur l'utilisation de DERIVE :**

- Lorsque qu'une sous-expression SE d'une expression E est en surbrillance (obtenue par l'utilisation des touches  $\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ ,  $\uparrow$ ,  $\downarrow$ ), la commande cHoix / Substitue permet de remplacer dans E chaque occurrence de SE par une autre expression que l'on indique dans la ligne de commande.

Exemple : on peut ainsi transformer  $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 4$  par  $X^2 - 3X + 4$

- Les commandes Simplifie, dévEloppe, Factor., résoL. peuvent agir différemment suivant le mode de transformation dans lequel se trouve le logiciel. Ce mode peut être modifié par la commande cHoix / Trigonométrie ; celle-ci vous demande d'abord de choisir entre trois types de fonctionnement (automatique, développé, contracté), puis entre trois "directions" (automatique, vers des sinus, vers des cosinus). Il y a donc 9 possibilités (mais pas nécessairement 9 résultats différents). N'hésitez pas à essayer ; deux conseils cependant :

1. faites jouer essentiellement le type de fonctionnement (automatique, développé ou contracté), en laissant la "direction" à "automatique"
2. en début de calcul pour une nouvelle piste que vous voulez exploiter, remettez tout en mode "auto"

- rappel : pour passer d'un sous-menu à un autre, utilisez la touche de tabulation

**Feuille de réponses :**

**Nom(s) :**

**1°) Différentes expressions de  $f(x)$  :**

1

2

3

4

5

6

7

8

poursuivre éventuellement sur une deuxième colonne

**2°) Numéros des expressions qui paraissent adaptées à la résolution de l'équation :**

**3°) Résolution de l'équation :**

pour le corrigé du travail R\_TRIG

Voici différentes formes possibles pour  $f(x) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x$ .

Pour quelques unes de ces formes qui nous paraissent adaptées à la résolution de  $f(x) = 0$ , nous allons en chercher une démonstration et effectuer la résolution.

1.  $(\cos 3x)(1 + 2 \cos 2x)$

2.  $(\cos x)(1 + 2 \cos 4x)$

3.  $2(\cos 2x)(\cos x) + \cos 5x$

4.  $16 \cos^5 x - 16 \cos^3 x + 3 \cos x$

5.  $(\cos x)(4\cos^2 x - 1)(4\cos^2 x - 3)$

6.  $16 \cos(x) \left( \cos(x) - \frac{1}{2} \right) \left( \cos(x) + \frac{1}{2} \right) \left( \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

7.  $4\cos^3 x - 2\cos x + \cos 5x$

8.  $(\cos x)(16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 3)$

9.  $(\cos x)(4\sin^2 x - 3)(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)$

10.  $\cos^3 x (4 - 16\sin^2 x) + (\cos x)(4\sin^2 x - 1)$

## Différentes résolutions possibles de l'équation $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$

On pose  $f(x) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x$ .

**La stratégie efficace :**

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 3x + (\cos x + \cos 5x) \\ &= \cos 3x + 2(\cos 3x)(\cos 2x) \\ &= (\cos 3x)(1 + 2 \cos 2x) \end{aligned}$$

Il reste donc à résoudre  $\cos 3x = 0$  et  $\cos 2x = -1/2$  puis à organiser l'ensemble des solutions.

**Autre stratégie efficace :**

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + (\cos 3x + \cos 5x) \\ &= \cos x + 2(\cos 4x)(\cos x) \\ &= (\cos x)(1 + 2 \cos 4x) \end{aligned}$$

**Le plongement dans les complexes :**

On pose  $g(x) = \sin x + \sin 3x + \sin 5x$  et  $h(x) = f(x) + ig(x)$

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{ix} + e^{3ix} + e^{5ix} \\ &= e^{ix}(1 + e^{2ix} + e^{4ix}) \end{aligned}$$

Posons  $w = e^{ix}$  ; alors  $h(x) = w(1 + w^2 + w^4)$

$$a) f(x) = \operatorname{Re}(h(x)) = \frac{1}{2}(h(x) + \overline{h(x)})$$

$$\text{Or } \overline{w} = \frac{1}{w}. \text{ D'où } \overline{h(x)} = \frac{1}{w} \left( 1 + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{w^4} \right) = \frac{1}{w^5} (1 + w^2 + w^4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w^5} \right) (1 + w^2 + w^4) = \frac{1}{2} \frac{1 + w^6}{w^5} \frac{1 - w^6}{1 - w^2} = \frac{1 - w^{12}}{2w^5(1 - w^2)}$$

(avec  $w^2 \neq 1$  ce qui est le cas pour ...). Il reste à résoudre  $w^{12} = 1$  avec  $w^2 \neq 1$ .

$$b) h(x) = w \frac{1 - w^6}{1 - w^2} = \frac{1 - w^6}{-w + \frac{1}{w}} = \frac{1 - \cos(6x) - i \sin(6x)}{-2i \sin(x)}$$

$$f(x) = \operatorname{Re}(h(x)) = \frac{\sin(6x)}{2 \sin(x)}. \text{ Il reste à résoudre } \sin(6x) = 0 \text{ avec } \sin(x) \neq 0.$$

**L'utilisation des formules d'Euler :**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + \frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} = \frac{1}{2} e^{-5ix} (1 + e^{2ix} + e^{4ix} + e^{6ix} + e^{8ix} + e^{10ix}) \\ &= \frac{1 - w^{12}}{2w^5(1 - w^2)} \text{ (comme ci-dessus)} \end{aligned}$$

**La stratégie méthodique : transformation en un polynôme avec changement de variable**

$$\cos 3x = \operatorname{Re}(\cos 3x + i \sin 3x) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^3) = 4\cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 5x = \operatorname{Re}(\cos 5x + i \sin 5x) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^5) = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$$

D'où  $f(x) = 16 \cos^5 x - 16 \cos^3 x + 3 \cos x$

Posons  $X = \cos x$ . Il reste à résoudre  $16X^5 - 16X^3 + 3X = 0$  avec  $X = \cos x$ .

$$\text{Or } 16X^5 - 16X^3 + 3X = X(16X^4 - 16X^2 + 3) = X(4X^2 - 1)(4X^2 - 3)$$

$$= 16X \left( X - \frac{1}{2} \right) \left( X + \frac{1}{2} \right) \left( X - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( X + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

## (EXTRAIT DE L'ANALYSE A PRIORI DE L'ENSEIGNANT)

Observation d'une séance de T.D. avec utilisation de DERIVE en classe de T.C. du lycée T. Deck de Guebwiller

### Recherche de diverses formes de $f(x)$

- formule de transformation de somme en produit et factorisation :  
 $(\cos 3x)(1 + 2 \cos 2x)$   
 $(\cos x)(1 + 2 \cos 4x)$
- Utilisation des complexes :  
 $\frac{\sin(6x)}{2 \sin(x)}$
- Transformation en polynôme :  
 $16 \cos^5 x - 16 \cos^3 x + 3 \cos x$
- Factorisation du polynôme :  
 $(\cos x)(4 \cos^2 x - 1)(4 \cos^2 x - 3)$   
 $16 \cos(x) \left( \cos(x) - \frac{1}{2} \right) \left( \cos(x) + \frac{1}{2} \right) \left( \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
- Et d'autres formes encore obtenues à partir des précédentes en utilisant les formules de duplication et la formule  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

### Utilisation de DERIVE pour la factorisation de $f(x)$ et la résolution de $f(x) = 0$ :

En mode développé/auto :

pour la résolution : 15 solutions proposées

pour la factorisation/radical : la forme ci-dessus

### Utilisation de DERIVE pour la recherche de formes variées de $f(x)$ :

#### En partant de la forme initiale

En mode (auto ou contracté)/(auto, sin ou cos) :

Simplifie, dévEloppe et Factor (toutes options) :  $\cos(5x) + \cos(3x) + \cos(x)$

En mode développé/(auto ou cosinus):

Simplifie :  $16 \cos^5 x - 16 \cos^3 x + 3 \cos x$

dévEloppe :  $16 \cos^5 x - 16 \cos^3 x + 3 \cos x$

Factor. :

trivial :  $(\cos x)(16 \cos^4 x - 16 \cos^2 x + 3)$

rationnel :  $(\cos x)(1 - 4 \sin^2 x)(2 \cos x - 1)(2 \cos x + 1)$  pour auto  
 $(\cos x)(4 \cos^2 x - 3)(2 \cos x - 1)(2 \cos x + 1)$  pour cosinus

radical :  $16 \cos(x) \left( \cos(x) - \frac{1}{2} \right) \left( \cos(x) + \frac{1}{2} \right) \left( \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

En mode développe/sin

Simplifie :  $(\cos x)(16 \sin^4 x - 16 \sin^2 x + 3)$

développe :  $16(\cos x) \sin^4 x - 16(\cos x) \sin^2 x + 3(\cos x)$

factor. :

trivial :  $(\cos x)(16 \sin^4 x - 16 \sin^2 x + 3)$

rationnel :  $(\cos x)(4 \sin^2 x - 3)(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1)$

radical :  $16 \cos(x) \left( \sin(x) - \frac{1}{2} \right) \left( \sin(x) + \frac{1}{2} \right) \left( \sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

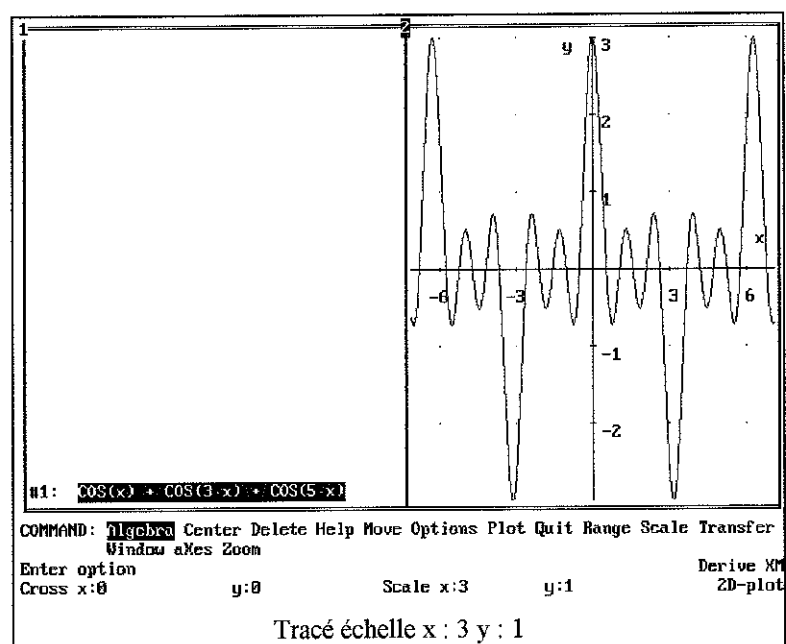
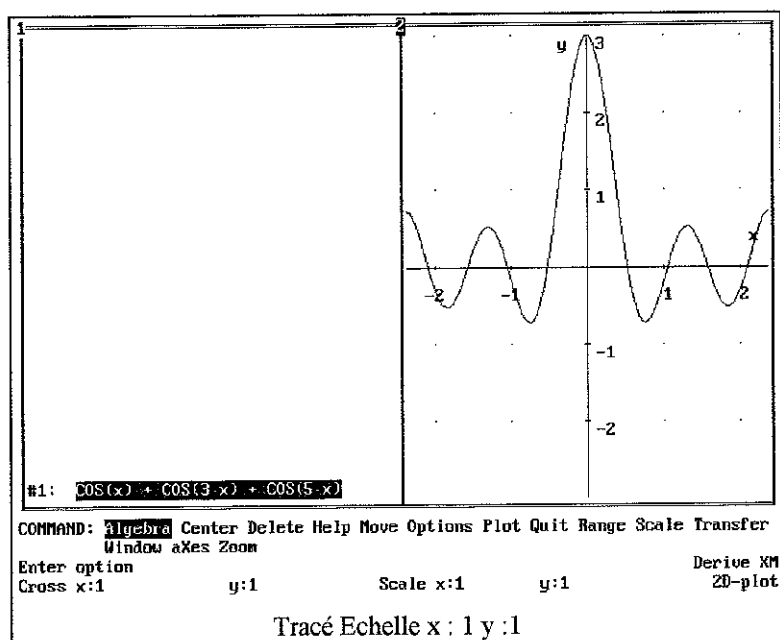
#### En partant d'une forme intermédiaire

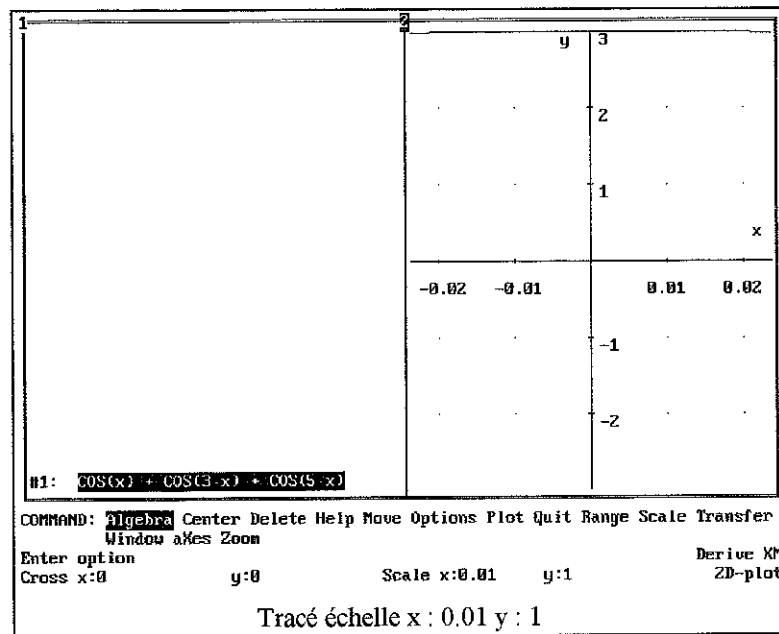
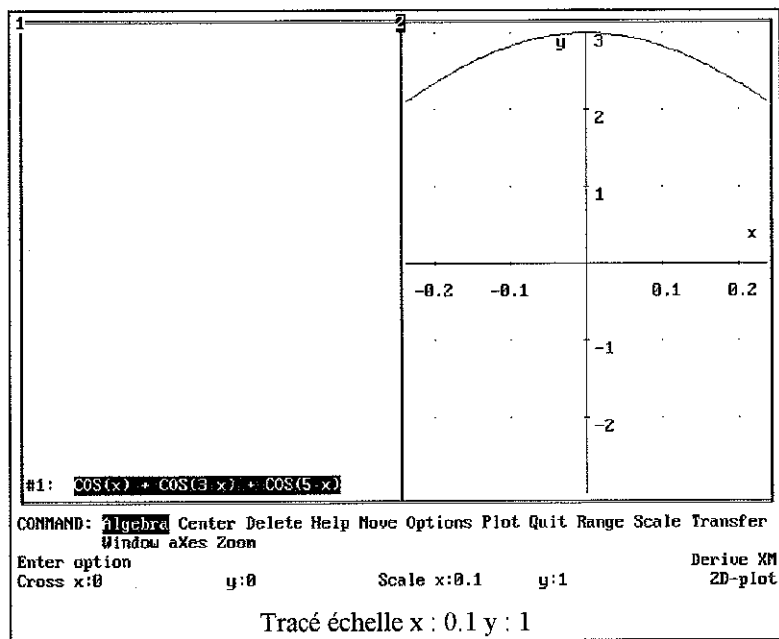
A partir de  $(\cos x)(16 \cos^4 x - 16 \cos^2 x + 3)$ , en mode contracté/auto, la commande simplifie, avec la surbrillance sur  $16 \cos^4 x - 16 \cos^2 x + 3$ , fournit :  $(\cos x)(1 + 2 \cos 4x)$ .

**Remarques :**

- On pourrait également examiner l'utilisation de DERIVE dans les voies qui utilisent les complexes, mais je ne pense pas que les élèves les emprunteront sous une forme "pure" (en travaillant le plus possible avec des complexes)
- L'obtention de la forme  $\frac{\sin(6x)}{2 \sin(x)}$  n'est pas directe ... . Un examen des solutions ou la représentation graphique de la fonction  $f(x)$  peut faire penser aux solutions de  $\sin(6x) = 0$ . La simplification par DERIVE (en mode développe) de  $\sin(6x)/f(x)$  donne  $2\sin(x)$  ...
- L'obtention de la forme  $(\cos 3x)(1 + 2 \cos 2x)$  ne semble pas directe non plus (regroupement "manuel" nécessaire de  $\cos(x)$  et  $\cos(5x)$ )

## ANNEXE : FIGURES ASSOCIÉES À LA SÉANCE TRIGONOMETRIE 1





## V.4 TRIGONOMETRIE 2

### CONTEXTE DE L'OBSERVATION

Cette séance se situe le 30 mars 1994, dans une classe de Première S. DERIVE a été utilisé au préalable quatre fois dans la classe, pour un total de 7 heures et la dernière utilisation remonte au mercredi 23 mars. Il s'agit d'une séance de travaux pratiques d'une durée de quatre heures où les élèves travaillent par groupes de deux ; une tablette rétroprojetable permet de coupler avec une utilisation collective.

### PRÉSENTATION DE L'ACTIVITÉ PROPOSÉE

La séance fait suite à un travail sur les transformations trigonométriques mené dans le courant du mois de février. Dans un premier temps, les élèves vont explorer le fonctionnement trigonométrique de DERIVE dans les modes développée et Contractée et apprendre, sur quelques exemples, à manipuler les transformations trigonométriques implémentées. Dans un second temps, on les aide à construire des fonctions correspondant aux transformations de sommes en produits, transformations qui n'existent pas dans DERIVE. Quatre exercices de factorisation leur sont alors proposés. Dans un troisième temps, DERIVE est utilisé pour prouver par trois méthodes différentes, dont une utilisant les nouvelles fonctions construites, l'égalité :  $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) = 4 \cos(a/2) \cdot \cos(b/2) \cdot \cos(c/2)$  (pour  $a, b$  et  $c$  vérifiant la relation :  $a+b+c=\pi$ ). Dans ces trois premières phases, les élèves sont très précisément guidés et des commentaires détaillés explicitant le fonctionnement de DERIVE sont fournis (cf. le polycopié guide de dix pages reproduit en annexe page 262).

Ensuite, douze exercices sont proposés aux élèves sans indication, le premier étant celui qui a déjà été traité. Il s'agit pour les neuf premiers de démontrer des égalités trigonométriques, pour les trois suivants, de simplifier des expressions trigonométriques. Une fiche est préparée pour noter des remarques pour chaque exercice, organisée par rapport aux trois méthodes introduites dans l'exemple traité : passer du premier membre au second, passer du second membre au premier, transformer les deux membres pour obtenir la même expression. Les élèves doivent l'utiliser pour prendre des notes sommaires sur les résultats donnés par DERIVE, puis rédiger ensuite un compte-rendu incluant :

- la comparaison d'une résolution à la main et d'une résolution DERIVE,
- la rédaction pour chaque exercice d'une résolution à la main.

### ANALYSE A PRIORI EFFECTUÉE PAR L'ENSEIGNANT

Objectifs :

Le travail mené le mois précédent était orienté vers la factorisation d'expressions trigonométriques et la démonstration d'égalités trigonométriques. Le contrôle évaluant ce travail a donné des résultats insuffisants :

- moyenne de 6
- 22% de notes supérieures à 15
- 5% de notes entre 8 et 15
- 73% de notes inférieures à 8

Les élèves ont, selon l'enseignant, du mal à comprendre qu'il peut y avoir plusieurs démarches pour prouver des égalités trigonométriques; ils ne mènent pas les essais à leur terme, à cause des difficultés de calcul.

L'objectif de cette séance est de revenir sur les problèmes de preuve dans ce domaine, en insistant sur l'existence de méthodes (stratégies) différentes.

#### Intérêt supposé de DERIVE :

Dans cette situation, DERIVE doit, en libérant les élèves des difficultés de calcul, les aider à mener les stratégies de preuve à leur terme ou à aboutir plus rapidement qu'en effectuant les calculs exclusivement à la main. Ils doivent pouvoir se consacrer au travail sur les méthodes.

#### Connaissances DERIVE nécessaires :

Outre les commandes algébriques usuelles, les élèves ont besoin de connaître la gestion des fichiers (Ouvrir...), le travail dans le tampon d'entrée, l'utilisation de la touche F3 pour recopier une expression dans ce tampon, la navigation dans les menus, en particulier le menu cHoix Trigo. En principe, tout cela est connu; il y aura des rappels à la demande.

#### Comportements, difficultés attendus :

L'activité, aux dires de l'enseignant devrait pouvoir "tenir" dans les quatre heures prévues et au moins la moitié des exercices pourraient être résolus par les élèves. Il s'attend à une bonne participation des élèves, à quelques difficultés peut-être dans la lecture du polycopié, celui-ci étant assez dense et complexe, mais il ne prévoit pas de difficultés mathématiques particulières.

La résolution des exercices est libre et les élèves peuvent ou non utiliser DERIVE. L'enseignant s'attend cependant à ce que DERIVE soit largement utilisé, ne serait-ce qu'à cause du travail mené dans les trois premières phases. Les élèves peuvent bien sûr aussi utiliser leur calculatrice mais la calculatrice ne présente pas d'intérêt particulier dans cette situation.

Il s'agit aux yeux de l'enseignant d'une séance de remédiation et il n'a pas prévu a priori d'interventions. Il interviendra si nécessaire, par exemple pour résoudre des difficultés matérielles, faciliter la lecture du polycopié, ou si les élèves obtiennent des simplifications non conformes à ce qui est attendu.

#### EXEMPLES DE DÉROULEMENTS

Deux groupes ont été observés durant cette séance : le groupe 1, formé de deux filles (A. et C.), observé très précisément et interviewé après la séance et le groupe 2, formé de deux garçons, observé plus légèrement. Nous résumons ci-après les deux déroulements, en insistant surtout sur le fonctionnement du groupe 1.

##### Groupe 1 :

A. et C. ont obtenu respectivement 7 et 3 au contrôle mentionné plus haut.

##### 8h30 :

Le professeur introduit la séance et les élèves se mettent rapidement au travail, en suivant le polycopié. Après avoir rencontré un problème de disquette, elles entrent les premières formules du polycopié :  $\sin(a+b)$ ,  $\sin(a-b)$ ,  $\cos(a+b)$ ,  $\cos(a-b)$  et les font simplifier par DERIVE comme indiqué, en choisissant l'option : dévEloppé. Elles obtiennent ainsi les développements

classiques des sinus et cosinus de sommes et de différences et remplissent les cases du premier tableau du polycopié.

Elles passent ensuite en option Contracté, conformément aux indications du polycopié pour obtenir les transformations classiques de produits de sinus et de cosinus en sommes. Elles remplissent ainsi les cases du second tableau du polycopié.

8h40 :

Elles entrent l'expression suivante du polycopié

$$17 : \cos\left[\frac{\pi}{2} - x\right] \cos(\pi - 3x)$$

et la font simplifier sans changer l'option :

$$18 : \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin(4x)}{2}$$

Lisant le polycopié, elles simplifient avec l'option Auto,

$$19 : -\sin(x) \cos(3x)$$

puis avec l'option Contracté.

$$20 : \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin(4x)}{2}$$

Le polycopié indique de simplifier aussi avec l'option dévEloppé. Elles n'obtiennent pas la formule 8 du polycopié. Il est probable qu'elles n'ont pas simplifié la formule 5 de l'énoncé, mais la formule 20 qu'elles venaient d'obtenir.

$$21 : \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin(4x)}{2}$$

Elles entrent alors au clavier la formule donnée dans le polycopié :

$$22 : 3 \sin(x) \cos(x) - 4 \sin(x) \cos(x)$$

puis tentent d'interpréter le commentaire qui suit dans le polycopié : "vous remarquerez que DERIVE utilise récursivement les formules d'addition". Le mot récursivement n'est pas compris. Il est interprété comme "respectivement". Pour comprendre, elles essaient de simplifier  $\sin(4x)$  dans diverses options, obtenant successivement :

$$23 : \sin(4x)$$

$$24 : \sin(4x)$$

$$27 : 8 \sin^3(x) \cos(x) - 4 \sin(x) \cos(x)$$

$$28 : 8 \sin^3(x) \cos(x) - 4 \sin(x) \cos(x)$$

Elles reprennent ensuite la lecture du polycopié et suivent pas à pas les indications.

$$30 : \sin^3(x)$$

$$31 : \frac{3 \sin(x)}{4} - \frac{\sin(3x)}{4}$$

$$32 : \sin^9(x)$$

$$33 : \frac{\sin(9x)}{256} - \frac{9 \sin(7x)}{256} + \frac{9 \sin(5x)}{64} - \frac{21 \sin(3x)}{64} + \frac{63 \sin(x)}{128}$$

Elles semblent surprises par la complexité du résultat ("Holà !!!"). Elles arrivent ainsi au bas de la page 2.

8h50 :

Le professeur intervient collectivement car certains élèves n'ont pas obtenu cette expression, expliquant qu'ils ont sans doute choisi la direction : Cosinus alors que lui a choisi : Sinus. Il précise aussi que toutes les expressions du polycopié ont bien été obtenues avec DERIVE et qu'ils doivent pouvoir y arriver eux aussi.

Après cette interruption, A. et C. passent à la page 3 du polycopié et donc à la construction des formules de transformations de sommes en produits.

$$34 : \text{SIN}(a + b) + \text{SIN}(a - b)$$

$$35 : 2 \text{ COS}(b) \text{ SIN}(a)$$

Elles rencontrent des difficultés avec la commande Bâtis, ce qui motive une intervention du professeur.

$$36 : \text{SIN}(a + b) + \text{SIN}(a - b) = 2 \text{ COS}(b) \text{ SIN}(a)$$

$$37 : [p = a + b, q = a - b]$$

Elles résolvent correctement en a et b et obtiennent l'expression du polycopié

$$38 : \left[ a = \frac{p + q}{2}, b = \frac{p - q}{2} \right]$$

Elles remplacent ensuite a et b par leurs valeurs, mais dans l'expression 38 au lieu de le faire, comme indiqué, dans l'expression 36.

$$39 : \left[ \frac{p + q}{2} = \frac{p + q}{2}, \frac{p - q}{2} = \frac{p - q}{2} \right]$$

Elles essaient ensuite dans l'expression 36, mais ne savent pas utiliser les entrées de cHoix Substitue

$$40 : \text{SIN}(a + b) + \text{SIN}(a - b) = 2 \text{ COS}(b) \text{ SIN}(a)$$

Le professeur intervient, et donne des explications sur la commande, puis sur l'entrée des arguments, en détaillant le cheminement dans les expressions et l'utilisation de la touche F3, tout en manipulant lui-même pour l'entrée a. Ensuite A. essaie de faire de même pour b mais se trompe. A. et C. reprennent tout et finissent par obtenir :

$$44 : \text{SIN}\left[\frac{p + q}{2} + \frac{p - q}{2}\right] + \text{SIN}\left[\frac{p + q}{2} - \frac{p - q}{2}\right] = 2 \text{ COS}\left[\frac{p - q}{2}\right] \text{ SIN}\left[\frac{p + q}{2}\right]$$

La simplification du premier membre donne la formule attendue, que les élèves reconnaissent comme une "formule trigonométrique connue" :

$$45 : \text{SIN}(p) + \text{SIN}(q) = 2 \text{ COS}\left[\frac{p - q}{2}\right] \text{ SIN}\left[\frac{p + q}{2}\right]$$

Les formules suivantes du polycopié sont entrées à la main (alors qu'elles auraient pu être bâties à l'aide du résultat précédent) :

$$46 : \text{FSS}(p, q) := 2 \text{ SIN}\left[\frac{p + q}{2}\right] \text{ COS}\left[\frac{p - q}{2}\right]$$

$$47 : \text{FDS}(p, q) := 2 \text{ SIN}\left[\frac{p - q}{2}\right] \text{ COS}\left[\frac{p + q}{2}\right]$$

mais avec des crochets au lieu de parenthèses, sans doute par souci de conformité au polycopié. Ceci n'est pas détectable à l'affichage mais aura une influence dans la suite.

Les élèves substituent ensuite, comme indiqué,  $\pi/2 - p$  à p et  $\pi/2 - q$  à q pour obtenir les formules correspondant aux sommes et différences de cosinus : FSC et FDC.

$$48: \sin\left(\frac{\pi}{2}-p\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-q\right) = 2 \cos\left[\frac{\frac{\pi}{2}-p-\left(\frac{\pi}{2}-q\right)}{2}\right] \sin\left[\frac{\frac{\pi}{2}-p+\left(\frac{\pi}{2}-q\right)}{2}\right]$$

Mais la simplification de l'expression leur donne l'égalité triviale :

$$49 : \cos(p) + \cos(q) = \cos(p) + \cos(q)$$

au lieu de la formule annoncée dans le polycopié. Elles pensent ensuite à simplifier seulement le premier membre, et obtiennent :

$$50: \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left[\frac{\frac{\pi}{2}-p-\left(\frac{\pi}{2}-q\right)}{2}\right] \sin\left[\frac{\frac{\pi}{2}-p+\left(\frac{\pi}{2}-q\right)}{2}\right]$$

Elles simplifient alors le second membre et obtiennent à nouveau :

$$52 : \cos(p) + \cos(q) = \cos(p) + \cos(q)$$

Elles font ensuite divers essais de simplification, sans plus de succès, alors que la simplification leur paraît évidente "à la main". Un élève qui travaille seul finit par débloquent la situation en leur indiquant les bonnes options : Auto et Cosinus et elles obtiennent enfin :

$$55 : \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left[\frac{p-q}{2}\right] \cos\left[\frac{p+q}{2}\right]$$

"Ca y est, c'est pas vrai !!!"

Elles se servent du résultat pour obtenir la définition de FCS :

$$55 : \text{FCS}(p, q) := 2 \cos\left[\frac{p-q}{2}\right] \cos\left[\frac{p+q}{2}\right]$$

En reprenant le polycopié, elles entrent ensuite :

$$57 : \text{FCS}(p, \pi - q)$$

qu'elles simplifient en

$$58: -2 \sin\left[\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\right] \sin\left[\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right]$$

dont elles se servent pour obtenir la définition de FDC :

$$59: \text{FDC}(p, q) := -2 \sin\left[\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\right] \sin\left[\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right]$$

9h25

A. et C. disposent maintenant des quatre transformations supplémentaires sous DERIVE et doivent les utiliser pour factoriser :  $\cos(2x)+\cos(3x)$ ,  $\cos(x)-\cos(2x)$ ,  $\sin(x)+\cos(x)$ ,  $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)$ , les résultats n'étant cette fois-ci pas donnés. Elles entrent :

$$60 : \cos(2x) + \cos(3x)$$

Elles tentent la commande Factor, mais ne savent pas quelle option activer.

Elles substituent ensuite dans la formule 55 (donc sans utiliser FSC), p par 2x, et q par 3x. :

$$61: \cos(2x) + \cos(3x) = 2 \cos\left[\frac{2x}{2} - \frac{3x}{2}\right] \cos\left[\frac{2x}{2} + \frac{3x}{2}\right]$$

et simplifient en

$$62: \cos(3x) + \cos(2x) = 2 \cos\left[\frac{x}{2}\right] \cos\left[\frac{5x}{2}\right]$$

Elles passent à l'exercice suivant et entrent

$$63: \cos(x) - \cos(2x)$$

Elles discutent un moment de l'utilisation de FDC. Elles substituent ensuite dans la formule 59 (définissant FDC), p par x, et q par 2x

$$64: \text{FDC}(x, 2x) := 2 \sin\left[-\frac{x}{2}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

ce qui est une utilisation erronée de la fonction FDC

Quand elles demandent la simplification de cette expression, DERIVE émet un "Bip" d'erreur, mais donne cependant l'expression second membre :

$$64: \text{FDC}(x, 2x) := 2 \sin\left[-\frac{x}{2}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

ce qui est une utilisation erronée de la fonction FDC

Quand elles demandent la simplification de cette expression, DERIVE émet un "Bip" d'erreur, mais donne cependant l'expression second membre :

$$65: -2 \sin\left[-\frac{x}{2}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

A l'étonnement des élèves, cette expression ne se simplifie pas davantage. L'observateur leur indique l'origine du problème: les crochets entrés à la place des parenthèses dans la définition de FDS, et propagés dans la définition de FDC "empêchent" l'application de la transformation  $\sin(-x)$  en  $-\sin x$ . Elles remplacent les crochets par des parenthèses et simplifient:

$$66: 2 \sin\left[\frac{x}{2}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

Elles redéfinissent, par édition, les définitions des 4 fonctions, et passent à la factorisation 3 ( $\sin x + \cos x$ ). Elles ne voient pas comment faire, consultent leur cahier et leur manuel. C. déclare:  $\sin x + \cos x$  ça fait 1.

Passant à la factorisation 4, elles entrent:

$$72: \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$$

A. substitue dans la formule définissant FSS, x à p, et 2x à q :

C'est encore une utilisation erronée de la définition de fonction, qui donne par simplification

$$74: 2 \cos\left[\frac{x}{2}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

A partir de ce résultat, A. bâtit

$$74: 2 \cos\left[\frac{x}{2}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right] + \sin(3x)$$

puis simplifie

$$75: \sin(3x) + 2 \cos\left[\frac{x}{2}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

C. n'est pas d'accord avec cette démarche, elle propose à plusieurs reprises de "faire p, q, r dans FSS". A. déclare "Non, on n'a pas de formule". Elles tentent d'utiliser la formule de duplication des arguments  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ , pour obtenir  $\sin(3x/2)$  en fonction de  $\sin 3x$  et  $\cos(3x/2)$ , et factoriser  $\sin(3x)$ . Elles entrent au clavier

$$76: \sin(3x) \left[ 1 + 2 \cos\left[\frac{x}{2}\right] \frac{1}{\cos\left[\frac{3x}{2}\right]} \right]$$

et obtiennent par simplification

$$77: \frac{\sin(3x) (2 \cos(x) + 1)}{2 \cos(x) - 1}$$

10h

L'observateur suggère de remplacer plutôt  $\sin(3x)$  en fonction de  $\sin(3x/2)$  et  $\cos(3x/2)$ , pour ne pas avoir de dénominateur. Cette suggestion ne semble pas comprise : elles entrent

$$78: \cos\left[\frac{3x}{2}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

qu'elles simplifient en

$$79: \frac{\sin(3x)}{2}$$

puis elles entrent

$$80: 2 \cos\left[\frac{3x}{2}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

qu'elles simplifient en

$$81: \sin(3x)$$

Elles entrent à nouveau :

$$83: \sin(3x) \left[ 1 + 2 \cos\left[\frac{x}{2}\right] \frac{1}{\cos\left[\frac{3x}{2}\right]} \right]$$

qu'elles simplifient en

$$84: \frac{2 \cos(x) \sin(3x)}{2 \cos(x) - 1}$$

Elles reviennent à l'expression initiale :

$$85: \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$$

et tentent une simplification, sans succès

$$86: \sin(3x) + \sin(2x) + \sin(x)$$

Elles passent en mode Développé, et simplifient

$$87: 4 \sin^2(x) \cos(x) + 2 \sin(x) \cos(x)$$

L'observateur suggère d'employer la commande Factor. La difficulté est de choisir l'option. Elles essaient "Sans Carré"

$$88: 4 \sin^2(x) \cos(x) + 2 \sin(x) \cos(x)$$

puis Trivial

$$90: 2 \sin(x) \cos(x) (2 \cos(x) + 1)$$

C. demande : "2 cos x +1, ça dit pas quelque chose ?"

Elles essaient de simplifier et obtiennent

$$91 : 4 \sin^2(x) \cos(x) + 2 \sin(x) \cos(x)$$

"Il m'a mis l'autre !"

Elles passent en mode contracté, et simplifient :

$$92 : \sin(3x) + \sin(2x) + \sin(x)$$

ce qui est la formule initiale

10h09 Pause

10h30

Reprise

Les élèves reprennent sur la factorisation 3 :  $(\sin x + \cos x)$ , qu'elles résolvent assez facilement, un autre élève leur ayant indiqué de remplacer  $\cos x$  par  $\sin(\pi/2-x)$ . Ensuite, elles reviennent à la factorisation de  $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$

C. propose à nouveau "Tu mets p, q, r" (dans la formule FSS)

Mais A. construit une nouvelle formule FAD (factorise angle double ?)

Discussion sur la variable; C. propose p, mais A. répond que cela n'a pas d'importance. Elle essaie :

$$FAD(2x) := 2 \cos\left[\frac{1}{2} 2x\right] \sin\left[\frac{1}{2} 2x\right]$$

qui est refusé par DERIVE (non conforme à la définition de fonction). L'observateur indique l'origine du refus : il faut  $FAD(x) :=$  Elles entrent

$$95 : FAD(x) := 2 \cos\left[\frac{1}{2} x\right] \sin\left[\frac{1}{2} x\right]$$

puis substituent  $2x$  à  $x$ . Elles simplifient et obtiennent

$$96 : \sin(2x)$$

Devant cet échec, elles reviennent au résultat antérieur (obtenu à partir de  $FSS(x, 2x)$ )

$$97 : \frac{2 \cos(x) \sin(3x)}{2 \cos(x) - 1}$$

qu'elles simplifient en

$$98 : \frac{\sin(4x) + \sin(2x)}{2 \cos(x) - 1}$$

Elles substituent  $4x$  à  $p$  et  $2x$  à  $q$  dans la formule FSS :

$$99 : FSS(4x, 2x) := 2 \sin\left[\frac{4x + 2x}{2}\right] \cos\left[\frac{4x - 2x}{2}\right]$$

ce qui, à leur déception, se simplifie en

$$\sin(4x) + \sin(2x)$$

En simplifiant "à la main" la formule 99, elles entrent au clavier l'expression

$$100 : 2 \sin(3x) \cos(x)$$

qui se simplifie en

$$101 : \sin(4x) + \sin(2x)$$

Elles semblent découragées. l'observateur leur indique de revenir à leur idée de "l'angle double".

Elles entrent au clavier

$$102: \sin(3x) = 2 \cos\left[\frac{3x}{2}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

L'observateur leur indique, à la différence de leur première démarche, de remplacer  $\sin(3x)$  par  $2\cos(3x/2)\sin(3x/2)$ . Elles forment

$$104: 2 \sin\left[\frac{3x}{2}\right] \cos\left[\frac{3x}{2}\right] + 2 \cos\left[\frac{x}{2}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

qu'elles simplifient en

$$105: \sin(3x) + \sin(2x) + \sin(x)$$

L'observateur propose de factoriser l'expression 104. Elles choisissent l'option "Rationnel", et obtiennent à nouveau

$$106: \sin(3x) + \sin(2x) + \sin(x)$$

L'observateur suggère Trivial, sans plus de succès

$$106: \sin(3x) + \sin(2x) + \sin(x)$$

Elles écrivent sur leur papier la factorisation de l'expression 104, mais il y a une erreur. Le facteur somme est trouvé  $\cos(3x/2)+\cos(x)$  au lieu de :  $\cos(3x/2)+\cos(x/2)$ .

Elles substituent  $3x/2$  à  $p$  et  $x$  à  $q$  dans FSC. Elles simplifient et obtiennent

$$108: \cos\left[\frac{3x}{2}\right] + \cos(x)$$

L'observateur suggère de changer de mode. Elles passent en mode Auto, et obtiennent

$$109: 2 \cos\left[\frac{x}{4}\right] \cos\left[\frac{5x}{4}\right]$$

Elles forment par édition l'expression:

$$110: 2 \cos\left[\frac{x}{4}\right] \cos\left[\frac{5x}{4}\right] 2 \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

L'observateur suggère de simplifier pour vérifier. Dans le mode Auto, on obtient:

$$111: 4 \cos\left[\frac{x}{4}\right] \cos\left[\frac{5x}{4}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

Elles essaient le mode Contracté

$$112: 4 \cos\left[\frac{x}{4}\right] \cos\left[\frac{5x}{4}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

Puis le mode Développe

$$113: \sin(3x) + \sin\left[\frac{5x}{2}\right] + \sin\left[\frac{x}{2}\right]$$

On obtient ainsi une somme de sinus, mais ce n'est pas la somme initiale, à cause de l'erreur de factorisation. Les élèves cherchent l'origine de l'erreur, mais sans succès.

### 11h10

Les élèves abordent la page 5, où plusieurs méthodes de démonstration sont proposées pour des égalités trigonométriques. Elles suivent pas à pas le photocopié, et obtiennent sans difficulté majeure les expressions qui y sont données.

### 11h25

L'heure avançant, l'observateur demande de traiter l'exercice demandé avec la première méthode, en sautant par conséquent dans le polycopié les explications de la page 6 sur la seconde méthode.

Les élèves chargent l'égalité à démontrer

$$1 : \tan(a) + \tan(b) + \tan(c) = \tan(a) \tan(b) \tan(c)$$

Elles recopient le premier membre

$$2 : \tan(a) + \tan(b) + \tan(c)$$

opèrent la substitution de  $a$  par  $\pi - (b+c)$

$$3 : \tan(\pi - (b + c)) + \tan(b) + \tan(c)$$

simplifient

$$4 : \frac{\sin(c) \cos(c) \cos(b)^2 + \sin(b) \cos(b) (\cos(c)^2 - 1) - \sin(c) \cos(c)}{\cos(b) \cos(c) (\cos(c) \cos(b) - \sin(c) \sin(b))}$$

passent en mode contracté et simplifient

$$5 : -\tan(b + c) + \tan(b) + \tan(c)$$

Même travail sur le second membre

$$6 : \tan(a) \tan(b) \tan(c)$$

substitution

$$7 : \tan(\pi - (b + c)) \tan(b) \tan(c)$$

simplification

$$8 : \frac{\tan(c) \cos(2b + c) - \sin(c)}{\cos(2b + c) + \cos(c)}$$

mode développé

$$9 : \frac{\tan(c) \tan(b) (\sin(c) \cos(b) + \cos(c) \sin(b))}{\sin(c) \sin(b) - \cos(c) \cos(b)}$$

nouvelle simplification

$$10 : \frac{\sin(c) \cos(c) \cos(b)^2 + \sin(b) \cos(b) (\cos(c)^2 - 1) - \sin(c) \cos(c)}{\cos(b) \cos(c) (\cos(c) \cos(b) - \sin(c) \sin(b))}$$

L'expression est reconnue égale à une expression obtenue à partir du premier membre, mais C. voudrait retrouver le second membre à partir du premier (méthode 1 → 2 dans le polycopié). Elle reprend au début

$$12 : \tan(a) + \tan(b) + \tan(c) = \tan(a) \tan(b) \tan(c)$$

$$13 : \tan(a) + \tan(b) + \tan(c)$$

$$16 : \tan(\pi - (b + c)) + \tan(b) + \tan(c)$$

retrouve l'expression 4

$$17 : \frac{\sin(c) \cos(c) \cos(b)^2 + \sin(b) \cos(b) (\cos(c)^2 - 1) - \sin(c) \cos(c)}{\cos(b) \cos(c) (\cos(c) \cos(b) - \sin(c) \sin(b))}$$

puis simplifiant en mode contracté, elles obtiennent

$$18 : \frac{\sin(2b + 2c) - \sin(2b) - \sin(2c)}{\cos(2b + 2c) + \cos(2b) + \cos(2c) + 1}$$

et abandonnent la méthode.

Les élèves reprennent le polycopié page 6 (Méthode à partir du deuxième membre et arriver au premier), et suivent la méthode indiquée sans difficulté.

Ensuite, elle reprennent la méthode sur l'égalité

$$\text{TAN}(a) + \text{TAN}(b) + \text{TAN}(c) = \text{TAN}(a) \text{TAN}(b) \text{TAN}(c)$$

Elles partent du produit de deux facteurs

$$20 : \text{TAN}(a) \text{TAN}(b)$$

simplification en mode Développé

$$21 : \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)}$$

elles forment le produit avec le troisième facteur

$$24 : \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)} \text{TAN}(c)$$

les simplifications en mode développé, ne changent pas l'expression

$$28 : \frac{\sin(a) \sin(b) \sin(c)}{\cos(a) \cos(b) \cos(c)}$$

avec le mode contracté

$$29 : - \frac{\sin(a + b + c) - \sin(a + b - c) - \sin(a - b + c) + \sin(a - b - c)}{\cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) + \cos(a - b + c) + \cos(a - b - c)}$$

sur cette forme, les élèves peuvent utiliser l'hypothèse  $\pi = a+b+c$ , et former par édition

$$30 : \frac{- \sin(\pi - 2c) - \sin(\pi - 2b) + \sin(2a - \pi)}{\cos(\pi) + \cos(2a - \pi) + \cos(\pi - 2b) + \cos(\pi - 2c)}$$

en simplifiant :

$$31 : \frac{\sin(2a) + \sin(2b) + \sin(2c)}{\cos(2a) + \cos(2b) + \cos(2c) + 1}$$

Mais l'exercice est nettement plus complexe que l'exemple du polycopié : cette forme est éloignée du premier membre, et il n'y a pas de moyen facile d'atteindre ce but

La séance se termine à 11h50

Dans le TD de deux heures qui a suivi cette séance, A. et C. ont cherché à démontrer

$$\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) = 4 \cos\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{b}{2}\right) \cos\left(\frac{c}{2}\right)$$

Elles ont opéré sans succès une succession de tentatives de simplification avec DERIVE, de transformations faites à la main, dont le résultat est souvent porté dans DERIVE de façon erronée, et d'utilisation des fonctions FSS, FDC...

## Groupe 2

Ce groupe rencontre des difficultés avec le matériel (claviers non conformes). On observe une intense activité du professeur (déplacement d'ordinateurs, chargement de logiciel...)

L'activité des élèves commence vraiment à 8h40. Elle consiste, comme dans l'autre groupe, à entrer les formules et à exécuter les transformations indiquées dans l'énoncé.

8h40

Les élèves obtiennent par simplification les transformations de sommes en produits puis de produits en sommes indiquées dans l'énoncé. Ils exécutent de même les simplifications indiquées dans les différents modes.

Ils rencontrent leur première difficulté avec la simplification de

$$24 : \sin^3(x)$$

Ils ne sont pas repassés en mode contracté, et n'obtiennent pas le résultat du polycopié

$$25 : \sin^3(x)$$

Ils positionnent l'option Direction à Cosinus, et n'obtiennent toujours pas le résultat du polycopié

$$26 : \sin(x) - \sin(x) \cos^2(x)$$

Ils passent enfin en mode Contracté et obtiennent comme dans le polycopié

$$27 : \frac{3 \sin(x)}{4} - \frac{\sin(3x)}{4}$$

9h

Les élèves sont arrivés à la page 3 du polycopié qu'ils suivent pour obtenir la définition de FSS. Ils obtiennent comme dans le polycopié

$$34 : \left[ a = \frac{p+q}{2}, b = \frac{p-q}{2} \right]$$

Comme indiqué dans le polycopié ils substituent  $(p+q)/2$  à  $a$ , puis  $(p-q)/2$  à  $b$  mais ne prennent pas garde à ce que la surbrillance est sur l'expression 34. Ils obtiennent ainsi le système trivial

$$38 : \left[ \frac{p+q}{2} = \frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{2} = \frac{p-q}{2} \right]$$

Les élèves essaient alors de résoudre en a la formule du polycopié

$$3 : \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin(a) \cos(b)$$

Ils obtiennent tout réel comme solution :

$$39 : a = @1$$

9h05

Avec l'aide du professeur, ils opèrent les substitutions, cette fois dans l'expression 2, obtiennent des expressions conformes au polycopié, et les utilisent pour définir FSS et FDS.

On a ensuite une phase analogue à celle observée dans le premier groupe :

les élèves opèrent les substitutions,

$$45 : \sin\left(\frac{\pi}{2}-p\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-q\right) = 2 \cos\left[\frac{\frac{\pi}{2}-p-\left(\frac{\pi}{2}-q\right)}{2}\right] \sin\left[\frac{\frac{\pi}{2}-p+\left(\frac{\pi}{2}-q\right)}{2}\right]$$

et obtiennent par simplification l'égalité triviale :

$$46 : \cos(p) + \cos(q) = \cos(p) + \cos(q)$$

Ils sont eux aussi débloqués par l'intervention du même élève, très à l'aise avec les divers modes de simplification trigonométrique de DERIVE. Ils définissent ainsi les fonctions du polycopié.

9h30

Ils passent aux exercices du bas de la page 4. A la différence du groupe A.-C., ils élèves utilisent les appels de fonction

53 : FSC (2 x, 3 x)

ce qui correspond à  $\cos(2x) + \cos(3x)$ , et la simplification en mode Auto leur donne la factorisation demandée

$$55: 2 \cos\left[\frac{x}{2}\right] \cos\left[\frac{5x}{2}\right]$$

Le second exercice ( $\cos(x) - \cos(2x)$ ) est résolu de la même manière

56: FDC (x, 2 x)

$$57: 2 \sin\left[\frac{x}{2}\right] \sin\left[\frac{3x}{2}\right]$$

Pour le troisième exercice l'utilisation des fonctions définies nécessiterait une transformation de cosinus en sinus. Les élèves n'y pensent pas. Ils entrent l'expression de l'énoncé

58: SIN(x) + COS(x)

et simplifient en mode contracté

$$60: \sqrt{2} \sin\left[\frac{\pi}{4} + x\right]$$

Sur une indication d'un voisin, ils tentent ensuite d'utiliser FSS

$$61: \text{FSS}\left[x, \frac{\pi}{2} - x\right]$$

qui aboutit au même résultat

$$62: \sqrt{2} \sin\left[\frac{\pi}{4} + x\right]$$

Ils passent ensuite à l'exercice suivant ( $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$ ), sans qu'on puisse savoir s'ils sont satisfaits de cette expression. Ils abandonnent également l'exercice suivant après factorisation de la somme des deux derniers termes

63: FSS (2 x, 3 x)

$$64: 2 \cos\left[\frac{x}{2}\right] \sin\left[\frac{5x}{2}\right]$$

9h50

Ils abordent la page 4 du polycopié, (première méthode de démonstration) qu'ils suivent pas à pas. Ils obtiennent les expressions indiquées

10h10

Suite à un problème matériel, ils rechargent le logiciel et au lieu de reprendre le travail, explorent les fichiers de démonstration de tracé en 3D

10h55

Ils abordent la seconde méthode (deuxième membre vers premier membre page 6)

Après quelques simplifications, ils obtiennent une expression non conforme au polycopié, l'affectation de la valeur  $\pi - (a+b)$  à la variable c, étant restée valide. Ils appellent le professeur, qui après un temps de recherche localise le problème, et "libère" la variable c.

Jusque vers 11h55, les élèves poursuivent la lecture du polycopié jusqu'à la fin de la page 8. A ce stade, ils appellent le professeur, car à nouveau ils n'obtiennent pas l'expression de l'énoncé. Le professeur tente en vain de localiser le problème, et déclare qu'il peut s'agir d'un "problème de version", la version de DERIVE utilisée pour la préparation étant différente de la version utilisée par les élèves.

### ENTRETIEN APRÈS OBSERVATION

Le professeur a eu une impression de lenteur, de difficulté à avancer dans le polycopié. Il souligne que les polycopiés précédents ont été plus courts.

Les problèmes inattendus ont été l'intervention de l'affectation de la variable  $c$ , d'une part, et les différences entre version du logiciel (il utilise pour la préparation une version plus récente que celle dont l'établissement est équipé).

Le bilan est que les élèves ont surtout vu "comment DERIVE manipule les expressions trigonométriques", alors que le professeur pensait que les exercices de la fin du polycopié seraient traités. Il pense que le travail était un peu ambitieux pour la durée prévue, et prévoit une nouvelle séance le 13 avril, et du travail autonome.

Concernant l'équilibre "lecture polycopié/recherche", le professeur pense que le problème vient de ce que les élèves n'ont pas atteint les exercices de la fin. Il pense aussi que les élèves sont passés trop vite sur les exercices de la fin de la première partie.

Lors d'une séance ultérieure de 2 heures, le professeur a tenté de prolonger le travail, mais selon lui, le résultat a été très décevant, car les transformations qu'il avait testées pour sa préparation n'ont pas fonctionné avec la version dont l'établissement est équipé.

### ANALYSE A POSTERIORI

#### L'objectif du professeur

Le but explicite de la séance est de renforcer des démarches de preuve en trigonométrie, vues en papier/crayon, par une activité où DERIVE permettrait de mieux apercevoir ce qui est fondamental dans la démarche en "libérant l'élève" des difficultés calculatoires.

Nous avons donc deux hypothèses originales sous-tendant l'activité

- DERIVE est un auxiliaire pour des démarches de preuve.
- L'activité avec DERIVE systématise l'activité Papier/crayon antérieure, et doit avoir des effets dans l'activité Papier/crayon ultérieure.

#### Le calcul trigonométrique avec DERIVE

Les transformations d'expressions trigonométriques effectuées dans DERIVE sont pilotées par une variable de mode pouvant prendre trois valeurs :

- dans le mode "Développé", DERIVE applique les formules de développement  $\cos(a+b)$ ,  $\sin(a+b)$ ,  $\cos(ka)$ ,  $\sin(ka)$ .
- dans le mode "Contracté", DERIVE applique les formules de transformation de produit et de puissances de lignes trigonométriques, en sommes.

- dans le mode "Auto", DERIVE n'applique les formules de transformations, que si elles conduisent à des simplifications. En fait, le fonctionnement de DERIVE dans ce mode est très peu transparent, et semble varier d'une version à l'autre.

Plusieurs difficultés montrent qu'il n'y a pas isomorphisme entre les transformations classiques d'expressions trigonométriques, basées sur l'application de formules, et le calcul dans DERIVE :

- Une simplification dans le mode "Développé" (Resp. "Contracté") n'est qu'en apparence isomorphe à l'application de formules classiques. En effet, la pratique montre des cas où des simplifications "évidentes à la main" sont difficilement obtenues avec DERIVE :

par exemple, A. et C. souhaitent mettre en facteur  $\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$  dans

$\sin(3x) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$ . Elles savent appliquer "à la main" la transformation

$\sin(3x) = 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ , mais elles ne parviennent pas à la mettre en oeuvre avec

DERIVE. Leur tentative conduit à une série de cercles vicieux où elles finissent par ne plus donner de sens aux simplifications qu'elles effectuent.

- Un autre problème est qu'il n'y a pas, dans DERIVE, l'équivalent des transformations d'expressions trigonométriques s'appuyant sur les formules de transformation de sommes et différences en produits. C'est ce qui conduit le professeur à introduire les fonctions FSS, FSC, FDS, FDC. La découverte de ces fonctions et leur définition occupent une part importante du polycopié et de l'activité des élèves, alors qu'il ne s'agit que d'une habileté parmi d'autres, dans la démarche de preuve d'égalités trigonométriques. Les élèves A. et C. semblent intégrer la logique du professeur, puisqu'elles créent de leur propre initiative une fonction de ce type (FAD), pour tenter d'appliquer la formule de l'angle double. On peut noter cependant qu'elles voient cette définition comme une "formule" et n'aperçoivent pas les caractéristiques "informatiques" de cette définition : elles ne comprennent pas par exemple, pourquoi le premier membre de la définition ne peut être FAD(2x).
- Une troisième difficulté vient de la factorisation dans les expressions trigonométriques : DERIVE opère une simplification avant la factorisation, ce qui peut rendre impossible la factorisation souhaitée. Ainsi, la factorisation de  $\cos(a-b)\cos\left(\frac{c}{2}\right) + \cos\left(\frac{c}{2}\right)\sin\left(\frac{c}{2}\right)$

conduit à : 
$$\frac{2\cos(a-b)\cos\left(\frac{c}{2}\right) + \sin(c)}{2}$$

#### Les démarches de preuve en papier/crayon et avec DERIVE

Les calculs dans DERIVE facilitent la démarche de preuve consistant à trouver une expression égale à chacune des expressions du premier et du second membre.

Ceci est bien illustré par l'activité de A. et C. lorsqu'elles démontrent :  $\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) = \tan(a)\tan(b)\tan(c)$  (voir ci-dessus page 253). Elles simplifient dans le mode "Développé" chacun des deux membres. Pour chacun des deux

membres elles obtiennent une expression complexe. Elles reconnaissent que les deux expressions obtenues sont les mêmes.

Cette démarche de preuve serait difficile à obtenir à la main, à cause de la complexité des expressions. Elle présente l'avantage d'être efficace, si l'on utilise DERIVE, mais n'est pas la plus intéressante si l'on veut développer chez les élèves des compétences "stratégiques" réinvestissables en papier/crayon.

L'autre démarche consiste à passer de l'expression dans un membre à l'expression de l'autre membre, par des expressions équivalentes. Le non-isomorphisme souligné plus haut entre les transformations trigonométriques "à la main" et le calcul dans DERIVE entraîne des difficultés spécifiques dans la mise en oeuvre de cette démarche avec DERIVE. Dans l'exemple ci-dessus (démonstration de  $\text{TAN}(a) + \text{TAN}(b) + \text{TAN}(c) = \text{TAN}(a) \text{TAN}(b) \text{TAN}(c)$ ), la tentative du premier membre vers le second et la tentative inverse, n'aboutissent pas.

### Le rôle de DERIVE

DERIVE peut donc jouer un rôle d'auxiliaire dans les démarches de preuve. Cependant l'apport de DERIVE en terme de compétences stratégiques réinvestissables en papier/crayon n'est pas aussi clair que dans les hypothèses du professeur :

- Dans les exemples traités dans le polycopié, les difficultés liées au fonctionnement particulier de DERIVE sont en grande partie résolues. Les élèves retrouvent donc les démarches de preuve qu'ils ont mises en oeuvre antérieurement en papier/crayon. Cependant, le travail des élèves peut se réduire à la simple exécution des entrées et des commandes indiquées dans le polycopié : c'est le cas des élèves du second groupe qui sont passés très vite sur la difficulté que pouvait représenter les factorisations du bas de la page 4, et qui n'ont pas abordé les exercices de la fin du polycopié. Si l'implication des élèves dans l'activité reste superficielle, on peut douter des effets sur leurs compétences.
- La pratique avec DERIVE tend à favoriser une démarche de preuve qui n'est pas la plus intéressante du point de vue "stratégique", et qui n'est pas nécessairement réinvestissable en papier/crayon
- Dans les exercices résolus par les élèves, certaines difficultés calculatoires disparaissent, en particulier celles qui sont liées à la manipulation d'expressions complexes. Le non-isomorphisme du calcul dans DERIVE avec les transformations habituelles ajoute cependant une complexité nouvelle, particulièrement quand, partant d'une forme donnée (par exemple une somme) on veut obtenir une autre forme (par exemple un produit).
  - Dans de nombreux cas, la complexité nouvelle obscurcit la stratégie, de la même manière que les difficultés calculatoires dans la pratique papier/crayon. On trouve alors les nombreux cercles vicieux auxquels conduit la conjonction d'une facilité de mise en oeuvre des transformations, et de la perte du sens de ces transformations.
  - Dans d'autres cas, on peut penser que les élèves sont conduits à mieux penser leur stratégie en fonction du contexte différent que constitue DERIVE. C'est le cas par exemple de A. et C. quand elles tentent de factoriser  $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$  (voir page 249 et suivantes) . Leur recherche obstinée les conduit à une factorisation effective : celle-ci est erronée, mais l'erreur se situe lors de l'entrée dans DERIVE d'une expression factorisée "à la main" en désespoir de cause ! On remarque également que l'observateur doit intervenir assez fortement pour relancer la recherche. Dans l'autre groupe où cette relance n'a pas lieu, les élèves ne cherchent pas les factorisations.

## Synthèse et propositions

Dans le travail des élèves, on peut distinguer trois phases, posant des problèmes différents :

1. Dans un premier temps, les élèves utilisent les différents modes de simplification trigonométriques de DERIVE. Ils sont guidés pas à pas et sont ainsi dans un travail d'exécution qui ne leur pose pas de problème particulier, mais où il n'y a pas d'apprentissage. Or, pour des élèves comme ceux du second groupe, ce travail occupe la majeure partie de la séance.
2. Dans la phase de construction des formules de transformation de sommes en produits, on voit apparaître des difficultés, bien que le guidage demeure important.
  - Comme dans d'autres observations, des difficultés viennent de ce que des paramètres de la commande de substitution ne sont pas compris des élèves.
  - On rencontre aussi des difficultés plus spécifiques à la gestion des expressions trigonométriques par DERIVE, et bien moins facilement rationalisables. Par exemple, les problèmes rencontrés dans la simplification de

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-p\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-q\right) = 2 \cos\left[\frac{\frac{\pi}{2}-p - \left(\frac{\pi}{2}-q\right)}{2}\right] \sin\left[\frac{\frac{\pi}{2}-p + \left(\frac{\pi}{2}-q\right)}{2}\right],$$

ne sont résolus qu'après de multiples essais infructueux.

- Il y a aussi la question des crochets, déjà rencontrée elle aussi dans d'autres observations. Deux objets affichés de façon identiques sont traités différemment par DERIVE. Les usages mathématiques ne conduisent pas à les distinguer.

Dans ce travail trigonométrique, l'utilisateur est ainsi confronté à une certaine imprévisibilité du logiciel : les résultats obtenus dans DERIVE dépendent d'un nombre important de facteurs (options de simplification, affectations antérieures, expressions à simplifier...), et on ne peut se faire une idée précise du fonctionnement. C'est pourquoi le polycopié n'assure généralement pas le guidage prévu par le professeur, et se révèle au contraire bien souvent un handicap.

3. Dans les phases de recherche d'exercices, les particularités du calcul trigonométrique dans DERIVE soulignées ci-dessus handicapent notablement le travail des élèves. Nous avons vu par exemple qu'il est souvent difficile d'obtenir des transformations ou factorisations évidentes à la main. Le polycopié précise que toutes les simplifications doivent pouvoir être obtenues dans le logiciel, et donc, les élèves ne se sentent pas autorisés à reporter dans DERIVE le résultat de simplifications obtenues à la main. Quand ils y sont invités par l'observateur, les élèves n'identifient pas la structure d'expressions trop complexes, et se trompent en les recopiant.

Le professeur souhaitait dans cette séance que les élèves puissent, à l'aide de DERIVE, se centrer sur les démarches de preuves, l'exploration des stratégies. Par rapport à cet objectif, l'impression est plutôt décevante. Il y a les difficultés de guidage de l'activité des élèves que nous avons soulignées ci-dessus, mais nous avons vu aussi que DERIVE privilégie une stratégie de calcul qui n'est pas la plus intéressante à réinvestir en calcul papier/crayon, et que

les autres stratégies peuvent être laborieuses, voir impossible si l'on veut les conduire en totalité avec le logiciel.

L'activité pourrait donc être plus intéressante si l'on abandonnait l'idée de reproduire avec DERIVE des démarches totalement isomorphes au calcul papier/crayon. On pourrait ainsi se centrer sur un travail trigonométrique moins guidé, mais où les différences entre la résolution dans DERIVE et le calcul papier/crayon prendraient du sens.

C'est un peu ce travail trigonométrique auquel se livre le premier groupe dans les phases de recherche des exercices. Certes, son activité de résolution est loin d'être toujours efficace et il faudrait pouvoir lui éviter les nombreux blocages ou détours peu productifs. De nombreux points de l'analyse de l'activité précédente pourraient être repris pour rendre plus efficace ce travail. En particulier, l'analyse a priori d'une séance de trigonométrie avec DERIVE devrait s'efforcer de déterminer quelle image rationnelle des transformations trigonométriques opérées par le logiciel on peut donner aux élèves, et comment on peut les amener à gérer la part d'imprévisibilité qui semble inévitable. Elle devrait aussi faire en sorte que les élèves puissent articuler la réflexion sur papier et les simplifications dans le logiciel, de façon à ce que des transformations évidentes sur papier, mais difficiles à obtenir dans DERIVE, ne constituent pas des obstacles à la résolution.

### ANNEXE : LE TEXTE DU POLYCOPIÉ DISTRIBUÉ AUX ÉLÈVES (TRIGO 2)

Le but de ce TP est de vous faire refaire des exercices sur les transformations trigonométriques. A l'aide de DERIVE vous pourrez tester sur chaque exercice les diverses méthodes vues en cours.

Pour utiliser les **formules d'addition** avec DERIVE:

On règle le mode trigonométrique **cHoix** **Trigonométrie** **dévEloppé**

Entrer ensuite **Auteur**  $\sin(a + b)$

1:  $\text{SIN}(a + b)$

Puis **Simplifie**

2:  $\text{COS}(a) \text{SIN}(b) + \text{SIN}(a) \text{COS}(b)$

Retrouver les autres formules d'addition

|               |  |
|---------------|--|
| $\sin(a - b)$ |  |
| $\cos(a + b)$ |  |
| $\cos(a - b)$ |  |

Pour utiliser les **formules de transformation de produit en somme** avec DERIVE.

On règle le mode trigonométrique **cHoix** **Trigonométrie** **Contracté**

Entrer ensuite **Auteur**  $\sin(a)\sin(b)$

3:  $\text{SIN}(a) \text{SIN}(b)$

Puis **Simplifie**

4: 
$$\frac{\text{COS}(a - b)}{2} - \frac{\text{COS}(a + b)}{2}$$

Retrouver les autres formules de transformation de produit en somme.

|                  |  |
|------------------|--|
| $\cos(a)\cos(b)$ |  |
| $\cos(a)\sin(b)$ |  |
| $\sin(a)\cos(b)$ |  |

La troisième option Auto laisse DERIVE choisir le degré de simplification.

**Auteur** Entrer

5:  $\text{COS}\left[\frac{\pi}{2} - x\right] \text{COS}(\pi - 3x)$

**cHoix** **Trigonométrie** **Auto** puis **Simplifie**

$$6: -\sin(x) \cos(3x)$$

Replacer la surbrillance sur (5:)

**cHoix** **Trigonométrie** **Contracté** puis **Simplifie**

$$7: \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin(4x)}{2}$$

Replacer la surbrillance sur (5:)

**cHoix** **Trigonométrie** **dévEloppé** puis **Simplifie**

$$8: 3 \sin(x) \cos(x) - 4 \sin(x) \cos(x)$$

vous remarquerez que DERIVE utilise récursivement les formules d'addition:

$\sin(4x) = \sin(x+3x) = \sin(x)\cos(3x) + \cos(x)\sin(3x)$  puis  $\sin(3x)$  et  $\cos(3x)$  par leurs valeurs calculées en fonction des fonctions circulaires de  $x$  et  $2x$

$\sin(3x) = \sin(x+2x) = \sin(x)\cos(2x) + \sin(2x)\cos(x)$   $\cos(3x) = \cos(x+2x) = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x)$

et enfin  $\sin(2x)$  et  $\cos(2x)$  en fonction de  $\sin(x)$  et  $\cos(x)$

La remarque précédente est aussi valable pour le mode contacté. Par exemple:

**Auteur** Entrer:

$$9: \sin(x)$$

**cHoix** **Trigonométrie** **Contracté** puis **Simplifie**

$$2: \frac{3 \sin(x)}{4} - \frac{\sin(3x)}{4}$$

**Auteur** Entrer:

$$10: \sin(x)$$

**cHoix** **Trigonométrie** **Contracté** puis **Simplifie**

$$11: \frac{\sin(9x)}{256} - \frac{9 \sin(7x)}{256} + \frac{9 \sin(5x)}{64} - \frac{21 \sin(3x)}{64} + \frac{63 \sin(x)}{128}$$

## Constructions des formules de transformations de sommes en produits

La démarche est analogue à celle faite à la main. **Auteur** Entrer:

1:  $\text{SIN}(a + b) + \text{SIN}(a - b)$

On règle sur l'option contracté **cHoix** **Trigonométrie** **Contracté**

On simplifie **Simplifie**

2:  $2 \text{ SIN}(a) \text{ COS}(b)$

On construit la formule à l'aide de **Bâtis** ou de la touche F3

3:  $\text{SIN}(a + b) + \text{SIN}(a - b) = 2 \text{ SIN}(a) \text{ COS}(b)$

On pose:

4:  $[p = a + b, q = a - b]$

On calcule a et b en fonction de p et q  **résoL**

5:  $\left[ a = \frac{p + q}{2}, b = \frac{p - q}{2} \right]$

On remplace a et b dans (3): **cHoix** **Substitue**

6:  $\text{SIN}\left[\frac{p + q}{2} + \frac{p - q}{2}\right] + \text{SIN}\left[\frac{p + q}{2} - \frac{p - q}{2}\right] = 2 \text{ SIN}\left[\frac{p + q}{2}\right] \text{ COS}\left[\frac{p - q}{2}\right]$

On simplifie **Simplifie**

7:  $\text{SIN}(p) + \text{SIN}(q) = 2 \text{ SIN}\left[\frac{p + q}{2}\right] \text{ COS}\left[\frac{p - q}{2}\right]$

On définit la fonction FSS (pour factorisation de somme de sinus).

8:  $\text{FSS}(p, q) := 2 \text{ SIN}\left[\frac{p + q}{2}\right] \text{ COS}\left[\frac{p - q}{2}\right]$

De même pour la différence

9:  $\text{FDS}(p, q) := 2 \text{ SIN}\left[\frac{p - q}{2}\right] \text{ COS}\left[\frac{p + q}{2}\right]$

Et pour les cosinus, on remplace p par  $\pi/2 - p$  et q par  $\pi/2 - q$ .

Remplacez la surbrillance sur (7): **cHoix** **Substitue**

$$10: \sin\left[\frac{\pi}{2} - p\right] + \sin\left[\frac{\pi}{2} - q\right] = 2 \sin\left[\frac{\frac{\pi}{2} - p + \left[\frac{\pi}{2} - q\right]}{2}\right] \cos\left[\frac{\frac{\pi}{2} - p - \left[\frac{\pi}{2} - q\right]}{2}\right]$$

On simplifie **Simplifie**

$$11: \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left[\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\right] \cos\left[\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right]$$

On définit la fonction FSC (factorise somme de cosinus)

**Auteur** Entrer:

$$12: \text{FSC}(p, q) := 2 \cos\left[\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\right] \cos\left[\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right]$$

Et enfin la différence de deux cosinus, en remplaçant q par  $\pi - q$ . **Auteur** Entrer:

$$13: \text{FSC}(p, \pi - q)$$

$$14: -2 \sin\left[\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\right] \sin\left[\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right]$$

On définit la fonction FDC (factorise différence de cosinus).

$$15: \text{FDC}(p, q) := -2 \sin\left[\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\right] \sin\left[\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right]$$

Ces quatre formules de factorisation:

$$2: \text{FSS}(p, q) := 2 \sin\left[\frac{p+q}{2}\right] \cos\left[\frac{p-q}{2}\right]$$

$$3: \text{FDS}(p, q) := 2 \sin\left[\frac{p-q}{2}\right] \cos\left[\frac{p+q}{2}\right]$$

$$4: \text{FSC}(p, q) := 2 \cos\left[\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\right] \cos\left[\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right]$$

$$5: \text{FDC}(p, q) := -2 \sin\left[\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\right] \sin\left[\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right]$$

sont sauvegardées sur la disquette dans le fichier **sompro.mth** vous pourrez dans la suite du TP le charger si nécessaire

Utilisez les formules précédentes pour factoriser:

|                                 |  |
|---------------------------------|--|
| $\cos(2x) + \cos(3x)$           |  |
| $\cos(x) - \cos(2x)$            |  |
| $\sin(x) + \cos(x)$             |  |
| $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$ |  |

## Exemple: résolution de l'exercice N°1 avec les fonctions de DERIVE

On charge le fichier **Transfert** **Charge** E1

$$1: \quad \sin(a) + \sin(b) + \sin(c) = 4 \cos\left[\frac{a}{2}\right] \cos\left[\frac{b}{2}\right] \cos\left[\frac{c}{2}\right]$$

**Méthode en transformant chaque membre.**

On sélectionne le premier membre

$$2: \quad \sin(a) + \sin(b) + \sin(c)$$

On remplace a par  $\pi - (b + c)$  **cHoix** **Substitue**

$$3: \quad \sin(\pi - (b + c)) + \sin(b) + \sin(c)$$

On simplifie **Simplifie**

$$4: \quad \sin(b + c) + \sin(b) + \sin(c)$$

On règle l'option trigo sur developpe **cHoix** **Trigonometrie**

$$5: \quad \cos(b) \sin(c) + \sin(b) (\cos(c) + 1) + \sin(c)$$

Voici la forme développée du premier membre.

$$6: \quad \cos(b) \sin(c) + \sin(b) \cos(c) + \sin(b) + \sin(c)$$

On travaille maintenant sur le second membre.

$$7: \quad 4 \cos\left[\frac{a}{2}\right] \cos\left[\frac{b}{2}\right] \cos\left[\frac{c}{2}\right]$$

On remplace a par  $\pi - (b + c)$  comme pour le premier.

**cHoix** **Substitue**

$$8: \quad 4 \cos\left[\frac{\pi - (b + c)}{2}\right] \cos\left[\frac{b}{2}\right] \cos\left[\frac{c}{2}\right]$$

Voici la forme développée du second membre.

$$9: \quad \cos(b) \sin(c) + \sin(b) (\cos(c) + 1) + \sin(c)$$

Elle est égale à celle du premier (6). La démonstration est donc terminée

Il est possible de faire les deux transformations précédentes en même temps

On déclare c fonction de a et b

$$c := \pi - (a + b)$$

$$\sin(a + b) + \sin(a) + \sin(b) = 4 \cos\left[\frac{a}{2}\right] \cos\left[\frac{b}{2}\right] \cos\left[\frac{c}{2}\right]$$

simplification en mode Auto **cHoix** **Trigonometrie** **Auto** **Simplifie**

$$\sin(a + b) + \sin(a) + \sin(b) = 4 \sin\left[\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right] \cos\left[\frac{a}{2}\right] \cos\left[\frac{b}{2}\right]$$

simplification en mode développe **cHoix** **Trigonométrie** **dévEloppé** **Simplifie**

$$30: \cos(a) \sin(b) + \sin(a) (\cos(b) + 1) + \sin(b) = \cos(a) \sin(b) + \sin(a) (\cos(b) + 1) + \sin(b)$$

Les deux membres sont égaux donc l'égalité est démontrée.

**Méthode partir du deuxième membre et arriver au premier.**

On isole le deuxième membre.

$$10: 4 \cos\left[\frac{a}{2}\right] \cos\left[\frac{b}{2}\right] \cos\left[\frac{c}{2}\right]$$

puis on isole les deux premiers facteurs.

$$11: 4 \cos\left[\frac{a}{2}\right] \cos\left[\frac{b}{2}\right]$$

On règle l'option tigonométrie sur contracté **cHoix** **Trigonométrie** **Contracté**

$$12: 2 \cos\left[\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right] + 2 \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right]$$

On remplace le troisième facteur **Bâtis** ou touche F3

$$13: \cos\left[\frac{c}{2}\right] \left[2 \cos\left[\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right] + 2 \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right]\right]$$

On simplifie **Simplifie**

$$14: \cos\left[\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right] + \cos\left[\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right] + \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right] + \cos\left[\frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{a}{2}\right]$$

mais  $a + b + c = \pi$

$$15: \cos\left[\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right] + \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right] + \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right]$$

$$16: \cos\left[\frac{\pi}{2} - c\right] + \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right] + \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right]$$

$$17: \cos\left[\frac{\pi}{2} - c\right] + \cos\left[\frac{\pi}{2} - b\right] + \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right]$$

$$18: \cos\left[\frac{\pi}{2} - c\right] + \cos\left[\frac{\pi}{2} - b\right] + \cos\left[\frac{\pi}{2} - a\right]$$

$$19: \sin(a) + \sin(b) + \sin(c)$$

On retrouve le premier membre.

## Résolution de l'exercice N°1 en utilisant les transformations de sommes en produits

On charge l'exercice **Transfert** **Charge** **Derive** exo1

$$1: \quad \text{SIN}(a) + \text{SIN}(b) + \text{SIN}(c) = 4 \cos\left[\frac{a}{2}\right] \cos\left[\frac{b}{2}\right] \cos\left[\frac{c}{2}\right]$$

On charge les fonctions de factorisation **Transfert** **Fusionne** sompro

On retrouve les fonctions précédemment définies.

$$2: \quad \text{FSS}(p, q) := 2 \sin\left[\frac{p+q}{2}\right] \cos\left[\frac{p-q}{2}\right]$$

$$3: \quad \text{FDS}(p, q) := 2 \sin\left[\frac{p-q}{2}\right] \cos\left[\frac{p+q}{2}\right]$$

$$4: \quad \text{FSC}(p, q) := 2 \cos\left[\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\right] \cos\left[\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right]$$

$$5: \quad \text{FDC}(p, q) := -2 \sin\left[\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\right] \sin\left[\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right]$$

On factorise les deux premiers termes du premier membre **Auteur** FSS(a,b)

$$6: \quad \text{FSS}(a, b)$$

On simplifie **Simplifie**

$$7: \quad 2 \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right] \sin\left[\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right]$$

On remplace  $a+b$  par  $\pi - c$  mettre en surbrillance  $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$

**cHoix** **Substitue**  $(\pi - c)/2$

$$8: \quad 2 \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}\right]$$

On simplifie **Simplifie**

$$9: \quad 2 \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right] \cos\left[\frac{c}{2}\right]$$

On ajoute  $\sin c$  utiliser **Bâtis** ou la touche F3.

$$10: \quad 2 \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right] \cos\left[\frac{c}{2}\right] + 2 \sin\left[\frac{c}{2}\right] \cos\left[\frac{c}{2}\right]$$

Il n'est pas possible avec Derive de mettre  $\cos(c/2)$  en facteur. On divise donc par  $\cos(c/2)$

**Bâtis**

$$11: \frac{2 \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right] \cos\left[\frac{c}{2}\right] + 2 \sin\left[\frac{c}{2}\right] \cos\left[\frac{c}{2}\right]}{\cos\left[\frac{c}{2}\right]}$$

Puis on simplifie. **Simplifie**

$$12: 2 \cos\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right] + 2 \sin\left[\frac{c}{2}\right]$$

On factorise de nouveau en remarquant que  $\sin(c/2) = \cos(\pi/2 - c/2)$ .

**Auteur** FSC( $a/2 - b/2, \pi/2 - c/2$ )

$$13: 2 \text{ FSC}\left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}\right]$$

On simplifie **Simplifie**

$$14: 4 \cos\left[\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4} - \frac{b}{4} - \frac{c}{4}\right] \sin\left[\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4} - \frac{b}{4} + \frac{c}{4}\right]$$

On remplace c par  $\pi - (a + b)$  **cHoix** **Substitue**

$$15: 4 \cos\left[\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4} - \frac{b}{4} - \frac{\pi - (a + b)}{4}\right] \sin\left[\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4} - \frac{b}{4} + \frac{\pi - (a + b)}{4}\right]$$

On simplifie **Simplifie**

$$16: 4 \cos\left[\frac{a}{2}\right] \cos\left[\frac{b}{2}\right]$$

la relation est donc démontrée.

Vous disposez maintenant de tous les moyens pour traiter les autres exercices.

Vous prendrez des notes sommaires sur les résultats donnés par Derive sur les feuilles suivantes. Il vous faudra faire ensuite un compte rendu :

Comparer en particulier une résolution à la main et la même avec Derive.

Pour chaque exercice rédiger une solution à la main.

## Textes des exercices de trigonométrie

**Exercice N°1. Démontrer l'égalité suivante:**

$$1 - \cos(a) + \cos(b) + \cos(c) = 4 \sin\left[\frac{a}{2}\right] \cos\left[\frac{b}{2}\right] \cos\left[\frac{c}{2}\right]$$

**Exercice N°2 Démontrer l'égalité suivante:**

$$\sin(2a) + \sin(2b) + \sin(2c) = 4 \sin(a) \sin(b) \sin(c)$$

**Exercice N°5 Démontrer l'égalité suivante:**

$$\cot\left[\frac{a}{2}\right] + \cot\left[\frac{b}{2}\right] + \cot\left[\frac{c}{2}\right] = \cot\left[\frac{a}{2}\right] \cot\left[\frac{b}{2}\right] \cot\left[\frac{c}{2}\right]$$

**Exercice N°6 Démontrer l'égalité suivante:**

$$\cos^2(a) + \cos^2(b) + \cos^2(c) + 2 \cos(a) \cos(b) \cos(c) = 1$$

**Exercice N°7 Démontrer l'égalité suivante:**

$$\frac{\cos(a)}{\sin(b) \sin(c)} + \frac{\cos(b)}{\sin(c) \sin(a)} + \frac{\cos(c)}{\sin(a) \sin(b)} = 2$$

**Exercice N°8 Démontrer l'égalité suivante:**

$$\left[1 + \tan\left[\frac{a}{4}\right]\right] \left[1 + \tan\left[\frac{b}{4}\right]\right] \left[1 + \tan\left[\frac{c}{4}\right]\right] = 2 + \tan\left[\frac{a}{4}\right] \tan\left[\frac{b}{4}\right] \tan\left[\frac{c}{4}\right]$$

**Exercice N°9 Démontrer l'égalité suivante:**

$$\tan\left[\frac{a}{2}\right] + \tan\left[\frac{b}{2}\right] + \tan\left[\frac{c}{2}\right] = \frac{4 \left[1 + \sin\left[\frac{a}{2}\right] \sin\left[\frac{b}{2}\right] \sin\left[\frac{c}{2}\right]\right]}{\sin(a) + \sin(b) + \sin(c)}$$

**Exercice N°10. Simplifier:**

$$\cos\left[\frac{\pi}{8}\right]^2 + \cos\left[\frac{3\pi}{8}\right]^2 + \cos\left[\frac{5\pi}{8}\right]^2 + \cos\left[\frac{7\pi}{8}\right]^2$$

**Exercice N°11. Simplifier:**

$$\tan\left[\frac{\pi}{20}\right] - \tan\left[\frac{3\pi}{20}\right] - \tan\left[\frac{7\pi}{20}\right] + \tan\left[\frac{9\pi}{20}\right]$$

**Exercice N°12. Simplifier:**

$$\cos(x)^2 + \cos\left[x + \frac{\pi}{3}\right]^2 + \cos\left[x + \frac{2\pi}{3}\right]^2$$

Les textes sont dans les fichiers format Derive E1.MTH, E2.MTH...E12.MTH.

Pour les charger: Transfert Charge Derive nom du fichier

Pour sauvegarder votre travail: Transfert Sauve Derive nom de votre fichier

## SYNTHESE ET CONCLUSIONS

Nous allons dans cette partie essayer de tirer les conclusions de ce travail et de proposer des pistes de développement pour la recherche.

L'analyse bibliographique, menée dans la première phase de cette recherche, a clairement montré que, dans le domaine des SMS, la recherche est encore « jeune ». Elle présente, dans ce domaine, un certain retard, si on compare à l'ensemble des travaux sur l'enseignement en environnement informatique. Le fait que les SMS soient des environnements relativement complexes, que pour l'instant, ils aient surtout été engagés dans des expériences d'enseignement au niveau collégial ou supérieur, où traditionnellement la recherche en didactique des mathématiques est moins implantée n'y est sans doute pas indifférent. On a donc peu étudié encore ce qui caractérise les transpositions informatiques en jeu dans ces environnements, pour reprendre la terminologie de N. Balacheff (Balacheff, 1994), on a peu d'études permettant de cerner les spécificités des modes d'adaptation et d'apprentissage de l'élève dans ces environnements. Par analogie avec ce que la recherche tend à montrer dans le cas d'adaptation à des environnements graphiques ou géométriques, on peut faire l'hypothèse que, du fait des caractéristiques de ces environnements on risque de mettre en évidence des schèmes résultant d'adaptations formelles, relativement globales et liées à la perception, dont les ancrages en invariants opératoires ne sont pas forcément très élaborés. Il y a un travail nécessaire de l'enseignement pour, tout en tirant parti de ce jeu formel, arriver à en faire autre chose qu'une reconnaissance globale de formes très contextualisée. On risque donc, comme dans les autres environnements déjà mieux étudiés, de mettre en évidence l'importance de la construction didactique sous-jacente à l'utilisation des logiciels.

Pourtant, si la recherche est encore balbutiante, on commence à noter une évolution certaine (cf. appendice bibliographique) et on peut penser que le travail sur les SMS va rejoindre rapidement le niveau du travail mené sur d'autres environnements.

En ce qui concerne les questionnaires, les résultats obtenus avec les analyses menées jusqu'à présent montrent un rapport globalement positif des élèves à l'environnement DERIVE. Les filiations de refus de DERIVE sont ainsi très minoritaires dans la population étudiée. DERIVE est jugé en première approche relativement convivial, les élèves dans leur grande majorité étant cependant conscients que cette convivialité reste quand même limitée et que, dès que l'on sort des manipulations algébriques les plus simples, de réels apprentissages sont nécessaires. Les réponses au questionnaire montrent aussi un nombre d'heures d'utilisation, dans la très grande majorité des cas, qui reste insuffisant pour faire de DERIVE un outil familier de travail. Encore faut-il souligner que notre échantillon est particulièrement représentatif des professeurs qui utilisent le plus DERIVE dans leurs classes et que, dans certaines académies, malgré les initiatives prises, nous n'avons pas réussi à trouver des professeurs utilisant DERIVE plus de 2 ou 3 heures par an. Il est clair que ces conditions favorisent une perception des environnements informatiques comme des environnements associés à des moments un peu en marge de l'enseignement usuel, en marge des contrats et contraintes, et renforcent la vision "ludique" de ces environnements. Ils sont intéressants pour le changement qu'ils procurent plus qu'en eux-mêmes. On ne les prend pas tout à fait au sérieux. Ils ne peuvent donc avoir une grande influence sur les pratiques et les représentations des mathématiques. Ceci est confirmé par les réponses au questionnaire. DERIVE est vu positivement mais on le crédite généralement de peu d'effet sur la compréhension mathématique. On s'approprie en priorité les rôles les plus faciles à mettre en oeuvre dans une utilisation de courte durée interne à l'institution scolaire :

les fonctions d'aide au calcul, de vérification et de contrôle, dans un univers mathématique qui n'est que peu modifié. La recherche a quand même mis en évidence, grâce à l'utilisation de méthodes d'implication statistique dont l'usage devient maintenant de plus en plus fréquent en didactique des mathématiques, et en adaptant les dites méthodes aux divers types de variables à traiter simultanément (pour éviter l'explosion de variables incompatible avec le fonctionnement du logiciel statistique actuel) une filiation plus conforme aux attentes qui pourraient être celles des pionniers dans ce domaine. Les élèves y apprécient DERIVE pour son apport à leur activité mathématique, soit parce que DERIVE permet à leur avis une meilleure compréhension des notions enseignées, soit parce que DERIVE est associé à une ouverture des activités proposées vers des tâches plus riches et complexes et véhicule une autre vision des mathématiques. Certes, dans les réponses cette filiation est nettement minoritaire mais elle existe et les résultats obtenus montrent qu'elle est liée à une utilisation non épisodique du logiciel.

Les réponses au questionnaire enseignant confirment la diversité des modes d'utilisation existant dans l'échantillon choisi, d'une utilisation épisodique à une intégration complète. Ils semblent aussi montrer que, même si l'utilisation est le plus souvent de faible durée, elle ne reste pas centrée sur quelques contenus précis. Les exemples fournis par les enseignants couvrent globalement une partie importante des programmes de collège et de lycée. On voit apparaître, dans les hypothèses faites à propos des potentialités de DERIVE pour l'enseignement des mathématiques, trois fonctions principales : aide au calcul, aide à l'enrichissement des activités mathématiques proposées aux élèves, aide à la compréhension. Mais les réponses fournies, notamment dans la partie évaluation du questionnaire, montrent aussi que les professeurs sont conscients des difficultés rencontrées dans l'actualisation des potentialités identifiées a priori. Ils sont conscients par exemple que DERIVE ne supprime pas toutes les difficultés calculatoires et que souvent la faible familiarité acquise avec le logiciel crée des parasites à l'activité mathématique ; ils sont conscients qu'il n'est pas automatique de développer, via DERIVE, des attitudes réflexives ; ils sont conscients de la difficulté d'organiser et gérer, même avec DERIVE, les activités riches et ouvertes conformes à leurs vœux.

En ce qui concerne les observations, la masse des données recueillies est importante, et ce d'autant plus que nous avons pu compter pour la plupart des séances de plus d'observateurs que nous ne l'avions initialement prévu. Même si, dans une même situation, ils tendent à s'enchevêtrer, induisant parfois des ruptures de contrat didactique difficiles à négocier, trois grands types d'utilisation de DERIVE nous semblent ici à distinguer :

- Des situations où DERIVE est utilisé comme un assistant mathématique, un outil à la disposition de l'élève, ceci permettant d'aborder plus facilement que dans les environnements usuels des problèmes complexes présentés de façon relativement ouverte. C'est le cas typiquement de la situation de recherche de fonctions sous contraintes ou de celle associée à la factorisation de  $X^n - 1$ .
- Des situations où les spécificités de DERIVE sont avant tout exploitées pour construire des situations d'apprentissage plus difficiles à faire vivre dans les environnements usuels, qu'il s'agisse de mettre en scène un travail sur les « écritures mathématiques » (la situation de travail sur les écritures fractionnaires et parenthésées au collège en est un exemple typique, la première situation de trigonométrie, dans sa phase de recherche d'expressions trigonométriques équivalentes à une expression donnée également), qu'il s'agisse de mettre en scène un travail mathématique de nature relativement formelle comme l'obtention de formes générales de solutions de systèmes d'équation ou de mise en évidence de régularités

formelles dans le développement d'expressions algébriques comme dans la situation : carrés de sommes.

- Des situations centrées sur l'apprentissage de méthodes, la réflexion stratégique, où DERIVE est censé libérer l'élève de l'exécution des calculs pour permettre ce type de travail, des fonctions spécifiques pouvant être introduites pour favoriser cette centration. La situation de géométrie analytique au collège nous en semble un exemple typique, la deuxième situation de trigonométrie, dans sa seconde phase de résolution d'exercices visait aussi ce type d'utilisation.

Malgré cette diversité des types d'utilisation, malgré le petit nombre d'observations (quatre au collège, cinq au lycée), des régularités transversales semblent se dégager. C'est sur elles que nous centrerons cette synthèse, en revenant aux questions posées au début de la recherche (cf. l'introduction de la deuxième partie du rapport).

### **LES PROBLÈMES LIÉS À LA CONNAISSANCE DU LOGICIEL DERIVE**

Les premières séances observées au collège, ou certaines séances n'utilisant qu'une partie algébrique de l'environnement DERIVE au lycée, montrent l'accessibilité d'un premier niveau d'utilisation de DERIVE. On voit cependant que très vite il faudrait que les élèves s'habituent à manipuler les touches F3 et F4, au moins la touche F3, alors que ce n'est pas le cas, pour ne pas perdre un temps inutile en recopies ou pour faire apparaître sous sa forme d'entrée une expression qui à l'affichage se présente sous une forme différente. Ceci vaut en particulier pour le collège où le passage d'une écriture à l'autre n'est en rien automatisé, comme le montre la première séance observée. On peut aussi constater des difficultés régulières avec certaines commandes algébriques, au collège mais aussi au lycée, par exemple avec la commande de substitution et une incertitude générale sur le rôle exact joué par les commandes de déclaration d'objets, notamment de fonctions.

Dès que l'on rentre dans l'univers graphique, dans l'articulation entre fenêtres, la gestion de DERIVE devient plus complexe. Les observations au collège le montrent, celles au lycée aussi, par exemple la séance de recherche de fonctions avec contraintes où pendant la première séance, beaucoup d'élèves, en dépit des indications données sur fiche par l'enseignante, ne parviennent pas à faire tracer à l'écran rapidement la zone dans laquelle doivent se situer les fonctions cherchées. Cette zone est pourtant limitée par une simple ligne brisée, les points ont été préalablement rentrés dans un fichier, mais il faut effectuer quelques réglages pour bien positionner la zone dans l'écran et visiblement les élèves n'y sont pas à leur aise.

Les expérimentations au lycée où les élèves des classes observées disposaient très majoritairement de calculatrices graphiques montrent que l'apprentissage nécessaire sous DERIVE se heurte ici à un obstacle : le fait que leur calculatrice graphique étant pour eux un objet familier, ils ne sont pas motivés pour s'investir dans l'apprentissage graphique DERIVE. Dans les diverses observations où les représentations graphiques de fonction étaient en jeu, on voyait ainsi les élèves très souvent travailler sous DERIVE pour les calculs algébriques et repasser à leur calculatrice lorsqu'il s'agissait de tracer un graphique, l'interaction des cadres permise par DERIVE n'étant alors plus actualisable. Sans doute et ceci se retrouve dans certaines réponses au questionnaire, les élèves sont-ils plus sensibles aux potentialités graphiques de DERIVE quand ils sont au collège et ne disposent pas pour la plupart encore de calculatrices graphiques.

Il est clair aussi que cet apprentissage et son entretien supposent une utilisation régulière de DERIVE. Il ne semble pas que ce soit le cas pour beaucoup d'élèves aujourd'hui. Dans ces

conditions, il semble difficile de régler vraiment de façon satisfaisante le problème de la familiarisation nécessaire avec les aspects non élémentaires du logiciel. Il est clair en revanche que le problème disparaîtra quand les élèves disposeront de calculatrices équipées d'un SMS au même titre qu'ils disposent d'une calculatrice graphique.

Il existe en revanche un autre problème qui relève de la familiarisation avec DERIVE et est tout aussi important sinon plus, comme le montrent les observations à tous les niveaux. C'est celui d'une certaine familiarité avec le fonctionnement de DERIVE, dans ces décalages avec le fonctionnement en environnement usuel. Nous l'avions sous-estimé au début de cette recherche, nous y avons été sans cesse confrontés et ce, même dans des situations anodines où l'action de commandes simples paraissait par moment complètement arbitraire aux élèves. Nous avons souligné les perturbations créées par l'interprétation et la gestion DERIVE des parenthèses et crochets dans la première séance observée au collège mais aussi dans la deuxième séance de trigonométrie au lycée, par la façon différente dont étaient traitées par simplification et développement des expressions en apparence de même type, dans celle sur les systèmes d'équations au collège. Il semble difficile d'y échapper et cela peut parasiter fortement le travail mathématique de l'élève s'il lie trop l'interprétation de la consigne qui lui est donnée au fonctionnement propre de DERIVE. Nous voudrions souligner l'attention que doit porter l'enseignant à ces problèmes, le tri entre l'important et le secondaire par rapport au projet mathématique, n'étant pas facile aux élèves : ils ne disposent pas de nos références pour interpréter la tâche proposée, les productions DERIVE et restent le plus souvent, comme les observations l'ont montré, collés aux consignes et à l'affichage à l'interface.

#### **LES PROBLÈMES D'ARTICULATION ENTRE LE FONCTIONNEMENT DERIVE ET LE FONCTIONNEMENT PAPIER / CRAYON.**

Les observations sur ce plan ont montré que les problèmes semblaient moins grands que nous n'avions pu le supposer. Les élèves en fait n'hésitent pas, nous semble-t-il, à revenir à un travail en P/C lorsqu'ils en ressentent le besoin, si cela leur semble compatible avec les exigences du contrat didactique. Ils ressentent ainsi moins les contraintes de l'affichage linéaire et séquentiel de DERIVE. Ils n'hésitent pas non plus à faire le ménage dans les écritures DERIVE lorsqu'un exercice est terminé ou lorsque l'écran devient trop encombré. Ils savent aussi aisément remonter dans la liste des expressions pour aller chercher éventuellement hors écran une qui les intéresse.

#### **LES PROBLÈMES DE CENTRATION SUR LA DÉMARCHE, SUR L'ASPECT CONCEPTUEL**

L'utilisation de logiciels comme DERIVE est généralement vue comme favorisant le détachement de l'élève d'un rapport purement technique ou procédural aux mathématiques au profit d'un rapport plus réflexif, plus conceptuel.

DERIVE prenant en charge en effet, efficacement et rapidement les aspects calculatoires ou de tracé graphique du travail mathématique, d'une part l'élève a moins de chance, pense-t-on, de perdre le fil de la résolution en cours, d'autre part le travail qui lui est dévolu est nécessairement un travail qui relève non de l'exécution technique mais de l'organisation, du contrôle, de l'interprétation, un travail donc de nature réflexive, qui le mettant à distance de l'exécution de l'action, centre son activité, à un niveau supérieur, sur la conception de cette action.

La justification peut s'appuyer, à un autre niveau, sur les acquis de certaines recherches didactiques s'appuyant sur une théorie constructiviste de l'apprentissage comme celles initiées

par A.Sfard et Ed Dubinsky, même si celles-ci ne portent pas directement sur l'apprentissage dans un environnement incluant des logiciels de calcul formel. Ces auteurs, en effet, centrent leurs travaux sur la dualité des concepts mathématiques - concepts qui peuvent être vus à la fois comme des processus et des objets (cf. par exemple (Sfard,1992), (Dubinski,1991) et ils ont mis en évidence que :

- pour de très nombreux concepts, les premières connaissances, celles issues de l'action, donnent d'abord naissance à des processus dynamiques,
- la capacité de concevoir ces processus comme des entités en soi, des objets statiques, engageables dans d'autres processus de niveau supérieur est une opération d'intériorisation et d'encapsulation qui est cognitivement complexe,
- un fonctionnement mathématique efficace suppose une bonne flexibilité entre ces deux aspects : processus et objet.

Dans la littérature se référant à ces cadres théoriques, l'utilisation d'environnements informatiques adaptés est vue comme un moyen de favoriser la conceptualisation en aidant la transition du processus à l'objet. Ed Dubinsky écrit par exemple dans l'article déjà cité :

" Il semble par exemple que si un étudiant implémente un processus sur un ordinateur, en utilisant un logiciel qui n'introduit pas de distractions au niveau de la programmation (comme une syntaxe complexe, des constructions non directement reliées à des idées mathématiques...), ceci favorise l'intériorisation du processus par l'étudiant. Si ce même processus, une fois implémenté, peut être traité par le logiciel comme un objet sur lequel des opérations peuvent être effectuées, ceci favorise l'encapsulation du processus en objet<sup>2</sup>".

Les logiciels de calcul formel permettent effectivement ce type de travail, même ceux comme DERIVE dont les possibilités de programmation sont limitées, et ils le permettent à propos de processus qui ne relèvent pas nécessairement du numérique comme par exemple la résolution exacte d'équations et de systèmes<sup>3</sup>.

Que ressort-il des observations que nous avons menées à ce sujet ?

---

<sup>2</sup>Citation originale en anglais.

<sup>3</sup>On peut aussi se référer, comme Monaghan (Monaghan, 1994) à la notion de procept introduite par D.Tall [Gray & Tall, 1993]. Un procept est un objet mental associant un processus, un concept produit par ce processus, au sens précédent, et un symbole qui peut être utilisé pour dénoter aussi bien le processus que le concept ; par exemple  $2x+5x^2$  est une expression symbolique qui peut être aussi bien pensée comme un processus de calcul que comme une entité algébrique substituable à une autre entité dans un calcul. Monaghan fait l'hypothèse que DERIVE, en prenant en charge la mise en oeuvre du processus, peut aider les étudiants à se concentrer sur la composante "objet" ou "produit" du procept dans de nombreux cas (calcul algébrique, résolution de systèmes, calcul matriciel, intégration...). Il souligne néanmoins que l'on manque pour l'instant de théorie pour penser les relations entre procepts et travail avec des logiciels de calcul symbolique.

En fait, que les choses sont plus complexes que ce qui précède ne le laisse supposer. Il semblerait que l'on soit plutôt face à un système didactique soumis à des forces contradictoires :

- la première favorisant comme indiqué un fonctionnement réflexif et conceptuel,
- la seconde favorisant au contraire une atomisation de la résolution en une multiplicité d'actions élémentaires,

l'équilibre résultant entre ces forces contraires dépendant à la fois des caractéristiques de la tâche mais aussi des caractéristiques cognitives des élèves concernés.

Et certes, nous disposons de différents cas d'observation où le déroulement est conforme aux hypothèses faites ci-dessus, au moins partiellement mais ceci n'a rien de systématique.

Nous voudrions revenir, pour illustrer de façon détaillée notre propos, à l'une des premières observations réalisées, présentée dans le rapport intermédiaire, car elle nous semble particulièrement significative. Elle a eu lieu en 1992-93, en classe de seconde. Les élèves avaient, à une séance précédente avec DERIVE, résolu diverses équations, construit une formule générale de résolution de l'équation  $ax+b=0$  puis testé la formule sur un certain nombre d'exemples. La tâche qui leur était proposée pour la séance observée consistait à généraliser cette recherche de formule générale à un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Il s'agissait, à travers cette activité, de les amener à développer un travail réflexif par rapport aux processus particuliers de résolution numérique déjà mis en oeuvre en troisième.

Les hypothèses faites dans l'analyse a priori de la séance sur le rôle potentiel de DERIVE étaient tout à fait conformes à ce qui a été énoncé précédemment.

Qu'est-il ressorti des observations ?

Les élèves se sont investis dans le problème posé et, en dépit des difficultés rencontrées, personne n'a renoncé. Les difficultés purement informatiques rencontrées ont été marginales. Mais, s'il y a eu activité indéniable des élèves, s'il n'y a pas eu blocage informatique, les hypothèses de l'analyse a priori n'en paraissent pas moins a posteriori très "optimistes".

Le problème posé est pour tous les élèves un vrai problème pour lequel ils ne disposent pas de stratégie de résolution dès le départ. Certains mêmes ne disposent pas de stratégie fiable de résolution d'un système numérique. On voit alors apparaître divers phénomènes favorisés par l'économie du milieu DERIVE et qui tendent à s'opposer à la mise en place des fonctionnements attendus : le faible coût des essais DERIVE incite, en l'absence de stratégie, à multiplier les essais en espérant que quelque chose de positif puisse en sortir. Il s'agit là du phénomène que nous avons dénommé "pêche" dans les observations au collège et qui, contrairement à ce que l'on pourrait penser, peut avoir une productivité raisonnable dans cet environnement. Ce faible coût des essais comme la multiplicité des actions a priori possible, font aussi, et ce sera confirmé dans les observations ultérieures, que pour beaucoup d'élèves, la pression à interpréter les feedback est trop faible vis à vis du coût cognitif de cette interprétation. Ils préfèrent dans ces conditions simplement enregistrer la validation négative et essayer autre chose. Il s'ensuit pour certains groupes, un parcours erratique, qui finit par aboutir, suite aux interventions de l'enseignant ou à la diffusion des productions de groupes voisins, sans que l'on ait à aucun moment l'impression que s'est mise en place la distanciation attendue.

L'observation va aussi montrer que la centration sur la démarche peut être perturbée par divers autres facteurs :

- une confiance insuffisante dans les productions DERIVE, qui conduit à se perdre dans des vérifications annexes, phénomène non repéré au collège,
- de simples erreurs de frappe non repérées qui conduisent à des résultats bizarres, ceci étant d'autant plus pénalisant que l'élève ne maîtrise justement pas suffisamment le processus de résolution pour différencier les différents types de productions non conformes à ses attentes,
- des erreurs plus mathématiques liées au non respect de la syntaxe DERIVE, en particulier dans cette situation, de nombreuses erreurs de parenthésage, ou des erreurs dans la compréhension du fonctionnement de la procédure "RESOL" au niveau des variables (entrée de valeurs constantes par exemple !). Il est clair qu'une meilleure appropriation du logiciel, notamment au niveau des commandes de recopie et de substitution aurait pu limiter la fréquence des parasitages dus à ces erreurs, en évitant un certain nombre de réécritures.

De plus, si s'est mis en place à la fin de la séance, un schème de résolution des systèmes bien adapté au fonctionnement DERIVE, comme le suivant<sup>4</sup> :

- |                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"><li>1. résoudre les deux équations en x,</li><li>2. égaliser les expressions trouvées,</li><li>3. résoudre en y,</li><li>4. recommencer en inversant les rôles de x et y,</li></ol> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

il est difficile de savoir quel ancrage conceptuel fonde ce schème. Les difficultés rencontrées par plusieurs groupes, en particulier ceux qui ne parviennent pas à sortir seuls du cercle vicieux de la double résolution en x et en y ou qui, ayant obtenu y par ce même processus, ne savent plus quoi faire pour obtenir x, laissent penser que pour ces élèves, résoudre une équation c'est, simplement, au bout d'un certain nombre de manipulations codifiées, arriver à  $x=$ . On peut penser que le travail mené avec DERIVE dans cette séance, tout en produisant un nouveau schème, n'a pu que renforcer cette vision.

En revanche, l'analyse des observations met en évidence, dans certains groupes, un rôle tout à fait positif de l'utilisation de DERIVE. C'est par exemple le cas pour un groupe, qui dispose d'une stratégie numérique par combinaisons linéaires mais qui, lorsqu'il s'agit de la généraliser, revient à de simples différences d'équations inefficaces. L'enseignant conseille alors aux deux élèves de commencer par traduire en DERIVE leur résolution numérique. Cette traduction, qui ne va visiblement pas de soi mais que le groupe parvient à mener à bien de façon autonome, va provoquer spectaculairement la distanciation souhaitée. Ensuite, la généralisation demandée sera conçue comme une adaptation facile du travail déjà réalisé. On y verra d'ailleurs les deux élèves fonctionner d'abord en papier/crayon et ne passer en DERIVE que lorsqu'elles se retrouveront bloquées par la complexité formelle de l'équation :  $y(eb-fa)=ce-ga$  obtenue en

---

<sup>4</sup>On notera que ce schème, particulièrement économique en commandes DERIVE, n'obligeant pas à aller chercher et à savoir manipuler la commande cachée de substitution, ne correspond précisément à aucune des deux méthodes classiquement enseignées : substitution, combinaison linéaire.

éliminant  $x$  par combinaison linéaire. Elles reproduiront la même démarche mixte pour trouver  $x$ .

Soulignons que le phénomène décrit ici : changement qualitatif permis par la simulation DERIVE d'un processus "connu dans l'action" est tout en fait en accord avec la citation de Dubinsky reproduite plus haut.

Cet exemple, brièvement évoqué, rejoint de manière évidente les résultats des observations menées au niveau collège et attire la vigilance, nous semble-t-il, sur des points dont l'importance dépasse sans aucun doute le cadre de ces quelques observations :

- Quand on déclare qu'en prenant en charge les aspects techniques, l'utilisation de DERIVE décharge l'esprit pour le conceptuel, on considère implicitement que ce fonctionnement conceptuel peut exister indépendamment de l'entrée effective jusqu'à un certain point dans le détail du travail technique. C'est sans doute vrai pour celui qui travaille avec des objets anciens et bien maîtrisés, mais en phase de conceptualisation, l'indépendance des deux niveaux n'a pas de raison d'être : des situations qui prennent en charge complètement le travail technique ou rendent complètement invisibles les aspects procéduraux, risquent de se constituer au contraire en obstacle à la conceptualisation voulue, voire aboutir à la construction de ce que l'on pourrait appeler des pseudo-objets : nommés, étiquetés mais dépourvus de toute la flexibilité nécessaire avec les niveaux procéduraux qui les sous-tendent. Sur ce plan, on voit bien que le travail avec DERIVE, s'il n'est pas soigneusement pensé et adapté aux élèves, peut entretenir l'illusion que les élèves se situent à un niveau de conceptualisation bien plus élevé que leur niveau réel, simplement parce qu'ils utilisent des commandes qui globalisent des processus complexes.

Quand DERIVE est utilisé, non pas comme assistant technique dans un travail mettant en jeu des objets et techniques familiers, mais comme outil permettant d'introduire des notions nouvelles et de favoriser certaines conceptualisations, il importe d'être attentif à ces questions, de ne pas utiliser nécessairement toute la puissance de DERIVE, pour permettre de faire vivre au niveau nécessaire les processus qui sous-tendent la conceptualisation<sup>5</sup>.

- On voit également que si, pour certains élèves, le coût cognitif d'un fonctionnement réflexif et stratégique est ressenti comme élevé, l'économie du fonctionnement avec DERIVE permet divers échappatoires à l'entrée dans un tel fonctionnement, des échappatoires qui ne sont pas nécessairement d'ailleurs moins productifs (si l'on se limite à des critères de réussite externe), compte-tenu des difficultés rencontrées par ces élèves, qu'un engagement dans les fonctionnements attendus. Soulignons que s'ils sont d'une productivité raisonnable, ils en seront d'autant renforcés<sup>6</sup>!

Il semble donc nécessaire, quand on élabore des situations avec DERIVE, de prendre en compte ces caractéristiques pour trouver un équilibre adéquat entre les tendances antagonistes qui seront nécessairement en jeu et, de plus, jouent différemment d'un élève à l'autre.

---

<sup>5</sup>Cette stratégie est plus ou moins explicitement à l'oeuvre dans divers exemples proposés par B.Kutzler (Kutzler, 1994) pour présenter la théorie d'apprentissage par étayage.

<sup>6</sup>En fait, il serait sans doute vain de vouloir réduire à tout prix ce type de fonctionnement : nous-mêmes n'y échappons pas quand nous avons recours à de tels environnements. Ce serait vouloir nier les caractéristiques de l'économie de tels environnements et les spécificités des processus d'adaptation qui s'y développent.

## UNE APPROCHE EXPÉRIMENTALE DES MATHÉMATIQUES

Les idées développées dans ce paragraphe sont loin de ne concerner que l'environnement DERIVE, elles jouent simplement dans cet environnement comme dans beaucoup d'autres environnements logiciels ouverts.

L'utilisation de logiciels comme DERIVE est généralement présentée comme un moyen de faire plus aisément vivre dans l'enseignement des mathématiques, une approche expérimentale de ces dernières, faite d'explorations possibles car peu coûteuses, d'émission de conjectures, de test de ces conjectures... Pour des logiciels comme DERIVE, la possibilité offerte de combiner des traitements numériques (en calcul exact ou approché), algébriques et graphiques en dimension 2 ou 3, contribue bien sûr à renforcer ces potentialités.

Que nous apprennent les observations effectuées à ce niveau ?

Encore une fois que ces potentialités sont réelles mais que leur actualisation requiert un minimum de vigilance. Les observations faites le montrent clairement. Elles attirent la vigilance, nous semble-t-il, sur un certain nombre de points :

Dans la conception de situations visant un travail de type expérimental en mathématiques, en tant qu'enseignants, nous avons généralement tendance à considérer nos élèves comme de "purs sujets mathématiques", en d'autres termes, à les imaginer prêts à rentrer, comme nous, dans le jeu que nous leur proposons, même si l'entrée dans ce jeu est faiblement contrainte par les variables de la situation. En ce sens, les situations construites peuvent se révéler adéquates uniquement à une frange d'élèves culturellement adaptés, les autres parvenant à jouer leur rôle d'élève sans s'engager dans le type de travail demandé.

La démarche expérimentale ne se réduit pas à des explorations suivies de constatations et remarques. On sait bien que, souvent, les activités préconisées par les programmes actuels, en particulier les activités introductrices, sont gérées dans les classes, pour des raisons diverses que nous ne pouvons analyser ici, sous cette forme pseudo-expérimentale. Et il est clair que le travail en environnement informatique ne peut qu'être influencé par ces tendances dominantes et ce, même s'il offre pour développer des activités réellement expérimentales, comme on le voit ici, des potentialités que n'offrent pas les environnements usuels. Il importe donc d'être particulièrement attentif à l'analyse des tâches proposées du point de vue de l'élève, dans la conception de telles activités :

- Où se situe réellement l'approche expérimentale ? Est-elle réellement dévolue à l'élève ou réside-t-elle essentiellement dans le travail de conception de l'enseignant, qui a complètement planifié et organisé cette démarche, ne laissant à l'élève qu'un travail d'exécution ?
- Aide-t-on suffisamment l'élève à s'engager dans la situation de façon réellement expérimentale ? L'engage-t-on en particulier dans des tâches d'anticipation, ou se limite-t-on à demander des remarques, constatations, qui le plus souvent renforcent un fonctionnement "au contrat didactique" (l'élève cherche à deviner ce qu'attend l'enseignant) loin de ce qui est prétendument visé ? Lui fournit-on enfin les moyens de réguler son travail expérimental, notamment via les moyens de validation, de contrôle et les feed-back fournis par l'environnement informatique ?

Il importe en particulier d'être attentif au fait que le fonctionnement avec fiche de travail élève, souvent privilégié dans les environnements informatiques, n'aide pas nécessairement à la dévolution à l'élève d'une activité expérimentale qui, par essence, doit comporter une certaine souplesse et autoriser une part d'initiative de l'acteur de cette démarche.

Enfin, développer une démarche expérimentale n'est pas un but en soi en mathématiques. C'est une forme de travail, parmi d'autres, au service de la construction de connaissances. On ne peut donc faire l'économie de se demander ce que l'on peut attendre en termes de connaissances du travail expérimental effectué par les élèves, en admettant qu'il s'effectue conformément aux attentes, et comment ce travail va s'insérer dans la progression de l'enseignement.

Les activités correspondant aux séances observées sont des activités qui se situent avant tout dans une démarche d'action. Même s'il s'agit d'une action réfléchie, supportée par des raisonnements, l'adaptation de l'élève y est principalement une adaptation en termes d'action. Il va percevoir des régularités, trouver des règles de fonctionnement, résoudre des problèmes, faire des validations pragmatiques à l'aide de DERIVE, mais rien ne l'oblige vraiment dans cette adaptation à chercher les raisons de ces règles et régularités, à les relier explicitement à des propriétés mathématiques. Les recherches menées en environnement informatique, de manière générale, mettent bien en évidence, la force prise par ces adaptations (favorisées par les caractéristiques de ces environnements, notamment au niveau de la manipulation des objets mathématiques en jeu et des interactions élève/tâche) ainsi que leurs limites<sup>7</sup>.

On peut faire l'hypothèse que le travail fourni sera sans grand effet, si au delà de la réussite en termes d'actions, des validations pragmatiques offertes par DERIVE, il ne se prolonge pas à un autre niveau : celui de la recherche de raisons et de preuves, de la transformation des connaissances construites ou transformées dans l'action en savoirs explicites. Dans les observations effectuées, les enseignants ont toujours essayé d'organiser ce travail, le plus souvent dans les phases systématiques de bilan associées aux séances DERIVE, quelquefois à l'intérieur même des séances DERIVE. Si nous insistons cependant sur ce point, c'est parce que, souvent dans la littérature concernant DERIVE, et en particulier les situations de recherche pour les élèves qui y sont présentées, cet aspect nécessaire du travail mathématique, qui ne se situe pas en continuité directe avec les phases de travail expérimental est en quelque sorte oublié, l'accent étant mis sur la découverte assistée par DERIVE et fort peu sur les questions liées au statut de ces découvertes en termes de connaissance mathématique, sur les questions liées à la transformation de ces connaissances acquises dans l'action en savoirs.

Soulignons aussi, comme le montre par exemple clairement la première observation de trigonométrie, que passer des phases d'action et validation pragmatique utilisant DERIVE à des phases de recherche de raisons et de preuves, d'analyse des résultats obtenus, ne va pas de soi. Il n'y a pas de continuité directe entre les contrats didactiques relatifs à ces deux types d'activité mathématique, le passage de l'une à l'autre exige une reprise en mains de la classe par l'enseignant, une négociation du changement de tâche, une nouvelle dévolution. Il apparaît clairement dans les observations qu'il ne peut être simplement induit pour la grande majorité des élèves par l'ajout d'une question dans une fiche de travail.

---

<sup>7</sup>La thèse d'A.Dagher [Dagher, 1993] par exemple montre, dans le cas d'articulation entre représentations algébriques et graphiques de fonctions polynômes du second degré, comment les caractéristiques du logiciel utilisé induisent la construction perceptive de schèmes efficaces pour l'environnement, mettant en jeu l'interprétation algébrique de l'ouverture d'une parabole, sans que ces schèmes soient nécessairement ancrées sur des invariants cognitifs permettant dans un environnement papier/crayon de réussir la tâche suivante : plusieurs paraboles  $P_i$  d'équation  $aix^2+bix+ci$  étant tracées dans un même repère, ordonner les coefficients  $a_i$  correspondants.

Tout ce qui précède nous fait toucher du doigt les limites méthodologiques de cette recherche ainsi que des questions didactiques plus générales de viabilité de l'expérimental dans l'enseignement actuel des mathématiques. Nous avons choisi, dans ce travail d'approche, de privilégier la diversité au niveau des observations. Ceci nous a conduits à observer des situations isolées. Comme nous l'écrivions dans l'analyse a posteriori de la séance de factorisation de  $X^n-1$ , le temps de développement d'une réelle démarche expérimentale n'est pas généralement celui-là et, de fait, en forçant sa condensation sur une séance d'enseignement, nous nous mettons quasiment dans l'impossibilité d'observer autre chose que des ersatz didactiques de cette démarche. Il n'en demeure pas moins que ces contraintes temporelles hostiles au déploiement de démarches expérimentales, l'enseignant les vit chaque jour dans sa classe. Les dérives pseudo-expérimentales qui sont le lot commun de l'enseignement actuel tendent à montrer que cacher ou minimiser le prix à payer pour arriver à certains moments à les contourner n'est pas une stratégie efficace, même si, implicitement c'est celle sous-jacente à la plupart des manuels et documents d'enseignement.

### **STRATÉGIES FORMELLES DE DERIVE, STRATÉGIES FAVORISÉES PAR DERIVE ET STRATÉGIES VISÉES PAR L'ENSEIGNEMENT**

Nous voudrions aborder sous ce titre deux points qui nous semblent maintenant d'autant plus importants qu'ils ne faisaient pas partie des directions d'analyse définies au début de la recherche et qu'ils se sont imposés à nous progressivement, au fil des expérimentations : d'une part, celui des spécificités du fonctionnement formel de DERIVE et des problèmes éventuels posés par son opacité pour l'utilisateur, d'autre part, celui des techniques et stratégies de résolution favorisées par l'utilisation de DERIVE et des décalages existant éventuellement entre ces dernières et celles dont le développement est visé par l'enseignement au niveau considéré. Nous traiterons simultanément ces deux points car l'analyse est ici, pour ce qui est des situations observées, tout particulièrement imbriquée. Nous nous référerons plus particulièrement à deux situations observées au niveau lycée, celle concernant les factorisations de polynômes et la première observation concernant la trigonométrie. Ces deux exemples attirent nous semble-t-il notre vigilance d'enseignant sur divers points.

Elles l'attirent d'abord sur les stratégies de calcul formel utilisées par DERIVE, sur les effets possibles de décalages entre ces stratégies et celles qui sont accessibles aux élèves ou que l'enseignement, à un niveau donné, veut mettre en place ainsi que sur l'opacité pour l'élève utilisateur des étapes intermédiaires des calculs. Décalages, opacité ne sont pas en eux-mêmes des éléments à mettre au passif de DERIVE, ce sont même, nous avons essayé de le montrer dans l'analyse a posteriori de ces observations, des variables sur lesquelles on peut jouer pour susciter questionnement et activité mathématique des élèves. Ainsi, on peut jouer de l'opacité de DERIVE pour construire des situations où les données issues de DERIVE apparaissent comme un « réel » qui serait à modéliser, à mathématiser, où le jeu engagé va être de trouver les moyens de reproduire à volonté certains phénomènes DERIVE. Ainsi, on peut jouer des décalages pour susciter des conflits cognitifs et susciter une activité mathématique visant à les résoudre. Mais les deux observations citées montrent aussi que l'organisation et la gestion efficace de tels jeux ne va pas de soi. Par exemple, lorsque nous constatons personnellement un décalage, nous ressentons immédiatement le besoin de lui donner sens, de le comprendre et nous trouvons ainsi irrémédiablement engagés dans un travail où, considérant notre environnement mathématique usuel comme celui a priori légitime, il s'agit d'expliquer par rapport à lui le fonctionnement du logiciel, de statuer sur la validité de ses productions. Il n'en est pas de même, semble-t-il, pour la majorité des élèves. D'une part, la juxtaposition de réponses DERIVE et P/C apparemment non cohérentes les affecte souvent peu, comme s'il y

avait là deux mondes dont la mise en cohérence n'est pas essentielle, d'autre part ils ne vivent pas comme nous les rapports de légitimité entre environnement DERIVE et environnement P/C. Ceci n'a rien d'étonnant si l'on prend en compte le degré de confiance qu'ils peuvent attribuer raisonnablement à leurs propres productions. Tout ceci fait que ce jeu est trop complexe pour pouvoir être improvisé efficacement, en temps réel, dans le feu de la gestion d'une situation. Sa prévision doit trouver sa place dans la conception même des situations.

Elle l'attire ensuite sur le fait que les élèves ne sont pas et ne peuvent pas, dans les conditions d'utilisation actuelles, devenir des spécialistes de DERIVE, même s'ils disposent de façon permanente de DERIVE pendant plusieurs mois comme c'était le cas dans les deux classes que nous avons évoquées dans ce paragraphe. De plus, ils ne disposent pas des références mathématiques qui nous aident à interpréter les productions de DERIVE, à piloter l'aide que nous lui demandons dans la résolution d'un problème donné, à trouver les moyens de faire apparaître des étapes intermédiaires cachées par DERIVE. Ceci apparaît de façon manifeste lors de la séance de trigonométrie, dans le désarroi des élèves face à l'inaction apparente de DERIVE dans la majorité des modes disponibles puis la difficulté rencontrée à exploiter DERIVE de façon pertinente par rapport aux exigences du contrat didactique : rendre, comme dans les conditions du baccalauréat, une résolution qui, même si elle est obtenue grâce à DERIVE, n'en manifeste pas la trace.

Dans la préparation d'une séance DERIVE et l'anticipation des comportements possibles des élèves, comme nous avons tendance à voir en l'élève un sujet mathématique, nous avons naturellement tendance à oublier à quel point cette double expertise mathématique et DERIVE sépare notre fonctionnement du sien, au niveau du pilotage de DERIVE, du contrôle et de l'interprétation de ses productions. La convivialité réelle de l'accès à DERIVE tend de plus à nous faire sous-estimer le rôle joué par l'expertise DERIVE dans telle ou telle résolution. Tout ceci contribue sans aucun doute de façon non négligeable à l'optimisme démesuré de la plupart des analyses a priori effectuées<sup>8</sup>.

Une situation comme la situation trigonométrique nous en montre les effets possibles. Elle nous montre aussi que, pour favoriser un fonctionnement cohérent et réfléchi de l'élève, il peut s'avérer nécessaire de refermer l'espace de liberté trop grand de DERIVE (par exemple en fixant des choix d'options), faute de voir, à l'inverse de ce que l'on souhaite, DERIVE induire des comportements de recherche où l'élève, face à un monde pour lui incontrôlable, fonctionne simplement au hasard.

### **EN CONCLUSION**

Les données fournies par cette recherche, les pistes de réflexion qu'elle suscite, nous semblent d'intérêt pour l'enseignant. Elles concourent à montrer que les potentialités attribuées a priori à DERIVE pour l'apprentissage et le travail mathématique sont à la fois des potentialités réelles et des potentialités qu'il n'est pas aisé d'actualiser pour un nombre important d'élèves. Elles

---

<sup>8</sup> Ceci nous montre aussi le peu de crédibilité qu'il faut accorder à un certain nombre d'affirmations comme : « Avec DERIVE, on peut faire un sujet de baccalauréat sans presque rien savoir » qui tendent à se répandre. Qu'un mathématicien ou un enseignant familier avec le produit ait l'impression de court-circuiter son travail mathématique usuel quand il dispose d'un tel outil pour résoudre un problème de bac ne nous informe que peu sur ce qui peut être en jeu pour un élève résolvant le problème avec le même outil, sur les aides et les difficultés que cet outil peut engendrer.

nous montrent que l'actualisation de ces potentialités passe par une réflexion approfondie sur le fonctionnement de DERIVE, ses cohérences et incohérences avec les environnements mathématiques familiers de l'élève, qu'on veuille éviter les incohérences ou, au contraire, dans certains cas, les exploiter. Elles nous montrent qu'en dépit de sa convivialité, nous devons prêter une attention particulière à la familiarité nécessaire avec ce logiciel pour que, dans une situation donnée, le travail de l'élève soit vraiment centré sur les mathématiques et ne pas minimiser les problèmes à ce niveau, surtout dans les conditions actuelles majoritaires d'utilisation. Elles nous montrent aussi qu'entrer, grâce à DERIVE dans des fonctionnements mathématiques plus intéressants, n'est pas garanti par la richesse de la situation mathématique elle-même, mais avant tout par la façon dont y est organisé le travail de l'élève. Comme nous l'avons dit, dans le fonctionnement avec un environnement comme DERIVE, deux tendances antagonistes s'affrontent : une permettant effectivement les fonctionnements mathématiques souhaités, l'autre les réduisant à des successions d'actions sans signification ni cohérence globale particulière. C'est nous qui pouvons faire basculer l'équilibre d'un côté ou de l'autre.

Ceci étant, il nous semble que le maillon essentiel, si l'on veut faire bouger les choses est la formation des enseignants et des formateurs d'enseignants. C'est pourquoi nous souhaiterions prolonger cette recherche en construisant à partir de la masse des données recueillies, des documents pour la formation incluant, pour chaque situation, analyse a priori de l'enseignant et questions posées à partir de cette analyse a priori, des protocoles à différents niveaux de lissage, comme nous l'avons fait dans ce rapport, des analyses de ces protocoles et des pistes d'exploitation en formation.



## APPENDICE BIBLIOGRAPHIQUE

Au début de cette recherche, nous avons mené une étude bibliographique qui a été présentée dans le rapport intermédiaire. Nous nous bornerons ici à en reproduire les conclusions, résultant de l'étude de 28 articles extraits de deux sources principales : les actes de l'École Internationale sur les Aspects Didactiques du Calcul Symbolique qui s'est tenue à Krems en Autriche en 1992, actes intitulés : « Enseigner les mathématiques avec DERIVE » d'une part, et les actes du Colloque « Technology in Mathematics Teaching » qui s'est tenu à Birmingham en 1993 d'autre part. Nous renvoyons le lecteur au rapport intermédiaire pour des informations plus détaillées sur cette partie du travail.

La conclusion est organisée autour des trois fonctionnalités essentielles des SMS mentionnées dans les travaux étudiés :

- les SMS, appuis pour la compréhension en mathématiques,
- les SMS, outils de découverte,
- les SMS, outils d'enseignement

et du rôle didactique des caractéristiques propres des SMS.

### LES SMS, OUTILS DE CALCUL ET INSTRUMENTS DE COMPRÉHENSION

La plupart des articles insistent, d'une manière ou d'une autre, sur l'aide que peuvent apporter les SMS à la "compréhension", à "l'intuition" des notions mathématiques, par le fait qu'ils déchargent l'élève des calculs fastidieux (*tedious* : "assommants"). Certains auteurs formulent cette caractéristique ainsi : à l'élève, les processus intellectuels de haut niveau, à la machine, ceux de bas niveau. En général, les termes "compréhension", "intuition" ou "processus intellectuels de haut niveau" sont censés aller de soi et être immédiatement compris du lecteur. Ces termes font référence à l'expérience de celui-ci en tant qu'enseignant, bien plus qu'à un cadre théorique, presque toujours, soit absent, soit limité à quelques rapides références (Piaget, Papert...).

On est en particulier dépourvu d'indications précises sur la *manière* dont les SMS peuvent influencer sur la "compréhension" des élèves (quelle que soit par ailleurs l'acception qu'on donne à ce mot). On affirme que les SMS peuvent permettre de travailler sur des situations "riches", plus complexes, plus "réalistes" ou plus difficiles d'abord, que celles qui sont usuellement apprêtées au préalable, voir affadies, pour l'apprentissage. De nombreux exemples sont donnés, dans des domaines mathématiques où les calculs à la main seraient d'une difficulté rédhibitoire (équations différentielles non linéaires, développement en série de Taylor à des ordres élevés, manipulations de "grosses" matrices) ou pour des modélisations de systèmes physiques "réalistes" dont les modèles mathématiques sont techniquement ardu. Cette remarque rejoint la problématique de la modélisation, et par certains aspects, celle dite du "Problem Solving", que l'on retrouvera plus bas.

### LES SYSTÈMES DE CALCUL SYMBOLIQUE, OUTILS DE DÉCOUVERTE

Immédiatement après la facilité calculatoire, en rapport avec le fait qu'elle rend peu onéreux les essais et les expériences, vient la thématique du rôle des SMS, pour la découverte de nouvelles propriétés. Se rattachent à cette problématique les notions de "reconnaissance de

forme" (pour identifier une propriété commune à de nombreux exemples construits par les élèves avec l'aide du système), de conjecture, d'interprétation d'un résultat. Certains auteurs insistent sur la capacité des SMS à représenter ainsi, par la multiplication d'exemples, des énoncés d'ordre général. D'autres remarquent que cet usage pédagogique va à rebours de l'usage des professionnels qui n'utilisent les systèmes que pour explorer des objets très particuliers.

La facilité à explorer de nombreuses voies est souvent supposée aller de pair avec un apprentissage facilité des connaissances stratégiques. Dans le même ordre d'idées, elle va avec la facilité à faire des contrôles, des vérifications.

Il faut souligner cependant que divers articles évoquent les difficultés que rencontrent les élèves et étudiants à mettre en question les résultats de la machine ou à "estimer" les résultats qu'elle produit (ce qui rejoint le registre de l'interprétation).

### **LES SYSTÈMES DE CALCUL SYMBOLIQUE, OUTILS D'ENSEIGNEMENT**

Un certain nombre d'auteurs notent que ces caractéristiques des SMS influent sur ce qu'on doit, ou qu'on ne peut plus, enseigner. Cela peut porter sur le contenu, un certain nombre d'exercices "bateaux" devenant sans objet. Cela peut également porter sur l'organisation de la situation d'enseignement, en valorisant les interactions entre pairs, les "discussions mathématiques", la construction d'argumentations. Nombre d'auteurs évoquent plus vaguement "l'autonomie" des élèves ou la possibilité pour chacun d'apprendre "à son rythme". Un seul article aborde la question de la complémentarité des fonctionnements dans un système de mathématiques symboliques et dans l'environnement usuel papier / crayon.

Quelques articles voient dans la possibilité de changer de cadre de fonctionnement et de registre de représentation (nous retraduisons ici, en des termes plus familiers au lecteur français, ce qui apparaît dans les textes, formulé en général dans d'autres termes) une justification des vertus pédagogiques des systèmes de mathématiques symboliques. C'est le cas, en particulier, de la fonctionnalité de représentation graphique qui est perçue presque unanimement comme très importante. De même, la notion de "problem solving" sert parfois de justification théorique à l'intérêt des applications présentées, mais aucun des articles recensés ici n'analyse finement cette articulation. Cette absence peut être un artefact lié à notre échantillon.

Certains auteurs insistent de manière complémentaire sur les pré requis, en termes de connaissances mathématiques ou informatiques, ou en terme de représentation de l'outil informatique et de ses usages, nécessaires pour tirer profit de l'utilisation de SMS.

D'autres insistent plutôt sur l'influence de l'usage de ces systèmes sur l'évaluation. Ainsi est-il remarqué qu'il est bien plus aisé d'évaluer des performances dans des tâches de "bas niveau", que des compétences de "haut niveau".

Ces observations, toutefois, ne sont pas universelles, et un certain nombre d'articles présentent des propositions de séquences d'enseignement, voire des modules logiciels consacrés à l'étude d'un thème, sans sembler se préoccuper le moins du monde de l'insertion de ces séquences dans une progression quelconque ni des problèmes d'évaluation que cela pourrait poser.

## LE RÔLE DIDACTIQUE DES CARACTÉRISTIQUES PROPRES DES SYSTÈMES DE CALCUL SYMBOLIQUE

Dans l'ensemble, relativement peu d'articles insistent sur les effets, positifs ou négatifs, des caractéristiques propres de fonctionnement des SMS pour l'apprentissage. Cela concerne aussi bien l'interactivité et la vitesse, que les méthodes de résolution formelle utilisées par le logiciel, les contraintes morpho-syntaxiques à l'entrée (forme des écritures pour les communiquer à la machine) ou à la sortie (présentation "brute" ou via des traitements de formules mathématiques du type L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, format des nombres). De nombreux articles vantent la "simplicité" ou la "facilité" à utiliser tel ou tel logiciel, d'autres pointent des erreurs ergonomiques. Le fait qu'un calcul symbolique est un calcul *exact* (contrairement au calcul numérique usuel), l'usage didactique de l'exploration des limites du système ou la possibilité de programmation sous-jacente ne sont abordés que marginalement.

### DEUX ANS APRÈS, LE PAYSAGE A SENSIBLEMENT ÉVOLUÉ.

Ces conclusions étaient celles que nous tirions de nos lectures en 1993. Les publications récentes sur DERIVE (et les SMS de manière générale) commencent à présenter des caractéristiques différentes de celles soulignées ci-dessus. Ainsi, à côté des articles « classiques » décrivant de possibles changements curriculaires, proposant des activités possibles avec ces logiciels ou visant à mettre en évidence la supériorité d'enseignements intégrant DERIVE, par comparaison de performances globales entre groupes expérimentaux et groupes témoins, on voit se développer des articles correspondant :

- à un travail de théorisation, qu'il s'agisse de théorisations locales comme celle formulée en termes de « WhiteBox - Black Box » pour l'analyse de laquelle nous renvoyons au mémoire de DEA de J.F.Canet (Canet, 1994) ou d'insertion avec d'éventuelles adaptations dans des cadres théoriques existants, comme dans le cas de la théorie du « scaffolding » développée par B.Kutzler (Kutzler, 1994), (Repo, 1994),
- à des observations fines d'élèves aidant à mieux comprendre les fonctionnements possibles des élèves dans de tels environnements et conduisant généralement à remettre en question, au moins partiellement, les affirmations et hypothèses par trop enthousiastes de la première période, comme par exemple les travaux de Monaghan (Monaghan, 1994) et Drijvers (Drijvers, 1994).

Les trois premiers numéros de la revue « The International DERIVE Journal » parus en 1994 illustrent bien ce phénomène.

Nous ne présenterons pas, dans ce rapport, une analyse détaillée de cette évolution des travaux et articles et ce d'autant plus que, à la suite à la Conférence Internationale DERIVE qui s'est tenue à Honolulu en juillet 1995, un travail systématique de recensement, classification et analyse des travaux publiés dans ce domaine a été entrepris, travail qui devrait donner lieu dans des délais raisonnables à un chapitre dans l'ouvrage collectif qui résultera de cette Conférence.

## Références :

Abboud-Blanchard M. (1994) : *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire des mathématiques : symptômes d'un malaise*, Doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot.

Artigue M. (1995a) : Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques, *Repères IREM*, n°19, 77-108.

Artigue M. (1995b) : Une approche didactique de l'intégration des EIAO à l'enseignement in *Environnements Interactifs d'Apprentissage avec l'Ordinateur*, tome 2 D.Guin, J.F.Nicaud & D.Py (eds), 17-28, Eyrolles, Paris.

Artigue M., Drouhard J.P., Lagrange J.B. (1993) : *Acquisition de connaissances concernant l'impact de l'intégration de logiciels de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques sur les représentations et pratiques mathématiques des élèves de l'enseignement secondaire*, IREM, Université Paris 7.

Baïlleul M. (1994) : Analyse statistique implicative : variables modales et contribution des sujets. Application à la modélisation de l'enseignant dans le système didactique. *Thèse de l'Université Rennes 1*.

Balacheff N. (1994) : Didactique et intelligence artificielle, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14, n°1.2, 9-42.

Böhm J. (ed.) (1992) : *Teaching Mathematics with DERIVE*, Chartwell Bratt.

Brousseau G. (1988) : Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9.3, 309-336.

Canet J.F. (1994) : *Exemple d'utilisation d'un système de mathématique symbolique*, DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université de Montpellier 2.

Chevallard Y. (1992) : Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques, in *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques*, Nouvelle Encyclopédie Diderot (ed. B.Cornu), Paris, 183-203.

Dagher A. (1993) : *Environnement informatique et apprentissage de l'articulation entre registres graphique et algébrique de représentation des fonctions*, Doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot.

Drouhard J.Ph & Paquelier Y. (1992) : *Communication in Mathematical Discussions : a Tetrahedral Model*, communication présentée au Working Group 7 du Congrès International ICME-7, Québec.

Dubinsky Ed. (1991) : Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in *Advanced Mathematical Thinking*, D.Tall (ed.), Kluwer Academic Publishers, 95-123.

Dubinsky Ed, Tall D. (1991) : Advanced mathematical thinking and the Computer, in *Advanced Mathematical Thinking*, D.Tall (ed.), Kluwer Academic Publishers, 231-250.

Duval R. (1993) : Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Sciences Cognitives et Didactique*, vol.5, IREM de Strasbourg.

Gras R (1992) : L'analyse des données : une méthodologie de traitement de questions de didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12, n°1, 59-72.

- Gray E., Tall D.O. (1993) : Success and Failure in Mathematics : the flexible meaning of symbols as process and concept, *Mathematics Teaching*, 142, 6-10.
- Hirlimann A. (ed.) (1994) : *Enseignement des mathématiques et logiciels de calcul formel*, Ministère de l'Education Nationale, DITEN B2.
- Hunter M. & al. (1995) : Using a Computer Algebra System with 14-15 year old Students, in *The technology in Mathematics Teaching*, L.Burton et B.Jaworski (eds.), Chartwell-Bratt.
- Juge G. (ed.) (1994) : *Les outils du calcul formel dans l'enseignement des mathématiques*, IREM de Basse Normandie.
- Karian A. (ed.) (1992) : *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education*, MAA Notes N°24, The Mathematical Association of America.
- Kieran C. (1992) : The Learning and Teaching of School Algebra, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, D.A. Grouws (ed.). New York, Macmillan.
- Kutzler B. (1994) : DERIVE, the Future of Teaching Mathematics, *International DERIVE Journal*, vol. I.1. , 37-48.
- Lagrange J.B. (1994) : DERIVE, un logiciel de calcul formel dans la classe de mathématiques, *Fascicule de Didactique des Mathématiques*, Année 1994, R.Gras (ed.), IRMAR, Université de Rennes I.
- Lagrange J.B. (1995) : L'analyse implicative dans le cas de variables numériques. Réflexions à partir d'un travail didactique sur les opinions d'élèves utilisateurs de DERIVE. *Actes du colloque "Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques"*, R.Gras (ed.), 217-230 Université de Rennes I.
- Lagrange J.B. & Drouhard J.P. (1995) : L'intégration du système de mathématiques symbolique DERIVE. Une évaluation didactique auprès d'élèves de 14 à 19 ans. *Environnements Interactifs d'Apprentissage avec l'Ordinateur*, tome 2 D.Guin, J.F.Nicaud & D.Py (eds.), 327-338, Eyrolles, Paris.
- Monaghan J. (1994) : On the successful use of DERIVE, *The International Derive Journal*, Vol.1, N°1, 49-56.
- Repo S. (1994) : Understanding and Reflective Abstraction : Learning the Concept of derivative in the Computer Environment, *The International Derive Journal*, Vol.1, N°1, 97-113.
- Sfard A. (1991) : On the dual nature of mathematical conceptions : reflexion on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, N°22, 1-36.
- Trouche L. (1994) : Analyse et outils graphiques au lycée, in : *Les outils du calcul formel dans l'enseignement des mathématiques*, 99-112, IREM de Basse Normandie.



# SOMMAIRE

|                                                                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>INTRODUCTION</b>                                                                                         | <b>3</b>  |
| <b>PREMIÈRE PARTIE LE RECUEIL D'INFORMATION PAR QUESTIONNAIRES</b>                                          | <b>5</b>  |
| <b>I. INTRODUCTION</b>                                                                                      |           |
| I.1 LE QUESTIONNAIRE ÉLÈVES                                                                                 | 5         |
| I.2 LE QUESTIONNAIRE PROFESSEURS                                                                            | 5         |
| I.3 LES ENSEIGNANTS CONTACTÉS ET LES RÉPONSES OBTENUES                                                      | 5         |
| <b>II. RÉSULTATS DE LA PREMIÈRE VERSION DU QUESTIONNAIRE ÉLÈVES</b>                                         |           |
| II.1 TEXTE DU QUESTIONNAIRE                                                                                 | 7         |
| II.2 ANALYSE DES RÉPONSES                                                                                   | 10        |
| II.3 LE DÉPOUILLEMENT DES QUESTIONS FERMÉES À L'AIDE DE L'ANALYSE IMPLICATIVE                               | 12        |
| <b>III. PRÉSENTATION DE LA SECONDE VERSION DU QUESTIONNAIRE ÉLÈVE</b>                                       | <b>14</b> |
| <b>IV. DÉPOUILLEMENT DE LA SECONDE VERSION DU QUESTIONNAIRE ÉLÈVE</b>                                       |           |
| IV.1 CLASSES AYANT RÉPONDU AU QUESTIONNAIRE                                                                 | 19        |
| IV.2 ENVIRONNEMENT TECHNIQUE DE L'ÉLÈVE (QUESTIONS 4 À 14)                                                  | 20        |
| IV.3 RENCONTRE AVEC DERIVE ET FAMILIARISATION (QUESTIONS 15 À 29)                                           | 23        |
| IV.4 PERCEPTION DES POSSIBILITÉS DE DERIVE ET DE SES LIMITES (QUESTIONS 33 ET 34)                           | 26        |
| IV.5 MISE EN ÉVIDENCE DES REPRÉSENTATIONS (QUESTIONS 40 À 56)                                               | 33        |
| <b>V. ETUDE DES REPRESENTATIONS</b>                                                                         |           |
| V.1 INFLUENCE DU NIVEAU DE CLASSE                                                                           | 40        |
| V.2 INFLUENCE DE LA DURÉE D'UTILISATION DE DERIVE                                                           | 41        |
| V.3 ETUDE D'ELEVES EN FONCTION DE LEUR ADHÉSION À UNE REPRÉSENTATION                                        | 42        |
| <b>VI. LE QUESTIONNAIRE "PROFESSEURS"</b>                                                                   |           |
| VI.1 LE TEXTE DU QUESTIONNAIRE                                                                              | 49        |
| VI.2 BUTS DE L'ÉTUDE                                                                                        | 52        |
| VI.3 MODES D'UTILISATION DE DERIVE                                                                          | 52        |
| VI.4 ACTIVITÉS CONDUITES AVEC DERIVE : CONTENUS, SPÉCIFICITÉS, INSATISFACTIONS.                             | 55        |
| VI.5 TYPES D'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE ANTICIPÉE PAR LES PROFESSEURS. ASPECTS POSITIFS CONSTATÉS ET DÉCEPTIONS. | 58        |
| <b>VII. RÉSULTATS PRINCIPAUX</b>                                                                            |           |
| VII.1 APPORTS DU QUESTIONNAIRE ÉLÈVE                                                                        | 80        |
| VII.2 APPORTS DU QUESTIONNAIRE "PROFESSEURS"                                                                | 81        |
| VII.3 REMARQUES DE SYNTHÈSE                                                                                 | 82        |
| <b>DEUXIEME PARTIE OBSERVATION DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT AVEC DERIVE</b>                                 | <b>83</b> |
| <b>I. INTRODUCTION</b>                                                                                      |           |
| <b>II. LES QUESTIONS A L'ETUDE</b>                                                                          |           |
| II.1 LE ROLE JOUE PAR LA FAMILIARITE AVEC LE LOGICIEL DERIVE                                                | 85        |
| II.2 DERIVE ET LA CALCULATRICE                                                                              | 85        |
| II.3 L'ARTICULATION ENTRE L'ERGONOMIE DE DERIVE ET LE FONCTIONNEMENT PAPIER / CRAYON                        | 86        |
| II.4 LA CENTRATION SUR LA DÉMARCHE, SUR LES ASPECTS CONCEPTUELS                                             | 86        |
| II.5 LA DIMENSION EXPÉRIMENTALE ET LES QUESTIONS DE NIVEAU D'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE                          | 86        |
| II.6 LE RÔLE DE DERIVE DANS LE STATUT ET LA MANIPULATION DES OBJETS ALGÈBRIQUES                             | 87        |

|                                                                 |            |
|-----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>III. METHODOLOGIE DEVELOPPEE POUR L'OBSERVATION</b>          |            |
| III.1 LA PRÉPARATION DE L'OBSERVATION                           | 88         |
| III.2 L'OBSERVATION                                             | 90         |
| III.3 L'ENTRETIEN APRÈS OBSERVATION                             | 91         |
| III.4 PROBLÈMES MÉTHODOLOGIQUES RENCONTRÉS                      | 91         |
| <b>IV. OBSERVATIONS AU COLLEGE</b>                              |            |
| IV.1 PARENTHESESAGES - FRACTIONS                                | 93         |
| IV.2 GENERALISATION D'IDENTITES REMARQUABLES : CARRES DE SOMMES | 107        |
| IV.3 GEOMETRIE ANALYTIQUE                                       | 119        |
| IV.4 RÉOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS.                         | 134        |
| <b>V. OBSERVATIONS AU LYCEE</b>                                 |            |
| V.1 FACTORISATION DE POLYNÔMES                                  | 148        |
| V.2 RECHERCHE DE FONCTIONS SOUS CONTRAINTES                     | 162        |
| V.3 TRIGONOMETRIE 1                                             | 210        |
| V.4 TRIGONOMETRIE 2                                             | 244        |
| <b>SYNTHESE ET CONCLUSIONS</b>                                  | <b>273</b> |
| <b>APPENDICE BIBLIOGRAPHIQUE</b>                                | <b>287</b> |

**Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,**

**Vous pouvez soit :**

**Consulter notre site WEB**

**<http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html>**

**Demander notre catalogue en écrivant à**

**IREM Université Paris 7**

**Case 7018**

**2 place Jussieu**

**75251 Paris cedex 05**

**Editeur : IREM**  
**Université PARIS 7-Denis Diderot**  
**Directeur responsable de la**  
**publication : R. CORI**  
**Case 7018 - 2 Place Jussieu**  
**75251 PARIS Cedex 05**  
**Dépôt légal : 1995**  
**ISBN : 2-86612-121-X**