INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 10

LORENZO MASCHERONI

Problèmes pour les arpenteurs

UNIVERSITE PARIS VII
DENIS DIDEROT

Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 10

LORENZO MASCHERONI

Problèmes pour les arpenteurs

Lorenzo MASCHERONI

né près de Bergame le 13 mai 1750, mort à Paris le 14 juillet 1800.

Il entreprend des études littéraires au séminaire de Bergame où il est ordonné en 1767. Dès l' âge de 20 ans il obtient un poste de professeur de réthorique puis, quelques années plus tard, une chaire de philosophie dans cette même cité. Il découvre alors les mathématiques qu'il introduit dans son enseignement déjà ouvert à la métaphysique, la physique et la logique (1778). A partir de 1786 il exerce à l'université de Pavie dont il devient le recteur en 1789 et par la suite membre des académies de Mantoue et de Padoue.

Lors de la première campagne d'Italie, Bonaparte découvre ce personnage aux nombreuses facettes. Il le fait connaître et le fait nommer membre de la commission destinée à établir un nouveau système de poids et mesures. A cette fin, Mascheroni vient à Paris en 1798 mais, terrassé par la maladie, il ne pourra pas revenir dans son pays.

Les littéraires retiennent surtout de lui le poète : Invito a Lesbia Cidonia 1793
In morte Bordœ, viri celeberrimi, elogia, Paris -1799
sans oublier la dédicace en vers de la géométrie du compas pour Napoléon.

Les politiques évoquent son action pour réaliser la République Cisalpine. Il se montra le partisan des changements que l'arrivée des Français occasionna dans le système politique de l'Italie. Il fut élu député.

Les mathématiciens pensent à ses "Notes sur le calcul différentiel d' Euler" où figure le calcul des 32 premières décimales de la constante d'Euler, Pavie - 1790
ses Nouvelles recherches sur l'équilibre des voûtes, en italien, Bergame -1785
et sa Méthode pour la mesure des polygones plans - 1787 (petit mémoire extrait des additions au cours de mathématiques de Bossut).

Cependant c'est la "géométrie du compas" (en italien, Pavie -1797) qui le rend célèbre. Bonaparte le découvre, prend plaisir à "coller" ses collègues de l'Institut grâce à cet ouvrage. "*Nous attendions tout de vous, Général, sauf des leçons de géométrie.*" s'exprime Laplace. Il s'empresse de faire traduire et éditer l'ouvrage en Français (Paris -1798). Dans son "Rapport à l'Empereur sur les progrès des sciences depuis 1789" Delambre, écrira en 1808 : "*La géométrie ancienne n'admettoit dans ces démonstrations que ce qui peut s'exécuter avec la règle et le compas. Mascheroni,* *plus sévère encore, voulut se passer de la règle. On a lieu d'être étonné du grand nombre de propositions nouvelles et piquantes qu'il a su trouver dans un sujet en apparence épuisé. Ses principaux théorèmes avoient été apportés en France avec le traité de Campo-Formio, par le vainqueur et le pacificateur de l'Italie. On désira connoître l'ouvrage entier, et bientôt il en parut une traduction Françoise."*

Mais qu'en est-il de "Problemi per gli Agrimensori con varie solutioni" (Pavie - 1793) ?
Sa traduction sous le titre de Problèmes pour les arpenteurs (1803), que nous reproduisons, est de nos jours peu connue. Ce livre est rarement cité dans les biographies. Cependant ses contemporains reconnaissent les aspects novateurs de son auteur comme en témoigne encore Delambre "*...un système de propositions aussi considérable que nouveau. Celles qui regardent la division du cercle, méritent surtout d'être remarquées, parce qu'elles pourroient avoir des applications utiles dans la construction des instrumens de mathématiques et d'astronomie.*" (Rapport à l'Empereur ... 1808)

Cet ouvrage est également mentionné comme ouvrage de référence aux côtés de la "Perspective" de l'illustre Lambert, des "Récréations mathématiques" de Montucla et de "Solutions peu connues de divers problèmes de géométrie" de Servois, dans "Un million de faits", ouvrage collectif du second empire, rédigé par d'anciens élèves de Grandes Ecoles, au chapitre "géométrie pratique : arpentage." Il y est également fait mention d'une réédition en 1838 ce qui confirme l'intérêt de l'époque pour cet ouvrage.

Gino Loria dans son "Histoire des mathématiques" (Milan 1950) note que ce volume "fut connu comme il se doit" en France. Pour preuve, la préface de l'ouvrage de F. J. Servois : "*Ces Théorèmes, qu'on ne trouve pas dans les Elemens ordinaires, appartiennent à des Géométres que je me complais à citer. ....On verra que je cite assez souvent le Recueil que publia à Pavie, en 1793, Mascheroni, sous le titre de Problemi per gli Agrimensori con varie solutioni .. Opuscule qui renferme la collection la plus complète que je connoisse de procédés et de formules sur toutes les parties de la Géométrie Pratique.*"

Poncelet considère le travail de Servois original et utile pour la géométrie qu'il expose dans son "Traité des propriétés projectives des figures" (1822). Mascheroni est donc un précurseur qui va en particulier donner un nouvel élan au développement de la géométrie projective du début du XIXè siècle.

Michèle LACOMBE - Henry PLANE -1995

PROBLÈMES

POUR

LES ARPENTEURS.

LORENZO MASCHERONI.

PROBLÈMES

POUR

LES ARPENTEURS,

AVEC DIFFÉRENTES SOLUTIONS,

Par L. MASCHERONI.

OUVRAGE TRADUIT DE L'ITALIEN.

A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur - libraire, et propriétaire de la librairie mathématique de DUPRAT, quai des Augustins, n°. 71.

An XI — 1803.

Ces Problèmes se trouvent :

A Angers, chez Fourier-Mame.
Angoulême, chez Bargeas et chez Broquisse.
Autun, chez Dauphin.
Bourg, chez Vernarel et chez Bottier.
Bruxelles, chez le Charlier.
Colmar, chez Fontaine.
Clermont-Ferrand, chez Rousset.
Dijon, chez Coquet.
Dôle, chez Joly.
Gand, chez de Goesin-Verhaeghe.
Genève, chez Paschoud.
Lafère, chez Tronquoy.
Lille, chez Vanackere.
Lyon, chez les frères Perisse et chez Savy.
Metz, chez Devilly.
Nancy, chez Mme Bontoux.
Nismes, chez Gaude et Melquiond.
Périgueux, chez Mme Dubreuil.
Rennes, chez Blouet.
Rouen, chez Vallée frères, et chez Renault.
Strasbourg, chez Levrault frères.
Toulouse, chez Manavit.
Tours, chez Pescherard et Mame.
Aux Sables, chez Feret.
Aix, chez Carraccioli.
Bayonne, chez Gosse et Bonzom.
Nantes, chez Foret.
Bordeaux, chez Lafite.
Saint-Omer, chez Huguet.
Dunkerque, chez Fremaux.
La Rochelle, chez Sanlecque.

NOTE DU TRADUCTEUR.

Cet ouvrage de l'auteur de la Géométrie du Compas, destiné par lui à l'usage particulier des arpenteurs, peut cependant être lu avec fruit par tous ceux qui étudient les Mathématiques.

Il contient un assez grand nombre de propositions de Géométrie, que l'auteur, pour des raisons qu'il fait connaître dans sa préface, s'est contenté d'énoncer, et que le traducteur, pour les mêmes motifs, a aussi laissées sans démonstration.

La recherche de ces démonstrations, sera, pour les élèves, un exercice utile et agréable.

Les trois premiers livres ne renferment aucune proposition qui ne puisse être facilement démontrée par ceux qui posséderont bien les élémens d'Algèbre et de Géométrie.

Pour le quatrième, ils pourront s'aider de la Polygonométrie de M. Lhuillier, et de l'ouvrage que le C. Carnot vient de

A 3

publier sous le titre de *Géométrie de position.*

Enfin, le cinquième livre, après quelques propositions simples, pour lesquelles ils pourront consulter les élémens de Géométrie du C. Legendre et les notes dont il les a fait suivre, en renferme quelques autres plus difficiles, dont les démonstrations pourraient être longues et pénibles, si l'on s'en tenait aux principes de la Géométrie ordinaire, mais se trouveront facilement au moyen des formules que fournit le calcul intégral pour la cubature des solides.

Beaucoup des problêmes renfermés dans ce recueil sont très-connus, et je me serais dispensé de les y réunir, si les solutions que j'en donne étaient aussi répandues, et si elles ne présentaient souvent des applications faciles et commodes dans la pratique. Il m'a semblé ensuite qu'il ne serait pas inutile de faire suivre chaque problême de toutes les solutions que j'en possédais, afin que l'arpenteur pût avoir, dans un petit volume, plusieurs manières différentes d'obtenir le même résultat; mais j'ai cru superflu d'y joindre les démonstrations, qui souvent se présentent d'elles-mêmes, et qui, dans les autres cas, fourniront un exercice utile à ceux qui voudront s'en occuper.

J'avais publié, en 1787, parmi les additions au cours de mathématiques de M. Bossut, un petit mémoire intitulé : *Méthode pour la mesure des polygones plans*. Deux ans après, M. Lhuillier publia à Genève

sa *Polygonométrie*. Je reconnus en la lisant, non-seulement que mon ouvrage renfermait tous ses problêmes, mais que mes solutions analytiques m'avaient conduit aux mêmes formules, et que nous avions suivi pas à pas la même carrière. Un accord aussi parfait avec ce célèbre Géomètre, fut pour moi d'un grand prix, et la preuve la plus complette que mon travail pouvait être de quelque utilité. Je donne ici les mêmes problêmes, accompagnés des formules qui servent à les résoudre et des règles générales que je publiai alors. Au reste, l'ouvrage de M. Lhuillier ne fait pas seulement honneur à son érudition; il l'a enrichi de démonstrations géométriques qui lui appartiennent, et de beaucoup d'exemples d'un bon choix qui éclaircissent ses méthodes.

Cet ouvrage contient deux additions au mémoire cité plus haut : la première est une application des règles de la Polygonométrie, à la mesure des côtés et des angles dans certains systêmes de lignes droites, disposées de manière à se couper

successivement sous des angles quelconques, la dernière se terminant à l'origine de la première sans néanmoins former de polygone : je crois que cette application trouvera sa place dans le calcul des triangles que l'on forme pour lever des plans ou pour tracer des méridiennes.

La seconde addition est un essai de Polygonométrie solide, imitée de la Polygonométrie plane. J'en avais jeté les premières idées dans la solution des problêmes VII et VIII du livre V, sur la solidité de la pyramide, quand je vis les mêmes résultats dans un mémoire de l'immortel Euler, imprimé en 1758, dans le tome IV des nouveaux commentaires de Pétersbourg; en cherchant à conserver ce qui m'appartient dans cette matière, je rends justice avec plaisir aux travaux de cet illustre auteur.

On trouvera encore ici la solution générale du problême relatif à la solidité d'un polyèdre, qui a pour bases deux polygones parallèles, et dont les autres faces sont des

quadrilatères disposés d'une manière quelconque autour des côtés de ces bases : ce problême est nouveau, je crois, et c'est une heureuse addition à la théorie trop incomplète des solides.

PROBLÊMES

POUR

LES ARPENTEURS.

LIVRE PREMIER.

DE LA MESURE DES LIGNES.

PROBLÊME PREMIER.

Mesurer une distance AB *qui n'est accessible que par ses extrémités* A *et* B.

SOLUTIONS.

1. AYANT pris un point C, d'où l'on puisse aller en A et B, c'est-à-dire, mesurer les droites CA et CB, on portera sur les prolongemens de ces distances des parties CD et CE, qui leur soient respectivement égales, et l'on aura $DE = AB$. FIG. 1.

2. On prendra, comme tout-à-l'heure, un point C, et ayant porté sur le prolongement de AC, $CE = BC$, et sur le prolongement de BC, $CD = AC$, on aura $DE = AB$. FIG. 2.

FIG. 3. 3. Si d'un point V on pouvait aller en A et B, et si, en prenant $VC = VA$, on pouvait aller aussi de C en A, on aurait

$$AB = \sqrt{\left(\overline{AC}^2\,\frac{VB}{VC} + \overline{BC}^2\right)}.$$

FIG. 4. 4. Si du point V on peut aller en A et B, et si, en prenant sur VA et VB, des parties VD et VE, on peut aller de A en E, on aura

$$AB = \sqrt{\left[\overline{AV}^2 + \overline{BV}^2 - \frac{AV.BV}{DV.EV}\left(\overline{DV}^2 + \overline{EV}^2 - \overline{DE}^2\right)\right]}$$

5. Si dans le triangle AVB, on peut mesurer deux angles et le côté AV, on aura

$$AB = AV\frac{\sin V}{\sin B}.$$

Si l'on peut y mesurer deux angles et le côté BV, on aura

$$AB = BV\frac{\sin V}{\sin A}.$$

6. Si l'on peut mesurer l'angle V et les deux côtés AV et BV, on aura

$$AB = \sqrt{(\overline{AV}^2 + \overline{BV}^2 - 2AV.BV.\cos AVB)}.$$

On peut encore trouver AB de cette manière :

Au moyen de l'équation :

$$\tang\frac{A-B}{2} = \frac{BV - AV}{BV + AV}\tang\frac{A+B}{2},$$

on cherchera à connaître $\tang\frac{A-B}{2}$ et par conséquent $\frac{A-B}{2}$; cette demi-différence des angles VAB, VBA, ajoutée à leur demi-somme $\frac{A+B}{2}$ donnera le plus grand angle A opposé au côté BV que l'on suppose ici plus grand que AV, et soustraite de la même demi-somme, elle donnera le plus petit angle. Alors on aura AB comme par la solution 5.

7. On pourra faire ensorte que l'angle V soit droit, et mesurer AV et BV, on aura FIG. 5.

$$AB = \sqrt{(\overline{AV}^2 + \overline{BV}^2)}.$$

8. Si pouvant faire droit l'angle V, on pouvait de plus mesurer un des angles A et B, et un des côtés AV, BV, on aurait

$$AB = AV\sec VAB = \frac{AV}{\cos VAB},$$

ou bien

$$AB = BV\sec VBA = \frac{BV}{\cos VBA}.$$

9. Si l'on peut faire droit l'angle A et me- FIG. 5.

surer les distances AV et EV, on aura

$$AB = \sqrt{(\overline{BV}^2 - \overline{AV}^2)} = \sqrt{(BV + AV)(BV - AV)}.$$

On s'y prend de la même manière quand on peut faire un angle droit en B.

10. Si l'on peut faire un angle droit en A et mesurer un des deux autres angles V et B, et un des deux côtés AV, BV, on aura

$$AB = AV \operatorname{tang} AVB \text{ ou } AB = BV \sin AVB.$$

11. Si l'on peut faire un angle droit en A et un angle demi-droit en V, on aura

$$AB = AV \text{ ou } AB = \frac{BV}{\sqrt{2}}.$$

FIG. 5. 12. Si l'on peut faire des angles demi-droits en A et B, et un angle droit en V, on aura

$$AB = AV\sqrt{2} = BV\sqrt{2}.$$

FIG. 7. 13. Si l'on peut faire droits trois des angles A, B, C et V, on aura $AB = CV$.

FIG. 4. 14. Si l'on peut faire demi-droit l'angle V, et mesurer les distances AV et BV, on aura

$$AB = \sqrt{(\overline{AV}^2 + \overline{BV}^2 - AV.BV.\sqrt{2})}.$$

FIG. 5. 15. Ayant pris le point V, de manière que l'angle BVA soit droit, si l'on porte sur le prolongement d'un des côtés AV, BV du triangle rectangle AVB, par exemple sur le

prolongement de AV, une partie égale à ce côté, on aura $AB = NB$.

PROBLÊME II.

Mesurer la droite CZ *dont on ne peut approcher qu'au point* C.

SOLUTIONS.

1. AYANT pris un point A qui soit en ligne droite avec les points C et Z, et un point B hors de cette droite, on tirera BC et BA; ayant ensuite divisé AB en deux parties égales en M, et marqué le point P où la droite BC est coupée par MZ, on aura FIG. 8.

$$CZ = \frac{AC \,.\, CP}{BP - CP}.$$

2. On prendra le point P sur le milieu de BC, et cherchant sur AB un point M dans la direction de PZ, on aura

$$CZ = \frac{MB.AC}{MA - MB}.$$

3. Si le point M ne pouvait être pris sur le milieu de AB, ni le point P sur le milieu de BC, on aurait toujours

$$CZ = \frac{MB.AC.CP}{MA.BC - AB.CP}.$$

4. Voyez les solutions 5, 8, 10, 11, 12 et 13 du problême I, qui ne supposent la ligne AR accessible que par une de ses extrémités.

FIG. 9. 5. Si l'on ne pouvait ni prolonger la droite CZ ni mesurer l'angle C, on diviserait une droite CB en deux parties égales, de manière que l'on pût mesurer les angles CAZ, CBZ, et on aurait

$$CZ = AB\sqrt{\left(1 + \frac{\sin^2 ABZ}{\sin^2 AZB} + 2\frac{\sin ABZ}{\sin AZB}\cos ZAB\right)}.$$

6. Si le point A n'était pas le milieu de CB, on aurait.

$$CZ = \sqrt{\left(\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2\frac{\sin^2 ABZ}{\sin^2 AZB} + 2AC.AB.\frac{\sin ABZ}{\sin AZB}\cos ZAB\right)}$$

7. Ayant trouvé AZ au moyen de l'équation

$$AZ = AB\frac{\sin ABZ}{\sin AZB}$$

et les angles C et Z au moyen de l'équation,

$$\operatorname{tang}\frac{C - Z}{2} = \frac{AZ - AC}{AZ + AC}\operatorname{tang}\frac{C + Z}{2}$$

(Voyez la solution 6 du problême I), on aura

$$CZ = AC\frac{\sin CAZ}{\sin AZC} = AZ\frac{\sin CAZ}{\sin ACZ}$$

8.

8. Les points A et B étant en ligne droite, si l'angle ZAC est la moitié, et l'angle ABZ le quart d'un angle droit, on aura

$$CZ = \sqrt{(\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - AC.AB.\sqrt{2})}.$$

9. En faisant l'angle $ZAB = ZAC$ et $AB = AC$, on aura : FIG. 10.

$$CZ = BZ = AB\frac{\sin ZAB}{\sin AZB}.$$

Application à la mesure des hauteurs.

Si l'on voulait mesurer la hauteur d'une tour AB élevée perpendiculairement à BV, on aurait : FIG. 11.

$$AB = BV \operatorname{tang} V, \text{ ou simplement } AC = BV$$

si l'angle V était la moitié d'un droit.

Si l'on voulait mesurer la longueur d'un mur en talus AB, on aurait comme dans la solution 5 du problême I : FIG. 12.

$$AB = BV\frac{\sin V}{\sin A}.$$

Si l'on ne pouvait pas mesurer l'angle ZCA, que le mur en talus ZC fait avec CA que l'on peut mesurer, on obtiendrait ZC par le moyen des formules des solutions 5, 6, 7, et 8 du problême II. FIG. 13.

B

PROBLÊME III.

Mesurer la ligne XZ entièrement inaccessible.

SOLUTIONS.

1. AYANT pris un point C accessible, le point A dans la direction de CZ, le point B dans la direction de CX, et le point M au
FIG. 14. milieu de AB, on déterminera le point P ou MZ coupe CB, le point Q ou MX coupe CA, et en portant de C vers A sur CA la ligne $Cz=\frac{AC.\ CP}{BP-CP}$, et sur CB la ligne $Cx=\frac{BC.\ CQ}{AQ-CQ}$, on aura xz égale et parallèle à XZ.

2. Si le point M ne pouvait pas se prendre sur la moitié de AB, il faudrait faire

$$Cz=\frac{MB.AC.CP}{MA.BC-AB.CP}$$

$$Cx=\frac{MA.BC.CQ}{MB.AC-AB.CQ}$$

et xz serait encore égale et parallèle à XZ.

3. Si des obstacles empêchaient de prendre sur le terrein les lignes Cz et Cx, on aurait en général

$$XZ=\sqrt{\left[(Cz-Cx)^2+\frac{Cx.Cz}{AC.CB}(AB+BC-AC)(AB+AC-BC)\right]}$$

et XZ s'obtiendrait ainsi par la racine de valeurs toutes connues, car le n°. 2 fournit le moyen de connaitre Cx et Cz.

Dans le cas de $CA=CB$, on aura

$$XZ=\sqrt{\left[(Cz-Cx)^2+\frac{Cx.\ Cz}{\overline{AC}^2}\overline{AB}^2\right]}.$$

4. Si l'on fait droit l'angle ACB, et si l'on prend $AC=CB$, on aura

$$XZ=\sqrt{(Cz^2+Cx^2)}.$$

5. Si l'on trouvait commode de prendre FIG. 15.
les points B et A sur une droite BA, telle que l'espace compris entre BA et XZ fût inaccessible, on fixerait un point C en dehors, à la rencontre des lignes XB et ZA et prenant le point M au milieu de BA, marquant le point P ou MZ coupe CB et le point Q ou XM coupe AC, portant sur le prolongement de ZC la ligne $Cz=\frac{AC.\ CP}{CP-BP}$ et sur le prolongement de XC la ligne $Cx=\frac{BC.\ CQ}{CQ-AQ}$, on aurait xz égale et parallèle à XZ.

6. Si le point M n'était pas au milieu de AB, il faudrait prendre

$$Cz=\frac{MB.AC.CP}{AB.CP-MA.BC}.$$

$$Cx=\frac{MA.BC.CQ}{AB.CQ-MB.AC}.$$

7. Si l'on ne pouvait mesurer sur le terrain ni Cz ni Cx, on trouverait XZ au moyen de l'équation :

$$XZ=\sqrt{\left[(Cz-Cx)^2+\frac{Cx.Cz}{AC.CB}(AB+BC-AC)(AB+AC-BC)\right]}$$

qui, dans le cas de $CA=BC$, donnerait :

$$XZ=\sqrt{\left[(Cz-Cx)^2+\frac{Cx.Cz}{\overline{AC}^2}\overline{AB}^2\right]}$$

8. En faisant droit l'angle ACB et prenant $AC=CB$; on aura

$$XZ=\sqrt{(\overline{Cz}^2+\overline{Cx}^2)}.$$

FIG. 16. 9. Si l'on fait l'angle ZAB égal à l'angle XAZ; et si l'on se retire sur AB jusqu'à ce qu'on ait trouvé un point B, tel que l'angle $ABX=90°-ZAB=BXA$, on aura

$$XZ=BZ=AB\frac{\sin ZAB}{\sin AZB}.$$

FIG. 17. 10. Ayant fait droit l'angle XAB, et s'é-

tant retiré sur AB jusqu'en un point B tel que l'angle ABZ soit droit, on déterminera le point D ou XA est rencontrée par la perpendiculaire BD au point B de la ligne BX, et le point C ou ZB est rencontrée par la perpendiculaire au point A de AZ; on aura ensuite :

$$XZ=AB\sqrt{\left[1+\left(\frac{AB}{BC}-\frac{AB}{AD}\right)^2\right]}$$

ou pour pouvoir appliquer plus commodément les logarithmes

$$XZ=AB\sqrt{\left[1+\left(\frac{AB(AD-BC)}{AD.BC}\right)^2\right]}.$$

11. Ayant fait droit l'angle XAB, et ayant FIG. 18.
trouvé sur la ligne AB le point B où l'on a encore un angle droit ABZ, on déterminera sur la même droite AB les points D et C tels que les angles BDZ et ACX soient demi-droits, et l'on aura

$$XZ=\sqrt{[\overline{AB}^2+(BD-AC)^2]}$$

formule qui se prêtera plus facilement au calcul logarithmique en l'écrivant ainsi :

$$XZ=AB\sqrt{\left(\frac{(BD-AC)^2}{\overline{AB}^2}+1\right)}.$$

12. Si trois points A, B, C sont trouvés de FIG. 19.

manière que l'on puisse faire droits les angles XAX, XBZ, XCZ, on aura, en représentant par P la demie somme $\frac{AB+BC+CA}{2}$,

$$XZ=\frac{AB.BC.CA}{2\sqrt{P(P-AB)(P-BC)(P-CA)}},$$

ou bien ayant trouvé sur AC un point P, tel que l'angle APB soit droit, on aura:

$$XZ=\frac{BA.BC}{BP}.$$

FIG. 20. 13. Si les trois points A, B, C sont tels que les angles XAZ, XBZ, XCZ soient demi-droits, on aura

$$XZ=\frac{AB.BC.CA}{2\sqrt{2}\sqrt{[P(P-AB)(P-BC)(P-CA)]}}$$

en faisant comme plus haut

$$\frac{AB+BC+CA}{2}=P,$$

et lorsqu'on pourra faire droit l'angle APB, cette formule se réduira à

$$XZ=\frac{BA.BC}{BP.\sqrt{2}}.$$

FIG. 21. 14. Ayant mesuré la base AB et les angles que font avec cette base et avec la ligne XZ les droites AZ et BX, on aura

$$AX=AB\frac{\sin ABX}{\sin AXB} \qquad BX=AB\frac{\sin BAX}{\sin BXA}$$

ou

$$AZ=AB\frac{\sin ABZ}{\sin AZB} \qquad BX=AB\frac{\sin BAZ}{\sin BZA}$$

et en joignant aux deux premières valeurs celle de l'angle XAZ, ou aux deux dernières celle de l'angle XBZ, on aura XZ par la solution 6 du problème I.

15. En conservant les conditions du n°. précédent, on aura encore la valeur de XZ par l'une ou l'autre des deux équations:

$$XZ=AB\sqrt{\left(\frac{\sin^2 ABX}{\sin^2 AXB}+\frac{\sin^2 ABZ}{\sin^2 AZB}-2\frac{\sin ABX\sin ABZ}{\sin AXB\sin AZB}\cos XAZ\right)}$$

$$XZ=AB\sqrt{\left(\frac{\sin^2 BAX}{\sin^2 BXA}+\frac{\sin^2 BAZ}{\sin^2 BZA}-2\frac{\sin BAX\sin BAZ}{\sin BXA\sin BZA}\cos XBZ\right)}.$$

16. Si l'on fait droit l'angle XAB, et si, FIG. 16.
après avoir trouvé le point B, où l'angle ABZ est aussi droit, on observe les angles ZAB et ABZ, on aura:

$$XZ=AB\sqrt{[1+(\text{tang } ZAB-\text{tang } XBA)^2]},$$

ou bien, si l'on appelle A l'angle qui dans les tables a pour tangente la différence des tangentes des angles ZAB et XBA, on aura $XZ=AB$ sec A.

B 4

FIG. 21. 17. Ayant planté une jalon en C, de manière que l'angle XCZ soit obtus, et ayant déterminé sur ZC et XC deux points A et B tels que les angles XAZ et XBZ soient droits, on aura:

$$XZ=\frac{2.AB.BC.CA}{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2-\overline{CA}^2}.$$

18. Ayant trouvé les deux points A et B comme dans le n°. précédent, et Q étant le point où se rencontrent les deux lignes XA et ZB, on aura:

$$XZ=\frac{2.AB.BQ.QA}{\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2-\overline{AB}^2}.$$

FIG. 22. 19. Si l'on prend le point C de manière que les rayons visuels dirigés de ce point aux extrémités X et Z de la distance proposée forment entr'eux un angle droit XCZ, et qu'on prolonge ZC et XC en A et B jusqu'à ce que les angles CAX, CBZ soient demi-droits, on aura précisément

$$XZ=AB.$$

FIG. 23. 20. Ayant fait droits les angles XAB, ZAC et demi-droits les angles XBA, ZCA, on aura encore

$$XZ=BC.$$

Application à la mesure des hauteurs.

Si l'on se propose de déterminer la hauteur FIG. 24.
inaccessible AB, en supposant que l'on peut mesurer la partie DC de l'horizontale DB et les angles ADB et ACB, on aura:

$$AB=DC\frac{\sin ADC}{\sin DAC}\sin ACB.$$

Si DC ne se mesurant pas sur l'horizon- FIG. 25.
tale CB faisait un angle quelconque avec l'horizon, et si en même temps le plan du triangle ADC n'était pas le même que le plan du triangle vertical ACB, on déterminerait encore AB par la formule

$$AB=DC\frac{\sin ADC}{\sin DAC}\sin ACB.$$

Si à la hauteur AB de la tour on voulait ajouter la quantité BE dont le point E est élevé au-dessus de l'horizontale CB, connaissant l'angle BCE, et par suite les angles CEB et ACE, on aurait

$$AE=DC\frac{\sin ADC.\sin ACE}{\sin DAC.\sin CEA}$$

et cette formule serait encore vraie si le triangle ADC n'était pas vertical et si la ligne DE n'était pas horizontale.

FIG. 26. S'il s'agit de mesurer la hauteur AB d'un mur en talus, connaissant l'angle ABE de son inclinaison sur l'horizontale BE et l'angle BCF du niveau CB avec l'horizontale CF et par conséquent le complément CBF de cet angle, on aura

$$CBA = 270^\circ - CBF - ABE,$$

$$\text{et } AB = \frac{\sin ADC . \sin ACB}{\sin DAC . \sin CBA}.$$

CAS PARTICULIERS.

PREMIER CAS.

FIG. 25. On peut, du sommet d'une tour AB, mesurer l'horizontale inaccessible DC, si l'on connaît la hauteur AB de cette tour, et si l'on peut mesurer les angles CAB, DAB, DAC; on a en effet alors :

$$DC = AB \sqrt{(\sec^2 CAB + \sec^2 DAB - 2 \sec . CAB \sec . DAB \cos DAC)}.$$

FIG. 24. Si le plan du triangle DAC était vertical, c'est-à-dire, si la ligne DC était le prolongement de BC, on aurait :

$$DC = AB (\text{tang } DAB - \text{tang } CAB).$$

DEUXIÈME CAS.

Supposons que l'on veuille déterminer, par FIG. 27. rapport à trois points connus, la position d'un quatrième point d'où l'on peut voir les trois premiers, sans que d'aucun des premiers on puisse découvrir le quatrième; ces trois points étant, par exemple, les sommets de trois clochers que l'on apperçoit du lieu qu'il s'agit de déterminer, mais sur lesquels on ne peut pas monter pour le découvrir.

Soient A, B, C les trois points connus de position, et D le point inconnu duquel on peut observer les angles m et n; on demande les distances BD, AD et CD.

On aura d'abord

$$\text{Cot. } x = \frac{AB \sin (m+n)}{BC \sin m \sin (B-n)} - \cot (B-n),$$

ou afin de pouvoir appliquer plus commodément le calcul logarithmique

$$\text{Cot } x = \cot (B-n) \left(\frac{\sin C \sin (m+n)}{\sin BAC \sin m \cos (B-n)} - 1 \right).$$

Ayant trouvé de cette manière le segment x de l'angle BAC, on connaîtra par conséquent l'autre segment CAD, et on aura :

$$BD = BA \frac{\sin x}{\sin m}$$

$$AD = \begin{cases} BA \dfrac{\sin (m+x)}{\sin m} \\ CA \dfrac{\sin (n+y)}{\sin n} \end{cases}$$

$$DC = CA \frac{\sin y}{\sin n}.$$

Si B était plus petit que n, cot $(B-n)$ deviendrait négative.

Si le point D était dans l'intérieur du triangle ABC, on aurait $m + n$ plus grand que 180° et sin $(m+n)$ serait négatif.

Dans le cas où l'on aurait $B=n$, le problême serait indéterminé, puisqu'alors un cercle devrait passer par les quatre points A, B, C, D, et l'on ne pourrait conclure la position du quatrième point D, qu'autant qu'il serait sur la circonférence du cercle qui passerait par les trois premiers.

Si l'on ne voulait pas connaître les distances AD, BD, CD, mais seulement la situation que doit avoir le point D sur une carte, il serait plus expéditif d'employer la construction suivante :

On ferait passer par les points A et B un

cercle de rayon $\frac{AB}{2 \sin m}$, et par les points A et C un autre cercle de rayon $\frac{AC}{2 \sin n}$; ces deux cercles se rencontreraient en deux points, savoir au point A et au point cherché D.

COROLLAIRE.

Si $B=0$, ce qui arrive lorsque les trois FIG. 28. points B, A et C sont en ligne droite, on considérera le point A comme l'intersection a des droites AD et BC, et $x = BaD$ sera alors donné par la formule :

$$\text{Cot } x = \text{Cot } n \left(1 - \frac{AB \sin (m+n)}{BC \sin m \cos n} \right)$$

$$= \frac{AC . \cot n - AB . \cot m}{BC}.$$

Ayant par là trouvé l'angle x, on connaîtra ensuite les autres angles B, C et DAC et les distances AD, BD, CD par les équations :

$$B = 180^\circ - x - m$$

$$DAC = 180^\circ - x$$

$$C = x - n$$

$$AD = AB \frac{\sin B}{\sin m} = AC \frac{\sin C}{\sin n}$$

$$BD = AB\frac{\sin x}{\sin m} = BC\frac{\sin C}{\sin(m+n)}$$

$$CD = AC\frac{\sin DAC}{\sin n} = BC\frac{\sin B}{\sin(m+n)}$$

enfin, on aura la perpendiculaire DP abaissée du point D sur BC par la formule :

$$DP = AD \sin x$$

PROBLÊME IV.

FIG. 29. *Trouver la distance* VP *du point* V *à la ligne* AB, *qui n'a d'accessible que ses extrémités* A *et* B.

SOLUTIONS.

ON trouvera la distance demandée par l'une ou l'autre des deux formules :

$$VP = \frac{AV.BV.\sin AVB}{\sqrt{(\overline{AV}^2 + \overline{BV}^2 - 2AVBV\cos AVB)}}$$

$$VP = AV \sin A = BV \sin B.$$

PROBLÊME V.

FIG. 30. *Trouver la distance* AP *du point* A *à la ligne inaccessible XZ.*

SOLUTIONS.

AYANT mesuré une base AB et les angles que font avec cette base et avec la ligne pro-

posée les rayon visuels AX et AZ, BX et BZ, on aura

$$AP = \frac{AB \sin XAZ}{\sqrt{\left(\frac{\sin^2 AXB}{\sin^2 ABX} + \frac{\sin^2 AZB}{\sin^2 ABZ} - 2\frac{\sin AXB \sin AZB}{\sin ABX \sin ABZ}\cos XAZ\right)}}.$$

PROBLÊME VI.

Exprimer au moyen des côtés seulement la distance des parallèles AB *et* CD *dans le trapèze* ABCD. FIG. 51.

SOLUTION.

SOIENT $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$; on aura pour la distance cherchée l'expression :

$$\frac{\sqrt{[2(d^2+b^2)(a-c)^2-(a-c)^4-(d^2-b^2)^2]}}{2(a-c)}$$

PROBLÊME VII.

Etant donnés les trois angles A, B, C *d'un triangle et son aire* S, *trouver un côté*, AB *par exemple.* FIG. 1.

SOLUTION.

ON aura : $AB = \sqrt{\frac{2S.\sin C}{\sin A.\sin B}}$

PROBLÊME VIII.

FIG. 50. *Trouver la distance* AB *qui n'a d'accessibles que les seuls points* A *et* B, *desquels on peut voir les extrémités* X *et* Z *d'une droite entièrement inaccessible, mais connue de longueur.*

SOLUTIONS.

1. ON aura la distance AB par l'une ou l'autre de ces formules :

$$AB = \frac{XZ}{\sqrt{\left(\frac{\sin^2 ABX}{\sin^2 AXB} + \frac{\sin^2 ABZ}{\sin^2 AZB} - 2\frac{\sin ABX \sin ABZ}{\sin AXB \sin AZB}\cos XAZ\right)}}$$

$$AB = \frac{XZ}{\sqrt{\left(\frac{\sin^2 BAX}{\sin^2 BXA} + \frac{\sin^2 BAZ}{\sin^2 BZA} - 2\frac{\sin BAX \sin BAZ}{\sin BXA \sin BZA}\cos XBZ\right)}}$$

2. On donnera une valeur quelconque à AB, et supposant inconnue la distance XZ, on la déterminera par la solution 14 du problême III ; il en résultera une fausse valeur pour cette ligne, puis on fera cette proportion :

La valeur trouvée pour XZ est à la valeur donnée à AB, comme la valeur connue de XZ est à la valeur inconnue de AB.

D'où l'on déduira AB par les opérations ordinaires de l'arithmétique.

PROBLÊME IX.

Etant donnés deux côtés a *et* b *d'un triangle et son aire* m, *trouver le troisième côté* c.

SOLUTION.

ON aura : $C = \sqrt{(a^2+b^2 \pm 2\sqrt{a^2b^2-4m^2})}$

C

LIVRE SECOND.

De la direction des lignes et de la mesure des angles.

PROBLÊME I.

Prolonger la droite AB *en* C *et* D, *malgré l'inégalité du terrein occasionnée par l'obstacle* X.

SOLUTIONS.

FIG. 32. 1. On tirera une ligne indéfinie AP sous l'angle aigu BAP, et par le point B on menera BM qui fasse avec elle un angle BMA, que pour plus de commodité on pourra prendre droit ; en faisant ensuite aux points N et P les angles ANC, APD égaux à AMB, et prenant

$$CN = AN\frac{BM}{AM},\ PD = AP\frac{BM}{AM},$$

les points C et D seront sur le prolongement de la droite AB.

2. Si l'on fait demi-droit l'angle BAM,

et droits les angles en N et P, il suffira de prendre $CN = AN$, $PD = AP$.

3. Ayant mené à une distance quelconque de AB la ligne LP, et fait des angles égaux aux points L, M, N et P, on aura : FIG. 33.

$$CN = \frac{LN.BM - AL.MN}{LM},$$

$$PD = \frac{LP.BM - AL.MP}{LM}.$$

4. En prenant $LM = MN = NP$, on aura :

$$CN = 2BM - AL$$

$$PD = 3BM - 2AL.$$

5. En faisant droits les angles M, N et P, on aura par la construction du n°. 3 :

$$CN = MN\,(\text{tang}\,BLM - \text{tang}\,AML) + LM\,\text{tang}\,BLM$$

$$DP = MP\,(\text{tang}\,BLM - \text{tang}\,AML) + LM\,\text{tang}\,BLM$$

et ces distances détermineront les points C et D.

Autrement : ayant déterminé le point D au moyen de la seconde formule, on fera l'angle PDC égal à celui qui dans les tables a pour tangente trigonométrique la différence des tangentes des angles BLM et AML.

6. Ayant pris un point V, du quel on puisse mesurer les lignes AV, BV, CV, DV et FIG. 34.

les angles qu'elles forment entr'elles, il faudra faire :

$$CV = \frac{VA.VB.\sin AVB}{VA\sin AVC - VB\sin BVC}$$

$$VD = \frac{VA.VB.\sin AVB.}{VA\sin AVD - VB\sin BVD}$$

ou bien ayant trouvé le point C, au moyen de la première formule, on fera l'angle

$$VCD = VAB + AVC.$$

7. Si l'on ne peut mesurer que les distances VC et VD, on prendra une base VX que l'on puisse aussi mesurer, et telle que du point X on puisse voir les points A et B, et on fera ensuite :

$$VD = \frac{VZ.\sin AZV\sin BZV\sin AVB}{\sin AZV\sin VBZ\sin AVC - \sin BZV\sin VAZ\sin BVC}$$

$$VD = \frac{VZ.\sin AZV\sin BZV\sin AVB}{\sin AZV\sin VBZ\sin AVD - \sin BZV\sin VAZ\sin BVD.}$$

Autrement; ayant trouvé le point C par la première de ces deux formules, et l'angle VAB par l'équation.

$$\sin VAB = \frac{\sin AVB}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sin^2 VZA\sin^2 VBZ}{\sin^2 VAZ\sin^2 VZB} - 2\frac{\sin VZA\sin VBZ}{\sin VAZ\sin VZB}\cos AVB\right)}}$$

on fera l'angle $VCD = VAB + AVC$.

8. Si l'on peut mesurer l'angle BAV et la distance AV, on fera :

$$VC = AV\frac{\sin VAB}{\sin(VAB + AVC)}$$

$$VD = AV\frac{\sin VAB}{\sin(VAB + AVD)}$$

ou bien, ayant trouvé le point C, au moyen de la première formule, on fera l'angle

$$VCD = VAB + AVC.$$

9. Si les angles VAB et AVC étaient demi-droits, on aurait : $CV = \frac{AV}{\sqrt{2}}$. FIG. 35.

10. Ayant fait demi-droit l'angle BAV et droit l'angle AVC, on prendra $CV = VA$, et l'angle VCD sera égal à trois demi-droits. FIG. 36.

11. Si l'on peut mesurer la ligne AB et les angles ABV, BAV, sans qu'on puisse mesurer AV et BV, on fera : FIG. 34.

$$CV = AB\frac{\sin ABV\sin VAB}{\sin AVB\sin(VAB + AVC)}$$

PROBLÊME II.

Par un point donné D, *mener une parallèle à la ligne inaccessible* xz, *en supposant accessibles les points* x *et* z.

SOLUTIONS.

FIG. 37. 1. On menera Dx et par le milieu V de cette distance, on tirera zVE ; prenant ensuite $VE = Vz$, la ligne DE menée par les points D et E sera la parallèle demandée.

Si le point V n'était pas le milieu de Dx, il faudrait faire $VE = \frac{DV \cdot Vz}{Vx}$.

FIG. 38. Autrement; sur zD on prendrait un point quelconque V et ayant tiré Vx, on porterait sur cette ligne et à partir du point V la distance $VE = \frac{xV \cdot VD}{zV}$.

Autrement encore; de l'autre côté de la ligne zx on choisira un point V et l'on menera par ce point la droite WD et la droite WE qui rencontrera en y la droite zx; en prenant ensuite $WE = \frac{Wy \cdot WD}{Wz}$, la ligne DE sera la parallèle demandée.

FIG. 39. 2. Ayant déterminé le point V de la ligne xz où l'angle zVD est droit, on me-

nera DE de maniere que l'angle VDE soit aussi droit.

3. Plus généralement, ayant mené par le point D la ligne Vx qui fasse avec xz un angle quelconque, on tirera DE, de maniere que l'angle VDE soit égal à Vxz. FIG. 40.

4. Si l'on peut mesurer les distances DX, DZ et l'angle XDZ, et qu'en même tems l'inégalité du terrein ne permette de déterminer aucun point sur la ligne XZ; l'un, au moins, des angles X et Z, l'angle XZD, par exemple, opposé au plus petit côté sera aigu, et on le déterminera par l'équation : FIG. 41.

$$\sin XZD = \frac{DX \sin XDZ}{\sqrt{(\overline{DX}^2 + \overline{DZ}^2 - 2DX.DZ \cos XDZ)}};$$

si ensuite on mene par le point D une ligne DE qui fasse avec ZD l'angle

$$ZDE = XZD,$$

ce sera la parallèle demandée.

PROBLÊME III.

A une ligne XZ *toute inaccessible, mener une parallèle par un point donné, par exemple par le point* A (fig. 41 et 42), *et par le point* D (fig. 43, 44 et 45)

SOLUTIONS.

FIG. 41. 1. Ayant pris un point C sur la ligne AZ et un point B sur la ligne CX, on dirigera du milieu M de la distance AB aux points X et Z des rayons visuels qui rencontreront aux points P et Q, les lignes AZ et BX, portant ensuite sur CB,

$$CE = \frac{BC \cdot CQ\,(BP - CP)}{CP\,(AQ - CQ)},$$

AE sera la parallèle demandée.

2. Si l'on ne peut pas prendre le point M au milieu de AB, il faudra faire

$$CE = \frac{MA \cdot BC \cdot CQ\,(MA \cdot BC - AB \cdot CP)}{MB \cdot CP\,(MB \cdot AC - AB \cdot CQ)}.$$

FIG. 42. 3. Ayant fait l'angle ZAV égal à l'angle ZAX et se retirant sur la ligne AV jusqu'à ce que l'angle AVX soit égal à $90° - ZAV$, on fera l'angle

$$ZAE = 180° - ZAV - ZVA$$

et AE sera la parallèle.

4. Ayant pris sur la ligne XV, qui rencontre AZ en C, un point V tel que l'angle XVZ soit égal à l'angle XAZ, et sur CV une partie $CD = \frac{\overline{AC}^2}{CV}$, AD sera la ligne cherchée.

5. Ayant pris sur DX un point A, d'où l'on puisse voir les points Z et X, et quelqu'autre part un point B, d'où l'on puisse voir les mêmes points, on déterminera le point C où les deux lignes ZE et DX peuvent se rencontrer, et si le point C est entre les points D et X, il suffira pour avoir le point E de la parallèle demandée, de prendre sur CB, $CE = CD \frac{CA}{CB}$; s'il est entre les points C et X, il faudra prendre sur CZ, FIG. 43. FIG. 44.

$CE = CD \cdot \frac{CA}{CB}$.

6. Ayant pris sur DZ un point A, d'où l'on puisse appercevoir Z et X, et quelqu'autre part un point semblable, si l'on détermine le point C, où se rencontrent les droites ZA et XB, et que l'on prenne $CE = CD \frac{CA}{CB}$, DE sera la parallèle. FIG. 45.

FIG. 48, 44, 45. 7. Si les angles ZAX, ZBX étaient demi-droits ou quelconques, mais égaux entr'eux, la solution serait encore la même que dans les deux cas précédents.

FIG. 46. 8. Si des extrémités D et C d'une base mesurable DC, on observe les angles en X et Z, et si l'on cherche dans les tables l'angle qui a pour sinus

$$\frac{\sin XDZ}{\sqrt{\left(1+\frac{\sin^2 DCX \sin^2 DZC}{\sin^2 DXC \sin^2 DCZ}-2\frac{\sin DCX \sin DZC}{\sin DXC \sin DCZ}\cos XDZ\right)}},$$

ce sera l'angle DXZ, qui sera aigu ou obtus, suivant que la quantité

$$\frac{\sin DCX}{\sin DXC}-\frac{\sin DCZ}{\sin DZC}\cos XDZ$$

sera positive ou négative.

Faisant donc XDE égal au supplément de DXZ, DE sera la parallèle cherchée.

PROBLÊME IV.

D'un point donné C, *mener à une droite inaccessible* zx *une perpendiculaire, sans se servir d'aucun instrument.*

SOLUTIONS.

FIG. 48. 1. On menera aux points z et x les droites Cz et Cx, de maniere que les angles Czx, Cxz soient aigus, et en prenant ensuite

$$xN=\frac{\overline{xz}^2+\overline{Cx}^2-\overline{zC}^2}{2xz},$$

CN sera la perpendiculaire cherchée.

2. En prenant $xz = zC$, xN serait seulement $\frac{\overline{Cx}^2}{2xz}$.

PROBLÊME V.

En un point V *d'une droite* zx, *élever sur cette droite la perpendiculaire* VT, *sans employer ni équerre ni graphomètre.*

SOLUTIONS.

1. En menant du point C aux points z et x FIG. 49.
les lignes Cz et Cx, qui fassent avec xz des angles aigus Czx et Cxz, et prenant sur xC

$$XT=\frac{2xV.xC.xz}{\overline{xz}^2+\overline{xC}^2-\overline{zC}^2},$$

VT sera la perpendiculaire cherchée.

2. Si ayant mené CV de maniere que FIG. 50.
l'angle CVx soit aigu, on fait $Vx = CV$, il suffira de prendre $xT=\frac{2\overline{xV}^2}{xC}$.

PROBLÊME VI.

La ligne XZ *étant inaccessible, lui mener au point* X *une perpendiculaire.*

SOLUTIONS.

FIG. 51. 1. Ayant construit zx égale et parallèle à XZ par la méthode du problême 3 du livre I, et ayant pris de x vers z

$$xV=\frac{\overline{xz}^2+\overline{xC}^2-\overline{zC}^2}{xz}=xz+\frac{(xC+zC)(xC-zC)}{xz},$$

la droite qui ira de V en X, sera la perpendiculaire demandée.

2. Ayant mené, par un moyen quelconque, xz parallèle à XZ, on pourra trouver le point V, où l'angle xVz est droit.

FIG. 52. 3. Ayant fait l'angle ZAB égal à l'angle ZAX, et trouvé sur AB un point B, où l'angle ABX soit complément de l'angle ZAB, si l'on mene perpendiculairement à BZ la ligne BC qui rencontre AZ en C, CX sera perpendiculaire sur XZ au point X.

FIG. 53. 4. Si la droite XZ n'était accessible que par ses extrémités, et que l'inégalité du terrein ne permît pas de déterminer un point sur sa direction, on prendrait au-dehors un point A,

et ayant mesuré les distances AX, AZ et l'angle XAZ, on ferait :

$$AC=AX\frac{AX-AZ\cos XAZ}{AX\cos XAZ-AZ};$$

le point C devant être pris entre A et Z, ou FIG. 54.
sur le prolongement AC de AZ, suivant que cette valeur serait positive ou négative.

5. Si la ligne XZ est toute entière inacces- FIG. 55.
sible, on prendra une base AB que l'on puisse mesurer, et des extrémités de laquelle on puisse viser les points X et Z; on fera ensuite :

$$AC=AB\frac{\sin ABX}{\sin AXB}\left\{\frac{\frac{\sin ABX}{\sin AXB}-\frac{\sin ABZ}{\sin AZB}\cos XAZ}{\frac{\sin ABX}{\sin AXB}\cos XAZ-\frac{\sin ABZ}{\sin AZB}}\right\}$$

et si cette valeur est positive, le point C sera FIG. 57, 58.
sur AZ entre les points A et X, et CX sera la ligne demandée; si au contraire elle est négative, il faudra prendre AC sur le prolongement de ZA, et CX sera la perpendiculaire cherchée.

6. Au moyen de l'équation :

$$\sin AXZ=\frac{\sin XAZ}{\sqrt{\left(1+\frac{\sin^2 ABX \sin^2 AZB}{\sin^2 AXB \sin^2 ABZ}-2\frac{\sin ABX \sin AZB}{\sin AXB \sin ABZ}\cos XAZ\right)}}$$

on trouvera l'angle AXZ; cet angle sera obtus FIG. 57.

si $\frac{\sin ABX}{\sin AXB} - \frac{\sin ABZ}{\sin AZB} \cos XAZ$ est une quantité négative; dans ce cas on prendra sur AB

$$AV = \frac{\sin ABX \sin(AXZ - 90^\circ)}{\sin AXB \sin(270^\circ - XAB - AXZ)}$$

et VX sera la perpendiculaire cherchée. Mais si la quantité

$$\frac{\sin ABX}{\sin AXB} - \frac{\sin ABZ}{\sin AZB} \cos XAZ$$

est positive, l'angle AXZ sera aigu; alors il faudra prendre sur le prolongement de BA

$$AV = AB \frac{\sin ABX \sin(90^\circ - AXZ)}{\sin AXB \sin(XAB + AXZ - 90^\circ)},$$

et VX sera la perpendiculaire cherchée.

LIVRE TROISIEME.

De la mesure des Surfaces.

PROBLÊME I.

Mesurer la surface d'un triangle ABC.

SOLUTIONS.

1. AYANT abaissé d'un angle quelconque A la perpendiculaire AD sur le côté opposé BC, prolongé, s'il est nécessaire, la surface du triangle aura pour expression $\frac{1}{2} AD \times BC$. FIG. 59.

2. Si l'on peut mesurer deux côtés et l'angle compris, par exemple les côtés AB, AC et l'angle A, la surface sera $\frac{1}{2} AB . AC . \sin A$.

3. Si l'on peut mesurer deux côtés et l'angle adjacent à l'un d'eux, par exemple les côtés AB, AC et l'angle C, l'aire sera:

$$\tfrac{1}{2} AC \sin C [AC \cos C + \sqrt{(\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 \sin^2 C)}]$$

On pourra encore trouver l'angle B au moyen de la formule

$$\sin B = \frac{AC \sin C}{AB}$$

et l'aire sera donnée par la formule

$$\tfrac{1}{2} AB . AC \sin(B + C).$$

4. Si l'on peut mesurer les trois côtés, l'aire sera

$$\sqrt{[S(S - AB)(S - BC)(S - AC)]}$$

en représentant par S la demie somme

$$\frac{AB + AC + BC}{2}$$

des trois côtés.

FIG. 60. 5. Si l'on peut mesurer un côté et deux angles, ce qui donne aussi le troisième; si l'on a, par exemple, le côté BC et les trois angles A, B, C, l'aire aura pour expression:

$$\tfrac{1}{2} \overline{BC}^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A}.$$

6. Si dans le triangle ABC, il n'y a d'accessible que le côté AB, et qu'on ne soit pas libre d'employer les sinus, on prolongera le côté CA en L jusqu'à ce que AL soit égal à AB, et ayant divisé la ligne AB en deux parties égales en M, et déterminé le point P, où le rayon visuel MC coupe la ligne AB; l'aire du triangle ABC sera $\frac{AM.LM.AP}{BP - AP}$.

FIG. 61. 7. Supposons le côté AB inaccessible, mais qu'on

puisse mesurer AC et BC, et qu'ayant pris sur CB,

$$CD = CA,$$

on puisse encore mesurer AD, l'aire du triangle ABC sera:

$$\tfrac{1}{4} \frac{AD . BC}{AC} \sqrt{4\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2},$$

et si l'on veut employer les logarithmes, le logarithme de l'aire sera:

$$\tfrac{1}{2}\{l(2AC + AD) + l(2AC - AD)\} + l.AD + l.BC - l.AC + l.4.$$

S'il est impossible de mesurer AD, on prendra sur les côtés CA et CB, et à égale distance du point C des points P et Q, et on mesurera PQ, l'aire ABC sera:

$$\tfrac{1}{4} \frac{BC.PQ.AC}{\overline{PC}^2} \sqrt{4\overline{PC}^2 - \overline{PQ}^2},$$

et elle aura pour logarithme:

$$\tfrac{1}{2}\{l.(2PC + PQ) + l.(2PC - PQ)\} + l.BC + l.PQ + l.AC - 2l.PC - l.4$$

Scholie.

Tout polygone pouvant être divisé en triangles, le problême précédent servira à

D

trouver l'aire d'un polygone quelconque, en sommant les aires des triangles dans lesquels on peut le diviser par le moyen du problême suivant.

PROBLÊME II.

Partager un polygone ABCDEF *en triangles.*

SOLUTIONS.

FIG. 62. 1. AYANT pris un point O dans l'intérieur du polygone, on menera de ce point à tous les angles les droites OA, OB, OC, OD, OE, OF et elles le partageront en un nombre de triangles égal à celui de ses côtés.

FIG. 63. 2. Ayant pris un point O sur un côté quelconque AB du polygone, et ayant mené de ce point aux angles les droites OC, OD, OE, OF, on aura un nombre de triangles égal à celui des côtés du polygone diminué d'une unité.

FIG. 64. 3. D'un angle quelconque A du polygone, on menera les droites AC, AD, AE aux autres angles, et le polygone sera partagé en autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux.

PROBLÊME III.

Mesurer l'aire d'un parallélogramme ABCD.

SOLUTIONS.

1. L'AIRE demandée est égale au produit FIG. 65. d'un côté pris pour base, par la hauteur du parallélogramme, c'est-à-dire par la distance du côté pris pour base à celui qui lui est parallele; ainsi, si PQ est perpendiculaire aux deux côtés AB et DC, et MN aux deux côtés AD et BC, l'aire demandée sera $DC.PQ$ ou $AD.MN$.

2. L'aire demandée sera encore égale au produit de deux côtés contigus par le sinus de l'angle qu'ils comprennent, c'est-à-dire que l'on aura :

$$ABDC = AB.DC.\sin ADC$$
$$= DC.CB.\sin DCB.$$

FIG. 66.

Si le parallélogramme était rectangle, $\sin DCB$ serait l'unité, et l'aire serait seulement égale au produit de deux côtés contigus AD et DC, ou DC et CB.

D 2

PROBLÊME IV.

Mesurer l'aire d'un trapeze ABCD, *dont* AB *et* CD *sont les deux côtés paralleles.*

SOLUTIONS.

FIG. 67. 1. MENEZ PQ perpendiculaire aux deux cotés paralleles, l'aire du trapeze sera

$$\tfrac{1}{2}(AB + CD)PQ.$$

2. Divisez en deux également en M et N les cotés non paralleles AD et BC, et menez MN, l'aire du trapeze sera $MN.PQ$.

3. Soient $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, l'aire sera :

$$\frac{a+c}{4(a-c)}\sqrt{[2(d^2+b^2)(a-c)^2-(a-c)^4-(d^2-b^2)^2]}.$$

PROBLÊME V.

Décomposer un polygone en triangles et en trapezes.

SOLUTION.

FIG. 68. MENEZ une droite, par exemple, la droite AE qui divise le polygone en deux parties; sur cette droite et des sommets de tous les angles du polygone, abaissez les per-

pendiculaires Bb, Cc, Dd, Ee, Ff, Gg, Hh, Ii, Kk, Ll; le polygone sera divisé par ces droites en trapezes et en triangles.

Scholie.

Cette méthode peut quelquefois être substituée avec avantage à la division en triangles, pour avoir l'aire d'un polygone, et elle s'exécute facilement avec l'équerre.

PROBLÊME VI.

Mesurer un polygone ABCDEF *au moyen d'un rectangle, de trapezes et de triangles.*

SOLUTIONS.

1. ON inscrira d'abord dans le polygone FIG. 69. le rectangle $APQa$ que l'on prendra le plus grand ou un des plus grands qui puissent y être inscrits; des points B, C et D, on abaissera ensuite sur les côtés du rectangle les perpendiculaires Bb, Cc, Dd; ces perpendiculaires partageront la partie restante du polygone en trapezes et en triangles, et l'aire totale demandée sera la somme de toutes ces aires partielles.

2. Au polygone lui-même, on circons- FIG. 70.

D 3

crira le rectangle $FfeE$ que l'on fera le plus petit possible; des angles du polygone qui ne seront pas sur les côtés du rectangle, par exemple, des points A, B et D on abaissera sur ces côtés les perpendiculaires Aa, Bb, Dd; l'aire du polygone sera la différence de l'aire du rectangle $FfeE$ et des aires des triangles ou des trapezes qui sont extérieurs au polygone $ABCDEF$.

PROBLÊME VII.

Mesurer l'aire du quadrilatère ABXZ.

SOLUTIONS.

FIG. 71. 1. SI l'on peut mesurer les diagonales AZ, BX, et la surface d'un des quatre triangles ACB, BCZ, ZCX, XCA, par exemple de

$$ACB = A,$$

l'aire du quadrilatère entier sera :

$$A.\frac{AZ.BX}{AC.BC}$$

2. Si l'on ne peut mesurer que les trois droites AB, AC, BC, on prendra le milieu M du côté AB, et de ce point on menera aux points X et Z, les droites MX et MZ qui rencontreront en Q et P les

droites AZ et BX; nommant alors A l'aire connue du triangle ACB, on aura :

$$ABXZ = A\frac{(AQ - CQ)(BP - CP)}{BP.AQ}.$$

Si le point M ne peut pas être pris au milieu de la ligne AB, on aura :

$$ABXZ = A\left(1 + \frac{MB.CP}{MA.BC - AP.CP}\right)\left(1 + \frac{MA.CQ}{MB.AC - AB.CQ}\right).$$

3. Si l'on peut prolonger deux côtés, BX FIG. 72. et AZ par exemple, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en C; si de plus on peut mesurer les lignes CX, CZ et l'aire A du triangle ABC, l'aire du quadrilatère sera :

$$A\left(\frac{CX.CZ}{CA.CB} - 1\right).$$

Si au lieu de l'aire A du triangle ABC, on avait l'aire S du triangle CXZ, celle du quadrilatère serait :

$$S\left(1 - \frac{CA.CB}{CX.CZ}\right).$$

4. Si l'on ne peut mesurer que les trois droites AB, AC, BC, on déterminera les points M, P et Q comme dans le n°. 2, et en appellant A l'aire du triangle ABC, l'aire $ABXZ$ sera :

D 4

$$A\left(\frac{CP.CQ}{(CP - BP)(CQ - AQ)} - 1\right).$$

Si le point M ne peut pas être pris au milieu de la distance AB, l'aire $ABXZ$ sera :

$$A\left(\frac{MA.CQ}{AB.CQ - MB.AC}\cdot\frac{MB.CP}{AB.CP - MA.BC} - 1\right).$$

FIG. 73. 5. Si le côté XB prolongé de X vers B, et la ligne ZM menée par le point Z et par le milieu M de AB, peuvent se rencontrer en Q; en tirant la ligne PQ et appellant a l'aire AMQ, b l'aire PMB, c l'aire QMP, on aura pour l'aire $ABXZ$:

$$ab\frac{3c - a - b}{(c - a)(c - b)} = abc\frac{c + (c - a) + (c - b)}{c(c - a)(c - b)}.$$

Si le point M n'est pas le milieu de AB, on désignera par r et r' les rapports $\frac{MA}{MB}$, $\frac{MB}{MA}$, et l'aire $ABXZ$ sera :

$$ab\frac{c(1 + r + r') - a - b}{(cr - a)(cr' - b)}$$

ou

$$abc\frac{c + (cr - a) + (cr' - b)}{c(cr - a)(cr' - b)}.$$

PROBLÊME VIII.

Mesurer l'aire du Pentagone ADEFG, *au moyen des trois diagonales* AE, AF, GD.

SOLUTION.

EN appellant A l'aire du triangle ABC FIG. 74. formé par ces trois diagonales, l'aire du pentagone sera :

$$A\left(\frac{AF.BG}{AB.BC} + \frac{AE.CD}{AC.BC} + \frac{AF.AE}{AB.AC}\right).$$

PROBLÊME IX.

Mesurer l'aire d'un héxagone DEFGHK *par le moyen des trois diagonales* DG, EH, FK.

SOLUTION.

EN désignant comme tout à l'heure par A FIG. 75. l'aire du triangle ABC formé par les trois diagonales, on aura pour l'aire demandée :

$$A\left(\frac{AE.AF + AH.AK}{AB.AC} + \frac{BD.BK + BF.BG}{AB.BC} + \frac{CE.CD + CG.CH}{AC.BC} - 2\right).$$

PROBLÈME X.

Mesurer l'aire de l'héxagone DEFGHK *au moyen des côtés* DK, GH, EF, *continués jusqu'à ce qu'ils se rencontrent mutuellement en* A, B *et* C.

SOLUTION.

FIG. 76. EN appellant A l'aire du triangle ABC, l'aire de l'héxagone sera :

$$A\left(1-\frac{AH.AK}{AB.AC}-\frac{BF.BG}{AB.BC}-\frac{CD.CE}{AC.BC}\right).$$

PROBLÊME XI.

Mesurer l'aire du polygone BCDEFG *au moyen de ses côtés prolongés jusqu'à la rencontre des côtés d'un triangle circonscrit, comme dans la figure.*

SOLUTION.

FIG. 77. SUPPOSONS que les côtés BG et CD se rencontrent en A de maniere que le polygone reste compris dans l'intérieur du triangle ABC, et prolongeons DE jusqu'à la rencontre de la même ligne en K; en appellant alors A l'aire du triangle ABC, l'aire

du polygone sera :

$$A\left(1-\frac{AD.AH}{AB.AC}-\frac{AD.HE.HK}{AB.AC.HD}-\frac{AD.HE.KF.KG}{AB.AC.HD.KE}\right)$$

ou bien si l'on désigne par S l'aire ADH, celle du polygone aura pour expression :

$$S\left(\frac{AB.AC}{AD.AH}-1-\frac{EH.KH}{AH.DH}-\frac{EH.KF.KG}{AH.DH.KE}\right).$$

Problêmes sur la division proportionnelle des aires.

PROBLÊME XII.

Partager l'aire donnée du triangle ABC *en deux aires qui aient entr'elles une raison donnée.*

SOLUTION.

SI la division doit se faire en partant d'un angle, de l'angle C, par exemple, on divisera la base opposée en D suivant le rapport donné et on menera CD. FIG. 78.

SI la droite qui partage le triangle doit passer par un point D, donné sur l'un AC FIG. 79.

des côtés, et si le rapport qui doit exister entre une partie et le tout, est celui de p à t, il faudra prendre sur CB,

$$CE=\frac{p.CA.CB}{t.CD}$$

et tirer DE; le triangle CDE sera la partie cherchée. Si CE était plus grand que CB, il faudrait prendre sur AB,

$$Ae=\frac{(t-p)AC.AB}{t.AD},$$

et le quadrilatère $DCBE$ serait la partie demandée.

PROBLÊME XIII.

Partager le parallélogramme ABCD *en deux parties telles que l'une des deux soit au tout : : p : t.*

SOLUTION.

FIG. 80. SI la division doit se faire par une droite parallèle aux côtés, on prendra

$$Be=\frac{p.AB}{t},$$

et le parallélogramme $eBCd$ sera la partie p.

Si la division doit se faire par une droite CE menée de l'angle C, on appellera p la plus petite partie et on prendra

$$Be=\frac{2p.AB}{t},$$

le triangle CEB sera la partie p.

Si la droite qui partagera le parallélogramme, doit passer un point P donné sur le côté AB, on prendra sur le côté opposé CD, une partie : FIG. 81.

$$CQ=\frac{2p.AB}{t}-PB,$$

si PB est plus petit que $\frac{2p.AB}{t}$; et s'il est plus grand, on prendra sur BC une partie :

$$BR=\frac{2p.BA.BC}{t.BP};$$

enfin, si CQ est plus grand que CD, on prendra sur AD :

$$AT=\frac{2(t-p)AB.AD}{t.AP},$$

et dans les trois cas la partie homologue à p, sera la partie à droite de celui qui regarde la figure.

PROBLÊME XIV.

Diviser dans un rapport donné, l'aire du trapeze ABCD *par un point* P *donné sur un des côtés parallèles* AB *et* DC.

SOLUTION.

FIG. 82. SI l'on veut que la partie $PQCB$ soit au trapeze entier comme $p:t$, il faudra prendre :

$$QC = \frac{p(AB+DC)}{t} - PB.$$

Dans le cas ou cette valeur serait négative, il faudrait encore prendre

$$BR = \frac{p.BC(AB+CD)}{t.AP},$$

et si elle surpassait DC, il faudrait prendre

$$AT = \frac{(t-p)AD(AB+DC)}{t.AP}.$$

PROBLÊME XV.

Étant donné un point P *sur un des côtés non parallèles du trapeze* ABCD, *exprimer au moyen de l'aire du trapeze entier, celles des trois triangles* ABP, BPC, CPD.

SOLUTION.

EN appellant A l'aire du trapeze, on aura : FIG. 83.

$$ABP = \frac{A.AP.AB}{(AB+DC)AD},$$

$$BPC = \frac{A(AB.DP+AP.DC)}{(AB+DC)AD},$$

$$CPD = \frac{A.DP.DC}{(AB+DC)AD}.$$

PROBLÊME XVI.

Par un point P *donné sur un des côtés non parallèles d'un trapeze, mener une droite qui le divise en deux parties qui ayent entr'elles une raison donnée.*

SOLUTION.

AYANT trouvé par le problême précédent les valeurs des triangles ABP, BPC, CPD,

il sera facile de voir sur laquelle des trois bases AB, BC, CD, doit tomber le point de division et le problême se réduira à partager un des triangles, suivant une raison donnée, et par une ligne menée d'un des angles, ce qui est l'objet de la solution du problême XII.

PROBLÊME XVII.

Mesurer l'aire d'un quadrilatère ABCD *qui a un angle droit en* A.

SOLUTION.

FIG. 84. SOIENT $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, et p la demie somme $\frac{a+b+c+d}{2}$ des quatre côtés; l'aire du quadrilatère sera :

$$\frac{1}{2}\sqrt{[4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-ad(ad+2bc)]} + \frac{1}{2}ad.$$

PROBLÊME XVIII.

Mesurer l'aire d'un quadrilatère ABCD *dans lequel la somme de deux angles opposés est égale à deux angles droits en supposant que ce quadrilatère puisse s'inscrire dans un cercle.*

SOLUTION.

EN conservant les mêmes dénominations que dans le problême précédent, l'aire demandée

mandée sera :

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

ou

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

en représentant par s la demie-somme

$$\frac{a+b+c+d}{2}$$

des quatre côtés.

PROBLÊME XIX.

Mesurer l'aire d'un rhombe ABCD.

SOLUTION.

MENEZ les diagonales AC et BD, l'aire FIG. 85. sera : $\frac{1}{2}$ $AC.BD$.

PROBLÊME XX.

Mesurer l'aire d'un polygone régulier.

SOLUTION.

SOIENT a le côté AB du polygone régulier, n le nombre de ses côtés, R le rayon AC du cercle circonscrit, et S l'aire du polygone, on aura : FIG. 86.

E

$$S = \tfrac{1}{4} n a^2 \cot \frac{180^\circ}{n} = \tfrac{1}{2} n R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$
$$= n r^2 \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}.$$

PROBLÊME XXI.

Mesurer l'aire d'un cercle dont le rayon et la circonférence sont donnés.

SOLUTION.

SOIENT R le rayon, C la circonférence, A l'aire, π le rapport de la circonférence au diamètre $= \frac{22}{7} = \frac{355}{113} = 3{,}1415926535$, on aura :

$$A = \tfrac{1}{2} CR = \pi R^2 = \frac{C^2}{4\pi}.$$

PROBLÊME XXII

Mesurer l'aire d'une ellipse.

SOLUTION.

SOIENT M le demi grand axe, N le demi petit axe, C l'excentricité ou la distance du centre à un foyer, et A l'aire demandée, on aura :

$$A = MN\pi = M\pi\sqrt{M^2 - C^2} = N\pi\sqrt{N^2 + C^2}.$$

PROBLÊME XXIII.

Mesurer l'aire d'une sphère.

SOLUTION.

SOIENT R le rayon, C la circonférence d'un grand cercle et S l'aire demandée, on aura :

$$S = 2CR = 4\pi R^2 = \frac{C^2}{\pi}.$$

PROBLÊME XXIV.

Mesurer l'aire d'un cône droit.

SOLUTION.

SOIENT R le rayon du cercle de la base, C la circonférence, T la hauteur du cône, L son côté et S son aire, on aura :

$$S = \tfrac{1}{2} C(L + R) = \pi R(L + R)$$
$$= \tfrac{1}{2} C\left(L + \frac{C}{2\pi}\right) = \tfrac{1}{2} C\left(\sqrt{T^2 + R^2} + R\right)$$
$$= \pi R\left(\sqrt{T^2 + R^2} + R\right)$$
$$= \tfrac{1}{2} C\left(\sqrt{T^2 + \frac{C^2}{4\pi^2}} + \frac{C}{2\pi}\right).$$

PROBLÊME XXV.

Mesurer l'aire d'un cylindre droit.

SOLUTION.

SOIENT R le rayon, C la circonférence de la base, T la hauteur du cylindre et S son aire, on aura :

$$S = C(\tfrac{1}{2} R + T) = \pi R(\tfrac{1}{2} R + T)$$
$$= C\left(\frac{C}{4\pi} + T\right),$$

Et cette expression de l'aire d'un cylindre coupé par un plan mené parallèlement à la base et à la distance T, restera la même, quelqu'inclinaison que prenne ce plan par rapport à la base, pourvu qu'il passe toujours par le même point de l'axe.

LIVRE QUATRIÈME.

De la polygonométrie.

DÉFINITIONS.

1. PAR l'angle extérieur d'un polygone nous entendrons toujours l'angle que fait un côté d'un polygone avec le prolongement d'un autre côté. FIG. 87.

Soit, par exemple, le polygone $ABCD$: par l'angle extérieur au point D de ce polygone, que nous appellerons l'angle D, nous entendrons toujours l'angle ADc formé au point D par le côté AD et par le prolongement Dc du côté CD.

2. Par angle saillant dans un polygone, on entend les angles qui comme ABC, BCD et CDA présentent leur sommet au dehors. FIG. 87.

Un angle rentrant est celui qui tourne son sommet dans l'intérieur du polygone. FIG. 88

Nous affecterons dorénavant du signe + les angles extérieurs des angles saillants, et du signe — les angles extérieurs des angles rentrans ; ainsi l'angle extérieur de l'angle rentrant CDA (*fig.* 88), savoir l'angle ADc, se désignera par $-D$, et l'on représentera par $+D$ l'angle extérieur de l'angle saillant CDA (*fig.* 87), savoir l'angle ADc.

PROBLÈME I.

Trouver une distance AB, *accessible seulement par ses deux extrémités* A *et* B, *au moyen des trois côtés* BC, CD, DA *et des deux angles* C *et* D *du polygone* ABCD.

SOLUTION.

FIG. 87, 88. On aura :

$$AB = \sqrt{\begin{cases} \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 \\ + 2BC.CD.\cos C \\ + 2CD.DA.\cos\pm D \\ + 2BC.DA.\cos(C\pm D), \end{cases}}$$

le signe + étant pour la figure 87, et le signe — pour la figure 88.

PROBLÈME II.

Trouver la distance AB *au moyen des quatre côtés* BC, CD, DE, EA *et des trois angles* C, D, E.

SOLUTION.

On aura : FIG. 89, 90.

$$AB = \sqrt{\begin{cases} \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{EA}^2 \\ + 2BC.CD.\cos C \\ + 2CD.DE.\cos D \\ + 2DE.EA.\cos\pm E \\ + 2BC.DE.\cos(C+D) \\ + 2CD.EA.\cos(D\pm E) \\ + 2BC.EA.\cos(C+D\pm E), \end{cases}}$$

le signe + devant servir à la figure 89, et le signe — à la figure 90.

PREMIER PROBLÈME GÉNÉRAL.

Trouver le côté inconnu d'un polygone dont on connaît tous les autres côtés et tous les angles excepté ceux qui sont adjacents au côté inconnu.

SOLUTION.

Le côté inconnu sera la racine quarrée de la somme des quarrés de tous les côtés connus, plus deux fois les produits de tous ces côtés multipliés deux à deux, et par le cosinus de la somme des angles extérieurs qu'ils comprennent dans la partie du polygone opposée au côté cherché.

PROBLÈME III.

Etant donnés dans le quadrilatère ABCD *les deux côtés* BC *et* CD *et les angles* A, D, C, *trouver le côté* AB.

SOLUTION.

FIG. 87, 88. On aura :

$$AB = \frac{DC\sin\pm D + CB\sin(\pm D + C)}{\sin A}.$$

PROBLÈME IV.

Etant donnés dans le pentagone ABCDE *les trois côtés* BC, CD, DE, *et tous les angles, trouver le côté* AB.

SOLUTION.

Le côté inconnu sera donné par la formule : FIG. 89, 90.

$$AB = \{ED.\sin\pm E + DC.\sin(\pm E + D) + CB.\sin(\pm E + D + C)\} : \sin A.$$

SECOND PROBLÈME GÉNÉRAL.

Etant donnés dans un polygone tous les angles et tous les côtés moins deux, déterminer l'un de ces côtés inconnus.

SOLUTION.

On aura le côté cherché en prenant la somme des produits de tous les côtés donnés, multipliés respectivement par le sinus de la somme des angles extérieurs compris entre chacun d'eux, et le côté inconnu non cherché, dans la partie du polygone opposée au côté cherché, et en divisant cette somme par le sinus de l'angle que forment les deux côtés inconnus.

PROBLÈME V.

Etant donnés dans le quadrilatère ABCD *les côtés* BC, DA *et tous les angles, trouver le côté* AB.

SOLUTION.

FIG. 87, 88. ON aura le côté demandé par la formule :

$$AB = \frac{BC \sin C - DA \sin \pm D}{\sin(\pm D + A)} = \frac{DA \sin \pm D - BC \sin C}{\sin(B + C)}.$$

PROBLÈME VI.

Etant donnés dans le pentagone ABCDE *les côtés* BC, DE, EA *et les angles, trouver* AB.

SOLUTION.

FIG. 89, 90. ON aura :

$$AB = \frac{BC \sin C - DE \sin D - EA \sin(D \pm E)}{\sin(D \pm E + A)},$$

$$= \frac{DE \sin D + EA \sin(D \pm E) - BC \sin C}{\sin(B + C)}.$$

PROBLÈME VII.

Etant donnés dans l'hexagone ABCDEF *les côtés* BC, CD, EF, FA *et les angles, trouver le côté* AB.

SOLUTION.

ON aura le côté demandé par l'une ou l'autre des deux formules : FIG. 91.

$$AB = \{CD.\sin D + BC.\sin(D + C) - FE.\sin E - AF.\sin(E + F)\} : \sin(E + F + A),$$

$$AB = \{FE.\sin E + AF \sin(E + F) - CD.\sin D - BC \sin(D + C)\} : \sin(D + C + B).$$

TROISIEME PROBLÊME GÉNÉRAL.

Trouver un côté d'un polygone connaissant tous les angles et tous les autres côtés à l'exception de l'un quelconque d'entr'eux.

SOLUTION.

IL faudra pour avoir le côté cherché, multiplier chacun des côtés donnés qui sont placés d'un même côté des côtés inconnus, par le sinus de la somme des angles extérieurs compris dans cette partie du polygone entre les côtés inconnus ; faire la somme des pro-

duits semblables dans l'autre partie, et diviser la différence de ces deux sommes par le sinus de la somme des angles extérieurs compris entre les deux côtés inconnus, mais dans la partie du polygone où les produits ont été négatifs.

Ce troisième problême général contient le second.

Il faut excepter le cas où les deux côtés inconnus seraient parallèles : le problême est alors indéterminé.

PROBLÊME VIII.

Mesurer l'aire du quadrilatere ABCD, *au moyen des trois côtés* BC, CD, DA, *et des deux angles* C *et* D.

SOLUTION.

FIG. 87, 88. L'AIRE demandée aura pour expression

$$\frac{1}{2} \times \begin{cases} BC.CD.\sin C \\ + CD.DA.\sin \pm D \\ + BC.DA.\sin(C \pm D). \end{cases}$$

PROBLÊME IX.

Mesurer l'aire du pentagone ABCDE *au moyen des côtés* BC, CD, DE, EA *et des angles* C, D *et* E.

SOLUTION.

L'AIRE cherchée sera : FIG. 89, 90.

$$\frac{1}{2} \times \begin{cases} BC.CD.\sin C \\ + CD.DE.\sin D \\ + DE.EA.\sin \pm E \\ + BC.DE.\sin(C + D) \\ + CD.EA.\sin(D \pm E) \\ + BC.EA.\sin(C + D \pm E) \end{cases}$$

QUATRIEME PROBLÊME GÉNÉRAL.

Mesurer l'aire d'un polygone au moyen des côtés et des angles.

SOLUTION.

EN ne tenant pas compte d'un côté et des deux angles qui lui sont adjacents, l'aire demandée sera la demie somme des côtés pris deux à deux et multipliés par le sinus de la somme des angles extérieurs compris entre ces deux côtés.

Scholie.

FIG. 93. Si le polygone avait un grand nombre de côtés comme *ABCDEFGH*, il serait plus expéditif de le partager par une diagonale en deux polygones *ABCDE*, *EFGHA* dont le nombre des côtés serait le même, ou ne différerait que d'une unité, et de calculer séparément ces deux polygones en ne tenant pas compte du côté *AE* qu'ils auraient commun, ni des angles qui lui seraient adjacents.

PROBLÈME X.

Dans le quadrilatere ABCD *trouver les angles* A *et* B *adjacents au côté inconnu* AB.

SOLUTION.

FIG. 87, 88. ON déterminera ces deux angles par les formules suivantes :

$$\text{tang}\,ABC = \frac{CD\sin C + DA\sin(C \pm D)}{BC + CD\cos C + DA\cos(C \pm D)}$$

$$\text{tang}\,BAD = \frac{DC\sin \pm D + CB\sin(C \pm D)}{AD + DC\cos D + CB\cos(C \pm D)}.$$

PROBLÈME XI.

Dans le pentagone ABCDE *trouver les angles* A *et* B *adjacents au côté inconnu* AB.

SOLUTION.

LES tangentes de ces angles seront : FIG. 89, 90.

$$\text{tang}\,ABC = \frac{CD.\sin C + DE\sin(C+D) + EA\sin(C+D \pm E)}{BC + CD.\cos C + DE.\cos(C+D) + EA.\cos(C+D \pm E)}$$

$$\text{tang}\,BAE = \frac{ED.\sin \pm E + DC.\sin(\pm E + D) + CB.\sin(\pm E + D + C)}{AE + ED.\cos E + DC\cos(\pm E + D) + CB.\cos(\pm E + D + C)}$$

et il sera facile, au moyen de ces formules, de trouver dans les tables les angles demandés.

CINQUIEME PROBLÊME GÉNÉRAL.

Trouver dans un polygone un côté et les deux angles adjacents, tout le reste étant connu.

SOLUTION.

POUR avoir la tangente de chacun des angles intérieurs inconnus, il faudra multiplier chaque côté qui ne forme pas l'angle inconnu par le sinus de la somme des angles

compris entre ce côté et le côté connu de l'angle inconnu; multiplier aussi chacun des mêmes côtés par le cosinus de la somme des mêmes angles, et diviser la première somme par la seconde augmentée du côté connu de l'angle inconnu.

PROBLÊME XII.

Trouver dans le quadrilatère ABCD *le côté* CD *et les angles* A *et* B, *les autres côtés et les autres angles étant supposés connus.*

SOLUTION.

FIG. 87. ON déterminera *CD* par l'équation

$$CD = \sqrt{\overline{AB}^2 - (AD\sin D - BC\sin C)^2} - AD\cos D - BC\cos C$$

et les angles *A* et *B* par les formules :

$$\text{tang}\,BAD = \frac{\left\{\sin D.\sqrt{\overline{AB}^2 - (AD\sin D - BC\sin C)^2} - (AD\sin D - BC\sin C)\cos D\right\}}{\left\{\cos D.\sqrt{\overline{AB}^2 - (AD\sin D - BC\sin C)^2} + (AD\sin D - BC\sin C)\sin D\right\}}$$

$$\text{tang}\,ABC = \frac{\left\{\sin C.\sqrt{\overline{AB}^2 - (AD\sin D - BC\sin C)^2} + (AD\sin D - BC\sin C)\sin C\right\}}{\left\{\cos C.\sqrt{\overline{AB}^2 - (AD\sin D - BC\sin C)^2} - (AD\sin D - BC\sin C)\sin C\right\}}$$

en

en observant pour la figure 88 d'écrire $-D$ au lieu de $+D$.

SIXIEME PROBLÊME GÉNÉRAL.

Trouver dans un polygone deux angles adjacents à un côté connu et un côté quelconque inconnu.

SOLUTION.

LE premier problème général fournit cette équation : le quarré du côté adjacent aux angles inconnus = la somme des quarrés des autres côtés, plus deux fois les produits de ces côtés multipliés deux à deux et par le cosinus de la somme des angles extérieurs compris entr'eux dans la partie du polygone opposée au premier côté.

De cette équation du second degré, il sera facile de tirer la valeur du côté inconnu, et on trouvera ensuite, par le moyen du cinquieme problême général, les deux angles inconnus.

F

SEPTIEME PROBLÊME GÉNERAL.

Trouver dans un polygone quelconque ABCDEFGHI, *un côté* HG *et deux angles, tels que* A *et* D, *qui ne sont ni contigus ni adjacents au côté cherché : tout le reste étant supposé connu.*

SOLUTION.

FIG. 92. On tirera par les sommets des deux angles inconnus A et D une diagonale AD ; alors on connaîtra dans le polygone $ABCD$ tous les côtés excepté le côté AD, et tous les angles excepté ceux qui sont placés sur cette ligne ; on pourra donc déterminer, par le moyen du premier problême général, la ligne AD et on trouvera ensuite les deux angles BAD, ADC adjacents à cette ligne par le cinquième problême général.

Dans le polygone $ADEFGHI$ situé de l'autre côté de la ligne AD, on déterminera, à l'aide du sixième problême général, le côté inconnu AG et les angles IAD, ADE qui lui sont adjacents.

Comme on a d'ailleurs :

$$IAB = IAD + BAD$$
$$CDE = ADC + ADE,$$

il sera facile de connaître les deux angles demandés.

HUITIEME PROBLÊME GÉNÉRAL.

Dans un polygone quelconque ABCDEFGHI *trouver trois angles quelconques* A, D, G, *les autres angles et tous les côtés étant donnés.*

SOLUTION.

Ayant formé le triangle ADG, on trouvera ses côtés, par le moyen du premier problême général, en se servant des trois polygones $ABCD$, $DEFG$, $GHIA$, dans lesquels on connaît les autres côtés et les angles qui sont placés sur le périmêtre du polygone proposé ; on trouvera ensuite dans ces polygones, à l'aide du cinquième problême général, les angles BAD et CDA, GDE et DGF, HGA et GAI. FIG. 92.

Ayant ainsi déterminé les côtés du triangle AGD, on trouvera les angles par les formules connues de la trigonométrie rectiligne, et l'on aura par conséquent IAB, CDE, FGH.

Tels sont les problêmes de ma *méthode pour la mesure des polygones plans*, imprimée

à Pavie, en 1787 ; ce qui suit en pourra rendre l'application plus générale et plus facile.

Addition pour donner aux problémes précédens la plus grande généralité.

Nous avons précédemment distingué dans un polygone les angles saillans et les angles rentrans, et nous avons affecté le signe + aux angles extérieurs contigus aux angles saillans, et le signe — aux angles extérieurs contigus aux angles rentrans.

Mais si l'on veut considérer ces deux espèces d'angles sous un autre aspect, il en naitra une règle facile non-seulement pour calculer les polygones précédemment examinés, mais encore pour trouver l'expression des côtés et des angles dans des figures rectilignes quelconques.

Quand tous les angles d'un polygone sont saillans, on trouve, en suivant pas à pas son contour et en partant d'un point quelconque, que quand on passe d'un côté à un autre, on se dirige toujours dans un même sens. Par exemple, si, dans le polygone $ABCDE$ (*fig.* 89), on va de A vers B, quand arrivé au point B, on voudra passer sur le côté BC,

il se fera une déviation à droite du côté AB, de même quand du point C on passera sur le côté CD, on éprouvera une autre déviation à droite du côté BC et ainsi de suite : ainsi lorsque tous les angles d'un polygone sont saillans, un corps assujetti a suivre exactement son contour, éprouve à chacun des angles une déviation vers la droite.

Le polygone $ABCDE$ (*fig.* 90), qui a un angle rentrant en E, offre une circonstance différente ; si on commence à le parcourir en allant de A vers B, on éprouve en B, en C et en D des déviations à droite, mais arrivé au sommet E de l'angle rentrant, la déviation se fera à gauche, jusqu'à ce que repassant sur le côté AB et par son extrémité A, qui est le sommet d'un angle saillant, on éprouve, comme dans les premiers cas, une déviation à droite.

On trouvera même que l'angle de déviation est précisément celui que nous avons précédemment appellé angle extérieur, c'est-à-dire l'angle qui est formé par le prolongement d'un côté du polygone et par le côté suivant ; ainsi, dans les figures 89 et 90., l'angle de déviation en F est l'angle extérieur dEA.

Si l'on parcourait le polygone en sens contraire; si, par exemple, dans les figures 89 et 90 on allait de A en E, de E en D, de D en C, etc., on éprouverait aux angles saillans une déviation vers la gauche, et aux angles rentrans une déviation vers la droite.

On dira donc, en général, que les angles saillans et les angles rentrans ont des déviations contraires, que celle des angles saillans est dirigée vers l'intérieur du polygone, et celle des angles rentrans vers l'extérieur.

On trouvera même que la somme des angles extérieurs compris entre deux côtés, n'est autre chose que la déviation entre ces deux côtés. Ainsi, dans la figure 89, $B + C$ n'est autre chose que la déviation que l'on éprouve en allant de AB en CD, puisque pour se trouver sur la direction CD, on s'est d'abord écarté en B d'une quantité égale à l'angle B, et ensuite en C d'une quantité égale à l'angle C; de même, dans la fig. 90, $B + C + D - E$ n'est autre chose que la déviation de AB à EA, bien entendu que, dans cette appréciation, on affectera du signe $+$ les déviations vers l'intérieur de la figure, et du signe $-$ les déviations vers l'extérieur.

En considérant les angles extérieurs sous ce nouveau point de vue et comme angles de déviation, on peut substituer au premier

problême général le problême suivant qui l'est encore davantage, puisqu'il embrasse non seulement tous les cas du premier, mais encore tous ceux des exemples qui lui sont joints et tous les autres semblales.

NOUVEL ÉNONCÉ

DU PREMIER PROBLÊME GÉNÉRAL.

Soient plusieurs droites qui se coupent successivement suivant une loi quelconque, mais telle cependant que l'extrémité de la dernière et l'origine de la première soient au même point, et supposons que l'une de ces droites ainsi que les angles qui lui sont adjacents soient inconnus, les autres droites et les autres angles étant donnés; il s'agit de trouver la droite inconnue.

SOLUTION.

LA droite inconnue sera la racine quarrée de la somme des quarrés de tous les côtés connus et des doubles produits de ces côtés, pris deux à deux et respectivement multipliés pa le cosinus de leur déviation mutuelle.

Exemple I.

Etant données de grandeur et de position FIG. 94.

les trois droites BC, CD, DA et les angles BCD et CDA, trouver la droite AB qui, dans la figure, coupe la ligne DC entre les points D et C.

Si l'on parcourt successivement les trois côtés du polygone, en allant de B en A ou de A en B, on trouvera que les angles de déviation en C et D sont dirigés en sens contraire; en donnant donc à l'un d'eux, à l'angle C, par exemple, le signe $+$, il faudra donner à l'autre le signe $-$, et on aura alors, comme on l'a déjà eu pour la fig. 88;

$$AB = \sqrt{\begin{cases} \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 \\ + 2\, BC.\ CD.\ \cos C \\ + 2\, CD.\ DA.\ \cos D \\ + 2\, BC.\ DA.\ \cos\,(C - D). \end{cases}}$$

Exemple II.

FIG. 95. Etant données les quatre distances AE, ED, DC et CB, ainsi que les angles que ces lignes forment entr'elles aux points E, D et C, trouver la distance des deux points A et B.

En affectant d'un signe contraire l'angle de la déviation en E qui se fait dans un sens différent de celles en D et C, on aura ici, comme on l'a eu pour la figure 90;

$$AB = \sqrt{\begin{cases} \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{EA}^2 \\ + 2BC\ .\ CD\ .\ \cos C \\ + 2CD\ .\ DE\ .\ \cos D \\ + 2DE\ .\ EA\ .\ \cos E \\ + 2BC\ .\ DE\ .\ \cos\,(C + D) \\ + 2CD\ .\ EA\ .\ \cos\,(D - E) \\ + 2BC\ .\ EA\ .\ \cos\,(C + D - E). \end{cases}}$$

On pourra de même substituer aux autres problêmes généraux donnés précédemment, des problêmes plus généraux encore. Il suffira, pour y parvenir, de substituer au mot *polygone* ces mots: *Système de plusieurs droites assujetties à se couper successivement, de manière que la dernière vienne rencontrer la première à son origine*, et aux mots *angles rentrans* ou *saillans*, ces mots *angles de déviation positive* ou *négative*.

De cette manière, tous les problêmes de la figure 88 pourront s'appliquer à la figure 94, et tous ceux de la figure 90 à la figure 95, sans qu'il soit besoin de multiplier inutilement les exemples; il sera seulement utile d'établir quelques règles générales auxquelles la diversité des cas peut donner lieu.

Règle première.

Quand les angles de déviation n'entrent dans l'expression de la valeur d'une inconnue, que par leur cosinus, le signe de ces angles est absolument indifférent, puisque $\cos A = \cos - A$; mais quand les déviations seront les sommes de plusieurs autres, il faudra conserver à chacune son signe, puisque $\cos (A+B)$ n'est pas la même chose que $\cos (A-B)$; nous avons déjà vu une application de cette règle, dans les deux exemples qui ont suivi le nouvel énoncé du premier problème général.

Règle seconde.

Quand les angles de déviation n'entrent que par leur sinus dans la valeur d'un côté ou d'un angle inconnu, le signe des déviations est encore indifférent, tant qu'on n'a pas à combiner par addition des déviations de signe contraire, et les différentes hypothèses ne pourront changer que le signe du résultat; ce signe indiquera la direction du côté ou le sens de la déviation de l'angle conformément à l'hypothèse à laquelle on se sera arrêté.

FIG. 95. Pour faire une application de cette règle supposons que AE, ED, DC et CB étant

quatre chemins connus, par leur longueur et par les angles E, D et C qu'ils forment, il faille tracer un chemin qui joigne en ligne droite les points A et B.

Il est clair que tout se réduit à connaître l'angle CBA; or on peut appliquer à cette question toutes les formules qui se rapportent à la fig. 90, et on aura comme dans le problème XI.

$$\operatorname{tang} ABC = \frac{CD \sin C + DE \sin (C+D) + EA \sin (C+D-E)}{BC + CD \cos C + DE \cos (C+D) + EA \cos (C+D-E)}.$$

Ayant regardé ici comme positive la déviation en C, et la déviation en B étant du même genre; si la valeur de tang ABC est positive, l'angle ABC sera plus petit qu'un droit, et il sera plus grand si cette valeur est négative; ces résultats s'accordent avec ceux de la figure 90.

Nous supposerons, pour second exemple, que, dans le tracé du chemin demandé, on veuille aller de A vers B, il est clair qu'il faut alors déterminer l'angle EAB.

En appliquant ici la formule relative à la figure 90 du problême XI, on aura :

$$\operatorname{tang} BAE = \frac{ED \sin (-E) + DC \sin (D-E) + CB . \sin (C+D-E)}{AE + ED \cos E + DC \cos (D-E) + CB \cos (C+D-E)}$$

et, à la différence de l'exemple précédent, l'angle BAE sera plus grand ou plus petit que 90°, suivant que cette valeur de tang BAE sera positive ou négative; cette différence entre le résultat présent et celui de la figure 90, tient à ce que, dans cette dernière, la déviation en A et la déviation en E sont de nature différente.

On voit, dans ces deux exemples, qu'on peut également prendre en sens contraire les deux déviations en C et en E, en changeant tous les signes dans les expressions des angles soumis à la caractéristique *sin*, c'est-à-dire en écrivant

$$\sin(-C),\ \sin(-C-D),\ \sin(-C-D+E),$$

pour le premier exemple, et

$$\sin E,\ \sin(E-D),\ \sin(E-D-C),$$

pour le second; les tangentes prendront alors un signe contraire, ce qui est conforme à la nature des angles qui ont changé le sens de leur déviation.

Règle troisième.

Quand on considére ces systèmes de plusieurs droites, dans lesquels deux quelconques non consécutives se rencontrent, comme dans la figure 94 où la ligne DC

rencontre la ligne AB en x, et dans la figure 95 où la ligne DE rencontre de même la ligne AB en x, on ne doit pas appliquer la solution du quatrieme problème général dans lequel on cherche l'aire, car au lieu d'avoir la somme des aires opposées au point de rencontre x, on aurait leur différence ou le résultat que l'on obtient lorsque de la somme des aires dans lesquelles les déviations prises négativement répondent aux angles extérieurs des angles saillans, on retranche la somme de celles dans lesquelles les angles extérieurs des angles saillans coincident avec les déviations positives. Par exemple, l'expression :

$$\tfrac{1}{2}\{BC . CD \sin C + CD . DA . \sin(-D) + BC . DA \sin(C-D)\}$$

appliquée à la figure 94, indique la différence des aires BCx et xDA.

Mesure des Polygones au moyen d'une base.

Proposons-nous maintenant ces problêmes :

Etant donnés : *un côté d'un polygone et les angles que fait ce côté avec les diagonales menées par ses extrémités et avec les côtés contigus* ; trouver *la surface, les côtés et les angles inconnus.*

PROBLÊME I.

Trouver la surface.

SOLUTION.

ON partagera d'abord le polygone en triangles qui aient tous leur sommet à l'une des extrémités du côté que l'on prend pour base.

On déterminera ensuite, par le moyen que nous allons enseigner tout-à-l'heure, l'expression générale de chacun de ces triangles.

Enfin, on combinera ces triangles par addition ou par soustraction, selon qu'il conviendra à la figure du polygone. Tout cela va s'éclaircir par des exemples.

Exemple I.

FIG. 96. Soit donnée la base AB du polygone $ABCDEF$ dont tous les angles sont saillans, et soient aussi donnés tous les angles que font avec cette base les deux côtés contigus AF, BC et les diagonales AC, AD, AE, BD, BE, BF; il suit immédiatement de là :

1°. Que le polygone sera divisé en triangles BCD, BDE, BEF, BEA, qui auront

tous

tous leur sommet en B; ou bien en triangles ACB, ACD, AED, AFE qui auront leur sommet en A.

2°. L'expression de la surface de l'un quelconque de ces triangles, du triangle BDE par exemple, s'obtiendra en multipliant la moitié du quarré de la base AB par une fraction, dont le numérateur sera le produit des sinus des angles que font avec la base AB et à l'extrémité A de cette base qui n'est pas le sommet du triangle, les diagonales DA, EA qui passent par deux angles du triangle; et dont le dénominateur sera le produit des sinus des angles que font les mêmes diagonales DA, EA avec les côtés DB et EB, cette fraction étant encore multipliée par le sinus de l'angle que font entr'eux les deux côtés du triangle qui partent du point B; ainsi l'aire DBE sera :

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB}^2 \frac{\sin DAB \sin EAB}{\sin ADB \sin AEB} \sin DBE.$$

Cette expression se simplifie pour le triangle dont un des côtés est la base AB, par exemple, pour le triangle FBA, dont l'aire :

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB}^2 \frac{\sin FAB \sin FBA}{\sin AFB},$$

s'obtiendra en multipliant la moitié du quarré

G

de AB par le produit des sinus des angles qui lui sont adjacens, et en divisant par le sinus de l'angle qui lui est opposé.

3°. Ajoutant maintenant les aires des triangles BCD, BDE, BEF, BFA, on aura pour l'aire du polygone $ABCDEF$:

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB}^2 \times \begin{cases} \dfrac{\sin CAB \sin DAB \sin CBD}{\sin ACB \sin ADB} \\ + \dfrac{\sin DAB \sin EAB \sin DBE}{\sin ADB \sin AEB} \\ + \dfrac{\sin EAB \sin FAB \sin EBF}{\sin AEB \sin AFB} \\ + \dfrac{\sin FAB \sin FBA}{\sin AFB}. \end{cases}$$

En ajoutant les triangles ACB, ADC, AED, AFE, on trouverait cette autre expression de la même aire :

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB}^2 \times \begin{cases} \dfrac{\sin CBA \sin CAB}{\sin BCA} \\ + \dfrac{\sin CBA \sin DBA \sin CAD}{\sin BCA \sin BDA} \\ + \dfrac{\sin DBA \sin EBA \sin DAE}{\sin BDA \sin BEA} \\ + \dfrac{\sin EBA \sin FBA \sin EAF}{\sin BEA \sin BFA}. \end{cases}$$

Exemple II.

Soit donnée la base du polygone $ABCDEF$ FIG. 97.
dans lequel l'angle DEF est rentrant; si de tous les angles de ce polygone, on mene au point A les droites CA, DA, EA, et au point B les droites DB, EB, FB; l'aire du polygone sera la somme des aires CBD, DBE, EBF et FBA ou l'excès de la somme des aires CBA, DCA et FEA sur l'aire EDA, ensorte qu'on aura pour l'expression de cette aire :

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB}^2 \times \begin{cases} \dfrac{\sin CAB.\sin DAB.\sin CBD}{\sin ACB.\sin ADB} \\ + \dfrac{\sin DAB.\sin EAB.\sin DBE}{\sin ADB.\sin AEB} \\ + \dfrac{\sin EAB.\sin FAB.\sin EBF}{\sin AEB.\sin AFB} \\ + \dfrac{\sin FAB.\sin FBA}{\sin AEB}. \end{cases}$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB}^2 \times \begin{cases} \dfrac{\sin CBA.\sin BAC}{\sin BCA} \\ + \dfrac{\sin CBA.\sin DBA \sin CAD}{\sin BCA.\sin BDA} \\ + \dfrac{\sin DBA.\sin EBA.\sin DAE}{\sin BDA.\sin BEA} \\ + \dfrac{\sin EBA.\sin FBA.\sin EAF}{\sin BEA.\sin BFA} \end{cases}$$

G 2

PROBLÊME II.

Trouver les côtés.

Solution.

FIG. 96, 97. ON se servira pour résoudre cette question des solutions 14 et 15 du Problême III, du livre I.

Par exemple, si l'on veut trouver le côté DE, il suffira de substituer dans les formules qui conviennent à ces solutions les lettres D et E, aux lettres Z et X.

PROBLÊME III.

Trouver les angles.

Solution.

POUR prendre un exemple, afin de mieux faire entendre la règle, supposons qu'on veuille avoir l'angle CDE; on déterminera d'abord les angles CDA et BDE au moyen des équations :

$$\tang CDA = \frac{\sin DAB - \frac{\sin CAB}{\sin ACB}\sin(DAB + CAB)}{\frac{\sin DBA}{\sin BDA} + \cos DAB + \frac{\sin CAB}{\sin ACB}\cos(DAB + CBA)},$$

$$\tang BDE = \frac{\sin DBA - \frac{\sin EBA}{\sin BEA}\sin(DBA + EAB)}{\frac{\sin DAB}{\sin BDA} + \cos DBA + \frac{\sin EBA}{\sin BEA}\cos(DBA + EAB)}$$

et si de la somme de ces deux angles, on retranche l'angle BDA, la différence sera l'angle cherché CDE.

LIVRE CINQUIEME.

De la mesure des solides.

PROBLÊME I.

Mesurer un Prisme ou un Cylindre.

Solution.

ON multipliera la base par la hauteur, le produit sera la solidité du prisme ou du cylindre : soient b la base, a la hauteur et s la solidité, on aura :

$$s = ab,$$

et cette formule sera encore vraie, quelque soit l'inclinaison mutuelle des plans des deux bases pourvu que par a, on entende la portion de l'axe du cylindre comprise entre les deux plans et par b l'aire de la section faite perpendiculairement aux arètes.

PROBLÊME II.

Mesurer une Pyramide ou un Cône.

Solution.

ON multipliera la base par le tiers de la hauteur, le produit sera la solidité cherchée; ainsi en désignant la base par b, la hauteur par a et la solidité par s, on aura :

$$s = \tfrac{1}{3}ab.$$

PROBLÊME III.

Mesurer un Tronc de Pyramide ou de Cône.

Solution.

A la somme des deux bases parallèles, on ajoutera une base moyenne proportionnelle entre les deux premières, et le tiers du produit du résultat par la hauteur du tronc de pyramide ou de cône en sera la solidité; soient B la base inférieure, b la base supérieure, et a la hauteur du tronc; on aura pour la solidité cherchée :

$$\tfrac{1}{3}a(b + \sqrt{bB} + B).$$

PROBLÊME IV.

Trouver la solidité d'une Sphère.

Solution.

LA solidité d'une sphère s'obtiendra en multipliant sa surface par le tiers du rayon. Soient r le rayon de la sphère, c la circonférence d'un de ses grands cercles, s sa surface, π le rapport de la circonférence au diamètre $= \frac{22}{7} = \frac{355}{113} = 3,1415926535$, la solidité de la sphère sera :

$$\tfrac{1}{3}rs = \tfrac{2}{3}r^2c = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{6}\frac{cs}{\pi} = \tfrac{1}{6}\frac{c^3}{\pi^2} = \tfrac{1}{6}\sqrt{\frac{s^3}{\pi}}.$$

PROBLÈME V.

Mesurer la solidité d'un Secteur de sphère.

SOLUTION.

ON multipliera la surface du secteur par le tiers du rayon de la sphère, le produit sera la solidité cherchée.

Soient R le rayon de la sphère, r celui du cercle qui sert de base au secteur, $c = 2\pi r$ la circonférence de ce cercle, la solidité du secteur sera :

$$\tfrac{2}{3}\pi R^3\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)=\tfrac{2}{3}\pi R^3\left(1-\sqrt{1-\frac{c^2}{4\pi^2R^2}}\right)$$

PROBLÊME VI.

Mesurer la solidité d'un Segment de sphère.

SOLUTION.

ON multipliera la surface du segment par le tiers du rayon de la sphère, et on retranchera de ce produit la solidité du cône qui a pour base celle du segment et pour sommet le centre de la sphère : la différence de ces deux solidités sera la solidité cherchée.

Soient R le rayon de la sphère, r celui

de la base du segment et a sa hauteur, on aura pour l'expression de sa solidité :

$$\frac{\pi a^2}{3}(3R-a)=\frac{\pi a}{6}(3r^2-a^2).$$

PROBLÊME VII.

Mesurer une pyramide au moyen de ses arêtes.

SOLUTION.

SOIT $ABCD$ la pyramide proposée ; en posant

$$\begin{array}{ll} AB=b & BC=f \\ AC=c & CD=g \\ AD=d & BD=k \end{array}$$

on aura pour solidité de la pyramide,

$$\tfrac{1}{12}\sqrt{\left\{\begin{array}{l} +b^2g^2(c^2+d^2+f^2+k^2-b^2-g^2) \\ +c^2k^2(b^2+d^2+f^2+g^2-c^2-k^2) \\ +d^2f^2(b^2+c^2+g^2+k^2-d^2-f^2) \\ -b^2c^2f^2-b^2d^2k^2-c^2d^2g^2-f^2g^2k^2 \end{array}\right.}$$

COROLLAIRE I.

Si l'on avait $AB = AC$, $DB = DC$, cette expression de la solidité se réduirait à :

$$\tfrac{1}{12}f\sqrt{(2b^2g^2+2b^2d^2+2d^2g^2-b^4-d^4-g^4-d^2f^2)},$$

ou à

$$\tfrac{1}{12}f\sqrt{(16A^2-d^2f^2)},$$

en nommant A l'aire du triangle

$$ABD = ADC.$$

COROLLAIRE II.

Si l'on avait $AB = AC = DB = DC$, la solidité serait :

$$\tfrac{1}{12}fd\sqrt{4b^2-d^2-f^2}.$$

COROLLAIRE III.

Si l'on avait

$$AB = AC = AD,\ BC = BD = CD,$$

la solidité serait :

$$\tfrac{1}{12}f^2\sqrt{3b^2-f^2}.$$

COROLLAIRE IV.

Enfin, si toutes les arêtes étaient égales, la solidité serait seulement :

$$\tfrac{1}{12}(AB)^3\sqrt{2}.$$

Scholie.

On peut se servir des formules précé-

dentes pour avoir promptement la solidité de certains polyèdres à faces triangulaires. Supposons, par exemple, qu'autour de AD comme autour d'un axe, on place des pyramides toutes semblables à la pyramide $ABCD$ qui a les conditions du corollaire I ; on aura sur-le-champ la solidité de ce polyèdre en multipliant la formule du corollaire I, par le nombre des pyramides.

PROBLÊME VIII.

Trouver l'expression de la solidité d'une pyramide au moyen des trois arêtes et des trois angles plans qui forment un de ses angles solides.

SOLUTION (1).

SOIT $ABCD$ la pyramide donnée et faisons,

$$\begin{array}{ll} AB=b & BAC=p \\ AC=c & BAD=q \\ AD=d & CAD=r \end{array}$$

(1) On peut voir les détails de cette solution et de celle du problême précédent, dans les notes que le citoyen Legendre a placées à la suite de ses Elémens de Géométrie.

la solidité cherchée sera :

$$\tfrac{1}{6}bcd\sqrt{(1-\cos^2 p-\cos^2 q-\cos^2 r+2\cos p\cos q\cos r)}$$
$$=\tfrac{1}{6}bcd\sqrt{[\cos(r-p)-\cos q][\cos q-\cos(r+p)]}$$
$$=\tfrac{1}{3}bcd\sqrt{\sin S\sin(S-p)\sin(S-q)\sin(S-r)}$$

en représentant par S la demie somme

$$\frac{p+q+r}{2}.$$

COROLLAIRE.

Si $p=q=r$, la solidité sera :

$$\tfrac{1}{6}\,bcd\sqrt{(1-3\cos^2 p+2\cos^3 p)}$$
$$=\tfrac{1}{6}\,bcd\sqrt{(1-\cos p)(\cos p-\cos 2p)}$$
$$=\tfrac{1}{3}\,bcd\sqrt{\sin\frac{3p}{2}\sin^3\frac{p}{2}}.$$

PROBLÊME IX.

Mesurer la solidité d'un corps qui a deux bases opposées ABCD , abcd *parallèles, dont tous les angles sont saillans et dont les quatre faces latérales* ABba, BCcb, CDdc, DAad *sont planes et placées d'une manière quelconque.*

1. On mesurera dans la base deux angles opposés B et D qui seront respectivement

égaux aux angles b et d ; on mesurera aussi tous les côtés des deux bases et la hauteur du corps, c'est-à-dire, la distance des deux bases parallèles et en l'appellant P, on aura pour la solidité cherchée :

$$\tfrac{1}{6}P\sin ABC[AB(BC+\tfrac{1}{2}bc)+ab(bc+\tfrac{1}{2}BC)]+$$
$$\tfrac{1}{6}P\sin ADC[CD(DA+\tfrac{1}{2}da)+cd(da+\tfrac{1}{2}DA)].$$

Scholie I.

Si l'on conçoit que la diagonale qui passe par les points a et c se meuve en s'appuyant sur les droites aA et cC, et en restant toujours dans un plan parallèle à celui des bases, jusqu'à ce qu'elle soit arrivée dans la position AC, elle divisera le solide en deux parties $ABCabc$, $ADCadc$ qui auront pour mesure de leur solidité :

La première,

$$\tfrac{1}{6}P\sin ABC[AB(BC+\tfrac{1}{2}bc)+ab(bc+\tfrac{1}{2}BC)],$$

et la seconde,

$$\tfrac{1}{6}P\sin ADC[CD(DA+\tfrac{1}{2}da)+cd(da+\tfrac{1}{2}DA)].$$

Si les droites Aa, Cc, ne sont pas dans un même plan, la surface décrite par le mouvement de la diagonale ac, ne pourra pas être contenue dans un plan et sera du genre de celles qu'on appelle *gauches*. Cette

solution nous donne donc le moyen de mesurer la solidité d'une espèce de pyramide triangulaire tronquée qui a deux bases ABC, abc parallèles, deux faces planes $ABba$, $CBbc$ et une troisieme face $ACca$ plane ou gauche ; mais telle que les plans parallèles aux deux bases la coupent toujours suivant une ligne droite ; la solidité de cette espèce de pyramide a pour expression la premiere des deux formules précédentes.

Scholie II.

Si deux angles solides tels que a et b coincident, et par conséquent si les deux faces $ABba$, $dcba$ deviennent des triangles, il suffira pour avoir l'expression du solide de faire dans l'expression générale $ab=0$, ce qui la réduira à :

$$\tfrac{1}{6}P\sin ABC.AB(BC+\tfrac{1}{2}bc).$$

Scholie III.

Si les trois angles a, b, c se réunissent, auquel cas toutes les faces du solide $ABCabc$ deviennent des triangles et le solide une pyramide triangulaire, ayant la ligne P pour hauteur et le triangle ABC pour base, il faudra, dans l'expression générale trouvée

plus haut, faire :

$$ab=0,\quad bc=0,$$

ce qui donnera, pour l'expression du solide dans ce cas particulier :

$$\tfrac{1}{6}P\sin ABC.AB.BD$$

ou, comme l'a déjà enseigné le problême II,

$$\tfrac{1}{3}.P.B,$$

B étant égale à

$$\tfrac{1}{2}BC.AB.\sin ABC$$

et désignant l'aire du triangle ABC.

2. Voyez le scholie du problême XI.

PROBLÊME X.

Mesurer la solidité d'un corps dont la base a un angle rentrant DCB, *mais qui a d'ailleurs toutes les conditions du problême précédent.*

SOLUTION.

1. Si l'on mesure, comme dans la premiere solution du problême XI, deux angles saillans de la base, tels que ADC et ABC et qu'on appelle P la distance des deux bases parallèles, la solidité cherchée aura pour ex-

pression la formule du problême précédent.

2 Si l'on mesure deux angles opposés l'un DAB saillant et l'autre DCB rentrant, l'expression de la solidité ne différera de celle trouvée précédemment, qu'en ce que le sinus de l'angle rentrant sera négatif, c'est-à-dire, qu'elle sera :

$$\tfrac{1}{6}P\sin DAB[DA(AB+\tfrac{1}{2}ab)+da(ab+\tfrac{1}{2}AB)]$$
$$-\tfrac{1}{6}P\sin DCB[DC(CB+\tfrac{1}{2}cb)+dc(cb+\tfrac{1}{2}CB)].$$

3. Voyez le scholie du problême XI.

Scholie.

Il était indifférent dans les problêmes précédents de prendre dans le polygone $ABCD$ (fig. 99), un angle ABC ou son supplément, parce que cet angle n'entre dans le résultat que par son sinus qui est le même pour un angle et pour son supplément. Dans les problêmes suivans, quand on désignera par une lettre un angle d'une base, par exemple, par B l'angle B de la base $ABCD$, il faudra toujours entendre, comme dans la polygonométrie plane, le supplément de l'angle ABC ou la déviation du côté AB au côté BC. Au reste nous n'aurons jamais occasion d'employer que les angles plans des bases opposées et parallèles.

PROBLÊMES

PROBLÊME XI.

Mesurer la solidité d'un corps qui a deux bases opposées ABCD, abcd *parallèles et à angles saillans, trois faces latérales* ABba, BCcb, CDcd *planes et disposées d'une maniere quelconque, et une quatrieme face latérale* ADda *plane ou gauche, mais, dans tous les cas, telle que les sections faites dans le corps parallèlement aux bases, la coupent suivant une ligne droite.*

SOLUTION.

En appellant P la hauteur du corps ou la distance des deux bases parallèles, on aura pour la solidité cherchée :

$$\tfrac{1}{6}P\sin B[AB(BC+\tfrac{1}{2}bc)+ab(bc+\tfrac{1}{2}BC)]+$$
$$\tfrac{1}{6}P\sin C[BC(CD+\tfrac{1}{2}cd)+bc(cd+\tfrac{1}{2}CD)]+$$
$$\tfrac{1}{6}P\sin(B+C)[AB(CD+\tfrac{1}{2}cd)+ab(cd+\tfrac{1}{2}CD)].$$

Scholie.

On voit facilement que lorsqu'on suppose plane la face $ADda$, cette solution appartient aussi au problême IX.

Si l'angle DCB était rentrant, il suffirait d'écrire, dans la formule précédente, $-C$

M

au lieu de $+C$, et la formule ainsi changée résoudrait encore le problême X, dans lequel on a supposé plane la face $ADda$.

PROBLÊME XII.

Mesurer la solidité d'un corps formé par deux bases parallèles ABCDE, abcde, *et par des faces planes disposées d'une maniere quelconque autour des côtés de ces bases.*

SOLUTIONS.

1. On supposera le corps divisé en deux parties, par une diagonale, telle que ad qui glisse le long des deux arêtes Aa, Dd, en restant toujours dans un plan parallèle aux bases; et en désignant alors par P la hauteur du corps, on aura pour mesure de la solidité de la portion $AEDeda$, l'expression :

$$\tfrac{1}{6}P\sin E[AE(ED+\tfrac{1}{2}ed)+ae(ed+\tfrac{1}{2}ED)],$$

et la formule du problême XI, sera l'expression de la solidité de la partie $ABCDdcba$.

2. Voyez la solution du problême XIII.

Scholie.

Si les polygones parallèles entre lesquels

le corps est compris avaient des angles saillans, il faudrait affecter du signe $-$, les supplémens de ces angles.

PROBLÊME XIII.

Mesurer la solidité d'un corps qui a deux bases parallèles ABCDE, abcde, *et toutes les faces environnantes planes et placées d'une maniere quelconque, à l'exception cependant de l'une d'elles* AEea, *par exemple, qui est gauche, mais telle que tous les plans menés dans le corps parallèlement aux deux bases, la coupent suivant des droites.*

SOLUTION.

En désignant par P la hauteur, on aura pour la solidité :

$$\frac{P}{6}\times\begin{cases}\sin B[AB(BC+\tfrac{1}{2}bc)+ab(bc+\tfrac{1}{2}BC)]\\ \sin C[BC(CD+\tfrac{1}{2}cd)+bc(cd+\tfrac{1}{2}CD)]\\ \sin D[CD(DE+\tfrac{1}{2}de)+cd(de+\tfrac{1}{2}DE)]\\ \sin(B+C)[AB(CD+\tfrac{1}{2}cd)+ab)cd+\tfrac{1}{2}CD)]\\ \sin(C+D)[BC(DE+\tfrac{1}{2}de)+bc(de+\tfrac{1}{2}DE)]\\ \sin(B+C+D)[AB(DE+\tfrac{1}{2}de)+ab(de+\tfrac{1}{2}DE)].\end{cases}$$

M 2

Scholie I.

S'il y avait des angles rentrants, il faudrait leur donner le signe —.

Scholie II.

Si deux angles voisins coincidaient, il faudrait dans la formule égaler à zéro le côté qui leur est contigu.

Scholie III.

Ces exemples fournissent la règle qu'il faudra suivre dans tous les cas où le nombre des angles sera plus grand. On combinera les formules des exemples précédents avec celles que fournit la polygonométrie, pour avoir la surface des deux bases parallèles, et on aura facilement la solution du problême général suivant :

PROBLÊME GÉNÉRAL.

Exprimer immédiatement la solidité d'un corps quelconque qui a deux bases parallèles, et toutes les faces environnantes planes et placées d'une maniere quelconque, à l'exception d'une seule qui est gauche, mais qui peut toujours être coupée suivant une ligne droite par les plans menés parallèlement aux bases.

SOLUTION.

On trouvera par la polygonométrie plane l'expression de l'aire des bases au moyen des côtés et des angles, en n'y faisant entrer ni le côté qui se trouve sur la face gauche ni les deux angles qui lui sont adjacens.

A la somme de ces bases, on ajoutera la somme des autres bases planes, en formant chacune d'elles des deux premieres, dans l'expression desquelles on substituera dans chaque produit de deux côtés, au lieu du deuxième côté pris dans la même base, la moitié du côté analogue pris dans l'autre base.

On multipliera enfin la somme de toutes ces bases par le tiers de la hauteur du corps,

le produit sera l'expression du volume cherché.

Scholie I.

Si toutes les faces latérales étaient planes, on pourrait rendre le calcul plus simple, en concevant le corps partagé en deux parties par le mouvement d'une diagonale qui divisant les bases parallèles en deux polygones d'un même nombre de côtés, ou de deux nombres de côtés qui ne différeraient entr'eux que d'une unité, glisserait le long des deux arêtes qui la rencontrent en restant continuellement dans un plan parallèle aux bases : on aurait alors deux corps tels que celui que l'on considère dans le problême précédent; on pourrait donc exprimer séparément leurs volumes, et la somme de ces volumes partiels fournirait pour le volume cherché une expression plus simple que si le corps n'eut pas été ainsi divisé. Nous avons donné plus haut pour les polygones plans, une règle semblable.

Scholie II.

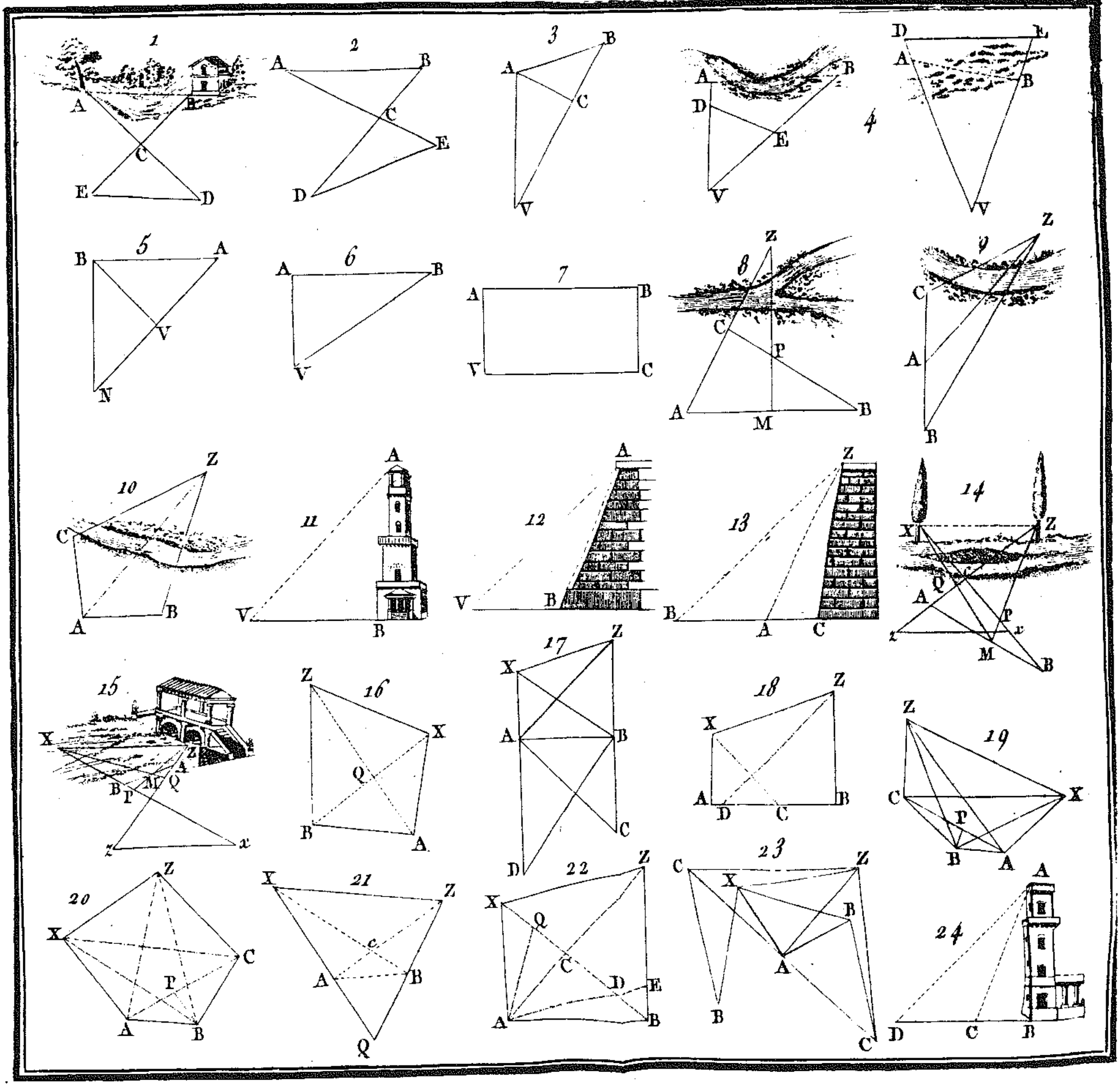
On peut encore étendre ce problême à un polyèdre quelconque; pour y parvenir:

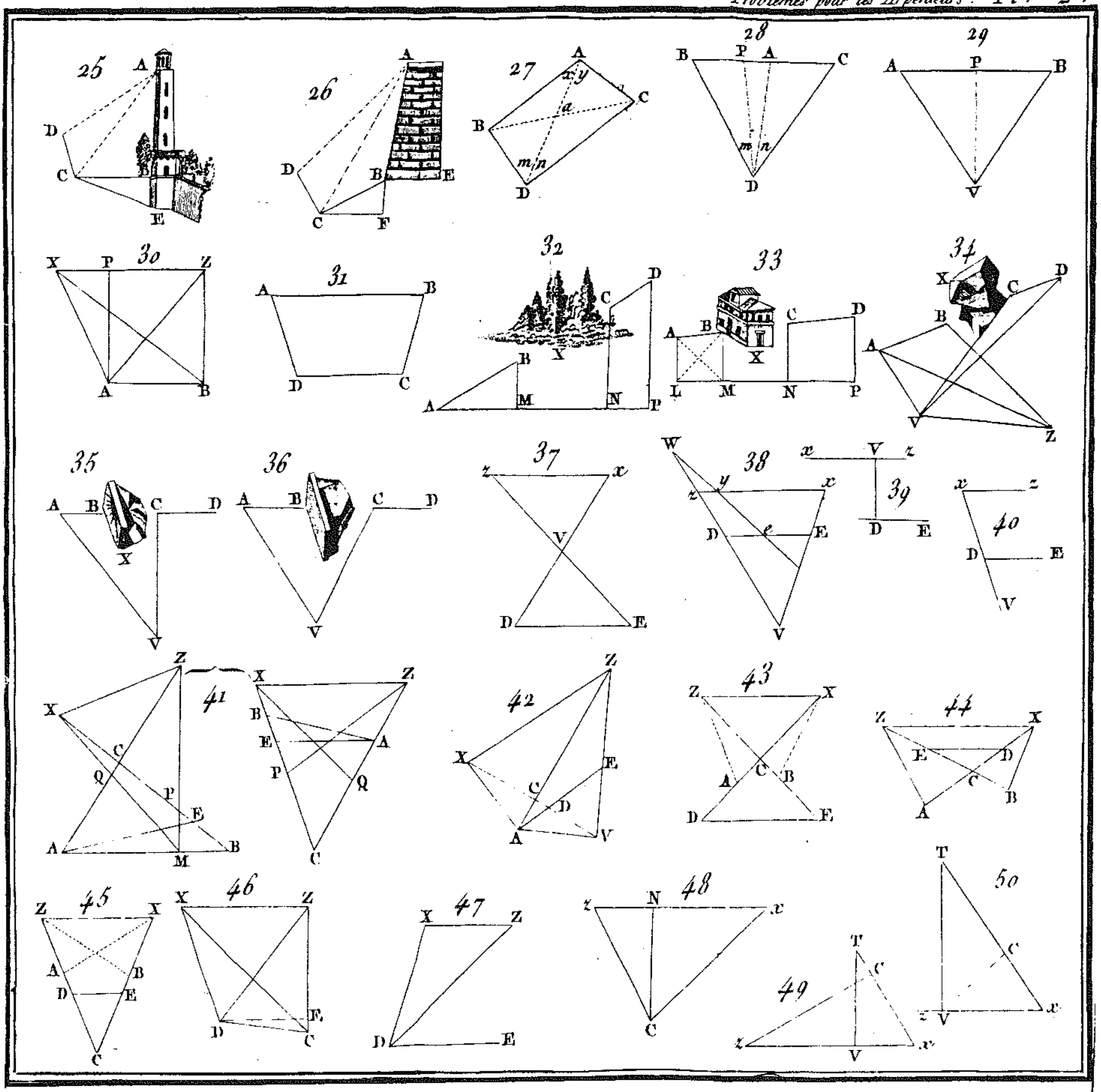
On supposera d'abord le polyèdre placé sur une de ses faces comme base.

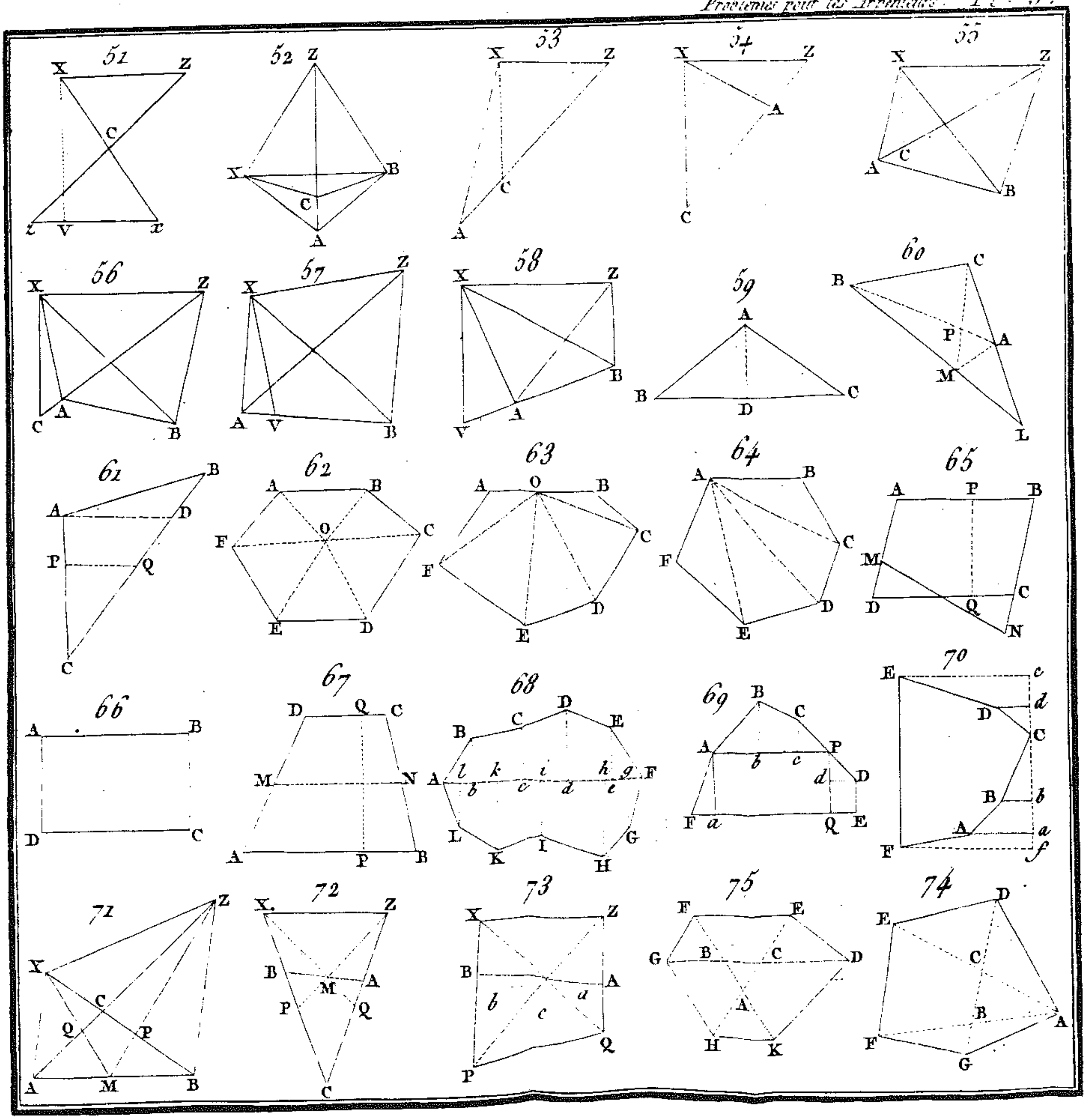
Par les sommets de tous les angles solides, on menera des plans parallèles à cette base.

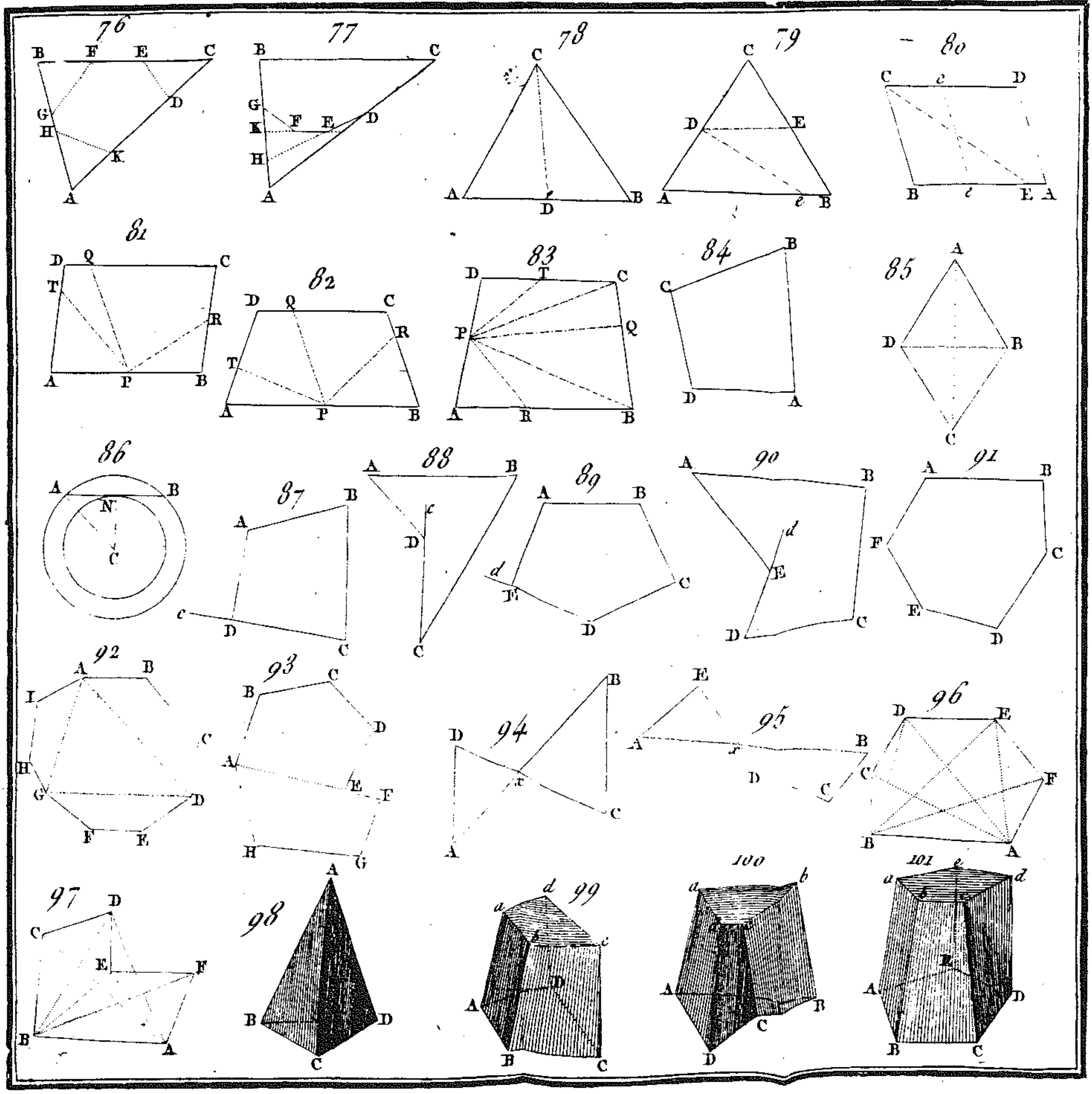
Par là, le polyèdre sera divisé en d'autres polyèdres dont chacun satisfera aux conditions du dernier problême général. Mesurant donc séparément la solidité de chacun d'eux et faisant leur somme, on aura la solidité d'un polyèdre d'un nombre quelconque de faces toutes planes, mais d'une figure quelconque.

FIN.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24


25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50


51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
75
74


76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Problèmes pour les arpenteurs

AUTEUR :

MASCHERONI Lorenzo

RESUME :

Cet ouvrage peut être considéré de plusieurs manières : - outil destiné aux arpenteurs qui y trouveront, sous un volume réduit, des méthodes, des résultats utiles. " Petit ouvrage " pratique qui, de plus, est rarement cité. - ouvrage destiné aux étudiants en mathématiques qui pour qui ce sera un livre d'exercices, puisque, suivant la volonté de l'auteur, les théorèmes sont donnés sans démonstration. " La recherche de ces démonstrations sera, pour les élèves, un exercice util et agréable ". C'est donc un ouvrage qui concerne les étudiants comme les enseignants.

MOTS CLES :

Histoire
Géométrie
Épistémologie

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1995
ISBN : 2-86612-074-2