DESARGUES ET PAPPUS

Rosane Tossut
FUCAM, Mons

Les coniques sont des sections planes d'un cône à base circulaire. C'est ainsi qu'elles sont définies par Apollonius au 3ème siècle avant J.C. Le développement de la perspective à partir du 15ème siècle va conduire à une nouvelle manière de voir les coniques. Dans le "Brouillon Project" de 1639, Desargues considère les sections coniques comme des projections de la base circulaire à partir du sommet du cône. Il établit des propriétés des coniques en les démontrant pour le cercle et en les projetant. C'est dans ce contexte qu'il introduit l'involution qui est une relation conservée par projection. Nous traiterons ce point dans une première partie de l'article.

Nous nous interrogerons ensuite sur l'origine de l'involution. On reconnaît aujourd'hui dans la "Collection Mathématique" de Pappus, datant du 4ème siècle, des cas particuliers de certaines propriétés de l'involution. Desargues connaissait certainement le traité de Pappus. Nous pouvons alors nous demander comment il l'a lu, comment il a vu l'involution. Treize siècles après, Desargues a pu lire le texte de Pappus avec une autre "perspective". Nous regarderons la manière dont les propositions sont énoncées et démontrées par Pappus et comment elles sont unifiées par la théorie de Desargues[1].

1. Deux points de vue sur les coniques.

En 1822, Poncelet écrit au début de son "Traité des propriétés projectives des figures":

"*Suivant la définition d'Apollonius, généralement admise en Géométrie, une section conique ou simplement une conique est la ligne suivant laquelle un plan arbitraire rencontre un cône quelconque*

[1] Cet article est tiré de mon mémoire de D.E.A. en Histoire des Sciences et des Techniques réalisé sous la direction du Professeur Rudolf Bkouche (Lille, octobre 1991).

à base circulaire; une conique n'est donc autre chose que la projection d'un cercle"[2].

Le fait de considérer, comme Poncelet, la section plane d'un cône comme la projection de la base circulaire est aujourd'hui naturelle. Mais il n'en a pas toujours été ainsi.

Pour les Grecs, une conique est obtenue comme section d'un cône; il n'est pas question de projection. Au 3ème siècle avant J.C., Apollonius écrit un important traité développant la théorie des coniques. Les trois coniques, ellipse, parabole et hyperbole[3], sont obtenues en coupant par un plan un double cône à base circulaire, cône qui peut être droit ou oblique[4] (Fig.1). Il établit pour chaque conique une relation caractéristique qui exprime une égalité d'aires[5]. Les coniques sont ensuite étudiées séparément le plus souvent, sans référence au cône. A l'époque de Desargues, au 17ème siècle, le traité d'Apollonius est encore la référence sur le sujet des coniques[6].

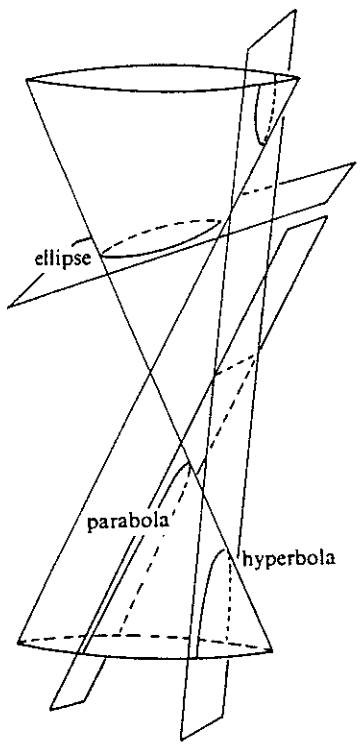


Fig.1

[2] [7], I, p.4; Poncelet précise que le mot projection a le même sens que celui de perspective; ainsi la projection est conique ou centrale.

[3] Pour nous, une hyperbole est formée de deux branches. Apollonius appelle hyperbole une branche seule et sections opposées les deux branches.

[4] Auparavant, on utilisait trois types de cônes pour définir les trois sections coniques (cf. Heath [4], II, p.111).

[5] La relation peut être lue aujourd'hui comme l'équation de la conique dans un repère déterminé par la tangente en un point et le diamètre passant par ce point (cf. Heath [4], II, p.134 à 139).

[6] La traduction latine des quatre premiers livres réalisée par Commandino est publiée en 1566.

Il n'est pas immédiat de voir dans Fig.1 des projections d'une figure plane sur une autre. Ce point de vue est apparu avec le développement de la perspective. En 1435, Alberti définit le tableau du peintre comme une intersection plane de la pyramide visuelle formée des rayons lumineux joignant les points de l'objet à l'oeil : "qui regarde une peinture, voit une certaine intersection d'une pyramide"[7]. En 1525, Dürer décrit plusieurs dispositifs permettant de réaliser des mises en perspectives (Fig.2). Dans la première gravure, le sommet de l'obélisque situe l'oeil ponctuel immobile. Dans la seconde, un anneau fixé au mur et un fil tendu matérialisent respectivement le sommet de la pyramide visuelle et un rayon visuel. Les points de l'objet sont associés aux points du tableau via les rayons visuels; un point est projeté sur son image en suivant un rayon visuel.

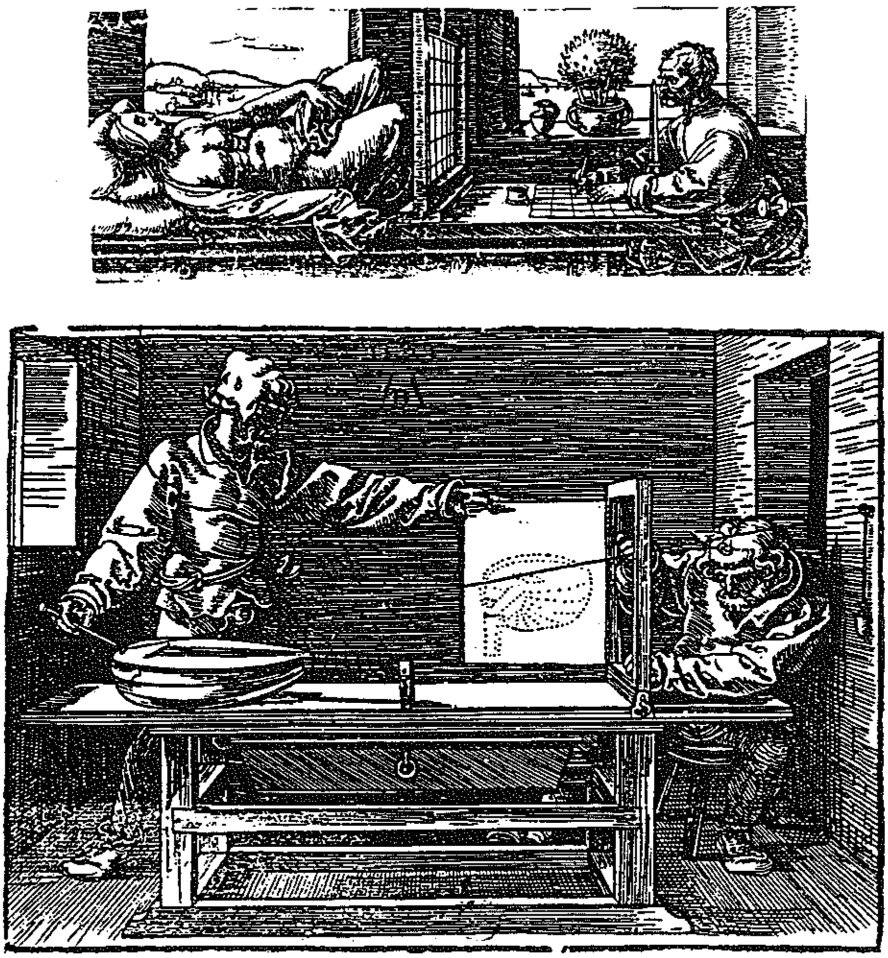


Fig.2

Dans le "Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan" [3] publié en 1639, Desargues reprend l'étude des coniques en portant un nouveau regard. Il la met en relation avec la perpective : une conique est une section plane d'un cône à base circulaire; elle est aussi la perspective du cercle de base, l'"oeil" étant au sommet du cône.

[7] Della Pittura, le manuscrit latin date de 1435.

Desargues considère donc les coniques comme des projections du cercle de base à partir du sommet de cône. Dans le cas d'une parabole, un point du cercle est projeté à l'infini et dans le cas d'une hyperbole, deux points[8]. Desargues introduit les points à l'infini via la notion d'ordonnance de droites qui regroupe les familles de droites parallèles et les familles de droites concourantes :

"*Pour donner à entendre de plusieurs lignes droictes, qu'elles sont toutes entre elles ou bien paralleles, ou bien inclinées à mesme poinct, il est icy dit, que toutes ces droictes sont d'une mesme ordonnance entre elles, par où l'on concevra de ces plusieurs droictes, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, elles tendent comme toutes à un mesme endroict.*

L'endroict auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droictes en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, est icy nommé, but de l'ordonnance de ces droictes".

Desargues précise alors que si les droites sont parallèles, le but est dit "*à distance infinie en chacune d'elles d'une part & d'autre*", et si les droites sont concourantes, le but est dit "*à distance finie*". Un point est donc considéré comme le "point de concours" d'une famille de droites; il est à l'infini si les droites sont parallèles, et à distance finie sinon. Points à l'infini et points à distance finie jouent le même rôle[9].

Desargues obtient des propriétés des coniques en projetant des propriétés du cercle. Cela nécessite d'avoir reconnu des propriétés conservées par projection[10].

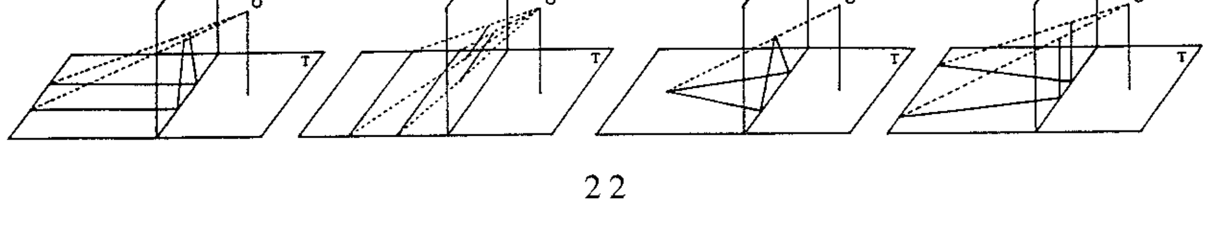
- Les intersections des lignes et leurs contacts sont conservés lors d'une projection grâce à l'introduction des points à l'infini : une ordonnance de droites est projetée sur une ordonnance de droites[11]; une tangente à une conique est l'image d'une tangente au cercle; dans le cas de

[8] Dans son texte sur la "génération des coniques", Pascal parlera de "points sans image du cercle" et de "points manquants" pour la parabole et l'hyperbole ([7], p.1114). Ce texte a été retrouvé dans les papiers de Leibniz; il s'agit d'une partie d'un traité sur les coniques qui est perdu. Pascal y détaille le passage du point de vue "section d'un cône" au point de vue "projection d'un cercle" en utilisant le langage de la perspective.

[9] Desargues définit par exemple le rouleau comme la figure engendrée par une droite passant par un point fixe et s'appuyant sur un cercle; suivant que le point fixe est à l'infini ou non, il s'agit d'un cylindre ou d'un cône. Les coniques ou "coupes de rouleau" sont ensuite définies comme les sections planes d'un rouleau.

[10] Ces propriétés seront appelées projectives par Poncelet: "toutes les relations ou propriétés qui subsistent à la fois dans une figure et dans ses projections, seront appelées également relations ou propriétés projectives" ([8], p.5)

[11] Dans son traité de perspective publié en 1636 ([2]), Desargues met déjà en évidence le fait que des droites parallèles deviennent en perspectives des droites parallèles ou concourantes, et qu'il en va de même pour des droites concourantes. Cela annonçait la notion d'ordonnance de droite de 1639.



l'hyperbole, une asymptote est une tangente en un point à distance infinie[12];...
Ces propriétés sont utilisées naturellement dans le Brouillon Project.

- Les distances sont en général modifiées par une projection[13]. Un apport essentiel de Desargues est de dégager une relation métrique qui est conservée. Il s'agit de la relation d'involution définie pour des points alignés : des couples de points en involution sont projetés sur des couples de points en involution.

2. Relation d'involution de Desargues.

1°. Définition.

Desargues introduit d'abord les notions de "point engagé", "point dégagé", "couples mêlés" et "couples démêlés" qui lui permettent de mettre un ordre sur la droite (Fig.3). Notons que deux couples de points alignés sont, soit mêlés, soit démêlés. Cela est lié au fait, qu'avec son point à l'infini, une droite est analogue à un cercle.

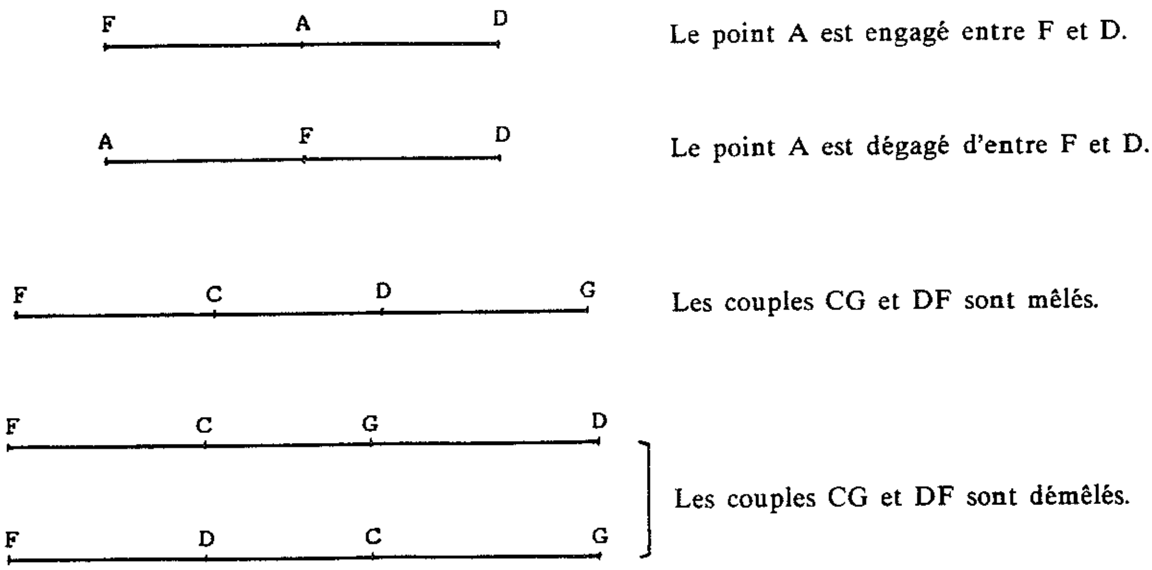


Fig.3

[12] Pascal notera qu'il y a sur la parabole "une droite manquante, laquelle joue le rôle d'une tangente, puisqu'elle est l'image d'une tangente" ([7], p.1117).

[13] Au 19ème siècle, Poncelet, puis Chasles distingueront les propriétés graphiques (ou descriptives) qui sont projectives et les propriétés métriques dont certaines sont projectives et d'autres pas. Face à une figure jouissant de propriétés métriques, "on ne pourrait affirmer à priori, et sans examen préalable, ni que ces propriétés subsistent, ni qu'elles cessent de subsister dans les diverses projections de la figure primitive. Or, on sent toutefois l'importance qu'il y aurait à pouvoir reconnaître, à l'avance, si telle ou telle relation examinée est ou n'est pas projective de sa nature; car il en résulterait qu'ayant démontré cette relation pour une figure particulière, on pourrait de suite l'étendre à toutes les projections possibles de cette figure" ([8], p.5).

Desargues aborde ainsi l'involution :

"Quand en une droite AH, il y a un poinct A, commun & semblablement engagé ou dégagé aux deux pieces de chacune de trois couples, AB, AH; AC, AG; AD, AF, dont les trois rectangles sont égaux entre eux, une telle condition en une droicte est icy nommée Arbre, dont la droicte mesme est Tronc. Le poinct comme A, ainsi commun à chacune de ces six pieces AB, AH, AC, AG, AD, AF, y est nommé Souche"[14].

La définition peut se réécrire avec des notations modernes: trois couples de points BH, CG et DF sont en involution s'il existe un point A qui est soit engagé entre les points de chaque couple, soit dégagé, et qui est tel que

$$AC.AG = AD.AF = AB.AH \ .$$

Le point A est appelé la souche. Deux cas peuvent se présenter : soit la souche est engagée entre les points de chaque couple et dans ce cas, les couples sont mêlés (Fig.4), soit la souche est dégagée et alors, les couples sont démêlés (Fig.5).

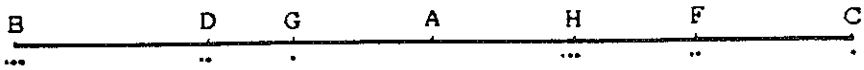


Fig.4

Fig.5

Desargues montre ensuite que l'on peut aussi exprimer l'involution sans faire intervenir la souche[15]: les trois couples de points BH, CG, DF sont en involution s'ils sont soit mêlés, soit démêlés, et si on a

$$(GB.GH):(CB.CH) = (GD.GF):(CD.CF) \ , \tag{1}$$

ou une des deux relations obtenues par permutation des couples :

---

[14] Le terme involution est introduit plus loin dans le texte.

[15] La démonstration utilise des propriétés des proportions et des compositions de raison. Reprenons les étapes. De AD.AF = AG.AC, on déduit d'une part AG:AF = AD:AC et donc AG:AF = GD:CF, et d'autre part AF:AC = AG:AD et donc AF:AC = GF:CD. A partir des égalités précédentes, on obtient AG:AC = (GD:CF).(GF:CD), et par conséquent AG:AC = (GD.GF):(CD.CF). De cette égalité et de l'égalité semblable obtenue en considérant le troisième couple de points conjugués, on tire la relation générale entre huit segments.

$$(FC.FG):(DC.DG) = (FB.FH):(DB.DH) \ ,$$

$$(HC.HG):(BC.BG) = (HD.HF):(BD.BF) \ .$$

Desargues écrit alors :

"Et quand en une droicte AH, il y a comme cela trois couples de poincts BH, CG, DF, ainsi conditionnées, à sçavoir que les deux poincts de chacune des couples soient de mesme, ou meslez, ou demeslez, aux deux poincts de chacune des autres couples. Et que les rectangles ainsi relatifs des pieces d'entre ces poincts soient entre eux comme leurs gemeaux, pris de mesme ordre, sont entre eux: une telle disposition de ces trois couples de poincts en une droicte, est icy nommée Involution".

2°. Et si un des points est à l'infini ? La souche et le point à l'infini sont conjugués.

Ayant trois couples BH, CG, DF en involution, si le point F par exemple devient le point à l'infini, son conjugué D devient la souche A (Fig.6). On a dans ce cas

$$(GB.GH):(CB.CH) = GA:CA \ .$$

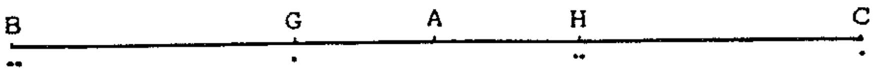


Fig.6

Desargues souligne à plusieurs reprises le caractère incompréhensible d'une relation comme (1) lorsqu'un des points est à l'infini, *"l'entendement ne void goutte"*[16]. Il considère par ailleurs le point à l'infini d'une droite à égale distance de deux points à distance finie de la droite[17], ce qui permet de retrouver la relation particulière ci-dessus à partir de (1).

3°. L'"involution de quatre points".

Ce type d'involution est illustré par Fig.7: les points coïncident pour deux couples de l'involution. On a alors

$$FH:FB = GH:GB \ .$$

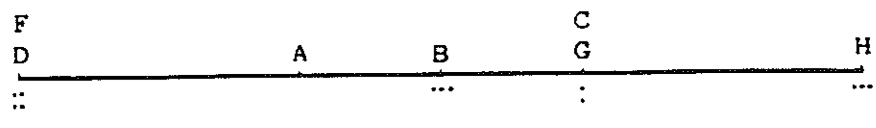


Fig.7

[16] cf. [3], p.116, p.120 (pour l'involution de quatre points), p.126 (pour le théorème de Ménélaüs).

[17] cf. [3], p.142.

Nous disons aujourd'hui que les quatre points forment une division harmonique (F et G divisent intérieurement et extérieurement BH dans le même rapport).

Un cas particulier est celui où H est à distance infinie; son conjugué B est alors le milieu de FG[18].

4°. <u>L'involution est conservée par projection.</u>

Le caractère projectif de l'involution est établi en utilisant la définition indépendante de la souche car celle-ci n'est pas conservée lors d'une projection. Desargues montre que si (DC.DG):(FC.FG) = (DB.DH):(FB.FH), alors (dc.dg):(fc.fg) = (db.dh):(fb.fh) (Fig.8).

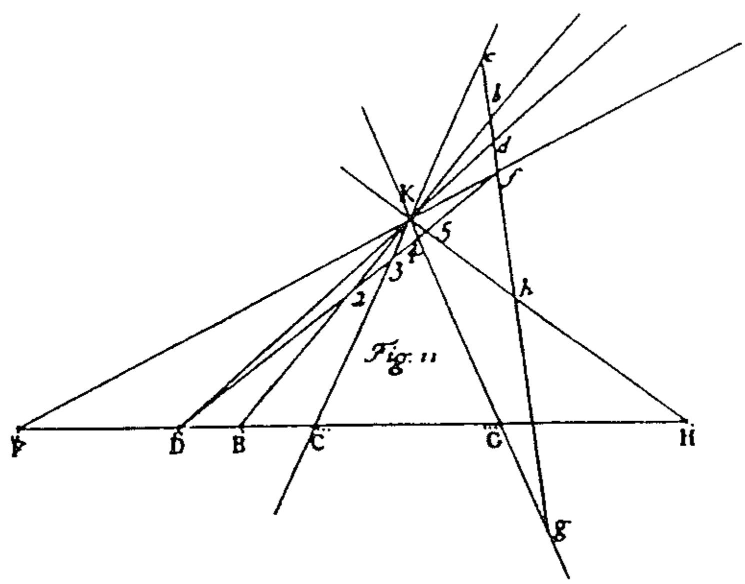


Fig.8[19]

La démonstration est tout-à-fait dans la tradition grecque. Une utilisation répétée du théorème de Ménélaüs entraîne de lourdes compositions de raisons. Ce théorème, que Desargues attribue à Ptolémée, exprime une relation entre les segments formés sur les côtés d'un triangle coupé par une droite : en considérant par exemple le triangle dfD et la droite gK4, on a gd:gf = (Kd:KD).(4D:4f).

Desargues signale ensuite que si la droite cb est parallèle à une des six droites passant par K, on obtient sur cb un couple constitué de la souche et du point à l'infini. Pour lui, la démonstration générale convient également pour ce cas[20]. Alors que la démonstration donnée est très "grecque", il s'agit là d'une transgression importante par rapport à la rigueur grecque.

18 Desargues note à nouveau le caractère incompréhensible de la relation FH:FB = GH:GB lorsque le point H est à l'infini (on a alors FB = GB).

19 La droite auxiliaire Df intervient dans la démonstration.

20 Rappelons qu'il considère le point à l'infini d'une droite à égale distance de deux points à distance finie de la droite; cela permet de particulariser les rapports quand un des points est à l'infini (cf. 2°).

5°. L'involution et les coniques. Démonstration par perspective du théorème fondamental.

L'utilisation de l'involution pour l'étude des coniques passe par le "théorème de Desargues sur l'involution" :

"*Quand en un plan, à quatre poincts B, C, D, E, comme bornes couplées trois fois entre elles, passent trois couples de droictes bornales BCN, EDN, BEF, DCF, BDR, ECR, chacune de ces trois couples de droictes bornales & le bord courbe d'une quelconque coupe de rouleau, qui passe à ces quatre poincts B, C, D, E, donne en quelconque autre droicte de leur plan ainsi qu'en un tronc I, G, K une des couples de noeuds d'une involution IK, PQ, GH, & LM*" (Fig.9).

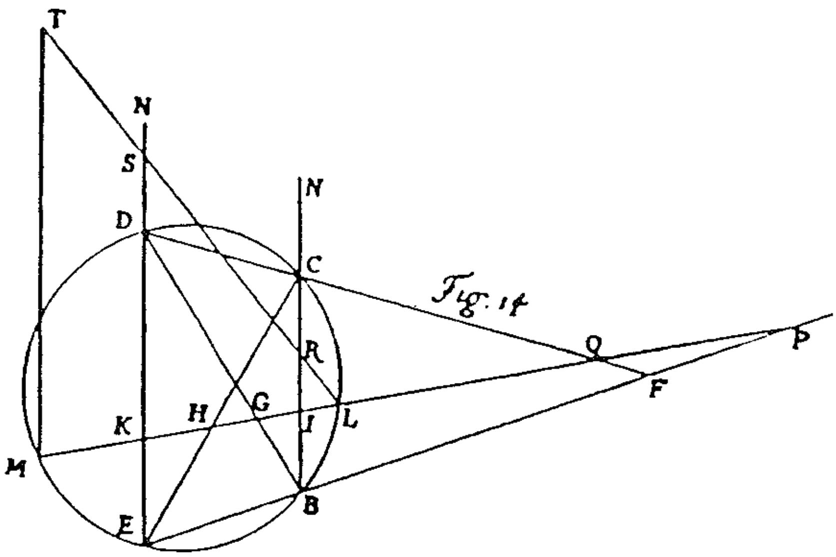


Fig.9[21]

Le théorème comporte deux propriétés qui sont démontrées successivement :
- les couples de côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère déterminent sur toute sécante trois couples de points en involution;
- si de plus le quadrilatère est inscrit à une conique, celle-ci détermine sur la sécante un couple de points en involution avec les trois couples précédents[22].

Desargues démontre la première propriété en se servant du théorème de Ménélaüs. Il donne une démonstration unique : il établit la relation dans le cas où les six points de

[21] Les droites TL et TM interviennent dans un autre énoncé.

[22] Chasles mettra en évidence que ce théorème exprime "une relation tout à fait générale de six points pris arbitrairement sur une conique" ([1], p.79). Il permet de construire la conique déterminée par cinq points donnés. Cette génération des coniques est métrique. Une génération purement graphique est donnée par le théorème de Pascal (les côtés opposés d'un hexagone inscrit à une conique se coupent en trois points alignés).

l'involution sont distincts et à distance finie. Pour la seconde propriété, il utilise l'invariance projective de l'involution : une conique étant une section de rouleau, il démontre la propriété pour la base circulaire et la transporte ensuite à la conique par une projection ayant son centre au sommet du rouleau.

Le théorème permet ensuite d'établir des propriétés des pôles et polaires. Nous n'aborderons pas ici ce travail mais renvoyons aux livres de R. Taton [3] et de Field et Gray [2]. Notons cependant que Desargues unifie l'étude des coniques; celles-ci sont des variétés d'une même courbe que l'on peut étudier "*par un seul et mesme discours et sous de mesmes paroles*". Si de nombreux résultats portant sur les coniques ne sont pas neufs dans le Brouillon Project, la méthode pour les obtenir et la manière de les relier est neuve. Desargues introduit un point de vue projectif absent chez Apollonius.

3. Le livre VII de la Collection Mathématique de Pappus.

On peut s'interroger sur l'origine de l'involution qui joue un rôle essentiel dans le "Brouillon Project" de Desargues. On situe généralement les premières apparitions de la relation d'involution dans le livre VII de la Collection Mathématique de Pappus[23].

Pappus a écrit les textes de la Collection Mathématique au début du 4ème siècle de notre ère. Ces textes constituent un guide de la géométrie qui ne remplace pas les textes originaux cités mais est destiné à être lu avec eux. Le manuscrit le plus ancien dont on dispose date du 10ème siècle et est conservé à la Bibliothèque du Vatican[24]. Les travaux figurant dans la Collection ont sans doute été rassemblés, non par Pappus, mais par un "éditeur" soucieux de préserver les nombreux écrits de Pappus, probablement peu après la mort de celui-ci. Entre cette transcription originale et le manuscrit du Vatican, on ne sait pas combien de copistes sont intervenus. Mais il semble peu probable que quelqu'un ait introduit dans le texte des interpolations significatives[25]. A partir du 16ème siècle, on identifie différents manuscrits descendant, directement ou indirectement, de celui du Vatican. C'est avec l'impression de la traduction latine de Commandino que la Collection devient accessible à beaucoup de mathématiciens européens (la première édition date de 1588).

Le livre VII de la Collection est destiné à accompagner la lecture de différents traités appartenant au "Domaine de l'Analyse"[26]. Pappus donne une courte description des contenus de ces traités, puis il établit, pour chacun, une série de lemmes destinés à faciliter leur lecture.

[23] Voir par exemple Chasles [1] p.40 et 315, Heath [4] p.180.

[24] Sur les huit livres de la Collection, le livre I est perdu, de même que le début du livre II et la fin du livre VIII. Jones a transcrit le livre VII à partir du manuscrit du Vatican et il l'accompagne d'une traduction anglaise dans [5]. Ver Ecke a réalisé une traduction française de la Collection à partir de l'édition complète de Hultsch de 1875-78 [6].

[25] Voir à ce sujet, Jones [5], p.15 à 26.

[26] Ces traités devaient constituer une aide pour l'analyse de problèmes; on y étudiait des problèmes auxquels d'autres problèmes plus compliqués pouvaient être réduits par analyse (cf. [5], p.69).

Les lemmes de Pappus qui nous intéressent ici se rapportent aux deux traités suivants :
- la Section Déterminée d'Apollonius,
- les Porismes d'Euclide.

Ces deux traités sont aujourd'hui perdus. Nous avons quelques indications sur leur contenu grâce à Pappus mais nous ne pourrons pas éclairer davantage les lemmes par les théories qu'ils servent.

Pappus annonce que les deux livres qui composent la Section Déterminée traitent une proposition unique :

"*Couper une droite indéfinie en un point tel que le carré construit sur une des droites ainsi découpées jusqu'à des points donnés sur cette droite, ou le rectangle compris sous les droites découpées, ait un rapport donné soit avec le carré d'une des droites découpées, [soit avec le rectangle compris sous l'une des droites découpées] et une droite donnée ailleurs, soit avec le rectangle compris sous deux droites découpées de l'un ou de l'autre côté qu'on voudra des points donnés*" ([6], p.482).

Le problème décrit a été restauré par Simson sous la forme suivante : étant donnés quatre points A, B, C, D sur une droite, déterminer un autre point E sur la même droite tel que un des rapports parmi $AE^2:CE^2$, $AE^2:(k.CE)$, $AE^2:(CE.ED)$, $(AE.EB):(k.CE)$, $(AE.EB):(CE.EB)$ soit égal à un rapport donné ([5], p. 386)[27].

Par ailleurs, concernant le traité sur les Porismes, il commente ce qu'est un porisme[28] et transmet l'énoncé complet d'un seul porisme, le premier :

"*Si des droites menées de deux points donnés se brisent sur une droite donnée de position, et si l'une découpe un segment sur une droite donnée de position, à partir d'un point donné sur cette droite, l'autre découpe aussi sur une autre droite un segment ayant un rapport donné*" ([6], p.490).

Plusieurs mathématiciens travaillèrent à une restauration des Porismes d'Euclide. On trouve de nombreuses indications sur les travaux et discussions autour des Porismes dans l'introduction et les commentaires de Ver Eecke [6] et dans le livre de Jones [5].

4. Des propriétés arithmétiques[29] de l'involution parmi les lemmes de Pappus pour la Section Déterminée.

Reprenons quelques lemmes qui seront ensuite rapprochés de la théorie de Desargues. L'énoncé complet de la proposition 22 est donné, les autres énoncés sont ensuite résumés en

[27] Nous avons aussi des indications sur ce qu'a pu être la Section Déterminée grâce à un autre traité d'Apollonius repris dans le livre VII, la Section de Rapport, dont le texte a été conservé en arabe (Jones donne une traduction anglaise de certains passages dans [5]).

[28] Un porisme possède une forme intermédiaire entre celle d'un théorème et celle d'un problème (cf. Heath [4], I, p.434).

[29] Suivant la distinction utilisée par Chasles: six points en involution jouissent de deux types de propriétés: les unes sont appelées arithmétiques parce qu'elles ne concernent que ces relations entre les segments pris de différentes manières entre ces points, et les autres, géométriques, parce qu'elles concernent certaines figures que l'on peut faire passer par les six points en question, ou dans lesquelles se présente l'involution de six points ([1], p.309).

utilisant des notations modernes.

"Proposition 22. Soit la droite AB; soient trois points C, D, E sur cette droite, et que le rectangle compris sous les droites AD, DC soit équivalent au rectangle compris sous les droites BD, DE; je dis que le rectangle compris sous les droites AB, BC est au rectangle compris sous les droites AE, EC comme la droite BD est à la droite DE" [6] (Fig.10).

Proposition 22 (Fig.10). Si AD.DC = BD.DE, alors (AB.BC):(AE.EC) = BD:DE.

Fig.10

Proposition 30 (Fig.11). Si AD.DE = BD.DC, alors (AB.BE):(EC.CA) = BD:DC.

Fig.11

Proposition 35 (Fig.12). Si AB.BE = CB.BD, alors (DA.AC):(CE.ED) = AB:BE.

Fig.12

Proposition 36 (Fig.13). Si AB.BE = CB.BD, alors (AC.CE):(AD.DE) = CB:BD.

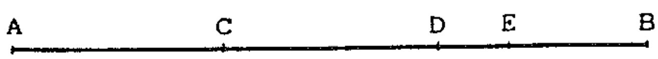


Fig.13

Proposition 37 (Fig.14). Si AB:BC = $AD^2:DC^2$, alors AB.BC = BD^2.

Fig.14

Proposition 40 (Fig.15). Si (AC.CB):(AE.EB) = CD^2:DE^2 , alors (EA.AC):(CB.BE) = AD^2:DB^2.

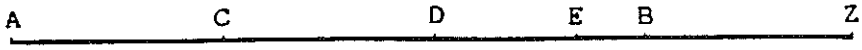


Fig.15[30]

1°. Des cas particuliers d'involution.

Parlant des lemmes de Pappus relatifs à la Section Déterminée, Chasles écrit dans l'Aperçu Historique :

"On n'aperçoit pas, au premier abord, la vraie signification de ces nombreuses propositions, ni les rapports qui peuvent les rattacher ensemble à une même question; et la lecture dans cet état en est pénible. Mais avec quelque attention, on reconnaît qu'elles sont toutes relatives à la théorie de l'involution de six points, créée par Desargues, [...] ce sont des propriétés de plusieurs relations que l'on peut aujourd'hui considérer comme des cas particuliers de cette relation générale" ([1]p.39).

Les propositions reprises ci-dessus peuvent en effet toutes être relues comme traitant des cas particuliers d'involution. Les propositions 22, 30, 35 et 36 font intervenir deux couples de points conjugués et la souche. La proposition 37 fait intervenir un couple de points conjugués, un point double et la souche, et la proposition 40, deux couples de points conjugués et un point double. La relation générale définie par Desargues n'apparaît pas chez Pappus.

La notion d'involution de Desargues unifie les différents cas traités par Pappus. Cette unification est rendue possible grâce
- au regroupement des points en couples de points qui se correspondent[31], et les points d'un couple peuvent éventuellement être confondus;
- à la considération du point à l'infini, et un couple peut être constitué du point à l'infini et de la souche.

2°. Les symétries d'écriture.

Pour mentionner un rectangle, Pappus place au milieu l'extrémité commune aux deux segments. Il est question par exemple du rectangle compris sous les droites AD, DC. Cette écriture fait ressortir le rectangle, c'est-à-dire l'aire sur laquelle porte l'égalité. Elle permet de dessiner, ou d'imaginer, plus aisément le rectangle (à partir de D, on reporte DC sur une perpendiculaire à AD).

Si on réécrit la proposition 22 en adoptant les notations de Desargues pour les segments, on a : si le rectangle des segments DA, DC est égal au rectangle DB, DE, alors le rectangle BA,

30 Le point Z de la figure est introduit dans la démonstration et est tel que AZ.ZB = CZ.ZE.

31 Ce regroupement apparaît au niveau des figures de Desargues dans le repérage des points conjugués par ., .. et ... . Ajouter ce type de repérage aux figures de Pappus nous aide aujourd'hui à les lire.

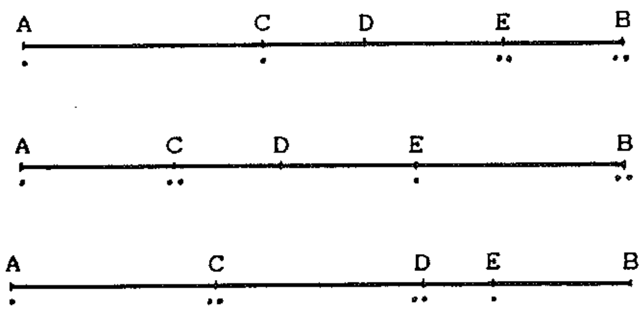
BC est au rectangle EA, EC comme DB est à DE. Cette écriture des segments fait ressortir des correspondances entre des points.

Les symétries d'écriture ne sont donc pas les mêmes chez les deux auteurs : chez Pappus, elles sont liées au calcul géométrique à faire, tandis que chez Desargues, elles sont plus proches d'une vision projective, l'ordre géométrique prédomine sur l'ordre dicté par le calcul.

3°. <u>Les propositions 22, 30 et 35.</u>

Pappus privilégie pour ses notations l'ordre suivant lequel on rencontre les points sur la droite. Il n'utilise pas des notations qui permettent une formulation unique de la propriété. Chaque proposition correspond à une disposition imposée des points dans la figure. Celle-ci passe avant la formulation de la propriété.

Suivant les conceptions de Desargues, les propositions 22, 30 et 35 présentent deux couples de points conjugués et la souche (Fig.16). A la proposition 30, les couples sont mêlés, alors que dans les deux autres, les couples sont démêlés. Rappelons que l'unification de ces deux derniers cas est liée au fait que pour Desargues, la droite est analogue à un cercle. Et sur un cercle, deux couples de points sont soit mêlés, soit démêlés.



Proposition 22

Proposition 30

Proposition 35

Fig. 16

4°. <u>Les démonstrations.</u>

Pappus démontre chaque proposition sans référence aux autres. Il donne souvent plusieurs démonstrations, certaines utilisant des lemmes intermédiaires, ce qui rend le texte très long. Pour la proposition 30 par exemple, il donne

- une démonstration utilisant des compositions de raisons (proposition 30),
- une démonstration utilisant des propriétés des proportions mais pas de composées de raisons (proposition 30, d'une autre manière),
- une démonstration basée sur des propriétés du livre II des <u>Eléments</u> (proposition 32),
- une démonstration faisant intervenir des cercles (proposition 34).

Nous avons vu précédemment comment Desargues démontre cette propriété dans le <u>Brouillon Project</u> (cf. note 15).

5. Des propriétés géométriques de l'involution parmi les lemmes de Pappus pour les Porismes.

La proposition 130 est reprise avec son énoncé complet. D'autres propositions sont ensuite résumées en utilisant des notations modernes.

"*Proposition 130. Soit la figure ABCDEZHTKL, et que le rectangle compris sous les droites AZ, DE soit au rectangle compris sous les droites AD, EZ comme le rectangle compris sous les droites AZ, BC est au rectangle compris sous les droites AB, CZ; je dis que la ligne qui passe par les points T, H, Z est droite*" [6] (Fig.17)[32].

Proposition 130 (Fig.17): dans le cas de la figure ABCDEZHTKL, si (AZ.DE):(AD.EZ) = (AZ.BC):(AB.CZ), alors les points T, H, Z sont alignés.

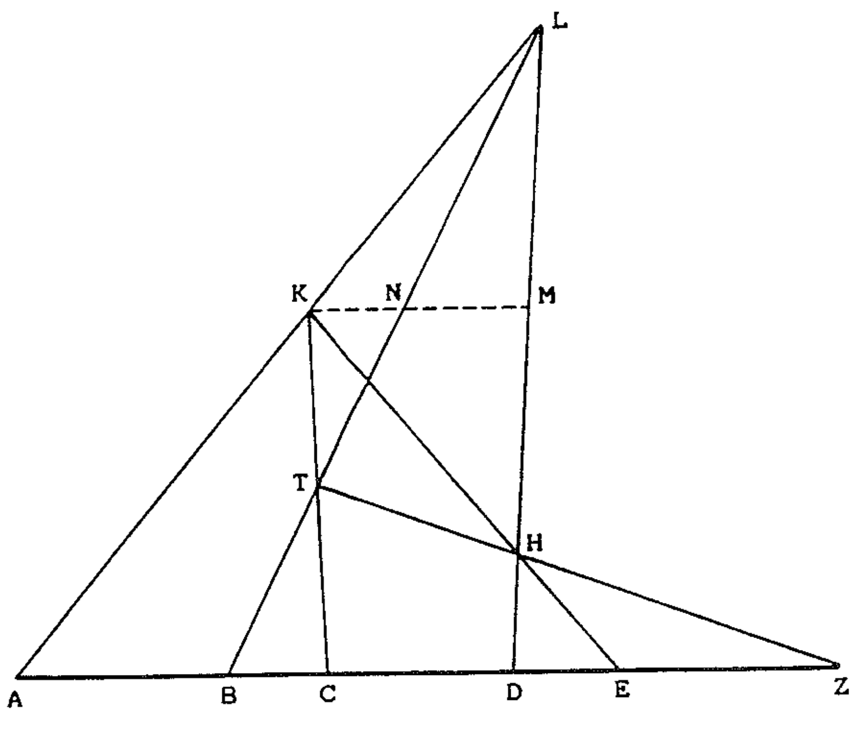


Fig.17[33]

Proposition 127 (Fig.18): on considère la figure ABCDEZH et la droite de jonction TK; si AD:DC = AZ:ZH, alors la droite TK est parallèle à AC.

---

32 La démonstration de Pappus fait intervenir la droite KNM parallèle à AZ. Par compositions de rapports et utilisation des relations dans les triangles semblables, on obtient CZ:ZE = (TC:KT).(KH:HE). La suite de la démonstration établit pour le triangle CEK et la droite ZTH ce qui correspond à la réciproque du théorème de Ménélaüs (celui-ci fait l'objet de la proposition 3 du livre VIII de la Collection Mathématique).

33 La proposition est illustrée chez Pappus par huit cas de figure.

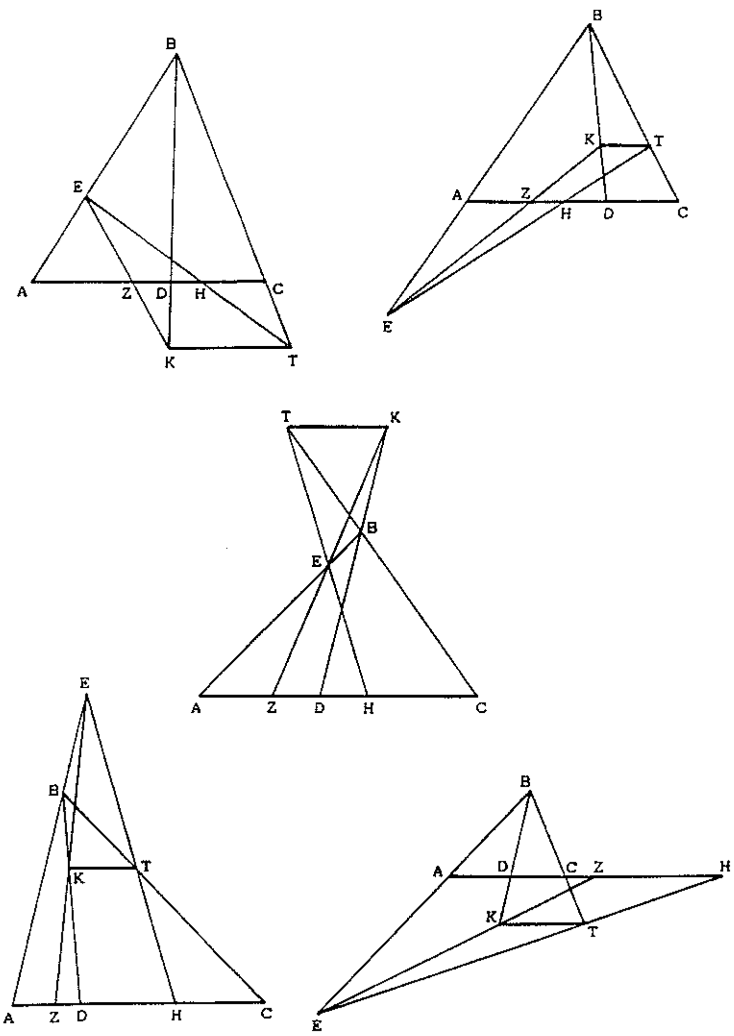


Fig.18

Proposition 128 (Fig.19): on considère la figure ABCDEZHT; si la droite AZ est parallèle à DB et si CH:HZ = AE:EZ, alors les points T, K, Z sont alignés.

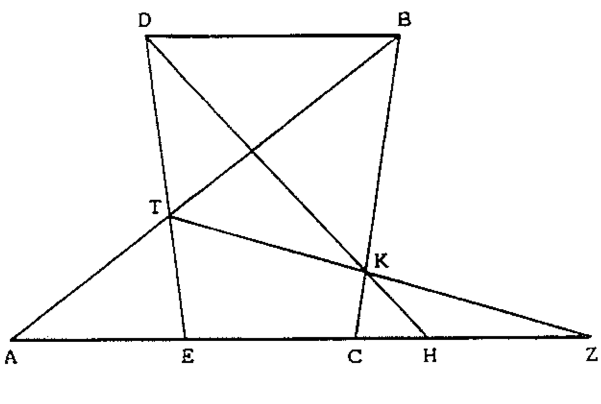


Fig.19

Proposition 131 (Fig.20): dans le cas de la figure ABCDEZHT, si AB:BC = AD:DC, alors les points A, H, T sont alignés.

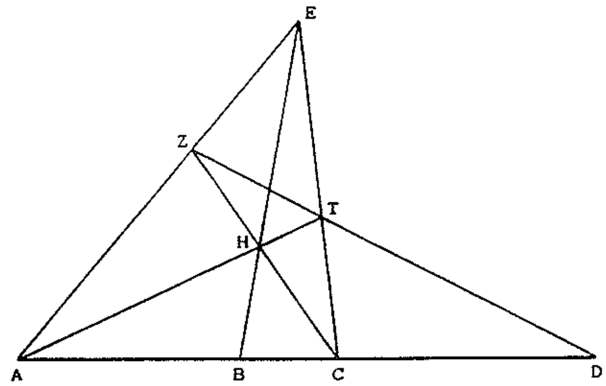


Fig.20

Proposition 132 (Fig.21): on a la figure ABCDEZH; si la droite DZ est parallèle à la droite BC, alors AB = BC.

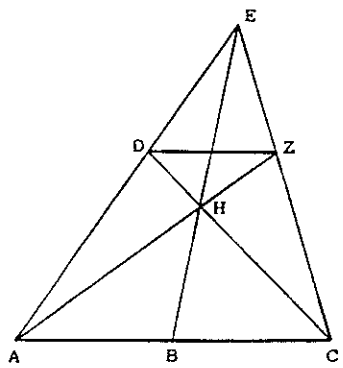


Fig.21

Proposition 133 (Fig.22): on considère la figure ABCDEZHT; si AB:BD = CB:BA, alors la droite ZH est parallèle à AC.

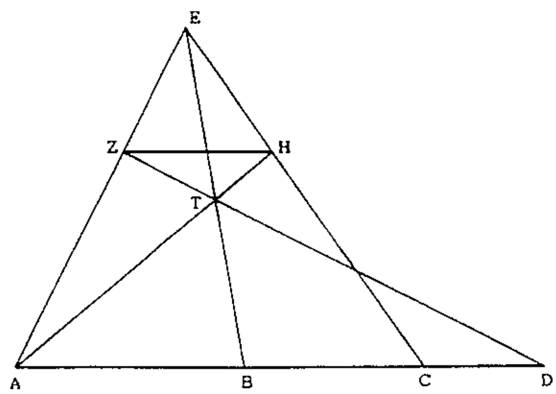


Fig.22

1°. Les énoncés.

Chasles écrit dans l'Aperçu Historique :

"La plus ancienne propriété géométrique de l'involution de six points se trouve dans Pappus (proposition 130 du septième livre)"[34].

La relation AB.CZ.ED = AD.EZ.CB tirée de l'énoncé de la proposition 130 exprime en effet l'involution des couples AZ, CD et BE[35]. Pour former cette relation entre six points en involution, on prend trois points appartenant aux trois couples; chacun d'eux fait deux segments avec les conjugués des deux autres; on aura ainsi six segments; le produit de trois de ces segments, qui n'ont pas d'extrémité commune, est égal au produit des trois autres. Ce type de relation n'apparaît pas chez Desargues.

On peut donc relire la proposition 130 de la manière suivante : les côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère KLHT déterminent sur une transversale AZ trois couples de points AZ, CD, BE qui sont en involution.

Notons cependant qu'il n'est pas question de quadrilatère dans l'énoncé de Pappus. Les points de la figure sont énumérés les uns à la suite des autres, la figure n'est pas définie, et l'absence de problématique n'aide pas à déchiffrer le dessin. Remarquons aussi que la proposition de Pappus a la forme d'un critère d'alignement, ce qui n'est pas le cas de l'énoncé ci-dessus.

Autour de la proposition 130, se trouvent plusieurs propositions qui traitent différents cas limites (deux droites sont parallèles, des points de concours sont confondus). Ces propositions donnent les relations entre les segments sous des formes différentes et chacune est démontrée indépendamment des autres. Aucun lien n'est explicité entre ces propositions. Seule leur proximité suggère qu'il y en a un.

On peut aussi observer que ce que nous considérons comme des éléments analogues, par exemple les sommets du quadrilatère, ne sont pas repérés par les mêmes lettres dans les différentes propositions. Les notations utilisées donnent l'impression que le lien entre les différentes propositions n'est pas celui que nous voyons aujourd'hui.

Pour Desargues au contraire, il y a une propriété unique : on a sur la transversale trois couples de points en involution. On trouve donc chez lui une manière neuve de relier des énoncés suivant un point de vue projectif : il n'y a pas de cas limite, chaque cas est un cas comme un autre (un point peut être à l'infini, les points d'un couple ou de deux couples peuvent être confondus).

2°. Les démonstrations.

Pappus démontre chaque proposition sans référence aux autres. Par contre, Desargues

[34] dans la note X, "Théorie de l'involution de six points", p.315.

[35] C'est une des manières d'exprimer l'involution de six points (cf. Chasles [1], p.309).

donne une démonstration unique. Celle-ci utilise le même type d'arguments que la démonstration de la proposition 130 (propriétés des proportions, compositions de raisons, relations dans les triangles semblables). Rappelons qu'à côté de cette démonstration qui s'inscrit tout à fait dans la tradition grecque, il y a une transgression significative par rapport à la rigueur grecque : il considère que le point à l'infini d'une droite est à égale distance de deux points à distance finie de cette droite, ce qui lui permet de couvrir tous les cas avec la relation définissant l'involution.

3°. Un autre lemme de Pappus.

Parmi les lemmes se rapportant aux Porismes, regardons pour terminer la proposition 145[36] :

"Menons transversalement, d'un point E, les deux droites EZ, EB sur les trois droites AB, AC, AD, et que la droite TE soit à la droite TH comme la droite EZ est à la droite ZH; je dis que la droite ED est aussi à la droite DC comme la droite BE est à la droite BC" [6] (Fig.23).

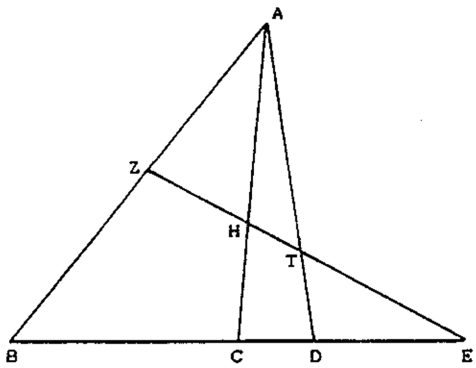


Fig.23

On peut lire dans cette proposition la conservation par projection d'une division harmonique (ou involution de quatre points). Mais cela est anachronique car l'idée de projection est étrangère au contexte grec. Par contre, quand Desargues écrit le Brouillon Project, la perspective a déjà un passé de deux cents ans. L'énoncé de son théorème sur la conservation de la relation d'involution ne s'exprime pas en termes de projections ou perspectives, mais l'idée de projection est bien présente et se retrouve dans l'utilisation du théorème pour l'étude des coniques.

6. Sur l'origine possible de la relation d'involution de Desargues.

Est-ce que Desargues a lu Pappus ? Il est fort probable que Desargues connaissait la Collection Mathématique. Il est en effet intégré à Paris dans un cercle scientifique qui a certainement connaissance des travaux de Pappus. Desargues ne le cite pas mais cela n'exclut pas

[36] Les propositions 129, 136, 137, 140 et 145 sont reliées aujourd'hui à la conservation par projection du rapport anharmonique (ou birapport) de quatre points.

qu'il l'ait lu car il fait peu référence à d'autres auteurs dans ses écrits[37].

Nous avons vu qu'il y a dans le livre VII des propriétés dans lesquelles on reconnaît aujourd'hui :

- la manière de caractériser des points en involution, dans différents cas particuliers;
- l'involution déterminée sur une transversale par les côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère, pour différentes positions de la transversale.

En supposant que Desargues ait connu les lemmes de Pappus, ceux-ci ont-ils joué un rôle dans l'élaboration de sa théorie de l'involution ? Et si oui, lequel ?

Une propriété essentielle de l'involution est d'être conservée par projection. Comment Desargues a-t-il vu le caractère d'invariant projectif de la relation d'involution ?

Nous n'avons pas de réponse à ces questions. Voici simplement deux exemples où des propriétés sont rapprochées et présentent des relations qui ont peut-être joué un rôle.

1°. Un problème de construction d'échelles.

Desargues a travaillé le problème des constructions d'échelles pour la représentation en perspective [38]. Il se peut que Desargues ait vu des ressemblances entre les relations de Pappus mises sous forme numérique et des suites de nombres intervenant dans les constructions d'échelles en perspective. On trouve par exemple les mêmes suites de nombres dans les deux figures suivantes :

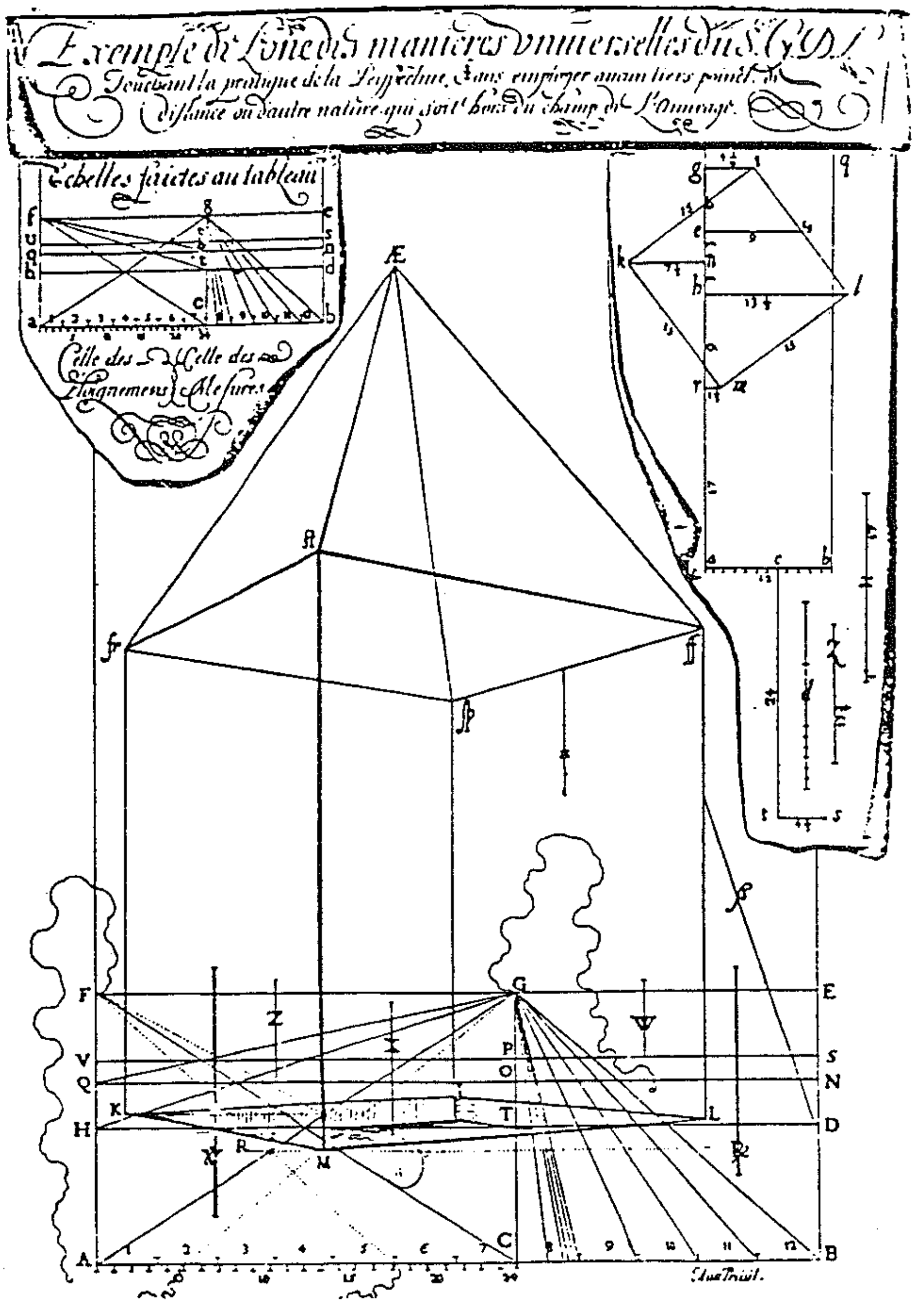
- Fig.24 : on considère les points à des distances de la souche Z égales à 2, 3,... fois celle de Z à D; les distances à Z des conjugués respectifs valent 1/2, 1/3,... fois la distance ZD;

- Fig.25 extraite de [2] : les droites HD, QN, VS,... parallèles à la ligne d'horizon FE représentent des droites au sol se trouvant dans des plans parallèles au tableau dont les distances à l'oeil sont égales à 2, 3, 4,... fois la distance de l'oeil au tableau; les distances de ces droites au point de fuite principal G valent respectivement 1/2, 1/3, 1/4,... fois la distance de G à la ligne de terre AB. La figure Fig.26 illustre la situation par une vue de profil (l'oeil est en R).

Fig.24

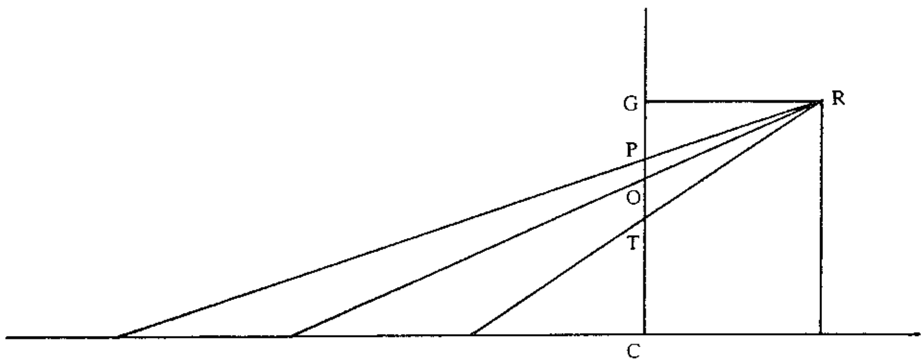
[37] Il mentionne uniquement Apollonius et les Eléments d'Euclide dans le Brouillon Project.

[38] "Exemple de l'une des manieres universelles ..." [2] en 1636, "Aux Théoriciens" dans le livre de A. Bosse publié en 1647.



Exemple de l'une des manieres universelles du S. G. D. L.
Touchant la pratique de la Perspective, sans emploier aucun tiers point, de distance ou d'autre nature, qui soit hors du champ de l'Ouvrage.

Fig.25



G
R
P
O
T
C

Fig.26

2°. Une analogie entre deux propriétés.

Desargues relève dans le Brouillon Project, l'analogie entre les deux propriétés suivantes:
- trois couples de droites concourantes en un même point et passant par des points en involution déterminent sur toute sécante des points en involution;
- les côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère déterminent sur toute sécante des points en involution.

Il écrit en effet, après avoir démontré la seconde propriété :

"*Ou l'on void que c'est une mesme propriété de trois couples de rameaux déployez au tronc d'un arbre*[39] *quand ils sont tous d'une mesme ordonnance entre eux, & quand ils sont disposez comme icy aux quatre poincts B, C, D, E, de façon que le but de l'ordonnance de trois couples de rameaux est comme si ces quatre poincts B, C, D, E, s'unissoient à un seul poinct*" ([3], p.144).

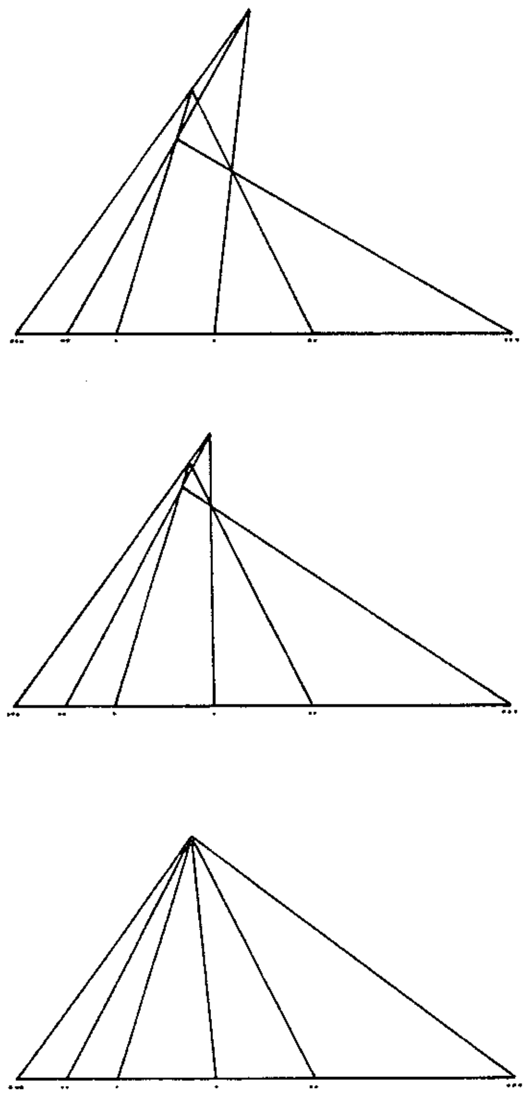


Fig.27

[39] c'est-à-dire trois couples de droites passant par trois couples de points en involution.

C'est comme si les quatre sommets du quadrilatère s'unissaient en un seul point. Pour chaque figure de Fig.27, on a trois couples de droites qui déterminent sur toute sécante des points en involution. Il est possible que ce glissement d'une figure à l'autre ait joué un rôle dans la mise en place de l'involution et de son caractère projectif.

Pour conclure, notons que Desargues a su intégrer dans le Brouillon Project des connaissances venant d'une part de la géométrie des anciens et d'autre part de la perspective. Par son approche de l'étude des coniques, il élargit en fait la rencontre entre la géométrie des anciens et la perspective. Celle-ci s'est préparée au cours des deux siècles précédents, et a déjà conduit, au début du 17ème siècle, à la parution de traités de perspective qui sont des ouvrages de géométrie dans la tradition euclidienne[40]. Par rapport au cheminement suivi par Desargues, nous ne pouvons que soulever des questions et mettre en évidence des rapprochements et des problèmes qui ont pu être sources d'inspiration.

[40] "Perspectivae Libri Sex" de Guidobaldo del Monte en 1600, "De Sciagraphia" de Simon Stevin en 1605.

Bibliographie.

[1] Michel CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 1889 (1ère édition en 1837).

[2] Girard DESARGUES, *Exemple de l'une des manieres universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans emploier aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage*, Paris, 1636, in J.V. FIELD and J.J. GRAY, *The Geometrical Work of Girard Desargues*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[3] Girard DESARGUES, *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan*, 1639, in René TATON, *L'oeuvre mathématique de G. Desargues*, Vrin, Paris, 1981.

[4] Thomas L. HEATH, *A History of Greek Mathematics* (deux volumes), Dover Publications, New York, 1981.

[5] PAPPUS of Alexandria, *Book 7 of the Collection*, Edited With Translation and Commentary by Alexander JONES (two parts), Springer-Verlag, New York, 1986.

[6] PAPPUS d'Alexandrie, *La Collection Mathématique* (deux volumes), traduit par Paul VER EECKE, Blanchard, Paris, 1982.

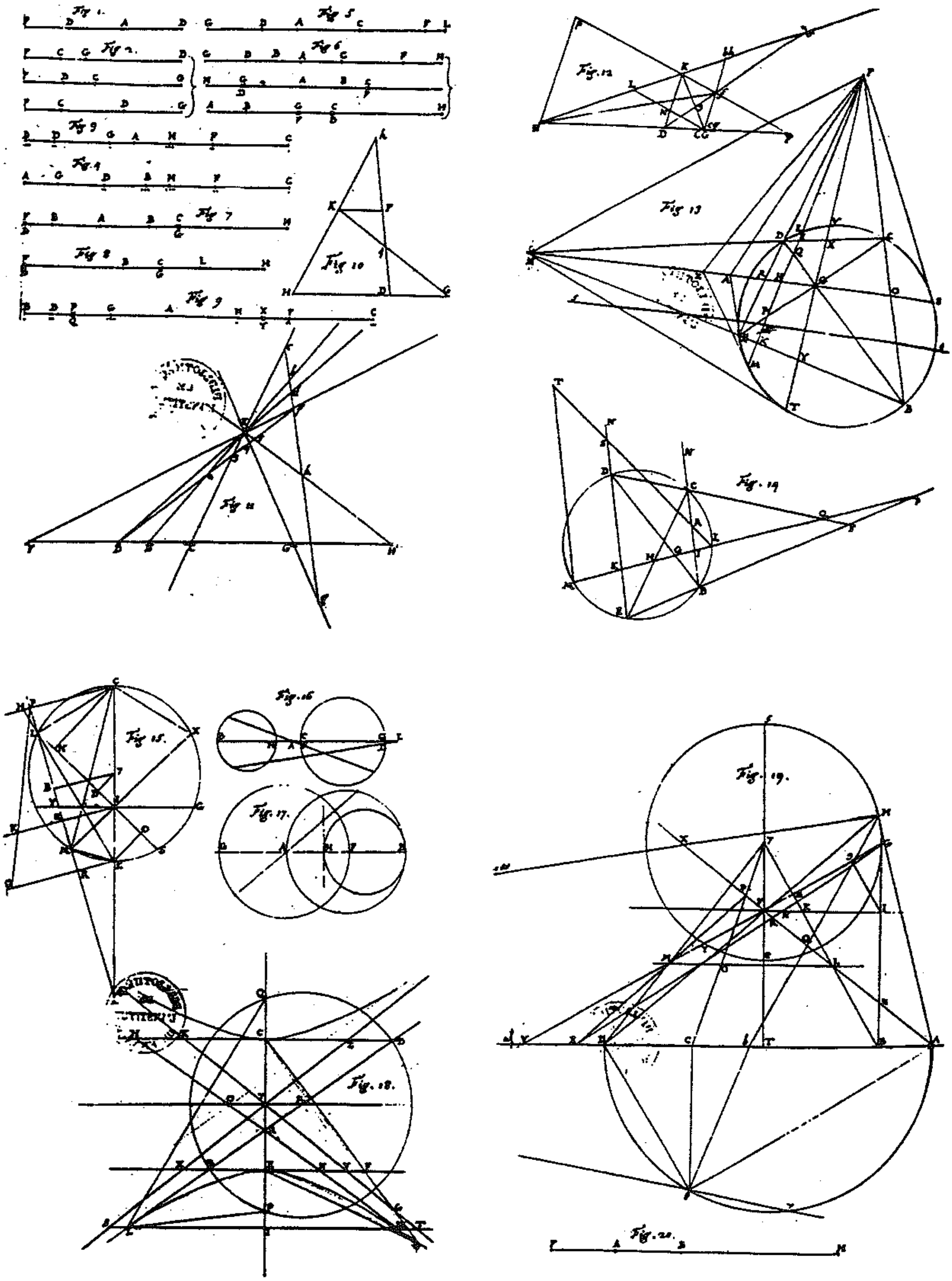
[7] Blaise PASCAL, *Generatio Conisectionum*, in *Oeuvres complètes*, tome II, texte établi, présenté et annoté par Jean MESNARD, Desclée de Brouwer, Paris, 1970.

[8] Jean-Victor PONCELET, *Traité des Propriétés Projectives des Figures* (deux volumes), Gauthier-Villars, Paris, 1865 (1ère édition du tome I en 1822).

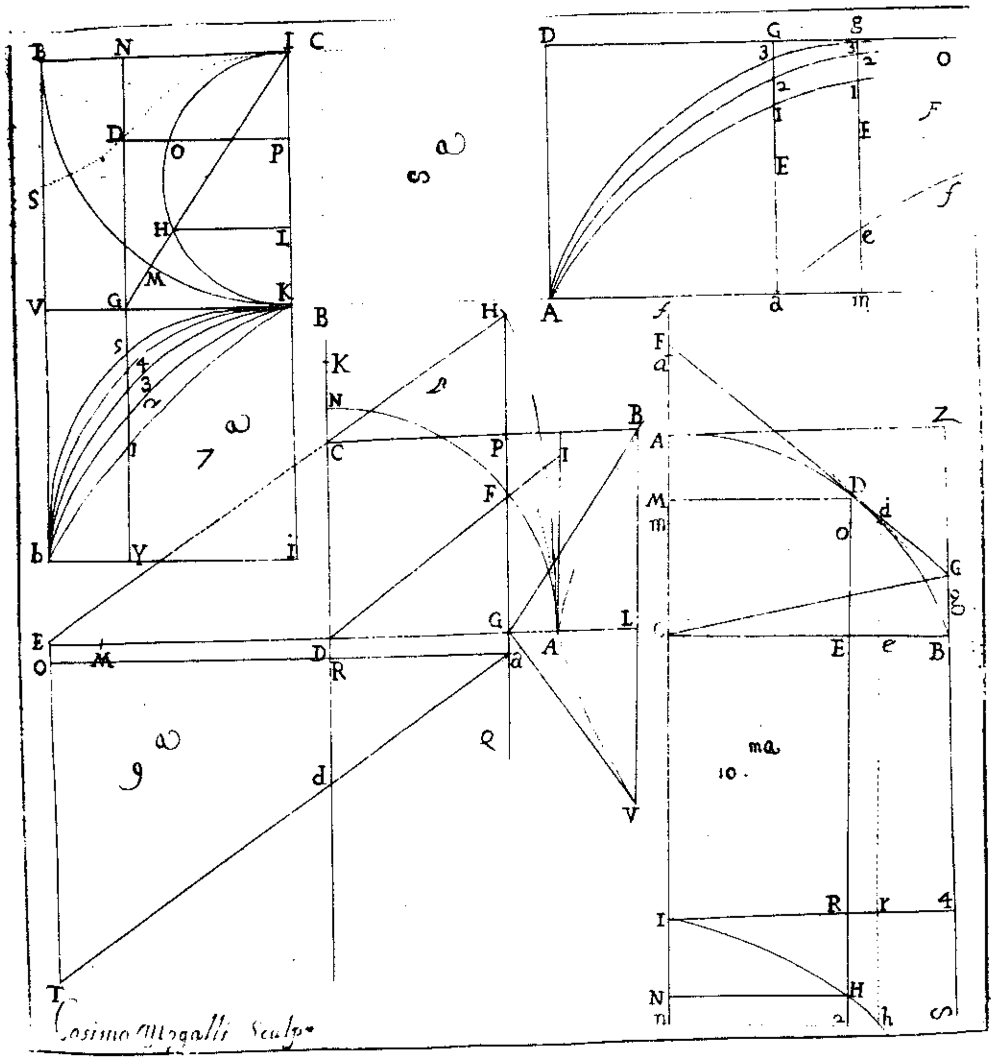
Articles qui situent l'oeuvre de Desargues dans l'histoire de la perspective et de la géométrie :

* Rudolf BKOUCHE, "La naissance du projectif, De la perspective à la géométrie projective", in *Mathématiques et Philosophie* (édité par Roshdi Rashed), Editions du CNRS, Paris, 1991.

* Denis LANIER & Jean-Pierre LE GOFF, "Dossier Desargues", in *Les Cahiers de la Perspective: Points de vue - n°5*, IREM de Basse-Normandie, Juin 1991.



Figures du "Brouillon project" ou "Traité des coniques"
de Desargues dans la copie manuscrite faite par Philippe de Lahire
(Bibliothèque de l'Institut).
Les figures originales sont perdues.


5a
7a
8
9a
10ma
Cosimo Mogalli Sculp.