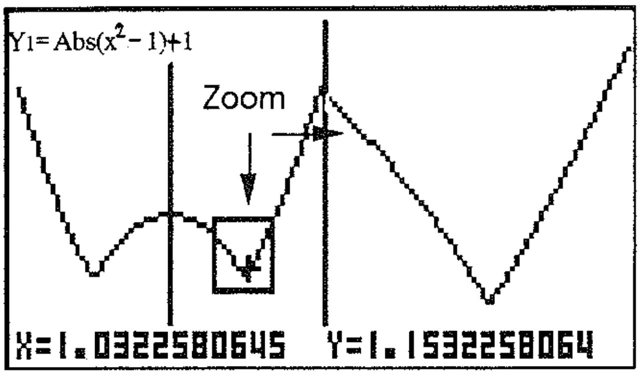
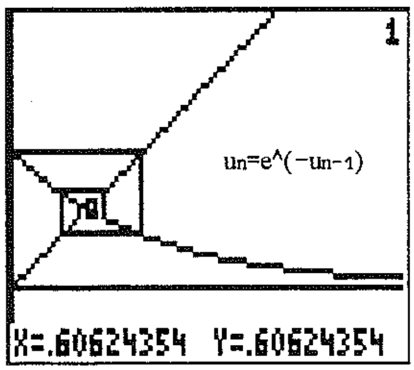
IREM
INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

85
Mai 1995

La calculatrice en 1ère et Terminale Scientifique



C. Jeulin
R. Proteau
D. Sperandio

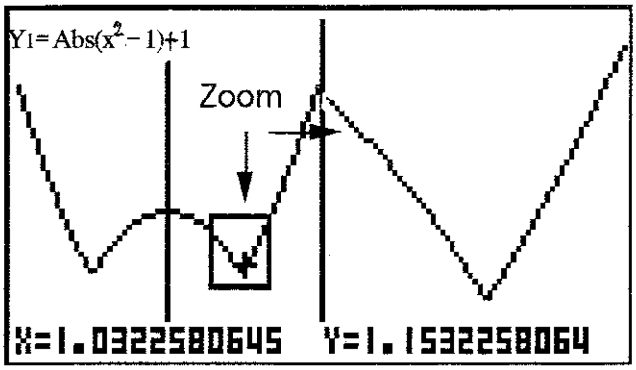


objectif :	Utiliser les calculatrices en 1S et TS.
sujet :	Les calculatrices comme auxiliaires de l'enseignement des mathématiques.
niveau :	Classes de 1S et TS.
public :	Enseignants de Lycée.

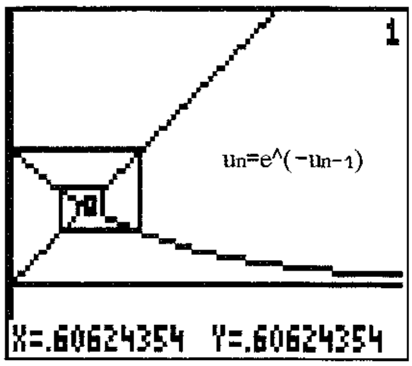
UNIVERSITE DENIS DIDEROT
PARIS VII

Avec le soutien de la DLC et des MAFPEN de Créteil, Paris, Versailles

La calculatrice en 1ère et Terminale Scientifique



C. Jeulin
R. Proteau
D. Sperandio



objectif :	Utiliser les calculatrices en 1S et TS.
sujet :	Les calculatrices comme auxiliaires de l'enseignement des mathématiques.
niveau :	Classes de 1S et TS.
public :	Enseignants de Lycée.

Dans nos stages IREM et dans cette brochure, les seules calculatrices utilisées sont des CASIO (7800, 8800, 9900) et des TI (81, 82) dont nous avons apprécié les performances. Nous nous sommes assez souvent inspirés des brochures d'accompagnement publiées par les constructeurs, ainsi que des stages organisés par Mr FERRAND pour CASIO et Mr.BASTID pour TI (Texas Instruments).

Les graphiques et les programmes de la brochure sont des copies directes des écrans des machines.

Nos remerciements vont également à Odette Dieraert et Nadine Locufier, spécialistes de reprographie qui ont réalisé le tirage de cette brochure.

La brochure est partagée en 9 chapitres :

PREFACE

Intentions majeures

Ce fascicule, destiné aux professeurs de Lycées enseignant en 1ère et Terminale, présente notre pratique pédagogique depuis trois années, dans le domaine de l'utilisation des calculatrices, particulièrement les calculatrices graphiques. Il ne s'agit pas d'un répertoire de programmes ni d'un exposé théorique sur l'emploi de ces matériels, mais de l'expérience courante de nos classes, avec comme objectifs : aider les élèves à comprendre les mathématiques et à se servir des instruments que la technologie actuelle leur apporte.

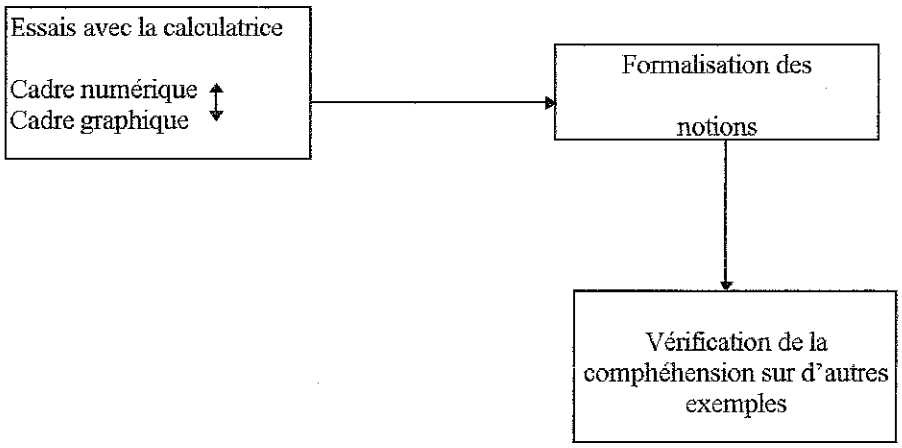
Nous n'avons pas cherché à mettre la calculatrice en défaut — des publications plus savantes fournissent assez d'exemples sur cette question — mais nous signalons quelques anomalies que les élèves peuvent rencontrer.

Par exemple, pour conjecturer la limite de $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ lorsque x tend vers $+\infty$, on demande à la machine $f(10^{10})$ puis $f(10^{40})$; on obtient : $f(10^{10}) \approx 0{,}5$, $f(10^{40}) \approx 0$ alors que la limite est 0,5 ; les élèves comprennent que dans le deuxième cas, la capacité de la machine ne lui a pas permis de tenir compte , dans le radicande, de 10^{40} devant 10^{80} et qu'elle a simplement calculé $\sqrt{(10^{40})^2} - 10^{40}$.

Dans cet ordre d'idées notre but est simplement de mettre en garde contre une utilisation aveugle et irréfléchie.

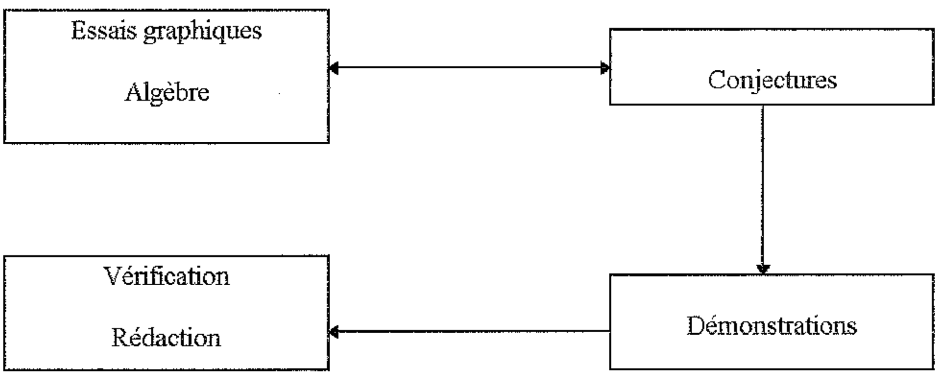
Notre pratique personnelle en classe nous a appris que les élèves se montraient fort réticents à dépasser le stade des calculs numériques simples. Contrairement à ce que l'on peut facilement croire, sauf pour quelques individualités déjà conquises par l'informatique, les élèves ne se débrouillent pas tout seuls. Il nous a semblé que l'enseignement actuel des mathématiques au niveau Lycée ne pouvait pas ignorer l'importance prise par les calculatrices et devait intégrer leur utilisation dans notre pratique pédagogique. Il ne s'agit pas d'un simple complément pour obtenir des résultats numériques : toute l'activité mathématique en algèbre et en analyse se fait en liaison avec les calculatrices.

Le schéma que nous proposons pour l'introduction de notions nouvelles est le suivant :



On peut attendre de cette première phase, impliquant un aller-retour entre le cadre graphique et le cadre numérique, que les élèves attachent davantage de sens à la notion introduite.

On passe ensuite à l'utilisation pour des exercices ou des problèmes, mais le principe de l'utilisation des calculatrices reste le même :



Présentation de la brochure

Cette brochure reprend et complète les réflexions et expérimentations que nous avons présentées lors des stages consacrés aux calculatrices, à l' IREM PARIS 7, depuis deux ans, dans le cadre du Plan Académique de Formation (P.A.F.). Elle est essentiellement consacrée à l'analyse, l'algèbre et aux probabilités, pour les classes de 1ere et Tale Scientifiques.

Elle ne fait pas double emploi avec les fascicules d'accompagnement livrés par les constructeurs. Nous essayons d'insister sur le rôle pédagogique des calculatrices, notre objectif étant de favoriser — ou d'installer — une utilisation intelligente.

Les seules calculatrices que nous avons employées sont des CASIO (fx 180, 7000 jusqu'à 9900) et des TI (81, 82). Bien entendu, les utilisations indiquées peuvent être effectuées avec d'autres modèles.

Dans ce fascicule, les fonctions des calculatrices obtenues par un accès direct sont présentées dans un cadre plein comme $\boxed{\text{MODE}}$ *ou* $\boxed{\text{sin}}$ *et les fonctions obtenues par un accès indirect (en général en appuyant d'abord sur* $\boxed{\text{SHIFT}}$ *ou* $\boxed{\text{2nd}}$ *) sont présentées dans un cadre en pointillés, comme* DRG ANGLE.

Chapitre 1. IDEES GENERALES. MANIPULATIONS DE BASE

I . Les calculatrices en 1èreS et TS

1) Le matériel des élèves

Nous demandons aux élèves qui n'en possèdent pas déjà d'acheter des calculatrices CASIO ou TI (graphiques de préférence si leur budget le permet). Des recensements effectués vers fin Septembre montrent que la grande majorité possède les calculatrices graphiques demandées. Des difficultés se présentent, dues à la multiplicité des modèles d'une part, au coût de cet achat supplémentaire d'autre part.

Pour le premier point, nous précisons clairement que nous ne pourrons aider que les élèves possédant des TI ou des CASIO et que les autres devront étudier les modes d'emploi pour réaliser les manipulations que nous demanderons. Bien entendu, cette restriction disparaît pour les collègues qui connaissent les autres modèles. Il faut également insister auprès des élèves pour leur faire accepter l'idée qu'ils devront consacrer un certain nombre d'heures (au moins 3 ou 4) à l'apprentissage des manipulations de base.

En ce qui concerne la question du coût on peut avoir recours au financement par le Lycée (fonds social Lycéen, aide régionale aux Lycées). Il n'est pas recommandé de faire acheter un même modèle qui serait seulement prêté à chaque séance : les élèves doivent disposer de leur calculatrice chez eux, pour leur travail personnel. Mais on peut faire acheter des calculatrices qui seraient prêtées pour l'année scolaire, au même titre que les manuels dans les Collèges. Le Lycée dans lequel nous enseignons possède un stock de calculatrices qui sont prêtées (pour l'année ou en attendant un achat ultérieur) aux élèves qui en font la demande.

Nous avons déjà noté dans la préface que la plupart des élèves, livrés à eux-mêmes, utilisaient peu la calculatrice et n'exploitaient qu'une très faible partie de ses possibilités. Il convient, surtout au début, de les encadrer pour que cette utilisation devienne chez eux une habitude, presque un réflexe.

2) Les calculatrices et le professeur

L'utilisation des calculatrices ne se fait pas au détriment du cours de Mathématiques, qui d'ailleurs, d'après les instructions officielles, doit être peu développé. Notre ambition est d'employer les calculatrices pour mieux faire comprendre et mieux utiliser les Mathématiques. On peut, en outre, espérer obtenir une meilleure attention et une amélioration de la concentration : que se passe-t-il par exemple quand on dépasse la capacité de la calculatrice ?

Le professeur contrôle de très près l'emploi individuel pour chaque élève de sa calculatrice et s'assure, surtout en début d'année, que les manipulations qu'il demande sont bien effectuées. A cet effet, il propose des exercices précis et vérifie les réponses (voir dans ce chapitre les paragraphes II et III). Vers la fin de Septembre, tous les élèves de 1ère doivent dominer l'utilisation de la calculatrice en ce qui concerne les manipulations de base, le graphisme, l'obtention de valeurs d'une fonction (paragraphes II et III).

Une calculatrice rétroprojetable (achetée par le Lycée !) permettra de visualiser, au moins pour un modèle de calculatrice, les opérations demandées. Si les élèves possèdent des modèles différents, la rétroprojetable sera aussi très efficace pour matérialiser les notions du cours, en présentant par exemple des graphismes que les élèves ne peuvent pas réaliser sur leurs machines.

3) Les élèves et le fascicule d'accompagnement

Il serait sans intérêt de reprendre ici les instructions détaillées contenues dans le fascicule d'accompagnement de chaque calculatrice.

En revanche, il est indispensable d'obliger les élèves à étudier ce livret. Ils doivent apprendre les manipulations de base, pour toutes les touches d'opération, pour les fonctions regroupées dans le menu MATH, pour tout ce qui concerne les représentations graphiques (Range, Graph, Zoom, Box).

Deux ou trois séances (de préférence par demi-classe en module) sont entièrement consacrées à la vérification de ce savoir-faire de base, qui doit être très vite acquis avec des exercices simples.

Dans les chapitres suivants, nous reprenons parfois des instructions précises que les élèves ont déjà employées dès les premières séances. Mais nous insistons sur les erreurs les plus fréquentes et développons surtout l'aspect pédagogique des calculatrices.

II Manipulations de base

1) Les élèves ont en général déjà utilisé une calculatrice pour les calculs numériques usuels. Il faut vérifier ces notions de base pour $+, -, \times, \div, \sqrt{\ }$, puissances, cos, sin, tan, emploi des parenthèses, avec quelques exercices, en insistant sur les pièges classiques.

2) Parenthésage et priorité entre opérations. Exemples de calculs.

* *Calculer* $3{,}5 + \sqrt{(17{,}2^2 + (9/7)^2)} \approx 20{,}747\ 987\ 16$ (attention à la parenthèse sous le radical $\sqrt{(17{,}2^2 + (9/7)^2)}$).

* *Calculer* $2 - \dfrac{3 + 1{,}751^2}{2 - \sqrt{3{,}7}} \approx -77{,}333...$

* *Comparer* $\cos(2\pi/7)$; $(\cos 2\pi) \times 7$; $\cos^2(\pi/7)$; $\cos(\pi/7)^2$; $\cos \pi/7 \times 2$ en insistant sur le rôle des parenthèses et les différences entre la machine et le calcul à la main.

On obtient respectivement les valeurs approchées :

$\cos(2\pi/7) \approx 0{,}623489...$

$(\cos 2\pi) \times 7 = \cos 2\pi \times 7 = 7$

$\cos^2(\pi/7) \approx 0{,}81174...$ à ne pas confondre avec

$\cos(\pi/7)^2 \approx 0{,}97978...$

$\cos \pi/7 \times 2 \approx 1{,}801937...$

Une règle simple à retenir : lorsqu'on n'est pas trop sûr des priorités opératoires, ne pas hésiter à employer beaucoup de parenthèses, même si certaines sont superflues.

3) Mode d'affichage

* *Insister sur le choix du mode degré ou radian :*

- pour CASIO, changement par la touche DRG puis touches F1, F2, F3, $\boxed{\text{EXE}}$; la conversion de 45° en radians, le mode étant déjà en radians, se fait par la touche DRG puis F4.

- pour T.I 81, changement du Mode sur le menu obtenu par la touche $\boxed{\text{MODE}}$; la onversion de 45° en radians, le mode étant déjà en radians, se fait par la touche $\boxed{\text{MATH}}$ puis ° (ligne 6).

- pour T.I 82, choix du Mode sur le menu obtenu par la touche $\boxed{\text{MODE}}$; la conversion de 45° en radians, le mode étant déjà en radians, se fait par la touche ANGLE puis ° (ligne 6).

* *Nombre de chiffres affichés :*

- pour CASIO, après DISP on peut choisir un nombre précisé de décimales (Fix, n), la notation scientifique avec le nombre de chiffres significatifs (Sci, n), la notation décimale usuelle (Nrm 2), la notation avec puissances de 10 (Nrm 1), la notation ingénieur (Eng).

- pour T.I 81 ou 82, on a le choix après la touche $\boxed{\text{MODE}}$ entre : Norm (le plus usuel), Sci, Eng, Float (virgule flottante) ou éventuellement le nombre de chiffres affichés.

4) Particularités et pièges pour certaines touches

Pour T.I attention à (-)5 et – 5, erreur de syntaxe fréquente si l'on emploie le signe soustractif à la place du signe (-) donnant l'opposé.

Puissances et écriture avec une puissance de 10 pour CASIO:

* $3{,}7.10^{-5}$ avec la touche $\boxed{\times 10^x}$: 3,7 $\boxed{\times 10^x}$ –5 = 0,000037

ou avec la touche 10^x : $3{,}7.10^{-5}$;

* ne pas confondre avec $3{,}7^{-5} = 3{,}7$ $\boxed{x^y}$ $-5 \approx 0{,}001442...$

* $\sqrt{3{,}7}$ peut s'obtenir par 3,7 $\boxed{x^y}$ .5 ou 2 $\sqrt[x]{y}$ 3,7 ou $\sqrt{3{,}7} \approx$ 1,923...

* la racine cubique peut s'obtenir par $\sqrt[3]{\ }$ 3,7 : $\sqrt[3]{3{,}7} = 3{,}7$ $\boxed{x^y}$ (1/3)

$= 3$ $\sqrt[x]{y}$ $3{,}7 =$ e^x $(\ln 3{,}7/3) \approx 1{,}546...$

Puissances et écriture avec une puissance de 10 pour T.I 81, 82

* $3{,}7.10^{-5}$ avec la touche $\boxed{\text{EE}}$ pour T.I.81, EE pour T.I.82, qui affiche 3,7 E (-)5 ;

* ne pas confondre avec $3{,}7^{-5}$ (avec la touche $\boxed{\wedge}$) :3,7 $\boxed{\wedge}$ (-)5 $\approx 0{,}00144$

* comme chez CASIO, plusieurs écritures de $\sqrt{3{,}7}$ ou $\sqrt[3]{3{,}7}$.

Résultats sous forme fractionnaire pour CASIO

* impossible sans écrire un programme pour CASIO 7000 à 8500

* pour CASIO 8700 à 9900 et 180P, on peut utiliser la touche $\boxed{a+b/c}$ qui, pour des dénominateurs assez simples, donne le résultat sous forme exacte fractionnaire.

Exemple : 1 + (1−1 ⌟5) ⌟(2+1 ⌟20) = $1+\dfrac{1-\dfrac{1}{5}}{2+\dfrac{1}{20}} = 1 + \dfrac{16}{41}$ sous la forme 1 ⌟16 ⌟41.

Le signe ⌟ (pour la barre de fraction) équivaut à une division lorsque la machine ne garde pas l'écriture fractionnaire ; il donne une valeur approchée par répétition.

$24-\dfrac{36}{63^2}$ = 24−36 ⌟ 63^2 = 23 ⌟ 437 ⌟ 441 = $23+\dfrac{437}{441} \approx 23{,}990929$

$\dfrac{63}{210^6}$ = 63 ⌟(210^6) ≈ 7,34555781 E-13

Attention $\dfrac{4}{\dfrac{8}{9}}$ = 4 ⌟(8 ⌟9) = 4 ⌟1 ⌟2 = $4+\dfrac{1}{2}$ alors que 4 ⌟8 ⌟9 = $4+\dfrac{8}{9}$.

La touche $\boxed{d/c}$ donne la fraction : 4 ⌟(8 ⌟9) $\boxed{d/c}$ = $\dfrac{44}{9}$

Résultats sous forme fractionnaire pourT.I 82

* impossible sans un programme pour T.I 81

* pour T.I 82, utiliser la touche de division (÷) puis ► Frac du menu $\boxed{\text{MATH}}$: $24-\dfrac{36}{63^2} = 24-\dfrac{36}{63^2}$ ► Frac = $\dfrac{10580}{441}$

Si le dénominateur contient plus de 4 chiffres, la machine affiche le résultat décimal approché malgré la touche ► Frac .

Fonctions réciproques des fonctions circulaires (CASIO ou T.I)

* attention au choix du Mode, en général Radian.

* expliquer, assez longuement, que les touches de la machine fournissent <u>une</u> valeur dans <u>un certain intervalle.</u>

$\boxed{COS^{-1}}$ a (T.I), $\boxed{\text{Acs}}$ a (CASIO) donne $\alpha \in [0,\pi]$ tel que $\cos\alpha$ = a

$\boxed{SIN^{-1}}$ a (T.I), $\boxed{\text{Asn}}$ a (CASIO) donne $\alpha \in [-\pi/2\,,\pi/2]$ tel que $\sin\alpha$ = a

TAN^{-1} a (T.I), $\boxed{\text{Atn}}$ a (CASIO) donne $\alpha \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ tel que $\tan\alpha = a$.

Exemple (en 1ère en trigonométrie) :

Résoudre dans $[0\,,2\pi]$ *l'équation* 3 cos x = 1 *de façon exacte puis approchée*

(deux solutions $x_1 = \cos^{-1}(1/3) \approx 1{,}230959$ et $x_2 = -\cos^{-1}(1/3) + 2\pi \approx 5{,}05222589$).

III Les programmes obligatoires

1) Les instructions officielles imposent actuellement pour les 1èreS et TS l'utilisation de deux programmes : les valeurs d'une fonction (ou d'une suite $u_n = f(n)$), les valeurs d'une suite récurrente (avec test d'arrêt).

Nous donnons le programme de calcul des valeurs d'une fonction dès le début de l'année en 1èreS, avec quelques recommandations.

2) Valeurs d'une fonction pour CASIO 8800, 8700

* Utilisation de la touche MEM (mise en mémoire d'une fonction). Ce stockage de la fonction est très utile et doit devenir un réflexe chez les élèves. Il servira aussi bien pour obtenir des valeurs numériques que pour la représentation graphique.

On écrit l'expression de f(x) ;

avec la touche MEM on fait apparaître STO RCL fn LIST ;

la touche STO (F1) suivie du numéro n stocke f(x) en f_n $(1 \leq n \leq 6)$;

RCL n rappellera la fonction f_n ;

LIST fournit la liste complète des fonctions en mémoire ;

on efface la fonction f_n par STO $\boxed{\text{AC}}$ n

* *Le programme :*

" VAL f_1 "		" VAL f_1 "
"X "?→X		Lbl 1
"Y_1" : f_1	ou	"X "?→X
		f_1 →Y : Y
		Goto 1

Il est bon de signaler aux élèves que leurs programmes doivent rester facilement déchiffrables et doivent contenir un minimum de notations explicatives mais il n'est pas très utile qu'ils gardent 6 programmes pour les 6 fonctions stockables ! Les élèves apprennent évidemment, d'après le livret d'accompagnement, comment appeler un programme (PRGM puis F3 puis son numéro).

* *__1er exemple__ : Soit* $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

Calculer les valeurs de f(x) pour $x = 0$; -1 ; 5 ; 14 ;5/3 ; $\sqrt{2}$.

On prévoit la possibilité de calculs fractionnaires et on place en f_1 : $(2x+3) \lrcorner (x-1)$. Le programme " VAL f_1 " permet de remplir le tableau :

x	0	3	-1	5	14	5/3	$\sqrt{2}$
f_1	-3	9/2	$-1/2$	13/4	$31/13 = 2+5/13$	$9+1/2$	14,071...

Si la valeur exacte $f_1(\sqrt{2})$ est demandée, l'élève doit savoir que sa machine ne lui fournit qu'une valeur approchée . Il devra faire le calcul « à la main » :

$f_1(\sqrt{2}) = \dfrac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}-1}$ ou plutôt $f_1(\sqrt{2}) = 7+5\sqrt{2}$; il doit penser à vérifier que $7+5\sqrt{2} \approx 14{,}071106...$ Notons à ce sujet que l'emploi de la calculatrice renforce la distinction entre valeur exacte et valeur approchée.

* *__2ème exemple__ : Soit* $f(x) = -6x^4 + 13x^3 + 209x^2 - 37x - 35$

a) Calculer f(x) pour $x = 1/2 ; -1/2 ; 7 ; 5 ; 1/3 ; \sqrt{2}$; 1

b) Factoriser complètement f(x) et résoudre f(x) = 0 (en 1ère après les polynômes)

a) On entre f(x) dans la mémoire f_1 . Le programme " VAL f_1 " permet de remplir le tableau :

x	1/2	$-1/2$	7	5	1	1/3	$\sqrt{2}$
$f_1(x)$	0	33,75	0	2880	144	$-23{,}70$..	343,44..

Les valeurs $f_1(1/2)$, $f_1(7)$ sont des valeurs exactes et fournissent deux racines du polynôme f(x) ; $f_1(-1/2)$ est aussi une valeur exacte car le dénominateur des différentes puissances est $2^4 = 16$ et la valeur $f_1(-1/2)$ est décimale ; les coefficients de f(x) étant entiers, on est également sûr de $f_1(5)$ et $f_1(1)$; enfin $f_1(1/3)$ est une valeur approchée. On peut essayer d'obtenir une valeur fractionnaire en entrant :

x = 1 $\lrcorner$ 3, on obtient encore $f_1(1/3) \approx -23{,}7037037$; en revanche, avec

x = – 1 ⌟ 2, on obtient bien 33 ⌟ 3 ⌟ 4 = $\dfrac{135}{4}$ = 33 + $\dfrac{3}{4}$ = 33,75 ; avec

x = $\sqrt{2}$, aucune possibilité d'obtenir une valeur exacte :

$$f_1(\sqrt{2}) \approx 343{,}4436508.$$

b) L'exercice se poursuit de façon traditionnelle, en factorisant par $x - 1/2$ et $x - 7$. On obtiendra $f(x) = -6(x - 1/2)(x - 7)(x + 1/3)(x + 5)$

L'ensemble des solutions de f(x) = 0 est S = $\{1/2\,;7\,;-1/3\,;-5\}$

Notons tout de suite une utilisation intéressante des <u>représentations graphiques</u> pour obtenir une factorisation de f(x) sans aucune indication permettant de connaître des racines : on fait tracer par la machine la représentation graphique de f. Le tracé montre que la courbe coupe l'axe des abscisses en des points d'abscisses voisines de 7, – 5 et peut-être aussi de – 1/2 ; la fonction TRACE de la calculatrice permet d'ailleurs de confirmer cette conjecture. On revient alors au calcul numérique de f(7) , f(– 5) pour confirmation.

Remarque : Pour calculer une valeur isolée de $f_1(x)$ sans utiliser le programme " VAL f_1 ", on peut entrer en mémoire la valeur de x envisagée puis demander f_1. Ainsi, pour x = 3/4, on doit effectuer les manipulations :

3 ⌟ 4 →X $\boxed{\text{EXE}}$

$\boxed{\text{MEM}}$ f_n 1 $\boxed{\text{EXE}}$ $f_1(3/4) \approx 58{,}3984375$

La valeur obtenue est la valeur exacte car $\dfrac{1}{4^4}$ est le nombre décimal 0,00390625 ; les autres opérations pour le calcul de f(3/4) garderont 8 décimales exactes.

3) Valeurs d'une fonction pour T.I 81

* *<u>Stockage de la fonction</u>* : Pour ce modèle, on entre la fonction dans les mémoires Y_n (n = 0, 1, 2, 3, 4) : $Y_1 = (2x + 3) \div (x - 1)$. Lorsque le symbole $\boxed{=}$ est sur fond noir, la fonction est activée, c'est à dire que sa représentation graphique apparaîtra pour toute commande de graphe. On fait disparaître une fonction stockée par $\boxed{\text{CLEAR}}$.

* *Le programme :*

```
Prgm 2 : VALY1
Disp "X"
Input X
Disp "Y1"
Disp Y1
```

* *Tableau de valeurs*. Ici, pas de résultats fractionnaires, mais on peut conjecturer que le résultat est exact lorsque la valeur fournie par la machine n'a que quelques décimales.

x	3	-1	5	14	$5/3$	$\sqrt{2}$
$f(x)$	4,5	$-0,5$	3,25	2,384...	9,5	14,07106...

f(3), f(– 1), f(5), f(5/3) sont des valeurs exactes ; f(14) est approchée, ainsi, bien sûr que f($\sqrt{2}$).

* *2ème exemple* (le même que pour CASIO)

Avec le programme VALY1, même utilisation que " VAL f_1 " de CASIO pour obtenir le tableau de valeurs.

$Y_1 = -6X^4 + 13X^3 + 209X^2 - 37X - 35$

Avec T.I 81, pas de calculs fractionnnaires. On signale aux élèves que lorsqu'un calcul donne éventuellement une valeur très voisine de 0 (comme 1×10^{-12}) on peut en général admettre que cette valeur est 0.

4) Valeurs d'une fonction pour T.I 82

* *Stockage de la fonction* : même utilisation des mémoires Y_n que pour T.I 81. Cependant, on dispose de 10 mémoires au lieu de 4.

* *Tableau de valeurs*

Programmation non indispensable puisque ce modèle possède les touches TblSet (pour choisir le format de tableau de valeurs) et TABLE (pour afficher le tableau de valeurs). On obtient très facilement les valeurs $Y_n(x)$ pour les fonctions Y_n activées (signe $\boxed{=}$ sur fond noir). On choisit d'abord dans TblSet la valeur minimale de X, le pas $\underline{\Delta\text{Tbl}}$ et la façon dont la machine donnera les réponses : automatiquement (<u>Auto</u>) ou après demande (<u>Ask</u>) aussi bien pour la variable X que pour $Y_n(X)$.

Ainsi, avec $Y_1 \boxed{=} -6X^4 + 13X^3 + 209X^2 - 37X - 35$

$Y_3 \boxed{=} (2X+3)/(X-1)$

TblMin = -5 ; ΔTbl = 1 ; Indpt : <u>Ask</u> ; Depend : <u>Auto</u>

X	Y_1	Y_3
.5	0	−8
.3333	−23.7	−5.5
−1	192	−.5
−.333	−1E-12	−1.75

La touche TABLE fournit, sur la T.I 82, systématiquement des valeurs approchées. Pour obtenir des résultats sous forme fractionnaire, on peut utiliser le programme VALY1 en le modifiant comme suit :

```
Prgm2 : VALY1FRA
Input "X=",X
Disp"Y1"
DispY1 ► Frac
```

Par exemple, pour $Y_1 = -6X^4 + 13X^3 + 209X^2 - 37X - 35$, on obtient : si X = 1/3 , $Y_1 = -\dfrac{640}{27}$ et si X = −1/3 , $Y_1 = -$ 1E-12 soit 0.

On peut aussi calculer une valeur isolée sous forme de fraction en entrant d'abord X :

1/3 $\boxed{\text{STO}\triangleright}$ X $\boxed{\text{ENTER}}$

Y_1 ► Frac donne aussi $-\dfrac{640}{27}$.

5) Valeurs d'une suite récurrente

L'exploitation pédagogique de cette notion sera présentée au chapitre 5 « Suites ». Le principe de programmation est en gros le même que pour l'obtention des valeurs de f(x), avec de plus une « boucle » pour faire calculer l'image de la valeur précédemment affichée. Ainsi, pour une suite définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, le calcul de $f(u_0)$ donnera u_1, puis le calcul de $f(u_1)$ donnera u_2, etc...

ANNEXE : CONTROLE DE CALCULS NUMERIQUES

$\boxed{1}$ *Notation scientifique , puissances*

* **notation scientifique** Exemple : $1,5.10^{-3}$

			affichage
• Casio 180	$\boxed{\text{EXP}}$	↳ $\boxed{1}\boxed{.}\boxed{5}\boxed{\text{EXP}}\boxed{3}\boxed{}$	$1,5^{-03}$
• Casio 8000	$\boxed{\text{EXP}}$	↳ $\boxed{1}\boxed{.}\boxed{5}\boxed{\text{EXP}}\boxed{-}\boxed{3}$	$1,5\,\text{E}-3$
• TI 81,85	$\boxed{\text{EE}}$	↳ $\boxed{1}\boxed{.}\boxed{5}\boxed{\text{EE}}\boxed{(-)}\boxed{3}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	.0015
• TI 82	$\boxed{\text{EE}}$		
• Casio 8800	$\boxed{\times 10^x}$	↳ $\boxed{1}\boxed{.}\boxed{5}\boxed{\times 10^x}\boxed{(-)}\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXE}}$ ou $\boxed{-}$	$1,5\,\text{E}-03$
• Casio 9900	$\boxed{\times 10^x}$	↳ $\boxed{1}\boxed{.}\boxed{5}\boxed{\times 10^x}\boxed{(-)}\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXE}}$ ou $\boxed{-}$	$1,5\,\text{E}-03$

ne pas taper : $1,5\times 10\ \text{EE}-3$ *qui donne* $1,5\times 10\times 10^{-3}$

* **puissances** Exemple : $2^5-8^{-3}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

• Casio 180 $\boxed{x^y}$ ↳ $\boxed{2}\boxed{x^y}\boxed{5}\boxed{-}\boxed{8}\boxed{x^y}\boxed{3}\boxed{\pm}\boxed{+}\boxed{(}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{4}\boxed{x^2}\boxed{=}$

32,06054688

• Casio 8000 $\boxed{x^y}$ ↳ $\boxed{2}\boxed{x^y}\boxed{5}\boxed{-}\boxed{8}\boxed{x^y}\boxed{(-)}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{(}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{4}\boxed{)}\boxed{x^2}\boxed{\text{EXE}}$

• TI 81,85 $\boxed{\wedge}$ ↳ $\boxed{2}\boxed{\wedge}\boxed{5}\boxed{-}\boxed{8}\boxed{\wedge}\boxed{(-)}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{(}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{4}\boxed{)}\boxed{x^2}\boxed{\text{ENTER}}$

• TI 82 $\boxed{\wedge}$

• Casio 8000 $\boxed{x^y}$

• Casio 9900 $\boxed{\wedge}$

$\boxed{2}$ *Savoir faire chercher un ordre de grandeur*

• $X=2^5-8^{-3}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ $\quad X\approx 2^5\quad (32)$

$\boxed{3}$ *Quand est-il licite ou raisonnable de prendre sa machine ?*

• Pour X, la machine affiche 32,06054688 (=X') ; est - ce la valeur exacte ?

$$X = 2^5 - \frac{1}{8^3} + \frac{1}{4^2} = \frac{2^5.8^3 - 1 + 32}{8^3} = \frac{16415}{512} = 32 + \frac{31}{512} \qquad 8^3 = 4^3 \times 2^3$$

On peut prendre la calculatrice pour effectuer $2^5.8^3 - 1 + 32 = 16415$ *à condition d'avoir calculé de tête que* $8^3 = 4^2 \times 4 \times 8$.

Or $\frac{31}{512} \approx 0{,}060546875$ donc X' n'était pas la valeur exacte.

En tapant $(16415 \div 512 - 32) \times 100 \rightarrow 6{,}0546875$ *la machine donne les 2 décimales en mémoire.*

• Manipulation des parenthèses : les élèves font souvent des calculs partiels qu'ils recopient.

• Ne pas accepter l'utilisation de la machine pour des calculs du style :

$-15 \div 30$ ↳ - 0,5

$\cos^{-1}(-0{,}5)$ ↳ 120

• Soit $P(x) = -6x^4 - 11x^3 + 213x^2 - 33x - 35$

* $P\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbf{D}$ (4chiffres après la virgule) donc la valeur affectée est exacte.

* La machine ne donnera qu'une valeur approchée pour $P\left(\frac{1}{3}\right)$: quel calcul raisonnable attendre ?

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-6}{3^4} - \frac{11}{3^3} + \frac{213}{3^2} - 11 - 35 = \frac{-2 - 11 + 3 \times 213}{3^3} - 46 = \frac{626}{3^3} - 46 = \frac{-616}{27}$$

Inciter fortement les élèves à combiner de façon pertinente (et adaptée à ce qu'il y a à faire) la pratique du calcul mental et l'utilisation de la machine ; le seul calcul machine autorisé ici serait $626 - 3^3 \times 46 = -616$. Les élèves doivent naturellement être sûrs de leur réponse.

$\boxed{4}$ *Utilisation de la touche fraction, quand elle existe*

• $Y = \dfrac{1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{12}} = (1 + 1 \lrcorner 6 - 1 \lrcorner 4) \lrcorner (1 - 1 \lrcorner 3 + 1 \lrcorner 12)$ ↳ $1 \lrcorner 2 \lrcorner 9$ c a d : $1 + \frac{2}{9}$

$1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$ et $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

• $1 \lrcorner 2x$ *est pris comme* $\frac{1}{2} \times x$ *et non* $\frac{1}{2x}$

$1 \lrcorner (2x) = \frac{1}{2x}$

Chapitre 2 . LE TRINOME DU SECOND DEGRE

0 . Nos intentions

* Nous présentons ici, de façon détaillée, notre utilisation de la calculatrice relativement à une rubrique précise du cours de 1èreS : *le second degré*

* Nous nous efforçons d'employer l'instrument calculatrice pour atteindre les objectifs suivants :

-) *côté mathématiques*

• *Résolution d'équations du second degré* (cadre algébrique) en y associant de façon systématique des représentations graphiques (cadre graphique) et des images mentales.

• *Résolution d'inéquations du second degré* et étude du signe du trinôme (cadre algébrique) par visualisation du problème (cadre graphique). Il s'agit de donner du sens à une notion souvent retenue de façon abstraite et confuse par les élèves. La récitation automatique du théorème classique sur le «signe du trinôme» cache souvent une forte incompréhension (confusion entre équation, fonction, signe; entre variable, coefficients du trinôme...).

• Renforcement de la notion *de sens de variation sur un intervalle*, en préalable à l'emploi de la dérivée et de son signe. Ceci, en associant le plus possible les différents «points de vue» : fonction croissante (cadre de l'analyse), courbe montante (cadre graphique), ordre conservé (cadre algébrique)...

-) *côté élèves*

• Développer *l'initiative et l'autonomie* pour envisager des procédures d'essais, de conjectures, de vérification.

-) *échanges élèves–enseignant*

• Favoriser l'explication des conceptions mises en œuvre dans les travaux mathématiques que l'enseignant a proposés et que les élèves ont effectués sous leur responsabilité.

• Favoriser la disponibilité de connaissances et de compétences avec les différentes significations rencontrées, dans le but d'en rendre possible le réinvestissement dans des contextes nouveaux par rapport à ceux ayant permis les premières acquisitions.

-) *côté enseignant*

• Institutionnaliser les notions et méthodes nouvellement mises en œuvre et explicitées en fournissant aux élèves les formulations et pratiques usuelles et en leur demandant de les retenir.

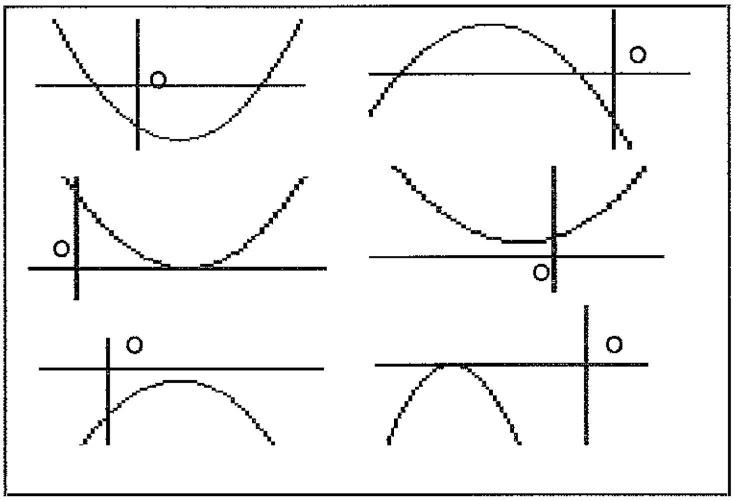
• Rapprocher ces énoncés des conceptions et procédures repérées.

• Provoquer l'usage des notions et méthodes institutionnalisées aussi bien comme objets mobilisables dans des exercices d'application explicitement posés que dans des problèmes où le choix de l'outil - notion ou méthode - est à la charge des élèves, et non explicitement suggéré dans l'énoncé.

I . Idées directrices

1°) Objectifs

• Savoir résoudre une équation ou une inéquation du 2nd degré, en associant *mentalement* à un trinôme f(x) *l'image de la parabole* d'équation $y = f(x)$. Plus précisément, il s'agit d'associer au trinôme une parabole de l'un des six types suivants :



• Manipuler la calculatrice le plus tôt possible pour qu'elle soit une aide réelle pour l'élève, apprendre à l'utiliser pour contrôler les résultats et connaître ses limites.

2°) Matériel

On utilise une calculatrice programmable. Les élèves ont, pour la plupart, des calculatrices graphiques. Le lycée possède une calculatrice rétroprojetable.

3°) Révisions

On connaît la parabole d'équation $y = x^2$ (classe de seconde).

• Les élèves construisent la courbe *P* d'équation $y = x^2$ sur papier millimétré.

• Ils la font apparaître sur l'écran de leur calculatrice ; en utilisant la fonction TRACE, ils répondent à des questions du type :

- donner un encadrement de x^2 si $1 < x < 3$
- donner un encadrement de x^2 si $-1 < x < 2$
- que dire de x^2 si $x < -4$? etc ...

- résoudre : $x^2 = 4$; $x^2 = -1$; $x^2 > 9$; $2 < x^2 < 4$; $x^2 < 16$ etc .

Cours :

> *La courbe d'équation* $y = x^2$ *est une parabole , qui admet* y'y *comme axe de symétrie, qui a pour sommet le point* O, *et qui est tangente à* x'x.

II . Déroulement du cours sur le trinôme

◊ Equation du 2nd degré

1- Définition d'un trinôme du 2nd degré et de la fonction trinôme

- Les élèves apprennent à programmer une fonction et à calculer des valeurs.
exemple : $f(x) = x^2 - 3x + 5$, calculer $f(-2)$; $f(10^{-1})$; $f(\sqrt{2})$; $f(0,3)$ etc...

- Une heure *en module* est consacrée à noter au tableau les différents programmes suivant les marques des calculatrices.
- Une autre heure, toujours en module, est consacrée au calcul numérique avec calculatrice : notation scientifique, utilisation de la touche $\boxed{y^x}$.
- A propos de $f(\sqrt{2})$, il faut insister sur le fait que la calculatrice ne travaille qu'avec des nombres décimaux . Il est important d'éveiller le sens critique des élèves face à la calculatrice .
Si $f(x) = x^2 - 3x + 5$, la calculatrice affiche :
$f(10^{30}) = 10^{60}$; $f(10^{-10}) = 5$; $f(1+2.10^{-5}) = 2,999980$.
A-t-elle affiché des valeurs exactes ?

2 - Résolution des équations : $ax^2 + c = 0$ ou $ax^2 + bx = 0$

On entraînera les élèves à résoudre mentalement des équations de ce type.

3 - Forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$

Résolution de l'équation du second degré, éventuellement les formules réduites, les racines évidentes.

◊ Représentation graphique de la fonction trinôme : théorème du signe du trinôme

<u>1- La fonction ($x \rightarrow ax^2$) où ($a \neq 0$)</u>

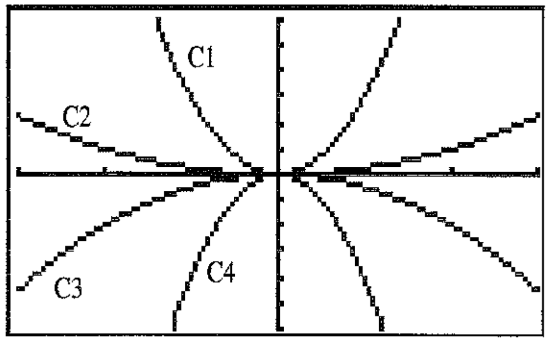
• On visualise la courbe sur la calculatrice graphique, puis on demande une belle construction point par point des courbes d'équations :

$y = 3x^2$ ☞ C_1

$y = 0{,}25x^2$ ☞ C_2

$y = -0{,}5x^2$ ☞ C_3

$y = -4x^2$ ☞ C_4



Range : $-3 \leq x \leq 3$; $-6 \leq y \leq 6$
(Casio)

(On a choisi 4 valeurs «simples» de a, $a > 0$ et $a < 0$ d'une part, $|a| > 1$, $|a| < 1$ d'autre part).
On remarque que toutes ces courbes ont le même axe de symétrie (l'axe des ordonnées) et le même sommet que la parabole d'équation $y = x^2$. En faisant un changement d'unité sur l'axe des ordonnées ($\vec{j}' = 3\vec{j}$ pour C_1, $\vec{j}' = 0{,}25\vec{j}$ pour C_2, $\vec{j}' = -0{,}5\vec{j}$ pour C_3, $\vec{j}' = -4\vec{j}$ pour C_4), on montre que dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}'\right)$ ces courbes ont pour équation $y = x^2$.

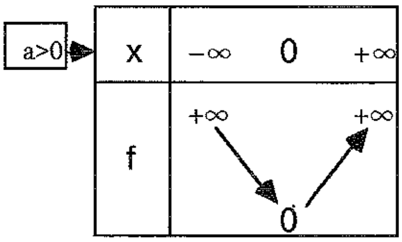
Cours :

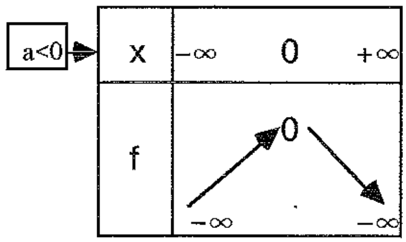
> *La courbe d'équation* $y = ax^2$ ($a \neq 0$) *est une parabole, qui tourne sa concavité vers les ordonnées positives si* $a > 0$,
> *vers les ordonnées négatives si* $a < 0$.
> *Elle a pour sommet* O, *et elle est tangente à* x'x.

• On aboutit aux deux tableaux de variation suivants, après avoir rappelé les définitions de fonction croissante, décroissante :
“ les f(x) sont rangés dans le même ordre que les x ”.
Graphiquement, en utilisant TRACE, on fait constater que lorsque x augmente, y augmente etc.

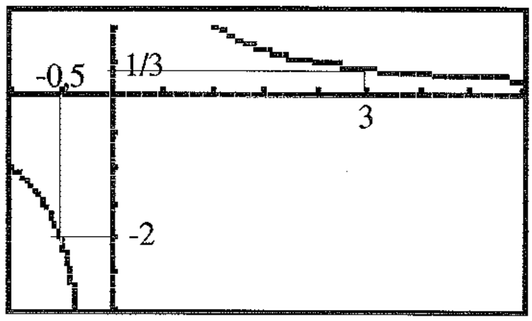
Finalement, on aboutit à la définition :

> f *strictement croissante sur un intervalle* I *signifie :*
> *si* x_1 *et* x_2 *sont deux éléments de* I
> *et si* $x_1 < x_2$, *alors* $f(x_1) < f(x_2)$.





Insister sur « *croissance sur un intervalle* » :
exemple: soit f : $x \to \frac{1}{x}$
si $x_1 = -\frac{1}{2}$ alors $f(x_1) = -2$,et
si $x_2 = 3$ alors $f(x_2) = \frac{1}{3}$
et pourtant f est décroissante sur R^{+*}
et sur R^{-*} .

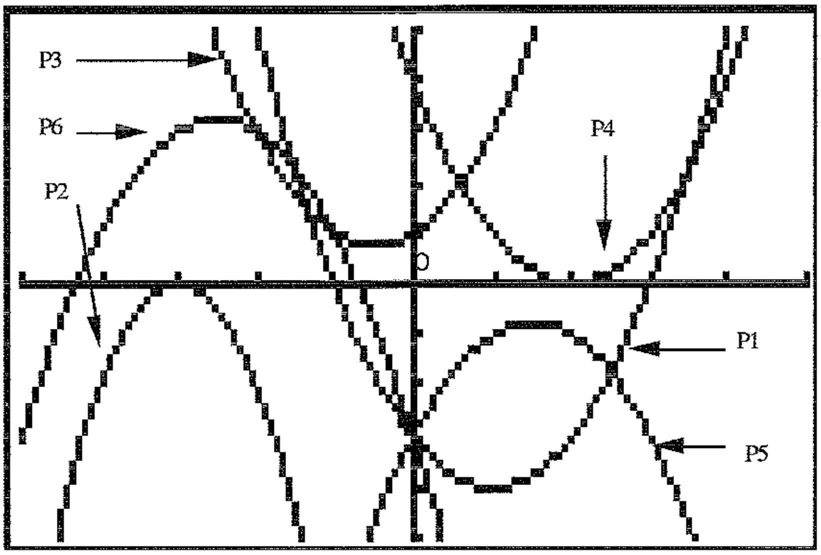


• Fonction paire : La courbe est symétrique par rapport à y'y.

2 - La fonction ($x \to ax^2 + bx + c$), $a \neq 0$

• Activités préparatoires

En prenant pour RANGE : $-5 \leq x \leq 5$ et $-5 \leq y \leq 5$, faire représenter f_i pour $i = 1, 2, ..., 6$



f_1 :	$x \to x^2 - 2x - 3$	P_1
f_2 :	$x \to -2(x + 3)^2$	P_2
f_3 :	$x \to x^2 + x + 1$	P_3
f_4 :	$x \to (x - 2)^2$	P_4
f_5 :	$x \to -x^2 + 3x - 3$	P_5
f_6 :	$x \to -x^2 - 5x - 3$	P_6

Travail à la maison

Par lecture graphique, les élèves doivent préciser si la courbe est située au dessus ou en dessous de x'x, si elle coupe x'x, si elle est tangente à x'x. Toujours en utilisant le graphique, on leur demande de résoudre les équations $f_i(x) = 0$ où $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$.
Lorsqu'ils utilisent la touche TRACE ils trouvent des valeurs approchées, les faire réagir.

Travail en classe

Expliquer la phrase " signe du trinôme ".
Là encore, on utilise TRACE : pour un x donné, f(x) est un nombre positif, négatif, ou nul. On détermine le signe de chaque trinôme $f_i(x)$. On fait remarquer que malgré tous les signes - , $f_6(x)$ peut être positif.
Puis, on fait résoudre des inéquations en regardant la courbe sur la calculatrice, mais en ayant les solutions de l'équation associée lorsque c'est nécessaire.

• Cours :

Par changement de repère, on montre que la représentation graphique de f ($x \to ax^2 + bx + c$) *est une parabole de sommet* $\Omega\left(-\frac{b}{2a}\,;\, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ *qui tourne sa concavité vers les ordonnées positives si* $a > 0$, *vers les ordonnées négatives si* $a < 0$ *et qui admet pour axe de symétrie la droite* D *d'équation* $x = -\frac{b}{2a}$.

Tableaux de variation

a>0

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	$f(-b/2a)$	↗ $+\infty$

a<0

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$f(-b/2a)$	↘ $-\infty$

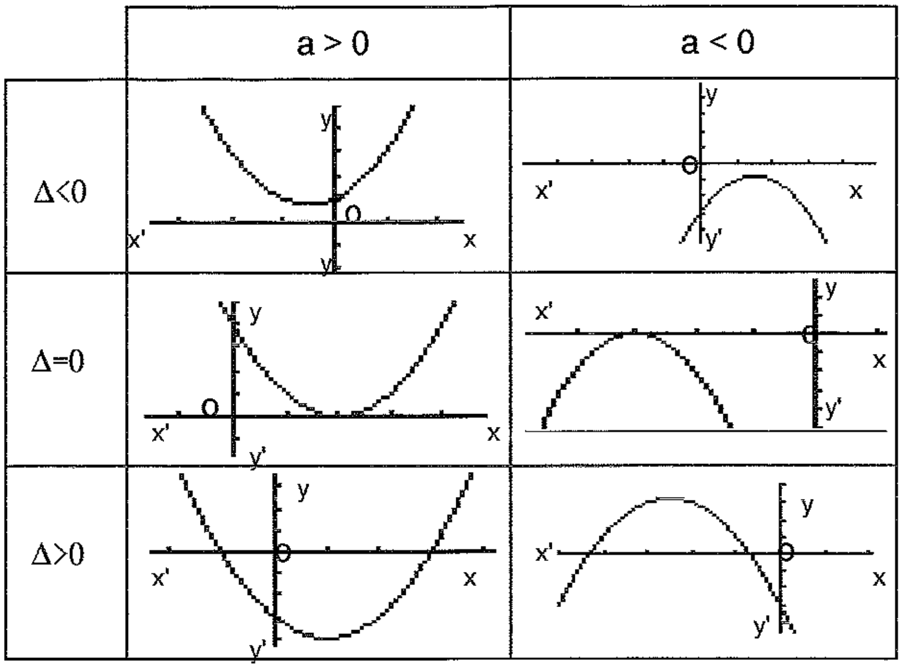
Si $a > 0$, *f admet un minimun en* $-\frac{b}{2a}$ *égal à* $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$;
f décroît sur $]-\infty, -\frac{b}{2a}]$ *de* $+\infty$ *à* $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$
et croît sur $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$ *de* $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ *à* $+\infty$.

Si $a < 0$, *f admet un maximun en* $-\frac{b}{2a}$ *égal à* $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$;
f croît sur $]-\infty, -\frac{b}{2a}]$ *de* $-\infty$ *à* $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$
et décroît sur $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$ *de* $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ *à* $-\infty$.

On dégage alors l'idée que, suivant le signe de $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$, la courbe coupera ou non l'axe des abscisses.

Réciproquement, si la courbe coupe l'axe des abscisses, f(x) prend des valeurs positives et des valeurs négatives ; et si elle ne coupe pas l'axe des abscisses, f(x) garde un signe constant (au niveau de la classe de première on admet implicitement la continuité de la fonction).

On dégage ainsi 6 types de parabole :



On en déduit le théorème du signe du trinôme

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, *où* $a \neq 0$

-) *Si* $\Delta < 0$ *alors* $f(x)$ *a, pour toute valeur réelle de* x, *le signe de* a.

-) *Si* $\Delta = 0$ *alors* $f(x)$ *a, pour toute valeur réelle de* x *distincte de* $-\frac{b}{2a}$,
le signe de a *et* $f(-\frac{b}{2a}) = 0$.

-) *Si* $\Delta > 0$ *et si on pose* $\alpha < \beta$ *tels que* $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, *alors,*

($f(x)$ *a le signe de* a) $\Leftrightarrow$ ($x < \alpha$ *ou* $x > \beta$)

($f(x)$ *a le signe de* - a) $\Leftrightarrow$ ($\alpha < x < \beta$)

◊ **Exercices :**

* Signe de trinômes.

* Résolution d'inéquations.

Au début, les élèves ont intérêt à revenir à l'image de la parabole, (quitte à être incités par l'enseignant) afin que cette image soit une référence mentale disponible, pour résoudre de nouvelles questions .

Chapitre 3. LIMITES. ASYMPTOTES.

Objectifs : La calculatrice va permettre d'évaluer f(x) du point de vue *qualitatif* ; l'objectif est d'obtenir que l'élève évalue *quantitativement* f(x) pour des valeurs de x voisines de x_0 (fini ou infini) et en déduise un résultat *qualitatif*.

Il s'agit d'arriver à des énoncés tels que : si $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ alors f(x) vaut à peu près 1 lorsque x prend de grandes valeurs, ou encore si $f(x) = \sqrt{(4x^2 + 50)}$ alors f(x) prend des valeurs voisines de $2|x|$ pour des valeurs de x grandes en valeur absolue.

I. Exemple d'introduction pédagogique à la notion de limite

Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; on suggère aux élèves une approche expérimentale en leur demandant successivement :

* de faire tracer d'abord C_f dans le repère standard, « pour voir » ; choisir ensuite de nouveaux « Ranges » permettant de conjecturer le comportement en $+\infty$ ou en $-\infty$

(par exemple $20 \leq x \leq 40$, $0,5 \leq y \leq 1,5$)

* confirmer cette conjecture par le calcul de valeurs numériques: TABLE pour T.I.82 ; programme TABLE sur CASIO 8800 ; programme VALY1 sur T.I.81.

Avec la calculatrice rétroprojetable, on montre ces manipulations avant de passer aux justifications mathématiques de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

II. Comportement d'une fonction au voisinage de x_0

L'utilisation de la représentation graphique, de zooms, des programmes LIMY1 (ou de tables de valeurs) permet en général de proposer une bonne conjecture du comportement de f au voisinage de x_0. Nous exposerons quelques exemples.

1) Organigramme (limite à gauche) :

On fait varier x dans un intervalle [a , b] en donnant un pas, puis on calcule f(x).

Donner x initial
Donner x final
Donner le pas
Afficher x
Mettre f_1 dans y
Afficher y
Remplacer x par x + p
Tant que $x \leq z$ recommencer

3) Les programmes LIMFCT

LIMf1 GAUCHE CASIO 8800

```
" XINI = " : ? → X
" XFIN = " : ? → Z
" PAS = " : ? → P
Lbl 1
"X = " : X
f1 → Y
" Y = " : Y
X + P → X
X ≤ Z ⇒ Goto 1
```

LIMf1 DROITE CASIO 8800

```
" XINI = " : ? → X
" XFIN = " : ? → Z
" PAS = " : ? → P
Lbl 1
" X = " : X
f1 → Y
" Y = " : Y
X – P → X
X ≥ Z ⇒ Goto 1
```

LIMY1 GCH T.I.81

```
Disp " XINI = "
Input X
Disp " XFIN = "
Input Z
Disp " PAS = "
Input P
Lbl 1
Disp " X = "
Disp X
Pause
Y1 → Y
Disp " Y = "
Disp Y
Pause
X + P → X
If X ≤ Z
Goto 1
```

LIMY1 DRT T.I.81

```
Disp " XINI = "
Input X
Disp " XFIN = "
Input Z
Disp " PAS = "
Input P
Lbl 1
Disp " X = "
Disp X
Pause
Y1 → Y
Disp " Y = "
Disp Y
Pause
X – P → X
If X ≥ Z
Goto 1
```

Remarque : les programmes peuvent être utilisés aussi bien pour l'étude d'une limite en x_0^+ , x_0^- , $+\infty$, $-\infty$ (dans ces derniers cas, LIMDRT pour $-\infty$, LIMGCH pour $+\infty$).

3) Exemples :

a) *Soit* $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; *étude du comportement de f au voisinage de* 2 (classe de 1ère).

Le graphe avec Range Init (ou Standard) fait apparaître l'asymptote d'équation x = 2 ; on demande aux élèves d'utiliser TRACE, puis ZOOM ou BOX pour conjecturer que f(x) peut, en valeur absolue, dépasser tout nombre réel, à condition que x soit suffisamment proche de 2.

On utilise ensuite les programmes LIMY1 DRT et LIMY1 GCH :

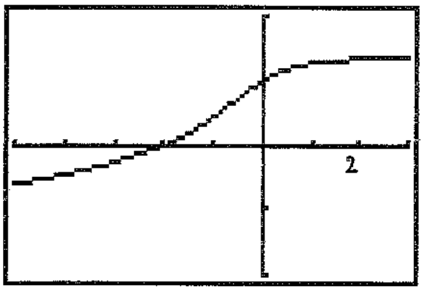
LIMY1 GCH : $2-10^{-5} \leq x \leq 2$ pas 10^{-6} ; le programme sera interrompu par Erreur (division par 0) mais reste convaincant.

LIMY1 DRT : $2 \leq x \leq 2+10^{-8}$ pas 10^{-9} etc...

On a ainsi donné une signification à $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ et à $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

b) *Soit* $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}$; *étude de f en* $x_0 = 2$

Le graphe ne fait pas apparaître de particularité au point d'abscisse 2, même avec Box. L'utilisation de LIMY1 DRT et LIMY1 GCH (ou d'une table de valeurs) permet de conjecturer que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \approx 1{,}333...$



$-5 \leq X \leq 3$ pas : 1

$-3 \leq Y \leq 2$ pas : 1

On pourra ensuite faire chercher une démonstration :

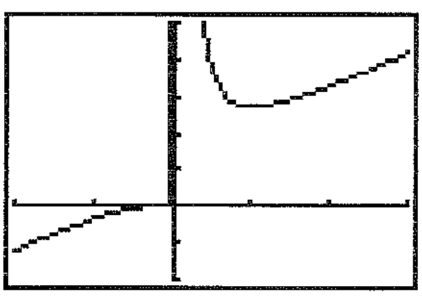
* par $f(x) = \dfrac{(2x^2+1)-9}{(x-2)(\sqrt{(2x^2+1}+3)} = \dfrac{2(x+2)}{\sqrt{2x^2+1}+3}$ $(x \neq 2)$ d'où $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{4}{3}$

* par la limite du taux de variation de $g : x \mapsto \sqrt{2x^2+1}$ en $x_0 = 2$ (en Terminale).

On pourra remarquer que la calculatrice graphique réalise pratiquement le prolongement par continuité de la fonction f, en traçant $h : \begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \neq 2 \\ h(2) = 4/3 \end{cases}$

c) $f(x) = xe^{1/x}$ *au voisinage de* 0

Le graphe suggère une dérivabilité à gauche et une asymptote verticale à droite pour la courbe. Les programmes LIMY1 GCH et LIMY1 DRT confirmeront ces conjectures. On termine par la démonstration habituelle.



$-2 \leq X \leq 3$ pas : 1

$-2 \leq Y \leq 5$ pas : 1

III. Comportement d'une fonction à l'infini

1) On utilise le programme $\boxed{\text{LIMFCT}}$

Exemples $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-2} \qquad g(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+1}+x}{x+1}$

On peut choisir $\quad 10^{11} \le x \le 10^{12}$ pas 10^{11}

On conjecture : f *a pour limite* 2 *en* $+\infty$, -2 *en* $-\infty$

g *a pour limite* 3 *en* $+\infty$, -1 *en* $-\infty$

Exemple en Terminale **a)** $h(x) = x(\ln(x+1) - \ln x)$

On peut choisir $\quad 10^7 \le x \le 10^9$ pas 10^8

On conjecture que : h *a pour limite* 1 *en* $+\infty$

b) $i(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \quad 9.10^7 \le x \le 10^8$ pas 10^6

On conjecture que : i *a pour limite* 2,718... *en* $+\infty$ (*la limite est* e)

IV. Asymptotes

En 1ère : **a)** $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-2}{(x+1)} \qquad 10^7 \le x \le 10^9$ pas : 10^8

Il semble que f (x) prenne des valeurs voisines de celles de 2x.

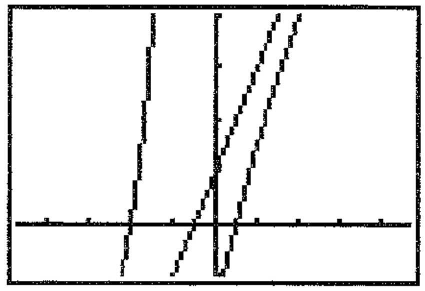
Quelle différence y a-t-il entre f (x) et 2x pour des grandes valeurs de x?

On conjecture que f (x) – 2x prend des valeurs voisines de 1 (avec $\boxed{\text{LIMFCT}}$)

On fait alors tracer $\quad Y_1 = f(x)$

$Y_2 = 2x + 1$

(par exemple, Range Standard).



b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2(x-3)}$ (même question)

En Tle : **a)** $f(x) = 2x + \ln\dfrac{2x+1}{x-1}$ $10^7 \le x \le 10^9$ pas : 10^8

On conjecture que f (x) prend des valeurs voisines de celles de 2x et que f (x) – 2x prend des valeurs voisines de 0,693 (il s'agit en fait de ln2).

b) $g(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 1}$

Recherche des limites en + ∞ et en -∞, recherche d'asymptotes.

Pour + ∞ : $9.10^9 \le x \le 10^{10}$ pas : 10^8 pour – ∞ : $-10^{10} \le x \le -9.10^9$ pas : 10^8

Il semble que, au voisinage de + ∞ , g (x) prenne des valeurs voisines de celles de x,

au voisinage de – ∞, g (x) prenne des valeurs voisines de celles de 3x,

au voisinage de + ∞ , (g (x) – x) prenne des valeurs voisines de - 1,5

au voisinage de – ∞ , (g (x) – 3x) prenne des valeurs voisines de 0,5.

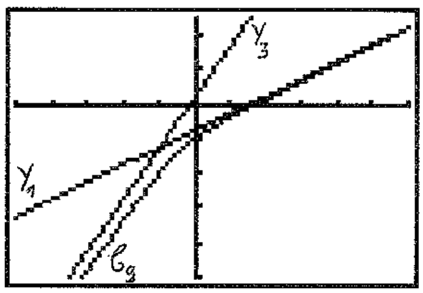
On peut conjecturer les équations des asymptotes : y = x – 1,5 et y = 3x + 0,5.

On fait alors tracer $Y_1 = g(x)$

$Y_2 = x - 1{,}5$

$Y_3 = 3x + 0{,}5$

$(-5 \le x \le 6\ ; -10 \le y \le 5)$



c) $j(x) = \ln(e^x + 1)$ $10^2 \le x \le 2.10^2$ pas : 10 (pour + ∞)

$-2.10^2 \le x \le 2.10^2$ pas : 10 (pour - ∞)

d) *Etude en l'infini de* $f(x) = xe^{1/x}$

La représentation graphique avec un Range Standard permet de conjecturer une asymptote oblique en l'infini ; la fonction TRACE fournit une conjecture plausible (f(x) semble voisin x + 1 pour x très grand en valeur absolue).

Le programme LIMY1 GCH confirme :

XINIT : 10^5 XFINAL : 10^6 PAS : 10^5 donne le tableau de valeurs :

x	10^5	2.10^5	3.10^5	$\cdots$
y	100001	200001	300001	$\cdots$

Il reste à calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{1/x}-x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{e^{1/x}-1}{1/x}-1)=0$; de même $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x-1)=0$

(résultat que l'on pouvait prévoir avec LIMY1 DRT : XINIT : -10^6 ; XFINAL : -10^5 ; PAS :10^5)

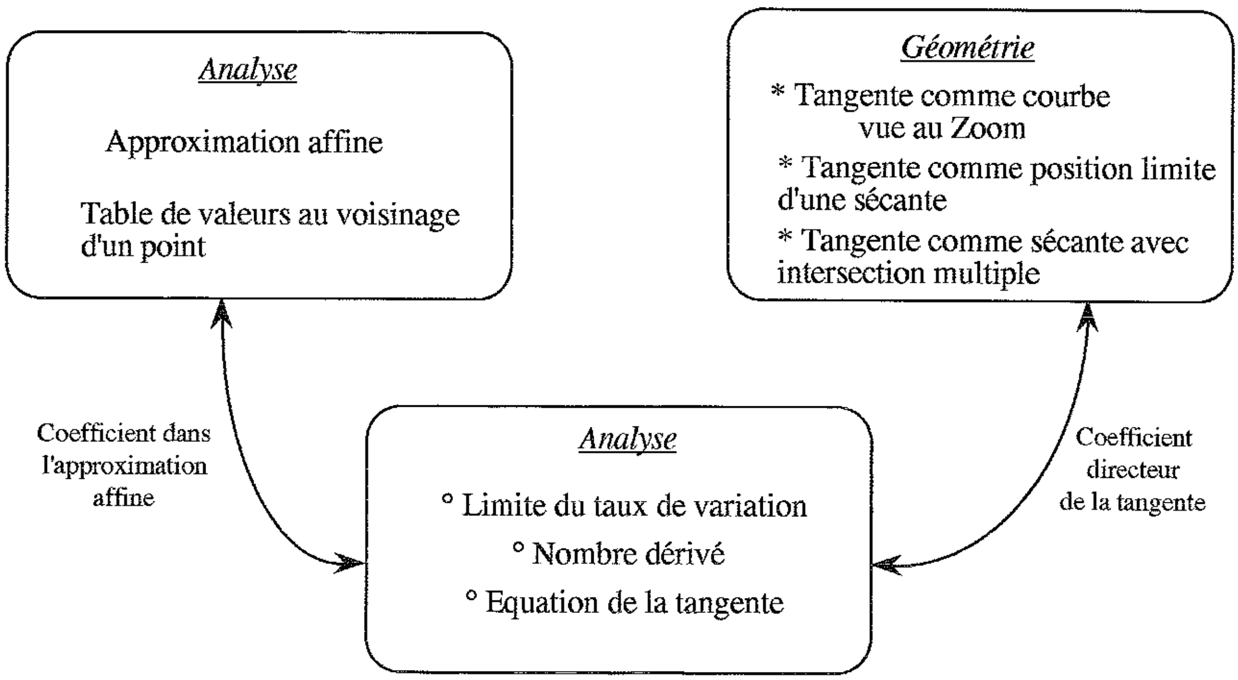
Chapitre 4 . DÉRIVATION EN 1ère S

0 . Objectifs

Comme dans le chapitre 2 nous présentons de façon détaillée l'utilisation de la calculatrice pour l'enseignement d'une notion nouvelle : *Dérivation en 1ère S.*

Notons qu'il s'agit là de la première formalisation d'une notion d'analyse. A ce titre, elle demande à être introduite avec précaution, de façon graduée. Il faudrait que les élèves soient familiarisés avec les différents aspects de cette notion et que cet important chapitre ne se réduise pas, pour eux, à des calculs formels de dérivation, permettant seulement d'étudier le sens de variation de la fonction et de construire quelques tangentes.

Nous insistons encore sur la liaison entre les différents aspects de la notion de dérivation. La calculatrice graphique (avec ses fonctions Zoom, Trace, Box...) et l'usage de Table de valeurs permettent les associations suivantes :



On peut, à titre de contre-exemples (indispensables pour une bonne compréhension) étudier des cas de fonctions non dérivables en un point (fin de chapitre).

Programme 93 :

La dérivation constitue l'objectif essentiel du programme d'analyse de Première ; cet objectif est double :

- Acquérir une bonne idée des différents aspects de la dérivation en un point.

- Exploiter les énoncés du programme concernant les fonctions dérivées pour l'étude des fonctions.

Approximation par une fonction affine, au voisinage de 0, des fonctions qui à h associent $(1+h)^2$, $(1+h)^3$, $\dfrac{1}{1+h}$, $\sqrt{1+h}$; aspects géométriques. Lorsque, au voisinage de h = 0, f(a+h) peut s'écrire sous la forme $f(a+h) = f(a) + A_a h + h\varphi(h)$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$, on dit que la fonction f est dérivable en a et admet A_a pour nombre dérivé en a.

Aspect géométrique : tangente.

Aspect mécanique : vitesse.

Limite en 0 du taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Equation cartésienne de la tangente au point d'abscisse a.

Emploi des calculatrices

L'emploi des calculatrices a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi de contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique...

Les élèves doivent savoir utiliser une calculatrice programmable dans les situations liées au programme...

I . Activités préparatoires

1 . Conditions matérielles des activités

Les élèves préparent ces activités à la maison ; ils ont tous des calculatrices programmables (la plupart des calculatrices graphiques). Pour l'activité 2 par exemple, on demande aux élèves de faire plusieurs dessins correspondant à 3 étapes. En classe, le professeur utilise une calculatrice rétroprojetable, lui permettant de visualiser les courbes, et de faire un " Zoom " autour d'un point M_0.

Il s'agit d'activités dont le but est de faire dégager
* *la notion de tangente en un point* M_0 *d'une courbe*
* *la notion d'approximation affine d'une fonction au voisinage de* x_0

2 . Activité 1

Soit H *la courbe représentative de* f *définie par* $f(x) = \frac{2}{x}$ *et* $A(2,1)$.

a) Tracer H *en prenant* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm.

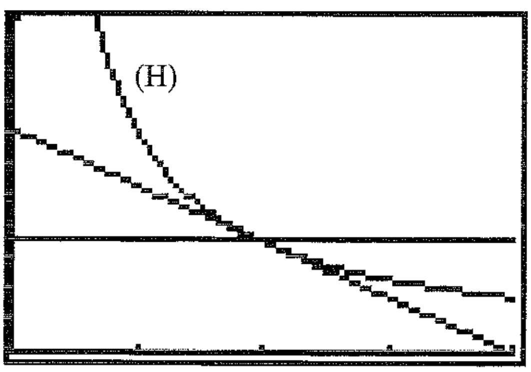
b) On considère la droite D_m *passant par* A *et de coefficient directeur* m. *Etudier, suivant les valeurs de* m, *le nombre de points d'intersection de* H *et de* D_m. *Pour deux valeurs de* m, D_m *"coupe"* H *en un point. Tracer les deux droites correspondantes sur le même dessin qu'au a). Quelle conclusion peut-on en tirer ?*

c) Soit M_h *le point de* H *d'abscisse* $2 + h$ ($h \neq 0$ *et* $h \neq -2$).

Trouver l'équation réduite $y = a(h)\,x + b(h)$ *de* (AM_h) *puis déterminer* $\lim_{h \to 0} AM_h$, $\lim_{h \to 0} a(h)$ *et* $\lim_{h \to 0} b(h)$.

En déduire que (AM_h) *a une position limite lorsque* h *tend vers zéro et que cette position limite est l'une des droites* D_m *étudiées au* b).

a) Construction de H, de D_0, et de $D_{-1/2}$ à la calculatrice.



b) D_m a pour équation $y - 1 = m(x - 2)$.

L'équation aux abscisses des points d'intersection de H et D_m est :

$$(E_m) \ : \ m(x-2)+1=\frac{2}{x}$$

$$(E_m) \Leftrightarrow m(x-2)+\frac{x-2}{x}=0 \text{ d'où } (E_m) \Leftrightarrow \left(m+\frac{1}{x}\right)(x-2)=0$$

* si $m=0$ (E_m) a une seule solution $x = 2$, par suite D_m coupe H en un seul point, le point A.

* si $m \neq 0$ il faut envisager 2 cas :

si $m \neq -\frac{1}{2}$, (E_m) a deux solutions distinctes (non nulles) et D_m coupe H en A et en un point distinct de A

si $m = -\frac{1}{2}$, $(E_{-1/2})$ a une solution double $x = 2$ et $D_{-1/2} \cap$ H est réduite au point A.

c) Soit $M_h\left(2+h, \frac{2}{2+h}\right)$, on obtient donc :

$$a(h)=\frac{1-\frac{2}{2+h}}{-h}=\frac{h}{-h(2+h)}=\frac{-1}{2+h} \quad \text{et} \quad b(h)=1+\frac{2}{2+h}=\frac{4+h}{2+h}.$$

(AM_h) a pour équation : $y=\frac{-1}{2+h}x+\frac{4+h}{2+h}$

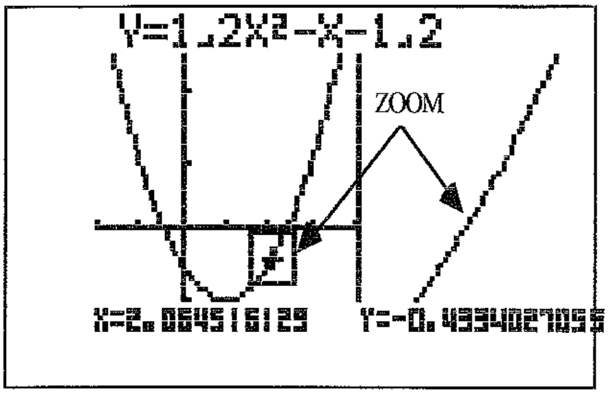
Lorsque h tend vers zéro, le point $M_h\left(2+h, \frac{2}{2+h}\right)$ a pour position limite le point A, et $\lim_{h \to 0} AM_h = 0$; de plus $\lim_{h \to 0} a(h) = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{h \to 0} b(h) = 2$.

On en déduit que la droite (AM_h) a une position limite quand h tend vers 0 : c'est la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 2$, c'est à dire la droite $D_{-1/2}$ du b).

3 . Activité 2

Soit $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$ *et* Γ *sa courbe représentative,* $M_0\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ *un point de* Γ.

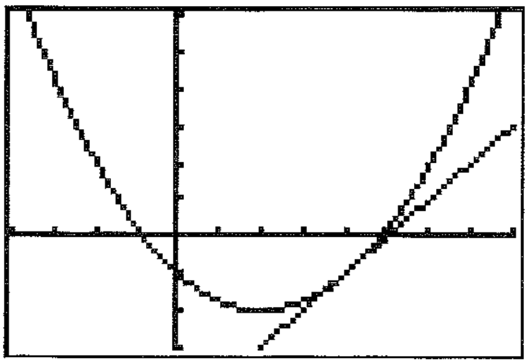
a) *Passage d'une étude « globale » à une étude « locale »*



La calculatrice représente cote à cote la courbe globale et une portion de cette courbe autour d'un point quand on fait appel à l'option ZOOM suivie de BOX (DUAL GRAPH : ON.CASIO 9900)

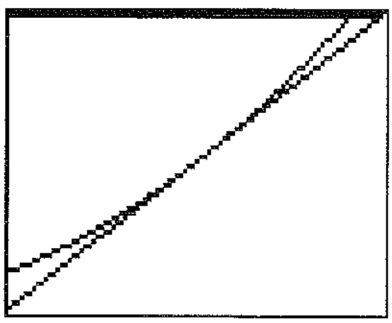
b) *Dessin de* Γ *et de* D *avec* $-2 \leq x \leq 4$; $-1{,}5 \leq y \leq 3$ *(unités : 2 cm)*

D *a pour équation* : $y = x - 2{,}5$



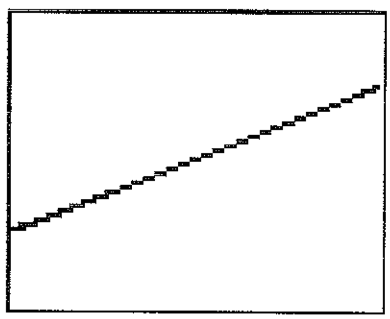
c) *Dessin de* Γ *et de* D

avec $1{,}5 \leq x \leq 2{,}5$; $-1 \leq y \leq 0$
(unités : 10 cm)



avec $1{,}95 \leq x \leq 2{,}05$; $-0{,}6 \leq y \leq -0{,}4$

(unités : 100 cm)



Il semble que la courbe coïncide avec la droite D ...

Donnons à x des valeurs voisines de 2 en posant $x = 2 + h$ où h prend des valeurs voisines de zéro.

Tableau de valeurs servant au dessin :

x	1,95	1,97	1,99	2	2,01	2,03	2,05
h	-5.10^{-2}	-3.10^{-2}	-10^{-2}	0	10^{-2}	3.10^{-2}	5.10^{-2}
f(x)	−0,55	−0,53	−0,51	−0,5	−0,49	−0,47	−0,45

$$f(x) = f(2+h) = \frac{1}{2}(2+h)^2 - (2+h) - \frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2}h^2$$

$$f(x) = x - 2{,}5 + \frac{1}{2}(x-2)^2$$

* Soit D la droite d'équation $y = x - 2{,}5$ et les points M (x , f(x)) et H (x , x - 2,5)

$y_M - y_H = \frac{1}{2}(x-2)^2$ donc si $|h| \leq 10^{-2}$ alors $|y_M - y_H| \leq \frac{1}{2}10^{-4}$

* *Etudions* $D \cap \Gamma$

$$M(x,y) \in D \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \\ y = x - 2{,}5 \end{cases}$$

Equation aux abscisses : $(x-2)^2 = 0$ donc $x = 2$ est une solution double.

* *Soit* D_m *la droite passant par* M_0 *et de coefficient directeur* m ; *déterminons suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de* D_m *et de* Γ :

$$M(x,y) \in D_m \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \\ y = m(x-2) - 0{,}5 \end{cases}$$

Equation aux abscisses : $m(x-2) = x - 2 + \frac{1}{2}(x-2)^2$

soit $(x - 2)(0{,}5x - m) = 0$

L'équation admet une solution double ssi $x = 2 = 2m$ soit ssi $m = 1$ et $D_1 = D$

4 . Activité 3

Soit $g(x) = \frac{1}{1+x}$, C *sa courbe représentative et* $M_0\left(2, \frac{1}{3}\right)$.

D_m *est la droite passant par* M_0 *et de coefficient directeur* m. *Déterminer la valeur de* m *pour laquelle l'équation aux abscisses de* $C \cap D_m$ *admet une solution multiple*

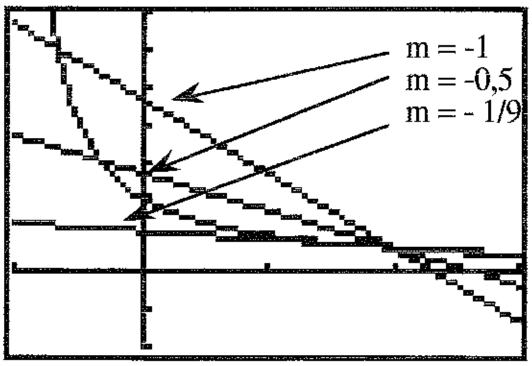
$D_m \ : \ y - \frac{1}{3} = m(x-2)$

Equation aux abscisses : $\frac{1}{3} + m(x-2) = \frac{1}{1+x}$

$(E_m) \ : \ (3m(1+x)+1)(x-2) = 0$

- si $m = 0$ alors (E_0) a une seule solution $x = 2$
- si $m \neq 0$ alors (E_m) a une solution double ssi $x = 2 = \frac{-3m-1}{3m}$

ce qui est réalisé si $m = -\frac{1}{9}$



Dessin de C, $D_{-0,5}$, D_{-1} , $D_{-1/9}$ $\left(y = -\frac{1}{9}(x-2) + \frac{1}{3} \right)$

Evaluons $g(x) - \left(-\frac{1}{9}(x-2) + \frac{1}{3} \right)$:

$$g(x) - \left(-\frac{1}{9}(x-2) + \frac{1}{3} \right) = \frac{-(x-2)}{3(1+x)} + \frac{(x-2)}{9} = (x-2)\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3(1+x)} \right)$$

On remarque que, si $x \to 2$, $\frac{1}{9} - \frac{1}{3(1+x)} = \frac{x-2}{9(1+x)}$ tend vers zéro

donc en posant $\varphi(h) = \frac{1}{9} - \frac{1}{3(1+x)} = \frac{h}{9(3+h)}$ $(x = 2 + h)$, on a :

$g(2+h) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}h + h\varphi(h)$ où $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

5 . Conclusion

On considère une courbe C et un point M_0 de C. On dira que la droite Δ est tangente à la courbe au point M_0 d'abscisse x_0 si l'une des propriétés suivantes est réalisée :

(1) Δ est la position limite d'une sécante (M_0M) lorsque M tend vers M_0 $(M \in C)$

(2) L'équation aux abscisses des points d'intersection de C et de Δ admet x_0 pour solution multiple.

(3) Si C est la courbe représentative de f et si Δ a pour équation $y = ax + b$, on peut écrire :

$$f(x) = ax + b + (x - x_0)\varphi(x - x_0)$$
$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b + h\varphi(h) \quad (x = x_0 + h)$$
$$f(x) = f(x_0) + ah + h\,\varphi(h)$$

où φ est une fonction définie pour h "petit" et vérifiant $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

Il n'y a pas lieu pour le moment de "soulever" le problème de l'équivalence ou non de ces 3 propriétés : la (1) étant la définition la plus générale d'une tangente, la (2) n' étant vraie que pour les fonctions "algébriques" et la (3) pour les fonctions dérivables en x_0.

II . Dérivabilité d'une fonction en un point

1 . Définition 1

Soit une fonction définie en x_0 et dans un voisinage de x_0. On dira que f est dérivable en x_0 si on a trouvé un nombre A_{x_0} (dépendant de f et du choix de x_0) et une fonction φ définie au voisinage de 0 tels que, pour h "petit", on puisse écrire :

$$f(x) = f(x_0) + A_{x_0}\, h + h\, \varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

- le nombre A_{x_0} est appelé nombre dérivé de f en x_0, noté aussi $f'(x_0)$
- $f(x_0) + A_{x_0}\, h$ est appelée approximation affine de f au voisinage de x_0

Exemples :

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$

$f(2+h)=-\frac{1}{2}+h+\frac{1}{2}h^2.$

Posons $\varphi(h)=\frac{1}{2}h$; puisque $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$, on a $f'(2)=1$.

b) $g(x)=\frac{1}{1+x}$

$g(2+h)=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}h+h\varphi(h)$ avec $\varphi(h)=\frac{1}{9}-\frac{1}{3(3+h)}$

$\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$ donc $g'(2)=-\frac{1}{9}$.

2 . Approximations affines des fonctions de référence

a) *Fonction carré* : $x\to x^2$

Pour tout x_0 réel et tout h, $(x_0+h)^2=x_0{}^2+2x_0h+h^2$ $\quad\varphi(h)=h$ et $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$

La fonction carré est dérivable pour tout nombre réel x_0 et le nombre dérivé en x_0 est égal à $2x_0$.

b) *Fonction cube* : $x\to x^3$

Nombre dérivé en x_0 : $3x_0{}^2$.

c) *Fonction inverse* : $x\to\frac{1}{x}$

On doit supposer $x_0\neq 0$ et h tel que $x_0+h\neq 0$:

$$\frac{1}{x_0+h}=\frac{1}{x_0}+\left(\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}\right)=\frac{1}{x_0}-\frac{h}{x_0(x_0+h)}$$

Lorsque h est petit, $-\frac{h}{x_0(x_0+h)}$ se "comporte" comme $-\frac{h}{x_0{}^2}$; précisons :

$$\frac{1}{x_0+h}=\frac{1}{x_0}-\frac{h}{x_0{}^2}+\left(\frac{h}{x_0{}^2}-\frac{h}{x_0(x_0+h)}\right)$$

$$=\frac{1}{x_0}-\frac{h}{x_0{}^2}+h\varphi(h)\ \text{ en posant }\ \varphi(h)=\frac{1}{x_0{}^2}-\frac{1}{x_0(x_0+h)}\ ,\ \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0.$$

Nombre dérivé en x_0 : $-\frac{1}{x_0{}^2}$

d) *Fonction racine carrée* : $x \to \sqrt{x}$

Soit x_0 un réel positif et h tel que $(x_0 + h)$ soit positif :

$$\sqrt{x_0+h} = \sqrt{x_0} + \left(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}\right) = \sqrt{x_0} + \frac{h}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$$

Lorsque h est petit $\frac{h}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$ se "comporte" comme $\frac{h}{2\sqrt{x_0}}$ (on doit supposer $x_0 \neq 0$)

$$\sqrt{x_0+h} = \sqrt{x_0} + \frac{h}{2\sqrt{x_0}} + \left(\frac{h}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} - \frac{h}{2\sqrt{x_0}}\right)$$

$$\sqrt{x_0+h} = \sqrt{x_0} + \frac{h}{2\sqrt{x_0}} + h\varphi(h) \text{ en posant } \varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} - \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

Nombre dérivé en x_0 : $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

e) *Fonction identité* : $x \to x$

$x_0 + h = x_0 + h + h \times 0 \qquad \varphi(h) = 0$

Nombre dérivé en x_0 : 1

Résumé:

fonction f	D_f	nombre dérivé en x_0	$D_{f'}$	approximation affine au voisinage de 1
$x \to x^2$	R	$2x_0$	R	$(1+h)^2 \approx 1+2h$
$x \to x^3$	R	$3{x_0}^2$	R	$(1+h)^3 \approx 1+3h$
$x \to \frac{1}{x}$	R^*	$-\frac{1}{{x_0}^2}$	R^*	$\frac{1}{1+h} \approx 1-h$
$x \to \sqrt{x}$	R_+	$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$	R_+^*	$\sqrt{1+h} \approx 1+\frac{1}{2}h$
$x \to x$	R	1	R	$1+h$

3 . Définition 2

f est dérivable en x_0 ssi $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a une limite finie quand h tend vers zéro

Remarque : Cette limite finie est $f'(x_0)$.

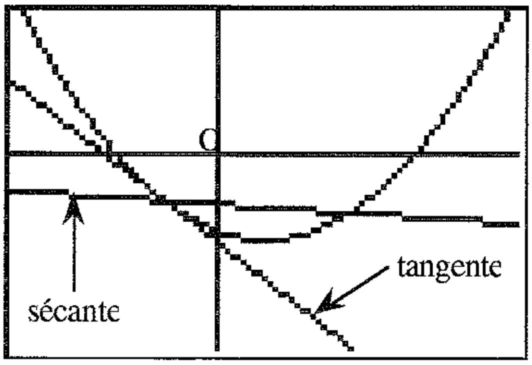
La fonction « Ndériv » des calculatrices calcule, pour h petit, le quotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ comme valeur du nombre dérivé. Pour certains points singuliers on peut obtenir un résultat faux (par exemple, le nombre dérivé de $x \mapsto |x|$ en 0, serait 0).

4 . Interprétations

a) *Géométrique*

Supposons f dérivable en x_0 et considérons une "sécante" (M_0M) où M_0 et M sont les points de C_f d'abscisses x_0 et x_0+h $(h \neq 0)$.

La droite (M_0M) a pour coefficient directeur $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$; quand h tend vers zéro, le point M se "rapproche" de M_0 et la "sécante" (M_0M) a une position limite , la droite passant par M_0 et dont le coefficient directeur est : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.



D'où le théorème :

Si f est dérivable en x_0, sa courbe représentative admet en M_0 $(x_0\ ,\ f(x_0))$ une tangente Δ dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$.

Δ a pour équation : $y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$

b) *Cinématique*

c) *A l'usage de la Physique*

On pose $h = \Delta x$ $\quad f(x+h) - f(x) = \Delta y$ $\quad$ et $\quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Notation mathématique : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$.

Notation utilisée en Physique : $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

5 . Fonction dérivée f'

Pour chacune des fonctions de référence déjà étudiées, on peut définir une nouvelle fonction associée à la fonction f : celle qui à tout x donne pour image le nombre f'(x), s'il existe.

On complète alors le tableau avec toutes les dérivées usuelles.

6 . Opérations sur les dérivées

Développement habituel du cours.

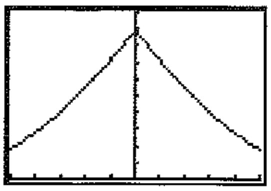
7 . Exemples de fonctions non dérivables

Pour chacune des trois fonctions suivantes suivantes, on considère A *le point de la courbe d'abscisse* 0 *et* M *celui d'abscisse* x (M ≠ A).

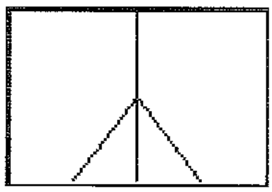
a) *Tracer la courbe au voisinage de* 0. *Programmer la fonction puis, avec différents "Zooms", conjecturer la position limite de la sécante* (AM) *quand* M *tend vers* A.

b) *Soit* m(x) *le coefficient directeur de* (AM). *Pour chacune des trois fonctions, étudier le comportement de* m(x) *quand* x *tend vers* 0 *et démontrer ainsi les conjectures du* a).

<u>Exemple 1</u> : $f(x)=\left(\frac{|x|}{3}-3\right)^2$



$-5 \leq x \leq 5$ et $0 \leq y \leq 10$

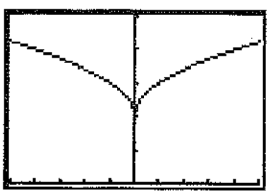


$-0,5 \leq x \leq 0,5$ et $8,5 \leq y \leq 9,5$

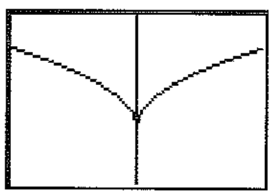
Si $x > 0$ $f(x)=\left(\frac{x}{3}-3\right)^2$ d'où $m(x)=\frac{x}{9}-2$ $\lim\limits_{x\to 0^+} m(x)=-2$

Si $x< 0$ $f(x)=\left(\frac{-x}{3}-3\right)^2$ d'où $m(x)=\frac{x}{9}+2$ $\lim\limits_{x\to 0^+} m(x)=2$

<u>Exemple 2</u> : $f(x)=\sqrt{|x|}+2$



$-5 \leq x \leq 5$ et $0 \leq y \leq 5$

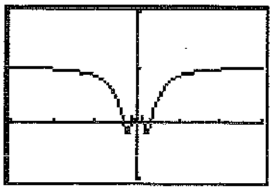


$-0,5 \leq x \leq 0,5$ et $1,5 \leq y \leq 3$

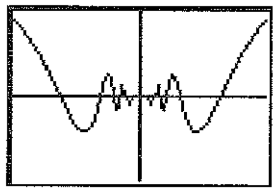
Si x > 0 $\quad m(x) = \dfrac{\sqrt{x}+2-2}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} m(x) = +\infty$

Si x < 0 $\quad m(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{x} = \dfrac{-1}{\sqrt{-x}}$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^-} m(x) = -\infty$

Exemple3 : $\begin{cases} h(x) = x \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$



$-3 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y \leq 2$



$-0,5 \leq x \leq 0,5$ et $-0,5 \leq y \leq 0,5$

Pour $x \neq 0 \quad m(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ $\quad$ m (x) n'a pas de limite quand x tend vers 0.

On fait apparaître dans cette activité la notion de :
demi- tangente à droite, à gauche : point anguleux pour C_f
tangente verticale pour C_g : g *n'est pas dérivable en* 0, *cependant sa courbe admet une tangente en* A.

Reprendre alors les fonctions $x \to \sqrt{x}$ *et* $x \to |x|$ *en* 0.

8 . La touche « fonction dérivée »

Les calculatrices récentes TI81, TI82, Casio 9900 calculent une valeur approchée du nombre dérivé :

- $\boxed{\text{TI81}}$ syntaxe : NDeriv(Y_1, a , calcule une valeur approchée du nombre dérivé de Y_1 en *a*.. $\boxed{\text{GRAPH}}$ Y_2 = NDeriv(Y_1, X , donne la représentation de la fonction dérivée.

- $\boxed{\text{TI82}}$ syntaxe : NDeriv(Y_1, X, *a* , calcule une valeur approchée du nombre dérivé de Y_1 en *a* . $\boxed{\text{GRAPH}}$ Y_2 = NDeriv(Y_1, X, X , donne la représentation de la fonction dérivée.

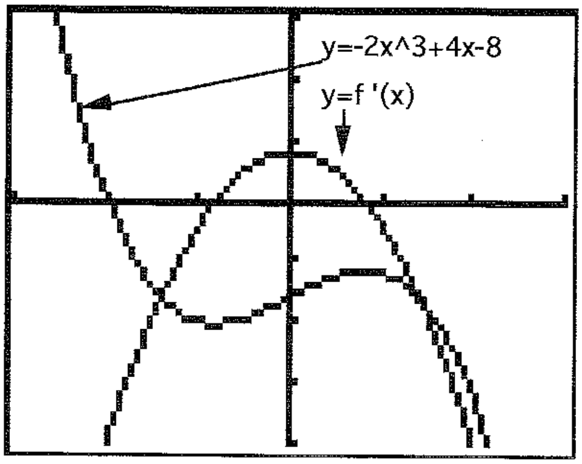
- $\boxed{\text{CASIO} - 9900}$ syntaxe : $\boxed{\text{d/dx}}$ (f_1, *a* , calcule une valeur approchée du nombre dérivé de f_1 en *a* . $\boxed{\text{GRAPH}}$ Y = $\boxed{\text{d/dx}}$ (f_1, X , donne la représentation de la fonction dérivée.

1°) L'élève peut contrôler un calcul de dérivée :

° soit, en montrant par un tableau de valeurs, que f' - NDeriv(Y_1, X, X (pour TI), f' - $\boxed{\text{d/dx}}$ (f, X (pour Casio) est la fonction nulle .

° soit, en faisant apparaître les courbes représentatives de ces 2 fonctions et en vérifiant qu'elles coïncident.

2°) Le professeur peut faire tracer la courbe représentative d'une fonction f et celle de sa fonction dérivée f' et montrer comment le signe de la dérivée permet d'obtenir le sens de variation de la fonction.



En utilisant la fonction TRACE de la calculatrice pour la courbe de f ' on fait apparaître les nombres dérivés, qui sont les coefficients directeurs des tangentes en tous points de la représentation graphique de ($x \mapsto -2x^3 + 4x - 8$).

III . Annexe - Fiche élève

• Approximation affine d'une fonction

Evaluation qualitative de $(1+h)^2$, $(1+h)^3$, $\sqrt{1+h}$, $\frac{1}{1+h}$ pour h voisin de 0

(*il s'agit de faire évaluer* $(1+h)^2$ .... *en fonction de* h).

$$\boxed{-10^{-6} \leq h \leq 10^{-6} \qquad \text{pas : } 2.10^{-7}}$$

On cherche à remarquer que $(1+h)^2 \approx 1+2h$ etc.

h	-10^{-6}	$-0{,}8.10^{-6}$	$-0{,}6.10^{-6}$	$-0{,}4.10^{-6}$	...
$(1+h)^2$					
$(1+h)^3$					
$\sqrt{1+h}$					
$\frac{1}{1+h}$					

• Recherche du nombre dérivé (CASIO)

Si f est une fonction dérivable en x, on peut écrire, pour h "petit"

$f(x+h) = f(x) + Ah + h\varphi(h)$ où A est le nombre dérivé de f en x ($A = f'(x)$) et φ a une limite nulle en 0.

Lorsque h est suffisamment petit (mais pas trop!), la calculatrice donne une valeur nulle pour $h\varphi(h)$ (phénomène d'arrondi).

Le calcul de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pour des valeurs successives de h (de plus en plus petites) permet, en général, de conjecturer la valeur de A.

```
" NB DERIV"
" X " ? → V
1 → H
V→ X : f1→ Y
Lbl 1
0,1H  → H
V + H → X
f1→ Z
( Z - Y ) / H → B
GOTO 1
```

Exemple : $f_1(x) = x^2$

NB DERIV
X ?
3

0,1	
6,1	1.E-06
0,01	6
6,01	1.E - 07
1.E - 03	6
6,001	1.E - 08
1.E - 04	6
6,0001	.
1.E - 05	1.E - 12
6,00001	0

Ce programme suppose que l'expression $f_1(x)$ ait été enregistrée dans la " Function Memory " $\boxed{f_1}$ (ou dans un autre programme pour les fx-6800 ou 7000G ou 8000G)

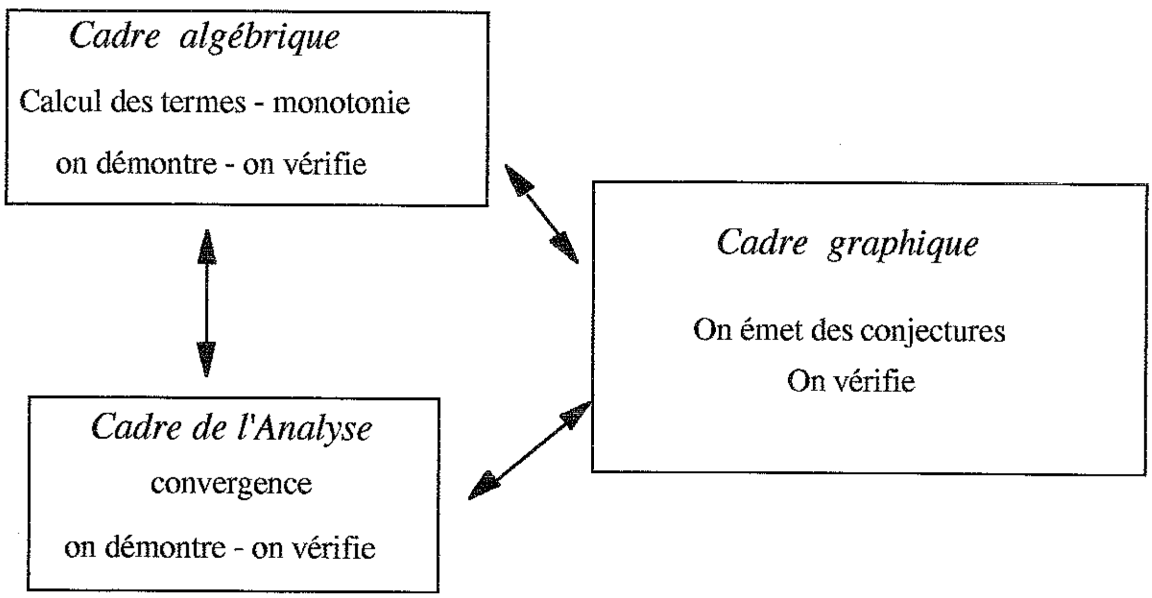
A l'observation de ces résultats, on conjecture que $\frac{f(x+H)-f(x)}{H} = B$ tend vers 6.

($B = A + \varphi(H)$). A partir de $H = 10^{-6}$, B prend la valeur 6 ; tout se passe comme si H tendait vers zéro.

Chapitre 5 . SUITES

0 . Objectifs.

La calculatrice permet de passer du « cadre algébrique » ou du « cadre de l'analyse » au « cadre graphique » pour émettre des conjectures, puis on revient au « cadre algébrique » ou au « cadre de l'analyse » pour faire les démonstrations. Le va et vient entre ces différents cadres se fait de façon permanente. La représentation graphique sert d'outil de conjectures, de contrôle et de vérification à l'étude des suites. Un point important est de tester la cohérence des résultats dans les différents cadres.



I . Suites dont le terme général est de la forme f(n)

(classe de 1ère S)

1) Introduction de la notion de suite (1èreS)

* Les calculatrices permettent d'étudier assez rapidement un grand nombre d'exemples introductifs, venant d'horizons variés, avec la possibilité de passer rapidement du cadre graphique au cadre numérique. Citons à titre d'exemples classiques :

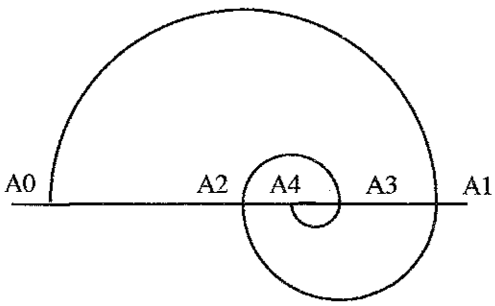
placement à intérêts simples : $A_n = A_0 + nt$ (n années, t intérêt annuel)

placement à intérêts composés : $A_n = A_0(1+t)^n$

population en diminution de t % par an : $P_n = P_0(1-t)^n$

exemples géométriques : longueur d'une spirale constituée de demi-cercles :

$$L_n = \frac{\pi}{2}A_0A_1\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$



* On fait chercher les formules et on obtient l'expression d'une suite $(u_n)_{n\in N}$, avec $u_n = f(n)$.

La suite des valeurs u_n est obtenue dans un tableau de valeurs de la fonction Y_1 pour X = 0, 1, ..., n...

Exemple : $\boxed{\text{TI 81}}$ Programme TABLY_1 (Voir chapitre 9) en MODE Func.

Avec $Y_1 = 10^4(1-0{,}03)^x$ $(P_n = P_0(1-t)^n)$

XINIT = 0 XFINAL = 10 PAS = 1

x	0	1	2	3	4	5
Y_1	10000	9700	9409	9126	8852	...

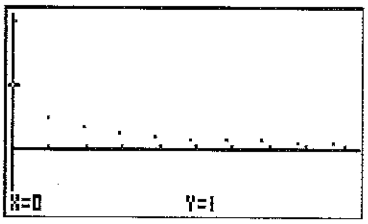
On peut déjà demander : « Au bout de combien d'années la population devient-elle inférieure à 8000 ? » On trouve 8 années.

* La représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in N}$ est formée de points.

$\boxed{\text{CASIO - 8800}}$ Le programme « REPRES SUIT f_1(N) » (représentation graphique d'une suite dont l'expression est en MEM f_1) permet d'obtenir, après choix d'un « range » convenable, la représentation des termes de la suite sous forme de points.

Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

```
"REPRES SUIT f1(N)"
0→X:Lbl 1
f1→Y
Plot (X,Y◢
X+1→X
Goto 1
```



Dans f_1 : $\dfrac{1}{x+1}$

Range : 0 ; 9,4 ; 1 ; -1 ; 2,1 ; 1

On fait apparaître les points successivement avec EXE, mais les valeurs affichées pour Y peuvent être approchées à cause du programme « dessin » et légèrement différentes de u_n.

$\boxed{\text{CASIO - 9900}}$ MENU $\boxed{\text{TABLE}}$ puis $\boxed{\text{RECR}}$ puis $\boxed{\text{NEW}}$

Ici $u_n = a_n$. Par exemple pour $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ TYPE F_1 ; $a_n = 1$ ⌟ ($\boxed{n}$ + 1)

$\boxed{\text{RANG}}$ (Start 0 ; End 20 ; RANGE : 0 , 20 , 1 , - .5 , 1 , 1) $\boxed{\text{TABL}}$ (la table donne ici à la fois l'écriture fractionnaire et une valeur approchée).

$\boxed{\text{G.PLT}}$ suivi de $\boxed{a_n}$ donne la représentation graphique point par point ; par $\boxed{\text{TRACE}}$ on fait afficher les a_n.

$\boxed{\text{TI 81}}$ Un programme n'est pas indispensable en utilisant les fonctions booléennes.

Exemple : Représenter la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

MODE Function Dot

RANGE : 0 ; 9,5 ; 1 ; -1 ; 2,1 ; 1

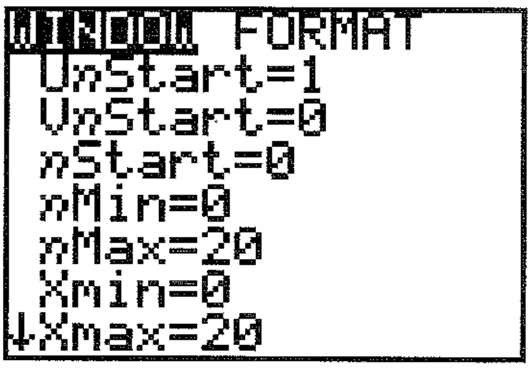
$Y_1 = (X = \text{Int}\,X) \times \dfrac{1}{X+1}$

TRACE.

Le curseur « saute » à chaque passage X entier.

$\boxed{\text{TI 82}}$ Ce modèle possède des instructions spécifiques pour les suites.

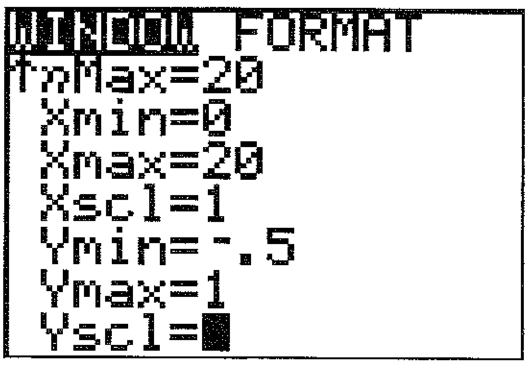
Exemple : Représenter la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$



On utilise $\boxed{\text{MODE}}$ SEQ DOT

WINDOW Format Time.

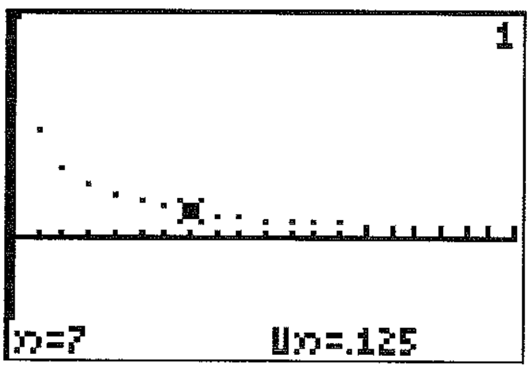
Entrer $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et valider (la variable doit être écrite à l'aide de $\boxed{\text{2nd}}$, lettre en bleue).



$\boxed{\text{TRACE}}$ donne la représentation graphique.

$\boxed{\text{TABLE}}$ donne la table des u_n.

(avec éventuellement 12 décimales)



On fait apparaître les points successivement avec ⊳, mais les valeurs affichées pour Y peuvent être approchées à cause du programme « dessin » et légèrement différentes de u_n.

2) Etudes numériques de suites données par des formules $u_n = f(n)$

On fait remplir par les élèves (travail à la maison) un tableau comme celui proposé en Annexe 1. On utilisera les valeurs numériques pour conjecturer les réponses aux questions : pour chaque suite, peut - on prévoir : *le sens de variation, l'existence de bornes, la limite ?* On peut, en même temps, demander des représentations graphiques qui visualisent les résultats.

Tout ce travail ne fait intervenir que des manipulations connues. Les suites récurrentes ne sont pas encore abordées explicitement (sauf dans le cas des suites arithmétiques ou géométriques).

3) Suites arithmétiques, géométriques

◊ On peut utiliser les programmes « STEAREC, STEARIND (TI) ; SUIT AR INDf_1, STE AR ECf_1 (CASIO) » après avoir stocké la relation en Y_1 (pour TI) ou f_1 (pour CASIO).

Suite arithmétique :	$Y = X + b$
Suite géométrique :	$Y = a X$
Suite arithmético - géométrique :	$Y = a X + b$

◊ $\boxed{\text{TI 82}}$ <u>Exemple</u>. Etudier la suite $(u_n)_{n\in N}$

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ (\forall n \in N)\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 5 \end{cases}$$

$\boxed{\text{MODE}}$ <u>SEQ</u> <u>DOT</u> $u_n = -\frac{1}{2}u_{n-1} + 5$ dans $\boxed{\text{Y =}}$

u_n Start 5 n Start 0 n Min 0 n Max 40

On trouve $u_{39} \approx 3{,}333...$; on conjecture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{10}{3}$. Il reste à démontrer ce résultat.

◊ $\boxed{\text{CASIO} - 8800}$ <u>Exemple</u>. Etudier la suite $(u_n)_{n\in N}$

$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ (\forall n \in N)\ u_{n+1} = 2u_n - 10 \end{cases}$$

On entre 2X-10 dans MEM f_1 ; on utilise « SUIT AR IND f_1 » (avec INDICE et ARRET SUR INDICE). On trouve $u_{29} = -8053063670$ $u_{30} = -1{,}610...\times10^{10}$.

On conjecture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ce qui reste à démontrer.

◊ Etude expérimentale des suites géométriques

La formule $u_{n+1} = a\,u_n$ $(n \in N)$ ou $u_n = a\,u_{n-1}$ $(n \in N^*)$ est exploitée dans le programme « SUIT AR INDf_1, » (pour CASIO 8800) ou « STEARIND » (pour TI 81) en stockant Y = a X.

Avec TI 82, en $\boxed{\text{MODE}}$ SEQ DOT on peut étudier deux suites en même temps en entrant $u_n = a\,u_{n-1}$ et $v_n = a'v_{n-1}$ pour des valeurs numériques de a et a'.

En faisant varier a et u_0 on pourra familiariser les élèves avec les différents comportements et provoquer des conjectures. Cependant, cette étude expérimentale va mettre en évidence la nécessité d'obtenir les formules $u_n = g(n)$.

Par exemple on prendra :

$$\begin{array}{llll} u_0 = 10 & a = 1{,}0001 & n = 100 & \to \; u_{100} \approx 10{,}1004\ldots \\ v_0 = 10 & a' = 0{,}9999 & n = 500 & \to \; v_{100} \approx 9{,}51227\ldots \\ u_0 = -10 & a = -0{,}9999 & n = 100 & \to \; u_{100} \approx -9{,}900\ldots \\ u_0 = -10 & a = -1{,}0001 & n = 100 & \to \; u_{100} \approx -10{,}100\ldots \end{array}$$

Ces résultats expérimentaux ne sont pas convaincants pour des valeurs de la raison voisines de 1 ou -1. C'est alors que la formule, facilement démontrée, $u_n = a^n \times u_0$ pourra être employée. La calculatrice, maintenant, convaincra les élèves que :

$$|a| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a^n = 0 \quad \text{et} \quad a > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty.$$

Par exemple : $(1{,}0001)^{10^6} \approx 2{,}67 \times 10^{43}$, $(-0{,}9999)^{10^5} \approx -4{,}53\ldots \times 10^{-5}$.

On peut démontrer ces limites et justifier complètement le théorème sur la limite d'une suite géométrique selon les valeurs de la raison.

II . Suites récurrentes

(classe de Terminale S)

1) Exemples de détermination de suites.

Avant de travailler sur les suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ (et u_0) on peut présenter quelques autres exemples.

a) « SUITE 421 ». Elle est déterminée par la donnée de $u_0 \in N^*$ et la règle récurrente suivante :

$$\text{si } u_n \text{ est pair : } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$$

$$\text{si } u_n \text{ est impair : } u_{n+1} = 3u_n + 1$$

Voir programme « SUITE 421 », sur TI 81-82, ou CASIO 8800-9900.

On peut vérifier que pour des valeurs numériques assez petites de u_0 la suite (u_n) est périodique (4 , 2 , 1 , 4 , 2 , 1 ...) à partir d'un certain indice. Cette propriété est encore conjecturale.

b) <u>Suite de Fibonacci</u>. Elle est déterminée par :

$u_0=0$, $u_1=1$, $(\forall n \in N)\, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On pourrait faire une étude théorique, actuellement un peu supérieure au programme de TS. Cependant on peut utiliser cette suite comme exercice.

• $\boxed{\text{TI 82}}$. En $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{SEQ}}$, on peut obtenir facilement la suite des valeurs numériques en entrant dans les mémoires Y.

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} \end{cases}$$

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$
$u_5 = 5$...

WINDOW	
u_n Start = 1	v_n Start = 0
nStart = 1	n Min = 0
n Max = 20	Xmin = 0
X Max = 20	Xscl = 1
Y Min = -0,5	Y Max = 100
Y scl = 0	

• $\boxed{\text{CASIO} - 8800}$ Utiliser le programme « FIBONACCI ». On peut étudier expérimentalement des suites définies par la même relation de récurrence avec des valeurs initiales différentes ; par exemple :

$u_0 = 3$, $u_1 = -2$ ☞ $u_2 = 1$, $u_3 = -1$, $u_4 = 0$; $u_5 = -1$; $u_6 = -1$.

2) Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Il importe de bien insister auprès des élèves : ce mode de détermination est très différent de $(u_n = g(n))_{n \in N}$, même si dans certains cas l'étude théorique consiste à passer de la définition récurrente au calcul de $u_n = g(n)$ (c'est le cas des suites arithmétiques et géométriques vues en 1ère). En particulier, les propriétés de la fonction f ne correspondent pas directement aux propriétés de la suite (u_n). L'utilisation des calculatrices graphiques peut contribuer à éclaircir les difficultés des élèves à ce sujet. Bien entendu, cela ne dispense pas de l'étude rigoureuse reposant sur les théorèmes d'analyse.

b) <u>Calcul des termes et interprétation géométrique</u>.

◊ $\boxed{\text{CASIO} - 8800}$ Soit la suite $(u_n)_{n \in N}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ (u_0 donné).

Le programme de TS demande que les élèves sachent calculer les termes d'une telle suite récurrente, avec un test d'arrêt, soit sur l'indice, soit sur l'écart entre deux termes consécutifs. Nous donnons les deux programmes : « SUIT AR INDf$_1$, » et « SUIT AR EC f$_1$, ».

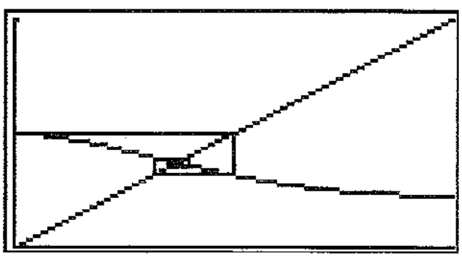
La version que nous donnons permet de faire défiler les termes.
En supprimant l'affichage ◢ après N et X on arrivera, dans « SUITE AR IND f_1» directement à u_N pour N demandé.

Point fixe : l'interprétation géométrique habituelle avec le tracé de la droite d'équation Y = X est fournie par le programme « STE PT FIX f_1 »

1er exemple :

$$u_{n+1} = 1 - u_n^2 e^{-u_n} \text{ et } u_0 = 0.$$

On stocke $f_1(x) = 1 - x^2 e^{-x}$
(par SHIFT MEM)
$u_0 = 0$; XMini = 0 ; XMaxi = 2 ; ECART = 10^{-3}
Après n = 4 on a $u_4 \approx 0{,}717780$...et le graphique ci-dessous. On démontre la convergence vers α en utilisant par exemple l'inégalité des accroissements finis.



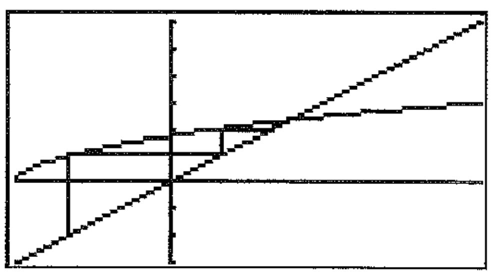
2ème exemple :

$$u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$$

Avec le même programme : $f_1(x) = \sqrt{3+x}$.
u_0 = -2 ; XMini =-3 ; XMaxi = 6 ; ECART = 10^{-2}
$u_5 \approx 2{,}29961858$.
On démontre :

$$\lim(u_n) = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad (\approx 2{,}302..)$$

(graphique ci-dessous).



◊ $\boxed{\text{TI 81}}$ Avec le programme « STEPTFIX » on obtient les représentations graphiques précédentes associées au point fixe (Stocker $Y_1 = f(x)$).
Les programmes « STEARIND » , « STEAREC » donnent, comme avec CASIO, les termes successifs de la suite (u_n), avec $Y_1 = f(x)$.

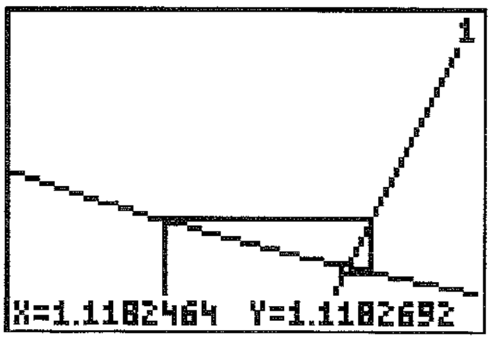
◊ $\boxed{\text{TI 82}}$ Il est inutile d'entrer des programmes car la calculatrice possède des fonctions intégrées pour le calcul des termes successifs et l'interprétation graphique. Utiliser le <u>Mode SEQ, WINDOW Format WEB</u>

<u>Exemple</u>. Etude de $(u_n)_{n\in N}$; $u_0 = 1$ $u_n = e^{\frac{1}{8u_n}}$ (Bac 93)

Choisir $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{SEQ}}$ connected (ou Dot) ; Dans $\boxed{\text{Y =}}$ stocker : $u_n = e \wedge (1/8u_{n-1})$

WINDOW :

u_n Start = 1	v_n Start = 0
nStart = 0	n Min = 0
n Max = 20	Xmin = 0,9
X Max = 1,2	Xscl = 0
Y Min = 1,1	Y Max = 1,2
Y scl = 0	



$\boxed{\text{TRACE}}$ puis curseur ▷

La table de valeurs fournit les u_n par TABLE. Le texte du Bac demande u_6 à l'aide de la calculatrice : $u_6 \approx 1,118266$.
Remarquer cependant, à cause des erreurs d'arrondis, que, de ce résultat, on ne peut pas conjecturer une valeur de la limite. Ici, on aurait intérêt à démontrer d'abord que la limite α est comprise entre 2 valeurs successives de u_n.

ANNEXE : Liste des programmes

Programmes CASIO 8800-9900

```
"SUIT AR INDƒ1"
"PREM IND"?→N
"PREM TERM"?→X
"DER IND"?→K
Lbl 1
N+1→N:"IND":N◢
ƒ1→X:"U PREC":X◢
N<K⇨Goto 1
"DER TERM"
X◢
"FIN"
```

```
"STE AR EC ƒ1"
"PREM IND"?→N
"PREM TERM"?→X
"ECART"?→E
Lbl 1
ƒ1→Y
N+1→N
"N=":N◢
"U N PREC":Y◢
Abs (Y-X)≤E⇨Goto 2
Y→X
Goto 1
Lbl 2
"FIN"
0
```

```
"STE PT FIXE RANGE A
CHOISIR ƒ1"
Cls
"U0"?→U
0→N
"X MINI"?→L
"X MAXI"?→M
Range L,M,0,L,M
Lbl 1
"ECART DEMANDE"?→P
Graph Y=X
Graph Y=ƒ1
Lbl 2
"N":N◢
"U":U◢
U→X:U→V
ƒ1→W
Plot U,U
Plot U,W:Line ◢
Plot W,W:Line ◢
W→U:N+1→N
Abs (U-V)≤P⇨Goto 3
Goto 2
Lbl 3
"FIN"
```

Programmes TI 81-82

Programme : « STEARIND »

```
Disp "PREM IND"
Input N
Disp "PREMTERM"
Input X
Disp "DER IND"
Input K
Lbl 1
N+1→N:Disp "IND":Disp N
Y1→X:Disp "U PREC":Disp X
Pause
If N<K
Goto 1
Disp "DER TERM"
Disp X
```

Programme : « STEAREC »

```
Disp "PREM IND"
Input N
Disp "PREMTERM"
Input X
Disp "ECART"
Input K
Lbl 1
N+1→N:Disp "IND":Disp N
Y1→Y:Disp "U PREC":Disp Y:Pause
If abs (Y-X)≤K
Goto 2
Y→X
Goto 1
Lbl 2
Disp "DER TERM"
Disp Y
```

Programme : « STEPTFIX »

```
ClrDraw
Disp "U0"
Input U
Disp "XMAX"
Input L
0→N
If U>L
Goto 4
U→Xmin
L→Xmax
0→Xscl
U→Ymin
L→Ymax
0→Yscl
Goto 1
Lbl 4
L→Xmin
U→Xmax
L→Ymin
U→Ymax
Lbl 1
Disp "PRECIS"
Input P
FnOff
DrawF X
DrawF Y1
Pause
Lbl 2
Disp "N"
Disp N
Disp "U"
Disp U
Pause
U→X
U→V
Y1→W
Line(U,V,V,W)
Pause
Line(V,W,W,W)
Pause
W→U
N+1→N
If abs (U-V)≤P
Goto 3
Goto 2
Lbl 3
Disp "FIN"
Stop
```

Suite récurrente (TI 82)

* Par $\boxed{\text{MODE}}$ activer l'option Seq.
Par $\boxed{\text{Y =}}$ on entre directement l'expression $u_n = f(u_{n-1})$.
Par $\boxed{\text{TABLE}}$ on obtient directement les différentes valeurs de u_n soit, de façon automatique, soit, terme à terme (en utilisant $\boxed{\text{Tblset}}$).

* En prenant dans $\boxed{\text{WINDOW}}$ l'option FORMAT suivie de Web puis de $\boxed{\text{GRAPH}}$, (ne pas oublier de régler "WINDOW") on fait apparaître la courbe représentative de f et de la droite d'équation y = x.
Par $\boxed{\text{TRACE}}$ on fait apparaître les différents termes de la suite.

Suite récurrente (CASIO fx 9900 GC)

* Menu $\boxed{\text{TABLE}}$
* Choisir $\boxed{\text{RECR}}$_$\boxed{\text{TYPE}}$_$\boxed{a_{n+1}}$ puis écrire l'expression $a_{n+1} = f(a_n)$
(*par exemple* : $a_{n+1} = \sqrt{(a_n + 2)}$)
* Choisir $\boxed{\text{RANG}}$. Donner

Start	(indice initial)
End	(indice final)
a_0 ou a_1	(le premier terme)

* Prendre $\boxed{\text{TABL}}$_(on peut faire défiler les termes de la suite).
* $\boxed{\text{NEW}}$ permet de changer de suite.

u_n	$1/n$	$1/2^n$	$\frac{1}{n} - n$	$\frac{(-1)^n}{n}$	$\frac{3n+1}{2n-1}$	$\left(\frac{-1}{2}\right)^n$	$\frac{n^9}{2^n}$	$0,3^n$	$(-3)^n$
u_1									
u_2									
u_3									
u_4									
u_5									
u_6									
u_7									
u_8									
u_9									
u_{10}									
u_{11}									
u_{12}									
u_{13}									
u_{14}									
u_{30}									
u_{35}									
u_{40}									
u_{50}									
u_{75}									
u_{90}									
u_{100}									

Chapitre 6 . COURBES PARAMETREES

Les courbes paramétrées sont dans le programme de Spécialité. Il nous a cependant semblé utile de présenter dans ce court chapitre comment l'utilisation des calculatrices peut aider les élèves pour étudier une « courbe paramétrée ».

I. Utilisation des calculatrices

Sur toutes les calculatrices graphiques (lorsque celà est possible), se mettre en Mode PARAM, Connected ou Dot (points reliés par des segments ou non). Pour les CASIO 7000-8000, il est nécessaire d'écrire un programme qui permet de tracer les points de coordonnées (X(T), Y(T)) pour les valeurs de T choisies.

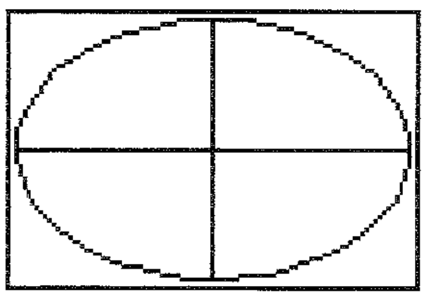
1) Choix du « Range »

Le choix du Range a ici une importance particulière : l'élève devra choisir une « fenêtre » pour les abscisses et ordonnées des points à tracer et également un Range pour le paramètre T, avec un pas (ptch ou pitch ou Tstep suivant les calculatrices).

De plus, le choix du Range pour X et Y peut modifier la « forme » de la courbe. Considérons par exemple la courbe **C** d'équation X = cosT et Y = sinT (cercle dans un repère orthonormal). Puisque l'écran des calculatrices est rectangulaire , choisir Xmin = –1, Xmax = 1 et Ymin = –1, Ymax = 1 donnera une ellipse, ce qui peut troubler certains élèves...

WINDOW

Tmin = 0
Tmax = 6,3
Tstep = 0,1
Xmin = –1
Xmax = 1
Ymin = –1
Ymax = 1



WINDOW

Tmin = 0

Tmax = 6,3

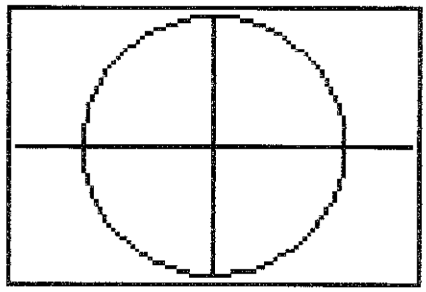
Tstep = 0,1

Xmin = –1,5

Xmax = 1,5

Ymin = –1

Ymax = 1



Le choix d'un Range où $\Delta X / \Delta Y = 1{,}5$ donnera à peu près un repère orthonormal...

2) Les programmes

Reprenons l'exemple précédent...

CASIO 7000-8000

Prog 2 cosT → X : sinT → Y

Prog 1 "H" ? → H : "TMIN" ? → T : "TMAX" ? → F :

Lbl4 : T + H →T : T ≥ F ⇒ Goto2 : Prog2 : PlotX, Y:

Goto4 : Lbl2 : PlotX, Y

CASIO 7700-8800

SHIFT MODE ×

Mettre cosT en f_1

Mettre sinT en f_2

Graph(X, Y) = (f_1 , f_2 EXE

$\boxed{\text{T.I.81-82}}$

$\boxed{\text{MODE}}$ Param

$X_{1T} = \cos T$

$X_{2T} = \sin T$

$\boxed{\text{GRAPH}}$

II. Exemples

Pour une courbe paramétrée Γ définie par X(T) = f(T) et Y(T) = g(T) où les fonctions f et g possèdent des propriétés particulières (parité, périodicité...), la première difficulté pour les élèves est de déterminer un intervalle d'étude I puis d'utiliser les propriétés de f et de g pour obtenir la courbe tout entière.

Il y a confusion chez les élèves entre les éventuels éléments de symétrie de Γ et les éventuelles propriétés de f et de g . La calculatrice rétroprojetable peut à cet effet illustrer parfaitement l'étude et aider à la compréhension.

1) Exemple 1 : X(T) = cos 3T , Y(T) = sin T

a) Recherche d'un intervalle d'étude pour Γ

* $\forall$ t $\in$ R M(T + 2π) = M(T) donc, pour obtenir toute la courbe, il suffit que T décrive un intervalle de longueur 2π

* $\forall$ t $\in$ R $\begin{cases} X(T+\pi) = -X(T) \\ Y(T+\pi) = -Y(T) \end{cases}$ donc M(T + π) et M(T) sont symétriques par rapport à l'origine O. Si T décrit un intervalle de longueur π , on obtiendra un morceau de courbe Γ_1 et par symétrie par rapport à O, $\Gamma = \Gamma_1 \cup s_O(\Gamma_1)$.

De plus , M(T) et M(−T) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (X(−T) = X (T) et Y(−T) = Y(T)) ; on peut alors prendre comme intervalle d'étude $I = [0, \pi/2]$; on obtient un morceau Γ_2 de la courbe.

$\Gamma_2 = \{M(T) \ / \ T \in [0, \pi/2]\}$

$\Gamma_2' = \{M(T)\ /\ T \in [-\pi/2\ ,\ 0]\}$ $\qquad\qquad \Gamma_2' = s_{XX}(\Gamma_2)$

Posons $\Gamma_1 = \Gamma_2 \cup \Gamma_2' = \{M(T)\ /T \in [-\pi/2\ ,\ \pi/2]\}$ et $\Gamma_1' = s_O(\Gamma_1)$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_1' = \{M(T)\ /T \in [-\pi/2\ ,\ 3\pi/2]\}$

On pouvait également remarquer que $M(\pi - T)$ et M(T) sont symétriques par rapport à Y'OY.

b) Illustration des propriétés précédentes

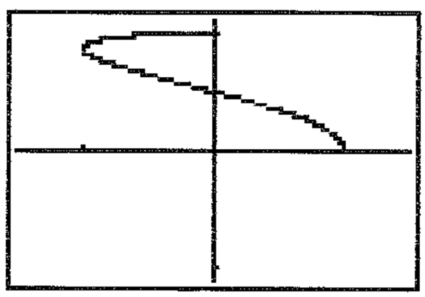
Le tracé sur la calculatrice des différents morceaux de courbe évoqués au a) permet de mieux faire comprendre. Il y a ici 3 variables : X, Y et T et les élèves confondent les propriétés des fonctions f et g avec les propriétés de la courbe Γ. En particulier, beaucoup disent que Γ est « périodique »...

On peut ici choisir le même RANGE pour X, Y pour les différents dessins en remarquant que la courbe est incluse dans le carré défini par $-1 \leq X \leq 1$ et $-1 \leq Y \leq 1$:

<u>Range</u> X min : –1,5
max : 1,5
scl : 1
Y min : –1,1
max : 1,1
scl : 1

Window

Tmin = 0
Tmax = π/2
Tstep = 0,01

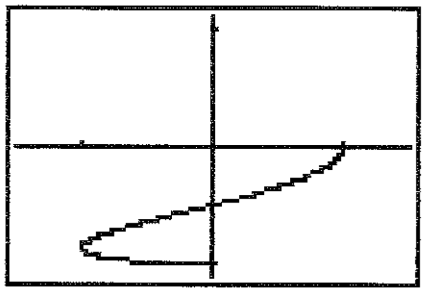


Window

Tmin = $-\pi/2$

Tmax = 0

Tstep = 0,01

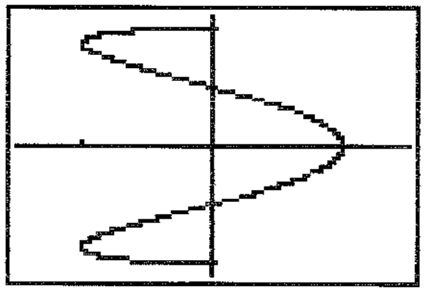


Window

Tmin = $-\pi/2$

Tmax = $\pi/2$

Tstep = 0,01

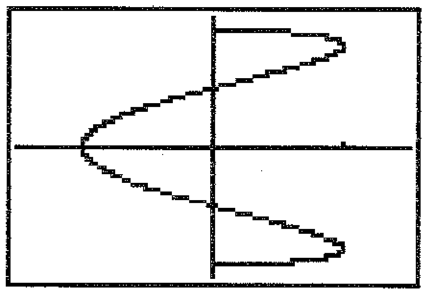


Window

Tmin = $\pi/2$

Tmax = $3\pi/2$

Tstep = 0,01

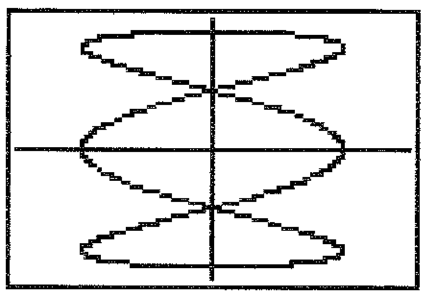


Window

Tmin = $-\pi/2$

Tmax = $3\pi/2$

Tstep = 0,01



On peut utiliser, pour chacune de ces courbes, la fonction TRACE : le point clignotant est le point M(T) avec T, X(T) et Y(T) affichés. (Pour que cet affichage n'efface pas un morceau de la courbe, choisir un autre Range pour Y : Y min = – 1,5 par exemple).

Tableau des variations conjointes des fonctions X et Y :

T	$0 \quad \pi/6 \quad \pi/3 \quad \pi/2$
X'	$0 \quad - \quad 0 \quad + \quad 3$
X	$1 \searrow -1 \nearrow 0$
Y	$0 \nearrow \sqrt{3}/2 \nearrow 1$
Y'	$1 \quad + \quad 1/2 \quad + \quad 0$

2) Exemple 2 : $X(T) = \cos T\sqrt{\cos(2T)}$; $Y(T) = \sin T\sqrt{\cos(2T)}$

Lorsque les variations des fonctions X et Y sont assez « brutales », l'utilisation de la calculatrice peut induire les élèves en erreur. En effet, un intervalle d'étude $[a,\ b]$ étant choisi pour T, le choix d'un « pas » p donnera le tracé de $\dfrac{b-a}{p}$ points, reliés entre eux par des segments si on a choisi le Mode Connected.

On considère le lemniscate de Bernouilli défini par

$$\begin{cases} X(T) = \cos T\sqrt{\cos(2T)} \\ Y(T) = \sin T\sqrt{\cos(2T)} \end{cases} \qquad T \in [-\pi/4,\ \pi/4] \cup [3\pi/4,\ 5\pi/4]$$

(L'étude des tangentes au point singulier n'est pas au programme).

Le « trou » s'explique par le fait que :

* les fonctions X et Y sont définies sur des intervalles de la forme $[-\pi/4 + k\pi\ ,\ \pi/4 + k\pi\ ]$($k \in \mathbb{Z}$) : en choisissant T min = – 0,79 et un pas de 0,1 , le premier point tracé est pour T = – 0,69 (il manque donc tout le tracé correspondant à $T \in [-\pi/4\ , -0{,}69\ ]$)

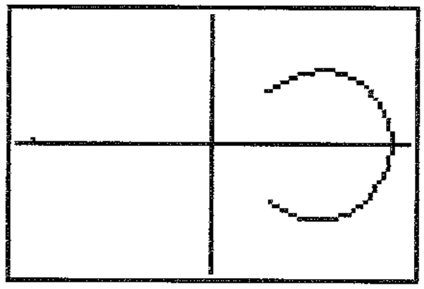
* le pas choisi , ici Tstep = 0,1 , est assez grand et peu de points sont tracés...

WINDOW

Tmin = – 0,79

Tmax = 0,79

Tstep = 0,1

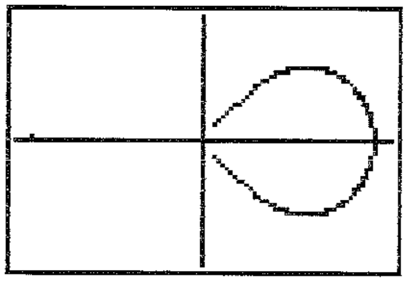


WINDOW

Tmin = –π/4

Tmax = π/4

Tstep = 0,01

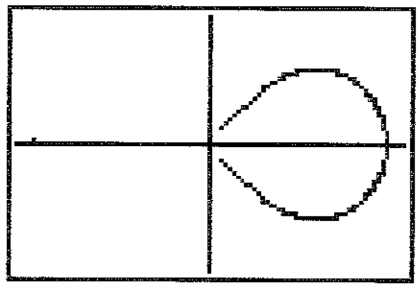


WINDOW

Tmin = – 0,79

Tmax = 0,79

Tstep = 0,01

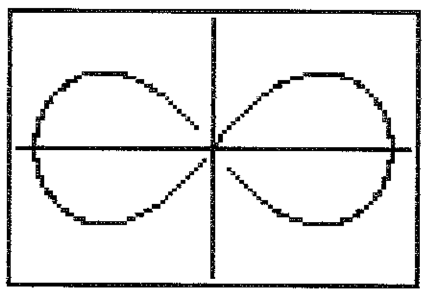


WINDOW

Tmin = – π/4

Tmax = 5π/4

Tstep = 0,01



Chapitre 7. EQUATIONS. INEQUATIONS. NOMBRES COMPLEXES

I. Résolution d'équations

1) Résolution graphique de f(x) = l (CASIO, T.I.)

L'illustration d'une discussion graphique de ce type est très convaincante avec une rétroprojetable. On fait tracer la courbe d'équation Y = f(X) après avoir choisi, si possible, un RANGE à valeurs décimales pour les X (XMAX – XMIN = 9,5 pour T.I.81 ; XMAX – XMIN = 9,4 pour T.I.82 ; RANG INIT pour CASIO). La fonction Trace permet de visualiser les solutions. Les élèves doivent acquérir une certaine initiative dans leur recherche expérimentale : prendre d'abord un RANGE STANDARD, « pour voir » ; puis affiner en prenant un meilleur encadrement.

* <u>*Exemple*</u> *: discussion graphique de* $xe^x = k$

Soit $f(x) = xe^x$; on fait tracer C_f (ci-dessous).

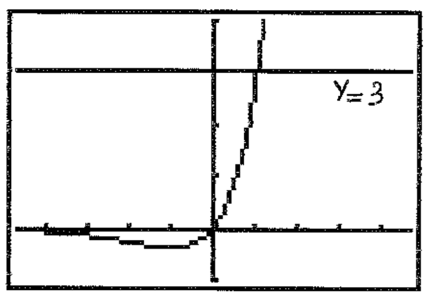
Le RANGE (-4,7 ; 4,7 ; 1 ; -1 ; 4 ; 1) semble fournir une allure suffisante ;

on conjecture que :

pour $m < k < 0$, on a deux solutions négatives

pour $0 \leq k$, on a une solution positive.

(m étant le minimum absolu de f).



On passe à l'étude mathématique de f qui montre un minimum absolu $f(-1) = -e^{-1} = m$.

Bien entendu, on revient aux raisonnements précis (si une démonstration est demandée) avec l'utilisation soignée du théorème de bijection sur les intervalles $]-\infty\,, -1\,]$ et $[-1\,, +\infty[$. La simple utilisation de TRACE permet de conjecturer une solution unique dans l'intervalle [1 ;1,1] pour l'équation f(x) = 3.

2) Résolution avec T.I.82

Ce modèle possède une fonction intégrée (voir fascicule du constructeur). La commande CALC puis <u>root</u> (ligne 2) permet d'obtenir, pour $g(x) = xe^x - 3$, une solution X≈ 1,0499089 en même temps que la représentation graphique.

3) Equations f(x) = g(x)

Sur tous les modèles graphiques, on fera tracer les deux courbes d'équations Y_1 = f(x) et Y_2 = g(x). Après quelques essais sur le choix de RANGE, la fonction TRACE fournira une bonne conjecture pour les solutions ; la démonstration mathématique demande ensuite l'étude de $x \mapsto f(x) - g(x)$.

<u>*Exemple*</u> : $xe^x = 3 \Leftrightarrow e^x = \frac{3}{x}$. Le tracé des deux courbes donne le point d'intersection d'abscisse voisine de 1.

4) Recherche d'un encadrement de la solution

* L'élève doit rédiger un raisonnement en utilisant le théorème de bijection, puis, en détaillant les calculs, affiner l'encadrement en faisant appel au sens de variation de la fonction.

<u>*Exemple*</u> : $xe^x = 3$; le théorème de bijection sur $[-1, +\infty[$ montre que l'équation f(x) = 3 admet une solution unique α sur $[-1, +\infty[$.

On calcule f(1,04) ≈ 2,9424 et f(1,05) ≈ 3,0005 ; on a donc $f(1{,}04) < f(\alpha) < f(1{,}05)$ et, puisque la fonction f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, on en déduit :

$1{,}04 < \alpha < 1{,}05$.

Le professeur n'acceptera pas des rédactions du genre « par dichotomie, d'après la calculatrice, on a ... ». Le but de la question posée à l'élève est de lui faire expliciter un raisonnement mathématique, pas d'obtenir un grand nombre de décimales grâce à un mécanisme qu'il ne comprend pas.

* Cependant pour les CASIO et les T.I.81, on peut fournir aux élèves un programme de recherche par dichotomie permettant de vérifier les raisonnements (voir les programmes dans le chapitre 9).

II. Inéquations

1) Inéquations à une inconnue

* Ici encore, pour conjecturer ou vérifier une réponse, l'utilisation d'une calculatrice graphique est très efficace. On doit obtenir chez les élèves le réflexe consistant à utiliser la calculatrice pour prévoir ou vérifier leurs réponses, ce qui ne les dispense pas d'une véritable démonstration.

* Sur toutes les calculatrices graphiques, pour résoudre $f(x) \geq 0$, on fait tracer la représentation graphique de f et on cherche, avec TRACE, les intervalles pour lesquels la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses. Cette méthode graphique permet évidemment d'étudier le signe de f(x) suivant x et est utilisable dès l'étude du signe du trinôme en 1ère S.

2) Résolution graphique d'inéquations ou de systèmes d'inéquations

$y \geq f(x)$ ou $f(x) \leq y \leq g(x)$

* Les T.I. possèdent une fonction DRAW Shade((ligne 7) qui permet d'ombrer la région du plan dont les coordonnées vérifient une telle inéquation. Cette représentation semble surtout utile pour la projection en classe à titre d'illustration. Pour les élèves, ils doivent apprendre à lire un graphique : les points dont les coordonnées sont solutions de $f(x) \leq y \leq g(x)$ sont les points situés au-dessus de C_f et en dessous de C_g.

Exemple : $x^2 \leq y \leq x+1$

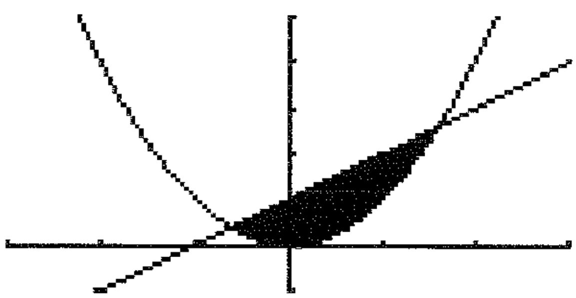
- Pour T.I., Shade($X^2, X+1$)
- Pour CASIO, choisir le MODE G-type : INEQ

Graph $Y \leq X+1$

↵

Graph $Y \geq X^2$

$\boxed{\text{EXE}}$



III. Résolution de systèmes linéaires

1) La résolution de systèmes d'équations du premier degré, conformément aux programmes de 1ère S et TS, met en œuvre les combinaisons d'équations par la méthode du « pivot ». On peut envisager deux types d'utilisation des calculatrices :

- emploi de la calculatrice pour réaliser les combinaisons de lignes en utilisant les touches du programme $\boxed{\text{MATRX}}$ (seulement T.I.). On peut ainsi faire fonctionner assez rapidement une méthode qui, conduite « à la main », se révèle assez fastidieuse avec beaucoup de risques d'erreurs. Les T.I. permettent de visualiser très convenablement les différentes étapes (voir exemple dans ce paragraphe).

- emploi des fonctions de calcul matriciel pour obtenir la solution d'un système de Cramer. Cette méthode, dont la justification théorique est en dehors du programme, ne peut être utilisée telle quelle au Bac, mais sert pour la vérification.

2) Méthode de Gauss (T.I.)

T.I.81 * Utiliser la touche $\boxed{\text{MATRX}}$ EDIT pour entrer d'abord les dimensions puis les coefficients, par exemple dans [A] (matrice [A]).

* Dans le menu $\boxed{\text{MATRX}}$ MATRIX , on dispose de 4 opérations élémentaires :

♣ *échange de deux lignes* 1 : RowSwap($L_i \leftrightarrow L_j$

♣ *addition de deux lignes* 2 : Row + ($L_j \leftarrow L_i + L_j$

♣ *multiplication d'une ligne par un nombre k*

3 : *Row($L_j \leftarrow kL_j$

♣ *remplacement d'une ligne par sa somme avec une autre ligne multipliée par un coefficient k* 4 : *Row + ($L_j \leftarrow L_j + kL_i$

Exemple1 : déterminer l'intersection des plans d'équations respectives

$x + 2y + 3z = 3$ et $2x + 3y + 4z = 3$

Il s'agit de résoudre le système $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+4z=3 \end{cases}$

On entre $[A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (2 lignes, 4 colonnes)

<u>*Row + (</u> -2, [A], 1, 2) opération : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

<u>*Row +(</u> 2, ANS, 2, 1) opération : $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$ (noter l'utilisation de ANS)

<u>*Row(</u> -1, ANS, 2) opération : $L_2 \leftarrow -L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

L'intersection est la droite Δ de représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = z-3 \\ y = -2z+3 \end{cases}$ $\Delta = D(A, \vec{u}\,)$ avec A(-3, 3, 0) et $\vec{u}$(1, -2, 1)

<u>Exemple 2</u> : Résoudre le système (ou intersection de trois plans)

$\begin{cases} 2x+7y+8z=1 \\ 4x-2y+z=5 \\ x+3y-2z=4 \end{cases}$ $[A]=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

On peut évidemment faire $L_1 \leftrightarrow L_3$ avant d'utiliser la machine.

<u>RowSwap(</u> [A], 1, 3) puis <u>*Row + (</u> -4, ANS, 1, 2)

Noter qu'on peut suivre ces transformations sur la calculatrice sans écrire .

<u>*Row + (</u> -2, ANS, 1, 3) donne

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -14 & 9 & -11 \\ 0 & 1 & 12 & -7 \end{bmatrix}$$

On continue par <u>RowSwap(</u> ANS, 2, 3) puis

<u>*Row + (</u> 14, ANS, 2, 3) d'où $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 177 & -109 \end{bmatrix}$

On peut maintenant finir « à la main » : $z = -\frac{109}{177}$; $y = \frac{12 \times 109}{177} - 7 = \frac{23}{59}$ et $x = -\frac{3 \times 69}{177} + \frac{2(-109)}{177} + 4 = \frac{283}{177}$, ce qui a l'avantage de fournir les réponses exactes (la T.I.81 n'a pas de programme intégré de calcul en fractions).

* On pourrait reprendre des combinaisons linéaires :

<u>*Row + (</u> $-\frac{12}{177}$, ANS, 3, 2) puis <u>*Row + (</u> -3, ANS, 2, 1)

puis <u>*Row + (</u> $\frac{2}{177}$, ANS, 3, 1) , ce qui donne $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1{,}598.. \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}3898.. \\ 0 & 0 & 177 & -109 \end{bmatrix}$ d'où la solution: S = {(1,598..; 0,389..; –109/177)}

On peut faire apparaître des valeurs approchées par ANS (1, 4) et ANS (2, 4)

* A partir de $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 177 & -109 \end{bmatrix}$ on peut refaire des combinaisons linéaires et des multiplications pour éviter les fractions :

<u>*Row(</u> 177, ANS, 2) <u>*Row + (</u>-12, ANS, 3, 2) <u>*Row(</u> 177, ANS, 1)

<u>*Row + (</u> -3, ANS, 2, 1) <u>*Row + (</u> 2, ANS, 3, 1)

faisant apparaître enfin $\begin{bmatrix} 177 & 0 & 0 & 283 \\ 0 & 177 & 0 & 69 \\ 0 & 0 & 177 & -109 \end{bmatrix}$ d'où la solution :

$$S = \left\{ \left(\frac{283}{177} ; \frac{69}{177} ; -\frac{109}{177} \right) \right\}$$

<u>**T.I.82**</u> * Les touches sont analogues à celles de T.I.81, l'entrée de la matrice étant un peu plus facile. Les combinaisons des lignes sont dans le menu $\boxed{\text{MATRX}}$ MATH mais on peut utiliser ► Frac pour faire des calculs exacts sous forme fractionnaire.

<u>Exemple</u> : (le même système que le deuxième exemple donné pour T.I.81)

Mêmes opérations jusqu'à $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 177 & -109 \end{bmatrix}$

Puis, si l'on veut :

<u>*row + (</u> $-\frac{12}{177}$, ANS, 3, 2) ▶ Frac

<u>*row + (</u> -3 , ANS, 2, 1) ▶ Frac (on peut utiliser ENTRY)

<u>*row + (</u> $\frac{2}{177}$, ANS, 3, 1) ▶ Frac qui donne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 10^{-13} & \frac{283}{177} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{23}{59} \\ 0 & 0 & 177 & -109 \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad S = \left\{ \left(\frac{283}{177} \; ; \frac{23}{59} \; ; -\frac{109}{177} \right) \right\}$$

<u>Exemple 3</u>: déterminer l'intersection des 3 plans

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ -4x + 5y - 5z = 3 \end{cases} \qquad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

On conduit les calculs directement sur la calculatrice :

<u>*row + (</u> -2 , [A] , 1, 2)

<u>*row + (</u> 4 , ANS, 1, 3) (utiliser ENTRY)

<u>*row + (</u> 3 , ANS, 2, 3) , ce qui donne

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ L'intersection est une droite que l'on peut préciser par

<u>*row + (1/3,</u> ANS, 2, 1) ▶ Frac ce qui donne $\begin{bmatrix} 1 & 10^{-14} & 10^{-14} & \frac{4}{3} \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. On en conclut

que l'intersection des 3 plans est la droite Δ : $\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ -y + z = -\frac{5}{3} \end{cases}$

3) Résolution matricielle

Méthode utilisable par les élèves à titre de contrôle, sur CASIO 8800G ou T.I.81 ou T.I.82. Elle suppose que dét $[A] \neq 0$; la formule utilisée est

$[A] \times [X] = [B] \quad \Rightarrow \quad [X] = [A]^{-1} \times [B]$

CASIO 8800G

La manipulation des matrices est un peu pénible, mais les résultats sont sous forme de fractions lorsqu'ils sont simples. Se mettre en $\boxed{\text{MODE}}$ Ø (MATRIX). Reprenons le deuxième exemple :

$$\begin{cases} 2x + 7y + 8z = 1 \\ 4x - 2y + z = 5 \\ x + 3y - 2z = 4 \end{cases} \qquad [A] = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad [B] = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

On définit les matrices [A] et [B] en précisant d'abord leurs dimensions (puis leurs coefficients) par :

F1 (A) F6 (⇩) F1 (DIM) MAT A — PRE F2 (B) F6 (⇩) F1 (DIM) MAT B

Row : 3 — Row : 3

Colm : 3 — Colm : 1

(retour aux opérations matricielles par PRE)

A $\quad A^{-1}$	*calcul de* A^{-1}
$C \to A$	A^{-1} *revient comme matrice* A
PRE $\times$	*effectue* $A \times B$, *et l'affecte en* C

La solution apparaît en C
$$\begin{bmatrix} 1 \lrcorner 106 \lrcorner 177 = \dfrac{283}{177} \approx 1{,}5988 \\ 23 \lrcorner 59 \approx 0{,}3998 \\ -109 \lrcorner 177 \approx -0{,}615 \end{bmatrix}$$

T.I.81

Calculs matriciels simples . Reprenons le système précédent :

$\boxed{\text{MATRX}}$ EDIT [A] 3×3 ; on entre A : 1,1 = 2 etc.

Contrôler en appelant [A] ; entrer [B] par $\boxed{\text{MATRX}}$ EDIT [B] 3×1 1,1 = 1 etc.

Il suffit maintenant de demander $[A]^{-1} * [B]$.

On obtient la matrice de la solution, ici en valeurs approchées (la matrice inverse$[A]^{-1}$ s'obtient par la touche usuelle $\boxed{x^{-1}}$, mais conduit à ERR si dét(A) = 0 ; voir 3ème exemple du § précédent).

T.I.82

Mêmes calculs que pour T.I.81 mais on peut travailler avec des fractions.

<u>Exemple</u> : déterminer un polynôme f de degré 3 *tel que* :

$f(1) = 3 \qquad f(-1) = 2 \qquad f(2) = 3 \qquad f(3) = 5$

Les coefficients de $f(x) = ax^3 + bx^2 cx + d$ vérifient le système :

$$\begin{cases} a+b+c+d=3 \\ -a+b-c+d=2 \\ 8a+4b+2c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=5 \end{cases} \qquad [A]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$X = [A]^{-1} * [B] \;\blacktriangleright \text{Frac} = \begin{bmatrix} 7/24 \\ -3/4 \\ 5/24 \\ 13/4 \end{bmatrix} \qquad \text{d'où } f(x) = \frac{7}{24}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{24} + \frac{13}{4}.$$

Cependant, cette méthode reste hors programme actuellement.

Avec T.I.82, on peut aussi utiliser , pour l'exercice précédent, les fonctions statistiques avec la régression cubique (également hors programme TS). En revanche, on peut évidemment vérifier le résultat précédent en faisant tracer la courbe d'équation y = f(x) ou en contrôlant la table de valeurs.

Fiche élève. Coordonnées rectangulaires, polaires

Tout nombre complexe <u>non nul</u> z s'écrit :

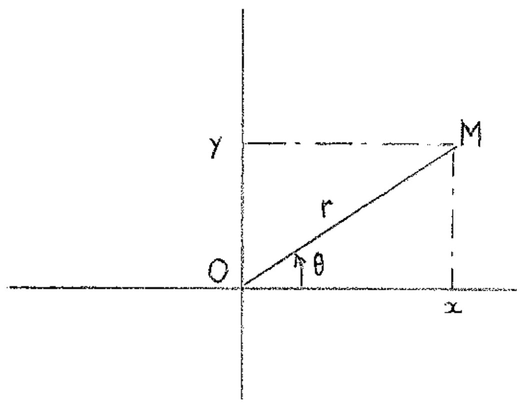
***sous forme cartésienne** $z = x + iy$ où x et y sont des réels ($x = \mathrm{Re}z$ et $y = \mathrm{Im}z$)

***sous forme trigonométrique** $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$ et $\theta = \arg z$ (θ défini à $2k\pi$ près, $k \in \mathbf{Z}$)

Dans un repère orthonormal direct, <u>l'image</u> M du nombre z a pour coordonnées <u>cartésiennes (ou rectangulaires)</u> le couple (x, y) et pour coordonnées <u>polaires</u> (r, θ).

$$\boxed{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} r = \sqrt{(x^2+y^2)} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r}, \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{array}}$$



T.I 81

Menu MATH 1 : R→ P (

2 : P → R (

R → P (1, $\sqrt{3}$ ENTER **2**

θ ENTER **1,047..** *(si on est en mode Radian)*

r *et* θ *sont dans les mémoires* R *et* θ

P→ R (2, 30° ENTER **1,732..**

Y ENTER **1**

T.I 82

Menu ANGLE	5 : R $\rightarrow$ Pr (	Donne R sachant X et Y
	6 : R $\rightarrow$ Pθ (	Donne θ sachant X et Y
	7 : P $\rightarrow$ Rx (	Donne X sachant R et θ
	8 : P $\rightarrow$ Ry (	Donne Y sachant R et θ

R $\rightarrow$ Pr (1, $\sqrt{3}$)	ENTER	**2**
R $\rightarrow$ Pθ (1, $\sqrt{3}$)	ENTER	**1,047..**
P $\rightarrow$ Rx (2, π /6)	ENTER	**1**
P $\rightarrow$ Ry (2, π /6)	ENTER	**1,732..**

T.I 85

Menu CPLX sous menu Pol ou Rec

(1, $\sqrt{3}$	Pol	EXE	**(2 $\angle$ 1.047..)**
(2$\angle\pi$ /6	Rec	EXE	**(1.732.. ,1)**

CASIO 7000 - 8800

Pol (ou Rec (*(par Shift + ou Shift -)*

Pol (1 , $\sqrt{3}$	EXE	**2**
	J EXE	**1,047..**

r *et* θ *sont dans les mémoires* I *et* J

Rec (2 , 30°	EXE	**1,732..**
	J EXE	**1**

X *et* Y *sont encore dans les mémoires* I *et* J

CASIO 180 P

1	$R \to P$	$\sqrt{3}$	=	**2**
			$X \leftrightarrow Y$	**1,047..**
2	$P \to R$	30°	=	**1,732..**
			$X \leftrightarrow Y$	**1**

Chapitre 8 . DÉNOMBREMENTS - PROBABILITÉS

I . Activités préparatoires

1) Illustration du cours (TI 82)

On peut, à titre d'exercices de programmation, faire chercher par les élèves (ou donner directement) des programmes affichant :

des p-listes	PROGRAM : P3LIST4
des arrangements	PROGRAM : ARRGT3N5
des permutations	PROGRAM : PERMUT3
des combinaisons	PROGRAM : COMB6P3.

Nous proposons ces programmes dans le chapitre 9, ils peuvent être adaptés aux autres modèles, avec parfois, des problèmes de présentation et de lecture des résultats.
Ces programmes se prêtent bien à une rétroprojection en classe.

2) Recherche des coefficients usuels de l'analyse combinatoire

Il s'agit de faire apparaître rapidement les valeurs (exactes ou approchées) de n! , A_n^p , C_n^p .

CASIO (7800G, 8800G, 9900G)

n!	MATH	PRB	n x!	EXE
A_n^p ($p \leq n$)	MATH	PRB	n nPr p	EXE
C_n^p ($p \leq n$)	MATH	PRB	n nCr p	EXE

Pour les autres modèles CASIO qui n'ont que n! utiliser les formules :

$$A_n^p = \frac{n!}{p!} \qquad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

(Voir programme « ARRCOMB », dans le chapitre 9, pour CASIO 7000-8000)

On peut obtenir la liste des coefficients binomiaux C_n^p (n fixé, p variant de 0 à n) par le programme « TRIAN PASCA » (chapitre 9), valable pour toutes les CASIO.

TI 81

n!	n MATH	!		ENTER
A_n^p ($p \leq n$)	n MATH	PRB	n nPr p	ENTER
C_n^p ($p \leq n$)	n MATH	PRB	n nCr p	ENTER

(Pour p > n, la machine donne $A_n^p = C_n^p = 0$)

$\boxed{\text{TI 82}}$

n!	n $\boxed{\text{MATH}}$	$\boxed{\text{PRB}}$	$\boxed{!}$	$\boxed{\text{ENTER}}$
A_n^p $(p \le n)$	n $\boxed{\text{MATH}}$	$\boxed{\text{PRB}}$	n $\boxed{\text{nPr}}$ p	$\boxed{\text{ENTER}}$
C_n^p $(p \le n)$	n $\boxed{\text{MATH}}$	$\boxed{\text{PRB}}$	n $\boxed{\text{nCr}}$ p	$\boxed{\text{ENTER}}$

La liste des coefficients binomiaux C_n^x (n fixé, $0 \le x \le n$) sera facilement obtenue en entrant $Y_1 = C_n^x$ avec $\boxed{\text{TblSet}}$ fixé ainsi :

TblMin = 0   Tbl = 1   Indpnt : Auto   Depend : Auto

La liste Y_1 fournit la ligne n du triangle de Pascal.

II . Probabilités

1) Introduction (classe de Première)

a) des fréquences aux probabilités : (à l'origine du calcul des probabilités)

On répète un grand nombre de fois une épreuve aléatoire et on s'intéresse à la fréquence d'apparition d'un certain résultat.

α) On lance n fois une pièce,soit f_n *la fréquence d'apparition du pile, c'est-à-dire* $f_n = \dfrac{\text{nombre de piles obtenus}}{n}$

$\boxed{\text{CASIO 180P}}$

mode 0 PCL	P1
1 Kin + 1	*incrémentation du compteur de lancers*
Ran # – 0,5 =	*lecture de* a *, nbre aléa. et calcul de* x = a – 0,5
x > 0 ; 1 Kin + 2	*test* x > 0 ; *si oui, on a obtenu « face »*
RTN ; mode .	*retourne au début ; mode calcul*
KAC ; P1 ; AC	*mise à 0 des mémoires ; lancement de P1 ; arrêt*
Kout 1 ; Kout 2	*lecture du nombre de lancers ; de « piles »*

n	62	115	171	246	369	459	719	983	1494	1708	3000
piles	32	56	88	125	186	229	366	505	756	865	1513
f_n	0,516	0,487	0,515	0,508	0,504	0,499	0,509	0,514	0,506	0,506	0,504

On observe : plus n est grand, plus f_n est stable et proche du nombre théorique 1/2. Ce nombre mesure le degré de « confiance » que l'on peut avoir d'obtenir « pile » lors d'un lancer ; on dira que la probabilité d'obtenir « pile » est 1/2.

β) *Dé équilibré*

On lance n *fois un dé normal et on s'intéresse à la fréquence d'apparition de chacune des faces :*

β = Int (6*Rand # + 1)

(voir les programmes détaillés dans le chapitre 9)

sortie du → / n = ↓	1	2	3	4	5	6
1000	186	161	181	153	165	154
10000	1652	1698	1645	1669	1704	1632
100000	16666	16965	16525	16696	16720	16420

On observe : les fréquences sont très voisines (pour n = 100000) et proches de 1/6 ; on peut alors, sans nouvelle expérimentation, calculer pour n = 100000 la fréquence d'apparition

d'un nombre pair : 0,50081

d'un nombre supérieur ou égal à 5 : 0,33140

c) En résumé : les fréquences obtenues lors de l'observation d'un grand nombre d'épreuves aléatoires ou d'individus permettent <u>non seulement</u> de porter un jugement sur la population observée (propriétés intrinsèques, lois naturelles), <u>mais aussi</u> de mettre en évidence des *nombres abstraits* (autour desquels les fréquences se stabilisent) qui mesurent la vraisemblance de voir une épreuve aléatoire isolée amener tel résultat r ou de voir un individu pris au hasard de présenter telle valeur x du caractère X.

Ces nombres abstraits ou probabilités pourraient servir de données pour d'autres calculs. Il reste à construire une théorie des probabilités, <u>sans référence aux fréquences</u>.

2) Questions avec équiprobabilité

On est amené à des questions de dénombrement et on a souvent besoin de garder les probabilités sous forme fractionnaire.

<u>*Exemple*</u> *: Dans une urne contenant* 6 *boules blanches et* 4 *boules noires, quelle est la probabilité d'avoir* 2 *boules blanches en tirant simultanément* 3 *boules ?*

$\boxed{\text{CASIO}}$ $$p = \frac{C_6^2 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \left(6\boxed{\text{nCr}}2\right)\times\left(4\boxed{\text{nCr}}1\right) \lrcorner \left(10\boxed{\text{nCr}}3\right) = \frac{1}{2}$$

Cette possibilité disparaît pour des entiers trop grands, mais la calculatrice permet de terminer des exercices avec des valeurs approchées.

<u>*Exemple*</u> *: Au jeu de Keno, on peut choisir 4 numéros parmi 70 et il y a 20 numéros gagnants.*

La probabilité d'avoir 4 numéros gagnants est : $p = \dfrac{C_{20}^4}{C_{70}^4} \approx 5{,}28 \times 10^{-3} \approx \dfrac{1}{189}$

(ou $p = \dfrac{C_{66}^{16}}{C_{70}^{20}}$ en suivant l'ordre chronologique : choix de 4 numéros puis tirage des 20 gagnants).

$\boxed{\text{TI 82}}$ Utiliser la touche $\boxed{\text{MATH}}$ ► Frac après le quotient.

3) Programmes de simulation

Les calculatrices ont un programme qui choisit au hasard des nombres entre 0 et 1 :

$\boxed{\text{CASIO}}$	MATH	$\boxed{\text{PRB}}$	$\boxed{\text{Rn\#}}$
$\boxed{\text{TI}}$	$\boxed{\text{MATH}}$	$\boxed{\text{PRB}}$	$\boxed{\text{rand}}$.

On peut alors proposer des programmes de simulation, pour les lancers d'une pièce, d'un dé etc. Ces expérimentations sont à utiliser lorsque on assimile une fréquence expérimentale à une probabilité théorique(cf.le premier §). On donne de tels programmes dans le chapitre 9 :

$\boxed{\text{TI 82}}$	DES	DESØSERI
$\boxed{\text{CASIO}}$	DES	PILEFACE

4) Espérance Mathématique et écart-type pour une variable aléatoire X

* <u>Utilisation des fonctions statistiques</u>

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs x_i (i = 1...n) avec les probabilités $P(X = x_i)$. On peut entrer les valeurs x_i comme valeurs d'un caractère d'une série statistique, les probabilités $P(X = x_i)$ étant entrées comme coefficients. Les formules de la moyenne $\overline{x}$ et de l'écart type σ_X sont celles de E (X) et σ_X . Quelques difficultés peuvent cependant se présenter.

* $\boxed{\text{CASIO}}$

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\times}$ (RUN/SD)

MODE Stat -data : Non

Effacer d'abord les précédentes données statistiques par

CLR $\boxed{\text{Scl}}$ $\boxed{\text{EXE}}$

Entrer la série $\left(x_i ; P\left(X = x_i\right)\right)$; on obtient E (X) = $\overline{x}$ $\sigma_X = x\sigma_n$.

Exemple :

x_i	-1	0	2	5
$P\left(X=x_i\right)$	$\frac{11}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Il faut utiliser les commandes du « bandeau » statistique : DT CL DEV...

-1 ; $\frac{11}{32}$ DT 0 ; $\frac{15}{32}$ DT 2 ; $\frac{5}{32}$ DT 5 ; $\frac{1}{32}$ DT

Puis DEV $\bar{x} = E(X) = 0{,}125$ $\sigma_X = x\sigma_n \approx 1{,}3169...$

On peut remarquer que, pour une série statistique, $\bar{x}$ et σ_x ne sont pas modifiés si l'on multiplie les coefficients par un même facteur ($\neq 0$).

D'où la possibilité de rentrer : -1 ; 11 DT 0 ; 15 DT 2 ; 5 DT 5 ; 1.

* TI 81

STAT DATA Clr Stat ENTER STAT DATA EDIT

D'après la remarque précédente on remplace $P\left(X=x_i\right)$ par des entiers proportionnels car TI81 n'accepte que des entiers comme coefficients d'une série statistique à 1 variable.

x_1=-1 ENTER y_1=11 ENTER ...x_4=5 ENTER y_4=1 ENTER

STAT CALC 1-Var ENTER $\bar{x} = E(X) = 0{,}125$

σ_X =1,31...

* TI 82

Même procédure que pour TI81, mais les coefficients proportionnels à $P\left(X=x_i\right)$ doivent être entiers et <u>inférieurs à 100</u>.

On peut écrire un programme utilisant les listes L_i et les opérations de listes. On doit d'abord entrer les x_i dans la liste L_1 et $P\left(X=x_i\right)$ dans la liste L_2.

STAT Clr List L_1, L_2 ENTER

STAT EDIT Edit

L_1	L_2
-1	$11/32$
0	$15/32$
2	$5/32$
5	$1/32$

Puis on utilise le programme VARXALEA. On peut aussi entrer les données par le programme VARXSTAT (Voir chapitre 9).

5) Fonction de répartition d'une variable aléatoire

* Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs x_i. La fonction de répartition F est définie sur R par $F(x) = P(X \leq x)$. Cette notion semble d'un intérêt limité vis à vis du programme de Terminale. Cependant on peut, à titre d'exercice, ou pour une illustration en classe, proposer un tracé, soit par un programme (VARREPAT pour TI82 cf.chapitre 9), soit en faisant tracer une fonction en escalier.

* $\boxed{\text{TI 82}}$ Tracé direct de Y = F(x)

On entre les x_i dans la liste L_1, les $P(X = x_i)$ dans la liste L_2. On fait remplir la liste L_3 par les probabilités cumulées (programme XCUMUL) et on fait tracer une fonction par intervalles en utilisant les fonctions booléennes.

```
PROGRAM : XCUMUL
dim L1 → dim L3
L2 → L3
For ( X , 2 , dim L1 )
L3 (X–1) + L2 (X) → L3 (X)
End
```

Exemple :

L_1	L_2	L_3
–1	1/2	0,5
0	1/4	0,75
2	1/4	1

Après XCUMUL, on a les probabilités cumulés dans L_3. On entre :

$Y_1 = 0(X < L_1(1)) + L_3(1)*(L_1(1) \leq X \text{ and } X < L_1(2)) + L_3(2)*(L_1(2) \leq X \text{ and } X < L_1(3)) + L_3(3)*(L_1(3) \leq X)$

Puis, ZOOM DEC (ou autre choix de WINDOW) ; et on obtient la représentation de F que l'on peut parcourir avec TRACE. Il est un peu fastidieux d'entrer $Y_1 = F(x)$ sous cette forme mais on a un exemple simple d'emploi des fonctions booléennes pour tracer une fonction dont la formule varie selon des intervalles.

* On peut aussi écrire et utiliser un programme utilisant les fonctions de dessin de $\boxed{\text{TI 82}}$. Mais ici, on ne peut pas faire décrire la représentation par TRACE;

Nous donnons un tel programme, à utiliser lorsque les listes L_1 et L_2 contiennent respectivement les x_i et $P(X = x_i)$ (cf. programme VARREPAT chapitre 9).

```
60→dim L1
60→dim L2
60→dim L3
1→T
For(I,1,5,1)
For(J,1,5,1)
For(K,1,5,1)
If (K=I or K=J or I=J)
Goto 1
I→L1(T):J→L2(T):K→L3(T)
1+T→T
Lbl 1
End:End:End
Disp L1,L2,L3
Stop
Disp "LISTES PAR STAT EDIT"
```

ARRG3N5-TI82

Ce programme fournit, dans (L_1, L_2, L_3) la liste des A_5^3 arrangements d'ordre 3 de $E = \{1,2,3,4,5\}$. On peut facilement le modifier mais on est limité par $\dim L_1 \leq 99$. Plutôt comme illustration du cours.

```
20→dim L1:20→dim L2:20→dim L3
1→T
For(I,1,6,1)
For(J,I+1,6,1)
For(K,J+1,6,1)
I→L1(T):J→L2(T):K→L3(T)
T+1→T
End:End:End
Disp "STAT L1L2L3"
```

COMB6P3-TI-82

Ce programme fournit, dans (L_1, L_2, L_3) la liste des C_6^3 combinaisons d'ordre 3 de $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. On peut le modifier pour avoir des combinaisons d'ordre 2, 4, 5, 6 (utiliser 2, 4, 5, 6 instructions For) mais on est limité par les dimensions.

```
{6,1}→dim [D]
Fill(0,[D])
0→J
Disp "NBRE LANCERS"
Input N
Lbl 3
J+1→J
If J>N
Goto 4
int (1+6rand)→K
1+[D](K,1)→[D](K,1)
Goto 3
Lbl 4
Disp [D]
Pause
[D]*(1/N)→[D]
Disp [D]
```

DES-TI-82

Ce programme simule une épreuve aléatoire de N lancers d'un dé cubique dont les faces portent les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6. On a d'abord la liste (verticale) des effectifs suivants les numéros, puis les fréquences, dans la matrice $[D]$.

```
Input "NBRE DE LANCERS",N
Input "NBRE DE SERIES",R
1→S
{6,R}→dim [D]
Fill(0,[D])
Lbl 1
0→J
Lbl 3
J+1→J
If J>N
Goto 4
int (1+6rand)→K
1+[D](K,S)→[D](K,S)
Goto 3
Lbl 4
S+1→S
If S≤R
Goto 1
Disp [D]
Pause
[D]*(1/N)→[D]
[D]
```

DESØSERI-TI-82

Analogue à DES. Ici, on simule P séries de chacune N lancers. Les résultats, d'abord comme effectifs puis comme fréquences, apparaissent dans la matrice $[D]$. On est limité par les dimensions de $[D]$ (nombre de lignes ou de colonnes ≤ 99).

```
Disp "DEGRE"
Input N
Disp "RAC"
Input R
{N+1,1}→dim [A]:{1,N}→dim [B]
Disp "MATCOEF[[,"
Input [A]
[A](1,1)→[B](1,1)
For(I,2,N)
[A](1,I)+R*[B](1,I-1)→[B](1,I)
End
Disp [B]
```

FACTPOLY-TI-82

Ce programme donne le polynôme Q(X) à partir de P(X), connaissant la racine a. P(X) = (X-a) Q(X). Les coefficients successifs des polynômes P(X) et Q(X)) sont entrés ou obtenus comme termes d'une matrice $[\,[\;,\;,\ldots]\,]$. P(X) est dans $[\,A\,]$, Q(X).dans $[\,B\,]$.

```
{1,20}→dim [E]
Fill(0,[E])
Lbl 0
Disp "M"
Input A
1→L
Goto 2
Lbl 1
2→[E](1,L)
1+L→L
A/2→A
If A=1
Goto 9
Lbl 2
If fPart (A/2)=0
Goto 1
3→B
Lbl 3
√A+1→C
Lbl 4
If B≥C
Goto 8
If fPart (A/B)=0
Goto 6
Lbl 5
B+2→B
Goto 4
Lbl 6
If A/B*B-A=0
Goto 7
Goto 5
Lbl 7
B→[E](1,L)
1+L→L
A/B→A
Goto 3
Lbl 8
A→[E](1,L)
Lbl 9
[E]
```

FACTPRE-TI-82

Ce programme donne la décomposition d'un entier naturel M en facteurs premiers, présentés dans la matrice $[\,E\,]$, les facteurs étant répétés, la fin de la décomposition étant signalée par des 0.
Exemple : M = 516 donne $[\,[\,2,2,3,43,\,0,0\ldots]\,]$ pour $516 = 2^2 \times 3 \times 43$. On peut s'en servir pour reconnaître un nombre premier.
$M = 5791$ donne $[\,[\,5791,\,0,0\ldots]\,]$

```
64→dim L1
64→dim L2
64→dim L3
1→T
For(I,1,4,1)
For(J,1,4,1)
For(K,1,4,1)
I→L1(T):J→L2(T):K→L3(T)
1+T→T
End:End:End
Disp L1,L2,L3
Disp "LISTES:STAT EDIT"
```

P3LIST4-TI-82

Ce programme donne les 3-listes d'éléments de $E = \{1,2,3,4\}$; il peut évidemment être modifié. Les 3-listes apparaissent dans les listes L_1, L_2, L_3 du programme STAT Edit.
A utiliser plutôt comme illustration de cours.

```
6→dim L2
6→dim L3
6→dim L1
1→T
For(I,1,3,1)
For(J,1,3,1)
For(K,1,3,1)
If (K=I or K=J or I=J)
Goto 1
I→L1(T):J→L2(T):K→L3(T)
1+T→T
Lbl 1
End:End:End
Disp L1,L2,L3
```

PERMUT3-TI-82

Ce programme peut facilement être utilisé avec la calculatrice rétroprojetable, pour fournir les permutations de l'ensemble $E = \{1,2,3\}$.

On peut évidemment augmenter n, mais si on veut faire apparaître les permutations dans les listes $L_1, L_2, L_3, \ldots L_6$ (pour une bonne lecture) on est limité à $n \leq 4$ (les listes ne dépassent pas 99 éléments). On peut programmer un affichage dans une matrice.

```
Disp "PREM TERM"
1→N
Input A
Lbl 0
If fPart (A/2)≠0
Goto 1
A/2→A
Disp A
N+1→N
Pause
If A=1
Goto 3
Goto 0
Lbl 1
3A+1→A
N+1→N
Disp A
Pause
Goto 0
Lbl 3
Disp "FIN"
Disp N
Stop
```

SUITE421-TI-81-82

Un exemple de programme pour une suite récurrente non définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.On choisit $u_0 \in N^*$

$\forall n$, si u_n pair , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$

si u_n .impair, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

On obtient les u_n jusqu'à $u_n = 1$ et on a le nombre de termes après FIN.

```
Input "A=",A
Input "B=",B
Input "C=",C
B²-4AC→D
If D<0
Goto 2
(-B-√D)/(2A)→X
(-B+√D)/(2A)→Y
Disp X▶Frac
Disp Y▶Frac
Disp "D":Disp D:Stop
Lbl 2
Disp "PAS DE RAC RLL"
Disp "PART REEL"
Disp (-B/(2A)▶Frac
Disp "PART IMAG + OU -"
Disp (√-D/(2A)▶Frac
Disp "-DET",-D
Stop
```

TRINOME-TI-81-82

Donne les racines d'un polynôme du second degré à cœfficients réels.
On peut présenter les racines complexes sous forme de couples.

```
ClrHome
Disp "VAL XI ENL1"
Disp "PROBA EN L2"
Menu("DATA
PLACES","OUI",A,"NON",B)
Lbl A
Goto 1
Lbl B
ClrList L1,L2,L3,L4,L5
Disp "STAT EDIT"
Stop
Lbl 1
L1*L2→L4
L4*L1→L5
sum L2→N
sum L4→A
sum L5→B
Disp "E(X)",A/N
B/N-(A/N)²→V
Disp "V(X)",V
Disp "ECART TYPE",√V
```

VARXALEA-TI-82

Après avoir entré dans L_1 et L_2 respectivement les valeurs x_i et $P(X = x_i)$ on calcule $E(X)$ et σ_X.

```
FnOff :ClrDraw
dim L1→N
L1(1)-1→Xmin
L1(N)+2→Xmax
0→Ymin:1.5→Ymax:1→Xscl:.5→Ysc
l
L2(1)→T
For(I,1,N-1)
Line(L1(I),T,L1(I+1),T)
T+L2(I+1)→T
End
Line(L1(N),1,Xmax,1)
Line(Xmin,0,L1(1),0)
```

VARREPAT-TI-82

Ce programme trace la fonction de répartition F définie par $F(x) = P(X \leq x)$ comme fonction en escalier, en utilisant les fonctions DRAW. On a entré au préalable les x_i dans L_1 et $P(X = x_i)$ dans L_2.

```
Disp "A"
Input A
Disp "B"
Input B
Disp "M"
Input M
A→X
Y1→I
(B-A)/M→D
M/2→O
Lbl 2
X+D→X
Y1→Y
I+4*Y→I
X+D→X
Y1→Y
I+2Y→I
O-1→O
If O≠0
Goto 2
B→X
Y1→Y
I-Y→I
D*I/3→S
Disp S
```

INTEGRALE-SIMPSON-TI-81

Ce programme permet de calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,dx$, l'intervalle $[a,b]$ est divisé en M intervalles égaux et sur chacun de ces sous-intervalles, on remplace f par une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2 telle que la courbe représentative passe par les points de coordonnées (a , f(a)) , (b , f(b)) $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$.

(Pour des calculs classiques on pourra choisir M = 20, par exemple, pour avoir rapidement une valeur approchée). On a stocké $Y_1 = f(x)$.

FIBONACCI-TI-81-82

La TI 82 permet d'obtenir sans programme les termes de la suite définie par u_0, u_1, $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ $\left(n \in N^*\right)$.

Le programme (TI 81) donne les termes de la suite de Fibonacci u_0, u_1, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ $\left(n \in N^*\right)$.On peut choisir autrement u_0, et u_1.

```
Disp "U0"
Input V
Disp "U1"
Input U
Disp "NBRE TERM"
Input N
1→I
Lbl 1
Disp "IND,U="
Disp I+1
U→T
U+V→U
Disp U
Pause
T→V
I+1→I
If I<N
Goto 1
Disp "FIN"
```

KENO -TI-82

Le programme simule le tirage du Keno : 20 numéros différents tirés parmi l'ensemble des 70 premiers entiers non nuls. La liste ordonnée de ces 20 numéros gagnants apparaît dans la liste L_1 (appelée, une fois le programme exécuté, par STAT 1 Edit). En outre, la variable W fournit le nombre de fois où le tirage au hasard d'un entier entre 1 et 70 a donné un numéro déjà obtenu dans la liste (ce qui, dans la simulation, oblige à recommencer le tirage).

```
20→dim L1
Fill(0,L1)
0→W
For(I,1,20)
Lbl 1
int (1+70*rand)→K:1→T
For(J,1,I)
If K-L1(J)=0
Then
0→T
1+W→W
End
End
If T=0
Goto 1
K→L1(I)
End
SortA(L1)
Disp L1
Disp "STAT EDIT"
```

LOTO-TI-81-82

Le programme simule le tirage de 6 numéros parmi $\{1,2,\ldots 49\}$, complétés par un 7ième, dit numéro complémentaire. Les 6 numéros apparaissent classés dans la liste L_1, le numéro complémentaire étant le 7ième de la liste. (Appeler la liste, une fois le programme exécuté, par STAT 1 Edit).

```
7→dim L1
Fill(0,L1)
For(I,1,7)
Lbl 1
int (1+49rand)→K
1→A
For(J,1,I)
A*(K-L1(J)→A
End
If A=0
Goto 1
K→L1(I)
End
L1(7)→W
50→L1(7)
SortA(L1)
W→L1(7)
Disp "STAT LIST"
```

```
ClrList L1,L2,L3,L4,L5
Disp "XI EN{.,.} "
Input L1
Disp "PROB I {.,.}"
Input L2
dim L1→L4 : dim L1→L5
L1*L2→L4
L4*L1→L5
sum L2→N
sum L4→A
sum L5→B
Disp "E(X)",A/N
B/N-(A/N)²→V
Disp "V(X)",V
Disp "ECART TYPE",√V
```

VARXSTAT TI-82

Les valeurs x_i de la variable aléatoire sont entrés sans la liste L_1, les probabilités correspondantes $P([X = x_i])$ dans la liste L_2.

```
"DES"
1→K
Lbl 1:0→Z[K]:Isz K
K≤6⇨Goto 1
0→I
"NBRE LANCERS"?→N
Lbl 2:Intg (1+6×Ran#)→K
1+Z[K]→Z[K]
Isz I
I<N⇨Goto 2
1→K
Lbl 3
Z[K]÷N◢
Isz K
K≤6⇨Goto 3
"FIN"
```

DES - CASIO

Le programme simule N lancers d'un dé cubique usuel. Il donne les fréquences d'apparition des numéros de 1 à 6.

Il faut au préalable augmenter le nombre de mémoires par Defm.

```
"EQUA TRINO"
"A="?→A:"B="?→B:"C="?→C
B²-4AC→D
D<0⇨Goto 1
"X1":(-B-√D)⌟(2A)◢
"X2":(-B+√D)⌟(2A)◢
Goto 2
Lbl 1
"PAS REELLES"
"PART REEL":-B⌟(2A)◢
"PART IMAG+-":√-D÷(2A)◢
Lbl 2
"FIN"
```

EQUA TRINO - CASIO 8800

Le programme fournit les solutions (exactes pour des fractions simples) d'une équation du 2ème degré à coefficients réels, éventuellement imaginaires conjuguées.

```
"FACT POLYNOME"
"DEGRE"?→N:N→L
Lbl 1
"COEFF DEG":L◢
?→A[L]
L-1→L
L≥0⇨Goto 1
"RACINE"?→M
0→P[N]
N→L
Lbl 2
"TERM DEG":L-1◢
A[L]+MP[L]→P[L-1]◢
L-1→L
L≥1⇨Goto 2
-A[0]÷M-P[0]=0⇨Goto 3
"ERREUR"
Goto 4
Lbl 3
"CORRECT"
Lbl 4
```

FACT POLYNOME - CASIO

Le programme donne les coefficients du polynôme Q(x) pour P(x) de degré N, connaissant une racine M, P(x) = (x-M) Q(x).
On entre d'abord les coefficients de P(x).
Il vérifie à la fin que M est bien racine de P(x).

```
"EQ DICH f1"
"XMINI"?→A
"XMAXI"?→B
"Y CHERCHE"?→F
"PRECISION"?→E
A→X:f1→R
B→X:f1→S
R<S⇒Goto 1
A→T:B→A:T→B
Lbl 1
(A+B)÷2→X
f1→P
P≤F⇒Goto 3
X→B
Goto 4
Lbl 3
X→A
Lbl 4
Abs (A-B)≥E⇒Goto 1
"X1":A◢
"X2":B◢
"SOLUTION ENCADREE PAR X1 X2"
```

EQ DICHf_1 - CASIO

On stocke d'abord $f_1(x)$ par F - MEM et on cherche une solution de $f_1(x) = F$ dans un intervalle [XMINI , XMAXI] où f_1 est monotone.
On demande un encadrement d'amplitude « PRECISION ».

```
"PILE FACE"
0→Z[1]:0→Z[2]
"NBR LANCERS"?→N
0→I
Lbl 2
Intg (1+2×Ran#)→K
1+Z[K]→Z[K]
Isz I
I<N⇒Goto 2
"PILE":Z[1]÷N◢
"FACE":Z[2]÷N◢
"FIN"
```

PILE FACE - CASIO

Le programme simule N lancers d'une pièce donnant Pile ou Face.
Il fournit la fréquence des sorties.

```
"TRIAN PASCAL"
Lbl 1
"N"?→N
-1→P
Lbl 2
P+1→P
P>N⇒Goto 1
N!÷P!(N-P)!◢
Goto 2
```

TRIAN PASCAL - CASIO

Le programme fournit successivement les coefficients C_N^P pour N choisi.
Il enchaîne sur une autre ligne du triangle de Pascal.

```
"LIMf1DROITE"
"XINIT"?→X
"X FINAL"?→Z
"PAS"?→P
Lbl 1
"X":X◢
f1→Y
"Y":Y◢
X−P→X
X≥Z⇨Goto 1
```

LIMf₁ DROITE - CASIO 8800

Le programme donne une liste de valeurs $f_1(\text{XINIT} - P)$ pour $f_1(x)$ stocké en [F] - MEM. La fonction peut ne pas être définie pour XFINAL.
Programme utilisable pour limite en $-\infty$.

```
"LIMf1GAUCHE"
"XINIT"?→X
"X FINAL"?→Z
"PAS"?→P
Lbl 1
"X":X◢
f1→Y
"Y":Y◢
X+P→X
X≤Z⇨Goto 1
```

LIMf₁ GAUCHE - CASIO 8800

Le programme donne une liste de valeurs $f_1(\text{XINIT} + P)$ pour $f_1(x)$ stocké en [F] - MEM. La fonction peut ne pas être définie pour XFINAL.
Programme utilisable pour limite en $+\infty$.

```
"INT SIMS f1"
"A"?→A:"B"?→B:"2M"?→M
A→X:Prog 0 : Y→I
(B−A)÷M→D
M÷2→O
Lbl 2
X+D→X
Prog 0:I+Y×4→I
X+D→X
Prog 0:I+Y×2→I
O−1→O:O≠0⇨Goto 2
B→X:Prog 0
I−Y→I:D×I÷3◢
"FIN"
```

INT SIMS - CASIO - 7000-8000

On obtient une valeur approchée de $\int_a^b f_1(x)dx$, $[a,b]$ étant divisé en M intervalles égaux (M pair).

Prog 0 : f(x) → Y

```
"FIBONACCI"
"U0"?→V:"U1"?→U
"NBR TERM"?→N
1→I
Lbl 1
"IND":I+1◢
U→T
U+V→U◢
T→V
Isz I
I<N⇨Goto 1
"FIN"
```

FIBONACCI-CASIO

La suite (traditionnelle) dite de Fibonacci est définie par une récurrence à 2 indices $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ $\left(n \in N^*\right)$ et $u_0=0$, $u_1=1$. Le programme donne la liste des termes jusqu'à une valeur choisie de n.
On peut généraliser en prenant d'autres valeurs pour u_0 et u_1.
On pourrait facilement définir une suite par une formule linéaire en u_n et u_{n-1} :
$u_{n+1} = Au_n + Bu_{n-1}$ soit AU+BV→ U◢ à la place de U+V → U◢.

Adresse postale :
I.R.E.M
Université Paris 7
Denis Diderot
Case 7018
2, place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05

Février 2000

Tel : 01 44 27 53 83
01 44 27 53 84
01 44 27 81 85
Télécopie : 01 44 27 56 08

Les brochures peuvent être achetées sur place :
IREM 175, rue du Chevaleret
75013 PARIS (6E 12)

Nous vous indiquons le prix des brochures sans le port, le poids et le tarif postal pour calculer le coût du port

Poids jusqu'à	Ordinaires
20 g	3,00 F
50 g	4,50 F
100 g	6,70 F
250 g	11,50 F
500 g	16,00 F
1 000 g	21,00 F
2 000 g	28,00 F
3 000 g	33,00 F

PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M PARIS 7

BROCHURES

Nº	Titre	Prix	Poids
4	Groupe Français-Mathématiques (Tome 1).................................	56F	490 gr
7	Pavages et coloriages.................................	27F	170 gr
15	Groupe Français-Mathématiques (Tome 2).................................	52F	440 gr
16	Les jeux du "Club des Cordelières".................................	58F	420 gr
27	Nombre d'or.................................	74F	640 gr
38	Conceptions du cercle chez les élèves de l'école élémentaire.................................	50F	430 gr
48	Mesure des longueurs et des aires.................................	40F	340 gr
59	"Et si la descriptive servait à quelque chose" (2 tomes).	35F	140 gr
61	Mathématiques : Approche par des textes historiques	50F	450 gr
62	Liaison Ecole-Collège, Nombres décimaux.................................	59F	520 gr
64	Une année de Géométrie en Terminale C.................................	29F	230 gr
68	Problèmes Ruraux - de marins - d'argent - de durée - de grandeurs - de graduations - farfelus - de certificat d'études.................................	49F	440 gr
69	Situations d'apprentissage en géométrie 6ème - 5ème.................................	50F	440 gr
71	Activités géométriques en Terminale C	24F	180 gr
72	De la géométie analytique à l'algèbre linéaire	24F	190 gr
73	Angles de couples et rotations.................................	32F	280 gr
74	Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire.................................	45F	380 gr
75	La géometrie au lycée.................................	49F	420 gr
76	Questionnaire de travail sur les différentielles.................................	31F	240 gr
77	Une recherche menée dans le cadre du projet Euclide.................................	49F	410 gr
78	Calcul mental.................................	43F	400 gr
79	Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 2 -	60F	530 gr
80	Travaux d'étudiants en temps non limité (niveau licence, présentés par A. Robert)	55F	530 gr
81	La pratique de mémoires étudiants en Deug SSM première année L'expérience de Lille 1.................................	48F	420 gr
82	Les mythes historiques, sociaux et culturels des mathématiques : leur impact sur l'éducation.................................	31F	270 gr
83	Recherche de spécificités dans l'enseignement à distance des mathématiques en licence-maîtrise à l'université P. et Marie Curie (Paris)..	25F	210 gr
84	Modules - TD en Seconde Leur apport dans l'apprentissage des Mathématiques.................................	42F	360 gr
85	La calculatrice en 1ère et Terminale Scientifique	38F	310 gr
86	La calculatrice au lycée.................................	28F	220 gr
87	Pourquoi pas des mathématiques à l'école maternelle ?.................................	24F	180 gr
88	Comment élaborer des énoncés en mathématiques ? L'exemple d'un enseignement de licence de mathématiques sur ce thème	41F	365 gr

LES CAHIERS DE DIDACTIQUE

Nº	Titre	Auteur(s)	Prix	Poids
2	Quelques éléments de théorie piagétienne et.... didactique des Mathématiques.................................	J. Rogalski	6F	90 gr
3	Rapport enseignement apprentissage : Dialectique outil-objet, jeux de cadre.................................	R. Douady	6F	90 gr
6	De la didactique des Mathématiques à l'heure actuelle.................................	R. Douady	6F	90 gr
8	Modélisation et reproductibilité en didactique des Mathématiques.................................	M. Artigue	11F	130 gr
19	Introduction de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels.............	D. Butlen	28F	290 gr
2O	A propos de l'enseignement de la proportion-nalité.................................	M. Pezard	4F	70 gr
21	Les réels : Quels modèles en ont les élèves ?	J. Robinet	13F	150 gr
22	Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année.................................	D. Grenier, M. Legrand, F. Richard	24F	260 gr

24	Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège............	M.J Perrin	15F	180 gr
26	L'histoire de l'enseignement des Mathématique comme sujet de recherches en didactique des Mathématiques..	G. Schubring	9F	130 gr
34	Quelques réflexions sur l'utilisation des jeux en classe de mathématique..	J. Robinet	3F	60 gr
36	Eléments de bibliographie sur la relation entre origine sociale et réussite ou échec scolaires.........................	M.J Perrin-Glorian	17F	200 gr
37	Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane	R. Douady M.J Perrin-Glorian	14F	170 gr
38	Enseigner des méthodes..	A. Robert J. Rogalski R. Samurçay	8F	110 gr
39	Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture Le cas de "La somme des angles d'un triangle..............	N. Balacheff	10F	130 gr
41	Apprendre des Mathématiques et comment apprendre des mathématiques : Premiers éléments pour une étude des représentations des élèves de l'enseignement post-obligatoire de l'accès au savoir mathématique..........	E. Bautier A. Robert	13F	170 gr
47	De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement postobligatoire (EPO)...	A. Robert	8F	120 gr
48	Représentation plane des figures de l'espace................	J. Boudarel F. Colmez B. Parzysz	8F	120 gr
50	Une introduction à la didactique des Mathématiques.......	A. Robert	17F	210 gr
51	Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels...	A. Robert	23F	260 gr
52	Un aperçu des travaux de VYGOTSKI . LEONTIEV et BRUNER, Disciples de VYGOTSKY....	F. Boschet	17F	200 gr

CAHIERS DE DIDIREM

1	Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement	A. Robert J. Robinet	20F	160 gr
2	La genèse du calcul algébrique (Une esquisse)	J. Robinet	14F	100 gr
3	Epistémologie et didactique	M. Artigue	16F	120 gr
4	Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels	A. Robert J. Robinet	28F	240 gr
5	Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficulté	M.J Perrin-Glorian D. Butlen M.Lagrange	21F	170 gr
6	Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A (*) en algèbre linéaire. (*) Premier cycle scientifique des universités françaises	J.L Dorier C. Lavergne	48F	420 gr
7	Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire	J.L Dorier	35F	290 gr
8	Innovation pédagogique et représentations des étudiants Présentation et analyse des résultats du dépouillement d'un questionnaire sur l'enseignement des mathématiques en DEUG SSM Première année	P. Jarraud	25F	200 gr
9	Un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie - licence en formation continuée)	A. Robert	36F	290 gr
10	Analyse du discours des enseignants : A) Apports de 2 ouvrages récents de linguistique par C.M Chiocca B) Méthode de BRONCKART et références bibliographiques complémentaires		19F	150 gr
11	Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année	M. Rogalski	27F	230 gr
12	Le pourquoi et le comment d'une ingénierie. (La convergence uniforme)	J. Robinet	15F	120 gr
13	Une expérience d'enseignement de mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté	D. Butlen M. Pezard	29F	250 gr
14	Illustrer l'aspect unficateur et simplificateur de l'algèbre linéaire	J.L Dorier	21F	170 gr

N°	Titre	Auteur(s)	Prix	Poids
15	Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes : "quelques commentaires épistémologiques et didactiques"	M.Artigue A.Deledicq	30F	250 gr
16	Analyse du discours des enseignants			
	A) Etude comparée des discours de deux enseignants de mathématiques pendant une même leçon (en 2d).	E. Josse		
	B) Une méthode d'analyse de discours d'enseignant en classe de mathématiques.	C.M. Chiocca E. Josse A. Robert	31F	270 gr
17	Télé enseignement universitaire Les mathématiques dans une section de Deug SSM première année.	C. Cazes	22F	180 gr
18	Les problèmes didactiques de l'enseignement des mathématiques dans l'association AUXILIA	F. Stamon Millet	19F	150 gr
191	L'ingénierie didactique Un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage.	R. Douady	22F	180 gr
20	"Les oeufs" Entretiens sur la modélisation algébrique en classe de seconde.	E. Hébert	44F	400 gr
21	Prise en compte du méta en didactique des Mathématiques	A. Robert J. Robinet	27F	230 gr
22	Représentations des professeurs de mathématiques et des élèves de terminales des lycées de Conakry sur les mathématiques et leur enseignement	A. Tidjane Diallo	49F	440 gr
231	Changements de cadres à partir des surfaces minimales.	A. et R. Douady	20F	230 gr
Numéro Spécial n° 2 :	Que faut-il savoir en mathématiques en fin de troisième pour "réussir sa seconde" ?	E. Josse	33F	270 gr
25	A propos de l'utilisation des calculatrices au lycée	M. Lattuati I. S. Rodrigues	18F	120 gr
Numéro spécial n° 3 :	Une recherche sur le logiciel Dérive Rapport	Equipe DIDIREM	88F	780 gr
26	Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques. Un essai de didactique professionnelle	A. Robert	20F	140 gr

N°	Titre	Auteur(s)	Prix	Poids
27	Rapports entre habileté calculatoire et "prise de sens" dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire.	M. Pezard D. Butlen	27F	200 gr
28	Comment, en didactique des mathématiques, prendre en compte les pratiques effectives, en classe, des enseignants de mathématiques du lycée ? Une approche à travers des analyses de pratiques de quelques enseignants de mathématiques dans des séances d'introduction aux vecteurs en classe de seconde	C. Hache A. Robert	41F	340 gr
29	Pratiques des élèves et des enseignants des mathématiques Rapport de recherche Rôle des gestes de clôture dans l'enseignement des mathématiques Institutionnalisation en classe de seconde : valeur absolue, Intervalles, encadrements, approximations première partie : choix globaux des enseignants et résultats des élèves	A. et R. Noirfalise M.J Perrin	56F	464 gr
30	DEA de didactique des disciplines Didactique des mathématiques Le tableau noir : un outil pour la classe de mathématiques	E. Roditi	42F	350 gr
31	DEA de didactique des disciplines Didactique des mathématiques L'entrée dans le monde de pensée fonctionnel en classe de seconde	D. Pihoue	44F	390 gr
	Numéro spécial n° 4 Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée	M. Artigue B. Defouad M. Duperier G. Juge J.B Lagrange	114F	1026 gr
32	DEA de didactique des disciplines Didactique des mathématiques Comparaison du discours d'un même enseignant de Mathématiques, effectuant le même cours devant trois classes de sixième d'un même collège	P. Chaussecourte	32F	247 gr
33	Les pratiques des enseignants de mathématiques en classe de seconde Rapport sur le projet de recherche 97-98 (appel d'offres de l'IUFM de Versailles) Avec la participation de P. Beziaud, F. Bourhis-Lainé, D. Dumortier, A. Robert et C. Robert		20 F	134 gr
34	Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels		21 F	122 gr

DOCUMENT DE TRAVAIL POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

1	Formation en didactique des mathématiques, une expérience en CPR interne	A. Robert	18F	140 gr
2	Formation des moniteurs (Mathématiques)	D. Perrin et A. Robert	13F	100 gr
3	Formation professionnelle initiale des enseignants du second degré en mathématiques Actes de la journée de réflexion organisée le 06/04/1991 à Paris par la Commission Inter-IREM Université et l'équipe DIDIREM		22F	190 gr
4	Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs instituteurs-maîtres-formateurs	D. Butlen et M. Pezard	31F	260 gr
5	Formation à l'enseignement des mathématiques : exemples de pratiques effectives et éléments de réflexion d'un point de vue didactique I Exemples de différentes stratégies de formation (R. Douady et A. robert) II Questions sur la formation, sur l'observation en formation (A. Robert) III Questions sur la formation en didactique des mathématiques (M. Artigue, M. Henry, D. Butlen)		21F	160 gr
6	Une séquence d'enseignement au lycée : Les angles en seconde	C. Jeulin D. Sperandio R. Proteau	13F	90 gr
7	L'isogonologie Un exemple de l'utilisation de l'algèbre linéaire en géométrie.	F. Rideau	14F	90 gr
8	Quelle didactique des mathématiques en formation des maîtres : quelques questions posées par des expériences d'enseignement en formation initiale et continue d'instituteurs, des professeurs de collèges et de lycées.	D. Butlen J. Bolon	27F	220 gr
9	Enseigner la didactique des mathématiques aux futurs professeurs d'école.	D. Butlen M.L Peltier	20F	150 gr
10	IUFM - An 3 * une réflexion sur la formation des PLC2 * une analyse des modules communs mathématiques à l'IUFM de Versailles	A. Robert	21F	140 gr

11	IUFM - An 3 Diversités et points communs des formations des PLC2 en mathématiques en IUFM - comparaison sur 18 IUFM L'avis des stagiaires (une enquête auprès de néo-certifiés et certifiés de l'an 1)	J. Penninckx	26F	190 gr
12	IUFM - An 3 L'observation de classes Réflexion sur la formation à l'observation de classes des stagiaires PLC2 de Mathématiques à l'IUFM de Rouen	E. Hébert P. Tavignot	26F	180 gr
13	IUFM Rouen Maths 2ème année Evaluation 1993/94	J. Borréani E. Hébert G. Le Hir C. Castela P. Tavignot	24F	190 gr
14	Professeurs de mathématiques de collège et lycée : formation professionnelle initiale, ou comment désaltérer qui n'a pas soif ?	A. Robert	22F	156 gr
15	La formation professionnelle initiale des futurs enseignants de mathématiques : exemples de séances organisées à l'IUFM pour les stagiaires de deuxième année (PLC2)	D. Dumortier, M. Lattuati M. Ponticq, C. Perdon, J. Poirier, A. Robert, C. Robert, et E. Roditi	30F	200 gr
16	Formation professionnelle initiale en mathématiques : Tuteurs et stagiaires en collège et lycée	M.C. Audouin	21F	140 gr
17	La racine carrée en troisième Etude d'une activité	E. Roditi	20F	140 gr

BROCHURE THEMATIQUE

1	Revue de documents à propos des calculatrices dans l'enseignement mathématique au collège et au lycée (IUFM Grenoble mathématiques)	14F	90 gr
2	Publications IREM. APMEP. ESM ... Sur l'enseignement des probabilités et des statistiques au collège et au lycée	16F	110 gr
3	Sommaires des bulletins de liaison des IREM	36F	290 gr
4	Répertoire des thèses autour de la didactique des mathématiques	16F	110 gr
5	Informations générales sur le CAPES et l'AGREGATION de mathématiques	50F	480 gr

DIVERS

Questionnaires de travail	E. Saltiel L. Viennot	29F	310 gr
Systèmes différentiels Etude graphique Ed. Cedic	M. Artigue V. Gautheron	50F	360 gr
Mécanique et énergie pour débutants	L. Viennot	40F	330 gr
Les cinq polyèdres réguliers de R^3 et leurs groupes	J.M Arnaudiès	34F	270 gr
Le calcul des variations	M. Gréhant	21F	150 gr
Rapporteurs (plastique)		6F	

Le groupe M : A.T.H
(Mathématiques : Approche par les Textes Historiques)

vous propose :

1. La revue **Mnémosyne** pour échanger expériences et réflexion à propos de l'histoire et de l'enseignement des mathématiques.

Vous trouverez dans Mnémosyne

- Un article de réflexion sur un thème ou un moment de l'histoire des mathématiques. Les numéros reprennent, entre autres, les exposés du séminaire animé par Jean Luc Verley et du séminaire de l'Union des professeurs de Spéciales, animé par Michel Serfati.

- De "bonnes vieilles pages", extraits d'ouvrages anciens peu répandus, des textes inédits ou difficiles à trouver, des traductions inédites...

- "Les contes du Lundi", qui donneront un aperçu des exposés et des échanges qui ont lieu lors de réunions du groupe M : A.T.H, ouvertes à tous, rassemblant de façon régulière, un lundi par mois à l'IREM, une quinzaine d'enseignants partageant notre passion.

- Des exemples d'activités avec les élèves, des documents divers pour les classes.
- Des comptes rendus de lectures, de conférences...
- Un calendrier des diverses rencontres et manifestations parisiennes et nationales sur l'histoire des mathématiques.

numéro 1 : La démonstration par exhaustion chez les grecs et les arabes	26F	200 gr
numéro 2 : La querelle entre Descartes et Fermat	30F	210 gr
numéro 3 : Fragments d'une étude des systèmes linéaires	30F	220 gr
numéro 4-5 : L'élaboration du calcul des variations et ses applications à la dynamique	40F	300 gr
numéro 6 : Leibniz et l'Ecole continentale	30F	220 gr
numéro 7 : Autour du théorème de Fermat. C. Goldstein	33F	230 gr
numéro 8 : Isaac Newton. Détermination de tangentes à des courbes à l'aide de la méthode de fluxions	33F	250 gr
numéro 9 : Desargues et Pappus. R. Tossut	33F	240 gr
numéro 10 : Le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries Anne Michel Pajus	33F	260 gr

numéro 11 :
Des cartes-portulants à la formule d'Eward Wright :
l'histoire des cartes à "rumbs"
Marie-Thérèse Gambin — 33F — 255 gr

numéro 12 :
Histoire de quelques projections cartographiques
Marie Benedittini — 33F — 255 gr

numéro 13 :
Histoire et origine du calcul différentiel — 33F — 210 gr

numéro 14 :
La méthode des pesées chez Archimède
Michèle Bathier-Fauvet — 33F — 214 gr

numéro 15 :
Recherche de deux grandeurs connaissant leur produit
et leur somme ou leur différence — 33 F — 217 gr

Mnémosyne : Numéro spécial
N° 1 : Histoires de Pyramides (M. Grégoire) — 46F — 380 gr

2. Les brochures (déjà citées en 1ère page)

n° 61 : Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 1 -....... 50 F — 450 gr

n° 79 : Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 2 - .... 60 F — 530 gr

3. La Reproduction de textes anciens

(Ancienne série) :

I Disme (Simon Stevin)........ 14 F — 80 gr

II Géométrie élémentaire (Félix Klein)........ 25F — 180 gr

III Dictionnaire Mathématiques (1er fascicule) (M. Ozanam)........ 31F — 250 gr

IV Dictionnaire Mathématique (2ème fascicule) (M. Ozanam)........ 32F — 250 gr

(Nouvelle série) :

N° 1 : Histoire des recherches sur la quadrature du cercle
(J.E Montucla)........ 38F — 340 gr

N° 2 : Elémens du calcul des probabilités
(Marquis de Condorcet)........ 28F — 240 gr

N° 3 : Traité des Indivisibles
(Gilles-Personne de Roberval)........ 32F — 270 gr

N° 4 : Les Porismes d'Euclide
(Michel Chasles)........ 35F — 300 gr

N° 5 : Sur la théorie des Ensembles
(Georg Cantor)........ 52F — 450 gr

N° 6 : Traité des sections coniques
(M. de La Chapelle)........ 42F — 450 gr

N° 7 : Traité élémentaire de calcul des probabilités
(S-F Lacroix)........ 37F — 300 gr

N° 8 : Elémens d'algèbre
Alexis-Claude Clairaut........ 41F — 350 gr

N° 9 : Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal
Jean-Frédéric Frénet........ 44F — 384 gr

N° 10 Problèmes pour les arpenteurs
Lorenzo Mascheroni........ 21F — 156 gr

N° 11 Méthode des moindres carrés
Carl-Friedrich Gauss........ 36F — 295 gr

N° 12 Traité du calcul différentiel et du calcul intégral
Sylvestre-François Lacroix........ 70 F — 600 gr

N° 13 Géométrie ou de la mesure de l'étendue........ 52 F — 395 gr

N°14 Algèbre J. Peletier du Mans	36 F	291 gr

COPIRELEM

Actes du XVIIème colloque des Professeurs d'Ecole Normale (Paris - Mai 1990)	61F	650 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome I)	56F	470 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome II)	55F	630 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome III)	45F	360 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome IV)	67F	612 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome V)	68F	538 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome VI)	96F	870 gr
Second concours interne de recrutement des professeurs d'école Choix de sujets 92-93-94-95 Les sujets du concours 1996 19 académies	61F	500 gr
Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole Mathématiques. Annales 97 (21 sujets et leurs corrigés)	60 F 80 F port compris	810 gr
Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole Mathématiques. Annales 98 (21 sujets et leurs corrigés)	110 F 131 F port compris	810 gr
Actes : XXIVEME colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres	70 F	610 gr
Concours externe de Recrutement des Professeurs d'Ecole Document formateur	27 F	182 gr
Les cahiers du formateur Tome 1		
Les cahiers du formateur Tome 2	57 F	446 gr
Documents pour la formation du professeur d'école en didactique des Mathématiques – Séminaire de Tarbes du 17 et 19 novembre 1998		

BROCHURES INTER-I.R.E.M

N° 3 : Quelles activités pour quel apprentissage	42F	450 gr
Actes du colloque Inter-IREM Histoire et Epistemologie des Mathématiques	33F	610 gr
Budapest : Pour une perspective historique dans l'enseignement des Mathématiques	65F	440 gr
Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A - Première Année Principes et réalisations	99F	850 gr
Quelques supports pour des activités dans le cadre des enseignements modulaires en seconde (Réseau national des I.R.E.M)	24F	180 gr
Catalogue des publications des IREM de 1988 à 1991	50F	280 gr
Catalogue des publications des IREM de 1991 à 1994	40F	500 gr
Histoire d'infini (Actes du 9ème colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques) (Landerneau, 22-23 mai 1992)	160F	790 gr
Apports de l'outil informatique à l'enseignement de la géométrie	60F	365 gr
L'Enseignement des Mathématiques : des Repères entre Savoirs, Programmes et Pratiques	60F	410 gr
Enseigner les probabilités au lycée Commission Inter-IREM Statistiques et probabilités	100 F	788 gr

BULLETINS INTER-I.R.E.M

Activités en Première	35F	310 gr
Images et Maths	47F	410 gr
Liaison collège-seconde (1989-1990)	50F	250 gr
Des chiffres et des lettres au collège 1991/92	50F	360 gr
Maths en seconde : énoncés et scénarios	50F	330 gr
Module en seconde	25F	150 gr
Autour de Thalès	60F	350 gr
Des Mathématiques en sixième	50F	262 gr

Des Mathématiques au Cycle central.. 60 F 327 gr

THESES

Aline Robert :
L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques
dans l'enseignement supérieur.
Divers articles de Mathématiques.. 1O0F 1410 gr

Jacqueline Robinet :
Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur.................................. 70F 770 gr

Michèle Artigue :
Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques .... 68F 780 gr
(en réd.) 37F 400 gr

Régine Douady :
Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement
des Mathématiques
- Une réalisation dans tout le cursus primaire... 120F 690 gr

Denis Butlen :
Apport de l'ordinateur à l'apprentissage des écritures multiplicatives
au cours élémentaire.. 40F 330 gr

Monique Pezard :
Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs...... 50F 460 gr

Françoise Tréhard :
Logiciels pouvant impliquer des activités mathématiques à l'école
élémentaire : typologie et enjeux didactiques.. 60F 690 gr

Bernard Parzysz :
Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace
au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir /savoir............................ 90F 850 gr

Isabelle Tenaud :
Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C :
enseignement de méthode et travail en petits groupes .... 130F 1300 gr

Marie-Jeanne Perrin-Glorian :
Aires de surfaces planes et nombres décimaux.
Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème .... 160F 1390 gr

Antoine Dagher :
Environnement Informatique et apprentissage de l'articulation entre
registres graphique et algébrique de représentation des fonctions.................... 88F 970 gr

Alain Kuzniak :
Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les
formateurs de maîtres du premier degré... 98F 920 gr

Maha Abboud Blanchard
L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire
des mathématiques : symptômes d'un malaise.
Un exemple : l'enseignement de la symétrie orthogonale au collège................. 96F 890 gr

Catherine Houdement
Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques :
programmation et stratégies... 102F 930 gr

Christiane Larere
Construction et appropriation de connaissances mathématiques par trois enfants infirmes moteurs cérébraux handicapés de la parole.......................... 80F 720 gr

Marie-Lise Peltier Barbier
La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école :
"entre conjoncture et éternité"
Etude des sujets de concours de recrutement et contribution à la recherche des effets de la formation sur les professeurs stagiaires............................. 100F 924 gr

Brigitte Grugeon
Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement :
BEP et Première G.. 189F 1600 gr

Jeanne Bolon
Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ?
Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège................. 94F 834 gr

Marie-françoise Jozeau
Géodésie au XIXème Siècle
De l'hégémonie française à l'hégémonie allemande
Regards belges
Compensation et méthode des moindres carrés....................................... 162F 1648 gr

Marlène Alves Dias
Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.. 148F 1322 gr

André Pressiat
Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison "points-vecteurs"..................141F 1236 gr

TITRE : La calculatrice en 1S et TS.

AUTEURS : C.Jeulin, R.Proteau, D.Sperandio

DATE : Mai 1995

RESUME :

Emploi des calculatrices pour introduire les notions nouvelles. Comment les utiliser pour obtenir une meilleur compréhension du cours de mathématiques. Présentation détaillée de séquences d'enseignement : limites, dérivation, suites, probabilités...

MOTS-CLES :

Calculatrices
Mathématiques

Editeur : IREM
Directeur Responsable de la publication : R. DOUADY
Dépôt légal : Mai 1995
ISBN : 2-86612-071-X
IREM Université Paris 7 Denis Diderot
Tour 56/55 - 3ème étage, Case 7018
2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05