Hermite et la transcendance de e.
Histoire d'un théorème.

Compte rendu de la conférence de Michel SERFATI
au Séminaire UPS du 7 avril 1993 [1].

Pour des questions de doctrine, Descartes et les cartésiens ne s' étaient guère intéressés aux questions numériques, et moins encore au statut des nombres des divers types. LEIBNIZ au contraire a le premier introduit le terme de *transcendant* dans divers contextes mathématiques : il l' a appliqué en effet aux nombres, aux courbes et aux équations. La notion de transcendance au sens mathématique a en fait été pour Leibniz un élement stratégique essentiel, destiné à affirmer face à DESCARTES et NEWTON la nouveauté et la singularité de sa position scientifique. On observe d'abord que pour la première fois dans l'Histoire des Mathématiques, LEIBNIZ a proposé (dans les*Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain*) une description générale de toutes les catégories de nombres, très proche de la représentation moderne que nous avons aujourd'hui du corps des nombres réels, ou encore de la droite numérique. On ne trouve cependant chez lui aucune définition véritable du concept de nombre transcendant dont il suggère seulement la notion sur des exemples d'exposants irrationnnels, comme $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, ou variables, comme x^y :
ce dernier exemple (extrait d'une lettre à WALLIS) constitue le paradigme originel de la transcendance chez LEIBNIZ, en même temps que l'origine du terme : l'exposant y " transcende " en effet tout degré fixé.

Après LEIBNIZ, le XVIII° siècle mathématique sera le temps des premières démonstrations d'irrationalité des nombres usuels de l'analyse : e, e^V et tg V (pour V rationnel), π, et π^2, par EULER (1737 - 1748), LAMBERT (1761), et LEGENDRE (1795). La preuve par LAMBERT de l'irrationalité de π, au moyen du développement en fraction continue généralisée de tg V, marque ici un tournant dans les méthodes. Dans un texte célèbre (*Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques*) LAMBERT démontre que si V est rationnel , tg V ne peut l'être, et réciproquement . Comme $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$, alors π est irrationnel.

[1] Sur les questions de transcendance et de quadrature du cercle de 1675 à 1900 , voir : *Quadrature du Cercle , fractions continues et autres contes* . M. Serfati . . Editions de l'Association des Professeurs de Mathématiques . Paris . 1993 .

Le XVIII° siècle est aussi le temps des conjectures de transcendance : les mêmes auteurs ont eu en effet le sentiment que ces nombres (e et π) dont ils venaient de démontrer l'irrationalité, étaient cependant plus inaccessibles encore, et, reprenant alors la terminologie leibnizienne, qu'ils sont *transcendants* , un concept qu' EULER et LAMBERT prendront cependant avec deux acceptions distinctes : pour EULER, ce sont implicitement des quantités inexprimables par radicaux ; c'est LAMBERT qui a donné la définition explicite, moderne et définitive : est transcendant tout nombre qui n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers.

Jusqu'au milieu du XIX° siècle cependant et au théorème de Liouville (1844-1851), aucun résultat ne viendra apporter la preuve de l'existence d'au moins un nombre transcendant au sens de LAMBERT. LIOUVILLE remarque alors que, d'une certaine façon, les nombres algébriques sont "mal entourés " par les rationnels (*Sur des classes très étendues de nombres qui ne sont ni algébriques, ni même réductibles à des irrationnelles algébriques*). En conséquence, si un nombre vient à être bien entouré par les rationnels, alors il est transcendant. Voici un mode de construction de tels nombres :
soit M un entier naturel et $K = (k_n)$ une suite d'entiers tels que $0 \leq k_n \leq M$ pour tout n .
Posons :

$$x_K = \sum_{n \in N} \frac{k_n}{L^{(n!)}} \qquad \text{Par exemple } y_0 = \sum_{n \in N} \frac{1}{10^{(n!)}}$$

Dans chaque cas, la convergence de la série est ici si rapide que la *taille* du reste est "trop petite" par rapport à son *rang* : c'est le fond de la question . Et les x_K ,tout comme y_0 sont transcendants ... L' écriture décimale de ce même y_0 est :

$$y_0 = 0{,}110001000000000000000001000000\ldots\ldots\ldots$$

avec des blocs de zéro suffisament longs pour assurer la transcendance, mais avec des "1" de temps en temps, sans quoi on aurait un décimal. Tous les nombres transcendants, x_K obtenus par le procédé sont deux à deux distincts. Or, il y en a beaucoup : leur ensemble est bien une " classe très-étendue", comme LIOUVILLE l'avait annoncé. Le procédé a donc permis adroitement de construire un grand nombre de ce qu'on appelle aujourd'hui les "nombres de Liouville". Ce sont cependant des nombres artificiels, production *ad hoc* , et la méthode de Louville ne permet aucun renseignement sur les nombres usuels de l'analyse.

A la fin du XIX° siècle, la construction par CANTOR d'un ensemble de "tous" les nombres, assigne, précisément comme LEIBNIZ l'avait imaginé, une *place* aux nombres transcendants dans un certain ensemble : le corps $\mathbb{R}$ des réels. Dans un article constitutif de 1874, CANTOR se propose de les examiner sous le double point de vue "cantorien " de leur cardinalité et leur topologie, avec ceci en réponse : les nombres transcendants, ces singularités que l'on imaginait plutôt rares sont très nombreuses : dans le corps des réels, cardinalement et topologiquement parlant, ils sont, de beaucoup, les plus " présents " : dense dans $\mathbb{R}$, leur ensemble a aussi en effet la puissance du continu. DARBOUX évoquera la " foule immense des nombres transcendants ". On note que, contrairement à celle de LIOUVILLE, la méthode cantorienne de preuve n'est cependant pas constructive : Cantor affirme l' existence de nombres transcendants, sans en expliciter un seul.

Parallèlement, en1873, Charles HERMITE avait établi (*Sur la fonction exponentielle*) la première démonstration de transcendance d'une quantité usuelle de l'Analyse : celle du nombre e . Résultat remarquablement complexe sur le plan technique, inspiré de la méthode de LAMBERT, fondé sur l'approximation simultanée de diverses fonctions exponentielles par des fractions rationnelles de même dénominateur, il est aussitôt devenu un modèle de preuve de transcendance qui survivra au temps.

Un bref retour en arrière permet de situer la question de la quadrature du cercle durant toute la période considérée : après la conjecture de STIEFEL de 1544 (la quadrature est impossible), deux écoles coexistaient au XVII° siècle : ceux qui comme Grégoire de SAINT - VINCENT, cherchaient toujours à la démontrer (il fut réfuté par DESCARTES) et ceux qui, comme James GREGORY, s'efforçaient d'en établir l'impossibilité. Dans ce contexte, la solution de LEIBNIZ de 1682, fournissant pour valeur de $\frac{\pi}{4}$ la somme d'une série alternée, résultat qu'il appelle *quadrature arithmétique* , déplaçait évidemment à la fois la question et la réponse. Au XVIII° siècle cependant , tous les mathématiciens de quelque crédit la pensaient désormais impossible, et dans son mémoire de 1761, LAMBERT ne cache pas qu' à travers l'irrationalité de π , c 'est en fait l'impossibilité de la quadrature qu'il visait [2].

Un article charnière de WANTZEL (1837 : *Recherche sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut être résolu par la règle et le compas*) viendra ensuite clarifier toutes les questions de constructibilité à la règle et au compas en les *algébrisant* : si un point est constructible en n étapes à partir de données rationnelles, ses coordonnées sont des nombres algébriques de degré 2^n : la méthode, qui permettait d'établir l'impossibilité de la trisection de l'angle et de la duplication du cube, laissait en suspens celle de la quadrature du cercle.

En 1882, LINDEMANN, modifiant de façon relativement mineure la complexe machinerie qu' HERMITE avait établie pour démontrer la transcendance de e , l'étend à celle de π : le résultat de WANTZEL assure alors l'impossibilité de la quadrature du cercle (*Uber die Zahl* π).

La résolution - par un chercheur de taille moyenne - d'une conjecture millénaire qui aura soutenu vingt siècles durant la recherche en mathématiques, clôt toute la période historique où, depuis l'antiquité, les questions d'irrationalité, puis de transcendance, avaient été pour une grande part animées par celle de la quadrature.

M . SERFATI

---

[2] Pour une étude historique des problèmes de constructibilité depuis l'antiquité jusque vers 1700 environ , voir l ' *Histoire des recherches sur la Quadrature du Cercle* , de J.E. Montucla . Antoine Jombert Editeur . Paris 1754 . Réédition (fac-simile) : IREM de Paris VII . Mai 1986 .