BONNES VIEILLES PAGES

En 1696, est publié l'**Analyse des Infiniment Petits** de M. le Marquis de l'HOPITAL, ouvrage qui tente non seulement de regrouper toutes les connaissances de l'époque sur le calcul infinitésimal mais aussi de les faire connaître au grand public. Ce "nouveau calcul" n'était plus réservé à des privilégiés.

Un demi-siècle plus tard, suivant la même idée, M. de BOUGAINVILLE écrit un **Traité de Calcul Intégral.** Cet ouvrage est publié en 1754. Nous vous proposons, dans ce numéro, la préface de cet ouvrage dans laquelle l'auteur explique les différentes étapes de la mise en place du calcul différentiel et des querelles qui s'en sont suivies.

Ses intentions sont claires et confirmées par le titre " ...pour servir de suite à l'**Analyse des Infiniment Petits** de M. le Marquis de l'HOPITAL."

Il indique ensuite quelques ouvrages concernant le calcul intégral, publiés dans la première moitié du 18è siècle. Il remarque alors, qu'il est nécessaire, pour "*apprendre le calcul intégral*", de consulter un grand nombre d'ouvrage. Il justifie ainsi la publication de son traité. Dans l'**Histoire des Mathématiques**, MONTUCLA écrit: "*La méthode et la clarté qui règnent dans cet ouvrage le rendront toujours précieux, quoique depuis ce temps, il y ait sur ce sujet des traités plus complets.*" Il faut cependant remarquer que cet ouvrage est, de nos jours, quelque peu oublié et n'est guère cité dans les livres d'histoire des mathématiques.

TRAITÉ
DU
CALCUL INTÉGRAL,

POUR SERVIR DE SUITE

A L'ANALYSE DES INFINIMENT-PETITS

DE M. LE MARQUIS DE L'HÔPITAL;

Par M. DE BOUGAINVILLE, le jeune.

A PARIS,

Chez DESAINT & SAILLANT, Libraires, rue Saint Jean de Beauvais.

M. DCC. LIV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

A MONSEIGNEUR
LE COMTE
D'ARGENSON,
MINISTRE
ET SECRÉTAIRE D'ÉTAT
DE LA GUERRE,
HONORAIRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

MONSEIGNEUR,

Il n'appartient qu'à ceux qui Vous reſſemblent, d'aſpirer au titre glorieux de Protecteurs des Sciences, parce que ſeuls capables de les chérir en Hommes de goût, & de *les apprécier en*

a ij

Hommes d'Etat, ils mettent une partie de leur gloire à les rendre florissantes. Le grand Ecrivain dont les découvertes nous instruisent, & le Ministre éclairé dont l'estime bienfaisante anime nos efforts, ont la même part à nos progrès & le même droit à notre reconnoissance. C'est sous Vos yeux, MONSEIGNEUR, que je suis entré dans la carriere des Sciences : je dois Vous offrir les premiers fruits de mes travaux. S'ils sont utiles, comme j'ose l'espérer, ils sont dignes de Vous ; & l'hommage que je Vous en fais ne l'est pas moins, puisqu'il est sincere & désintéressé. Un motif personnel se joint cependant aux sentimens qui me l'ont dicté : c'est le desir d'inspirer aux Lecteurs un préjugé favorable à mon Ouvrage, en le faisant paroître sous les auspices d'un Nom cher à la Littérature, & fait pour passer à la postérité.

Je suis avec un profond respect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant
Serviteur, DE BOUGAINVILLE.

PRÉFACE.

LE Calcul ou la Géométrie des Infiniment-Petits a deux branches, *le Calcul différentiel* & *le Calcul intégral.* Le premier eſt l'art de trouver les grandeurs infiniment petites qui ſont les élémens ou les différences des grandeurs finies : le ſecond eſt l'art de retrouver, par le moyen des grandeurs infiniment petites, les grandeurs finies auxquelles elles appartiennent. Le Calcul différentiel deſcend du fini à l'infiniment petit ; l'intégral remonte de l'infiniment petit au fini : le premier décompoſe, pour ainſi dire, une quantité ; le dernier la rétablit. Mais ce que l'un a décompoſé, l'autre ne le rétablit pas toujours ; ſoit que tout ne ſoit pas intégrable, ſoit que l'art n'ait pu parvenir encore à intégrer tout ce qui peut l'être.

En 1684. Leibnitz donna dans les Actes de Leipſic les regles du Calcul différentiel ; & trois ans après, Newton publia ſon Livre *des Principes Mathématiques de la Philoſophie naturelle*, preſque entiérement fondé ſur ce même Calcul. Il ſe trouve ſeulement entre Leibnitz & Newton une petite différence pour la dénomination du calcul & pour la caractériſtique * des quantités qui en ſont l'objet. L'expreſſion de Leibnitz eſt admiſe par-tout, excepté en Angleterre; & elle paroît en effet plus commode.

Leibnitz, en donnant les regles du Calcul différentiel, en cacha les démonſtrations. Mrs Bernoulli les découvrirent auſſi-tôt, & les publierent. S'étant depuis attachés au nouveau calcul, ils y ont fait des progrès rapides; ils l'ont même enrichi conſidérablement par les différentes méthodes qu'ils ont inventées, & par les uſages auxquels ils ont appliqué ces méthodes.

Mais ces découvertes ſemées dans différens Livres ne formoient point un tout. M. le Marquis de l'Hôpital réſolut d'en faire un

* *Nota.* Ce que Leibnitz nomme *différence*, Newton le nomme *fluxion* : ainſi ce que le premier appelle *Calcul différentiel*, le ſecond l'appelle *Calcul des fluxions.* Newton nomme auſſi *fluente* ce que Leibnitz nomme *intégrale*, & *Calcul des fluentes* ce que ce dernier nomme *Calcul intégral.* A l'égard de la caractériſtique, Newton pour marquer qu'une variable x flue ou eſt différentiée, met un point au-deſſus, de la maniere ſuivante $\dot{x}$. Pour marquer une ſeconde différence, il met deux points; pour une troiſieme, trois points; & ainſi de ſuite $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, &c. Leibnitz ſe ſert de la lettre d qu'il place au devant de la changeante différentiée, & il la répete autant de fois qu'il y a d'unités dans le degré de la différence. Ainſi dx, ddx ou d^2x, $dddx$ ou d^3x, &c. marquent les différences premiere, ſeconde, troiſieme, &c. de x.

corps, & de les dévoiler en même temps ſans réſerve. En 1696. il publia l'*Analyſe des Infiniment-petits* qui contient les regles du Calcul différentiel & les applications dont il eſt ſuſceptible. Le grand nom de l'Auteur dans les Mathématiques, l'accueil univerſel fait à ſon Ouvrage, les applaudiſſemens qu'il a reçus, & les progrès dont la Géométrie lui eſt redevable, me diſpenſent d'en faire l'éloge.

Quelques années après la mort de Newton, parut ſon Traité des *Fluxions* ou du Calcul différentiel, qu'il avoit composé en latin & achevé en 1671. En 1736. les Anglois en donnérent une traduction dans leur langue; & l'illuſtre M. de Buffon l'a depuis traduit en françois. On lit à la tête de ſa traduction une Préface, dans laquelle eſt détaillée l'hiſtoire de la diſpute qui s'éleva, au ſujet de l'invention du Calcul de l'infini, entre Leibnitz & Newton, c'eſt-à-dire, entre Leibnitz & l'Allemagne d'une part, & l'Angleterre de l'autre: car Newton laiſſant agir pour lui ſa nation, & ſur-tout ſa renommée, demeura ſimple ſpectateur. M. de Buffon n'entreprend point de décider une queſtion qui partage encore aujourd'hui l'Europe; mais il met ſon lecteur en état de prononcer.

Le Traité des Fluxions brille par-tout de ces traits de génie qui caractérisent l'invention. Les regles y sont démontrées avec clarté ; les applications nombreuses qu'on fait de ces regles prouvent la fécondité de la méthode, & enseignent l'art de s'en servir. Mais ce qui ne laisse rien à désirer, c'est que les regles y ont pour base une Méthaphysique solide & lumineuse. Le Calcul infinitésimal de Newton est indépendant de la réalité des quantités infiniment petites ; réalité que l'Auteur n'admet nulle part comme un principe nécessaire. La supposition qu'il en fait, n'est qu'une hypothese momentanée pour abréger le procédé & le rendre plus simple. Il ne fait autre chose qu'appliquer le calcul à la méthode d'exhaustion des Anciens, c'est-à-dire, à la méthode de trouver les limites des rapports. Aussi ce grand Philosophe ne différentie-t-il jamais des quantités, mais des équations ; parce que toute équation exprime un rapport entre deux indéterminées ; & qu'ainsi différentier une équation, c'est trouver les limites du rapport entre les différences finies des deux indéterminées renfermées dans l'équation.

Faute d'être parti de ce principe, Leibnitz effrayé des difficultés que faisoient contre les grandeurs

grandeurs infiniment petites, Rolle & les autres ennemis des nouveaux calculs, réduisit ses infiniment petits à n'être que des *incomparables*, dans le même sens que l'on diroit que notre globe est *incomparablement* plus petit qu'une sphere dont la distance du soleil à Sirius seroit le demi-diametre. C'étoit ruiner l'exactitude géométrique des calculs : c'étoit détruire d'une main ce qu'il avoit élevé de l'autre. Il souffrit même que quelques Savans, à la tête desquels étoit Niewentit, admissent simplement les infiniment-petits du premier ordre, & rejettassent tous ceux d'un ordre plus élevé ; ce qui néanmoins est un des principaux fondemens du Calcul différentiel.

Quoi qu'il en soit au reste, de l'Inventeur de ce calcul, les Géometres en trouveront les regles dans le Traité des Fluxions de Newton & dans l'Analyse des Infiniment-petits de M. le Marquis de l'Hôpital ; & à l'exception d'une branche de ce calcul dont nous parlerons plus bas, ils n'auront rien à désirer sur cette matiere, après la lecture de ces Ouvrages.

A l'égard du Calcul intégral, Newton en avoit laissé entrevoir quelques regles dans son livre des *Principes*. Il les étendit ensuite & les développa dans l'Ouvrage qui a pour titre :

b

de Quadraturâ curvarum, publié pour la premiere fois en 1704. à la ſuite de ſon Traité d'Optique. On y trouve des méthodes générales pour intégrer certaines différentielles, des formules calculées d'après ces méthodes, l'uſage de ces formules pour conſtruire des tables d'intégrales, & enfin des tables même toutes conſtruites.

Tous les grands Géometres ont travaillé depuis à l'envi ſur cette matiere, dont l'importance & la difficulté étoient pour eux de puiſſans motifs. Les Bernoulli qui ſont preſque en droit de prétendre à la gloire de l'invention, & par la promptitude avec laquelle ils ont ſaiſi quelques rayons de cette Science qui s'échappoient à peine, & par l'uſage qu'ils en ont fait, donnerent de nouvelles méthodes d'intégration, qui ſe trouvent dans le recueil de leurs Ouvrages & dans les Actes de Leipſic. Il y a même une partie eſſentielle de la nouvelle Analyſe, qui appartient toute entiere à l'illuſtre Jean Bernoulli : c'eſt le Calcul différentiel & intégral des quantités logarithmiques & exponentielles ; quantités auxquelles Newton & Leibnitz ne paroiſſoient pas avoir penſé. Cotes enrichit encore le Calcul intégral de pluſieurs belles méthodes dans un Ouvrage intitulé :

Harmonia menſurarum ; ouvrage qui vient d'être traduit , éclairci & augmenté par le ſavant D. Charles Walmeſley , Bénédictin Anglois. *

Le premier Traité élémentaire de Calcul intégral ſe trouve dans l'Analyſe démontrée du P. Reyneau , publiée en 1708. Il y donne les principales méthodes connues de ſon temps ; il en démontre même quelques-unes qui ne l'avoient pas été par leurs Auteurs. Mais depuis ce temps les méthodes ſe ſont beaucoup multipliées : d'ailleurs le P. Reyneau eſt tombé dans quelques erreurs aſſez conſidérables.

En 1730. parut un Ouvrage de M. Stone, intitulé : *Analyſe des Infiniment-petits , comprenant le Calcul intégral dans toute ſon étendue.* Le titre de ce livre promet beaucoup : mais malheureuſement l'ouvrage ne répond point au titre ; il eſt bon même d'avertir les commençans , qu'ils pourroient être induits en erreur par des paralogiſmes qui s'y rencontrent en aſſez grand nombre. Je me contenterai d'en citer un exemple : *On ne peut trouver* , dit l'Auteur dès la premiere page de ſon livre , *les Intégrales exprimées par des*

* Son Livre a pour titre : *Analyſe des meſures des rapports & des angles , ou réduction des intégrales aux logarithmes & aux arcs de cercle.*

fractions & par des quantités sourdes, qu'en faisant disparoître dans les unes leur dénominateur complexe & dans les autres leur signe radical ; ce qui se fait par le moyen d'une serie infinie. Cette proposition est évidemment fausse. Il suffit pour en être convaincu, de savoir les premiers principes du Calcul différentiel. Ils nous apprennent que toute fraction finie a pour différentielle une fraction, & qu'une quantité composée de radicaux les conserve aussi dans sa différentielle. On trouvera donc dans ces deux cas des intégrales finies, sans avoir besoin de recourir aux series infinies.

Qu'il me soit permis de remarquer ici que souvent on abuse de ces series. La théorie des Suites est importante, utile, nécessaire même en certains cas. Elle a précédé la découverte des nouveaux calculs qui ne peuvent s'en passer quelquefois ; & c'est le supplément le plus heureux que l'on ait trouvé à l'imperfection des méthodes. Mais le calcul des Suites ne donnant que par approximation les valeurs cherchées, & d'ailleurs étant long, pénible, & quelquefois fautif dans la pratique, il me semble qu'on ne doit l'employer qu'avec beaucoup de réserve & de précaution.

Enfin de tous les Ouvrages où l'on s'est proposé de traiter le Calcul intégral, le plus estimable, au jugement des connoisseurs, est celui de M[lle] Agnesi, intitulé : *Instituzioni analitiche all'uso d'ella gioventú Italiana.* Ainsi l'Italie qui a été le berceau de l'Algebre, a produit aussi l'ouvrage le plus étendu que nous ayons sur la nouvelle Analyse. L'illustre Académicienne dans la partie de son livre destinée au Calcul intégral, suit un ordre qui répand un grand jour sur cette matiere : elle explique & démontre très-clairement différentes méthodes, & fait voir par-tout une grande science du calcul & beaucoup d'adresse pour le manier. Cependant son ouvrage n'est pas complet ; & l'on peut encore regarder le Livre de M. le Marquis de l'Hôpital comme la premiere moitié d'un grand tout qui en attend une seconde.

En effet, depuis que l'Ouvrage de M[lle] Agnesi a paru, les Mémoires des Académies des Sciences de Paris, de Berlin, de Petersbourg, de Londres, se sont remplis d'excellens morceaux sur le Calcul intégral. M[rs] Daniel Bernoulli, Euler, Clairault, Fontaine, d'Alembert, & un petit nombre d'autres Géometres qui empêchent aujourd'hui l'Europe de regretter ceux du ſiecle paſſé, ſe ſont fort attachés à cette partie importante de la Géométrie. Non contens de ſe ſervir de cet Art ſublime dans toutes leurs découvertes, ils ont perfectionné l'Art même par des méthodes également fécondes & élégantes.

Ainſi ceux qui veulent apprendre le Calcul intégral, ſont obligés d'étudier un grand nombre de pieces détachées qui ſe trouvent éparſes dans différens livres que ſouvent ils ne connoiſſent pas, ou qu'ils ſont hors d'état de conſulter. Cet obſtacle joint à la difficulté même de la matiere peut rebuter pour toujours, ou au moins arrêter dans leur courſe, de bons eſprits dont les progrès ſeroient avantageux à la Géométrie. Ajoutons que les inventeurs des méthodes écrivant ordinairement pour les Savans, ne ſongent pas toujours à ſe mettre à la portée de ceux qui commencent.

Il étoit donc à ſouhaiter qu'on recueillît & qu'on raſſemblât dans un ſeul Traité les différens morceaux ſur le Calcul intégral, diſperſés dans les ouvrages particuliers & dans les Mémoires des Académies; qu'on fît un choix des méthodes eſſentielles & générales; qu'on les préſentât ſous un point de vue facile à ſaiſir; qu'on rétablît les propoſitions intermédiaires que ſuppriment aſſez ſouvent les inventeurs pour ne donner que des réſultats ; que l'on conduiſit enfin les commençans pas à pas & comme par la main dans les routes embarraſſées de ce labirinthe.

Je n'aurois pas oſé former un tel projet, ſi je n'y avois éte encouragé par les conſeils de quelques amis, dont les lumieres m'ont été d'un grand ſecours. Sûr qu'ils ne m'abandonneroient pas dans une entrepriſe peut-être au-deſſus de mes forces, je ſuis entré dans la carriere : c'eſt au Public à juger des premiers pas que j'y fais.

J'ai mis à la tête de cet Ouvrage une Introduction, dans laquelle j'ai expoſé le Calcul différentiel des quantités logarithmiques & exponentielles, qui ne ſe trouve pas dans l'Analyſe des Infiniment-petits. J'ai été contraint à cette occaſion d'entrer dans quelque détail ſur les principales propriétés des logarithmes & de la logarithmique. Cette Introduction renferme encore une théorie abrégée des ſinus & des coſinus des angles, & des racines imaginaires des équations. Ces théorêmes m'ont été néceſſaires pour ne rien ſuppoſer dont le lecteur n'eût ſous ſes yeux la démonſtration.

Je diviſe enſuite l'Ouvrage en deux parties, La premiere contient les regles du Calcul intégral des différentielles qui n'ont dans leur expreſſion qu'une ſeule variable avec des conſtantes quelconques. La ſeconde partie eſt deſtinée à expliquer les regles du Calcul intégral des quantités ou des équations différentielles qui renferment deux, trois, ou en général pluſieurs variables ; & auſſi le Calcul intégral des ſecondes, troiſiemes, &c. différences. Cette diviſion m'a paru la plus ſimple & la plus naturelle. Je ne donne aujourd'hui que la premiere partie ; la ſeconde la ſuivra de près. Je pourrois même, ſi le Public me paroît le déſirer, y joindre une troiſieme partie, qui contiendroit l'application du Calcul intégral aux plus beaux Problêmes de Géométrie, d'Aſtronomie, de Méchanique & de Phyſique.

Pour remplir le plan de ce Traité, j'ai fait enſorte de n'oublier aucune des méthodes connues juſqu'à préſent. Je les ai placées dans l'ordre où elles m'ont paru ſe prêter le plus grand jour, allant des plus ſimples aux plus compoſées. A la ſuite de l'expoſition de chaque méthode j'ai ajouté un, deux ou pluſieurs exemples généraux, afin de ne laiſſer aux commençans aucune difficulté ſur l'application des principes, Dans les endroits où l'on ne ne peut ſe paſſer de calculs longs & pénibles, (& ces endroits ſe rencontrent aſſez fréquemment,) j'ai fait les calculs tout au long, marchant de conſéquences en conſéquences, ſans en ſupprimer aucune; bien convaincu que le mérite principal d'un ouvrage élémentaire, eſt la clarté. En un mot, j'ai tâché qu'il ne reſtât plus à cette matiere que la difficulté qui en eſt abſolument inſéparable. Je prends mon lecteur au ſortir de l'Analyſe des Infiniment-petits de M. le Marquis de l'Hôpital, & je ſuppoſe qu'il a les connoiſſances néceſſaires pour entendre cet Ouvrage.

Les ſources dans leſquelles j'ai puiſé, ſont le *Traité de la quadrature des Courbes* de Newton; l'*Analyſe démontrée* du P. Reyneau d'où j'ai tiré pluſieurs méthodes, en avertiſſant des mépriſes qui lui ſont échappées; les Ouvrages de Jean Bernoulli; le Traité de *l'Analyſe des meſures des rapports & des angles, &c.* de D. Charles Walmeſley; l'Ouvrage de M[lle] Agneſi; les Mémoires des Académies des Sciences de Paris, de Berlin & de Petersbourg; & enfin quelques Mémoires de M. d'Alembert qui ne ſont point imprimés, & qu'il a bien voulu me communiquer. Je lui dois trop pour ne pas ſaiſir cette occaſion de lui témoigner

c

publiquement ma reconnoiſſance, mais je n'entreprendrai point de faire ſon éloge : mes louanges n'ajouteroient pas à ſa réputation : il peut s'en repoſer ſur ſes ouvrages, ſur l'Europe & la Poſtérité.

Je finirai par avertir que rien n'eſt à moi dans cet Ouvrage, ſi ce n'eſt l'ordre que j'ai tâché de mettre dans les différentes méthodes, & la forme que je leur donne, & qui ſervira peut-être à les faire entendre. Je ſerai trop récompenſé de mon travail, ſi je puis me flatter de contribuer aux progrès des jeunes Géometres. La gloire des inventeurs eſt plus brillante ſans doute ; mais ſeroit-on Citoyen, ſi l'on ne préféroit la ſatisfaction d'être utile à l'honneur d'être admiré ?

Isaac Newton (1643-1727)