DANS NOS CLASSES

La perspective à la Renaissance
Comment représenter un carrelage

Cette activité, conçue pour des classes de premières ou de terminales scientifiques, peut être abordée par certains élèves de seconde; les connaissances de géométrie nécessaires se limitent aux axiomes d'incidence et au théorème de Thalès. Elle permet de s'initier au langage de la géométrie perspective et de préciser quelques conventions de représentation sur un plan d'une figure en trois dimensions. Elle s'intéresse plus spécialement à la représentation d'un carrelage au sol en perspective centrale, la perspective des peintres de la Renaissance. En perspective cavalière, utilisée en mathématiques, il y a conservation du parallélisme et des milieux; une fois placée l'image d'un carré au sol, une simple division en parties égales permet d'obtenir l'apparence du carrelage. Dans cette activité, on suit la démonstration que propose Piero della Francesca (*De Prospectiva Pingendi*, 1470) de la méthode de construction imaginée par l'architecte et humaniste Alberti dans un traité de 1435.

Les modes de représentation d'un objet en trois dimensions sont multiples et plus ou moins codifiés. A partir de Giotto (XIII-XIVème siècles), les peintres italiens s'intéressent à une mise en volume des espaces représentés, surtout par le biais d'éléments architecturaux. Un carrelage au sol ou au plafond renforce souvent l'illusion de profondeur. Au XIVème siècle, il est assez généralement admis par les peintres italiens que les apparences des lignes du dallage perpendiculaires au tableau convergent en un point, plus tard appelé point central (puis point de fuite principal).

Comment placent-ils les parallèles successives pour tenir compte du raccourcissement apparent des distances dans le sens de la profondeur? La méthode souvent employée par les peintres italiens du XIVème siècle est de réduire régulièrement les écartements successifs dans un rapport constant (cf. fig.1, *la règle des 2/3*) Mais, comme on peut le remarquer dans la Présentation au temple de Giovanni di Paolo, les diagonales du carrelage ne sont pas alignées, elles se succèdent en formant une sorte de spirale.

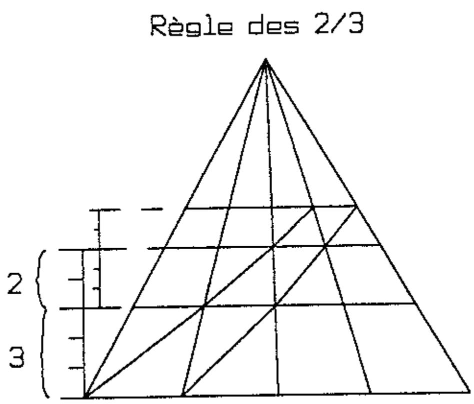
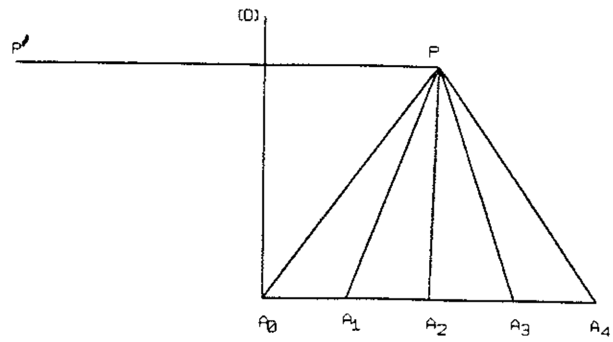
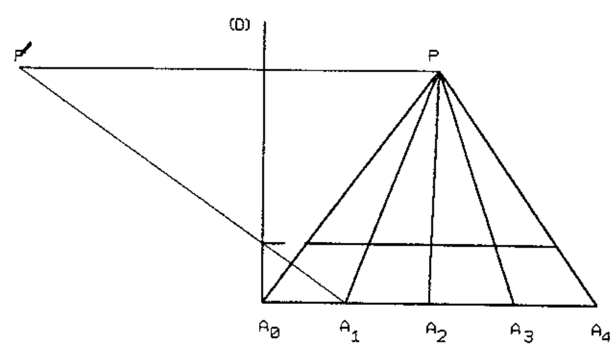


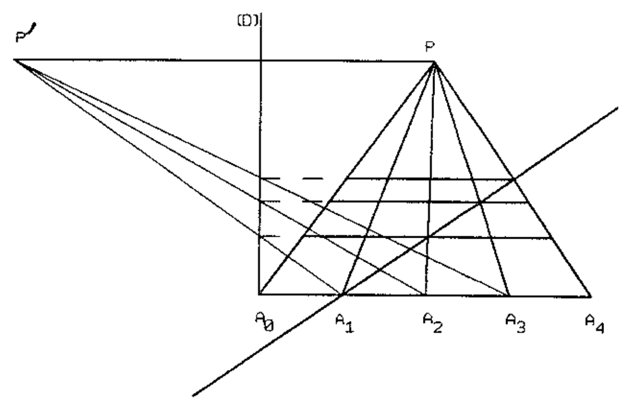
fig.1

L'architecte et humaniste Leo Battista Alberti (qui construisit, entre autres, la façade de l'église Santa Maria Novella de Florence) écrit en 1435 un traité pour les peintres, *De Pictura* , où la représentation plane de la peinture est définie pour la première fois en langage géométrique, comme "l'intersection de la pyramide visuelle suivant une distance donnée, une fois posé le centre et déterminées les lumières, représentée dans une certaine surface par l'artifice de lignes et de couleurs." Il critique la méthode des deux tiers puis donne une méthode "excellente" de construction de l'apparence d'un carrelage.

Il précise qu'il faut choisir dans le tableau un point central (ce qu'Alberti appelle le centre), au dessus de la ligne de terre (intersection du plan du sol et du plan du tableau), à une hauteur égale à celle d'un homme qui serait représenté sur le tableau. En ce point convergeront les apparences des lignes du carrelage perpendiculaires au plan du tableau. Puis, ayant divisé en parties égales la ligne de terre (chacune de ces parties A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ... correspondant à la longueur d'un côté d'une maille du carrelage), ayant joint le point central P à chacun des points A_1 ,A_2 , ..., il trace une perpendiculaire (D) à la ligne de terre, place un point P' à même hauteur que P et dont la distance à (D) est égale à la distance de l'oeil au tableau. Il joint le point P' aux extrémités A_1, A_2, A_3, ... du carrelage; le point d'intersection de ($P'A_1$) avec (D) donne la hauteur de la première transversale du carrelage, le point d'intersection de ($P'A_2$) avec (D) donne la hauteur de la deuxième transversale, etc. Il constate, et c'est la seule "preuve" de l'exactitude de la méthode qu'il propose, que les diagonales du carrelage sont alignées.





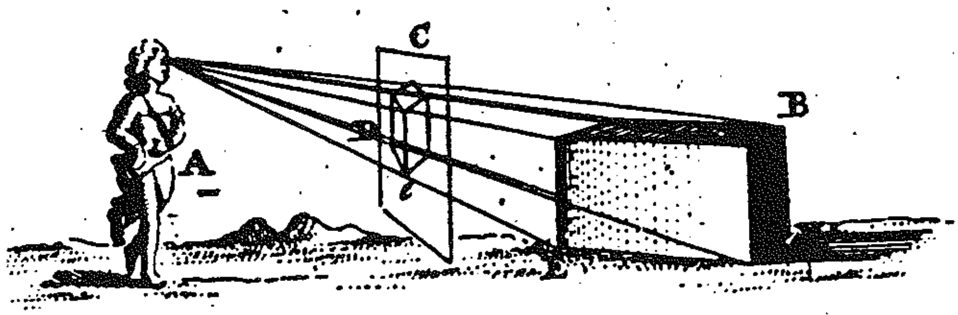


Le peintre et mathématicien de Borgo san Sepulcro, Piero della Francesca, écrit dans les années 1470-1490 un traité resté manuscrit jusqu'au XIXème siècle, qui aura beaucoup d'influence sur les peintres de son temps, *De Prospectiva Pingendi*, où il propose diverses méthodes de construction de figures géométriques au sol, de solides délimités par des contours rectilignes, ou cylindriques et même des procédés de construction point par point des apparences de figures plus complexes comme la figure ou le corps humains. Nous ne donnons ici que quelques reproductions de planches de ce traité. Au livre I de ce traité, il légitime la méthode d'Alberti, en s'intéressant à une situation simplifiée : représenter un carré dans un plan fuyant. Il pourra en déduire la construction du carrelage.

PIERO DELLA FRANCESCA: Légitimation de la méthode d'Alberti

QUESTION 0 Que fait-on lorsqu'on représente une figure en perspective centrale?

a)



La représentation en perspective linéaire suppose la présence d'un observateur dont l'œil est symbolisé par un point. Les droites (rayons) issues de ce point et dirigées vers le contour d'un objet de l'espace constituent ce qu'on appelle la pyramide visuelle. On appelle représentation en perspective linéaire d'un objet de l'espace, l'intersection de la pyramide visuelle avec le plan de représentation (voir figure 0). La figure obtenue sera appelée apparence de l'objet représenté. Nous parlerons donc d'apparence d'une droite, d'un segment, d'un carré,...

Dans cet exercice, nous vous proposons d'étudier la méthode d'Alberti permettant de construire l'apparence d'un carré placé horizontalement derrière le plan vertical de représentation. Pour cela, nous allons suivre la démonstration qui en a été faite par Piero della Francesca dans un ouvrage daté de 1470 intitulé *De Prospectiva Pingendi*.

b) La figure suivante, réalisée en perspective cavalière, vous permettra sans doute de comprendre la situation.

Le point A figure l'œil de l'observateur et le point D l'emplacement de ses pieds.

Le plan (T) est le plan de représentation et la doite (BC) est appelée ligne de terre (C'est la droite horizontale située dans le tableau, au "niveau" des pieds de l'observateur).

Le projeté orthogonal de A sur le tableau est appelé point fuite principal. Sur la figure, il est noté A'.

Le carré BCGF est le carré que l'on veut représenter dans le plan (T)

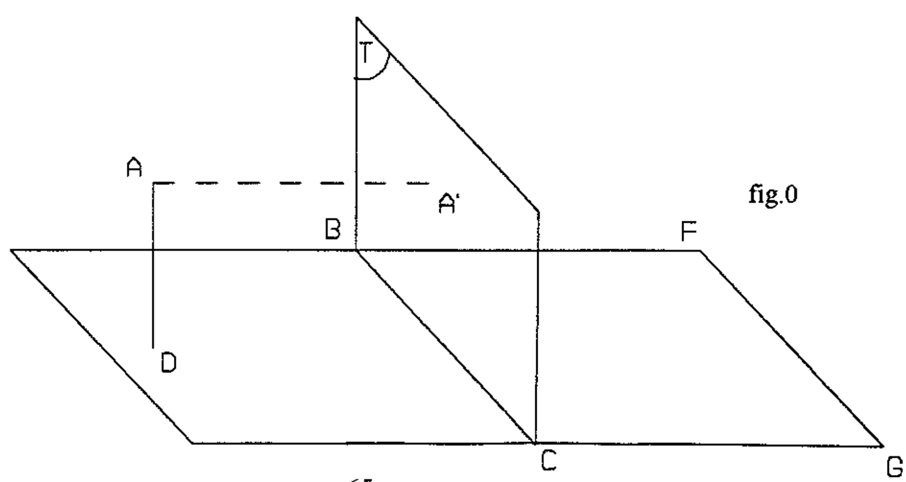


fig.0

c) Dans sa démonstration, Piero della Francesca admet un certain nombre de résultats que nous vous demandons de démontrer.

1) L'apparence d'une droite est une droite.

2) L'apparence d'une ligne droite parallèle à la ligne de terre est aussi parallèle à la ligne de terre.

3)L'apparence d'une droite perpendiculaire au tableau passe par le point de fuite principal A'.

d) Par ailleurs, il utilise un résultat qu'il a démontré auparavant que l'on peut exprimer ainsi: **Deux segments de longueurs égales, parallèles au tableau et situés à une même distance de celui-ci, ont des apparences de longueurs égales.**

<u>QUESTION 1</u> Voici une figure extraite du traité de Piero della Francesca (fig 1), ainsi qu'un extrait du texte d'accompagnement:

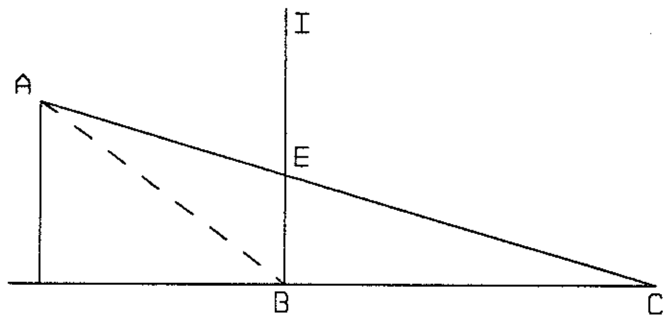


fig.1

"Je tirerai du point A une ligne jusqu'au point C, extrémité du plan déterminé; cette ligne coupera BF au point E; je dis que BE est le raccourci du plan BC car BE est perçu de A comme égal à BC, dans le support choisi."

<u>Justifier la phrase suivante</u>: **l'apparence du segment BC, dans le tableau (T) vu de profil selon BJ, est le segment BE.**

QUESTION 2 Dans la figure 1, on trace le carré BCGF (fig.2). BCGF est donc un carré posé verticalement derrière le tableau (T) et perpendiculaire à celui-ci.

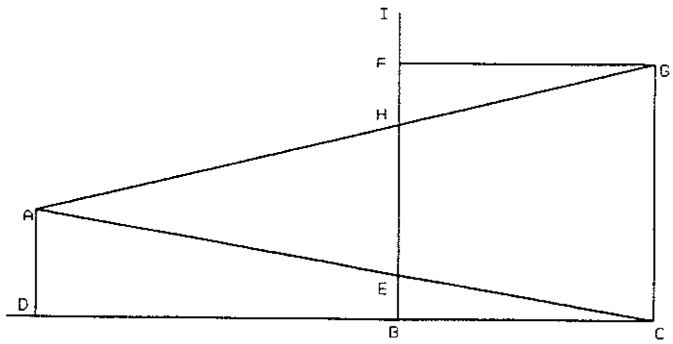


fig.2

a) Justifier que l'apparence du segment CG sur le tableau BF est le segment EH.

b) Montrer que, vu de A, le rapport de réduction du côté arrière du carré BCGF est égal à $\frac{DB}{DC}$

QUESTION 3 Dans la figure suivante, Piero della Francesca a "superposé" trois figures.

1°) BC est considéré comme le carré dont on cherche l'apparence, vu de profil.

2°) Le carré BCGF est un carré placé verticalement derrière le tableau (voir fig.2).

3°) Le carré BCGF représente aussi le tableau vu de face où on veut représenter l'apparence d'un carré de côté BC posé à plat derrière le tableau.

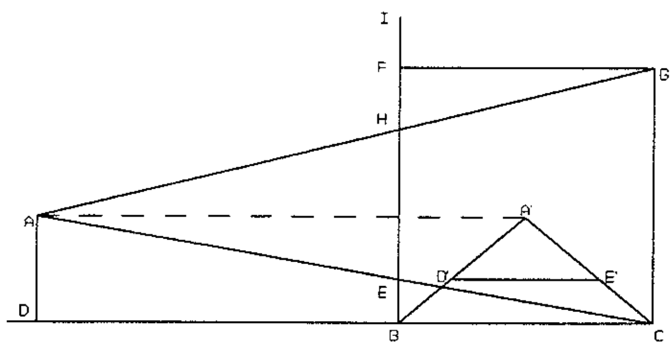


fig.3

Soit A' le point de la médiatrice de [BC][1] situé sur la parallèle à (BC) passant par A. (AC) coupe (BF) en E. On mène par E la parallèle à (BC) qui coupe (AB) en D' et (AC) en E'.(fig3).

Dans la proposition 13 du livre I, on peut lire: *"Je dis avoir mis au carré le plan dégradé, lequel carré est BCE'D' ". BCE'D' est donc l'apparence du carré placé horizontalement derrière le tableau.*

a) Expliquer pourquoi la droite D'E' est la parallèle à la ligne de terre passant par E

Voici un extrait du texte de Piero della Francesca:

"La preuve: voyons si D'E' est égale à EH qui apparait égale à la quantité CG, comme cela a été prouvé ci-dessus. Je dis qu'elle est égale ou semblable, car la proportion qui est de A'B à A'D' est de AC à AE, est la même que celle de D'E' à BC, qui est aussi de EH à CG.Etant proportionnelles, elles sont égales ou semblables, mais en fait égales,..."((Livre I prop. 13)[2]

b)Démontrer l'égalité suivante: $\dfrac{A'B}{A'D'} = \dfrac{AC}{AE}$

c)Préciser les configurations de Thalès nécessaires pour affirmer les égalités de proportions suivantes:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{D'E'}{BC} = \frac{EH}{CG}$$

d)Démontrer que EH est égal à D'E'

e)Déduire de ce qui précède que BCE'D' est bien l'apparence du carré de côté BC posé "à plat" derrière le tableau.

<u>**QUESTION 4**</u> Utiliser le procédé décrit ci-dessus pour effectuer la construction en perspective d'un carrelage horizontal.

---

[1]Le point A', qui se trouve nécessairement sur la parallèle à BC passant par A, peut être placé ailleurs que sur la médiatrice de [BC]. Piero della Francesca en fait la remarque à la fin de sa démonstration.

[2]Le texte de la prop. 13 est donné en annexe.

On peut remarquer que Piero admet implicitement les trois propriétés citées en 0)f qui permettent de vérifier que D'E' est bien lapparence de GF. Ces propriétés seront démontrées par Guidobaldo del Monte en 1600 dans son ouvrage: Perspectivae Libri Sex.

Voici les deux principaux textes de Piero della Francesca sur lesquels nous avons travaillé pour mettre en œuvre cette activité avec les élèves.

Extrait du DE PROSPECTIVA PINGENDI de Piero Della Francesca

Traduction et adaptation de Jean-Pierre LE GOFF

Proposition XII (Livre I) *D'un point de vue donné, représenter en raccourci un plan déterminé, sur un certain support [fig XII].*

Soit donné l'œil .A. se tenant au-dessus de la ligne .DC., sur une perpendiculaire menée au-dessus de .D., et que .DC. soit partagé au point .B., en lequel soit supposé le support que je tracerai au-dessus de .B. sous forme d'une perpendiculaire, soit .FB., et .BC. sera le plan que je m'assigne, celui que l'on veut représenter en raccourci. Je tirerai du point .A. une ligne jusqu'au point .C., extrémité du plan déterminé, cette ligne coupera .BF. au point .E., je dis que .BE. est le raccourci du plan .BC., car .BE. est perçu de .A. comme égal à .BC., dans le support choisi.

Prouvons-le. Tirons .AB., un triangle s'en trouve formé, qui sera .ABC., et les segments .BC. et .BE. sont opposés à un même angle, si bien qu'ils apparaissent égaux à l'œil, comme cela a été prouvé dans la proposition seconde de ce livre. Je dis que .BE. est le plan raccourci. En d'autres termes, car il faut bien comprendre cette première mise en raccourci, pour que les autres se comprennent plus aisément.

Si je dis un point de vue donné, je signifie le point où l'on se place pour voir, le point où tu as décidé de te tenir pour voir le plan déterminé; si je dis un plan déterminé, je signifie le plan dont tu auras choisi par avance la taille. Le choix du support, du lieu sur lequel on doit réduire le dit plan, c'est le choix de la distance de l'œil au mur ou au panneau ou toute autre chose où l'on veut représenter les choses en raccourci, en plaçant l'œil haut ou bas, proche ou éloigné, selon que le requiert le travail. Admettons que le plan choisi .BC. soit long de 20 brasses, et que .A. soit élevé de trois brasses au-dessus de .D. Tirons .AC. qui divisera .BF. au point .E., comme il est dit au-dessus: je dis que .C. est plus élevé que .B. dans le support, de la quantité .BE., car .A. se tient au-dessus de .BC.: cela est prouvé par la 10ème proposition du De aspetuum diversitate *d'Euclide. Donc je dirai que .BE. est 2, qui est les 2/3 de la hauteur à laquelle a été placé l'œil; celui-ci étant élevé au-dessus du plan de 3 brasses, les 2/3 en sont bien 2 brasses; ceci car la ligne qui part du point .A. divise les parallèles en proportion, si bien que la proportion de .BC. à .DC., est aussi de .BE. à .DA.; or .DA. est 3 et .BE. est 2, .DC. est 30 et .BC. est 20; telle proportion qui est de 20 à 30, est aussi de 2 à 3, si bien que .BE. est le raccourci de .BC., qui devait l'être.*

Proposition XIII (Livre I): *Réduire en carré un plan raccourci (Tailler un carré dans un plan fuyant)*

Comme dans la proposition précédente, soit DC une ligne partagée au point B. menons BF qui lui est perpendiculaire et une autre ligne perpendiculaire au-dessus de D jusqu'en A. placé en son lieu; tirons une ligne perpendiculaire au-dessus de C. de longueur égale à BC. soit CG. et du point G. menons une parallèle à BC, soit GF; je dis qu'il s'ensuit un carré de côtés égaux BC. CG. GF et FB. Maintenant, je tire du point A les lignes AC et AG. qui coupent BF en deux points: AC coupe BF au point E. et AG coupe BF au point H. Je dis que E apparaît au point A plus élevé que B, parce que A se tient au-dessus de B, et que H apparaît plus bas que F, parce que A est plus bas que F. comme cela est démontré dans les 10ème et 11ème propositions du De aspectuum diversitate *d'Euclide. Je dis que BE apparaît égal à BC dans le support fixé, et que EH apparaît égal à CG dans le même support. et que HF apparaît égal à FG. Tirons AF et AB: nous aurons trois triangles, chacun d'eux avec deux bases [segments opposés à A]: le triangle ABC avec les deux bases BC et BE. le triangle ACG avec les deux bases CG et HE, et le triangle AGF avec les deux bases FG et FH; d'où, par la seconde proposition de ce livre. le segment BE apparaît égal au segment BC. parce qu'ils sont sous un même angle A, et le segment EH apparaît égal à CG, du fait qu'ils sont sous un même angle . et le segment HF apparaît égal à FG, parce qu'ils sont contenus dans un même angle: la proportion qui est de AE à AC, est celle qui est de DB à DC. et la même, qui est de EH à CG, est aussi celle qui est de de AE à AC, et la proportion qui est de BE et FH ensemble à CG, est celle qui est de HG à AG, et quand les distances et les choses sont dans la même proportion que la hauteur de l'œil à la chose dégradée, il est clair que c'est la juste dégradation. Donc, je dirai que .EH..CG. [nous reprenons ici la convention d'écriture de Piero della Francesca car elle a son importance] est le plan BE réduit [reducto] en carré.*

Maintenant menons du point A une ligne parallèle à BC, prolongée sans fin, puis partages la ligne BC en deux segments égaux au point I, et traces au-dessus de I la perpendiculaire: à l'endroit où elle coupe la ligne qui part du point A parallèlement à BC. se trouve le point A [que nous notons A']. puis traces à partir de E une parallèle à BC qui coupe CG au point K. mènes à partir de A [A'] une ligne vers B, qui coupe EK au point D [que nous notons D'], puis traces à partir de A [A'] une ligne vers C, qui coupera EK au point E [que nous notons E']; je dis avoir mis au carré le plan dégradé, lequel carré est BCDE. [en fait BCD'E' ; nous donnons ici aussi la notation exacte de Piero della Francesca]. La preuve: voyons si DE [D'E'] est égale à EH qui apparaît égale à la quantité CG, comme cela a été prouvé ci-dessus. Je dis qu'elle est égale ou semblable. car la proportion qui est de AB [A'B'] à AD [A'D'], est de AC à AE, est la même que celle de DE [D'E'] à BC, qui est aussi de EH à CG. Etant proportionnelles, elles [D'E' et EH] sont égales ou semblables. mais en fait elles sont égales, car nous avons posé que BC de l'une est égal à BC de l'autre [i.e.: CG = BC], ce qui éclaire l'énoncé. Mais si tu disais: pourquoi mets-tu l'œil au milieu? [Je répondrais:] Parce que cela me paraît convenir mieux pour voir les opérations; néanmoins, chacun peut le mettre là où il lui plaît, sans dépasser les limites indiquées dans la dernière figure [c'est à dire la figure XXX de la proposition XXX et dernière du livre I], et quelque soit le lieu où tu le placeras, il en résultera la même proportion.

Bibliographie

Alberti L. B. *De la Peinture*, 1435, trad. J.L. Schefer, ed. Macula Dédale, Paris 1992

Bessot D., Le Goff J. P. *Mais où est donc passée la troisième dimension ?* in *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, par la Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques, éditions ELLIPSES, 1993.

Bessot D., Hellegouarc'h Y., Le Goff J. P. (sous la direction de) *Destin de l'Art, Desseins de la Science*, Actes du colloque A.D.E.R.H.E.M.oct. 86, Université de Caen, 1991

Comar P. *La perspective en jeu*, Découvertes Gallimard n° 138.

Flocon A., Taton R. *La perspective*, P.U.F., coll. Que sais-je? n° 1050.

Gilbert T. *La perspective en questions*, Ciaco Ed., Louvain-la-Neuve, 1987

IREM de Basse-Normandie, *Les cahiers de la perspective*, Université de Caen, (5 numéros parus)

Thuillier P. *Espace et perspective au Quatrocento*, in *La Recherche* n° 160, nov 1984

P. Brin et M. Grégoire

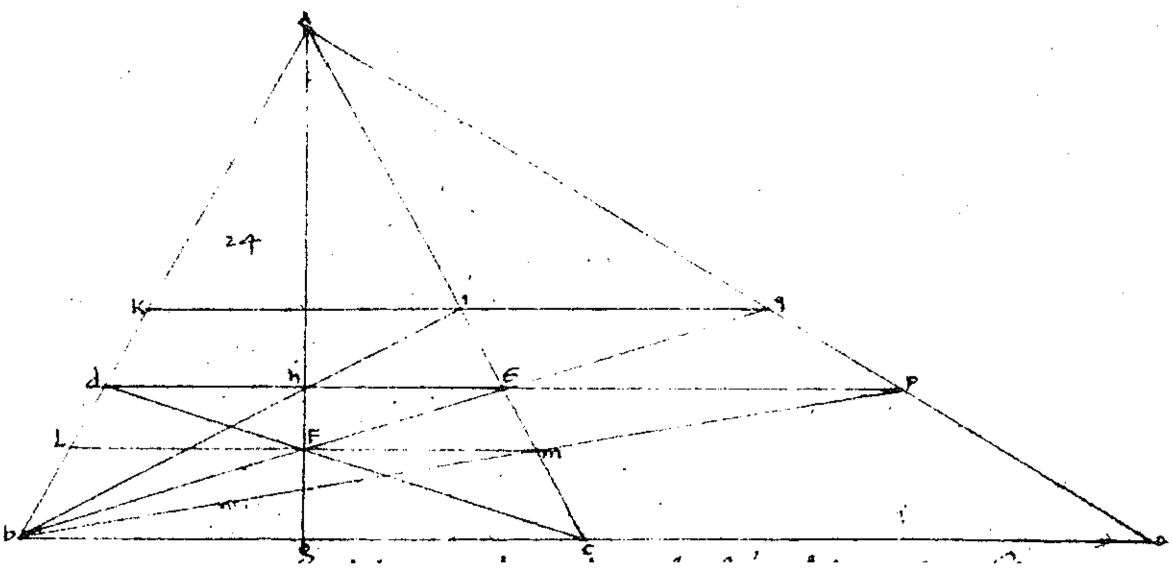


Fig. XXIV

Extrait du De Prospectiva Pingendi PIERO DELLA FRANCESCA