IREM

INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

n° 8

JUILLET 1994

M : A.T.H.

MNEMOSYNE

UNIVERSITE PARIS VII

Mnémosyne

personnification de la mémoire.

Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite;

de cette union naquirent les neuf Muses.

(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture : **"La mémoire"**

gravure allégorique d'après Gravelot (XVIII ème)

n° 8

JUILLET 1994

MNEMOSYNE

M: *Mathématiques*

A. *Approche par les*

T. *textes*

H. *historiques*

MEMOIRE

SOMMAIRE

EDITORIAL

En Avril 92, était annoncée la parution trimestrielle de la revue Mnémosyne. Cette fréquence n'a pas été totalement respectée mais voici cependant le numéro 8 qui, nous l'espérons, saura vous intéresser pendant une partie de vos vacances. Il se décline principalement autour de deux thèmes.

Le nombre:

On sait, en général, que le "Zéro" n'a pas toujours, été accepté en tant que nombre. Maryvonne Hallez vous propose, pour sa part, de réfléchir avec elle sur le statut du "Un".

Poursuivant ses réflexions sur l'"idée du nombre", elle propose à vos élèves une activité concernant les nombres algébriques vus par Cantor ou Klein.

Michel Serfati, dans son article "Hermite et la transcendance de e. Histoire d'un théorème" s'intéresse à l'émergence de la notion de nombre transcendant.

L'histoire du calcul différentiel:

Après la querelle entre Descartes et Fermat (Mnémosyne N°2), après le calcul différentiel de Leibniz (Mnémosyne N°6), nous vous proposons une étude sur le calcul infinitésimal dans la **Méthode des Fluxions** de Newton.

Les bonnes vieilles pages reproduisent la préface du **Traité du Calcul Intégral de** M. de Bougainville qui se veut la suite de l'**Analyse des Infiniment Petits** de M. le Marquis de l'HôSpital. Cette préface présente les principaux acteurs du calcul infinitésimal et intégral et définit l'ouvrage comme témoin d'un moment de l'Histoire des Mathématiques.

Enfin, Marie-Françoise Jozeau, s'est intéressée au livre de G.Joseph: **"The Crest of the Peacock"** . Elle en fait une rapide présentation qui vous donnera sans doute envie de découvrir certaines propositions des recherches éthnomathématiques.

Bonnes vacances.

BONNES VIEILLES PAGES

En 1696, est publié l'**Analyse des Infiniment Petits** de M. le Marquis de l'HOPITAL, ouvrage qui tente non seulement de regrouper toutes les connaissances de l'époque sur le calcul infinitésimal mais aussi de les faire connaître au grand public. Ce "nouveau calcul" n'était plus réservé à des privilégiés.

Un demi-siècle plus tard, suivant la même idée, M. de BOUGAINVILLE écrit un **Traité de Calcul Intégral.** Cet ouvrage est publié en 1754. Nous vous proposons, dans ce numéro, la préface de cet ouvrage dans laquelle l'auteur explique les différentes étapes de la mise en place du calcul différentiel et des querelles qui s'en sont suivies.

Ses intentions sont claires et confirmées par le titre " ...pour servir de suite à l'**Analyse des Infiniment Petits** de M. le Marquis de l'HOPITAL."

Il indique ensuite quelques ouvrages concernant le calcul intégral, publiés dans la première moitié du 18è siècle. Il remarque alors, qu'il est nécessaire, pour "*apprendre le calcul intégral*", de consulter un grand nombre d'ouvrage. Il justifie ainsi la publication de son traité. Dans l'**Histoire des Mathématiques**, MONTUCLA écrit: "*La méthode et la clarté qui règnent dans cet ouvrage le rendront toujours précieux, quoique depuis ce temps, il y ait sur ce sujet des traités plus complets.*" Il faut cependant remarquer que cet ouvrage est, de nos jours, quelque peu oublié et n'est guère cité dans les livres d'histoire des mathématiques.

TRAITÉ

DU

CALCUL INTÉGRAL,

POUR SERVIR DE SUITE

A L'ANALYSE DES INFINIMENT-PETITS

DE M. LE MARQUIS DE L'HÔPITAL;

Par M. DE BOUGAINVILLE, le jeune;

A PARIS,

Chez DESAINT & SAILLANT, Libraires, rue Saint Jean de Beauvais.

M. DCC. LIV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

A MONSEIGNEUR

LE COMTE

D'ARGENSON,

MINISTRE

ET SECRÉTAIRE D'ÉTAT

DE LA GUERRE,

HONORAIRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

MONSEIGNEUR,

Il n'appartient qu'à ceux qui Vous reſſemblent, d'aſpirer au titre glorieux de Protecteurs des Sciences, parce que ſeuls capables de les chérir en Hommes de goût, & de les apprécier en

a ij

Hommes d'Etat, ils mettent une partie de leur gloire à les rendre floriſſantes. Le grand Ecrivain dont les découvertes nous inſtruiſent, & le Miniſtre éclairé dont l'eſtime bienfaiſante anime nos efforts, ont la même part à nos progrès & le même droit à notre reconnoiſſance. C'eſt ſous Vos yeux, MONSEIGNEUR, *que je ſuis entré dans la carriere des Sciences : je dois Vous offrir les premiers fruits de mes travaux. S'ils ſont utiles, comme j'oſe l'eſpérer, ils ſont dignes de Vous; & l'hommage que je Vous en fais ne l'eſt pas moins, puiſqu'il eſt ſincere & déſintéreſſé. Un motif perſonnel ſe joint cependant aux ſentimens qui me l'ont dicté : c'eſt le deſir d'inſpirer aux Lecteurs un préjugé favorable à mon Ouvrage, en le faiſant paroître ſous les auſpices d'un Nom cher à la Littérature, & fait pour paſſer à la poſtérité.*

Je ſuis avec un profond reſpect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéïſſant
Serviteur, DE BOUGAINVILLE.

PRÉFACE.

LE Calcul ou la Géométrie des Infiniment-Petits a deux branches, *le Calcul différentiel* & *le Calcul intégral*. Le premier eſt l'art de trouver les grandeurs infiniment petites qui ſont les élémens ou les différences des grandeurs finies : le ſecond eſt l'art de retrouver, par le moyen des grandeurs infiniment petites, les grandeurs finies auxquelles elles appartiennent. Le Calcul différentiel deſcend du fini à l'infiniment petit ; l'intégral remonte de l'infiniment petit au fini : le premier décompoſe, pour ainſi dire, une quantité ; le dernier la rétablit. Mais ce que l'un a décompoſé, l'autre ne le rétablit pas toujours ; ſoit que tout ne ſoit pas intégrable, ſoit que l'art n'ait pu parvenir encore à intégrer tout ce qui peut l'être.

En 1684. Leibnitz donna dans les Actes de Leipſic les regles du Calcul différentiel ; & trois ans après, Newton publia ſon Livre *des Principes Mathématiques de la Philoſophie naturelle*, preſque entiérement fondé ſur ce même Calcul. Il ſe trouve ſeulement entre Leibnitz & Newton une petite différence pour la dénomination du calcul & pour la caractéristique * des quantités qui en ſont l'objet. L'expreſſion de Leibnitz eſt admiſe par-tout, excepté en Angleterre ; & elle paroît en effet plus commode.

Leibnitz, en donnant les regles du Calcul différentiel, en cacha les démonſtrations. M[rs] Bernoulli les découvrirent auſſi-tôt, & les publierent. S'étant depuis attachés au nouveau calcul, ils y ont fait des progrès rapides ; ils l'ont même enrichi conſidérablement par les différentes méthodes qu'ils ont inventées, & par les uſages auxquels ils ont appliqué ces méthodes.

Mais ces découvertes ſemées dans différens Livres ne formoient point un tout. M. le Marquis de l'Hôpital réſolut d'en faire un

* *Nota.* Ce que Leibnitz nomme *différence*, Newton le nomme *fluxion* : ainſi ce que le premier appelle *Calcul différentiel*, le ſecond l'appelle *Calcul des fluxions*. Newton nomme auſſi *fluente* ce que Leibnitz nomme *intégrale*, & *Calcul des fluentes* ce que ce dernier nomme *Calcul intégral*. A l'égard de la caractériſtique, Newton pour marquer qu'une variable x flue ou eſt différentiée, met un point au-deſſus, de la maniere ſuivante $\dot{x}$. Pour marquer une ſeconde différence, il met deux points; pour une troiſieme, trois points ; & ainſi de ſuite $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, &c. Leibnitz ſe ſert de la lettre d qu'il place au devant de la changeante différentiée, & il la répete autant de fois qu'il y a d'unités dans le degré de la différence. Ainſi dx, ddx ou d^2x, $dddx$ ou d^3x, &c. marquent les différences premiere, ſeconde, troiſieme, &c. de x.

corps, & de les dévoiler en même temps ſans réſerve. En 1696. il publia l'*Analyſe des Infiniment-petits* qui contient les regles du Calcul différentiel & les applications dont il eſt ſuſceptible. Le grand nom de l'Auteur dans les Mathématiques, l'accueil univerſel fait à ſon Ouvrage, les applaudiſſemens qu'il a reçus, & les progrès dont la Géométrie lui eſt redevable, me diſpenſent d'en faire l'éloge.

Quelques années après la mort de Newton, parut ſon Traité des *Fluxions* ou du Calcul différentiel, qu'il avoit composé en latin & achevé en 1671. En 1736. les Anglois en donnérent une traduction dans leur langue; & l'illuſtre M. de Buffon l'a depuis traduit en françois. On lit à la tête de ſa traduction une Préface, dans laquelle eſt détaillée l'hiſtoire de la diſpute qui s'éleva, au ſujet de l'invention du Calcul de l'infini, entre Leibnitz & Newton, c'eſt-à-dire, entre Leibnitz & l'Allemagne d'une part, & l'Angleterre de l'autre: car Newton laiſſant agir pour lui ſa nation, & ſur-tout ſa renommée, demeura ſimple ſpectateur. M. de Buffon n'entreprend point de décider une queſtion qui partage encore aujourd'hui l'Europe; mais il met ſon lecteur en état de prononcer.

Le Traité des Fluxions brille par-tout de ces traits de génie qui caractérisent l'invention. Les regles y sont démontrées avec clarté ; les applications nombreuses qu'on fait de ces regles prouvent la fécondité de la méthode, & enseignent l'art de s'en servir. Mais ce qui ne laisse rien à désirer, c'est que les regles y ont pour base une Méthaphysique solide & lumineuse. Le Calcul infinitésimal de Newton est indépendant de la réalité des quantités infiniment petites ; réalité que l'Auteur n'admet nulle part comme un principe nécessaire. La supposition qu'il en fait, n'est qu'une hypothese momentanée pour abréger le procédé & le rendre plus simple. Il ne fait autre chose qu'appliquer le calcul à la méthode d'exhaustion des Anciens, c'est-à-dire, à la méthode de trouver les limites des rapports. Aussi ce grand Philosophe ne différentie-t-il jamais des quantités, mais des équations ; parce que toute équation exprime un rapport entre deux indéterminées ; & qu'ainsi différentier une équation, c'est trouver les limites du rapport entre les différences finies des deux indéterminées renfermées dans l'équation.

Faute d'être parti de ce principe, Leibnitz effrayé des difficultés que faisoient contre les grandeurs

grandeurs infiniment petites, Rolle & les autres ennemis des nouveaux calculs, réduisit ses infiniment petits à n'être que des *incomparables*, dans le même sens que l'on diroit que notre globe est *incomparablement* plus petit qu'une sphere dont la distance du soleil à Sirius seroit le demi-diametre. C'étoit ruiner l'exactitude géométrique des calculs : c'étoit détruire d'une main ce qu'il avoit élevé de l'autre. Il souffrit même que quelques Savans, à la tête desquels étoit Niewentit, admissent simplement les infiniment-petits du premier ordre, & rejettassent tous ceux d'un ordre plus élevé ; ce qui néanmoins est un des principaux fondemens du Calcul différentiel.

Quoi qu'il en soit au reste, de l'Inventeur de ce calcul, les Géometres en trouveront les regles dans le Traité des Fluxions de Newton & dans l'Analyse des Infiniment-petits de M. le Marquis de l'Hôpital ; & à l'exception d'une branche de ce calcul dont nous parlerons plus bas, ils n'auront rien à désirer sur cette matiere, après la lecture de ces Ouvrages.

A l'égard du Calcul intégral, Newton en avoit laissé entrevoir quelques regles dans son livre des *Principes*. Il les étendit ensuite & les développa dans l'Ouvrage qui a pour titre :

de Quadraturâ curvarum, publié pour la premiere fois en 1704. à la ſuite de ſon Traité d'Optique. On y trouve des méthodes générales pour intégrer certaines différentielles, des formules calculées d'après ces méthodes, l'uſage de ces formules pour conſtruire des tables d'intégrales, & enfin des tables même toutes conſtruites.

Tous les grands Géometres ont travaillé depuis à l'envi ſur cette matiere, dont l'importance & la difficulté étoient pour eux de puiſſans motifs. Les Bernoulli qui ſont preſque en droit de prétendre à la gloire de l'invention, & par la promptitude avec laquelle ils ont ſaiſi quelques rayons de cette Science qui s'échappoient à peine, & par l'uſage qu'ils en ont fait, donnerent de nouvelles méthodes d'intégration, qui ſe trouvent dans le recueil de leurs Ouvrages & dans les Actes de Leipſic. Il y a même une partie eſſentielle de la nouvelle Analyſe, qui appartient toute entiere à l'illuſtre Jean Bernoulli : c'eſt le Calcul différentiel & intégral des quantités logarithmiques & exponentielles ; quantités auxquelles Newton & Leibnitz ne paroiſſoient pas avoir penſé. Cotes enrichit encore le Calcul intégral de pluſieurs belles méthodes dans un Ouvrage intitulé :

Harmonia menſurarum ; ouvrage qui vient d'être traduit, éclairci & augmenté par le ſavant D. Charles Walmeſley, Bénédictin Anglois. *

Le premier Traité élémentaire de Calcul intégral ſe trouve dans l'Analyſe démontrée du P. Reyneau, publiée en 1708. Il y donne les principales méthodes connues de ſon temps ; il en démontre même quelques-unes qui ne l'avoient pas été par leurs Auteurs. Mais depuis ce temps les méthodes ſe ſont beaucoup multipliées : d'ailleurs le P. Reyneau eſt tombé dans quelques erreurs aſſez conſidérables.

En 1730. parut un Ouvrage de M. Stone, intitulé : *Analyſe des Infiniment-petits, comprenant le Calcul intégral dans toute ſon étendue.* Le titre de ce livre promet beaucoup : mais malheureuſement l'ouvrage ne répond point au titre ; il eſt bon même d'avertir les commençans, qu'ils pourroient être induits en erreur par des paralogiſmes qui s'y rencontrent en aſſez grand nombre. Je me contenterai d'en citer un exemple : *On ne peut trouver*, dit l'Auteur dès la premiere page de ſon livre, *les Intégrales exprimées par des*

* Son Livre a pour titre : *Analyſe des meſures des rapports & des angles, ou réduction des intégrales aux logarithmes & aux arcs de cercle.*

fractions & par des quantités ſourdes, qu'en faiſant diſparoître dans les unes leur dénominateur complexe & dans les autres leur ſigne radical ; ce qui ſe fait par le moyen d'une ſerie infinie. Cette propoſition eſt évidemment fauſſe. Il ſuffit pour en être convaincu, de ſavoir les premiers principes du Calcul différentiel. Ils nous apprennent que toute fraction finie a pour différentielle une fraction, & qu'une quantité compoſée de radicaux les conſerve auſſi dans ſa différentielle. On trouvera donc dans ces deux cas des intégrales finies, ſans avoir beſoin de recourir aux ſeries infinies.

Qu'il me ſoit permis de remarquer ici que ſouvent on abuſe de ces ſeries. La théorie des Suites eſt importante, utile, néceſſaire même en certains cas. Elle a précédé la découverte des nouveaux calculs qui ne peuvent s'en paſſer quelquefois ; & c'eſt le ſupplément le plus heureux que l'on ait trouvé à l'imperfection des méthodes. Mais le calcul des Suites ne donnant que par approximation les valeurs cherchées, & d'ailleurs étant long, pénible, & quelquefois fautif dans la pratique, il me ſemble qu'on ne doit l'employer qu'avec beaucoup de réſerve & de précaution.

Enfin de tous les Ouvrages où l'on s'est proposé de traiter le Calcul intégral, le plus estimable, au jugement des connoisseurs, est celui de M^lle^ Agnesi, intitulé : *Instituzioni analitiche all'uso d'ella gioventú Italiana.* Ainsi l'Italie qui a été le berceau de l'Algebre, a produit aussi l'ouvrage le plus étendu que nous ayons sur la nouvelle Analyse. L'illustre Académicienne dans la partie de son livre destinée au Calcul intégral, suit un ordre qui répand un grand jour sur cette matiere : elle explique & démontre très-clairement différentes méthodes, & fait voir par-tout une grande science du calcul & beaucoup d'adresse pour le manier. Cependant son ouvrage n'est pas complet ; & l'on peut encore regarder le Livre de M. le Marquis de l'Hôpital comme la premiere moitié d'un grand tout qui en attend une seconde.

En effet, depuis que l'Ouvrage de M^lle^ Agnesi a paru, les Mémoires des Académies des Sciences de Paris, de Berlin, de Petersbourg, de Londres, se sont remplis d'excellens morceaux sur le Calcul intégral. M^rs^ Daniel Bernoulli, Euler, Clairault, Fontaine, d'Alembert, & un petit nombre d'autres Géometres qui empêchent aujourd'hui l'Europe de regretter ceux du ſiecle paſſé, ſe ſont fort attachés à cette partie importante de la Géométrie. Non contens de ſe ſervir de cet Art ſublime dans toutes leurs découvertes, ils ont perfectionné l'Art même par des méthodes également fécondes & élégantes.

Ainſi ceux qui veulent apprendre le Calcul intégral, ſont obligés d'étudier un grand nombre de pieces détachées qui ſe trouvent éparſes dans différens livres que ſouvent ils ne connoiſſent pas, ou qu'ils ſont hors d'état de conſulter. Cet obſtacle joint à la difficulté même de la matiere peut rebuter pour toujours, ou au moins arrêter dans leur courſe, de bons eſprits dont les progrès ſeroient avantageux à la Géométrie. Ajoutons que les inventeurs des méthodes écrivant ordinairement pour les Savans, ne ſongent pas toujours à ſe mettre à la portée de ceux qui commencent.

Il étoit donc à ſouhaiter qu'on recueillît & qu'on raſſemblât dans un ſeul Traité les différens morceaux ſur le Calcul intégral, diſperſés dans les ouvrages particuliers & dans les Mémoires des Académies; qu'on fît un choix des méthodes eſſentielles & générales; qu'on les préſentât ſous un point de vue facile à ſaiſir; qu'on rétablît les propoſitions intermédiaires que ſuppriment aſſez ſouvent les inventeurs pour ne donner que des réſultats ; que l'on conduiſît enfin les commençans pas à pas & comme par la main dans les routes embarraſſées de ce labirinthe.

Je n'aurois pas oſé former un tel projet, ſi je n'y avois éte encouragé par les conſeils de quelques amis, dont les lumieres m'ont été d'un grand ſecours. Sûr qu'ils ne m'abandonneroient pas dans une entrepriſe peut-être au-deſſus de mes forces, je ſuis entré dans la carriere : c'eſt au Public à juger des premiers pas que j'y fais.

J'ai mis à la tête de cet Ouvrage une Introduction, dans laquelle j'ai expoſé le Calcul différentiel des quantités logarithmiques & exponentielles, qui ne ſe trouve pas dans l'Analyſe des Infiniment-petits. J'ai été contraint à cette occaſion d'entrer dans quelque détail ſur les principales propriétés des logarithmes & de la logarithmique. Cette Introduction renferme encore une théorie abrégée des ſinus & des coſinus des angles, & des racines imaginaires des équations. Ces théorêmes m'ont été néceſſaires pour ne rien ſuppoſer dont le lecteur n'eût ſous ſes yeux la démonſtration.

Je diviſe enſuite l'Ouvrage en deux parties, La premiere contient les regles du Calcul intégral des différentielles qui n'ont dans leur expreſſion qu'une ſeule variable avec des conſtantes quelconques. La ſeconde partie eſt deſtinée à expliquer les regles du Calcul intégral des quantités ou des équations différentielles qui renferment deux, trois, ou en général pluſieurs variables ; & auſſi le Calcul intégral des ſecondes, troiſiemes, &c. différences. Cette diviſion m'a paru la plus ſimple & la plus naturelle. Je ne donne aujourd'hui que la premiere partie ; la ſeconde la ſuivra de près. Je pourrois même, ſi le Public me paroît le déſirer, y joindre une troiſieme partie, qui contiendroit l'application du Calcul intégral aux plus beaux Problêmes de Géométrie, d'Aſtronomie, de Méchanique & de Phyſique.

Pour remplir le plan de ce Traité, j'ai fait enſorte de n'oublier aucune des méthodes connues juſqu'à préſent. Je les ai placées dans l'ordre où elles m'ont paru ſe prêter le plus grand jour, allant des plus ſimples aux plus compoſées. A la ſuite de l'expoſition de chaque méthode j'ai ajouté un, deux ou pluſieurs exemples généraux, afin de ne laiſſer aux commençans aucune difficulté ſur l'application des principes. Dans les endroits où l'on
ne

ne peut ſe paſſer de calculs longs & pénibles, (& ces endroits ſe rencontrent aſſez fréquemment,) j'ai fait les calculs tout au long, marchant de conſéquences en conſéquences, ſans en ſupprimer aucune; bien convaincu que le mérite principal d'un ouvrage élémentaire, eſt la clarté. En un mot, j'ai tâché qu'il ne reſtât plus à cette matiere que la difficulté qui en eſt abſolument inſéparable. Je prends mon lecteur au ſortir de l'Analyſe des Infiniment-petits de M. le Marquis de l'Hôpital, & je ſuppoſe qu'il a les connoiſſances néceſſaires pour entendre cet Ouvrage.

Les ſources dans leſquelles j'ai puiſé, ſont le *Traité de la quadrature des Courbes* de Newton; l'*Analyſe démontrée* du P. Reyneau d'où j'ai tiré pluſieurs méthodes, en avertiſſant des mépriſes qui lui ſont échappées; les Ouvrages de Jean Bernoulli; le Traité de *l'Analyſe des meſures des rapports & des angles, &c.* de D. Charles Walmeſley; l'Ouvrage de Mlle Agneſi; les Mémoires des Académies des Sciences de Paris, de Berlin & de Petersbourg; & enfin quelques Mémoires de M. d'Alembert qui ne ſont point imprimés, & qu'il a bien voulu me communiquer. Je lui dois trop pour ne pas ſaiſir cette occaſion de lui témoigner

c

publiquement ma reconnoiſſance, mais je n'entreprendrai point de faire ſon éloge : mes louanges n'ajouteroient pas à ſa réputation : il peut s'en repoſer ſur ſes ouvrages, ſur l'Europe & la Poſtérité.

Je finirai par avertir que rien n'eſt à moi dans cet Ouvrage, ſi ce n'eſt l'ordre que j'ai tâché de mettre dans les différentes méthodes, & la forme que je leur donne, & qui ſervira peut-être à les faire entendre. Je ſerai trop récompenſé de mon travail, ſi je puis me flatter de contribuer aux progrès des jeunes Géometres. La gloire des inventeurs eſt plus brillante ſans doute ; mais feroit-on Citoyen, ſi l'on ne préféroit la ſatisfaction d'être utile à l'honneur d'être admiré ?

Isaac Newton (1643-1727)

Isaac NEWTON : Détermination de tangentes à des courbes à l'aide de la méthode des fluxions.

Philippe BRIN d'après une conférence de Jean-Luc VERLEY

En 1740, paraît la traduction en français d'un ouvrage de Newton intitulé: **"La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies"**. D'après Buffon, traducteur de cet ouvrage, le manuscrit a été rédigé en latin entre 1664 et 1671, mais seule une traduction anglaise en a été publiée en 1736, augmentée des commentaires de Colson[1], traducteur du manuscrit.

Dans cet ouvrage, Newton expose la "Méthode des Fluxions" et son application à la recherche de tangentes à des courbes. Cette méthode repose sur des considérations de type infinitésimal et, d'une certaine façon, fait apparaître un algorithme pour la détermination de tangentes s'appliquant à n'importe quel type de courbe. Elle est sensiblement différente des méthodes utilisées par des mathématiciens comme Descartes ou Fermat. En effet, au début du 17° siècle, Descartes et Fermat utilisent des méthodes algébriques pour déterminer les tangentes aux courbes étudiées, ainsi que les propriétés géométriques particulières de ces courbes. Ces méthodes vont faire apparaître ce qui est aujourd'hui appelé polynôme dérivé formel, et qui sera utilisé par l'école cartésienne. Cette école, représentée par Van Schooten, Florimont de Beaune, se situe à contre-courant de ce qui va être le calcul infinitésimal.

Né en 1642 à Woolsthorpe (Lincolnshire), Newton entre en 1661 au Trinity College où il est élève de Barrow[2], dont il prendra la succession à la chaire de mathématiques en 1669. Durant la grande peste de Londres (1665-1666), il retourne dans le Lincolnshire et y continue ses travaux. Ainsi qu'il l'écrira plus tard, c'est à cette période qu'il fera ses plus importantes découvertes, notamment, celles concernant le calcul des fluxions. On peut lire, dans son traité **De Quadratura Curvarum**: *"[...] je suis tombé, dans les années 1665-1666, sur la méthode des fluxions dont je ferai usage dans la quadrature des courbes."*

Les ouvrages de Newton concernant le calcul infinitésimal seront, pour la plupart, publiés bien après leur rédaction:

De Analysi per Aequation Numero Terminorum Infinitas est écrit en 1669 mais ne sera publié qu'en 1711. C'est dans cet ouvrage que la méthode des fluxions apparait pour la première fois.

Vers 1671, et sur les conseils de Barrow, Newton va développer cette méthode dans son manuscrit **Methodus Fluxionum et Seriarum Infinitorum**.

Dans le **De Quadratura Curvarum** qui est écrit en 1676, Newton utilise largement le calcul des fluxions. Cet ouvrage, publié en 1704 en appendice à l'**Opticks**, est donc le premier à diffuser ce "nouveau calcul".

---

[1]John Colson (?-1760), professeur de mathématiques à Cambridge, a traduit plusieurs ouvrages de Newton.
[2]Isaac Barrow (1630-1677), mathématicien anglais, est auteur d'un ouvrage sur la détermination de tangentes et le calcul dérivé (Lectiones Geometricae, 1669)

La plus célèbre œuvre de Newton, **Philosophae Naturalis Principia Mathematica,** sera publiée aussitôt terminée, en 1687. Elle n'utilise pas le calcul infinitésimal, ni la méthode des fluxions, mais certains passages permettent de mieux comprendre les conceptions infinitésimales de Newton. Dans le chapitre intitulé *"Du Mouvement des Corps"*, est développée *"la méthode des premières et dernières raisons"* qui fait apparaître une notion intuitive de limite. Pour justifier ses calculs, Newton emploie ce que François De Gandt[3] appelle "la méthode des témoins finis" qui est, ainsi que nous le verrons, un principe que l'on retrouve dans le calcul des fluxions. Newton essaiera d'écrire les **Principia** à l'aide des notations du calcul des fluxions, mais il semble que l'ouvrage se prêtait mal à cette écriture, ainsi que l'attestent quelques pages publiées dans le volume VI des **Mathematical papers**.[4]

Regardons à présent la façon dont Newton va mettre en place son calcul infinitésimal. Pour présenter les méthodes employées par Newton dans la détermination des tangentes à des courbes, je ne suivrai pas l'ordre chronologique des parutions et m'intéresserai, essentiellement, à la méthode des fluxions. Je citerai les autres œuvres pour apporter quelques éclaircissements.

Dans **La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies,** après avoir développé et montré l'utilité de calculs sous forme de séries dans les propositions I à LIV, Newton propose de résoudre quelques problèmes *"pour mettre l'Art Analitique dans un plus grand jour"*. Il observe alors (prop. LV) que ces problèmes peuvent se ramener à deux problèmes seulement, problèmes que je qualifierai de "mécaniques".

Voici les deux problèmes proposés par Newton:

"[...] *sur un espace décrit par un mouvement local retardé ou accéléré d'une façon quelconque.*

Prop LVI: 1. *La longueur de l'Espace décrit étant continuellement donnée, trouver la vitesse du Mouvement à un tems donné quelconque.*

Prop. LVII: 2.*La vitesse du Mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'Espace décrit à un tems donné quelconque."* [5]

Dans ces deux problèmes, Newton considère deux quantités clairement définies, le temps et l'espace décrit par un mouvement. On remarquera que ces deux quantités serviront de support à l'élaboration de méthodes générales.

Avant de présenter les notions qui permettront d'étudier ces deux problèmes, Newton propose un exemple:

---

[3]François De Gandt. ***Le style mathématique des Principia de Newton.*** (Revue d'Histoire des Sciences.1986.XXXIX-3)
[4]***Le style mathématique des Principia de Newton,*** op.cit.
[5]Newton, **La méthode des fluxions et des suites infinies**, traduction Buffon, Paris, Debure 1740, réédition Blanchard,1966, p20

"LVIII. *Ainsi dans l'équation xx=y, si y représente la longueur de l'Espace décrit à un tems quelconque, lequel tems un autre Espace x en augmentant d'une vitesse uniforme* $\dot{x}$ *mesure et représente comme décrit, alors* $2x\dot{x}$ *représentera la vitesse avec laquelle dans le même instant l'Espace y viendra à être décrit & vice versa; et c'est de là que j'ai dans ce qui suit considéré les Quantités comme produites par une augmentation continuelle à la manière de l'Espace que décrit un corps en mouvement."* [6]

On peut voir dans cet exemple la manière dont Newton va mettre en place un référentiel: **le temps**. En effet, il considère ici le temps comme représenté par une quantité décrivant un espace avec une vitesse uniforme; ainsi, toute quantité possédant cette même propriété pourra être considérée comme représentant le temps. De plus, toute quantité exprimée à l'aide d'une quantité assimilée au temps, pourra être considérée comme décrivant un espace. Ainsi, tout problème concernant le rapport entre deux quantités quelconques pourra être étudié de la même façon qu'un problème "mécanique".

Newton précise ensuite sa conception du temps: *"Comme nous n'aurons pas besoin de considérer le tems autrement que comme exprimé & mesuré par un mouvement local uniforme [..], je n'aurai dans ce qui suit aucun égard au tems considéré proprement comme tel; mais je supposerai que l'une des quantités proposées de même genre doit augmenter par une Fluxion uniforme, à laquelle quantité je rapporterai tout le reste comme si c'étoit au tems; donc par* ***Analogie*** *cette quantité peut avec raison recevoir le nom de tems; ainsi quand dans la suite je me servirai du mot* ***Tems****, je n'entends jamais le tems proprement pris comme tel, mais seulement une autre Quantité par l'augmentation ou Fluxion de laquelle le tems peut être exprimé & mesuré."*[7]

On voit ainsi apparaître ce qu'on peut appeler "temps absolu".
Newton définit ensuite les termes Fluentes (Quantités considérées comme augmentées graduellement et indéfiniment, notées v, x, y & z) et Fluxions (vitesses dont sont augmentées les fluentes, notées $\dot{v},\dot{x},\dot{y}$ & $\dot{z}$).
Il est important de noter que, par analogie à l'exemple LVIII, la référence à un temps absolu va permettre d'établir une relation entre les fluxions de deux quantités fluentes dont on connaît une relation.

Un autre avantage, sans doute fondamental, est que la notion de temps induit une notion de continuité, c'est à dire que tout instant est atteint et même dépassé, ce qui, d'une certaine façon, permet d'évacuer le problème de l'existence de la limite: à un instant donné, il doit "se passer" quelque chose.

C'est ainsi que l'on peut certainement justifier la proposition XIII du PROBLEME I: "*Les moments des Quantités Fluentes (c'est-à-dire leur parties indéfiniment petites, par l'accélération desquelles, dans des parties indéfiniment petites de temps, elles sont continuellement augmentées) sont comme les vitesses de leurs Fluxions ou Accroissements.*"[8]

En effet, pour justifier cette proposition non démontrée, Newton considère que *o* étant une quantité indéfiniment petite, le moment d'une quantité quelconque x est le produit de sa fluxion $\dot{x}$ par *o*, soit $\dot{x}o$. Ainsi, les moments $\dot{v}o,\dot{x}o,\dot{y}o,\dot{z}o$ des quantités v,x y et z seront comme les fluxions $\dot{v},\dot{x},\dot{y}$ et $\dot{z}$ de ces mêmes quantités.

---

[6]**La méthode des fluxions**, op.cit. p20-21
[7]**La méthode des fluxions**, op.cit. p21
[8]**La méthode des fluxions**, op.cit.p25

La définition du moment fournie par Newton pourrait correspondre à la variation infinitésimale de la quantité fluente pendant un temps infiniment petit, mais cette définition ne permet pas de justifier la proposition. Pour cela, il est nécessaire de se rapporter à un autre ouvrage.

Dans les **Principia**, Newton fournit des exemples de sa conception du rapport de quantités infinitésimales sans, toutefois, utiliser de notation propre au calcul infinitésimal. Cette conception est illustrée par les lemmes placés au début du chapitre des **Principia** intitulé *"Du Mouvement des Corps"* (Annexe 2).

Observons, notamment, le lemme suivant:

LEMME VII: *Les mêmes choses étant posées, (si un arc ACB donné de position est soutenu par la corde AB, & qu'au point A placé dans le milieu de la courbure continue, il soit touché par une droite AD, & que les points A& B s'approchent l'un de l'autre jusqu'à ce qu'ils coïncident) la dernière raison qu'ont entr'elles l'arc, la corde & la tangente, est la raison d'égalité.*[9]

En d'autres termes, les quantités infinitésimales AB, AD et l'arc ACB sont des "infiniment petits équivalents". Newton ne parle pas ici, d'infiniment petit, cependant, la méthode[10] qu'il emploie pour démontrer ce lemme s'apparente à celle employée dans la **Méthode des Fluxions** en ce qu'elle consiste à comparer des rapports de quantités infinitésimales à des rapports de quantités finies qui servent alors de "témoins" ainsi que le remarque François De Gandt[11].

LA METHODE DES FLUXIONS: PROBLEME I

Etant donné la Relation des Quantités Fluentes, trouver la Relation de leurs Fluxions. (Annexe 1)

Afin de résoudre ce problème (généralisation de l'exemple LVIII), Newton fournit une règle sans donner de justification.

Règle I. Disposez l'équation par laquelle la relation donnée est exprimée suivant les dimensions de l'une de ses quantités fluentes x par exemple, et multipliez ses termes par une progression arithmétique quelconque et ensuite par $\frac{\dot{x}}{x}$*. Faites cette opération séparément pour chacune des quantités fluentes; après quoi égalez à zéro la somme de tous les produits et vous avez l'équation cherchée.*[12]

Voici un exemple explicite fourni par Newton:

Exemple I. Si la relation des Quantités Fluentes x & y est $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, *disposez d'abord les Termes suivant x, & ensuite suivant y, & multipliez-les comme vous voyez.*

Multipliez	x^3	$-ax^2$	$+axy$	$-y^3$	$-y^3$	$+axy$	$\begin{matrix}-ax^2\\+x^3\end{matrix}$
par	$\frac{3\dot{x}}{x}$.	$\frac{2\dot{x}}{x}$.	$\frac{\dot{x}}{x}$.	0	$\frac{3\dot{y}}{y}$.	$\frac{\dot{y}}{y}$.	0
Vous aurez	$3\dot{x}x^2$	$-2a\dot{x}x$	$+a\dot{x}y$	*	$-3\dot{y}y^2$	$+a\dot{y}x$	*

---

[9] Newton, **Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle**, Traduction Madame la Marquise du Chastellet, Paris, 1759, Réédition Blanchard.

[10] Voir François De Gandt op.cit.

[11] Voir François De Gandt op.cit

[12] **La méthode des fluxions**, op.cit. p25

La somme des produits est $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x$, *qui étant égalée à zéro, donne la relation des Fluxions* $\dot{x}$ & $\dot{y}$; *car si vous donnez à volonté une valeur à x, l'Equation* $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ *donnera la valeur de y; ce qui étant déterminé, l'on aura* $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$.

On peut constater que la suite arithmétique qui intervient a 0 pour premier terme. Le terme "quelconque" qualifie en fait la raison de la suite arithmétique utilisée. Par la suite, dans l'exemple II, il utilise une suite arithmétique ne commençant pas par 0, mais le résultat obtenu est incorrect. Le calcul est d'ailleurs inachevé. Dans les exemples suivants, quelques exemples sont développés, notamment un exemple utilisant une quantité fluente auxiliaire z pour exprimer la relation entre les fluxions de deux quantités x et y.

On peut voir dans cette règle une similitude avec les règles de Hudde qui sont publiées en 1659 par Van Schooten[13] et qui ont été utilisées par de nombreux mathématiciens de l'école cartésienne. Ces règles sont algébriques, mais on peut actuellement les interpréter comme propriétés du polynôme dérivé formel.

Règles de Hudde:

1) Si r est racine double de l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ et $b_0, b_1, \ldots\ldots, b_{n-1}, b_n$ une suite arithmétique quelconque, alors r est solution de l'équation $b_0a_0x^n + b_1a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + b_{n-1}a_{n-1}x + b_na_n = 0$.

2) Si $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n$ admet un extremum en a, alors a est racine de l'équation $na_0x^n + (n-1)a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x = 0$.

La première règle peut s'interpréter actuellement de la façon suivante: si r est racine double du polynôme P, alors r est racine de son polynôme dérivé P'. Quant à la seconde, c'est, à un facteur x près, le théorème suivant: Si P(x) admet un extremum en a, alors P'(a)=0. On peut voir aussi dans cette seconde règle, une version légèrement modifiée, et plus rapidement utilisable, de la "méthode des minima et maxima" de Fermat.

Newton connaissait sans doute ces règles, puisqu'il cite la "méthode de Hudde" pour la détermination des minima et maxima dans le PROBLEME III. Là se trouve peut-être la raison pour laquelle il parle de suite arithmétique **quelconque** dans la détermination des fluxions, puisqu'il énonce la seconde règle de Hudde et y introduit une suite arithmétique quelconque, ce que ne fait pas Hudde. Il est à noter, cependant, que Newton ne semble pas entièrement convaincu par sa règle I puisqu'il éprouve le besoin d'en donner une "démonstration" dans les propositions XV et XVI du PROBLEME I (annexe 3).

Il propose de remplacer les quantités fluentes x et y par ces mêmes quantités augmentées de parties infiniment petites, par l'accession desquelles elles sont continuellement augmentées dans des parties indéfiniment petites de temps, soit $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$. Ceci étant énoncé, il reprend la relation de l'exemple I précédemment cité et montre qu'il obtient le même résultat qu'en utilisant la règle I.

[13]Geometria, à Renato Des Cartes. Louis et Daniel Elzevir, Amsterdam 1659. **Le Reductione Aequationum** de Hudde p401 à 516.

XVI. Soit donc l'Equation donnée quelconque $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ *je substitue* $x + \dot{x}o$ *pour x, &* $y + \dot{y}o$ *pour y, & j'ai*

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2 oox + \dot{x}^3 o^3 - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2 oo + axy \\ +a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2 ooy - \dot{y}^3 o^3 \end{array}\right\} = 0$$

XVII. Maintenant j'ai par la supposition $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, *j'efface donc ces Termes dans l'Equation précédente, & ayant divisé par o tous les termes qui restent, j'aurai*

$$3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2 ox + \dot{x}^3 o^2 - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2 o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2 oy - \dot{y}^3 o^2 = 0.$$

Mais comme o a dû être supposé infiniment petit, pour pouvoir représenter le momens des Quantités, les Termes qu'il multiplie sont nuls en comparaison des autres, je les rejette donc, & il me reste $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$, *comme ci-dessus dans l'Exemple premier.*

Une seconde raison d'insatisfaction de la part de Newton envers les règles de Hudde, est l'impossibilité de les employer pour des *"Equations affectées de Quantités sourdes"*, c'est à dire non rationnelles.

Le PROBLEME II est l'inverse du PROBLEME I:" *Etant donné la Relation des Fluxions, trouver celle des Quantités Fluentes"*, et Newton le traite en inversant simplement les opérations effectuées pour résoudre le PROBLEME I. Il est important de noter qu'il se servira de ce type de résolution dans le PROBLEME IX pour *"Trouver l'aire d'une courbe proposée quelconque"*, et c'est sans doute la première fois que ce problème est proposé comme inverse de celui de la "dérivation", bien que Barrow, dans ses **Lectiones Geometricae de 1670** en donne une formulation géométrique..

Le PROBLEME III, qui concerne la recherche des minima et des maxima, est traité rapidement. Une fois posée la règle qui consiste à annuler le "polynôme dérivé", et ayant indiqué son insuffisance pour des équations "plus délicates", Newton fournit un exemple puis une série de problèmes équivalents à la recherche d'extrema.

PROBLEME IV

Tirer les Tangentes à des Courbes.

Dans cette partie, Newton propose neuf méthodes différentes pour tirer des tangentes à des courbes. Ces méthodes sont classées dans un ordre "croissant" de difficulté. La première concerne le cas d'une courbe dont les points sont définis par une relation entre l'abscisse et l'ordonnée, et la dernière est une courbe "mécanique" dont les points sont "attachés" à une courbes donnée quelconque.

Je souhaiterais présenter ces méthodes et mettre en évidence leur aspect algorithmique, les différences étant, pour l'essentiel, dues à des considérations géométriques.

Avant d'étudier ces méthodes, je souhaite préciser la manière dont Newton définit les "grandeurs mathématiques" dans son introduction au **Tractatus de Quadratura Curvarum:** *"Je ne considère pas les grandeurs mathématiques comme formées de parties, si petites soient-elles, mais comme décrites par un* *mouvement continu. Les lignes sont décrites et engendrées , non par la juxtaposition de leurs parties, mais par le mouvement de points, les surfaces par le mouvement des lignes, les solides par le mouvement des surfaces, les angles par la rotation des côtés et les temps par un flux continu".*

Cette conception des grandeurs mathématiques lui permettra ainsi d'appliquer sa méthode des fluxions aux courbes algébriques aussi bien que transcendantes ou mécaniques.

Tirer les Tangentes des Courbes

PREMIERE MANIERE

On se place ici dans le cas d'une courbe dont les points sont définis par une relation entre abscisse et ordonnée. Le point D est donc défini par son abscisse AB et son ordonnée BD. Faisons subir au point D un déplacement indéfiniment petit jusqu'en *d*. Soit A*b* l'abscisse de *d* et *c* le point de *bd* placé sur la parallèle à AB passant par D. Traçons de plus la droite D*d* qui coupe AB au point T.(voir figure 1.1)

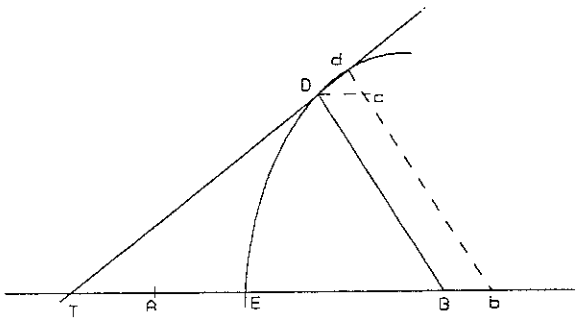


fig 1.1

Les deux triangles DBT et *dc*D sont semblables (homothétiques), donc on en déduit l'égalité des rapports: $\frac{TB}{BD}=\frac{Dc}{cd}=\frac{Bb}{cd}$.

Or BD est l'ordonnée du point D et B*b* et *cd* sont respectivement les "moments" des quantités AB et BD. D'après la proposition XIII du PROBLEME I, le rapport des moments est comme le rapport des fluxions, donc, si on note x et y les quantités AB et BD, on obtient: $\frac{TB}{y}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$, soit TB $=\frac{\dot{x}y}{\dot{y}}$, et la tangente est ainsi définie par la sous-tangente comme dans tous les ouvragesdu 17°.

Newton fournit ensuite deux exemples concernant des courbes définies à l'aide de relations algébriques[14], puis l'exemple 3 de la conchoïde de Nicomède.

Rappelons tout d'abord ce qu'est la Conchoïde de Nicomède. Dans ses commentaires sur le traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède. Eutocius expose la génération de cette courbe. Une autre définition est

---

[14] On peut remarquer que Newton effectue une erreur dans le premier exemple où il inverse le rapport $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$

donnée par Pappus dans la Proposition XXV du livre IV de *La Collection Mathématique*. Voici donc comment cette courbe est engendrée:

Une droite AB (appelée règle) et un point G (appelé pôle) étant donnés, on considère tous les segments d'extrémité G tels que AB intersecte ses segments en découpant sur ceux-ci un segment PQ de longueur constante (voir figure 1.2)

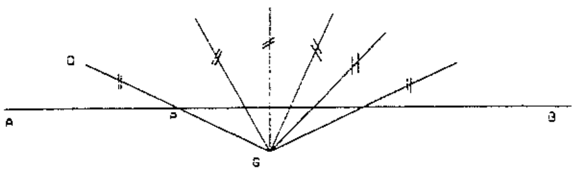


figure 1.2

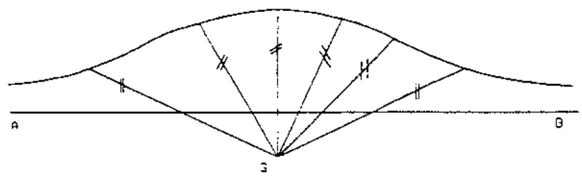


figure 1.2 bis

Les extrémités des segments opposées au point G forment alors la Conchoïde "supérieure "de Nicomède.(voir figure 1.2 bis)

Une autre courbe appelée conchoïde inférieure peut être construite en considérant des segments de longueurs égales, situés dans le demi plan contenant G, dont l'une des extrémités se trouve sur la droite AB et dont le support passe par G (voir figure 1.3 et 1.3 bis).

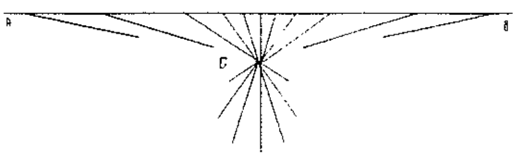


figure 1.3

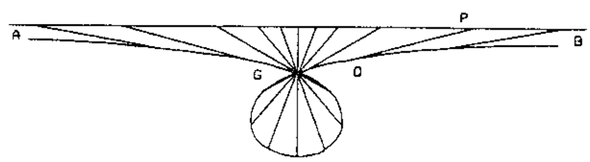


figure 1.3 bis

Regardons à présent l'exemple 3 traité par Newton.

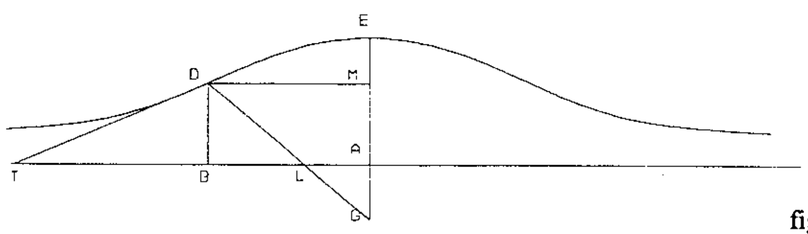


fig 1.4

Un point D étant donné sur la conchoïde, il pose AB = x son abscisse, BD=y son ordonnée, LD=c la distance "fixe" associée à la conchoïde et GA=b la distance du pôle G à la droite AB.

Les triangles DBL et GMD sont semblables (égalité des angles) donc: $\dfrac{LB}{BD} = \dfrac{DM}{MG}$ c'est à dire $\dfrac{\sqrt{c^2 - y^2}}{y} = \dfrac{x}{b+y}$ que l'on peut écrire sous la forme $(b+y)\sqrt{c^2 - y^2} = xy$.

En posant $z = \sqrt{c^2 - y^2}$, on obtient les deux équations suivantes:

$(b+y)z = xy$ et $z^2 = c^2 - y^2$

La méthode des fluxions fournit alors les deux relations suivantes:

$b\dot{z} + \dot{y}z + \dot{z}y = \dot{x}y + \dot{y}x$ et $2z\dot{z} = -2y\dot{y}$ d'où, en éliminant le terme $\dot{z}$, on obtient: $-\dfrac{b\dot{y}y}{z} - \dfrac{\dot{y}y^2}{z} + \dot{y}z = \dot{x}y + \dot{y}x$ce qui peut s'écrire sous forme d'égalité de rapports: $\dfrac{y}{z - \dfrac{by}{z} - \dfrac{y^2}{z} - x} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{BD}{BT}$.

Ce dernier rapport est l'application de la première manière, et puisque BD=y, on en déduit que $BT = z - x - \dfrac{by + y^2}{z} = -(x-z) - \dfrac{y(b+y)}{z}$.

Puisque x-z=AB-BL= AL et b+y = GA + AM = GM, on peut écrire:

$$-BT = AL + \frac{BD.GM}{BL}$$

Newton précise que le signe - devant BT signifie que le point T est pris du côté opposé au point A. Il montre ensuite, dans un Scholie, comment on peut déterminer le point d'inflexion, et utilise pour cela la méthode des minima et maxima décrite dans le PROBLEME III.

SECONDE MANIERE

Une courbe DE étant donnée, considérons un point G et une droite AB des abscisses. Le point D ayant pour abscisse AB, GD est la sous-tendante de D associée au point G.

A partir d'une relation entre les deux quantités "fluentes", x=AB (abscisse de D) et y=GD, cette méthode consiste à obtenir une relation entre leur fluxions.

D ayant effectué un déplacement infiniment petit en d, on considère le point k de GD tel que Gk= Gd. Le moment de GD est alors égal à GD - Gd, soit GD - Gk = Dk. Soit b le point de AB tel que Ab soit l'abscisse de d, et c le point de BD tel que dc soit parallèle à AB, dc est alors égal à bB, c'est à dire au moment de AB. Soit enfin T, l'intersection de Dd avec la droite AB, et F le projeté orthogonal de T sur GD.(voir figure 2.1)

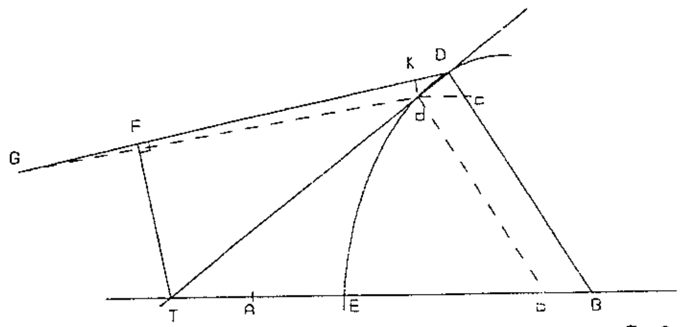


fig 2.1

Ceci étant posé, Newton affirme que *"les trapèzes Dcdk et DBTF sont semblables"*. Il faut ici entendre le mot trapèze au sens d'Euclide, c'est à dire quadrilatère puisque les côtés FT et DB n'ont aucune raison d'être parallèles. De plus, il est à noter que le quadrilatère Dcdk ici représenté, n'est pas le quadrilatère considéré par Newton, puisque Dd est supposé "infiniment petit". Cette notion est indispensable pour pouvoir affirmer la similitude des "trapèzes", car alors, dk est aussi infiniment petit, et la droite dk peut être considérée comme tangente au cercle de centre G et de rayon Gk et à ce titre perpendiculaire au rayon Gk. Ce faisant, Dcdk est bien l'image de DBTF par une homothétie de centre D, et les deux "trapèzes" sont donc semblables.

On en déduit l'égalité des rapports: $\frac{DB}{DF} = \frac{Dc}{Dk} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$

<u>Application à la conchoïde:</u>

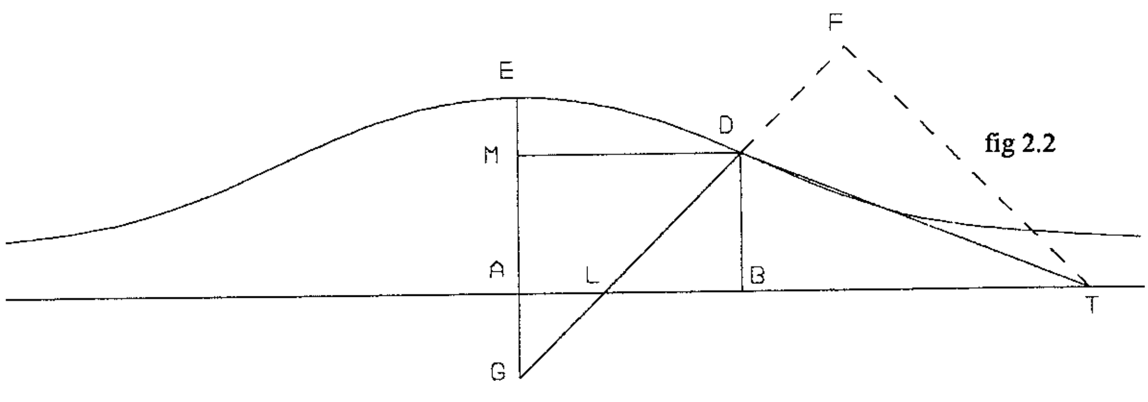


fig 2.2

Il est à souligner que cette "seconde manière" est beaucoup mieux adaptée que la précédente pour la recherche des tangentes à la conchoïde puisque celle-ci est définie à partir d'une droite et d'un point. Reprenant les notations de la figure précédente, posons x=GD et y=BD. Les deux triangles BDL et LAG sont semblables, donc $\frac{BD}{DL} = \frac{AG}{LG}$ d'où $\frac{y}{c} = \frac{b}{c-x}$ et on en déduit la relation suivante: $cy - xy - bc = 0$. Appliquant alors la règle pour la détermination de la relation des fluxions, on obtient: $c\dot{y} - \dot{x}y - \dot{y}x = 0$ ce qui entraîne $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{x-c}{y}$. D'après le résultat de la seconde manière, $\frac{DF}{DB} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{x-c}{y}$ or DB= y ce qui entraîne l'égalité suivante: DF=x-c=GL.

Le tracé de la tangente à la conchoïde est alors possible géométriquement. Un point D de la courbe étant donné, prolongeons le segment GD d'une longueur égale à GL jusqu'au point F. La perpendiculaire à GF au point F coupe la "règle" en un point T qui appartient à la tangente et celle-ci est donc la droite (DT).(voir figure 2.2)

TROISIEME MANIERE

Deux points A et B étant donnés ainsi qu'un point D d'une courbe, AD et BD sont les sous-tendantes associées au point D. Faisons effectuer au point D un déplacement infiniment petit jusqu'en d. On considère le point k de AD tel que Ak=Ad et le point c de BD tel que Bc=Bd: on a alors
kD=AD-Ak=AD-Ad et cD=BD-Bc=BD-Bd. C'est à dire que les moments contemporains des fluentes AD et BD sont respectivement kD et cD.
Soit F, le point de AD tel que $\frac{DF}{DB} = \frac{Dk}{Dc}$: construisons les perpendiculaires à AD en F et à BD en B et soit T leur point d'intersection. Ainsi que dans la "seconde manière", la quantité dc est infiniment petite et la droite (dk) peut être considérée comme tangente au cercle de centre A et de rayon Ak, donc perpendiculaire au rayon Ak. De même, la droite (dc) peut être considérée perpendiculaire au rayon Bc. Ceci permet d'affirmer l'homothétie des quadrilatères DBTF et Dcdk (du fait de l'égalité des rapports $\frac{DF}{DB} = \frac{Dk}{Dc}$) et donc l'alignement des points D,d et T. Le point T appartient donc à la tangente ("touchante") à la courbe au point D.(voir figure).

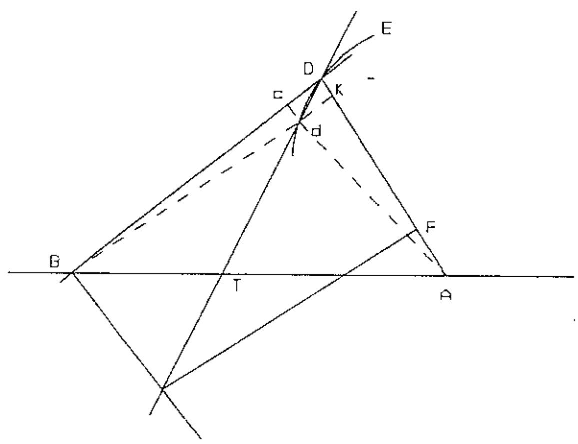
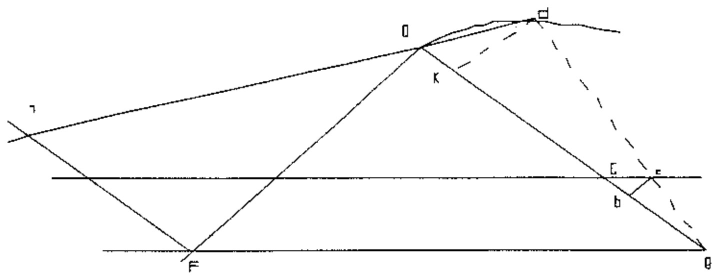


fig 3.1

On peut ainsi étudier certaines courbes définies par rapport à deux points A et B. D étant un point d'une telle courbe et posant x=AD et y=BD, on aura $\dot{x} = kD$ et $\dot{y} = cD$, donc $\frac{FD}{BD} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$. Cette méthode peut s'appliquer à la conchoïde, mais de façon malaisée. Newton en propose l'utilisation pour des courbes que Descartes nomme "ellipses du second ordre", et définies par une relation de la forme $a + \frac{ex}{d} - y = 0$ (ou $a - \frac{ex}{d} - y = 0$).

QUATRIEME MANIERE

Cette quatrième manière est fournie par Newton sans justification, mais s'adapte parfaitement à la conchoïde.



Etant donné un point B, une droite (AC) et une courbe, on trace, en un point D de la courbe, la perpendiculaire à la droite (BD). Celle-ci coupe la parallèle à (AC) passant par B au point F. On trace en F la perpendiculaire (FT) à la droite (DF). Pour chaque point D de la courbe, on considère les quantités fluentes BD et BC où C est l'intersection de la droite (BD) avec la droite (AC). D ayant effectué un déplacement infiniment petit en d, on pose deux points b et k de (BD) tels que Bb=Bc et Bk=Bd. Selon le même raisonnement que précédemment, on peut convenir que les droites (cb) et (dk) sont perpendiculaires à la droite (BD). Les triangles TFD et Dkd sont donc semblables ainsi que les triangles BDF et Cbc, et les triangles Bbc et Bkd. De ces similitudes, on peut déduire les égalités de rapports suivantes: $\frac{FT}{FD}=\frac{kD}{kd}$, $\frac{FD}{BD}=\frac{bc}{bC}$ et $\frac{Bd}{Bc}=\frac{kd}{bc}$. Ce dernier rapport est aussi égal à $\frac{BD}{BC}$ car Dd et Cc sont infiniment petits. On obtient donc les trois égalités suivantes: $\frac{FT}{FD}=\frac{kD}{kd}$, $\frac{FD}{BD}=\frac{bc}{bC}$, $\frac{BD}{BC}=\frac{kd}{bc}$ et leur produit conduit à l'égalité énoncée par Newton: $\frac{FT}{BC}=\frac{kD}{bC}$, les quantités kD et bC étant les moments contemporains des fluentes BD=x et BC=y. Les moments de quantités fluentes étant dans le rapport de leurs fluxions, on obtient:

$$\frac{FT}{BC}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$$

Application à la conchoïde: Soit DE la conchoïde: posons GD=x *et* GL=y. On a la relation $x=y+c$ d'où $\dot{x}=\dot{y}$.

D'après le résultat précédent, on doit avoir: $\frac{FT}{GL}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ d'où l'on tire FT=GL. Construisons alors la droite (χ) parallèle à (AB) passant par G. La perpendiculaire à GD au point D coupe (χ) au point F et la perpendiculaire à DF au point F coupe (AB) au point T puisqu'alors on a bien FT=GL et la droite (TD) est tangente en D à la conchoïde.(voir figure 4.2)

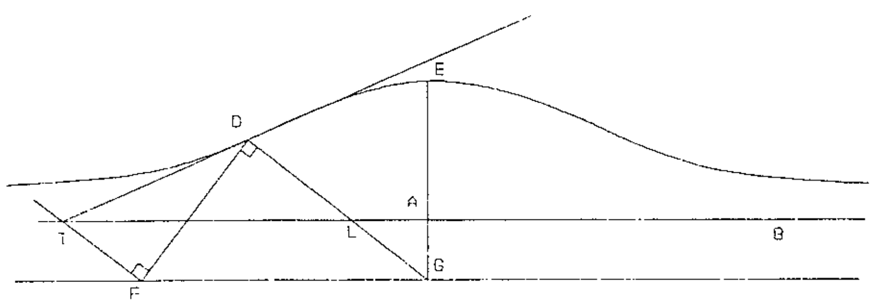


fig 4.2

Les cinquième et sixième manières sont des variantes des précédentes proposées de façon succincte. Regardons simplement quelles sont les similitudes mises en jeu.

CINQUIEME MANIERE

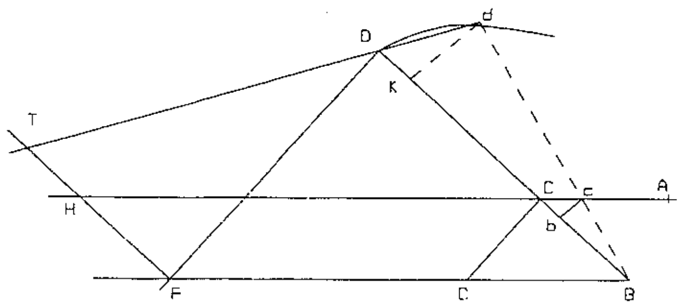


fig 5.1

Les triangles GCB et cbC sont "semblables", on peut donc en déduire l'égalité de rapport: $\frac{BC}{BG} = \frac{Cb}{Cc}$. D'après la quatrième manière, on avait $\frac{FT}{BC} = \frac{kD}{bC}$, d'où l'on peut conclure $\frac{FT}{BG} = \frac{kD}{Cc}$. C'est à dire, si on a posé x=BD et y=AC, $\frac{FT}{BG} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$, puisque kD et Cc sont les moments des fluentes BD et AC.

SIXIEME MANIERE

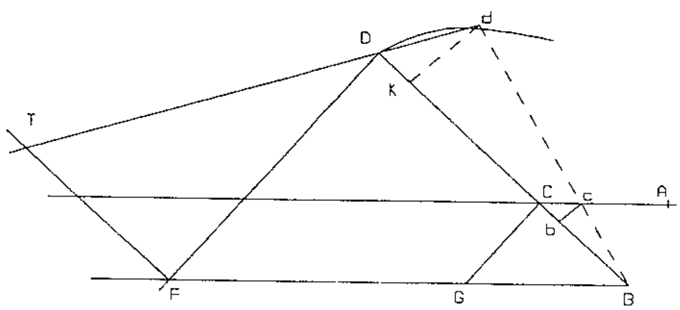


fig 6.1

La quatrième manière nous avait fourni l'égalité $\frac{FT}{BC} = \frac{kD}{bC}$ d'où l'on peut déduire $\frac{FT}{BC} - 1 = \frac{kD}{bC} - 1$ c'est à dire $\frac{FT - BC}{BC} = \frac{kD - bC}{bC}$, or FT-BC = FT-FH = HT et kD-bC est la différence des moments contemporains de BD et BC c'est à dire le moment de CD que je noterai $\dot{\widehat{CD}}$. On a donc l'égalité $\frac{HT}{BC} = \frac{\dot{\widehat{CD}}}{bC}$ et, puisque d'après la similitude des triangles BCG et Ccb on a $\frac{BC}{BG} = \frac{Cb}{Cc}$, on peut conclure: $\frac{HT}{BG} = \frac{\dot{\widehat{CD}}}{cC} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ en ayant posé x=CD et y=AC.

Il est à noter que pour ces trois dernières méthodes, Newton ne fournit aucun exemple.

Dans les deux méthodes suivantes, Il s'intéresse à des courbes dont les points ne sont pas rapportés à des droites mais à d'autres courbes. Il considère notamment deux courbes particulières: la spirale d'Archimède et la quadratrice. Rappelons la génération de ces deux courbes.

La spirale: une droite AB étant donnée, considérons le mouvement d'un point M tel que la distance AM reste toujours proportionnelle à l'angle (AB,AM). La trajectoire du point M est alors une spirale d'Archimède.

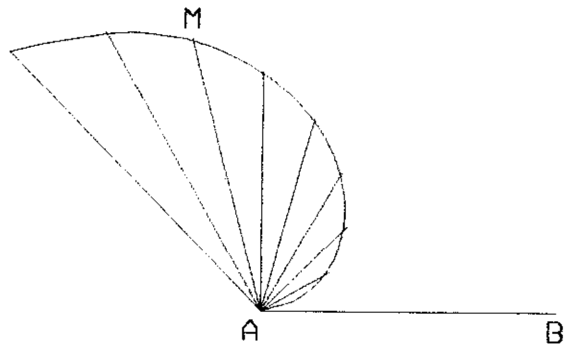


fig 7.1

La quadratrice: un segment AB étant donné ainsi qu'une droite AC perpendiculaire à AB en B, considérons le mouvement d'un point M tel que la distance du point M à la droite BC reste proportionnelle à l'angle (AB,AM). Lorsque la distance BM' est à AB comme l'angle (AB,AM) est à un angle droit, la courbe obtenue est la quadratrice dont Pappus donne la définition à la proposition XXX du livre IV de *La Collection Mathématique*.

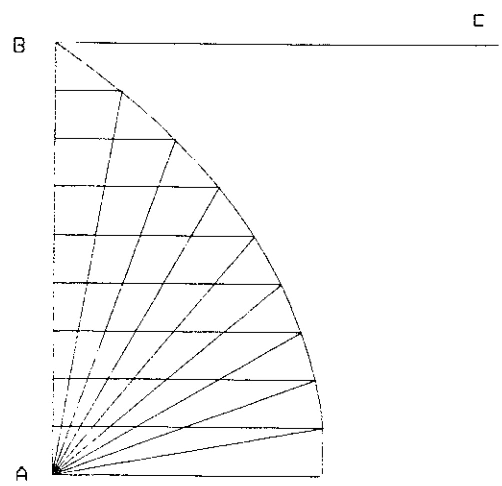


fig 8.1

SEPTIEME MANIERE

ADE étant une spirale, traçons la droite AD qui coupe en G le cercle de centre A et de rayon AB. Faisons effectuer au point D un déplacement infiniment petit en d, le point G se meut en g. Soit c le point de AD tel que Ac=Ad. Considérant les fluentes x=segment AD et y=arc de cercle BG, leurs moments contemporains sont égaux à Dc et Gg. At étant parallèle à dc, T est l'intersection de Dd et At. Les triangles ADT et Dcd sont semblables et on a $\frac{cD}{cd} = \frac{AD}{AT}$.

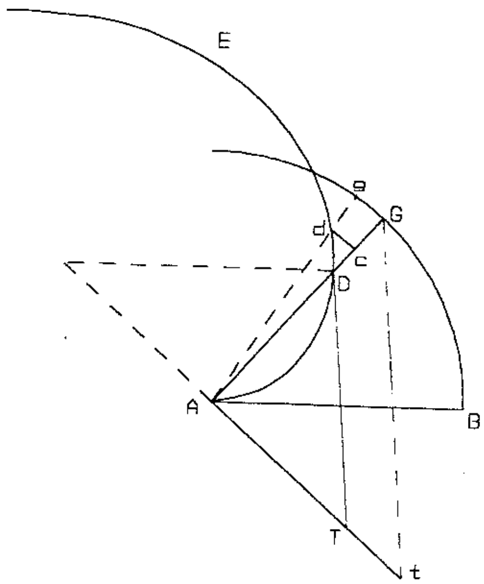


fig 7.2

Par ailleurs, cd et Gg sont des arcs de cercles concentriques, d'où $\frac{cd}{Gg} = \frac{Ad}{AG} = \frac{AD}{AG}$, soit, ayant tracé (At) parallèle à (AT), $\frac{cd}{Gg} = \frac{AT}{At}$. Après multiplication des deux égalités $\frac{cD}{cd} = \frac{AD}{AT}$ et $\frac{cd}{Gg} = \frac{AT}{At}$, on obtient $\frac{cD}{Gg} = \frac{AD}{At}$.

Newton écrit alors: *Ainsi, l'Equation qui exprime la Relation de BG à AD étant donnée; cherchez la Relation de leur Fluxions, & prenez At à AD dans le même rapport, Gt sera parallèle à la tangente.*

Dans le cas de la spirale d'Archimède, la relation des fluentes s'écrit: $\frac{ax}{b} = y$, on obtient donc $\frac{a\dot{x}}{b} = \dot{y}$, c'est à dire $\frac{a}{b} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{AD}{At}$. Soit alors P le point de At tel que BDT soit rectangle en D, AD est sa hauteur donc $AD^2 = At.AP$. Ce qui permet d'obtenir: $\frac{a}{b} = \frac{AD}{At} = \frac{AD^2}{At.AD} = \frac{At.AP}{At.AD} = \frac{AP}{AD}$. Donc, en plaçant le point P sur At de sorte que $\frac{AP}{AD} = \frac{a}{b}$[15], PD est perpendiculaire à la tangente en D à la courbe.

[15]Newton (ou Buffon) semble avoir fait une erreur en écrivant $\frac{AP}{AB} = \frac{a}{b}$.

HUITIEME MANIERE

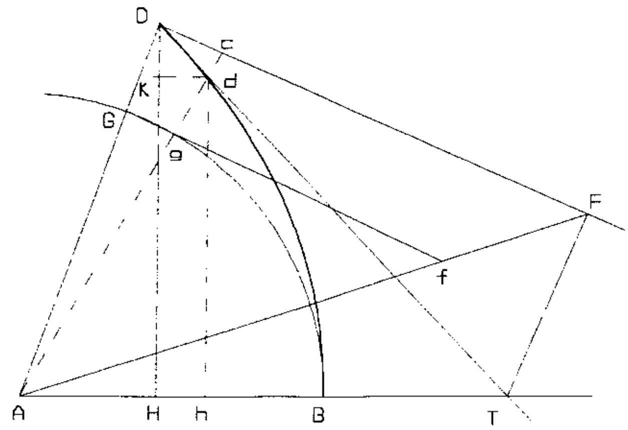


fig 8.2

Etant donné la courbe quadratrice BD, on a fait subir un déplacement infiniment petit au point D, puis prolongé la droite Ad en c de sorte que Ac=AD. Ayant tracé la droite Dd qui coupe AB en T, on a tracé la droite TF, perpendiculaire à Cc en F. dhHk est un rectangle et la droite (Gg) coupe AF en f.

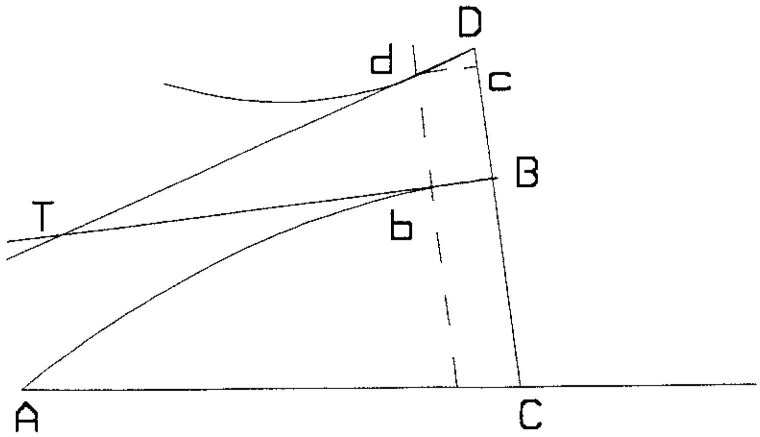
Considérons les deux quantités fluentes DH=x et BG=y dont les moments contemporains sont respectivement Dk et Gg. Cherchons donc à établir le rapport de ces moments comme égal au rapport de deux quantités "finis". D et c appartiennent au cercle de centre A et de rayon AD, la droite (Dc) peut donc être considérée comme tangente à ce cercle donc perpendiculaire au rayon Ac de même (gf) est perpendiculaire à (Ac).

Les quadrilatères DATF et Dkdc sont donc "semblables" et l'on a: $\frac{Dk}{Dc}=\frac{DH}{DF}$. De plus, le parallélisme des droites (Gg) et (Dc) permet d'obtenir $\frac{Dc}{Gg}=\frac{DF}{Gf}$ puis, composé avec le rapport précédent, $\frac{Dk}{Gg}=\frac{DH}{Gf}$, soit $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=\frac{DH}{Gf}$. On peut ainsi tracer la tangente au point D en suivant la méthode décrite par Newton en ces termes:

Ainsi par l'équation qui exprime la Relation de BG & de DH, trouvez la Relation des Fluxions, & dans ce même rapport prenez la tangente Gf du cercle BG, & la ligne DH; tirez DF parallèle à Gf, qui rencontre Af prolongée en F; à ce Point F élevez la perpendiculaire FT, qui rencontre AB en T; & enfin tirez la Ligne droite DT elle sera tangente à la quadratrice.

NEUVIEME MANIERE

Etant donné une courbe ABF et une tangente à cette courbe (Bt), le point B ayant pour abscisse AB et pour ordonnée CB (voir figure). On considère une autre courbe DE dont les points D sont définis par une relation entre l'arc AB (ou un autre arc mesuré sur la courbe ABF) et la différence des ordonnées deB et D (soit BD).



Newton nous dit que la tangente à la courbe DE en D sera la droite (DT) telle que, T étant sur (Bt), $\frac{BT}{BD}=\frac{fluxion(AB)}{fluxion(BD)}$[16].

Ce résultat s'obtient en considérant un déplacement infiniment petit du point D en d. Le point B se déplace alors en b, et si on considère le point c de BD tel que (bdc) est parallèle à (Bb), et le point T intersection des droites (Bb) et Dd), alors les triangles dcD et BTD sont semblables, d'où il s'en suit l'égalité des rapports $\frac{BT}{BD}=\frac{dc}{cD}$.

Or dc et Db sont les moments contemporains des quantités fluentes AB (cd=bB) et cD (cD=BD-bd) ce qu'il fallait démontrer.

Ce dernier exemple est, me semble-t-il, l'illustration parfaite du caractère algorithmique de la méthode employée par Newton pour tracer des tangentes. En effet, pour chacune des "manières" exposées, il est bien sûr nécessaire d'adapter à la figure les "témoins finis" qui serviront à la détermination de la tangente. Mais, cette adaptation effectuée, le procédé consistera toujours à calculer le rapport des fluxions à partir de la relation des fluentes qui, elles, sont imposée par la définition de la courbe même. Ainsi, Newton, pour conclure le chapitre concernant le tracé des tangentes, s'exprime en ces termes:

LXII. On peut avec la même facilité tirer les Tangentes lorsque la Relation de BD à AC, ou à BC, est donnée par une équation quelconque, ou lorsque les Courbes sont rapportées à des Lignes droites ou à d'autres Courbes d'une façon quelconque.

LXIII. On peut tirer des mêmes Principes la Solution de plusieurs autres problèmes, comme ceux qui suivent.

---

[16]Une erreur apparaît dans le texte où il est noté $\frac{BT}{AB}=\frac{fluxion(AB)}{fluxion(BD)}$. Cette erreur est d'ailleurs rectifiée dans les exemples.

Suivent alors sept problèmes faisant intervenir des courbes, des angles et même des surfaces. et voici la dernière phrase montrant que pour Newton, il ne reste plus aucune difficulté à obtenir quelque tangente que ce soit. Newton écrit ainsi:

La résolution de ces Problèmes & de tous les autres de même nature ne sera pas fort difficile, il n'y aura guère que l'ennui du calcul; je n'ai donc pas crû qu'il fût nécessaire d'en donner ici les Solutions, & je m'imagine que les Géomètres me sauront gré de ne les avoir qu'énoncés.

Ainsi, Newton semble avoir développé une méthode générale pour la détermination des tangentes à une courbe, mais qu'en est-il du caractère infinitésimal de cette méthode?

Si on se réfère aux méthodes développées par Fermat et Descartes, Newton ne prend pas en compte les propriétés géométriques des courbes étudiées, mais distingue différents cas suivant la façon dont elles sont définies (relation entre abscisse et ordonnée, angle et distance à un point ou une droite, relation entre les distances à un point et à une droite ou une courbe). Ce sont ces distinctions qui vont l'amener à décrire diverses manières pour *"tirer les tangentes aux courbes"*, mais elles n'attenuent en rien le caractère général de la méthode.

On attribue généralement la naissance du calcul infinitésimal à Newton et à Leibniz. Il y a cependant une controverse concernant d'une part la priorité de l'un ou de l'autre, et d'autre part le caractère infinitésimal de la méthode des fluxions.

Dans son texte **"Le style mathématique des Principia"**, François De Gandt parle, comme on l'a déjà dit, de méthode des témoins finis, et on peut noter une ressemblance entre cette méthode et celles qui sont utilisées dans **La Méthode des Fluxions**. En effet, pour définir la tangente en un point, Newton utilise la similitude entre une figure "finie" et une figure "infinitésimale", c'est à dire dont les côtés sont les moments de quantités fluentes. Ainsi, à la lecture de la "première manière", on peut noter que le triangle Ddc privilégié par Newton est ce qu'on appelle "le triangle caractéristique" dans la méthode de Leibniz.[17] Seulement Newton semble refuser l'utilisation des infiniment petits sauf à de rares occasions. Aussi, alors que Leibniz écrit $\frac{BD}{BT}=\frac{dy}{dx}$, dy et dx étant des infiniment petits, Newton considère le rapport $\frac{BD}{BT}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ où $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont les fluxions des quantités fluentes x=AB et y=BD.

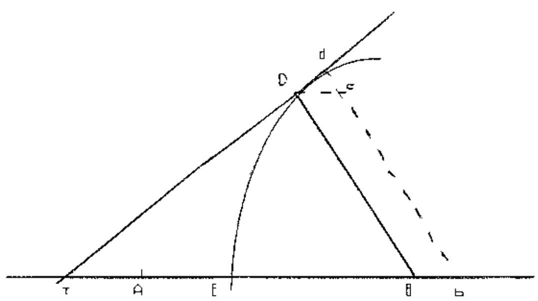


fig 1.1

[17]Voir l'article de Marie-Françoise Jozeau, Leibniz et l'école continentale, Mnémosyne N°6

Si l'on écrit: $dx = \dot{x}o$ et $dy = \dot{y}o$, o étant un intervalle de temps infiniment petit, il y a bien sûr équivalence entre les deux méthodes: il faut alors considérer que le moment d'une quantité x, utilisé par Newton, est égal à la différentielle de cette même quantité qu'utilise Leibniz. Mais, alors que Leibniz utilise les infiniment petits en tant que tels, Newton ne considère que leur rapport. Le calcul infinitésimal n'apparaît donc plus dans la résolution des problèmes concernant la recherche de tangentes à une courbe. Il n'a servi qu'à justifier (en partie) la règle concernant la détermination d'une relation entre les fluxions et surtout, à donner un fondement pour l'utilisation du rapport de deux fluxions.

En 1813[18], Lazare Carnot publie la seconde édition des **Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal,** dans lesquels il écrit un commentaire **De la Méthode des Fluxions** (annexe 3). Il signale par exemple que "*la méthode des fluxions n'admet,[...] que des quantités finies.*"(§138). Par ailleurs, il effectue le rapprochement entre la méthode des fluxions et la méthode des premières et dernières raisons (§140). Cependant, Carnot fait une "lecture moderne" de **la Méthode des Fluxions"** puisqu'il écrit, en parlant de rapport de fluxions: "*[..], ces fluxions auront elles-mêmes entre elles une raison, qui n'est autre chose que la limite du rapport des différentielles [..].*" (§142). On peut donc constater que, bien que conscient des différences entre les méthodes employées par Newton et celles de Leibniz, Carnot tient pourtant à les assimiler. Ainsi, dans le dernier paragraphe (§143), il écrit: "Les procédés de la méthode des fluxions ne diffèrent de ceux de l'analyse infinitésimale que par la notation". C'est, me semble-t-il, nier le saut épistémologique que représente l'écriture différentielle. Newton n'utilise pas les infiniment petits aussi "naturellement" que Leibniz. Cependant, on peut considérer que Newton est, par rapport à ses prédécesseurs, le premier à avoir utilisé la notion d'infiniment petit pour justifier ses calculs, ce qui, d'une certaine façon, justifie le rôle prépondérant qu'on lui attribue dans l'invention du calcul infinitésimal.

Je ne prétend pas régler la querelle de priorité qui a opposé newtoniens et leibniziens. Je dirai pourtant qu'à la lecture de **La Méthode des Fluxions et des Suites infinies**, on voit apparaître clairement les notions de calcul infinitésimal et d'infiniment petit qui seront formalisées par Leibniz.

---

[18]Voir Mnémosyne n°7 pour la première édition des **Réflexions sur la Métaphysiques du Calcul Infinitésimal**, Paris, Duprat 1797.

ANNEXE 1

LA METHODE DES FLUXIONS, ET DES SUITES INFINIES.

Par M. le Chevalier NEWTON.

LV. En voilà tout autant qu'il en faut de dit sur ces Methodes de calcul, dont je ferai un frequent usage dans la suite. Reste maintenant à donner quelques essais de Problêmes, sur-tout de ceux que nous présente la nature des Courbes, & cela pour mettre l'Art Analitique dans un plus grand jour. Et d'abord j'observerai que toutes leurs difficultés peuvent se reduire à ces deux Problêmes seulement que je vais proposer sur un espace décrit par un mouvement local retardé ou acceleré d'une façon quelconque.

LVI. 1. *La longueur de l'Espace décrit étant continuellement donnée, trouver la vitesse du Mouvement à un tems donné quelconque.*

LVII. 2. *La vitesse du Mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'Espace décrit à un tems donné quelconque.*

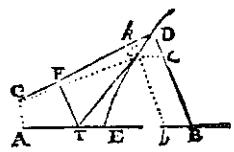
LVIII. Ainsi dans l'Equation $xx = y$, si y représente la longueur de l'Espace décrit à un tems quelconque, lequel tems un autre Espace x en augmentant d'une vitesse uniforme $\dot{x}$ mésure & représente comme décrit, alors $2\dot{x}x$ représentera la vitesse avec laquelle dans le même instant l'Espace y viendra à être décrit *& vice versa*; & c'est de-là que j'ai dans ce qui suit consideré les Quantités comme produites par une augmentation continuelle à la maniere de l'Espace que décrit un corps en mouvement.

LIX. Mais comme nous n'avons pas besoin de considerer ici le tems autrement que comme exprimé & mésuré par un mouvement local uniforme, & qu'outre cela nous ne pouvons jamais comparer ensemble que des Quantités de même genre, non-plus que leurs vitesses d'accroissement & de diminution; je n'aurai dans ce qui suit aucun égard au tems consideré proprement comme tel; mais je supposerai que l'une des Quantités proposées de même genre doit augmenter par une Fluxion uniforme, à laquelle Quantité je rapporterai tout le reste comme si c'étoit au tems; donc par Analogie cette quantité peut avec raison recevoir le nom de tems; ainsi quand dans la suite pour donner des idées plus claires & plus distinctes, je me servirai du mot *Tems*, je n'entends jamais le tems proprement pris comme tel, mais seulement une autre Quantité par l'augmentation ou Fluxion de laquelle le tems peut être expprimé & mésuré.

LX. J'appellerai *Quantités Fluentes*, ou simplement *Fluentes* ces Quantités que je considere comme augmentées graduellement & indefiniment, je les représenterai par les dernieres Lettres de l'Alphabet v, x, y & z pour les distinguer des autres quantites qui dans les Equations sont considerées comme connuës & déterminées qu'on représente par les Lettres initiales a, b, c, &c. & je représenterai par les mêmes dernieres Lettres surmontées d'un point $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$ les vitesses dont les Fluentes sont augmentées par le mouvement qui les produit, & que par conséquent on peut appeller *Fluxions*. Ainsi pour la Vitesse ou Fluxion de v je mettrai $\dot{v}$, & pour les vitesses de x, y, z je mettrai $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ respectivement.

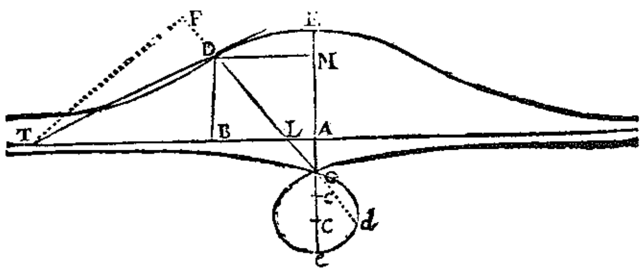
LXI. Ces choses étant ainsi préposées, je vais entrer en matiere & donner d'abord la solution des deux Problêmes que je viens de proposer.

XXX. Soit un Point donné G, duquel on tire la Soutendente DG à un Point D de la Courbe, soit DB l'Ordonnée sous un Angle quelconque à l'Abcisse AB; faites parcourir au Point un Espace infiniment petit dD sur la Courbe, sur GD prenez Gk = Gd, achevez le Parallelogramme dcBb, Dk & Dc feront les Moments contemporains de GD & de BD, dont ils diminuent tandis que D est porté en d. Prolongez la Ligne droite Dd jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en T; & de ce Point T abaissez sur la Soutendente GD la perpendiculaire TF, les Trapezes Dcdk & DBTF seront semblables; ainsi DB : DF : : Dc : Dk.



XXXI. Comme la Relation de BD à GD est donnée par l'Equation à la Courbe, cherchez la Relation des Fluxions, & faites FD à DB comme la Fluxion de GD à la Fluxion de BD; du Point F élevez la perpendiculaire FT qui rencontre AB en T, tirez DT elle touchera la Courbe en D; si DT est positive il faut la prendre du côté de G, & si elle est négative du côté opposé.

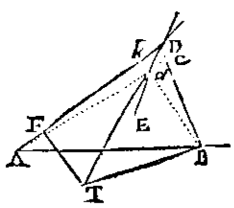
XXXVI. Ainsi dans la Conchoïde, ou tout ceci se fera plus



promptement que ci-dessus, faisant GA = b, LD = c, GD = x, & BD = y, on aura BD, y : DL, c : : GA, b : GL; $x - c$. Ainsi $xy - cy = cb$, ou $xy - cy - cb = o$. Cette Equation suivant la Régle donne $\frac{xy - cy}{y}$, ou $x - c$ = DF, prolongez donc GD vers F, de sorte que DF = LG, & au Point F élevez la perpendiculaire FT qui rencontre l'Asymptote AB en T, tirez DT elle touchera la Conchoïde.

Troisième Maniere.

XXXIX. Si l'on rapporte la Courbe à deux Soutendentes AD & BD, qui tirées de deux Points donnés A & B se rencontrent sur la Courbe; imaginez que le Point D parcourt l'Espace infiniment petit Dd, & sur AD & BD prenez Ak = Ad, & Bc = Bd; kD & cD feront les Moments contemporains des Lignes AD & BD, prenez donc DF à BD comme le Moment Dk au Moment Dc, (c'est-à-dire, dans le Raport de la Fluxion de la Ligne AD à la Fluxion de la Ligne BD) élevez sur BD & AD les perpendiculaires BT & FT qui se rencontreront au Point T; les Trapezes DFTB & Dkdc seront semblables, & par conséquent la Diagonale DT touchera la Courbe.



XL. Au moyen donc de l'Equation qui exprime la Relation de AD à BD, trouvez la Relation des Fluxions & prenez FD à BD dans le même Raport.

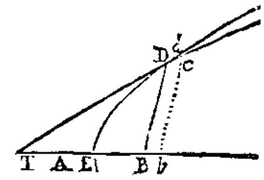
XLI. Exemple Supposons AD = x, & BD = y, & leur Relation $a + \frac{ex}{d} - y = o$. Cette Equation est aux Ellipses du second Ordre, dont *Descartes* dans le second Livre de sa Géometrie a démontré les propriétés pour rompre la Lumiere; la Relation des Fluxions sera $\frac{e\dot{x}}{d} - \dot{y} = o$. D'où $e : d : : \dot{y} : \dot{x}$: : BD : DF.

PROBLEME IV.

Tirer les Tangentes des Courbes.

PREMIERE MANIERE.

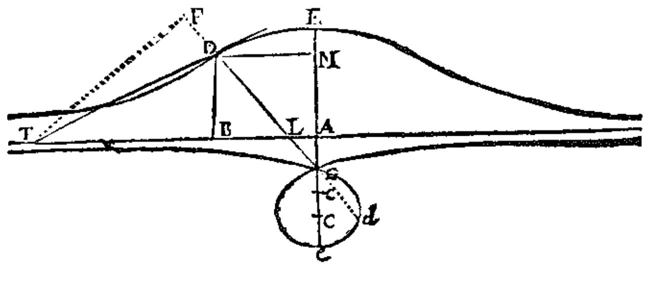
I. ON peut tirer les Tangentes différemment, felon les différentes Relations des Courbes aux Lignes droites, & premierement foit BD une Ligne droite Ordonnée fous un Angle donné à une autre Ligne droite AB, prife pour Bafe ou Abfciffe, & foit BD terminée à une Courbe ED. Faites mouvoir cette Ordonnée & faites-lui parcourir un Efpace indéfiniment petit & parvenir à *bd*. Elle aura augmenté du Moment *cd*, tandis que AB aura augmenté du Moment B*b*, auquel D*c* eft égal & parallele. Prolongés D*d* jufqu'à ce qu'elle rencontre AB en T, cette Ligne touchera la Courbe en D ou *d*, & les Triangles *dc*D, DBT feront femblables; ce qui donne TB : BD :: D*c* ou B*b* : *cd*.



II. La Relation de BD à AB eft donnée par l'Equation à la Courbe; cherchez par le Prob. 1. la Relation des Fluxions, & prenez TB à BD dans le Raport de la Fluxion de AB à la Fluxion de BD; la Ligne TD touchera la Courbe au Point D.

III. EXEMPLE. 1. Nommant AB, x & BD, y, foit leur Raport $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Celui des Fluxions fera $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$. Ainfi $\dot{x} : \dot{y} :: 3xx - 2ax + ay : 3y^2 - ax ::$ BD (y) : BT. Donc BT $= \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$. Et le Point D & de la les Lignes DB & AB ou x & y étant données, la longueur BT fera donnée, ce qui détermine la Tangente TD.

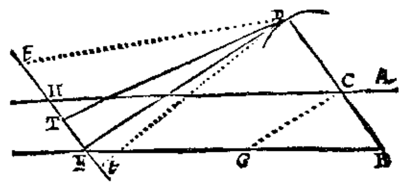
II. EXEMPLE 3. Soit ED la Conchoïde de *Nicodeme*, décrite du Pôle G, foit AT l'Afymptote & LD la Diftance ou Ligne interceptée. Soit GA $= b$, LD $= c$, AB $= x$, & BD $= y$. A caufe des Triangles femblables DBL & DMG, on aura LB :



BD :: DM : MG; c'eft-à-dire, $\sqrt{cc - yy} : y :: x : b + y$, ou $\overline{b + y}\sqrt{cc - yy} = yx$. Dans cette Equation je fuppofe $\sqrt{cc - yy} = z$, & par là j'ai deux autres Equations $bz + yz = xy$, & $zz = cc - yy$, par le moyen defquelles je trouve les Fluxions de x, y & z, car la premiere donne $b\dot{z} + \dot{y}z + \dot{z}y = \dot{x}y + \dot{y}x$, & la feconde $2\dot{z}z = -2\dot{y}y$, ou $\dot{z}z + \dot{y}y = 0$. En exterminant $\dot{z}$, on aura $-\frac{b\dot{y}y}{z} - \frac{\dot{y}y^2}{z} + \dot{y}z = \dot{x}y + \dot{y}x$, qui étant réduite en proportion donne $y : z - \frac{by}{z} - \frac{yy}{z} - x :: \dot{y} : \dot{x} ::$ BD : BT. Mais comme BD eft y, BT fera par conféquent $= z - x \frac{-by - yy}{z}$. C'eft-à-dire, $-$ BT $=$ AL $+ \frac{\text{BD} \times \text{GM}}{\text{BL}}$; ou le Signe $-$ devant BT, défigne que le Point T doit être pris du côté oppofé au Point A.

XII. SCHOLIE. De là on voit comment on peut trouver le Point de la Conchoïde qui fépare la partie concave de la partie convexe ou le Point d'Inflexion; car c'eft au Point ou AT eft un moindre.

XLVI. Comme si la Ligne droite BCD tournoit autour du Point donné B, & que l'un de ses Points D décrivît une Courbe, & qu'un autre de ses Points C coupât la Ligne droite AC donnée de position. La Relation de BD & BC étant exprimée par une Equation quelconque ; tirez BF parallele à AC, de sorte qu'elle rencontre en F la Ligne DF perpendiculaire à BD ; élevez FT perpendiculaire à DF, & prenez FT à BC comme la Fluxion de BD à la Fluxion de BC ; tirez la Ligne DT elle sera Tangente à la Courbe.



Cinquième Maniere.

XLVII. Mais si le Point A étant donné, l'Equation exprimoit la Relation de AC à BD ; tirez CG parallele à DF, & prenez FT à BG comme la Fluxion de BD à la Fluxion de AC.

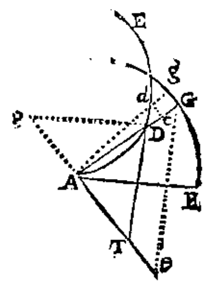
Sixième Maniere.

XLVIII. Ou si l'Equation exprime la Relation entre AC & CD ; faites rencontrer AC & FT au Point H, & prenez HT à BG, comme la Fluxion de CD à la Fluxion de AC. Et ainsi des autres.

Septième maniere.

POUR LES SPIRALES.

XLIX. Le Problême est le même lorsqu'on ne rapporte pas les Courbes à des Lignes droites, mais à d'autres Courbes, comme cela arrive dans les Courbes Mécaniques. Soit BG la Circonférence d'un Cercle dont le demi Diametre est AG ; tandis qu'il tourne autour du Centre A, faites mouvoir le Point D d'une façon quelconque, de sorte qu'il décrive la Spirale ADE ; faites parcourir au Point D l'Espace infiniment petit Dd, & sur AD prenez $Ac = Ad$; Cd & Gg seront les Moments contemporains de la Ligne droite AD & de la Circonférence BG. Tirez At parallele à cd, c'est-à-dire perpendiculaire à AD, & qui rencontre la Tangente DT au Point T. Vous aurez $cD : cd :: AD : AT$; soit aussi Gt parallele à la Tangente DT, & vous aurez $cd : Gg :: Ad$ ou $AD : AG :: AT : At$.



L. Ainsi l'Equation qui exprime la Relation de BG à AD étant donnée ; cherchez la Relation de leur Fluxions, & prenez At à AD dans le même Raport, Gt sera parallele à la Tangente.

LI. EXEMPLE 1. Nommant BG, x & AD, y ; soit leur Relation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, on aura $3x^2 - 2ax + ay : 3y^2 - ax :: \dot{y} : \dot{x} :: AD : At$; le Point t étant donc trouvé, tirez Gt & sa parallele DT qui touchera la Courbe.

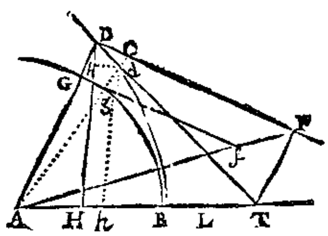
LII. EXEMPLE 2. Si l'on a $\frac{ax}{b} = y$, ce qui est l'Equation à la Spirale d'*Archimedes*, on aura $\frac{a\dot{x}}{b} = \dot{y}$, & par conséquent $a : b :: \dot{y} : \dot{x} :: AD : At$; c'est pourquoi si l'on prolonge TA en P, de sorte que $AP : AB :: a : b$, PD sera perpendiculaire á la Courbe.

LIII. EXEMPLE 3. Si $xx = by$, $2x\dot{x}$ sera $= b\dot{y}$, & $2x : b :: AD : At$. Et de la même façon on pourra toujours aisément tirer des Tangentes à toutes les Spirales.

Huitiéme Maniere.

POUR LES QUADRATRICES.

LIV. Si la Courbe eſt telle qu'une Ligne quelconque AGD, tirée du Centre A, rencontre l'Arc de Cercle en G, & la Courbe en D ; & ſi la Relation de l'Arc BG & de la Ligne droite DH, qui eſt une Ordonnée à la Baſe ou Abciſſe AH ſous un Angle donné, eſt déterminée par une Equation quelconque ; concevez que le Point D parcourt ſur la Courbe un Eſpace infiniment petit Dd ; achevez le Parallelogramme dhHk & prolongez Ad en c, de ſorte que Ac = AD, Gg & Dk ſeront les Moments contemporains de l'Arc BG & de l'Ordonnée DH ; prolongez Dd directement en T, ou elle rencontre AB, & de ce Point abaiſſez la perpendiculaire TF ſur DcF ; les Trapezes Dkdc & DHTF ſeront ſemblables ; ainſi Dk : Dc : : DH : DF ; de plus ſi vous élevez Gf perpendiculaire à AG, & qui rencontre AF en f, les paralleles DF & Gf donneront Dc : Gg : : DF : Gf, & de même Dk : Gg :: DH : Gf, c'eſt-à-dire, comme les Moments ou les Fluxions des Lignes DH & BG.

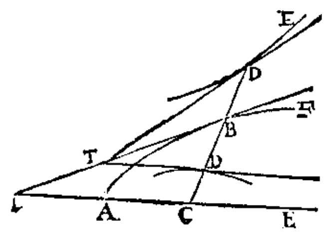


L V. Ainſi par l'Equation qui exprime la Relation de BG & de DH, trouvez la Relation des Fluxions, & dans ce même Raport prenez la Tangente Gf du Cercle BG, & la Ligne DH ; tirez DF parallele à Gf, qui rencontre Af prolongée en F ; à ce Point F élevez la perpendiculaire FT, qui rencontre AB en T ; & enfin tirez la Ligne droite DT elle ſera Tangente à la Quadratrice.

L VI. EXEMPLE 1. Nommant BG, x & DH, y ſoit $xx = by$, on aura $2x\dot{x} = b\dot{y}$; d'où $2x : b :: \dot{y} : \dot{x}$: : DH : Gf, le Point f étant trouvé on déterminera le reſte comme ci-deſſus.

Neuviéme Maniere.

LIX. Enfin ſi ABF eſt une Courbe quelconque touchée par la droite BT ; & ſi une partie BD (de la Ligne droite BC, Ordonnée ſous un Angle quelconque à l'Abciſſe AC,) interceptée entre cette Courbe & une autre Courbe DE a une Relation à une partie de la Courbe AB exprimée par une Equation, vous pourrez tirer la Tangente DT à l'autre Courbe, en prenant ſur la Tangente de la premiere, BT en même raiſon avec AD, comme la Fluxion de la Courbe AB avec la Fluxion de la Ligne droite BD.



LX. EXEMPLE 1. Nommant AB, x ; BD, y ; ſoit $ax = yy$, donc $a\dot{x} = 2y\dot{y}$; ainſi $a : 2y :: \dot{y} : \dot{x}$ :: BD : BT.

LXI. EXEMPLE 2. Soit $\frac{a}{b}x = y$, Equation à la Trocoïde ſi ABF eſt un Cercle ; on aura $\frac{a}{b}\dot{x} = \dot{y}$, & $a : b ::$ BD : BT.

ANNEXE 2

PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feue Madame la Marquise DU CHASTELLET.

TOME PREMIER.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

LIVRE PREMIER.

SECTION PREMIERE.

De la méthode des premieres & dernieres raisons employée dans tout cet Ouvrage.

LEMME PREMIER.

Les quantités & les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

Du Mouvement des Corps.

Si on le nie, qu'on suppose qu'elles soient à la fin inégales, & que leur derniere différence soit *D*, puisqu'elles ne peuvent pas approcher plus près de l'égalité que de cette différence donnée *D*, leur différence ne sera donc pas plus petite que toute différence donnée, ce qui est contre l'hypothèse.

Du Mouvement des Corps.

LEMME II.

Si dans une figure quelconque AacE, *comprise entre les droites* Aa, AE, *& la courbe* acE, *on inscrit un nombre quelconque de Parallélogrammes* Ab, Bc, Cd, &c. *compris sous les bases égales* AB, BC, CD, *&c. & sous les côtés* Bb, Cc, Dd, *&c. parallèles au côté* Aa *de la figure ; & qu'on achève les parallélogrammes* aKbl, bLcm, cMdn, *&c. qu'on diminue ensuite la largeur de ces parallélogrammes, & qu'on augmente leur nombre à l'infini : les dernieres raisons qu'auront entr'elles la figure inscrite* AKbLcMdD, *la circonscrite* AalbmcndoE, *& la curviligne* AabcdE, *seront des raisons d'égalité.*

Car la différence de la figure inscrite & de la figure circonscrite, est la somme des parallélogrammes *K l*, *L m*, *M n*, *D o*, c'est-à-dire (à cause de l'égalité de toutes les bases) que cette différence est égale au rectangle *A B l a* fait sur l'une des bases *K b* & sur la somme *A a*, de toutes les hauteurs; mais ce rectangle, à cause que sa largeur diminue à l'infini, deviendra plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc (par le Lemme premier) la figure inscrite, la figure circonscrite, & à plus forte raison la figure curviligne intermédiaire seront à la fin égales. *C. Q. F. D.*

LEMME III.

Les dernieres raisons de ces mêmes figures seront encore des raisons d'égalité, quoique les bases AB, BC, CD, *&c. des parallélogrammes soient inégales, pourvû qu'elles diminuent toutes à l'infini.*

Soit AF la plus large de ces bases, & soit achevé le parallélogramme *FAaf*. Ce parallélogramme sera plus grand que la différence de la figure inscrite & de la figure circonscrite; mais sa largeur AF diminuant à l'infini, il sera plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc &c. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. D'où il suit que la derniere somme de tous les parallélogrammes qui s'évanouissent coïncidera dans toutes ses parties avec la figure curviligne.

Cor. 2. Et à plus forte raison la figure rectiligne, comprise sous les cordes des arcs évanouissans *ab*, *bc*, *cd*, &c. coïncidera à la fin avec la figure curviligne.

Cor. 3. Il en sera de même de la figure rectiligne circonscrite qui est comprise sous les tangentes de ces mêmes arcs.

Cor. 4. Et par conséquent ces dernieres figures (quant à leurs périmétres *a c E*) ne sont pas rectilignes, mais les limites curvilignes des figures rectilignes.

LEMME IV.

Si dans deux figures AacE, PprT, *on inscrit, comme ci-dessus, deux suites de parallélogrammes, dont le nombre soit le même, & que lorsque leurs largeurs diminuent à l'infini, les dernieres raisons des parallélogrammes de l'une des figures aux parallélogrammes de l'autre, chacun à chacun, soient les mêmes; ces deux figures* AacE, PprT *seront entr'elles dans cette même raison.*

Car la proportion qu'un des parallélogrammes de la premiere figure a avec celui qui lui répond dans la seconde, est la même que celle de la somme de tous les parallélogrammes de la premiere figure, à la somme de tous les parallélogrammes de la seconde, & par conséquent la même que celle qui est entre les deux figures, en supposant toutefois, que, selon le Lemme 3. la raison de la premiere figure à la somme de tous les parallélogrammes qu'elle renferme, soit une raison d'égalité, aussi-bien que celle de la seconde figure à la somme de tous les Parallélogrammes qui y sont renfermés. *C. Q. F. D.*

Cor. D'où il suit, que si deux quantités d'un genre quelconque sont partagées dans un même nombre de parties quelconques, & que ces parties, lorsque leur nombre augmente & que leur grandeur diminue à l'infini, soient entr'elles en raison donnée, la premiere à la premiere, la seconde à la seconde, & ainsi de suite: les touts seront entr'eux dans cette même raison donnée; car si on représente les parties de ces touts par les parallélogrammes des figures de ce Lemme, les sommes de ces parties seront comme

les sommes des parallélogrammes; & par conséquent, lorsque le nombre de ces parties & des Parallélogrammes augmente, & que leur grandeur diminue à l'infini, les touts seront dans la derniere raison d'un Parallélogramme à l'autre: c'est-à-dire, par l'hypothèse, dans la derniere raison d'une partie à l'autre.

LEMME V.

Tous les côtés homologues des figures semblables sont proportionnels, tant dans les figures curvilignes que dans les rectilignes, & leurs aires sont en raison doublée de ces côtés.

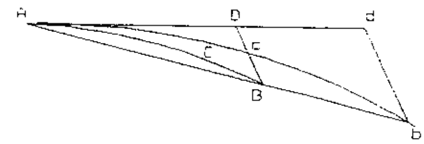
LEMME VI.

Si un arc ~~de courbe~~ quelconque ACB *donné de position, est soutenu par la corde* AB, *& qu'au point* A *placé dans le milieu de sa courbure continue, il soit touché par une droite* AD *prolongée des deux côtés, & que les points* A *&* B *s'approchent l'un de l'autre jusqu'à ce qu'ils coïncident ; l'angle* BAD, *compris sous la tangente & la corde diminuera à l'infini, & s'évanouira à la fin.*

Car si cet angle ne s'évanouissoit pas, l'arc *ACB* & la tangente *AD* contiendroient un angle rectiligne, & par conséquent la courbure au point *A* ne seroit point continue, ce qui est contre l'hypothése.

LEMME VII.

Les mêmes choses étant posées, la derniere raison qu'ont entr'elles l'arc, la corde & la tangente, est la raison d'égalité.



Car pendant que le point *B* s'approche du point *A*, supposons que les lignes *AB*, *AD* soient prolongées jusqu'aux points éloignés *b* & *d*, & qu'on méne la ligne *bd* parallele à la sécante *BD*, & qu'on prenne de plus *Acb* toujours semblable à l'arc *ACB*. Lorsque les points *A* & *B* coïncideront, l'angle *dAb* s'évanouira par le Lemme précédent ; donc les droites *Ab*, *Ad*, qui restent toujours de grandeur finie, & l'arc intermédiaire *Acb* coïncideront & seront par conséquent égales. Donc les droites *AB*, *AD*, & l'arc intermédiaire *ACB*, qui leur sont toujours proportionnels, s'évanouiront, & auront pour derniere raison la raison d'égalité. *C. Q. F. D.* LIVRE PREMIER.

Cor. 1. Ainsi, si par *B* on méne une droite *BF* parallele à la tangente *AD*, laquelle *BF* coupe toujours en *F* une ligne quelconque *AF* qui passe par *A*, la raison de cette droite *BF* à l'arc évanouissant *ACB*, sera à la fin la raison d'égalité, puis qu'achevant le parallélogramme *AFBD*, cette raison est la même que celle qu'à la droite *AD* avec le même arc *ACB*. Fig. 10.

Cor. 2. Et si par *B* & par *A* on tire plusieurs droites *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, qui coupent la tangente *AD* & sa parallele *BF*, la derniere raison de l'arc *AB* de la corde & de toutes les parties coupées *AD*, *AE*, *BF*, *BG* entr'elles sera la raison d'égalité.

Cor. 3. Et par conséquent toutes ces lignes pourront être prises l'une pour l'autre dans tous les cas où l'on se servira de la méthode des premieres & dernieres raisons.

LEMME VIII.

Si les droites données AR, BR, *l'arc* ACB, *la corde* AB, *& la tangente* AD, *forment trois triangles* RAB, RACB, RAD, *& que les points* A *&* B *s'approchent l'un de l'autre : ces triangles, qui s'évanouiront, seront à la fin semblables, & leur derniere raison sera la raison d'égalité.*

Pendant que *B* s'approche de *A*, imaginons qu'on prolonge *AB*, *AD*, *AR*, en *b*, *d*, *r*, qu'on méne *rbd* parallele à *RD*, & qu'on prenne l'arc *Acb* toujours semblable à l'arc *ACB*, lorsque les points *A* & *B* coïncideront, l'angle *bAd* s'évanouira, & les trois triangles *rAb*, *rAcb*, *rAd*, qui restent toujours de grandeur finie coïncideront, & seront par conséquent égaux & semblables. Donc les triangles *RAB*, *RACB*, *RAD*, qui leur sont toujours semblables & proportionnels, seront à la fin égaux & semblables entr'eux. *C. Q. F. D.* Fig. 9.

Cor. Donc ces triangles pourront être pris l'un pour l'autre dans tous les cas où l'on employera la méthode des premieres & dernieres raisons.

ANNEXE 3

RÉFLEXIONS

SUR

LA MÉTAPHYSIQUE

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL,

CARNOT

2ᵉ édition - 1813

DE LA MÉTHODE DES FLUXIONS.

136. Newton considère une courbe comme engendrée par le mouvement uniforme d'un point; il décompose à chaque instant la vîtesse constante de ce point en deux autres, l'une parallèle à l'axe des abscisses et l'autre parallèle à l'axe des ordonnées. Ces vîtesses sont ce qu'il appelle fluxions de ces coordonnées, tandis que la vîtesse arbitraire du point qui décrit la courbe est la fluxion de l'arc décrit.

Réciproquement cet arc décrit est appelé la fluente de la vîtesse avec laquelle il est décrit par le point mobile, l'abscisse correspondante est appelée fluente de la vîtesse de ce point estimée dans le sens de cette abscisse, et l'ordonnée est appelée fluente de la vîtesse de ce même point estimée dans le sens de cette ordonnée.

Puisque la fluxion de l'arc est supposée constante, il est évident qu'à moins que le chemin du point décrivant ne se fasse en ligne droite, les fluxions de l'abscisse et de l'ordonnée seront variables, et que leur rapport à chaque instant dépendra de la nature de la courbe, c'est-à-dire, de la relation même de ces coordonnées.

Réciproquement la relation des coordonnées dépend nécessairement de celle qui existe à chaque instant entre les fluxions de ces coordonnées. On peut donc demander quel est le moyen de découvrir la relation qui existe entre les fluxions, lorsque l'on connaît celle qui existe entre les coordonnées; et réciproquement quel est celui de découvrir la relation qui existe entre les coordonnées, lorsque l'on connaît celle qui existe entre les fluxions seules, ou combinées avec les coordonnées elles-mêmes. La première partie de ce problème est ce qu'on nomme méthode des fluxions, et la seconde méthode inverse des fluxions.

137. Mais ces premières notions peuvent être généralisées; car à mesure que le point décrivant parcourt la courbe, non-seulement l'abscisse et l'ordonnée changent, mais encore la sous-tangente, la normale, le rayon de courbure, etc. c'est-à-dire, que ces quantités croissent ou décroissent plus ou moins rapidement ainsi que les coordonnées elles-mêmes. Toutes ces quantités ont donc des fluxions dont les rapports sont également déterminés par le mouvement du point que décrit uniformément la courbe; ainsi ces quantités sont elles-mêmes des fluentes. Or c'est l'art de déterminer les relations de toutes ces fluentes par l'entremise de leurs fluxions employées comme auxiliaires, que l'on nomme méthode directe et inverse des fluxions, ou méthode des fluxions et fluentes.

Cette méthode s'applique non-seulement aux lignes courbes, mais par analogie on l'étend aux aires que renferment ces courbes, aux surfaces courbes et aux volumes qu'elles terminent, aux forces qui mettent les corps en mouvement et aux effets qu'elles produisent; on en applique en un mot la théorie à tout ce qui fait l'objet des mathématiques et des sciences physico-mathématiques, aussi bien que la méthode d'exhaustion elle-même et tous les modes de calcul qui en dérivent.

138. La méthode des fluxions n'admet, comme on le voit dans le calcul, que des quantités finies: puisque ces fluxions ne sont autre chose que des vitesses qui sont des quantités finies. On peut même prendre ces vitesses respectives avec lesquelles les coordonnées croissent, pour coordonnées d'une nouvelle courbe, lesquelles auront aussi leurs fluxions, qui seront pareillement des quantités finies; et celles-ci pourront encore être prises pour coordonnées d'une troisième courbe, ainsi de suite, sans que jamais il entre dans le calcul autre chose que des quantités finies.

139. Il y a une fluxion principale qui est choisie à volonté, mais qui étant une fois adoptée règle toutes les autres : on peut choisir celle que l'on veut; nous avons supposé que c'était la vitesse absolue du point décrivant, que nous avons regardée comme uniforme : mais on peut supposer également que c'est la vitesse dans le sens de l'abscisse, ou toute autre qui soit uniforme et qui serve de terme de comparaison.

140. La méthode des fluxions et fluentes dérive naturellement de celle des premières et dernières raisons ; car la vitesse variable d'un point, n'est pas le chemin décrit par ce point dans un temps donné, divisé par ce temps ; mais la première ou dernière raison de ce rapport, c'est-à-dire, la quantité dont ce rapport approche de plus en plus, à mesure que ce temps est supposé plus court.

141. Cette observation a été le prétexte d'une objection élevée contre la méthode des fluxions ; car, a-t-on dit, c'est introduire dans la Géométrie qui appartient aux Mathématiques pures, la notion des vitesses qui n'appartient qu'aux Mathématiques mixtes, et définir une idée qui doit être simple, par une autre qui est complexe.

Mais cette objection est assez frivole : car la véritable chose à considérer, est de savoir si la théorie est plus facile à saisir de cette manière que d'une autre. Le classement que nous faisons des sciences est assez arbitraire. Nous plaçons la Géométrie avant la Mécanique dans l'ordre de la simplicité ; mais les parties transcendantes de la première sont bien plus abstraites que les parties élémentaires de la seconde ; et comme le dit Lagrange, « chacun a ou croit avoir une idée nette de la vitesse, » ce n'est donc pas prendre une marche contraire à l'esprit des Mathématiques, que de définir les fluxions par les vitesses.

142. Nous venons de voir que les vitesses qu'on nomme *fluxions*, sont les dernières raisons des espaces parcourus et des temps employés à les parcourir ; mais si l'on compare ensemble deux de ces vitesses ou fluxions, par exemple la fluxion de l'abscisse avec celle de l'ordonnée, ces fluxions auront elles-mêmes entre elles une raison, qui n'est autre chose que la limite du rapport des différentielles de ces coordonnées. Ainsi la Méthode des fluxions n'est encore, comme on le voit, que la méthode infinitésimale, et par conséquent la méthode d'exhaustion envisagée sous un nouveau point de vue, et l'on aperçoit facilement le lien qui unit toutes ces méthodes les unes aux autres.

143. Les procédés de la méthode des fluxions ne diffèrent de ceux de l'analyse infinitésimale, que par la notation. Au lieu de la caractéristique d, dont on se sert dans celle-ci, on pointe les lettres dans la méthode des fluxions; c'est-à-dire, que la fluxion de la variable ou fluente x, par exemple, est représentée par $\dot{x}$, mais avec cette distinction, que $\dot{x}$ représente une quantité finie qui est la vitesse du point décrivant dans le sens des abscisses, tandis que dx, dans le calcul différentiel, représente une quantité infiniment petite, qui est l'accroissement instantané de cette même abscisse.

Offert par l'auteur

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT	JOURNAL
HERAUSGEGEBEN	RÉDIGÉ
VON	PAR

G. MITTAG-LEFFLER

2:4

G. CANTOR. SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1883.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

DANS NOS CLASSES

Les nombres sont-ils dénombrables?

Maryvonne Hallez

La notion de nombre est une des plus complexes. Dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée la question peut difficilement être posée en ces termes mais des réponses doivent être données aux élèves mettant en scène les multiples sortes de nombres (entier, rationnels...) et les différentes approches nécessaires à la résolution des problèmes(résolution d'équations par l'algèbre, par l'analyse et par la géométrie, comparaison de nombres...)
Des constructions géométriques permettent de construire sur un axe muni d'un repère les points dont les abscisses sont
— des entiers, éléments de $\mathbb{Z}$, par report de l'unité à l'aide d'un compas par exemple.
— des rationnels, éléments de Q, grâce à l'utilisation du théorème de Thalès.
— des irrationnels de la forme $\sqrt{a}$ où $a \in Q^+$, construction utilisant une relation métrique dans le triangle rectangle.
Ces différences de constructions géométriques donnent aux élèves une image mentale de la différence entre entier, rationnel et irrationnel, (en se limitant dans le cadre du lycée, aux nombres irrationnels de la forme $\sqrt{a}$ ou $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ a et b éléments de Q^+ $a^2 \geq b$).
Une autre image mentale, qui oblige à considérer de manières différentes ces objets mathématiques appelés nombres, doit se présenter quand il est demandé de comparer des nombres : il faut trouver pour ces nombres une écriture qui permette leur comparaison ou faire appel à un raisonnement:

— pour les rationnels l'écriture avec un même dénominateur ou l'écriture décimale.

— pour les irrationnels leurs carrés ou les carrés de leur carrés ou l'écriture décimale.

Il semble que pour les élèves, le nombre soit alors ce qui peut s'écrire avec un nombre fini ou infini de décimales. Notons que la machine à calculer permet à l'élève de trouver 6 à 10 décimales, ce qui suffit amplement à l'usage.

Une deuxième question se pose:

Qu'est-ce qu'un nombre réel?
Ces nombres sont introduits dans le cursus lycéen, pour le moment, en classe de quatrième, comme ensemble d'arrivée de la relation qui à un point d'un axe muni d'un repère fait correspondre son abscisse[1]. Les points d'abscisses rationnelles et " irrationnelles" suffisent largement à peupler la droite, mais une interrogation demeure : existe-t-il d'autres nombres que l'on pourrait aussi appeler nombres réels? Dans le cadre de la classe nous pourrons exhiber le fameux coefficient de proportionnalité entre le périmètre d'un cercle et son diamètre à savoir le "nombre" 2π. Il ne fait aucun doute pour nos élèves que π , $\sqrt{x}$ .... sont des nombres. Ils sont surpris quand on leur fait lire des textes des

[1]avec un langage bien sûr plus approprié aux quatrièmes.

XVIè - XVIIè - XVIIIè siècles qui distinguaient les "vrais" nombres au sens où le mot nombre employé sans adjectif sous entend entier, et les autres : les nombres rompus ou fractionnaires, les nombres sourds ou incommensurables pour reprendre une distinction de d'ALEMBERT dans son Encyclopédie.

Construire le concept de nombre est un problème rencontré tout au long notre histoire et il est fort intéressant de lire les réponses des élèves par rapport à leurs conceptions des nombres. Les élèves vont rencontrer les questions suivantes :

la suite 0,9 ; 0,99 ; 0,999... a-t-elle pour limite 1?

$\lim_{n \to \infty} (9 * 10^{-1} + \ldots\ldots 9 * 10^{-n})$ est elle égale à 1?

peut-on écrire $9x\ 10^{-1} + \ldots\ldots + 9x10^{-n} + \ldots\ldots = 1$

Ces réflexions conduisent à une interrogation sur l'infini.

— L'ensemble de ces considérations m'a amenée à conduire des activités historiques sur le nombre dans des classes de 1ère, et de terminales à travers la lecture des textes suivants[2]:

— un texte de GALILEE posant un des paradoxes de l'infini que l'on peut présenter ainsi en langage actuel : établir une correspondance biunivoque entre l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et l'ensemble des entiers pairs qui en est une partie. Cette bijection va à l'encontre de l'axiome "le tout est plus grand que la partie".

— un texte de Georg CANTOR reprenant cette même aporie mais avec une plus grande force paradoxale : la correspondance biunivoque peut être établie entre l'ensemble des nombres algébriques réels[3] et l'ensemble $\mathbb{N}$. La lecture de ce texte qui peut servir d'appui à la leçon sur les polynômes et à la leçon sur les suites permet aussi d'approcher l'ensemble $\mathbb{R}$ construit entre autres par ce même CANTOR.

— un texte de Felix KLEIN commentant le texte précédent et fournissant les étapes des calculs demandés par le texte de CANTOR.

— Nous vous proposons l'énoncé d'un problème donné aux élèves, les textes, et une courte biographie de CANTOR et de KLEIN.

PROBLÈME

Partie A

Soit Q^+ l'ensemble des rationnels positifs c'est à dire l'ensemble des nombres dont une écriture est de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q éléments de N., $q \neq O$ (On prendra l'écriture avec $\frac{p}{q}$ irréductible). L'écriture de tout entier a considéré comme élément de Q^+ est ainsi $\frac{a}{1}$.

1. Existe-t-il des rationnels de Q^+ vérifiant $p + q = 0$, $p + q = 1$?
2. Dressez la liste des rationnels de Q^+ vérifiant

[2] Les textes sont à la fin de ce problème.
[3] se reporter au texte de CANTOR pour la définition.

a. p+q = 2

b. p+q = 3

c. p+q = 4

3. On appelle $\varphi(i)$ le nombre de rationnels "nouveaux" positifs correspondant à p+q = i.(nouveau c'est à dire n'ayant pas été obtenu pour un i inférieur). Vérifiez $\varphi(2)=1$ $\varphi(3)=2$ $\varphi(4)=2$

4. A l'aide d'un tableau d'addition à double entrée p et q,
dressez la liste des rationnels vérifiant p+q = i pour i = 6, i = 7, i = 8 et i = 9. Calculez φ (i) pour les valeurs de i allant de 5 à 9.

5. En ordonnant dans chaque sous-ensemble E (correspondant à p+q = i) les rationnels suivant l'ordre croissant des nombres, donnez le 10ème rationnel? le 20ème?

Partie B

I — 1) Résolvez dans $\mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{Z}$ puis dans Q et enfin dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$x - 2 = 0$	$x + 1 = 0$	$2x + 1 = 0$	$x^2 - 2 = 0$
$x^2 + x - 1 = 0$	$x^2 + x + 1 = 0$	$x^3 - 2x + 1 = 0$	
$x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$		$x^4 - 1 = 0$	$x^3 + 1 = 0$

— 2) Une équation sera dite "irréductible" dans $\mathbb{Z}$ si dans l'ensemble des polynômes à coefficients entiers, il est impossible de factoriser le polynôme du premier membre pour ramener l'équation proposée à la résolution de deux équations de degré inférieur.

(Pour chacune des équations proposées dites si elle est "irréductible" dans $\mathbb{Z}$ ou non.)

II Lisez les lignes 1 à 6 du texte de CANTOR.

1) L'équation $x^2 - 2 = 0$ est-elle "irréductible" dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{Z}$?

2) Vérifiez que $\sqrt{2}$ est "racine" des polynômes

$x - \sqrt{2}$ $\quad$ $-3x^2 + 6$ $\quad$ $x^3 - x^2 - 2x + 2$ $\quad$ $x^4 - 4$

Chacun de ces polynômes conduit-il à une équation vérifiant les conditions énoncées dans le texte (lignes 4 à 6)? Pourquoi ?

3) Soient $\alpha = \frac{1}{3}$ $\quad \beta = -\frac{19}{3}$ $\quad \gamma = 1 + \sqrt{2}$ $\quad \delta = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

Cherchez un polynôme aussi simple que possible c'est-à-dire conduisant à une équation "irréductible" satisfaisant aux conditions énoncées dans le premier paragraphe du texte de CANTOR admettant pour racine α.

Même question pour β , γ et δ ?

4) $\frac{1}{1 - \sqrt{3}}$ est-il algébrique?

III) Cherchez dans les lignes 7 à 16 du texte de CANTOR la définition du mot "hauteur" et les conditions conduisant à une équation entièrement déterminée.

Donnez la hauteur des nombres algébriques obtenus dans les questions I et II.

IV) Existe-t-il des nombres algébriques de hauteur nulle?

V) <u>Recherche des nombres algébriques de hauteur 1 .</u>

a) déterminez toutes les équations de degré 1 de la forme $a_0x + a_1 = 0$ (avec $a_0 > 0$ a_0 et a_1 entiers) ayant des solutions de hauteur 1.

b) existe-t-il des équations de degré 2 ayant pour solutions des nombres de hauteur 1?

c) quel(s) nombre(s) algébrique(s) de hauteur 1 avez-vous obtenu(s)?

VI) <u>Recherche des nombres algébriques de hauteur 2.</u>

a) quelles sont les valeurs possibles du degré n?

b) quelles sont les valeurs possibles des coefficients?

c) écrivez les polynômes correspondants et calculez leurs racines.

VII) <u>Recherche des nombres algébriques de hauteur 3, puis de hauteur 4.</u>

1) Remplissez dans le tableau ci-dessous, extrait d'un texte de KLEIN (texte que nous lirons ultérieurement), les cases vides des coefficients afin d'en déduire la liste des équations "irréductibles" dans $\mathbb{Z}$ dont les racines sont de hauteur 3. Faites de même pour la hauteur 4.

2) Déterminez les 7 équations de degré 3 que l'on peut obtenir pour la hauteur 4. Permettent-elles d'obtenir de nouveaux nombres algébriques par rapport aux nombres de hauteurs 1 et 2 ?

3) Déterminez la seule équation de degré 4 telle que la hauteur N égale 4

N	n	$\|a_0\|$	$\|a_1\|$	$\|a_2\|$	$\|a_3\|$	$\|a_4\|$	Équation	$\varphi(N)$	Racines
1	1	1	0				$x = 0$	1	0
	2	0	0	0			—		
2	1	2	0				—	2	-1
		1	1				$x \pm 1 = 0$		$+1$
	2	1	0	0			—		
3	1							4	
	2								
	3								
4	1							12	
	2								
	3								
	4								

4) a) Lisez les lignes 19 à 33 du texte de CANTOR.

b) Dans la colonne "racines" rangez ensuite les nombres algébriques obtenus, selon les indications de CANTOR avec leur désignation sous la forme ω_i proposée par lui.

c) Quel est le 10ème nombre algébrique? le 20ème?

d) Dans la suite (ω_i) des nombres algébriques ainsi formée l'ordre est-il total pour la relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$?

— Dans cette présentation, le texte de CANTOR fut distribué avec le texte du problème. Par contre les textes de GALILEE et de KLEIN furent lus en conclusion du travail. Une équipe d'élèves eut en charge d'écrire une sommaire biographie de GALILEE et de présenter le "Discours concernant deux sciences nouvelles " dont est extrait le texte. Ce discours met en scène trois protagonistes Salviati, Simplicio et Sagredo . Pour notre extrait, Salviati initie Simplicio aux paradoxes liés à la notion d'infini.

GALILEE

"Dialogue concernant les sciences nouvelles "1636

Salviati. — Ceci est une des difficultés que nous rencontrons quand nous essayons, avec nos esprits finis, de discuter l'infini en lui attribuant les propriétés qui appartiennent au fini et au limité; mais je pense qu'en ceci nous avons tort, car nous ne pouvons, en parlant de quantités infinies, dire que telle est plus grande ou plus petite que telle autre ou lui est égale. Pour le prouver, voici un argument que, pour plus de clarté, j'exposerai sous forme de questions à Simplicio, qui a soulevé la difficulté.

J'admets, Simplicio, que vous savez quels nombres sont des carrés et lesquels n'en sont pas.

Simplicio. — Je sais fort bien qu'un carré est le résultat de la multiplication d'un nombre par lui-même : ainsi, 4, 9, etc., sont des carrés qui proviennent de la multiplication de 2, 3, etc., par eux-mêmes.

Salviati. — Fort bien, et vous savez aussi que, de même que ces produits sont appelés carrés, les facteurs sont appelés côtés ou racines et que, d'autre part, les nombres qui ne sont pas les produits de deux facteurs égaux ne sont pas des carrés. Par conséquent, si je dis que tous les nombres comprenant les carrés et les non carrés forment un total plus élevé que les carrés, je dis une vérité, n'est-ce pas?

Simplicio. — Très certainement.

Salviati. — Si je demande maintenant combien il y a de carrés, on pourra me répondre qu'il y en a autant qu'il y a de racines, puisque chaque carré a sa propre racine et que chaque racine a son propre carré, et qu'il n'y a pas de carré qui ait plus d'une racine ni de racine qui produise plus d'un carré.

Simplicio. — Rien n'est plus vrai.

Salviati. — Mais si je demande maintenant combien il y a de racines, on ne niera pas qu'il y en a autant qu'il y a de nombres, puisque tout nombre est la racine d'un carré. Ceci étant admis, nous devons en conclure qu'il y a autant de carrés qu'il y a de nombres, puisqu'il y a exactement autant de carrés qu'il y a de racines et que tout nombre est une racine. Cependant, tout à l'heure, nous avons dit qu'il y a plus de nombres que de carrés, puisque la plus grande partie des nombres ne sont pas des carrés.

Mais ce n'est pas tout : la proportion du nombre des carrés va en diminuant au fur et à mesure que nous avançons dans la suite des nombres : jusqu'à 100, nous avons 10 carrés, soit un dixième ; jusqu'à 10 000, nous n'en avons plus que 100, soit un centième et jusqu'à 1 000 000 seulement 1 000, soit un millième ; et cependant, d'autre part, dans une suite infinie de nombres, si nous pouvions concevoir une telle chose, nous serions obligés d'admettre qu'il y a autant de carrés que de nombres pris tous ensemble.

Sagredo. — Alors, que devons-nous conclure en pareil cas ?

Salviati. — Autant que je m'en rende compte, nous pouvons seulement conclure que le nombre de carrés est infini et le nombre de leurs racines infini ; le nombre des carrés n'est pas inférieur à la totalité des nombres, et ce dernier total n'est pas supérieur non plus au premier; en fin de compte, les termes « égal », « plus grand », « moindre », ne sont pas applicables à l'infini, mais seulement aux quantités finies.

Lorsque, par conséquent, Simplicio présente plusieurs lignes de différentes longueurs et demande comment il est possible que la plus longue ne contienne pas plus de points que la plus courte, je lui réponds qu'une ligne ne contient pas plus, ou moins, ou autant de points qu'une autre, mais que chaque ligne en contient un nombre infini.

KLEIN.

Leçons sur certaines questions de Géométrie Elémentaire (1896)

(production : Textes Anciens IREM Paris VII . p.63.64)

Il est bien évident par exemple qu'on peut établir une correspondance univoque entre les nombres entiers positifs et les nombres pairs positifs, il suffit d'écrire

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ 0 & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

Quand il s'agit de quantités infinies, les mots *grand* et *petit* ne sont pas bien à leur place.

M. Cantor a proposé de les caractériser par leur *puissance* : *Deux collections infinies ont même puissance, lorsqu'on peut établir entre leurs éléments une correspondance univoque.*

Le théorème que nous avons à démontrer prend alors la forme suivante :

L'ensemble des nombres algébriques réels a même puissance que l'ensemble des nombres entiers positifs.

On obtient l'ensemble des nombres algébriques réels en cherchant les racines de toutes les équations algébriques de la forme

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega + a_n = 0.$$

Tous les a sont supposés premiers entre eux, a_0 est positif et l'équation est irréductible.

Afin de ranger les nombres ainsi obtenus dans un certain ordre, nous considérons leur *hauteur* N, qui est représentée par

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|;$$

$|a_i|$ représente la valeur absolue de a_i. A un nombre donné N correspond un nombre fini d'équations algébriques. En effet, N étant donné, le nombre n a certainement une limite supérieure, puisque N est égal à $n - 1$, augmenté de nombres positifs ; en outre la différence $N - (n - 1)$ est une somme de nombres positifs premiers entre eux, dont le nombre est évidemment fini.

N	n	$\lvert a_0\rvert$	$\lvert a_1\rvert$	$\lvert a_2\rvert$	$\lvert a_3\rvert$	$\lvert a_4\rvert$	Equation	$\varphi(N)$	Racines
1	1	1	0				$x = 0$	1	0
	2	0	0	0			—		
2	1	2	0				—	2	-1
		1	1				$x \pm 1 = 0$		$+1$
	2	1	0	0			—		
3	1	3	0				—	4	-2
		2	1				$2x \pm 1 = 0$		$-\frac{1}{2}$
		1	2				$x \pm 2 = 0$		$+\frac{1}{2}$
	2	2	0	0			—		$+2$
		1	1	0			—		
		1	0	1			—		
	3	1	0	0	0		—		
4	1	4	0				—	12	-3
		3	1				$3x \pm 1 = 0$		$-1,61803$
		2	2				—		$-1,41421$
		1	3				$x \pm 3 = 0$		$-0,70711$
	2	3	0	0			—		$-0,61803$
		2	1	0			—		$-0,33333$
		2	0	1			$2x^2 - 1 = 0$		$+0,33333$
		1	2	0			—		$+0,61803$
		1	1	1			$x^2 \pm x - 1 = 0$		$+0,70711$
		1	0	2			$x^2 - 2 = 0$		$+1,41421$
	3	2	0	0	0		—		$+1,61803$
		1	1	0	0		—		$+3$
		1	0	1	0		—		
		1	0	0	1		—		
	4	1	0	0	0	0	—		

CANTOR : Traduction de " Über eine Eigenschaft des Inbegriffen aller reellen algabraischen Zahlen "

Journal für die reine und angewandte Mathematik 77 (1874) 258-262 ; Acta Mathematica 2(1883) 305-310.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DU SYSTÈME DE TOUS LES NOMBRES ALGÉBRIQUES RÉELS.(¹)

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Traduction d'un mémoire publié d. l. journ. d. Borchardt, t. 77, pag. 258.)

On nomme, en général, *nombre algébrique* réel un nombre réel ω qui est racine d'une équation non identique de la forme

$$(1) \qquad a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

où n, a_0, a_1, ... a_n sont des nombres entiers; nous pouvons supposer que les nombres n et a_0 sont positifs, que les coefficients a_0, a_1, ... a_n n'ont pas de diviseur commun et que l'équation (1) est irréductible.

Revenons à l'équation (1) à laquelle satisfait un nombre algébrique réel ω et qui, d'après les suppositions faites plus haut, est une équation entièrement déterminée; appelons *hauteur* du nombre ω la somme des valeurs absolues des coefficients augmentée du nombre $n - 1$, n étant le degré de l'équation; en désignant cette hauteur par N et appliquant une notation connue pour désigner les valeurs absolues des nombres, on a, par suite,

$$(3) \qquad N = n - 1 + [a_0] + [a_1] + \ldots + [a_n].$$

Cette hauteur N est, par conséquent, pour chaque nombre algébrique réel, un nombre entier positif déterminé; inversement, à un nombre entier positif donné N ne correspondent qu'un nombre limité de nombres algébriques réels ayant pour hauteur N; soit $\varphi(N)$ ce nombre, l'on aura, par exemple, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$. Les nombres du système (ω), c'est à dire tous les nombres algébriques réels peuvent donc être rangés dans l'ordre suivant: on prendra comme premier nombre ω_1, le seul nombre de hauteur $N = 1$; on écrira à la suite par ordre de grandeurs croissantes les deux nombres algébriques réels de hauteur $N = 2$ et on les désignera par ω_2, ω_3; puis, à leur suite et par ordre de grandeurs croissantes, on écrira les quatre nombres de hauteur $N = 3$; d'une manière générale, après que l'on aura ainsi compté et classé les nombres de la catégorie (ω) jusqu'à une hauteur déterminée $N = N_1$, on rangera à leur suite et par ordre de grandeurs croissantes les nombres réels algébriques de hauteur $N = N_1 + 1$. L'on obtient ainsi le système de tous les nombres algébriques réels sous la forme:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots,$$

et l'on peut, en se reportant à cette classification, parler du $\nu^{\text{ième}}$ nombre algébrique réel, sans omettre aucun nombre du système (ω).

GEORG CANTOR (1845 - 1918)

"Les mathématiques, c'est la liberté."

Georg Ferdinand Ludwig Philippe CANTOR est né le 3 mars 1845 à Saint Petersbourg et est mort le 6 janvier 1918 à Halle. Il fait ses études au Polytechnicum de Zürich. Pour son fils aîné, son père eut préféré une voie plus rémunératrice que celle de mathématicien. Le jeune CANTOR est fasciné par les mathématiques et, au printemps de 1862, il prend la décision de se consacrer aux mathématiques. Son père bien que réticent lui donne sa bénédiction et CANTOR lui écrit alors : "Je crois qu'un jour tu pourras être fier de moi, cher père, car je suis entraîné corps et âme par une voix inconnue et secrète ; une telle voix, où qu'elle nous appelle, est promesse de réussite." A partir de 1863, à Berlin, il suit, entre autres, les cours de Karl WEIERSTRASS (1815 - 1897). " Notons que Georg CANTOR arrive à Berlin en automne 1863, où il reste jusqu'en été 1866 et qu'il assiste aux premiers cours où WEIERSTRASS expose sa théorie des nombres irrationnels..." Le 14 décembre 1867 CANTOR passe avec succès son Promovierung. Nommé professeur à Halle en 1869, il y arrive en 1870 et y demeure jusqu'à la fin de sa vie; sa carrière fut bloquée par Léopold KRONECKER (1823-1891) qui lui interdit l'accès à un poste de l'université de Berlin. Le 9 août 1874, il épouse Vally GUTTMANN. Ils auront six enfants.

Pour la postérité, CANTOR est celui qui créa la théorie des ensembles. Il est peut-être plus juste de dire que Richard DEDEKIND (1831 - 1916) et Georg CANTOR dégagèrent conjointement cette notion abstraite d'ensemble. Georg CANTOR fit la connaissance de Richard DEDEKIND l'été 1872 lors d'un voyage en Suisse. Ils avaient, avant cette rencontre, construit séparément l'ensemble des nombres réels ; indépendamment, la même année, Charles MERAY (1835 - 1911) avait également construit cet ensemble.

1858 - 1859	Richard DEDEKIND	doit enseigner le calcul différentiel et intégral et sent la nécessité d'élaborer un "fondement rigoureux pour les principes de l'analyse infinitésimale". Il ne publie pas encore.
1865 - 1866	Karl WEIERSTRASS	donne des cours sur les nombres irrationnels, auxquels Georg CANTOR assiste.
1869	Charles MERAY	publie sa théorie des nombres irrationnels dans la Revue des Sociétés Savantes.
1872	Heinrich Edward HEINE	publie *Die Elemente des Funktionlehre* dans le Journal de Crelle (vol.74) où il expose la construction des irrationnels de Georg CANTOR.
26 avril 1872	Richard DEDEKIND	publie *Stetigkeit und irrationale Zahlen.*
été 1872	Georg CANTOR et Richard DEDEKIND se rencontrent.	
1872 - 1879	Georg CANTOR et Richard DEDEKIND correspondent.	

Georg CANTOR écrit, le 23 décembre 1873, l'article sur une propriété du "système de tous les nombres algébriques réels" qui sera publié dans Journal für die reine und angewandte Mathematik en 1874 et traduit en français dans ActaMathematica du 8 juin 1883. Il démontrera ensuite que $\mathbb{R}$ ne peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$. L'article du 23 décembre montre par contre que l'on peut construire une bijection entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble des nombres algébriques réels.

La correspondance entre CANTOR et DEDEKIND[4] nous permet de surprendre les interrogations de CANTOR à propos de cet article. Le 29 novembre 1873 CANTOR pose la question suivante :

> Prenons l'ensemble (*) de tous les individus entiers positifs *n*, et représentons-le par (*n*) ; puis considérons l'ensemble de toutes les grandeurs numériques réelles positives *x*, et représentons-le par (*x*) ; la question est simplement de savoir si (*n*) peut être mis en correspondance avec (*x*) de telle manière qu'à chaque individu d'un des ensembles corresponde un individu et un seul de l'autre.

Il exprime que l'inclinaison à penser l'impossibilité de cette correspondance ne lui suffit pas et il en cherche la "raison". DEDEKIND répond aussitôt comme l'atteste la note retrouvée dans les papiers de DEDEKIND.

> J'ai répondu par retour du courrier que je ne savais pas décider de la première question, mais en même temps j'ai formulé et complètement démontré que même l'ensemble de tous les nombres algébriques peut être mis en correspondance de la manière indiquée avec l'ensemble (*n*) des nombres naturels (peu de temps après, ce théorème et sa démonstration ont été reproduits presque littéralement, y compris l'emploi du terme technique « *hauteur* », dans l'article de Cantor paru dans le *Journal de Crelle*, tome 77 ([1]), mais à la différence près, maintenue malgré mon conseil, que seulement l'ensemble de tous les nombres algébriques *réels* est pris en considération).

Finalement CANTOR publie :

Berlin, le 25 décembre 1873

> Bien que je n'aie pas eu l'intention de publier pour le moment la question que j'ai récemment débattue pour la première fois avec vous, j'ai été amené tout-à-coup à le faire. J'ai en effet communiqué mes résultats le 22 à M. Weierstrass ; mais le temps manquait alors pour en parler d'une façon précise ; j'ai eu, dès le 23, la grande joie de recevoir sa visite, ce qui m'a permis de lui communiquer les démonstrations ; il a été d'avis qu'il fallait que je publie cette affaire, pour autant qu'elle concerne les nombres algébriques. J'ai donc écrit un petit article sous le titre : *Sur une propriété de l'ensemble de tous les nombres algébriques réels* (*), et l'ai adressé à M. le professeur Borchardt pour qu'il en considère la publication dans le *Journal f. Math.*
>
> Pour la rédaction de cet article vos remarques et votre mode d'expression m'ont été, comme vous le verrez, très utiles. C'est ce que j'ai voulu vous faire savoir.

Et il précise deux jours plus tard à DEDEKIND le plan de son article.

> . j'ai donc, après une courte introduction, rédigé deux paragraphes ; dans le premier il est démontré que l'ensemble des nombres algébriques réels peut être mis en correspondance univoque avec l'ensemble

---

[4]les lettres de CANTOR ont été étudiées conjointement par Jean CAVAILLES et Emmy NOETHER cf Jean Cavaillès Philosophie mathématique Hermann 1962

des nombres entiers positifs : dans le second, que, étant donné une suite $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$, on peut définir dans tout intervalle des nombres η qui ne sont pas contenus dans cette suite.

DEDEKIND exprime que la limitation au corps des nombres algébriques réels n'est à son sens guère judicieuse. CANTOR persiste ; il pense qu'il importe d'appliquer son raisonnement d'abord à un cas particulier.
CAVAILLES signale dans sa préface que *"dès 1873 WEIERSTRASS se servait de la dénombrabilité des nombres algébriques que CANTOR venait de démontrer - pour étendre un théorème sur les fonctions de variables réelles."*
Le texte "*Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels*" publié en 1894 dans "Journal für die reine und angewandte Mathematik 77" est traduit dans Acta Mathematica en 1883.[5]

FELIX KLEIN (1849 - 1925)

"Par l'encyclopédisme de ses conceptions, il a joué un rôle dominant dans la vie mathématique allemande, puis internationale, dans la dernière partie du XIX^{è} siècle"[6]

Christian, Félix KLEIN naît le 25 avril 1849 à Düsseldorf en Allemagne. Il étudie les mathématiques et la physique à l'université de Bonn. Il désire au départ devenir physicien et suit les cours de PLÜCKER. Cette rencontre a joué un grand rôle dans l'évolution du travail de Félix KLEIN. PLÜCKER, après une longue période consacrée à la physique, était revenu aux mathématiques à ce moment là et travaillait sur la "Neue Geometrie des Raumes" (la nouvelle mathématique de l'espace.) Le professeur PLÜCKER meurt soudainement en 1868 ; l'élève KLEIN continue le travail du maître en géométrie à plusieurs dimensions.
En décembre 1868, il passe son doctorat ; il poursuit ensuite ses études à Göttingen, Berlin et Paris. Il quitte Paris en 1870 ; il fait un court passage à l'armée puis est nommé en 1871 conférencier à Göttingen. Il enseigne ensuite à Erlangen ; c'est là qu'il crée le "programme d'Erlangen" qui est associé à son nom.
Dans ce programme, il fournit des modèles aux différentes géométries euclidienne et non euclidiennes (la géométrie hyperbolique inventée par BOLYAI et LOBACHEVSKY et la géométrie elliptique . L'essence du programme repose sur le fait que chaque géométrie connue est basée sur un certain groupe et que la tâche des mathématiques est de mettre en évidence les invariants liés à ces groupes. Le programme fut traduit en six langues et guida beaucoup de chercheurs.
En août 1875, il épouse Anne, la petite fille de HEGEL, le philosophe d'un certain renom! ils auront trois filles et un fils. Il est professeur à Munich pendant cinq ans, à Leipzig pendant six ans. De 1886 à sa mort, le 23 juin 1925, il demeure à Göttingen ; il y est professeur à l'université jusqu'en 1913 date à laquelle, malade, il se retire.
Son activité couvre toutes les branches des mathématiques sans oublier les mathématiques appliquées, la physique mathématique. Son génie est de faire apparaître des liens entre des domaines de recherche différents ; il laisse le détail des calculs à ses étudiants.

[5]Ce texte ainsi que d'autres traductions des articles de Cantor a été publié par l'IREM de Paris VII. Reproduction des textes anciens n° 5 en 1992.
[6]Les leçons sur certaines questions de géométrie élémentaires. publication Reproduction de textes anciens IREM Paris VII février 1981 numéro 2

Dans ses conférences il traite les différents sujets dans la perspective de leur développement historique au XIXème siècle. Ce fut un merveilleux professeur suscitant un esprit de recherche chez les étudiants : pas moins de 48 thèses furent dirigées par lui. Il joua un rôle décisif dans le plan d'éducation de 1905. Ses préoccupations pédagogiques sont une des motivation du texte Les leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire qui datent de 1896. Comme il l'indique dans sa préface : *"Le présent opuscule doit son existence au désir de rattacher les études mathématiques de l'université à celles des écoles secondaires et d'établir entre elles un contact plus intime que de coutume"* [7] (Cette phrase se retrouvera-t-elle dans une préface à un écrit de 1996? Souhaitons le!

La première partie traite de la "possibilité de la construction des expressions algébriques"; Il détermine d'abord les équations irréductibles sur $\mathbb{Z}$ dont sont solutions les nombres constructibles à la règle et au compas il démontre que ce sont des équations résolubles par radicaux carrés[8] et que leur degré est 2^n.

Il donne ensuite un exemple de problème non constructible à la règle et au compas : la trisection d'un angle arbitraire et un exemple de problème constructible à la règle et au compas par l'intermédiaire de la construction de racines d'équations de degré 2 : la division d'un cercle en 17 parties égales[9]. Son originalité est d'apporter autant de soin à la démonstration algébrique de l'existence de la construction qu'à son exécution pratique.

La deuxième partie traite des nombres transcendants et ... de la quadrature du cercle! Il démontre l'existence des nombres transcendants à partir du théorème : l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable. C'est cette reprise de la démonstration de Georg CANTOR qui sera lue avec des élèves.

Ensuite, après un survol de l'histoire des essais de calcul et de construction de π et la reprise de la démonstration de sa transcendance, il conclut sur une "véritable" construction géométrique de π qui, bien sûr, "ne peut être effectuée qu'à l'aide d'une courbe transcendante". Ceci n'est pas sans rappeler le titre du paragraphe du chapitre III de la géométrie de DESCARTES : *"Pourquoi les problèmes solides ne peuvent être construits sans les sections coniques,ny ceux qui sont plus composés sans quelques autres lignes plus composées"*. On retrouve chez KLEIN le même intérêt que chez DESCARTES pour les appareils : le tracé d'une courbe transcendante nécessite *"un appareil transcendant." "Cet appareil, c'est l'intégraphe, qui a été récemment inventé et décrit par un ingénieur russe, M. ABDANK ABAKANOWIEZ, et construit par M. CORADI à Zurich."*

KLEIN montre clairement dans cet opuscule la fécondation réciproque des domaines différents géométrie, analyse, algèbre. Sa confiance dans la géométrie et dans l'intuition géométrique ne diminue pas pour autant ; il s'oppose à la "tendance arithmétisante et formaliste développée par l'École de Berlin sous l'influence de WEIERSTRASS et de ses élèves"[10] et souhaite la fusion des approches de RIEMANN et de WEIERSTRASS (Hermann WEYL (1885,1955) exaucera son souhait dans "Die Idee des Riemanschen Fläche"). Et d'autre part il inscrit son travail dans l'histoire des idées mathématiques : *"Voilà donc une construction géométrique qui permet la quadrature du cercle. On voit de plus qu'elle la réalise dans l'ordre d'idées où s'étaient engagés les géomètres anciens ; notre courbe intégrale n'est qu'une modification des quadratrices considérées par eux"*.

---

[7] op. cit. p.5

[8] Klein ne cite pas Wantzel qui, pourtant a démontré ces résultats en 1837 . cf Mnémosyne 3. Il n'étudia pas la réciproque : toutes les solutions d'équations irréductibles de degré 2^n ne sont pas constructibles.

[9]Klein reprend la méthode de Gauss des "Disquisitiones" en l'expliquant de manière fort claire.

[10]op. cité note 1 introduction.

Du Nombre

Maryvonne Hallez

Ce conte a juxtaposé deux histoires, deux chemins :

1. un chemin vers un concept de nombre cardinal.
2. un chemin vers un "dévoilement"de "l'essence de la continuité."

Je vais expliciter un peu le premier chemin et donner ensuite la liste des textes étudiés.

J'ai d'abord privilégié deux moteurs des recherches sur la notion de nombre entier:

- inventer un chemin de production du "un" dégagé de tout lien avec l'empirisme.
- laver le nombre entier de toute tache du sensible sans le rendre dépourvu de contenu.

Nous avons d'abord lu les premières définitions du livre VII des Eléments d' EUCLIDE.

définition 1

"*L'unité est selon quoi chacune des choses existantes est dite une.*"

définition 2

"*Un nombre est un assemblage composé d'unités.*"

Ces énoncés qui donnent une définition de l'unité lient le principe d'individuation des "choses existantes", perceptions du monde sensible, et le principe de génération des entiers, constructions du monde intelligible. D'autre part la deuxième définition oppose le un et le multiple. Cette opposition a conduit nombre de mathématiciens et de philosophes à considérer que "un n'est pas un nombre". Nous retrouvons cette affirmation jusqu'au XVIème siècle, par exemple dans l'Arithmétique de Jean TRENCHANT, publiée en 1561.

Simon STEVIN effectua une première étape de notre premier chemin : faire rentrer le "un" rebelle dans une définition de nombre et conjointement dégager l'unité de l'analogie avec le point.[1]

Dans l'introduction de son Arithmétique publiée en 1585[2], STEVIN met en scène une lutte de deux prétendants au trône de principe des nombres entiers: le "zéro" et le "un" ; dans ce texte, il affirme "*un est nombre*", "*zéro n'est pas un nombre*", il fait du zéro l'analogue du point et il résorbe l'opposition un-multiple en donnant la définition du nombre suivante :

---

[1]Le nombre est-il composé d'unités comme la droite de points? Cette question fut soulevée par les philosophes grecs citons par exemple ARISTOTE qui écrit dans Métaphysique M9 1085 a

"le point paraît être non pas l'Un mais un analogue de l'Un"

[2] Texte à paraître dans les bonnes vieilles pages du prochain Mnémosyne n°9

"Nombre entier est ou unité ou composée de multitude d'unités"

On peut qualifier cette définition de partiellement nominaliste[1].

Notons qu'après 1585 la phrase *"un n'est pas un nombre"* n'est plus écrite dans les livres de mathématiques. Cependant elle continue à être l'objet de discussions dans les commentaires philosophiques. STEVIN en faisant ainsi perdre au "un" mathématique une partie de son rôle, inaugure une série de définitions du nombre dans laquelle un est considéré comme l'idée la plus simple et donc comme n'ayant pas besoin d'être défini. Citons par exemple LOCKE et LEIBNIZ dans leurs essais respectifs sur l'entendement humain.

Les tentatives de définir le un mathématique ne vont pas s'arrêter pour autant, comme nous le verrons dans la suite.

La deuxième étape de ce premier chemin du conte fut mise en scéne par Gottlob Frege dans ses Fondements de l'Arithmétique publiés en 1888 dont nous avons lu les extraits donnant ses concepts de zéro, de un et de nombre cardinal.

Le deuxième chemin conduisit des définitions du livre V d'Euclide à la construction du nombre réel de Dedekind.

Bibliographie:

textes lus

EUCLIDE — Eléments livre VII définitions 1 et livre V définitions 1à 6
ed.Peyrard Blanchard 1966

Simon STEVIN — Arithmétique Introduction et définitions 1 à 7
dans The principal works vol III
ed. D.J.Struik Swetz & Zeitlinger 1988

Arnauld et Nicole — La logique ou l'art de penser 4ème partie ch. 5
Flammarion ed.

John LOCKE — An essay concerning human understanding ch XVI § 1
Collins Fount Paperbacks 1964

Wilhelm G. LEIBNIZ — Nouveaux essais sur l'entendement humain livre IV
ch.VII §10 GF 1966

Gottlob FREGE — Les fondements de l'arithmétique § 54-55-74
trad.C.Imbert Seuil 1969

Richard DEDEKIND — Continuity and irrational numbers
trad. anglaise Beman Dover 1963

traduction française des passages lus : Maryvonne Hallez

---

[1] y est privilégiée par rapport à une définition de chose exprimant une partie de l'essence de la chose en question, définition ayant un contenu, une définition de nom autoréférente, et donc qui ne peut être contestée du point de vue logique comme le disent ARNAULD et NICOLE dans leur analyse du texte de STEVIN.

Hermite et la transcendance de e. Histoire d'un théorème.

Compte rendu de la conférence de Michel SERFATI
au Séminaire UPS du 7 avril 1993 [1].

Pour des questions de doctrine, Descartes et les cartésiens ne s' étaient guère intéressés aux questions numériques, et moins encore au statut des nombres des divers types. LEIBNIZ au contraire a le premier introduit le terme de *transcendant* dans divers contextes mathématiques : il l' a appliqué en effet aux nombres, aux courbes et aux équations. La notion de transcendance au sens mathématique a en fait été pour Leibniz un élement stratégique essentiel, destiné à affirmer face à DESCARTES et NEWTON la nouveauté et la singularité de sa position scientifique. On observe d'abord que pour la première fois dans l'Histoire des Mathématiques, LEIBNIZ a proposé (dans les*Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain*) une description générale de toutes les catégories de nombres, très proche de la représentation moderne que nous avons aujourd'hui du corps des nombres réels, ou encore de la droite numérique. On ne trouve cependant chez lui aucune définition véritable du concept de nombre transcendant dont il suggère seulement la notion sur des exemples d'exposants irrationnnels, comme $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, ou variables, comme x^y :
ce dernier exemple (extrait d'une lettre à WALLIS) constitue le paradigme originel de la transcendance chez LEIBNIZ, en même temps que l'origine du terme : l'exposant y " transcende " en effet tout degré fixé.

Après LEIBNIZ, le XVIII° siècle mathématique sera le temps des premières démonstrations d'irrationalité des nombres usuels de l'analyse : e, e^V et tg V (pour V rationnel), π, et π^2, par EULER (1737 - 1748), LAMBERT (1761), et LEGENDRE (1795). La preuve par LAMBERT de l'irrationalité de π, au moyen du développement en fraction continue généralisée de tg V, marque ici un tournant dans les méthodes. Dans un texte célèbre (*Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques*) LAMBERT démontre que si V est rationnel , tg V ne peut l'être, et réciproquement . Comme $tg(\frac{\pi}{4}) = 1$, alors π est irrationnel.

[1] Sur les questions de transcendance et de quadrature du cercle de 1675 à 1900 , voir : *Quadrature du Cercle , fractions continues et autres contes* . M. Serfati . . Editions de l'Association des Professeurs de Mathématiques . Paris . 1993 .

Le XVIII° siècle est aussi le temps des conjectures de transcendance : les mêmes auteurs ont eu en effet le sentiment que ces nombres (e et π) dont ils venaient de démontrer l'irrationalité, étaient cependant plus inaccessibles encore, et, reprenant alors la terminologie leibnizienne, qu'ils sont *transcendants* , un concept qu' EULER et LAMBERT prendront cependant avec deux acceptions distinctes : pour EULER, ce sont implicitement des quantités inexprimables par radicaux ; c'est LAMBERT qui a donné la définition explicite, moderne et définitive : est transcendant tout nombre qui n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers.

Jusqu'au milieu du XIX° siècle cependant et au théorème de Liouville (1844-1851), aucun résultat ne viendra apporter la preuve de l'existence d'au moins un nombre transcendant au sens de LAMBERT. LIOUVILLE remarque alors que, d'une certaine façon, les nombres algébriques sont "mal entourés " par les rationnels (*Sur des classes très étendues de nombres qui ne sont ni algébriques, ni même réductibles à des irrationnelles algébriques*). En conséquence, si un nombre vient à être bien entouré par les rationnels, alors il est transcendant. Voici un mode de construction de tels nombres :
soit M un entier naturel et $K = (k_n)$ une suite d'entiers tels que $0 \leq k_n \leq M$ pour tout n .
Posons :

$$x_K = \sum_{n \in N} \frac{k_n}{L^{(n!)}} \qquad \text{Par exemple } y_0 = \sum_{n \in N} \frac{1}{10^{(n!)}}$$

Dans chaque cas, la convergence de la série est ici si rapide que la *taille* du reste est "trop petite" par rapport à son *rang* : c'est le fond de la question . Et les x_K ,tout comme y_0 sont transcendants ... L' écriture décimale de ce même y_0 est :

$$y_0 = 0{,}110001000000000000000001000000..........$$

avec des blocs de zéro suffisament longs pour assurer la transcendance, mais avec des "1" de temps en temps, sans quoi on aurait un décimal. Tous les nombres transcendants, x_K obtenus par le procédé sont deux à deux distincts. Or, il y en a beaucoup : leur ensemble est bien une " classe très-étendue", comme LIOUVILLE l'avait annoncé. Le procédé a donc permis adroitement de construire un grand nombre de ce qu'on appelle aujourd'hui les "nombres de Liouville". Ce sont cependant des nombres artificiels, production *ad hoc* , et la méthode de Louville ne permet aucun renseignement sur les nombres usuels de l'analyse.

A la fin du XIX° siècle, la construction par CANTOR d'un ensemble de "tous" les nombres, assigne, précisément comme LEIBNIZ l'avait imaginé, une *place* aux nombres transcendants dans un certain ensemble : le corps $\mathbb{R}$ des réels. Dans un article constitutif de 1874, CANTOR se propose de les examiner sous le double point de vue "cantorien " de leur cardinalité et leur topologie, avec ceci en réponse : les nombres transcendants, ces singularités que l'on imaginait plutôt rares sont très nombreuses : dans le corps des réels, cardinalement et topologiquement parlant, ils sont, de beaucoup, les plus " présents " : dense dans $\mathbb{R}$, leur ensemble a aussi en effet la puissance du continu. DARBOUX évoquera la " foule immense des nombres transcendants ". On note que, contrairement à celle de LIOUVILLE, la méthode cantorienne de preuve n'est cependant pas constructive : Cantor affirme l' existence de nombres transcendants, sans en expliciter un seul.

Parallèlement, en1873, Charles HERMITE avait établi (*Sur la fonction exponentielle*) la première démonstration de transcendance d'une quantité usuelle de l'Analyse : celle du nombre e . Résultat remarquablement complexe sur le plan technique, inspiré de la méthode de LAMBERT, fondé sur l'approximation simultanée de diverses fonctions exponentielles par des fractions rationnelles de même dénominateur, il est aussitôt devenu un modèle de preuve de transcendance qui survivra au temps.

Un bref retour en arrière permet de situer la question de la quadrature du cercle durant toute la période considérée : après la conjecture de STIEFEL de 1544 (la quadrature est impossible), deux écoles coexistaient au XVII° siècle : ceux qui comme Grégoire de SAINT - VINCENT, cherchaient toujours à la démontrer (il fut réfuté par DESCARTES) et ceux qui, comme James GREGORY, s'efforçaient d'en établir l'impossibilité. Dans ce contexte, la solution de LEIBNIZ de 1682, fournissant pour valeur de $\frac{\pi}{4}$ la somme d'une série alternée, résultat qu'il appelle *quadrature arithmétique* , déplaçait évidemment à la fois la question et la réponse. Au XVIII° siècle cependant , tous les mathématiciens de quelque crédit la pensaient désormais impossible, et dans son mémoire de 1761, LAMBERT ne cache pas qu' à travers l'irrationalité de π , c 'est en fait l'impossibilité de la quadrature qu'il visait [2].

Un article charnière de WANTZEL (1837 : *Recherche sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut être résolu par la règle et le compas*) viendra ensuite clarifier toutes les questions de constructibilité à la règle et au compas en les *algébrisant* : si un point est constructible en n étapes à partir de données rationnelles, ses coordonnées sont des nombres algébriques de degré 2^n : la méthode, qui permettait d'établir l'impossibilité de la trisection de l'angle et de la duplication du cube, laissait en suspens celle de la quadrature du cercle.

En 1882, LINDEMANN, modifiant de façon relativement mineure la complexe machinerie qu' HERMITE avait établie pour démontrer la transcendance de e , l'étend à celle de π : le résultat de WANTZEL assure alors l'impossibilité de la quadrature du cercle (*Uber die Zahl* π).

La résolution - par un chercheur de taille moyenne - d'une conjecture millénaire qui aura soutenu vingt siècles durant la recherche en mathématiques, clôt toute la période historique où, depuis l'antiquité, les questions d'irrationalité, puis de transcendance, avaient été pour une grande part animées par celle de la quadrature.

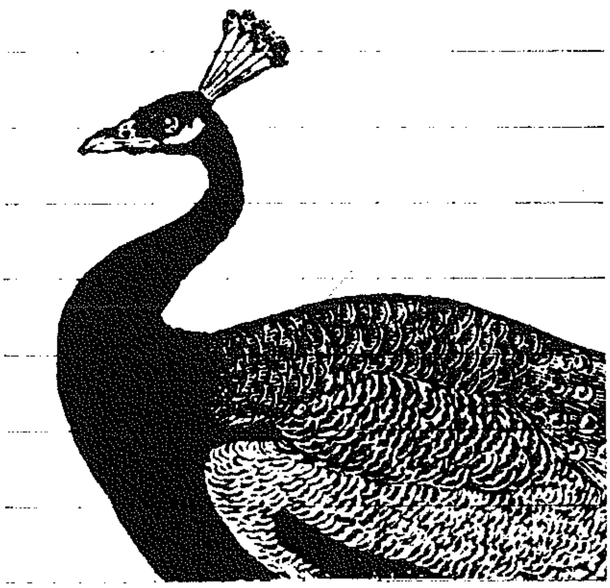
M . SERFATI

---

[2] Pour une étude historique des problèmes de constructibilité depuis l'antiquité jusque vers 1700 environ , voir l ' *Histoire des recherches sur la Quadrature du Cercle* , de J.E. Montucla . Antoine Jombert Editeur . Paris 1754 . Réédition (fac-simile) : IREM de Paris VII . Mai 1986 .

'As are the crests on peacocks,
as are the gems on the heads of snakes,
so is mathematics at the head of all knowledge'

—Vedanga Jyotisa (c. 500 BC)



ISBN 1-85043-285-6

I.B. Tauris & Co Ltd
Publishers
London · New York

NOTE DE LECTURE

Notes de lecture et traduction
de Marie Françoise JOZEAU

The Crest of the Peacock G. JOSEPH

La préface de cet ouvrage nous permet de faire plus ample connaissance avec l'auteur et ses motivations. Georg Ghevarughese JOSEPH est né à Kerala, dans le sud de l'Inde et y passe les premières années de sa vie. C'est ici, ainsi qu'à Madurai, capitale de l'état voisin de Tamil Nadu, qu'il dit avoir pris conscience de la véritable diversité de la culture indienne (Madurai est un grand centre de pèlerinage) : voilà son héritage indien ; il est issu d'une famille orthodoxe chrétienne de Syrie : voilà son héritage du Moyen-Orient chrétien ; puis il part faire ses études à l'université de Leicester et à celle de Manchester : voilà son héritage occidental ; auparavant, sa famille s'était installée au Kenya où il a rencontré des influences africaines et arabes et où il a travaillé à Janziana : voilà son héritage africain. Il est important pour JOSEPH de trouver un équilibre parmi ces quatre héritages.

Il voyage beaucoup ; en 1987, il visite la ville natale du mathématicien indien Srinivasa RAMANUJAN (né en 1887 à Érode dans le sud de l'Inde; mort à 32 ans). Ce dernier, reconnu comme un génie au même titre qu' EULER ou GAUSS, a travaillé en Théorie des nombres et a eu l'occasion de rencontrer G.H.HARDY[1] qui fut très désorienté par sa façon de travailler, et surpris de sa méconnaissance des mathématiques modernes. JOSEPH lui aussi s'étonne de la méthode de travail de RAMANUJAN, méthode différente des méthodes traditionnelles occidentales. Aussi la vie et les recherches de ce mathématicien font - elles surgir d'intéressantes questions pour le livre que JOSEPH se propose de rédiger:

* Jusqu'où les influences culturelles ont-elles déterminé les choix des sujets et des méthodes de RAMANUJAN?

---

[1] Nous recommandons à votre lecture cet ouvrage:
HARDY " Apologie d'un mathématicien" Belin

* Est-il possible d'identifier les caractéristiques de notre culture contribuant au travail créateur en mathématiques?

* Est-il nécessaire de se conformer à un certain type de méthode particulière, de présentation, de rédaction avant que "quelque chose" soit reconnu comme mathématique?

Le sous-titre de ce livre, **Non-European roots of Mathematics,** nous laisse deviner une partie de son contenu; il très riche et nous permet d'avoir un panorama vaste et varié de différentes traditions mathématiques:

Mathématiques Incas, Mayas : systèmes de numérations

Mathématiques Égyptiennes : arithmétique, algèbre, géométrie...

Mathématiques Babyloniennes : système de numération, algèbre, géométrie

Mathématiques Chinoises : carrés magiques, estimation de π, triangle de Pascal...

Mathématiques Indiennes : nombres, trigonométrie, algèbre...

Mathématiques Arabes : arithmétique, algèbre, géométrie, trigonométrie...

Je regrette cependant qu'il y ait peu de textes originaux et de traductions, ce qui nous oblige à faire entièrement confiance à l'auteur quant à l'interprétation de ces textes. Cependant, ce livre peut être utilisé pour donner des éclairages sur les mathématiques de ces diverses civilisations à des périodes différentes de l'histoire; Maryvonne Hallez, du groupe M:A.T.H, s'est servi du chapitre sur les mathématiques égyptiennes pour introduire sous un nouvel éclairage une activité en collège réalisée à partir du Papyrus Ahmès.[2]

Dans cet ouvrage, JOSEPH nous propose une lecture différente et originale de l'histoire des mathématiques. Il dénonce **l'eurocentrisme.** Déjà, dans un article paru en 1987 dans Race and class 28 sous le titre " Foundation of eurocentrism in mathematics " , il critique une conséquence de l'élitisme et du racisme européen qui présente les mathématiques égyptiennes, babyloniennes... comme " un outil pratique plutôt que comme une recherche intellectuelle". JOSEPH veut combattre une thèse très répandue : "dans l'esprit de certains, le progrès scientifique devient un phénomène purement européen qui ne peut être égalé par d'autres nations que si elles suivent une voie de développement scientifique et social spécifiquement européen". Il se propose "de démontrer que le traitement ordinaire de l'histoire des mathématiques non-européennes dénote un préjugé historiographie profond dans le choix et l'interprétation des faits, et que l'activité mathématique à l'extérieur que l'Europe a en conséquence été ignorée, dépréciée ou déformée".

Il dénonce le schéma suivant privilégié dans la manière traditionnelle d'aborder l'histoire des mathématiques.

[2]Pour les textes originaux, la source a été "les comptes de Bastet" brochure accompagnant une cassette vidéo produite par l'IREM de Toulouse 1990.

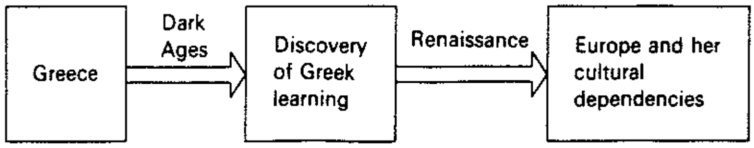


Figure 1.1 The 'classical' Eurocentric trajectory.

JOSEPH veut essayer de présenter une trajectoire plus fidèle du développement des mathématiques à travers le temps et le monde, insistant sur les contributions des civilisations chinoises, indiennes, africaines... particulièrement pendant le Moyen-Age. Voici le schéma qu'il propose en opposition au schéma ci-dessus afin de mettre en lumière les points suivants:

* La nature globale des recherches mathématiques

* La possibilité d'un développement mathématique indépendant à l'intérieur de chaque culture traditionnelle.

* L'importance cruciale des diverses transmissions des mathématiques à travers les cultures pour culminer en la création d'une discipline unifiée: les mathématiques modernes.

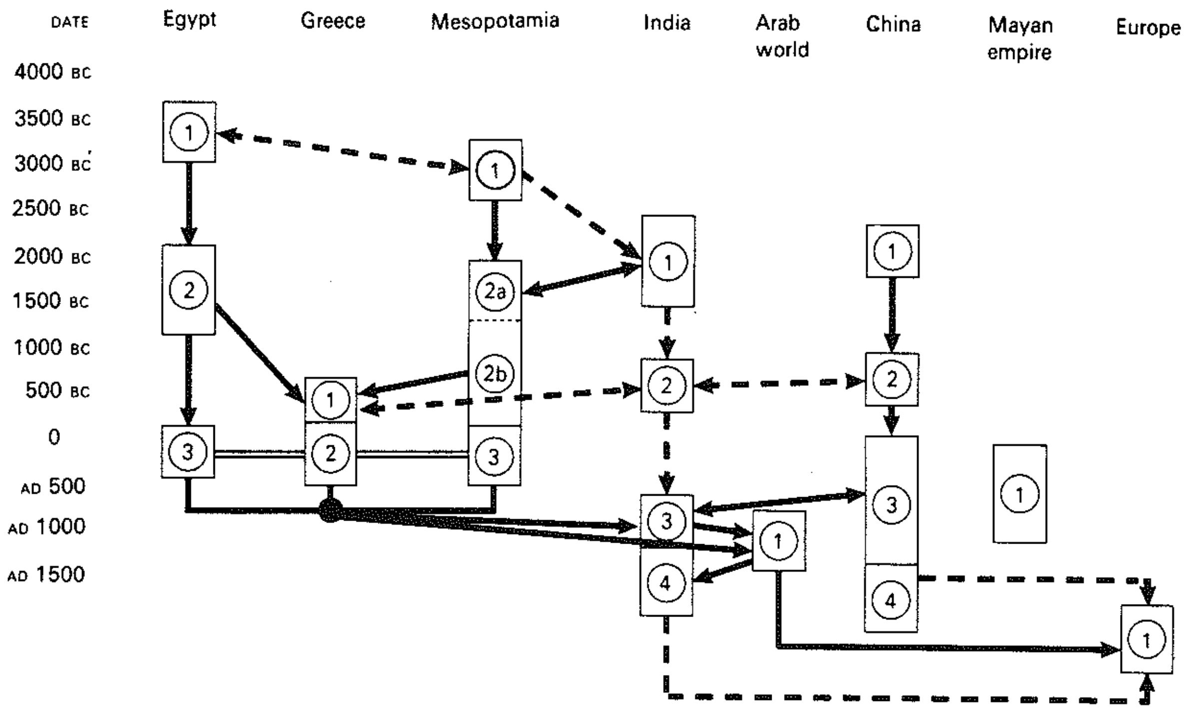


Figure 1.4 The spread of mathematical ideas down the ages.

EGYPT 1 *Pre-dynastic period*: Appearance of the earliest forms of writing and hieroglyphic numerals

2 *Middle Kingdom to New Kingdom*: Egyptian mathematics mainly contained in the Moscow and Ahmes Papyri

3 *Greek and Roman Period*: Flowering of mathematics at Alexandria

GREECE 1 *Classical Period*: Beginnings of deductive geometry and number theory

2 *Hellenistic Period*: Growing synthesis of Classical, Egyptian and Babylonian mathematics

MESOPOTAMIA 1 *Sumerian Period*: Beginnings of cuneiform numerals

2a *First Babylonian Dynasty*: Early algebra, commercial arithmetic and geometry from clay tablets

2b *New Babylonian and Persian Periods*: Mathematics and astronomy

3 *Seleucid Dynasty*: Hellenistic mathematics

INDIA 1 *Harappan Period*: Proto-mathematics from bricks, baths, etc.

2 *Vedic Period*: Ritual geometry

3 *Classical Period*: Indian numerals, computing algorithms, algebra and trigonometry

4 *Medieval Period*: Kerala mathematics

ARAB WORLD 1 Preservation and synthesis of mathematical traditions from different areas, laying the foundations of modern mathematics

CHINA 1 *River Valley Civilization*: Beginnings of practical mathematics

2 *Shang and Chou Dynasties*: Rod numerals, *Chou Pei* (the earliest extant mathematics textbook)

3 *Han to Tang Dynasties*: 'Arithmetic in Nine Sections' (the most important text in Chinese mathematics)

4 *Sung to Ming Dynasties*: Golden age of Chinese mathematics

MAYAN EMPIRE 1 Construction of a highly accurate calendar and the development of a place-value number system (base 20) with zero

EUROPE 1 Development of modern mathematics, building on mathematics from other sources

═══ (Hellenistic cultural areas (Egypt, Greece, Mesopotamia)

←——→ *Confirmed lines of transmission (two-way)*

(i) Harappan culture *and* First Babylonian dynasty

(ii) Han to Tang dynasties *and* Classical period (India)

——→ *Confirmed lines of transmission (one-way)*

(i) Middle Kingdom to New Kingdom (Egypt) *to* Classical period (Greece)

(ii) New Babylonian and Persian periods *to* Classical period (Greece)

(iii) Hellenistic cultural areas *to* Classical period (India)

(iv) Hellenistic cultural areas *to* Arab world

(v) Classical period (India) *to* Arab world

(vi) Arab world *to* Europe and India

←- - -→ *Unconfirmed or tentative lines of transmission (two-way)*

(i) Pre-dynastic period (Egypt) *and* Sumerian period (Mesopotamia)

(ii) Classical period (Greece) *and* Vedic period (India)

(iii) Vedic period (India) *and* Shang and Chou dynasties (China)

- - -→ *Unconfirmed or tentative lines of transmission (one-way)*

(i) Sumerian culture *to* Harappan culture

(ii) Sung to Ming dynasties *to* Europe

(iii) Kerala mathematics *to* Europe

Les deux premiers points sont, me semble-t-il, bien mis en valeur; le schéma met bien en évidence l'étendue des croisements entre les différentes aires culturelles et la possibilité de la transmission du savoir malgré les barrières culturelles. Par contre, je suis plus sceptique quant au troisième point; la continuité des traditions mathématiques jusqu'au XX° siècle peut être discutée; JOSEPH n'a pas réussi à me persuader que les mathématiques modernes surgissent de ces sources variées. Le peuvent-elles? JOSEPH pense que ce qui nous manque est la documentation sur la transmission des idées mathématiques et encourage des recherches dans ce sens, recherches ne devant pas négliger l'hypothèse que le transfert de technologie s'accompagne d'idées mathématiques.

Laissons à JOSEPH la conclusion de cette brève présentation:

" Il est à espérer que ce récit, qui a mis en lumière les mathématiques non-européennes, aidera à étendre notre horizon et à ébranler notre croyance dans l'esprit de clocher qui repose derrière la perception eurocentrique du développement de la connaissance mathématique."

Je précise qu' une traduction de ce livre est en cours et je signale aussi une suite pédagogique de cet ouvrage:

" Multicultural Mathematics "

Teaching Mathematics from a Global Perspective

que JOSEPH a écrit en collaboration avec D. NELSON et J. WILLIAMS (Oxford University 1993).

Ces travaux s'inscrivent dans le mouvement ethnomathématique. Il existe, pour les personnes intéressées, une édition francophone de ISGEm Newsletter de l'International Study Group on Ethnomathematics ; pour tous renseignements, s'adresser à :
Frédéric Métin, IREM Université de Bourgogne BP138 21004 DIJON cedex.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

Courrier à adresser à : Groupe M: A.T.H.
IREM de l'université Paris VII
Tour 55-56 3ème étage
75005 PARIS

Pour échanger expériences et réflexion à propos de l'histoire et de l'enseignement des mathématiques

M: *Mathématiques*
A: *Approche par les*
T. *textes*
H. *historiques*

SOMMAIRE

Editeur : IREM
Directeur responsable de la publication : R. DOUADY
Dépôt légal : Juillet 1994
ISBN : 2-86612-089-2

IREM Université Paris VII Denis Diderot
Tour 56-55 - 3ème étage, Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel : 01 44 27 53 83