INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

**84**

Sept. 94

# MODULES - T.D EN SECONDE

## Leur apport dans l'apprentissage des Mathématiques

**TH. ANTOINE**
**A. BEAUMONT**
**M. MATHIAUD**

**objectif :** que peut-on faire en module, en T.D ?

**sujet :** séquences de travail avec les élèves

**niveau :** seconde

**public :** enseignants au lycée

**Avec le soutien de la DGES, de la DLC et des MAFPEN de Créteil, Paris, Versailles**

**UNIVERSITE PARIS VII**

# MODULES - T.D EN SECONDE

## Leur apport dans l'apprentissage des Mathématiques

TH. ANTOINE
A. BEAUMONT
M. MATHIAUD

## SOMMAIRE

Un grand merci à Martine Lamy, Odette Dieraert et Nadine Locufier .... techniciennes du Mac et de la reprographie sans lesquelles notre brochure ne serait pas parue.

Les auteurs

# INTRODUCTION

Cette brochure est réalisée par les animateurs d'un stage "Modules en seconde" à l'IREM Paris VII. C'est donc un travail qui, après deux ans de pratique dans la classe et d'échanges avec des collègues au stage MAFPEN, est proposé ici.

L'enseignement des mathématiques en Seconde est réparti sur trois temps.

. Les T.D en demi-classe dont la composition est parfois rigide.
. Le travail en classe entière
. Les modules

Dans cette brochure, nous proposons des travaux pouvant être réalisés tantôt en T.D, tantôt en module. Nous spécifions le travail fait ou à faire en classe entière avant ou après les séquences décrites.

. T.D et travail en classe entière

Les mêmes activités sont proposées, dans les mêmes conditions, à tous les élèves de la classe ; ainsi chacun dispose des mêmes expériences, références auxquelles l'enseignant peut faire appel : c'est une des composantes de la "mémoire de classe".

. Les modules

Dans un premier temps, nous avons tenu compte des directives officielles qui présentent ce temps modulaire comme un espace de liberté, "un cadre d'activités diversifiées en groupes restreints et modulables qui font appel à une participation active de l'élève". Aussi notre préoccupation, la première année a été : au point de vue contenus, méthodes, que peut-on faire de différent de ce qu'on faisait auparavant en demi-classe ou en classe entière et qui soit plus enrichissant pour les élèves ?

Puis, la pratique aidant, nous nous trouvons aussi face aux questions suivantes :

- quel est l'apport spécifique du module dans les apprentissages des élèves ?

- quelle est la place de ce temps modulaire relativement aux séquences en demi-classe et en classe entière ?

Nous proposons donc dans cette brochure, quelques éléments de réponse. Pour cela nous faisons le choix de certains thèmes. Notre objectif n'est en aucun cas de couvrir l'ensemble du programme de seconde.

. <u>Classification des modules</u>

Notre réflexion nous a conduit à retenir le classement suivant en 3 grands types de modules :

<u>Type 1</u> : <u>module méthodologique</u> qui peut être soit spécifique aux mathématiques soit utilisable dans d'autres disciplines.

<u>Type 2</u> : <u>module en liaison directe avec le travail de cours</u>

<u>Type 3</u> : <u>module prenant en compte le programme dans sa globalité</u> à travers la résolution de problèmes mathématiques ou transdisciplinaires.

. <u>Formation des groupes d'élèves :</u>

Au sujet de la composition des groupes, on peut :

1) choisir les élèves en fonction de certains critères : compétences ou difficultés dans un certain domaine, connaissances ou méconnaissances, ... .

2) constituer des groupes hétérogènes soit au gré des élèves soit au choix du professeur pour utiliser les aptitudes particulières des différents élèves au cours d'un travail en groupe.

Pour chacune des séquences proposées dans la brochure, nous préciserons à quel type de module nous la rattachons ainsi que nos choix sur la constitution du groupe.

Les travaux effectués dans les temps modulaires peuvent être les mêmes pour chaque élève de la classe ou peuvent être différents car spécifiques des besoins particuliers pour seulement certains élèves.

Il nous paraît important, après certaines séances en modules de faire un bilan en classe entière. Le bilan participe :

- d'une part à la dépersonnalisation et décontextualisation. En effet, les élèves portent à la connaissance des autres leur production. Ils mettent ainsi en discussion la validité de ce qu'ils ont fait. Le bilan permet de prendre de la distance par rapport aux personnes (professeur, élèves) et par rapport au contexte. Les deux ne se produisent pas forcément en même temps.
- d'autre part à l'enrichissement de la mémoire de la classe. On pourra faire référence au bilan dans les travaux ultérieurs et le réinvestir dans d'autres contextes.

Ceci nécessite que les questions aient été traitées au moins partiellement par tous les élèves. Cette situation peut se produire dans les cas suivants : soit le sujet a été travaillé en module par tous, soit il l'a été seulement par les uns en module et par les autres à la maison.

Les échanges avec des collègues d'établissements différents attestent d'une grande diversité de fonctionnement des modules et des T.D. Suivant le type d'organisation mis en place, des contraintes et des marges de manoeuvres variées apparaissent. Toutefois nous espérons que cette brochure pourra être utile à chacun quelle que soit sa situation.

# A PROPOS DE CALCULS ALGEBRIQUES ET NUMERIQUES

# A PROPOS DE CALCULS ALGEBRIQUES ET NUMERIQUES

Les élèves rencontrent des difficultés dans la pratique du calcul numérique ou algébrique en début de seconde. Aussi nous retenons les trois thèmes de travail suivants :

**A) Fractions**
**B) Exposants - coefficients**
**C) Développement - factorisation**

Nous ne développons dans cette brochure que le thème B "Exposants - coefficients" et donnons seulement des éléments de tests pour A et C. A propos de chacun de ces thèmes on peut organiser des modules de type 2.

En effet, les trois thèmes s'appuient sur des connaissances exigibles de collège et font l'objet de compléments dans le programme de 2nde.

<u>Objectifs</u>

Améliorer les compétences calculatoires de l'élève.

- Il s'agit d'une mise au point relative à des calculs dans lesquels interviennent des fractions, des exposants, des coefficients, et qui concernent aussi les développements ou les factorisations.

- On peut remarquer que les compléments propres au programme de 2nd ne sont pas obligatoirement liés à toutes les connaissances exigibles au collège.

Par exemple : factoriser

$(x+1)(2x-7)-(x+1)^2+4x^2-4$

ne fait pas intervenir de calcul ni avec les fractions ni avec les radicaux. Si l'enseignant veut se rendre compte de ce dont l'élève dispose, il est indispensable de ne pas mélanger les difficultés dans un exercice.

Déroulement d'une séquence

- 1er temps : en classe entière :

Passage d'un test (voir textes en annexe) pour contrôler les connaissances et détecter les manques relatifs à la partie exigible au collège.

A l'issue de ce test, l'enseignant constitue les groupes d'élèves en tenant compte de la nature des erreurs.

- 2ème temps : en module, (une ou deux séances suivant les besoins)

- chaque élève travaille individuellement avec son test sur lequel le professeur a signalé les erreurs. C'est à la charge de l'élève de les corriger sans ou avec l'aide de l'enseignant et de répertorier la nature de ses fautes.

- l'élève constitue lui-même sa fiche méthode avec le langage qui lui convient.

Ce travail étant très individualisé il paraît nécessaire de fonctionner avec des groupes d'effectif réduit.

- 3ème temps : en T.D.

Des exercices de difficultés graduées sont proposés à tous les élèves. Chaque élève n'est pas obligé de faire tous les exercices en classe, mais chacun doit pouvoir y trouver un travail propre à améliorer progressivement ses compétences.

Remarque 1 :

Ces T.D sont valables pour toute la classe même pour les élèves qui n'ont pas de difficulté particulière.

Remarque 2 :

Nous ne donnons pas ici de tels exercices. Ceux-ci se trouvent dans les manuels et dépendent du niveau de la classe et des objectifs que s'est fixé le professeur.

## PROPOSITION ET ANALYSE D'UNE SEQUENCE

## THEME B : EXPOSANTS - COEFFICIENTS

. 1er temps : en classe entière sans calculatrice.

*Questions posées aux élèves*

1) . Peut-on donner une écriture plus courte des expressions suivantes (si oui, le faire) ?

$10^{12} \times 10^3$ ; $2 \times 10^4 \times 7$ ; $2 \times 10^4 \times 3 \times 10^5$ ; $3{,}8 \times 10^3 \times 10$

$2^{13} \times 2^4$ ; $5^5 \times 5$ ; $7^7 \times 7^7$ ;

$a^3 \times a^4$ ; $2a^2 \times 3a^5$ ; $2{,}5a \times 4a$ ; $\frac{2}{7} a^3 \times \frac{4}{3} a$

$2^3 \times 5^2$ ; $3^3 \times 7^3$ ; $71^5 \times 31^4$

2) . Ecrire sans parenthèses les expressions suivantes :

$(a^2)^5$ ; $(2a^2)^3$ ; $(\frac{5}{3} b)^2$ ; $2(a^2)^3$ ; $(3a^2b)^4$ ; $(-x)^2$ ; $-(x)^2$ ; $-(x)^2$

$(-x)^3$ ; $-(x)^3$ ; $(-2ab)^3$ ;

3) . Donner, si possible une autre écriture des expressions suivantes :

$10^2 + 10^3$ ; $5x^4 + 2{,}7x^4$ ; $b^4 - b^3$

$x^3 + \frac{4}{5} x^3$ ; $9x^2 - 9x$

Raisons des choix :

Nous excluons, au départ, les puissances négatives. En effet, l'usage de ces puissances dans les calculs algébriques, sauf en ce qui concernent les puissances de 10, est une acquisition de seconde. De plus, les exposants sont tous numériques.

Il nous paraît nécessaire de répéter certains types de calcul afin de voir, en cas d'erreur, si celle-ci est occasionnelle ou si elle correspond à une mauvaise conception de l'élève, à une faute de raisonnement ...

Les questions posées ont des supports différents. La compétence sur l'un d'eux ne donnent pas obligatoirement la compétence sur un autre.

Nous proposons la progression suivante :

- travail sur puissances de 10, ce avec quoi les élèves se sont familiarisés depuis la 4ème, suivi d'un travail avec des nombres autres que 10 et des lettres.
- travail avec des exposants seuls puis travail où interviennent coefficients et exposants. Les coefficients sont volontairement simples afin de ne pas introduire des difficultés parasites. Quant aux exposants, certains sont choisis de façon à dissuader l'élève de faire le calcul effectif (par exemple $10^{12} \times 10^3$). Nous voulons aussi tester le fonctionnement ou non, de l'exposant 1 ou du coefficient 1.
- les opérations sont séparées : d'abord produit puis élévation d'un produit à une puissance, puis somme.

- Ces questions posées peuvent être complétées par une 4ème partie dans laquelle les règles de calcul sont moins isolées afin de voir si l'élève reconnaît les situations. Par exemple :

. Réduire si possible

$2,5x^3 - 2x^3$
$5x^4 + 2x^3$
$2,5x^3 - x^3$

. Calculer

$(1 + \sqrt{3})^2$ , $1 + 3^2$ , $(1+3)^2$ , $(-3)^2$ , $(-5)^3$ , $-3^2$

**2ème temps : module**

C'est un travail très individualisé. L'objectif est que les élèves prennent conscience de leurs connaissances, de leurs méconnaissances, se forgent leurs propres mécanismes et soient capables de s'autocontrôler. Cet objectif ambitieux ne sera peut-être atteint que progressivement au cours de la 2nde ; ce module n'est qu'une étape.

a) Voici quelques pistes pour aider les élèves à repérer et à analyser leurs erreurs, pour leur donner des éléments de contrôle sur leurs résultats. Il serait tentant de donner toutes les règles de calculs. Chacun de nous est bien persuadé que l'effet miracle du formulaire n'a pas toujours les bienfaits tant attendus.

Citons quelques erreurs typiques bien connues :

- remplacer $a^3 \times a^4$ par $a^{12}$

On peut redonner du sens à l'écriture symbolique

$a^3 = a \times a \times a$ (3 facteurs a)

$a^4 = a \times a \times a \times a$ (4 facteurs a)

pour arriver à

$a^3 \times a^4 = a^7$

car le résultat s'écrit avec 3 + 4 facteurs a.

Il nous paraît profitable de persuader l'élève qu'il vaut mieux qu'il se crée ses propres images mentales plutôt qu'appliquer des formules qui n'ont pas encore de sens pour lui. Notons toutefois que l'application des formules dans le calcul algébrique prend toute son efficacité lorsque celles-ci perdent leur sens. C'est aussi un objectif visé à long terme.

- faire subir le même traitement à exposant et coefficient, par exemple dans $2a^2 \times 3a^5$ qui est alors remplacé par $5a^7$.

On peut redonner du sens au coefficient en réintroduisant le signe × qui a été peut-être trop prématurément sous-entendu. On peut écrire

$$2a^2 \times 3a^5 = 2 \times a^2 \times 3 \times a^5$$

$$= ..........$$

- ne pas prendre en compte les "1" sous-entendus dans l'écriture "a"

En effet, il faut lire "a"

tantôt avec le sens $a = a^1$

(exemples : $2,5\ a \times 4\ a$ , $\frac{2}{7} a^3 \times \frac{4}{3} a$)

tantôt avec le sens $a = 1 \times a$

(exemple : $x^3 + \frac{4}{5}x^3$).

Pourquoi ne pas permettre à l'élève qui en a besoin, de restituer ces "1", aussi longtemps que cela lui sera nécessaire pour effectuer son calcul ?

- Réduire de façon abusive l'écriture de sommes algébriques :

L'expérience montre que ces erreurs se raréfient et même disparaissent après l'introduction des polynômes en classe de 1ère. En effet, les élèves sont alors familiarisés avec des expressions polynomiales où des monômes de degrés différents cohabitent ; que ce soit en S, E S, L ou STT le travail algébrique porte essentiellement d'abord sur le second degré, puis sur la factorisation d'un polynôme par $(x - r)$ où r est racine. Il conduit au repérage du degré donc de l'exposant puis à celui des coefficients par exemple :

- dans le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, il faut reconnaître a, b, c (en particulier si l'un d'eux vaut 0 ou 1).

- dans l'identification de 2 polynômes, un travail similaire est à effectuer.

Toutefois il est nécessaire de travailler à mettre en évidence la différence de nature entre le calcul numérique et le calcul algébrique. En effet, la réduction d'écriture dans le numérique que les élèves pratiquent depuis l'école primaire n'est pas toujours possible dans le calcul algébrique. Par exemple

$5x^4 + 2{,}7x^4$

peut se réduire car

$5x^4 + 2{,}7x^4 = (5 + 2{,}7)x^4$ et $5 + 2{,}7$ se réduit

alors que $b^4 - b^3$ ne peut se réduire, on peut écrire

$b^4 - b^3 = b^3(b - 1)$ mais $b - 1$ ne se réduit pas plus que $b^4 - b^3$.

Relier la réduction de l'écriture d'une somme algébrique à la factorisation aide les élèves à autocontrôler leur production.

b) Après la phase dans laquelle les élèves repèrent et analysent leurs erreurs, il est nécessaire de faire un travail de mise à distance. Pour aider chaque élève à prendre conscience de ses connaissances et de ses limites, on peut lui proposer des questions comme celles qui suivent :

Sachant que les lettres a, x, k, k' désignent des nombres :

1) Quelle est la signification de l'écriture mathématique

$a^3$

$a^n$ n entier naturel non nul ?

2) Quelle opération est sous-entendue dans l'écriture ax ?

3) Est-ce que je sais effectuer les calculs du type $a^5 \times a^7$ ?

$a^n \times a^p$ n et p étant des entiers naturels non nuls ?
$ka^n \times k' a^p$ ?

4) Les nombres représentés par les écritures suivantes sont-ils différents ?

$(ax)^3$ et $ax^3$ ?
$(-x)^4$ et $-x^4$ ?
$(-x)^7$ et $-x^7$ ?

5) Qu'est-ce qui n'est pas écrit et qui permet de justifier l'égalité

$$a^{12} \times a \times a^2 = a^{15} \ ?$$

6) Est-ce que je sais reconnaître sur les exemples suivants les cas où une somme peut se réduire à un seul terme ?

$3a^n + 2{,}7a^n$
$3a^4 + 2{,}7a^5$
$7{,}2x^4 - 7{,}2x^3$

7) Qu'est-ce qui n'est pas écrit et qui permet de justifier les égalités :

$$b^2 + 12{,}5b^2 = 13{,}5b^2$$
$$\frac{7}{5} b^3 - b^3 = \frac{2}{5} b^3$$

.................................................. .

Chaque élève se constitue alors son propre fichier contenant ce qui lui semble nécessaire sous la forme (correcte) qui lui convient.

Exemple vécu : l'écriture $a^n \times a^p$ étant trop rébarbative (ou trop mystérieuse ?) pour un élève, il préféra noter dans son fichier "$2^n \times 2^p = 2^{n+p}$ et je peux remplacer 2 par n'importe quel autre nombre".

Il serait toutefois prudent que ce fichier soit validé par le professeur .....

3e temps : Travaux Dirigés

Ce temps se déroule en demi-classe. Les élèves n'ont pas tous le même niveau de savoir faire. Le travail a pour objectifs d'améliorer les compétences de chacun, de recentrer tous les élèves sur le même sujet, d'homogénéiser le savoir de la classe. Il est ensuite complété par l'utilisation des puissances négatives, objets nouveaux de connaissances en seconde.

## Compléments : Thèmes A et C

Nous proposons, dans ce qui suit, deux tests (premier temps de la séquence décrite en début de chapitre). L'un porte sur le thème A (fractions), l'autre sur le thème C (factorisation - développement).

Il s'agit pour l'enseignant de s'informer sur les connaissances et les savoir-faire des élèves en début de seconde.

## THEME A- FRACTIONS (sans calculatrice)

On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

A : Calculer

1) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ ; $\frac{1}{5}+\frac{4}{15}$ ; $-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$ ; $\frac{3}{10}-\frac{2}{15}$ ; $2+\frac{3}{7}$

2) $\frac{4}{8}+\frac{5}{2}$ ; $-\frac{2}{10}+\frac{6}{9}$ ; $\frac{7}{15}+\frac{3}{15}$ ; $\frac{24}{36}-\frac{7}{12}$

B : Calculer

$\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$ ; $\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}$ ; $-\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$ ; $\frac{2}{5}\times\left(-\frac{4}{3}\right)$ ; $\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)$ ; $3\times\frac{2}{5}$ ;
$3\times\frac{5}{6}$ ; $\frac{77}{15}\times\left(\frac{5}{88}\right)$ ; $\left(-\frac{45}{7}\right)\times\left(\frac{14}{3}\right)$

C : Calculer

$\frac{6}{5}:\frac{3}{4}$ ; $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$ ; $\dfrac{\frac{6}{5}}{3}$ ; $\frac{6}{5}:7$

D : Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont fausses dire pourquoi ?

1) $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}$ ; $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{-3}$ ; $\frac{5}{7}=\frac{-10}{-14}$

2) $\frac{3}{4}+\frac{3}{5}=\frac{3}{9}$ ; $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{7}{20}$ ; $\frac{5}{4}-\frac{4}{7}=\frac{1}{-3}$

E : Calculer

$\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ; $\left(\frac{4}{8}\right)^7$ ; $\left(-\frac{5}{7}\right)^3$ ; $\left(\frac{-9}{4}\right)^2$ ; $\left(-\frac{20}{6}\right)^4$ ; $\left(\frac{15}{20}\right)^3$

Quelques remarques sur ces questions :

- La partie A porte sur l'addition de 2 fractions

Dans le 1) les fractions ne sont toutes irréductibles. Le dénominateur est le même dans le premier exemple, puis la recherche du dénominateur commun est à la charge des élèves. Le dernier exemple permet de voir si l'entier 2 est perçu sous la forme $\frac{2}{1}$ ou $\frac{14}{7}$.

Dans le 2) les fractions choisies ne sont pas toutes irréductibles. Les exemples sont tels que la simplification préalable est judicieuse pour certains, inutile pour d'autres.

- La partie B porte sur le produit de 2 fractions. On veut tester si les élèves maîtrisent :

. la règle consistant à effectuer le produit des numérateurs et des dénominateurs.

. la règle des signes, le signe - étant placé devant la fraction.

. la multiplication d'une fraction par un entier.

. la simplification de fractions avant d'effectuer certains calculs.

- La partie C a pour but de voir si les élèves sont capables de ramener un quotient de 2 fractions à un produit.

- La partie D a pour objectifs :

. de tester le fonctionnement du signe - suivant sa place.

. de mettre en évidence les erreurs courantes sur l'addition de 2 fractions et de déceler s'il y a cohérence avec les réponses données au A.

- La partie E concerne l'élévation d'une fraction à une puissance entière positive.

Certaines fractions sont positives, d'autres négatives. Certaines sont simplifiables, d'autres non. Certains exposants sont pairs, d'autres impairs.

# THEME C : FACTORISATION - DEVELOPPEMENT

## PARTIE 1 : TRAVAIL SUR LES IDENTITES REMARQUABLES

1) Indiquer pour chaque expression s'il s'agit du carré d'une somme, du carré d'une différence, de la différence de 2 carrés, de la somme de 2 carrés.

$(x - 5)^2$

$(2x + 3)^2$

$4 - (7x - 1)^2$

$(a + 1)^2 + (a - 2)^2$

$16x^4 - 9y^2$

$(3x - 1)^2 - (x - 4)^2$

$(a + b)^2 + (b - 3)^2$

2) Pour chaque expression du 1), peut-on donner
- une écriture développée ?
- une écriture factorisée ?

Chaque fois que cela est possible, donner ces écritures.

## PARTIE 2 : FACTORISER ? DEVELOPPER ?

1) Voici une liste d'équations. Pour chacune d'elles, indiquer si la factorisation, le développement vous semblent être des outils de résolution. Expliquer pourquoi.

a) $(3x + 1)(x - 2) - (x - 2)(2x + 3) = 0$

b) $(3x - 1)(x + 2) = (x + 2)(2x + 5)$

c) $9x^2 - 1 = 3x + 1$

d) $(3x + 1)^2 - (5x - 2)^2 = 0$

e) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

f) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

g) $4 - (7x - 1)^2 = 0$

h) $(2x - 3)^2 = x^2 + 3x + 9$

i) $3x^2 + 5x - 1 = 3(x^2 + 4)$

j) $(3x + 1)(x - 2) = (5x - 3)(x + 2)$

2) Mettre en oeuvre la méthode indiquée en 1) afin de résoudre (si cela est possible) chacune des équations.

Quelques remarques :

**Partie 1 :**

Factoriser - développer nécessite dans les exemples choisis que les élèves sachent reconnaître et manipuler les identités remarquables.

Dans la première question, on demande la lecture globale d'une expression. Il s'agit, avant traitement, de repérer pour chaque expression si elle entre dans une catégorie indiquée par l'énoncé. C'est l'étape indispensable avant traitement.

La deuxième question est volontairement en deux temps :

- premier temps : quel(s) traitement(s) peut-on faire subir à l'expression ?
- deuxième temps : exécuter ces traitements.

Dans ce test, factorisation et développement sont une fin en soi. En effet, c'est une étape indispensable pour leur utilisation en tant qu'outils efficaces.

**Partie 2 :**

L'objectif est ici d'utiliser les factorisations ou développements pour tenter de résoudre des équations (de degré 2 maximum).

Il faut s'assurer, avant le test, que fonctionne le savoir faire relatif à la partie du programme de 3ème,
*"résoudre une équation mise sous la forme* A . B = 0, *où* A et B *désignent deux expressions du 1er degré de la même variable".*

Pour certaines équations, une transformation de l'expression donnée doit précéder le traitement par "factorisation - développement".

L'équation j), dont la résolution est hors programme en seconde, montre que les méthodes connues et mises en oeuvre par les élèves peuvent ne pas être suffisantes.

Les stratégies à développer par les élèves sont les suivantes :

- voir un facteur commun évident.
- reconnaître et utiliser une identité remarquable soit pour un développement soit pour une factorisation.
- savoir réduire une expression.

Il se peut toutefois que pour répondre à la question 1, certains élèves ne sachent pas faire autrement que

- résoudre partiellement (phase d'action)
- répondre ensuite

puis

- se trouvent gênés par la deuxième question
- ou au contraire prennent conscience à ce moment là de l'avoir déjà traitée en partie.

Factorisation et développement prennent alors statut d'outils explicites alors que jusqu'à là ils n'étaient qu'outils implicites.

# GRAPHIQUES - FONCTIONS

# GRAPHIQUES - FONCTIONS

Les graphiques font partie de notre environnement : manuels scolaires, journaux, affiches publicitaires ... . Les programmes de mathématiques de toutes les sections insistent sur le rôle du graphique dans l'apprentissage de certains concepts et l'illustration de ceux-ci lorsque c'est possible ; par exemple dans le domaine des fonctions, la croissance, le maximum, les limites, la dérivée ...

D'une part, il nous semble indispensable d'éduquer nos élèves, le plus tôt possible, à cette gymnastique intellectuelle qui consiste en des allers-retours entre les cadres fonctions, graphiques, algèbre.

D'autre part, ces allers et retours peuvent permettre aux élèves de se créer des images mentales liées à des concepts.

L'interaction entre les différents cadres repose d'abord sur l'aptitude à lire et interpréter un graphique. C'est pourquoi nous proposons le plan suivant pour le déroulement de nos séquences.

I Lecture de graphiques représentant des situations concrètes où interviennent des grandeurs.

II Premières définitions relatives aux fonctions

III Lecture de graphiques représentant des fonctions.

IV Exemples d'utilisation des interactions graphique - fonction - algèbre à travers le programme de 2nde.

V Propositions de modules - Annexe sur la distance de deux nombres.

Que fera-t-on en module, en TD, en classe entière ?

Quelle sera la durée de ces séquences et quelle sera leur répartition au cours de l'année ?

Nous proposons quelques éléments de réponses à ces questions. Mais il est certain que l'étalement de cet apprentissage est nécessaire ainsi que le réinvestissement fréquent des connaissances en cours d'acquisition.

**Remarques à propos des axes gradués qui interviennent dans toutes les lectures graphiques**

Un axe gradué est une représentation des nombres réels.

Les réels positifs sont un modèle des longueurs, aires, volumes, durées et autres grandeurs mesurables.

Toute valeur d'une telle grandeur peut être interprétée en terme de distance entre deux points d'une droite. En géométrie affine euclidienne, une telle distance est invariante par translation.

Ainsi, une origine étant fixée pour la graduation, à tout point de l'axe gradué correspond une distance à l'origine et donc une valeur de grandeur. Deux points symétriques par rapport à l'origine représentent la même valeur.

On convient d'orienter l'axe et de choisir un demi-axe pour représenter toutes les valeurs d'une grandeur.

Un intérêt des représentations graphiques est de permettre un traitement géométrique de l'ensemble des points qui symbolisent la situation à étudier. C'est l'un des objectifs des exemples retenus. Mais ceci suppose une lecture correcte des données. Une telle lecture peut être rendue difficile en cas de conflit entre la représentation mentale "spontanée" issue de la lecture du texte et la signification symbolique (Cf. exercice 2). Pour dépasser le conflit, l'élève a besoin de prendre conscience que des cadres différents sont en jeu, chacun avec ses outils, ses objets, ses modes d'expression, ses règles du jeu et qu'il doit établir des correspondances entre eux. C'est ce que nous prenons en compte dans la suite.

## I Séquences de lectures graphiques liées à des situations concrètes

Le travail a lieu en T.D car les élèves ont déjà des connaissances sur le sujet. On veut voir comment elles fonctionnent. On place les élèves dans des contextes de nature différente. Il faut toutefois être prudent. Les supports concrets peuvent faciliter la lecture graphique mais ils peuvent aussi créer des obstacles ; certains élèves comprennent mal la situation concrète, d'autres sont décontenancés car ils se demandent ce que le professeur attend d'eux (des mathématiques ? du français ? uniquement des résultats chiffrés ? des phrases du langage courant ?). Un élève qui ne réussit pas un type d'exercice n'est pas forcément un élève qui n'a pas de connaissances sur la lecture graphique. La compétence sur un support n'implique pas forcément la compétence sur un autre. C'est pour cela qu'il faut varier la nature de tels exercices.

Exemples vécus :

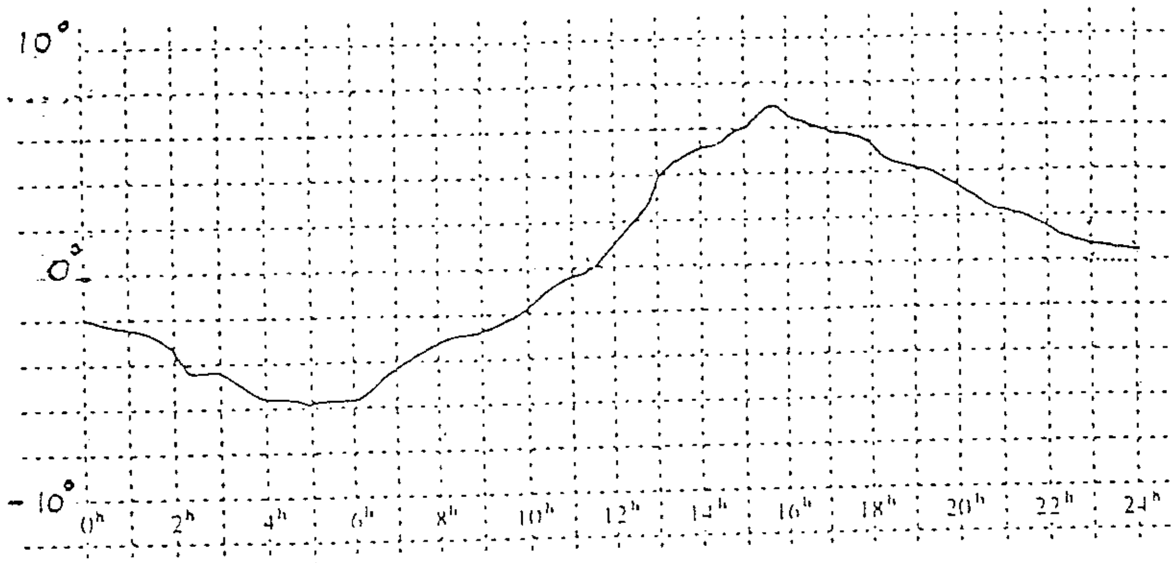
Un élève dit "je ne comprends rien aux histoires de promeneur et de cycliste" (exemples 2) et réussit bien un exercice de type 4 à formulation plus mathématique.

Un élève écrit à propos d'un exercice de type 3 un texte qui montre qu'il a bien lu les informations du graphique, qu'il sait les traduire en français mais éprouve des difficultés dès qu'il doit manipuler des "x".

Exemple 1 :

Températures

Un thermomètre enregistreur a fourni, pour une journée donnée en un lieu fixé, le tracé ci-dessous de la température en fonction de l'heure.




a) Quelle était approximativement la température à 8 heures ? à 13 heures ? à 20 heures ?.

b) La température a-t-elle été dans la journée de 0° ? 6° ? -2° ? - 8° ? Si oui, indiquez à quelle(s) heure(s) ?

c) Durant quelle période de la journée, la température a-t-elle dépassé 0° ?

d) Quelles ont été les températures minimale et maximale de la journée et à quelles heures ont-elles été atteintes ?

e) Durant quelle(s) période(s) la température a-t-elle été croissante ? décroissante ?

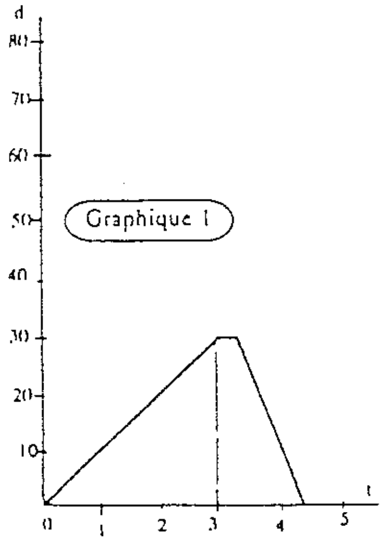
Il faudrait donner un autre exemple du même type afin de ne pas tirer de conclusion hâtive sur les capacités des élèves.

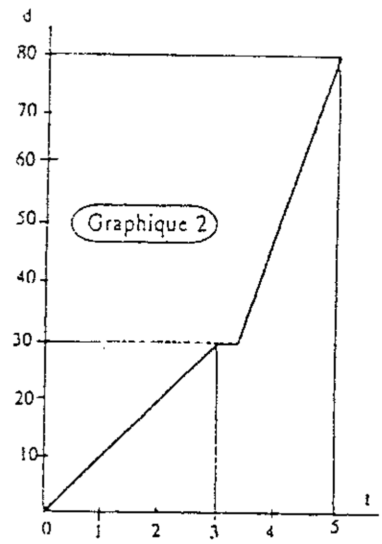
Exemples 2

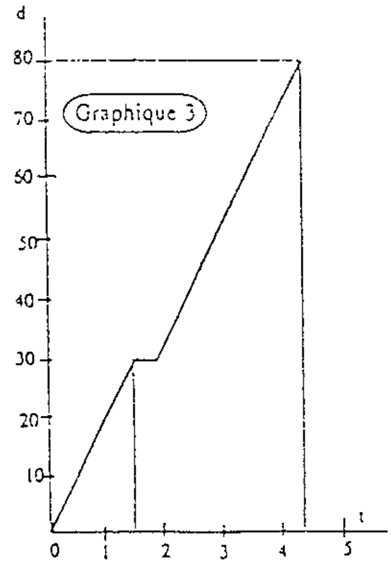
1) Evaluation sept. 92, 2nde.

Un cycliste part d'Argelès-Gazost pour aller à Oloron Sainte Marie, distants de 80 Km, en passant par le col de l'Aubisque.

Il effectue la montée du col à la vitesse de 10 km/h. Après une pause de 20 minutes en haut du col, il descend sur Oloron à la vitesse de 30 Km/h.



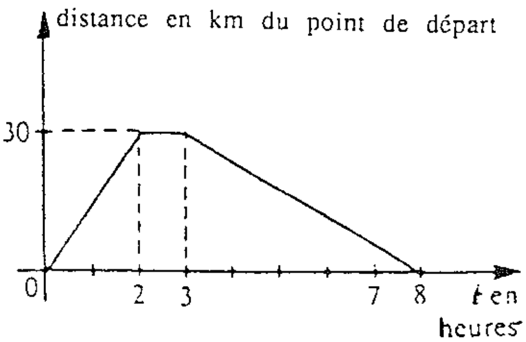



*Question :*

Sur l'un des graphiques, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ.

Quel est le graphique représentant la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps ?

2) Un promeneur sportif !




1°) Parmi les récits suivants, trouver lequel correspond au graphique ci-contre.

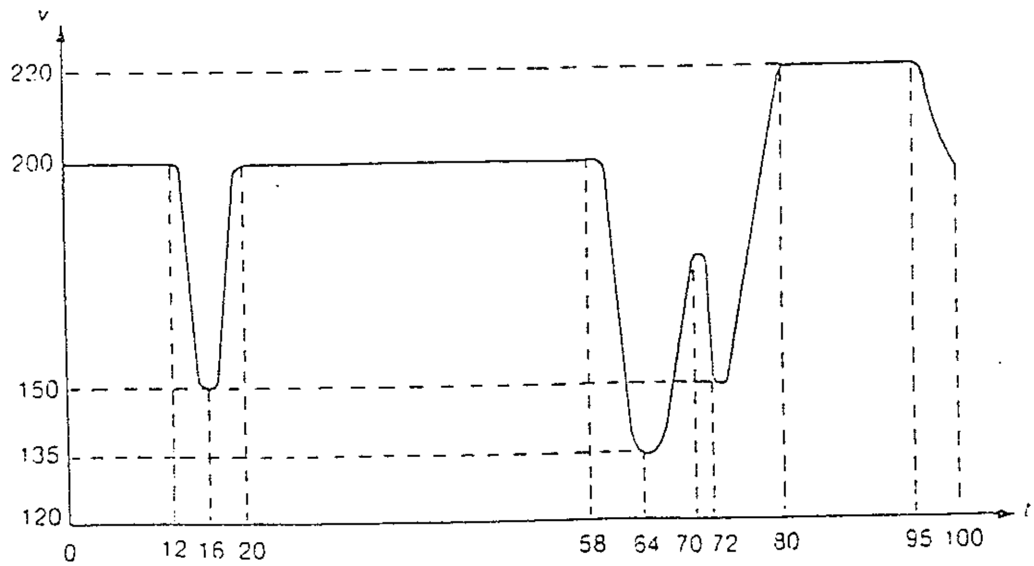
a) Un promeneur part de chez lui en courant durant 2 heures et retourne chez lui en marchant.
b) Un promeneur part de chez lui en courant durant 2 heures, se repose 1 heure et rentre chez lui en marchant.
c) Un promeneur part de chez lui en courant durant 2 heures, se repose 1 heure et continue en marchant durant 4 heures.
2°) Construire un graphique illustrant chacun des deux récits éliminés au 1°.

(Dimathème 1ère A2)

Exemple 3

Une automobile parcourt un circuit ; à partir d'un instant pris comme origine, on a enregistré les variations de sa vitesse v (exprimée en km/h) en fonction du temps t (en secondes). On a obtenu la courbe ci-après.

On suppose que la voiture ne ralentit que lorsqu'il y a un virage. (Nathan 2nd)




Vous êtes reporter sportif sur le circuit automobile

1) Décrivez le comportement de cette voiture lors de la course pendant ces 100 secondes.

2) Dessinez une allure de la portion de circuit correspondante.

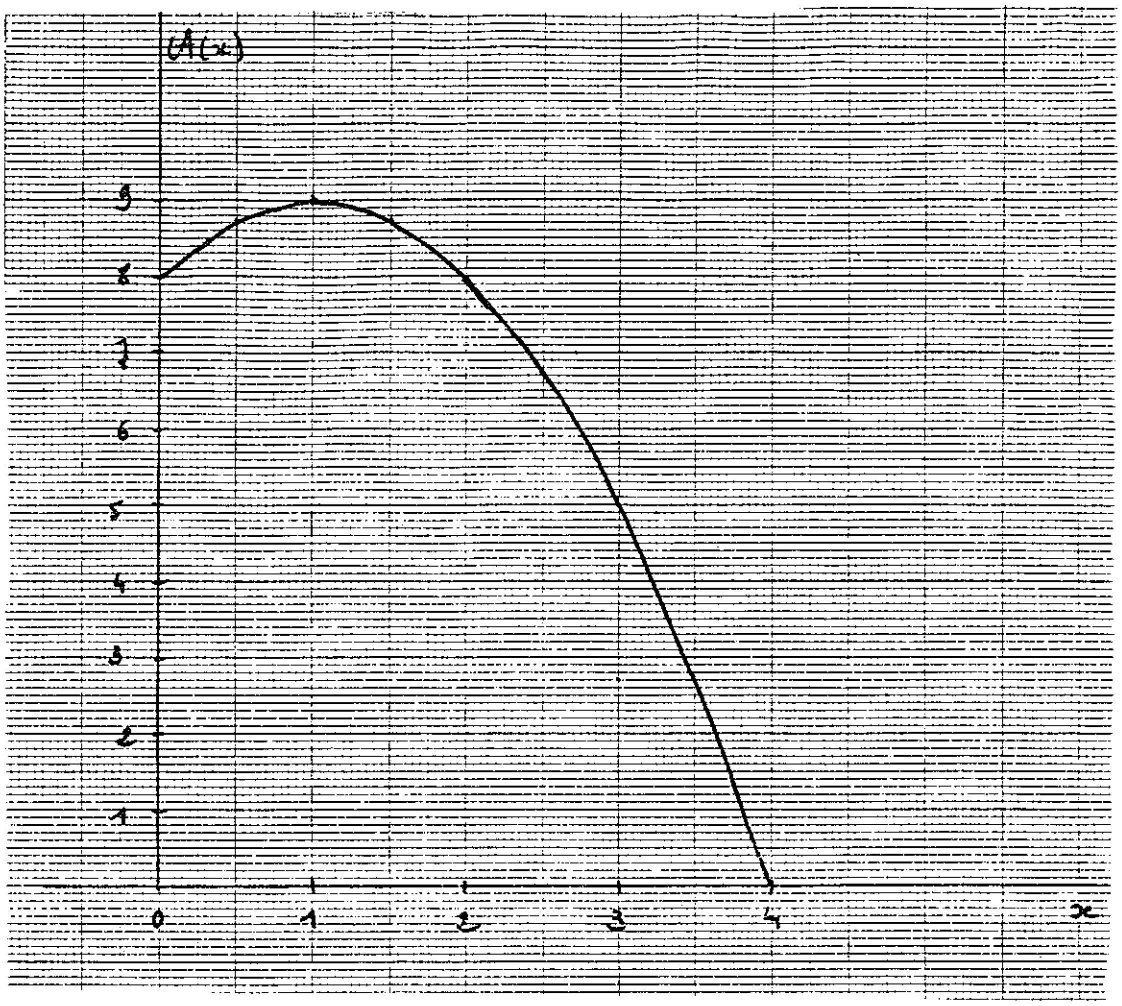
Exemple 4

L'unité de longueur est le cm, l'unité d'aire est le $cm^2$.

Un rectangle a pour dimensions 4cm et 2cm ; on diminue sa longueur de xcm et on augmente la largeur de xcm ;

Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)cm^2$ du nouveau rectangle.

Le graphique ci-contre représente la variation de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x. ($0 \leq x \leq 4$).




- 1) Déterminer la valeur de l'aire pour
$x = 0{,}5$ ; $x = 0{,}75$ $x = 1{,}2$ ; $x = 3$

- 2) La mesure $\mathcal{A}(x)$ peut-elle être égale à :
8 ? 8,5 ? 10 ? 5 ? 2,75 ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x ?

- 3) L'aire peut-elle être maximum ? minimum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x ?

Raisons des choix des types d'exercices précédents :

Les lectures graphiques sont demandées dans des contextes concrets différents. Elles sont facilitées par le fait que les grandeurs portées sur les axes sont de nature différente.

Exemple 1

Les grandeurs représentées sur les axes sont, en abscisse le temps en heure et en ordonnée les températures en degré C.

La situation est familière ; le vocabulaire : croissant, décroissant, maximum, minimum est celui du langage courant ; de plus il correspond exactement aux concepts de variation de fonction dans le domaine mathématique.

Les termes utilisés pour la description du graphique : la courbe "monte", "descend", correspondent au vocabulaire lié à la situation concrète : la température monte, la température descend. La courbe visualise déjà ce qui correspond à la représentation graphique d'une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle.

Exemples 2

Les grandeurs représentées ici sont d'une part le temps en heures, d'autre part les distances en kilomètres.

Il faut déjà comprendre le texte, savoir interpréter le graphique afin de trouver les correspondances texte-graphique. De plus d, représenté sur l'axe des ordonnées, n'a pas toujours la même signification : c'est tantôt la distance parcourue à partir du point de départ, (exercice 1), tantôt la distance séparant le mobile du point de départ (exercice 2). De plus, il y a hiatus entre le vocabulaire lié à la situation concrète (le cycliste descend sur Oloron) et celui utilisé pour la description du graphique (la courbe "monte").

Exemple 3

Ce type d'exercice dans lequel un graphique illustre une situation concrète à décrire, est peu fréquent dans les manuels scolaires. On pourrait demander la lecture des variations de la fonction "vitesse". L'objectif est ici différent : l'exercice propose l'interprétation de la lecture du graphique pour décrire des faits avec le vocabulaire propre à la situation. Donner l'aspect fonctionnel n'est ici pas en jeu : on n'attend pas *fonction décroissante, constante, croissante* mais plutôt *accélaration, freinage ou ralentissement, même allure ...*

Ce qui est visé est : rechercher dans la lecture du graphique un maximun d'informations concernant la situation étudiée et l'exprimer dans le langage courant.

Exemple 4

Il est issu d'une situation géométrique qui peut être qualifiée de concrète car on peut dessiner des rectangles. Toutefois, en considérant x comme une variable continue, tel le temps dans les exemples précédents, la modélisation de cette situation approche bien le concept de fonction et le vocabulaire du texte est semblable à celui du cadre fonctions.

Dans cet exercice, les élèves ont la possibilité d'utiliser soit l'expression algébrique de $\mathcal{A}(x)$ soit la représentation graphique, soit les deux.

Les nombres sont choisis en conséquence :

- Pour la 1ère question, ainsi que pour "$\mathcal{A}(x)$ peut-elle être égale à 8 ?" les deux choix sont possibles.

- Pour les autres questions du 2), le graphique seul permet de répondre ; pour certaines d'entre elles, les élèves peuvent contrôler leur lecture graphique par un calcul exact à l'aide de la formule ($\mathcal{A}(x)$ égale à 5 ou à 2,75) ; pour la question "$\mathcal{A}(x)$ peut-elle être égale à 8,5 ?", le contrôle peut être effectué, seulement par un calcul approché (les valeurs exactes des solutions $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ résultent de la résolution d'une équation du 2ème degré hors programme de 2nd). Ceci est l'occasion de pointer que la lecture donne une valeur approchée et pas forcément une valeur exacte.

Ces deux premières questions mettent l'accent sur la liaison entre les deux démarches algébrique et graphique.

- En ce qui concerne la 3ème question, elle ne peut être abordée que par le graphique. L'objectif est ici de sensibiliser l'élève avec la notion de maximum, minimum avant d'en avoir donné les définitions. On ne s'engage donc pas dans des justifications algébriques à ce stade.

*Remarque* :

Dans cet exemple, on fait interagir trois cadres :

- géométrie plane
- grandeurs
- nombres

Pour alléger l'expression, on identifie deux des cadres : grandeurs et mesures (nombres). C'est ce que l'on fait le plus souvent lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les unités.

## II Premières définitions relatives aux fonctions

C'est la partie qui porte traditionnellement le titre de cours. Il prend appui sur les exercices précédents dans lesquels la notion de fonction est utilisée implicitement. L'enseignant dégage alors le vocabulaire relatif au cadre fonction du programme de 2nde. Cette séquence se déroule en classe entière afin que les élèves aient tous les mêmes références.

## III Eduquer à la lecture de graphiques représentant des fonctions

Les séquences ont lieu en TD. En effet, les mêmes activités sont proposées à tous les élèves de la classe, dans les mêmes conditions. De plus, l'effectif dédoublé facilite les échanges élèves-professeur.

Dans cette partie, le travail est exclusivement algébrique, graphique, fonctionnel ; le graphique ne représente pas une situation concrète.

Une fonction f est donnée par sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$. Le point A, objet géométrique, peut aussi être vu

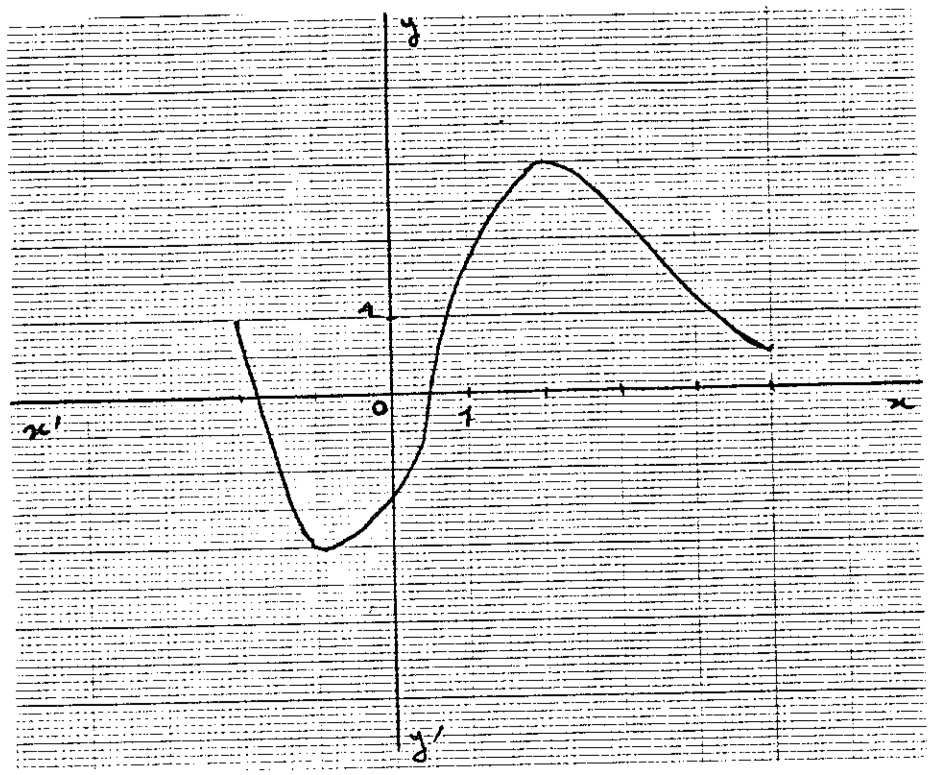
- comme point d'un graphique donc associé à un couple de réels (x,y).
- comme élément de $\mathcal{C}_f$ donc associé au couple de réels (x,y) et à la relation y = f(x).
- comme intermédiaire dans des résolutions graphiques d'équations ou d'inéquations à une inconnue pour lesquelles les solutions sont obtenues par lecture de l'abscisse de A.

Nous proposons plusieurs étapes pour faire travailler les élèves sur ces différents aspects, nouveaux en 2nd et essentiels pour les programmes d'analyse des classes postérieures.

A) Exemples qui mettent en jeu des interactions entre graphique et fonction

Exemple 1 :

La fonction f est définie graphiquement sur l'intervalle $I = [-2 ; 5]$ par la courbe $\mathcal{C}_f$.




1°) Quelles sont les coordonnées des points de $\mathcal{C}_f$ dont les abscisses sont : $-1$, $0$, $-\frac{1}{2}$, $4$ ?

2°) Quelles sont les coordonnées des points de $\mathcal{C}_f$ dont les ordonnées sont : $0$, $\frac{1}{2}$, $-1$, $3$ ?

3°) Déterminer $f(-\frac{1}{2})$, $f(0)$, $f(-2)$, $f(\frac{7}{3})$.

4°) Déterminer, si cela est possible, les valeurs de x telles que
$f(x) = 3$ $\quad$ $f(x) = -0,5$ $\quad$ $f(x) = 5$ $\quad$ $f(x) = \frac{3}{4}$

Exemple 2 :

Etant donnée une fonction définie graphiquement sur un intervalle on peut poser les questions :

Quel est le signe de f(x) quand x appartient à tel intervalle ?

Donner, si cela est possible, (cela sous-entend qu'il n'y en a pas toujours) les valeurs de x pour lesquels $f(x) > 0$ ou $f(x) \geq 0$ ou $f(x) < 0$ ou $f(x) \leq 0$.

L'objectif est alors de faire le lien entre *$\mathcal{C}_f$ au dessus (respectivement en dessous de (x'x))* (cadre graphique) et *f(x) positif (respectivement négatif)* (cadre fonction).

Exemple 3 :

Deux fonctions f et g étant données par leurs représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, le choix des graphiques vise à mettre en évidence le lien entre :

- les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ (cadre graphique) et les valeurs de x telles que $f(x) = g(x)$ (cadre fonction).
- la position relative des deux courbes (cadre graphique) et les valeurs de x telles que $f(x) \leq g(x)$ (cadre fonction).

Exemple 4 :

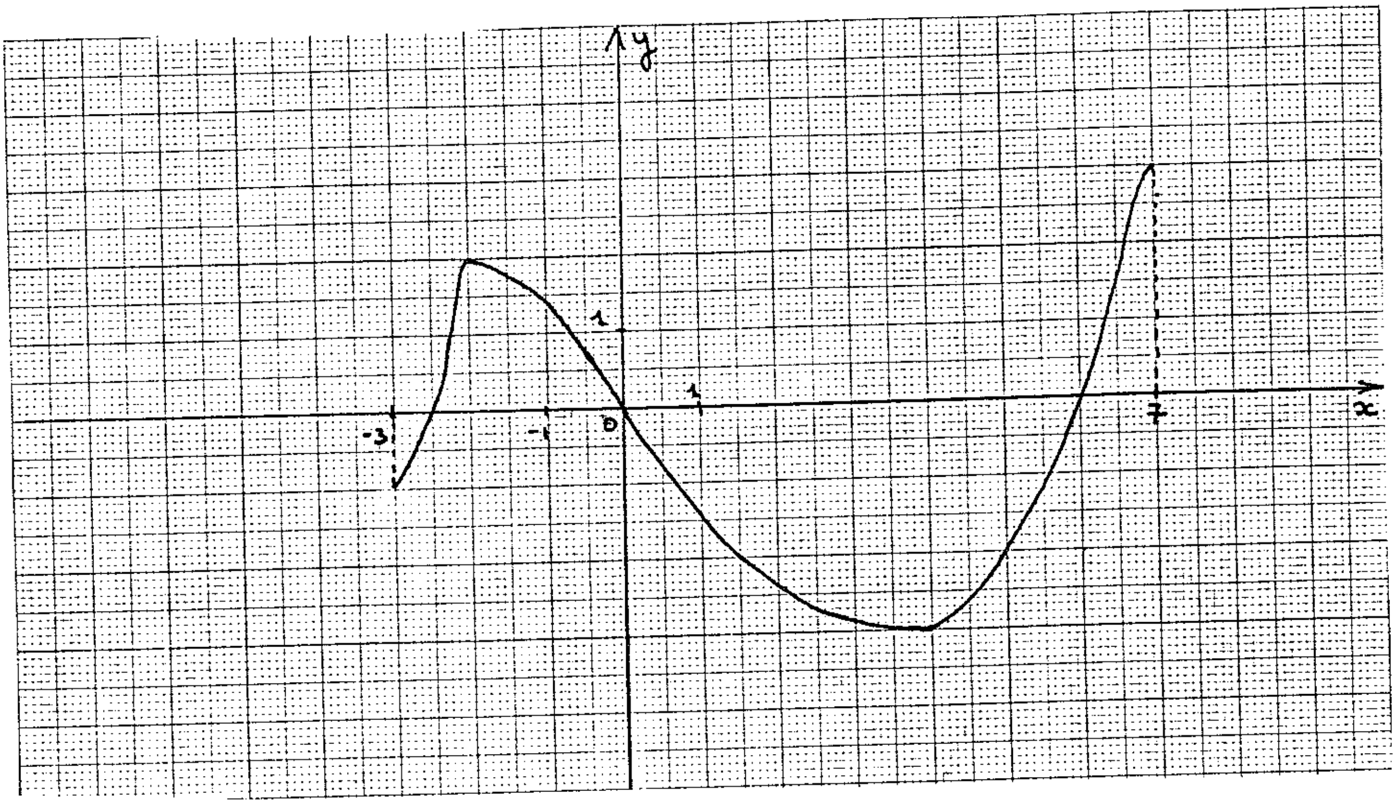
Dans le même esprit, on peut poser des questions relatives à

sens de variation - minimum relatif - maximum relatif.

## B) Résolution graphique d'équations ou d'inéquations

Exemple 1 :

La fonction f est définie graphiquement sur l'intervalle [-3,7] par la courbe suivante :




1) On affirme que :
   a) x = - 1 est solution de l'équation f(x) = 1,4
   b) x = 2 est solution de l'équation f(x) = - 1
   Ces propositions sont-elles exactes ? Justifiez votre réponse.

2) On affirme que :
   a) l'équation f(x) = 1 a 3 solutions
   b) l'équation f(x) = - 0,5 a 2 solutions
   c) l'équation f(x) = 3 a 1 solution
   d) l'équation f(x) = - 7 n'a pas de solution
   Ces propositions sont-elles exactes ? Justifiez votre réponse.

3) Résoudre graphiquement les équations suivantes :
   f(x) = - 2 ; f(x) = 2,5 ; f(x) = 4 ; f(x) = 0
   Expliquez les étapes de votre démarche.

Autres exemples :

- Etant donnée une fonction définie graphiquement sur un intervalle, résoudre $f(x) > 3$ ou $f(x) \leq 3$

- Deux fonctions f et g étant données par leurs représentations graphiques, résoudre $f(x) = g(x)$ ou $f(x) \leq g(x)$.

**Raison des choix des exercices des parties A et B**

Nous développons ce qui concerne les exemples 1 de chaque partie. Le point de vue est le même dans les autres exemples.

Dans tous les exercices, chaque fonction est donnée par sa représentation graphique. Et nous avons choisi des questions auxquelles seule la lecture graphique permet de répondre.

Exemple A1 :

Dans les deux premières questions, les points de $\mathcal{C}f$ sont définis par leurs coordonnées. Il n'y a pas de notation fonctionnelle. Il s'agit de faire travailler les élèves sur les 2 types de lecture suivants :

1) on donne l'abscisse, on lit l'ordonnée du point correspondant sur la courbe. On peut attirer l'attention sur le fait que ce point est unique.

2) on donne l'ordonnée, on lit l'abscisse du (des) point(s) correspondant(s) sur la courbe. On attire ici l'attention sur le fait qu'il peut y en avoir plusieurs. Les valeurs 0, 0,5 , - 1, 3 sont ici choisies telles que l'existence d'un point de $\mathcal{C}f$ ayant pour ordonnée une de ces valeurs n'est pas en cause.

Dans les questions suivantes, l'ordonnée d'un point de $\mathcal{C}f$ est vue comme vérifiant $y = f(x)$. On reprend les 2 types de lecture :

3) on donne x et on lit f(x)

4) on cherche x tel que f(x) ait une valeur donnée.

Ici, existence et unicité de x sont en cause. Le libellé de cette question reste volontairement dans le cadre fonctionnel. Il s'agit de faire travailler l'interaction graphique - fonction.

Exemple B1 :

Il s'agit de donner du sens à *résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$*. Le problème est algébrique. Sa résolution a un support graphique.

L'exercice a pour objectif de faire travailler les élèves sur deux formulations : *résoudre $f(x) = k$* (cadre algébrique) et *chercher x tel que f(x) = k* (cadre fonctionnel). Le traitement graphique des deux questions posées est le même. Mais le vocabulaire employé est différent et il normal que cela gêne les élèves. Pourtant la résolution graphique de $f(x) = k$ ne peut se faire que par son décodage qui comporte plusieurs étapes :

- Je cherche x tel que $f(x) = k$
- Pour cela
  . je repère l'ordonnée k
  . je regarde s'il y a des points de la courbe qui ont cette ordonnée k.
  . s'il en existe, je regarde combien il y en a et je lis leurs abscisses.
  . ces abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = k$

L'exercice B1 propose un travail pour conduire les élèves à maîtriser ces étapes.

Dans la première question, à une solution de l'équation on associe un point de la courbe. En effet, pour savoir si $x = -1$ est solution de l'équation $f(x) = 1{,}4$ on regarde si le point de coordonnées (- 1 ; 1,4) est un point de la courbe c'est-à-dire si $f(-1)=1{,}4$.

Dans la deuxième question, on détermine l'existence et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$, k nombre donné. Pour cela, on détermine l'existence et le nombre de points de la courbe qui ont pour ordonnée k. On lit l'ordonnée, on compte les points et on s'arrête. On n'a pas encore les solutions. Il s'agit d'insister sur le fait que cette étape est une étape intermédiaire de la résolution ; les points obtenus ne sont pas les solutions comme le disent souvent les élèves.

La troisième question permet d'achever la résolution par la dernière étape, lecture des abscisses qui donne les solutions.

Ces résolutions graphiques d'équations ou inéquations sont en début d'apprentissage en seconde. L'enchaînement des différentes étapes pose encore problème en fin de première à certains élèves. Sur le sujet, on peut organiser un module de type 1 (méthodologique) avec pour objectif : familiariser la plupart des élèves avec ce nouveau type de démarche. Il est souhaitable d'effectuer auparavant un test de contrôle afin de voir quels élèves ont besoin de ce module. En effet, on constate que l'enchaînement des différentes étapes s'acquiert plus ou moins rapidement. Un élève, en grande difficulté dès qu'il y a des calculs, peut très vite maîtriser le cheminement d'une résolution graphique. Un autre, à l'aise dans d'autres contextes, peut avoir du mal à assimiler les étapes du raisonnement à support graphique.

## IV Utilisation des interactions : graphique, fonction, algèbre à travers le programme de 2nde.

Les travaux présentés ici, directement liés à des connaissances à acquérir en 2nd, peuvent être placés en T.D. On peut demander aux élèves de préparer à la maison la construction de graphiques afin de gagner du temps. Un bilan est fait en classe entière.

Dans les objectifs du programme, les interactions graphique, fonction, algèbre ont essentiellement pour rôle de créer des images mentales auxquelles chaque élève peut, aussi longtemps qu'il le souhaite, se référer pour avoir disponibles les résultats algébriques correspondants. Retenons par exemple :

1) Signe de $ax + b$ $(a \neq 0)$

2) Comparaison de
$a^2$ et $b^2$
$\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$
$\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.

3) Comparaison de $a$ et $a^2$

4) Résolution des équations du type
$x^2 = k$ ou $f(x) = k$
des inéquations du type
$x^2 < k$ , $x^2 \leq k$,
$f(x) < k$, $f(x) \leq k$
à la suite de l'étude du comportement d'une fonction f, comme en cite le programme.

Le graphique est toutefois utilisé sous divers aspects avec lesquels les élèves arrivant de 3ème ne sont pas familiarisés. Un des objectifs de la classe de 2nd est de les faire progresser dans cette familiarisation.

Il va de soi que ce travail s'étale sur toute l'année.

1) Dans *signe de ax + b*, à une expression algébrique on associe un graphique sur lequel on lit des informations puis on les traduit dans le cadre algébrique.

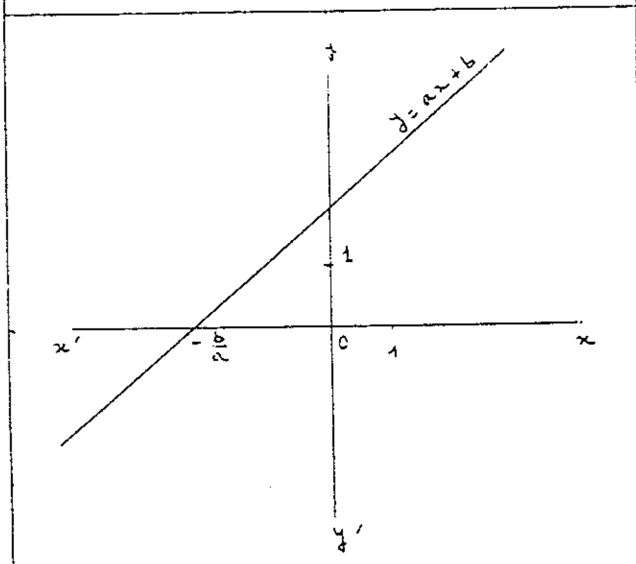
Le graphique peut représenter une fonction ($x \mapsto ax + b$) ou être considéré comme la "famille" des points de coordonnées (x,y) liées par la relation $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Cela dépend à quel moment se situe ce travail par rapport à l'installation de la notion de fonction.

En effet, on peut le placer très tôt dans l'année dans la mesure où il repose uniquement sur les connaissances de 3ème, relatives aux équations de droites. Dans ce cas, il y a uniquement interaction algèbre - graphique. on représente des points de coordonnées (x,y) qui sont alignés et on s'intéresse au signe de l'ordonnée suivant les valeurs des abscisses.

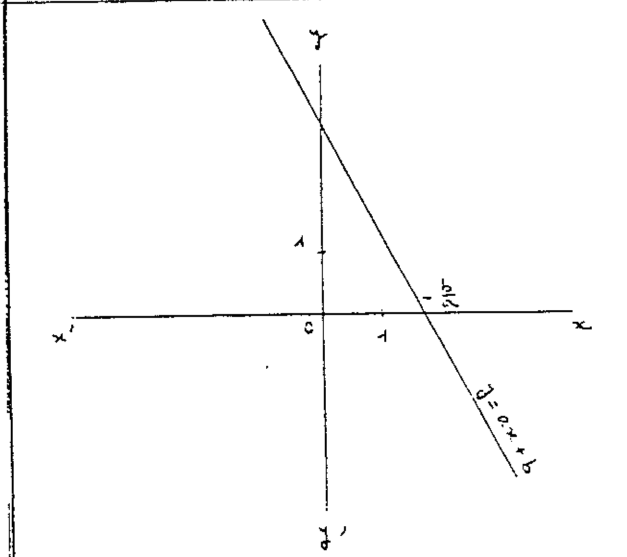
Si la notion de fonction a été mise en place, on peut lier le signe de ax + b à la stricte croissance ou décroissance de la fonction f telle que $f(x) = ax + b$ et au fait que f s'annule.

cadre graphique

$a > 0$




$a < 0$




cadre algébrique

$a > 0$

| $x$ | | $-\frac{b}{a}$ | |
|---|---|---|---|
| signe de $ax+b$ | $-$ | 0 | $+$ |

$a < 0$

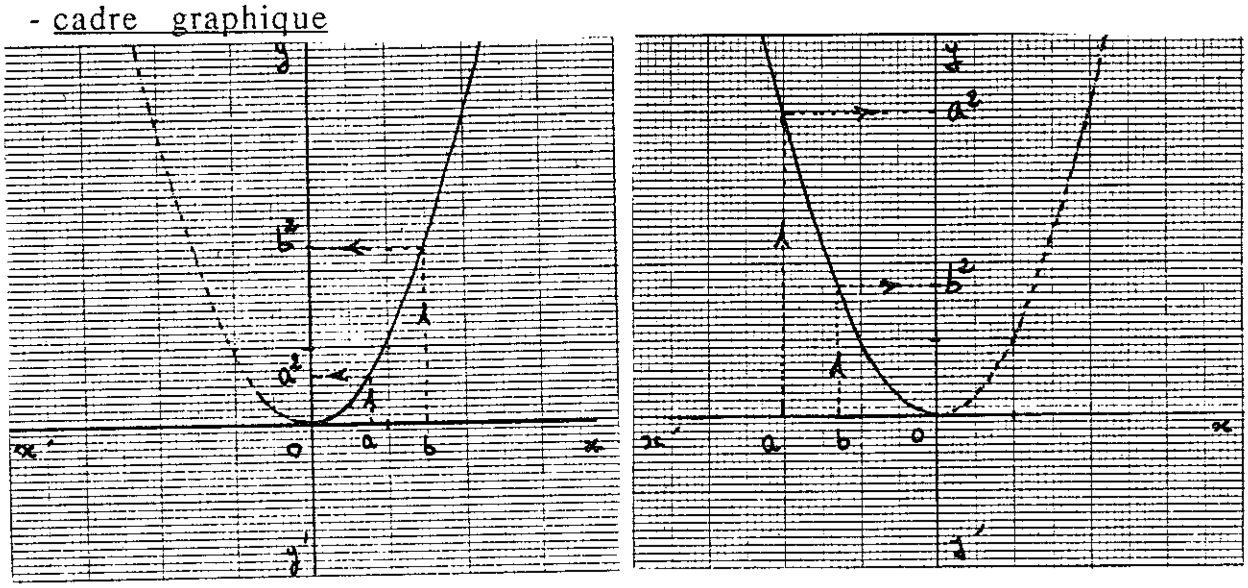
| $x$ | | $-\frac{b}{a}$ | |
|---|---|---|---|
| signe de $ax+b$ | $+$ | 0 | $-$ |

2) Dans *comparaison de $a^2$ et $b^2$*, (ou de $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$) le graphique intervient comme représentant une fonction par exemple ($x \mapsto x^2$). Les trois cadres sont en jeu :

- cadre algébrique : comparaison de $a^2$ et $b^2$
- cadre fonctionnel : sens de variation de la fonction ($x \mapsto x^2$) sur un intervalle
- cadre graphique : a et b étant portés en abscisses, lecture et comparaison des ordonnées $a^2$ et $b^2$ des points correspondants du graphique.

L'élève est alors amené à mettre en parallèle les différents points de vue sans pour cela que son professeur ne lui impose de priorité, l'important étant qu'il sache à quoi se référer personnellement pour restituer le résultat algébrique.

- <u>cadre graphique</u>




Représentation graphique de la fonction ($x \mapsto x^2$) sur $[0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, 0]$

- <u>cadre fonction</u>

La fonction ($x \mapsto x^2$) est croissante sur $[0, +\infty[$ , décroissante sur $]-\infty, 0]$.

- <u>cadre algébrique</u>

Si $0 \leq a < b$ alors $a^2 < b^2$

Si $a < b \leq 0$ alors $a^2 > b^2$

3) Dans *comparaison de a et $a^2$* (pour $a \geq 0$), la démarche est différente :

- on considère les deux fonctions ($x \mapsto x$), ($x \mapsto x^2$)
- on dessine leurs représentations graphiques
- on lit pour une valeur de a les ordonnées des deux points d'abscisse a sur les courbes, on les compare
- on traduit le résultat en termes algébriques.

L'utilisation des graphiques n'exclut absolument pas les démonstrations algébriques. Le graphique est alors un outil qui permet de visualiser puis de restituer un résultat algébrique.

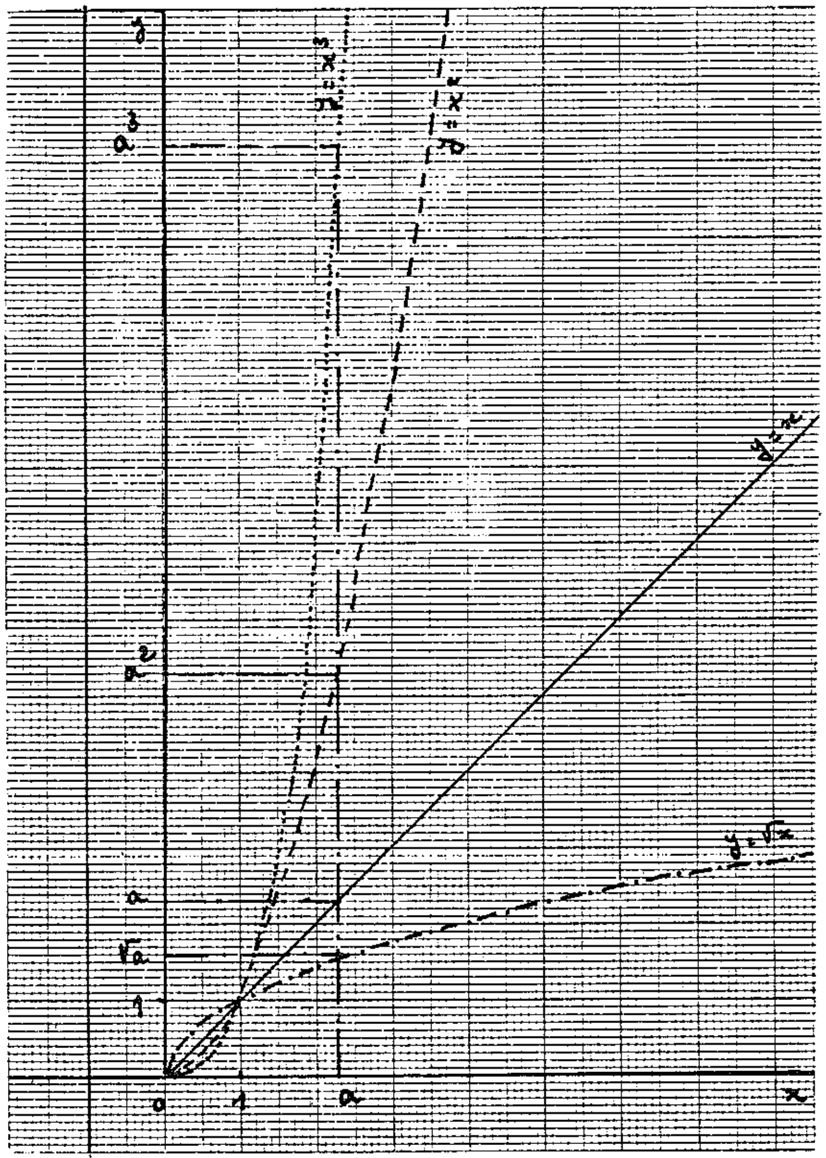
<u>Remarque :</u>

Dans cette partie 3) on s'en est tenu au libellé strict du programme, mais on peut envisager de voir, en module, *comparaison de a, $a^2$, $a^3$, $\sqrt{a}$ pour $a \geq 0$.*

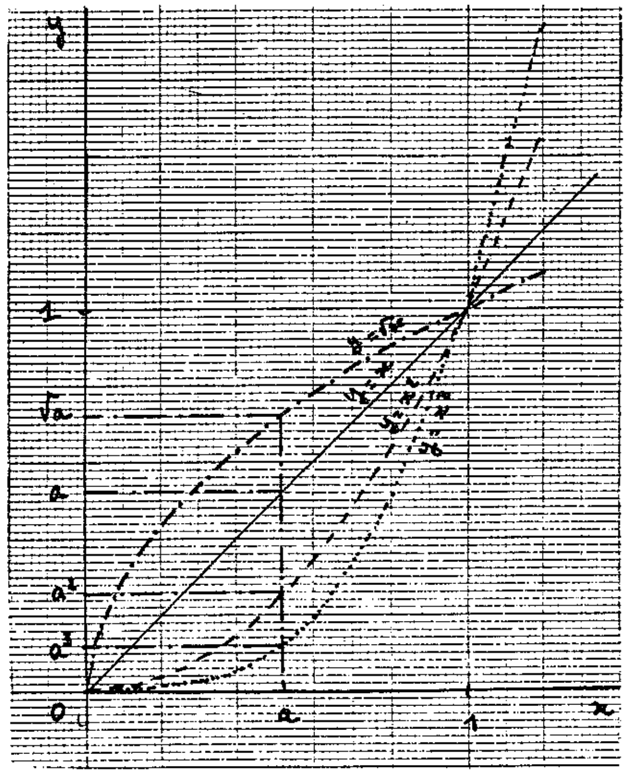
Il est intéressant d'observer comment travaillent les élèves :

- quelle démarche utilisent-ils (lecture graphique ou démonstration algébrique) ?.
- quel ordre choisissent-ils pour comparer a, $a^2$, $a^3$, $\sqrt{a}$ ?.
- à quelles difficultés de calcul se heurtent-ils ?
- construisent-ils toutes les courbes sur la même figure ?
- ayant construit les courbes éprouvent-ils le besoin de justifier leur lecture par une démonstration algébrique ?

## Cadre graphique




$a \geq 1$




$0 \leq a \leq 1$

## Cadre algébrique

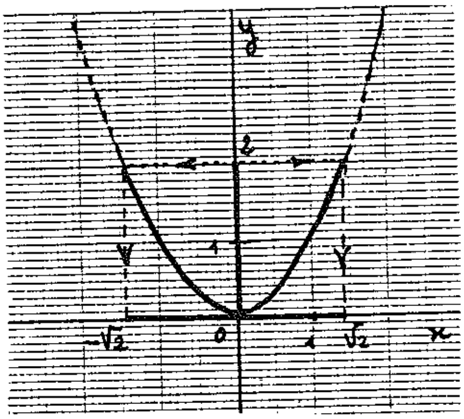
| | | | |
|---|---|---|---|
| si | $a \geq 1$ | si | $0 \leq a \leq 1$ |
| alors | $\sqrt{a} \leq a \leq a^2 \leq a^3$ | alors | $a^3 \leq a^2 \leq a \leq \sqrt{a}$ |

4) *Dans les équations et inéquations* le statut de la lettre x est celui d'inconnue alors que précédemment a était un "nombre réel généralisé".

L'équation $x^2 = k$ a déjà été vue en 3e mais, la plupart du temps au travers de situations géométriques si bien que par exemple la solution -2 de $x^2 = 4$ n'a pas été retenue comme solution du problème concret posé.

Le graphique permet de visualiser les deux solutions pour $k > 0$ et l'absence de solutions pour $k < 0$.

La difficulté, pour les élèves, vient ici du sens de lecture du graphique. Ce n'est plus, on prend l'abscisse et on lit l'ordonnée du point correspondant de la courbe mais la démarche inverse : par exemple pour $x^2 < 2$, c'est en ordonnée qu'est enregistrée l'information "< 2" et la courbe sert d'intermédiaire pour lire les solutions en abscisse.




Les solutions de l'inéquation $x^2 < 2$ sont les nombres x tels que $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ (ou les nombres appartenant à l'intervalle $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ ).

Pour certaines équations ou inéquations une solution agébrique est accessible aux élèves.

Par exemple $(x - 1)^2 = k$, $x(1 - x) > 0$ ....

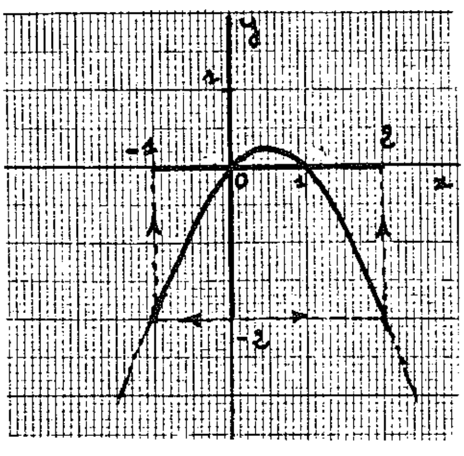
Pour une équation du type

$x(x - 1) = - 2$

seule la lecture graphique fournit les solutions 2 et - 1, mais la vérification numérique est possible.

Par contre pour une inéquation du type

$x(1 - x) > - 2$ le graphique est, en seconde, le seul outil de résolution.




Les solutions de l'inéquation $x(1 - x) > - 2$ sont les nombres qui appartiennent à l'intervalle $]-1,2[$.

## V Propositions de modules

Nous proposons ici deux modules de nature différente qui utilisent les graphiques : l'un sur la fonction valeur absolue, l'autre avec un support lié à l'économie.

### A) Valeur absolue

Le programme de seconde définit $| b - a |$ comme distance de a et b. C'est pourquoi, avant de travailler sur $| b - a |$ il nous paraît indispensable de familiariser les élèves avec le sens de d(a,b) et les résolutions, sur la droite numérique, d'équations ou d'inéquations du type

$d(a,x) = k$, $d(a,x) \leq k$, $d(a,x) \geq k$, ...

Une proposition de progression qui a été expérimentée dans plusieurs classes de seconde est donnée en annexe page 58.

Il nous est demandé d'étudier aussi la fonction valeur absolue et le programme donne comme exemple de fonctions à étudier en travaux pratiques ($x \mapsto |x - a|$).

Nous connaissons toutes les erreurs persistantes sur le sujet (si on envisage $| x + 3 |$ ou $| \cos x |$ en 1ère ou même en terminale scientifique on obtient fréquemment si $x > 0$ alors ... , si $x < 0$ alors ...).

. Objectif :

S'appuyer sur le graphique, d'une part pour éviter d'attacher la valeur absolue au pôle 0 anciennement attractif, d'autre part pour aboutir à l'expression de $| x - a |$ sans barres de valeur absolue.

En liaison avec le travail de cours c'est un module de type 2.

. Raisons de la place en module :

pouvoir constituer des groupes avec des élèves de compétences diverses : un habile en calcul, un autre maîtrisant les travaux sur les distances, un autre "fana" de graphique .... .

. Texte donné aux élèves : Il est fourni en 3 temps, afin qu'un bilan puisse être fait après chaque étape.

1er temps :

Représentez graphiquement la fonction f : $x \mapsto | x - \frac{11}{19} |$

Expliquez pourquoi la droite d'équation $x = \frac{11}{19}$ est un axe de symétrie pour le graphique.

2ème temps :

Vous avez obtenu deux demi-droites symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \frac{11}{19}$.

Quelles sont les équations de ces deux demi-droites ?

Pouvez-vous donner une expression de $| x - \frac{11}{19} |$ sans barres de valeur absolue ?

3ème temps :

Dessinez la représentation graphique des fonctions suivantes

$g : x \mapsto | x + 2 |$
$h : x \mapsto | - x + \frac{3}{2} |$
$k : x \mapsto | - x - 1{,}3 |$

On fera tous les graphiques sur la même feuille en utilisant des couleurs différentes et en écrivant sur chaque demi-droite l'équation qui lui correspond.

. <u>Raisons des choix</u>

*Dans le 1er temps :*

Le nombre $\frac{11}{19}$ est choisi de façon à essayer d'attirer l'attention des élèves sur ce nombre (moins "fréquentable" que 1 ou 2). On observe deux types de démarches :

- Certains élèves font le calcul de $| x - \frac{11}{19} |$ en donnant des valeurs à x. Les moins sûrs d'eux dans les calculs sur les fractions utilisent alors leur calculatrice.

- D'autres utilisent la définition de $| x - \frac{11}{19} |$ et reportent directement en ordonnée $d(x, \frac{11}{19})$ pour quelques valeurs de x, ceci à l'aide d'une règle graduée ou d'un compas (ce sont ceux qui ont bien assimilé la valeur absolue comme distance de deux nombres).

Les deux façons de procéder donnent lieu à une confrontation dans les groupes : en effet, l'alignement des points pas forcément réalisé pour ceux qui effectuent des calculs devient immédiat pour ceux qui considèrent la valeur absolue comme une distance.

La question posée sur l'axe de symétrie est dans le cadre géométrique. Les démonstrations fournies par les élèves mettent en évidence des triangles rectangles isocèles (fig. 1). Ceci nécessite l'utilisation de la valeur absolue comme une distance.

Un bilan est fait à la fin de ce 1er temps avec le dessin obtenu (fig. 2).

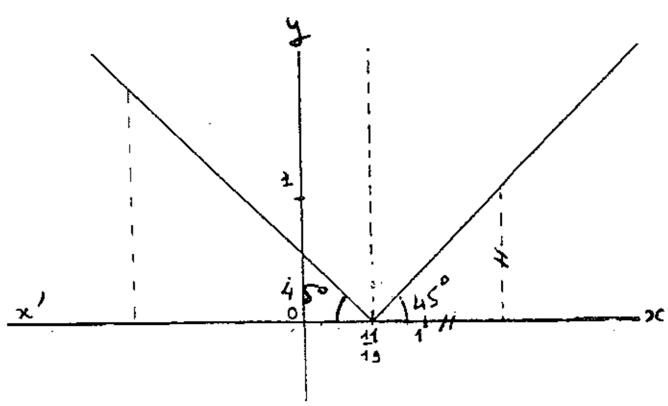



fig 1

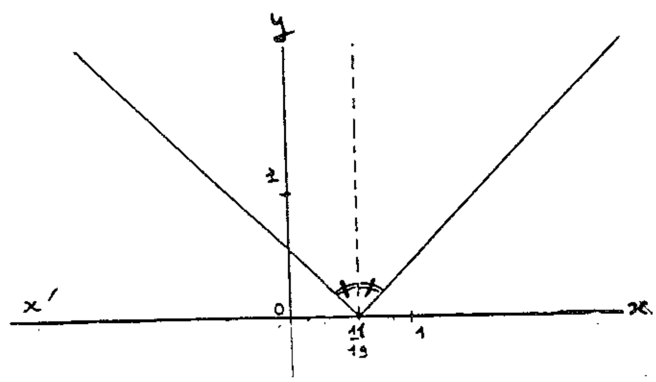


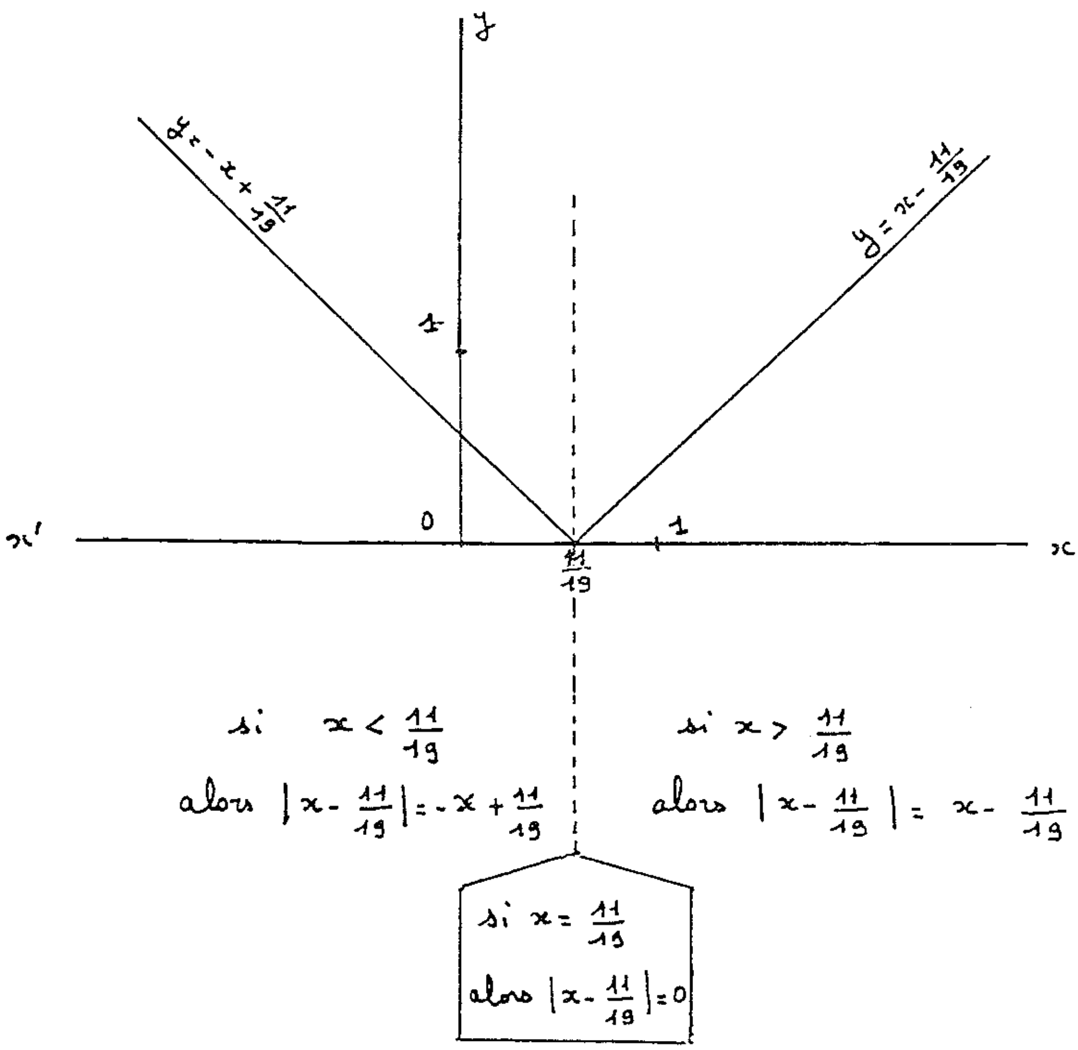

fig 2

*Dans le 2ème temps :*

Pour l'écriture des équations (il faudrait préciser "réduites" si ce travail est fait après les équations cartésiennes de droites), on réinvestit la signification du coefficient directeur. Le fait que l'ordonnée à l'origine n'apparaît pas sur le dessin pour l'une des demi-droites, pose problème. C'est l'occasion de mettre l'accent sur ce nombre $\frac{11}{19}$, puisque la demi-droite passe par le point de coordonnées $(\frac{11}{19}, 0)$. C'est alors une lecture graphique qui permet d'exprimer $| x - \frac{11}{19} |$ sans les barres.

Le bilan à la fin du 2e temps est le suivant :

Représentation graphique de f : $x \mapsto | x - \frac{11}{19} |$



*Dans le 3ème temps*

pour la fonction g, la difficulté est de passer de l'écriture

$|x+2|$ à $|x-(-2)|$

afin de faire jouer à -2 le même rôle que $\frac{11}{19}$ dans ce qui précède.
Dans le cas de la fonction h l'égalité

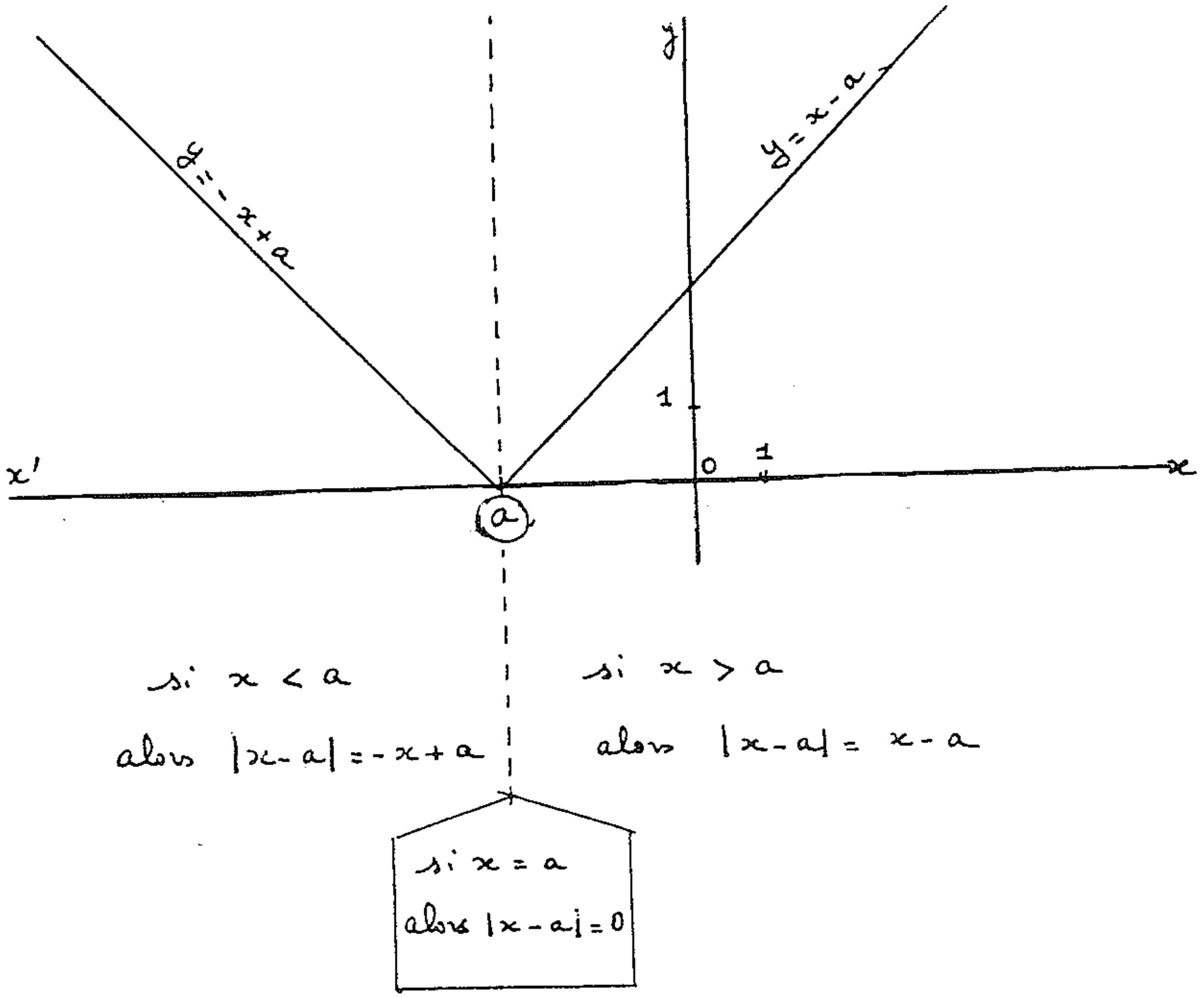
$$|-x+\frac{3}{2}| = |x-\frac{3}{2}|$$

s'obtient en passant par les distances :

$$|-x+\frac{3}{2}| = |\frac{3}{2}-x| = d(\frac{3}{2}, x) = d(x, \frac{3}{2}) = |x-\frac{3}{2}|.$$

<u>Suite à ce travail en module est installé dans le cours</u> :

Représentation graphique de la fonction f : $x \mapsto |x-a|$ et expression de $|x-a|$ sans les barres. (a est un nombre fixé).




La fonction $(x \mapsto |x|)$ apparaît comme le cas très particulier où a = 0 et on évite ainsi la ritournelle, si x > 0....si x < 0.....

La valeur absolue est détachée du pôle attractif 0.

## B : Module : Courbes et économie

ENONCE :

Une entreprise fabrique une quantité x d'un certain produit exprimée en tonnes.

Le graphique représente, en milliers de francs, le coût de production en fonction de x (courbe $C_P$), le prix de vente de ce produit en fonction de x (courbe $C_V$ ).

a) Pour quelles quantités du produit, l'entreprise réalise-t-elle du bénéfice ?
Pour quelles quantités subit-elle des pertes ?
Justifiez vos affirmations.

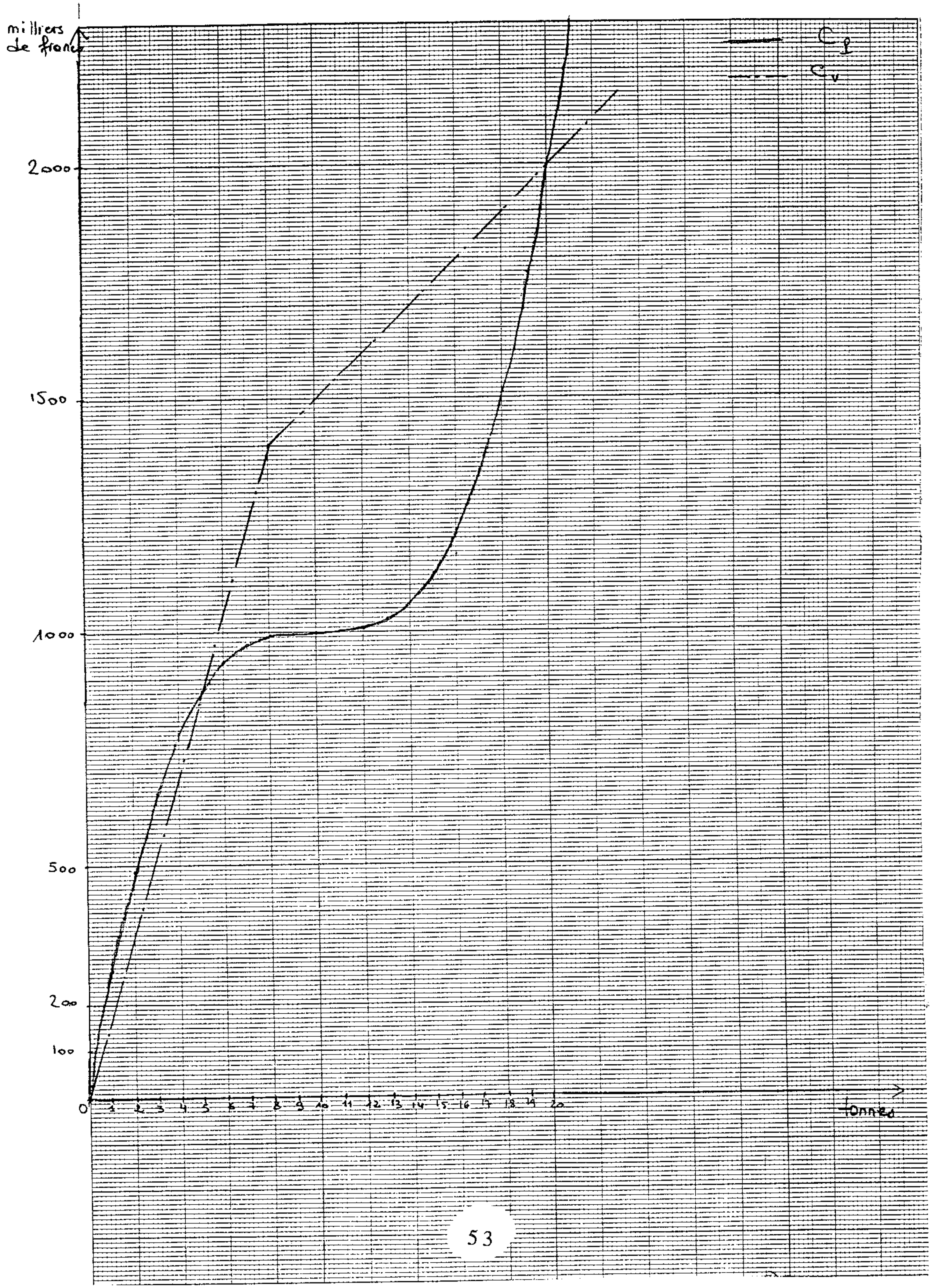
b) Pour quelle(s) quantité(s) de produit l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice de
- 500.000 francs ?
- 100.000 francs ?

c) Quelle quantité approximative de produit assure à l'entreprise un bénéfice maximum et quelle est la valeur approximative de ce bénéfice maximum ?

Reprendre la question avec bénéfice minimum.

d) Est-il possible de construire la courbe représentant le bénéfice ($C_B$) ? Si oui comment le faire ? Retrouver les résultats des questions précédentes à l'aide de cette courbe (justifier vos affirmations).

Si non, expliquer pourquoi.



milliers de francs
2000
1500
1000
500
200
100
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
tonnes
$C_f$
$C_v$

Objectifs :

1) Divers types de lectures graphiques :

- signification de courbe "au-dessus" "au dessous" d'une autre courbe.
- lecture abscisse vers ordonnée
- lecture de différences d'ordonnées pour une abscisse donnée
- lecture ordonnée vers abscisse

2) Utilisation de fonctions définies par leur graphique : $C_P$ et $C_V$ sont données puis on fabrique la courbe $C_B$ représentant et définissant la fonction bénéfice à partir de $C_P$ et $C_V$.

Type de module :

Le travail est original. Il n'est pas "habituel" en 2nd et il ne sera pas forcément répété. Mais il est souhaitable que chaque élève ait vu ce type d'exercice au moins une fois même s'il ne se destine pas à la section ES où ce genre de problème est traité. Par contre, cette forme d'exercice peut permettre à certains élèves (pour lesquels le point de vue calculatoire de beaucoup des exercices courants est rébarbatif) de mettre en valeur leur savoir-faire dans l'utilisation des graphiques.

Raison de la place en module, durée.

. Le temps nécessaire à résoudre ce problème est long (temps de lecture et de construction soignée de graphique).

Un module d'une heure et demie est donc mieux adapté qu'une séance de TD. Si on ne dispose que d'une heure on peut demander aux élèves de terminer la construction de la courbe $C_B$ à la maison avant d'exploiter ce graphique soit en classe entière, soit dans une 2ème séance.

Travail de groupe

Les groupes sont formés sans critères particuliers.

Un travail de groupe facilite la confrontation entre les élèves.

Analyse de l'expérimentation

Pour la question a) on cherche à vérifier la capacité d'interprétation de *position relative de 2 courbes (au-dessus, en-dessous et intersection)* ainsi que les capacités de lecture des abscisses correspondant aux zones repérées. Les réponses attendues sont soit des formulations en français, soit des écritures mathématiques (intervalles-inégalités). On n'attend pas de confusions entre abscisse et ordonnée. En effet, la lecture graphique est facilitée par la présence de grandeurs différentes sur chaque axe (quantité de produit en tonnes, coût ou prix en francs) et par la formulation des questions (quelles quantités de produit ... ?).

La question b) nécessite d'une part de bien distinguer l'intervalle sur lequel il y a bénéfice, ce qui a été fait en a), d'autre part de repérer les abscisses pour lesquelles la différence des ordonnées correspond aux questions posées. Pour 500 000 il n'y a pas de confusion possible entre bénéfice et perte. Par contre 100 000 conduit certains élèves à oublier le sens de $C_v$ *au-dessus de* $C_p$, pour ne prendre en compte que la mesure de la distance entre deux points de même abscisse : ils effectuent leurs lectures dans la zone perte et dans la zone bénéfice ; cette erreur que nous attendions plutôt dans l'intervalle [0,5], s'est en réalité produite au delà de 20.

Dans la question c) nous omettons volontairement dans l'énoncé toute définition du mot "bénéfice". Ceci conduit, côté élève, à un certain nombre de nuances dans les réponses concernant le minimum. Certains déclarent que 0 F est bénéfice minimum ; d'autres refusent cette valeur comme bénéfice ou comme perte et on trouve des réponses de type : *pour x = 5,2 le bénéfice minimum est de 20 000 F.* C'est l'occasion d'insister sur plusieurs points :

- la notion mathématique de minimum. Si 20 000 F est minimum, 10 000 F peut-il aussi être bénéfice minimum ?

- les obstacles créés par le graphique :

Sur un graphique, notre vue et l'épaisseur du trait limitent la possibilité de séparer deux points. Mais on ne peut pas dire exactement à quel moment on ne peut plus lire (il n'y a qu'à prendre une loupe pour améliorer la lecture !). Certains élèves parlent en effet du "segment bénéfice" et pour eux, les extrémités d'un segment sont distinctes.

- la signification d'un point d'intersection de deux courbes représentant deux fonctions en tant que point où la différence des ordonnées est nulle.

On pourrait penser que les questions a) b) c) vont faciliter les lectures plus techniques sur le graphique de la courbe bénéfice. Or cela n'est pas aussi simple et si les élèves construisent sans difficulté (avec plus ou moins de précision) la courbe bénéfice, la plupart ne cherchent pas à retrouver les résultats demandés. Ils se contentent de vérifier leurs résultats : par exemple, lorsque dans b) pour 5 00 000 F ou 100 000 F ils n'ont trouvé qu'une seule quantité de produit, l'utilisation de la courbe bénéfice correctement construite ne leur permet pas de compléter leur réponse ; ils font la lecture dans le sens abscisse vers ordonnée et non ordonnée vers abscisse. Or c'est le deuxième type de lecture qui est utilisé dans la dernière question et c'est celui que les élèves maitrisent le moins.

De plus, pour ceux qui tracent la courbe bénéfice en considérant une perte comme un bénéfice négatif (c'est à dire en dessous de l'axe des abscisses sur [0,5] ou pour $x \geq 20$) le minimum donné n'est pas pour autant négatif.

Remarques :

- Les courbes se prolongent-elles ou non ?

Le graphique ne donne aucune indication à ce sujet.

Ceci amène quelques élèves à se placer dans la situation suivante : "en supposant que les courbes continuent pareillement jusqu'à l'infini" et ainsi dans leurs réponses figure l'intervalle $[20, +\infty[$.

L'aspect mathématique prévaut sur l'aspect concret du problème. Demandons alors aux élèves : à quel moment pensez-vous que l'entreprise va déposer son bilan ?

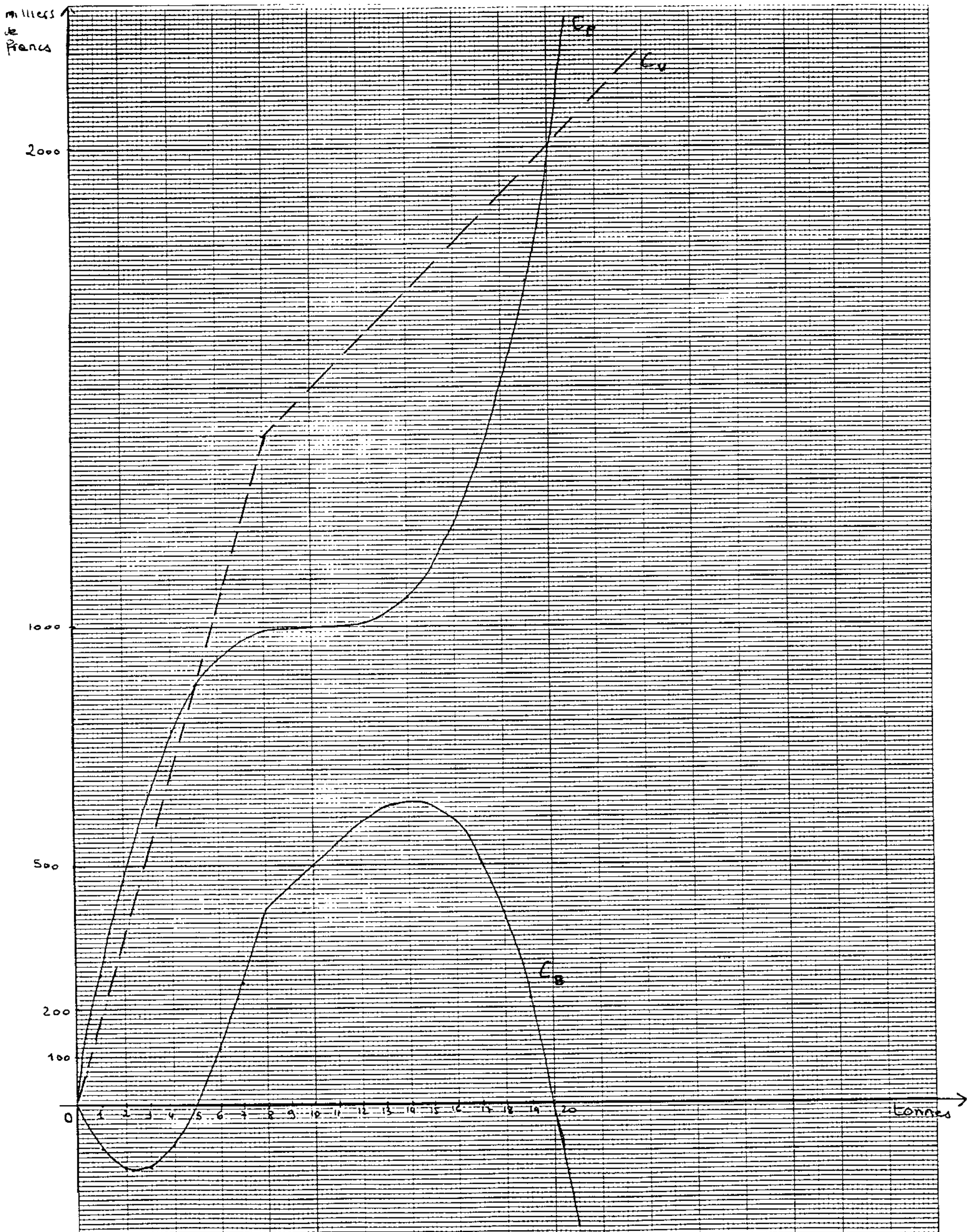
Cela pose le problème (mathématique) du domaine de validité des informations fournies par un graphique. Peut-on extrapoler ou non au-delà de la feuille de papier ?

- ce problème donne l'occasion d'insister sur le fait que la lecture graphique est une lecture approchée. L'énoncé en tient compte : "pour quelle quantité approximative ..."

Dans certaines situations cela peut être suffisant.

Annexe ci-contre

Graphique initial complété avec la courbe $C_B$ dont la construction est à la charge de l'élève.


milliers de francs
2000
1000
500
200
100
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
tonnes
$C_T$
$C_V$
$C_B$

**Annexe : proposition de progression dans l'apprentissage relatif à la distance de 2 réels.**

L'intention majeure est de donner des références géométriques à la notion de distance entre deux réels. Cette notion est délicate, importante et concerne chaque élève. Aussi, il est préférable de travailler son introduction en TD.

| Texte donné aux élèves : |
|---|

**1ère partie**
L'unité de longueur est le centimètre.

1°) *On se place dans l'espace.*
A est un point de l'espace, dire où se trouvent les points M, M' et M" de l'espace tels que :
AM = 3
AM' ≤ 4,5
AM" > 2
Faire une représentation de ces ensembles de points.

2°) *On se place dans un plan.*
Mêmes questions qu'au 1°) en remplaçant "espace" par "plan".

3°) a) On se place sur une droite ; mêmes questions qu'au 1°) en remplaçant "espace" par "droite".
b) Soit une droite graduée (x'x) et A le point d'abscisse 1,58 ; on pose les mêmes questions qu'au 3°) a).

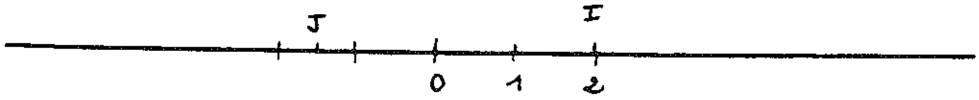
c) Avec les données de la question précédente, caractériser par leurs abscisses les points M, M' et M".

**2ème partie**
La distance de deux points d'une droite graduée peut s'exprimer à l'aide de leurs abscisses.

A et B étant deux points d'une droite graduée.
$x_A$ et $x_B$ leurs abscisses.

Nous introduisons les notations d(A,B) et $d(x_A, x_B)$ avec la signification suivante :
d(A, B) = AB
et $d(x_A, x_B) = d(A, B)$

1°) a) *Sur une droite graduée* on donne les points I et J




Placer les points A, B, C, E, F tels que :

d(I, A) = 2 d(J, B) = 4,5 d(F, J) = 3 d(I, C) $\leq$ 5

d(E, I) > 4

b) *Sur une droite graduée*, placer les réels x tels que

d(3,x) = 5

Même question pour :

d(x, -1) = 4
d(0, x) = 1,5
d(0,5 ; x) $\leq$ 7 puis etc ... en remplaçant $\leq$ par $\geq$, < , > et en plaçant x tantôt en première position tantôt en deuxième position.

Même question pour :

d(2,x) = d(5,x)
d(2,x) < d(5,x)

etc ....

2°) *En utilisant la droite numérique*, résoudre les équations ou inéquations suivantes et écrire les solutions des inéquations à l'aide d'intervalles :

d(x, 12) = 23

$d(-\frac{3}{4}, x) = 2$

$d(x, -1) \leq \frac{4}{3}$

d(1,x) > 4,3

et autres équations et inéquations du même type qu'au 1°).

puis d(x,5) = 0 , d(6,x) = - 3

Choix et raisons des choix :

Dans ce travail on part du connu géométrique des élèves lié à la distance. Pour parler de la distance de deux réels on utilise la "bijection naturelle et intuitive" entre les points géométriques d'une droite et leur abscisse sur la droite graduée.

Dans la 1ère partie, on passe de l'espace au plan, puis à la droite (c'est l'occasion de revoir le vocabulaire : boule, sphère, disque....) ; puis la droite est graduée afin de déjà familiariser les élèves avec le vocabulaire et les questions de la partie suivante. la dernière question demande de traduire en numérique une situation géométrique déjà en place ; l'activité des élèves est uniquement dans cette traduction. C'est l'occasion de redonner du sens aux intervalles.

Dans la 2ème partie, on travaille successivement dans trois situations :

- avec le point géométrique
- avec le point attaché à un nombre réel (son abscisse)
- avec le réel lui-même.

Il s'agit du passage progressif du géométrique au numérique. Dans le 1) de la 2ème partie, aucun calcul n'est à faire, on ne demande que de *placer* des points, *placer* des réels.

Pour placer A tel que d(I, A) = 2, ils disent :

*je prends mon compas avec 2 pour écartement, je pique en I et je fais deux arcs de cercle à droite et à gauche de I.*

Puis pour placer x tel que d(3,x) = 5, on attend la même procédure géométrique avec le compas ou le placement direct pour ceux qui n'ont déjà plus besoin de l'instrument. Certains disent :

*je prends mon compas avec un écartement de 5, je pique en 3 puis, ....*

Pour d'autres le compas est "moral" et ils disent *je pars de 3, je fais + 5 à droite et - 5 à gauche* d'où les calculs non demandés qui apparaissent $3 + 5 = 8$

$3 - 5 = - 2$

Quant au placement de C tel que $d(I,C) \leq 5$, l'utilisation du mot "placer" est volontaire. En effet lorsqu'il s'agit de dessiner un nombre fini et fréquentable de points, il n'y a pas d'ambiguïté dans le dessin. Par contre, dans la situation $d(I,C) \leq 5$, les élèves sont embarrasés par l'infinité de points à représenter.

On peut observer deux façons de procéder :

- d'abord le placement des points $C_1$ et $C_2$ comme pour l'égalité puis interrogation à propos d'autres points possibles
- le placement de points d'abord "près de I", puis d'autres plus éloignés en ayant conscience de la distance 5 à ne pas dépasser. Dans les deux cas, le problème du placement de <u>tous</u> les points C nécessite une convention de représentation (hachures - couleur .... plus légende).

La technique qui vient d'être acquise dans le cadre géométrique se transfère sans problème pour le *placement des x* tels que $d(a,x) \leq r$. (a et r donnés, r positif strictement pour l'instant). Les élèves disent :

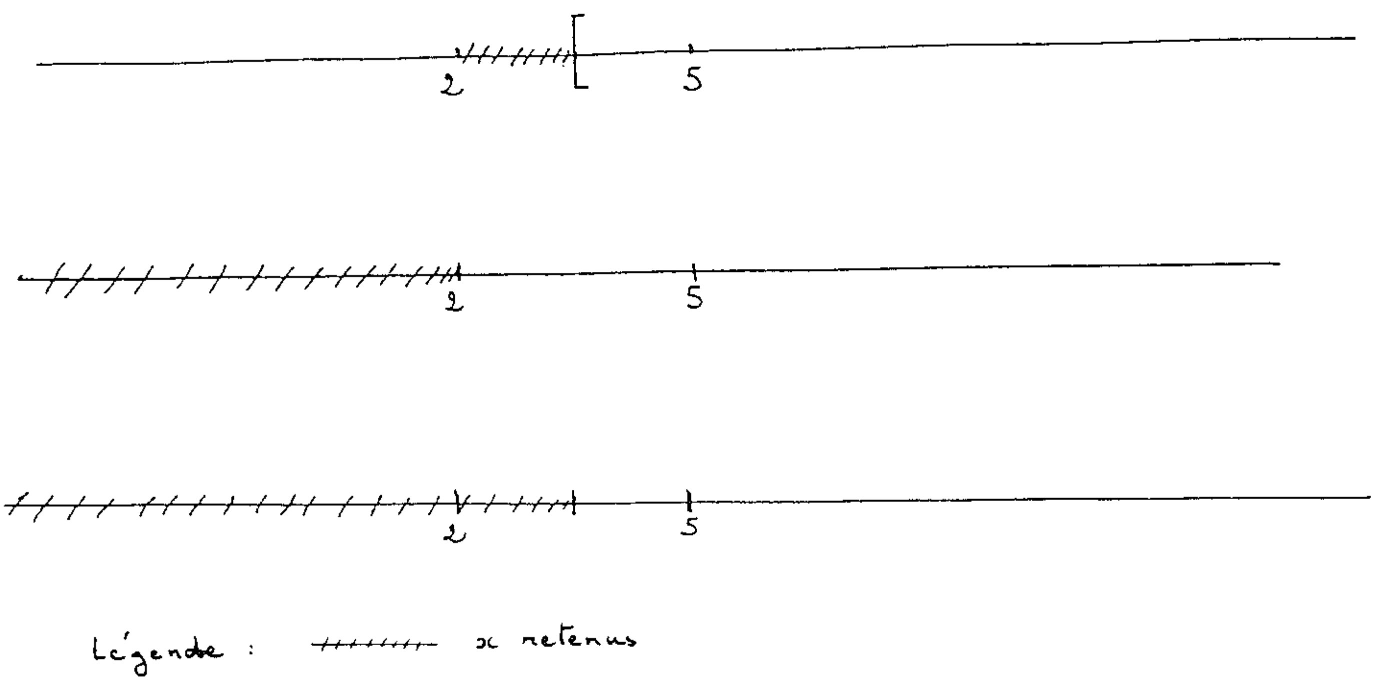
*je veux x autour de a, pas éloigné de plus de r ; donc au maximum j'ai a + r , au minimum a - r.*

Pour l'égalité $d(2,x) = d(5,x)$ c'est en traduisant par

*je veux x à la même distance de 2 et 5*

qu'ils pensent au milieu.

En ce qui concerne le placement des x tels que $d(2,x) < d(5,x)$, on observe les dessins suivants :




ils proviennent de *je cherche des x plus près de 2 que de 5.*

C'est l'occasion de revenir sur le rôle de la médiatrice d'un segment, dans le régionnement du plan puis, par restriction, le rôle du milieu dans le régionnement de la droite.

Dans le 2°) les démarches de résolution sont les mêmes que les précédentes, la formulation des réponses est imposée sous forme numérique : égalités - inégalités - intervalles. Ce travail se continue en exercices à la maison et si nécessaire en module afin de s'assurer que la technique de résolution de ce genre d'équations ou d'inéquations fonctionne bien.

On constate que la définition $| x - y | = d(x,y)$ facilite la résolution des équations ou inéquations avec valeurs absolues dans le cadre du programme.

Il reste ensuite à institutionnaliser les notions introduites et à ne pas passer trop vite au numérique "pur" afin de faire fonctionner les images mentales mises en place, images auxquelles les élèves peuvent faire référence pour résoudre des exercices ou contrôler des résultats.

# QUADRILATERE DANS UN CARRE

## QUADRILATERE DANS UN CARRE

### Proposition de travail en module

L'objectif est d'amener les élèves à traiter un problème avec des outils provenant de plusieurs domaines.

C'est pourquoi nous classons ce module dans le type 3.

. Enoncé donné aux élèves :

*Données* :

- ABCD est un carré de 9 cm de côté
- M est un point de [AB]
- N, P et Q sont respectivement les points de [BC], [CD] et [DA] tels que les segments [CN], [CP] et [AQ] ont même longueur que le segment [AM].

*Questions* :

Elles sont relatives au quadrilatère MNPQ

1°) Sa forme

Quelles sont toutes les formes possibles ?

2°) Son périmètre

Que vaut-il ? Y a-t-il des positions de M pour lesquelles celui-ci est maximum, minimum ? Si oui, lesquelles ?

3°) Son aire

Que vaut-elle ? Peut-elle valoir 1 $cm^2$ , 50 $cm^2$ , 100 $cm^2$ ?

Y a-t-il des positions de M pour lesquelles celle-ci est maximum, minimum ? Si oui, lesquelles ?.

. Raisons de la place en module

- pouvoir composer les groupes d'élèves.

- avoir un effectif moins important que la classe entière ce qui permet une meilleure observation des démarches, une plus grande disponibilité de l'enseignement, et qui favorise les échanges élève(s)-élève(s) ou élève(s)-professeur.

- donner du temps pour la confection des affiches qui sont utilisées lors du bilan.

. Constitution des groupes :

Les groupes de 3 ou 4 élèves sont constitués par l'enseignant avec un souci d'hétérogénéité et de complémentarité : un élève spontané et peu précis avec un élève consciencieux et lent, etc ... de façon à dynamiser le groupe, favoriser la recherche d'une solution ainsi que sa mise en forme, valoriser le travail de chacun.. .

. Durée

Le travail se déroule sur 2 séances de 1 H 1/2 suivies d'un bilan d'1/2 heure en classe entière.

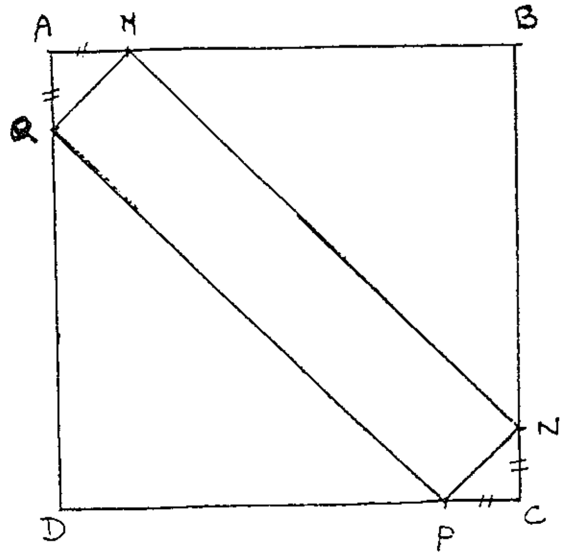
Toute la classe doit traiter le sujet proposé, les uns lors des deux séances modulaires, les autres en travail à la maison.

. Situation par rapport au déroulement du cours

Les fonctions ont été déjà abordées en temps qu'outil lors de leur présentation puis en temps qu'objet lors d'une séquence de cours. La notion de minimum, maximum n'a pas été institutionnalisée et le sera lors du bilan.

. Choix et raisons des choix

1) L'énoncé est compréhensible par tous : tous les termes employés sont connus des élèves et leur permettent de construire la figure géométrique qui est simple. Les élèves ont des connaissances de procédures pour pouvoir démarrer le problème mathématique tel qu'il est formulé.




2) Les deux premières questions font appel seulement à des connaissances de collège. C'est l'occasion de pointer d'éventuelles erreurs ou de rappeler des résultats des années précédentes.

Par exemple les erreurs de calcul sur les radicaux lors de la simplification de l'écriture

$MN = \sqrt{(9 - AM)^2 + (9 - AM)^2}$

- Si un élève développe $(9 - AM)^2$ il se trouve devant une expression qu'il ne peut pas traiter. On peut alors mettre l'accent sur le fait que le développement n'est pas toujours efficace.

- S'il remplace l'expression par

$(9 - AM) + (9 - AM)$ soit $18 - 2AM$ (erreur bien connue !)

les cas particuliers fournis par les dessins (AM = 1 cm ou 2 cm ... la mesure de MN ou son calcul numérique par le théorème de Pythagore) lui permettent de constater que "quelque chose ne va pas". Ce constat peut fournir à l'enseignant un point de départ à un travail personnalisé :

- amener l'élève à une prise de conscience de son erreur.
- destabiliser les réflexes qui conduisent à cette erreur.

Mais l'évolution de l'élève peut être lente et il lui faudra sûrement un certain nombre d'étapes pour parvenir à ne plus commettre cette erreur.

- On peut rappeler que la diagonale du carré de côté c a pour mesure $c\sqrt{2}$ et qu'il est bien utile de le savoir !

- Si un élève écrit

$\sqrt{2}\,(9 - AM)$ ou $(9 - AM)\sqrt{2}$

c'est l'occasion de préciser que, dans ce problème

$\sqrt{(9 - AM)^2} = 9 - AM$ car $AM < 9$

mais on pourrait aussi, dans certains cas (lesquels ?) avoir

$\sqrt{(9 - AM)^2} = AM - 9$.

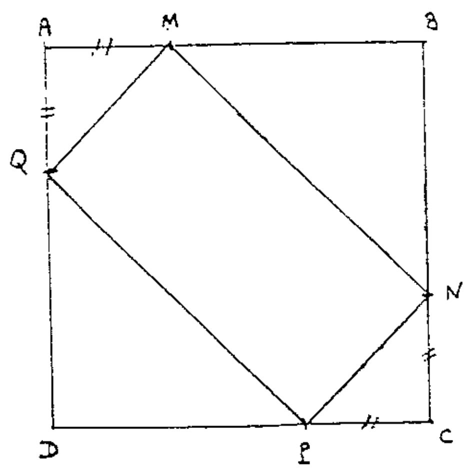
Cela peut être une première sensibilisation au fait que $\sqrt{a^2}$ n'est pas toujours égal à a, pour arriver au moment opportun à l'égalité $\sqrt{a^2} = |\,a\,|$ ce qui est une nouveauté en seconde.

3) Le traitement du problème nécessite de constants changements de cadres : géométrique, algébrique, fonctionnel et éventuellement graphique. Ceci favorise le décloisonnement des connaissances acquises dans des chapitres précis. Celles-ci deviennent malgré (et grâce à) leur diversité des outils de résolution d'un même problème.

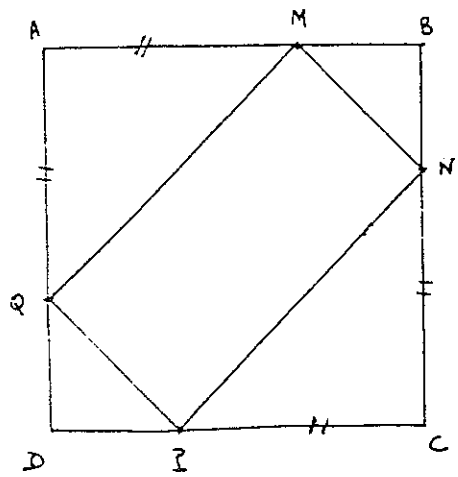
- Les questions sont posées de façon à laisser, à la charge de l'élève, le passage de la géométrie à l'algèbre puis aux fonctions . En effet, aucun "x" ne figure dans l'énoncé. Ceci a pour but de familiariser l'élève avec ce type de démarche qui est certainement une nouveauté pour lui en 2ème.

4) Le fait d'effectuer ce travail en groupe favorise l'expérimentation et les conjectures. Dans un même groupe, le choix des positions de M est différent donc ceci permet d'émettre des hypothèses relativement aux questions posées dans l'énoncé :

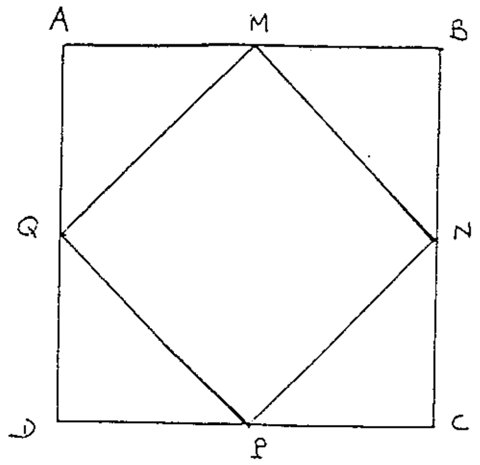
- Lorsque le choix de 2 positions de M symétriques par rapport au milieu de [AB] est fait, le groupe peut constater que les rectangles sont superposables ou vérifier par le calcul qu'ils ont la même aire, ce qui élimine la conjecture "plus AM est grand, plus l'aire est grande".





- Lorsqu'un des élèves choisit M au milieu de [AB], l'aire qu'il obtient est plus grande que celle des autres figures du groupe, ce qui induit la conjecture du maximum qu'il reste à justifier.




- Pour toutes les positions de M sur [AB] (sauf erreurs de calcul !) le périmètre est le même, résultat qui surprend et pousse à une démonstration. De plus, l'écriture

$2(AM\sqrt{2} + (9 - AM)\sqrt{2})$

ne donne pas une conclusion immédiate.

5) L'élaboration d'une affiche par chaque groupe lors du temps modulaire et son utilisation au cours du bilan en classe entière induisent chez chaque élève certaines manières de penser, de faire, de dire et d'écrire.

- Lors de la réalisation de l'affiche :

Au sein du groupe, la nécessité d'une rédaction commune favorise le questionnement de chacun sur le fond et la forme. Puis viennent des discussions argumentées pour se faire comprendre et emporter l'adhésion du groupe. De plus, cette rédaction demande une synthèse concise de la solution ; l'affiche n'est pas extensible.

Le fait de savoir que la production sera présentée à tous et devra convaincre, motive d'une part le travail de recherche des solutions et d'autre part celui de la rédaction. Il y a une sorte de "compétition" entre les affiches.

- Lors du bilan en classe entière

Toutes les affiches sont exposées en même temps donc chaque élève, qu'il ait effectué le travail en groupe ou à la maison, a la possibilité de confronter ses réponses avec celles qui sont proposées. Il peut aussi comparer les différentes solutions et formulations affichées et questionner les auteurs.

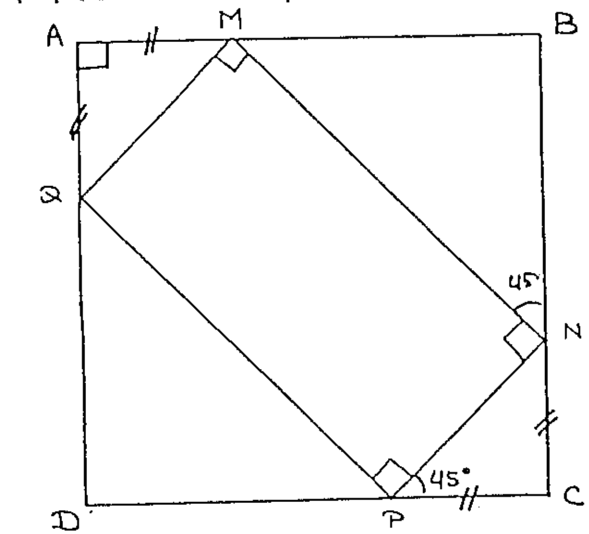
Cette technique favorise l'enrichissement de la mémoire de classe sur laquelle on peut se baser pour la mise en place de nouveaux concepts (par exemple, ici la notion de minimum, maximum) ainsi que la construction de nouvelles séquences.

. Exemples d'affiches produites par les groupes d'élèves

Pour la réalisation de leurs affiches, les élèves disposent d'une feuille de papier format 80 cm x 90 cm et de feutres de couleurs différentes.

## AFFICHE 1

JOLIVALDT Delphine ROY Steph
PROBST Audrey PARET Célie




## Hypothèses:

ABCD est un Carré de 9 cm de côté.
$M \in [AB]$
$N \in [BC]$
$P \in [CD]$
$Q \in [DA]$
$AM = CN = CP = AQ$

Conclusions:
1. Quelles sont toutes les Formes possibles de MNPQ?
2. Que vaut son périmètre? Existe-t-il un périmètre maximum; minimum?
3. Que vaut son aire? Existe-t-il une aire maximum; minimum? 1 cm²? 50 cm²? 100 cm²?

## Démonstrations:

1. MNPQ est un carré lorsque:
. M=
. M milieu de [AB]
MNPQ est un Rectangle dans tous les autres cas.

2. Périmètre MNPQ:
AM = $x$
dans le triangle AMQ rectangle en A (= PCN)
$MQ^2 = AM^2 + QA^2$
$= 2x^2$
$\boxed{MQ = x\sqrt{2}}$
dans le triangle DQP Rectangle en D (= NMB)
$QP^2 = DP^2 + DQ^2$
$= 2(9-x)^2$
$\boxed{QP = (9-x)\sqrt{2}}$

$P_{MNPQ} = 2x\sqrt{2} + 2(9-x)\sqrt{2}$
$= 18\sqrt{2} \cancel{-2x\sqrt{2} + 2x\sqrt{2}}$
$\boxed{= 18\sqrt{2}}$
Il n'existe pas de périmètres maximum et minimum : le Périmètre est Constant!

Aire$_{MNPQ} = L \times \ell$
$= x\sqrt{2} \times (9-x)\sqrt{2}$
$= 2(9x - x^2)$
$\boxed{A_{MNPQ} = 18x - 2x^2}$

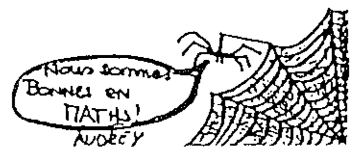
Soit $A_{(x)}$ Fonction définit sur $[0; 4,5]$
Soit a et b tel que
$0 < a < b \leq 4,5$
$A_{(a)} - A_{(b)} = (18a - 2a^2) - (18b - 2b^2)$
$= 18a - 18b - 2(a^2 - b^2)$
$= 18(a-b) - 2(a+b)(a-b)$
$= (a-b)(18 - 2(a+b))$

a et b < 4,5 donc a+b < 18
donc $18 - 2(a+b) > 0$

donc $(a-b)(18-2(a+b)) < 0$
donc $f$ est croissante sur l'intervalle $[0; 4,5]$
elle sera donc décroissante sur $[4,5; 9]$ (CF en Bas)

l'aire maximum est de 81 cm² donc l'Aire ne peut pas être = à 100 cm²

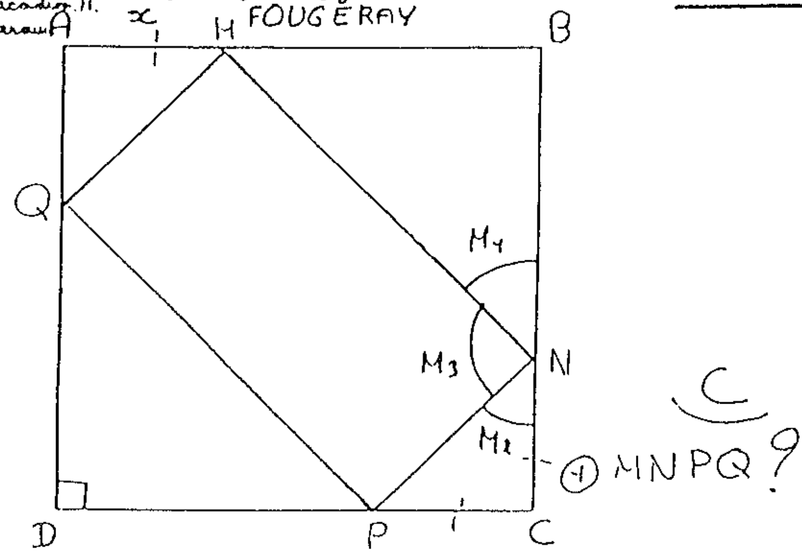
| $x$ | 0 | 4,5 | 9 |
|---|---|---|---|
| $A(x)$ | 0 | ↗ 40,5 ↘ | 0 |



Olivier A.
Kercadio H.
Barreau

FOUGERAY

AFFICHE 2




① MNPQ ?

(H)

ABCD carré de 9 cm de côté

CN = AM et CN = CP = AQ

① $x = AM = CN = CP = AQ$

$MB = BN = DQ = DP = 9 - x$

Il résulte :

Triangle MBN isocèle et rectangle en B

Donc $M_1 = 45°$

Triangle NPC isocèle et rectangle en C

Donc $M_2 = 45°$

$M_3 + M_2 + M_1 = 180°$

$M_3 = 90°$

Même raisonnement pour **les autres** angles de MNPQ.

Lorsqu'un parallélogramme possède 3 angles droits, c'est un rectangle.

Il en résulte MNPQ rectangle.

② Cas particuliers

Lorsque M = A, M = Q et P = N = C

Cela donne un rectangle aplati sous forme de segment. ($= 9\sqrt{2}$) cm

Lorsque M milieu de [A,B] alors MNPQ carré.

② Calcul du périmètre.

$\boxed{l}$ : [QM] hypoténuse du triangle AQM

donc $AM^2 + AQ^2 = QM^2$

$2x^2 = l^2$

$l = x\sqrt{2}$

$\boxed{L}$ : [M,N] hypoténuse du triangle MBN

donc $MB^2 + BN^2 = MN^2$

$2(9-x)^2 = L^2$

$\sqrt{2}(9-x) = L$

Donc périmètre $= 2 \times (x\sqrt{2}) + 2 \times (\sqrt{2}(9-x))$

$= 18\sqrt{2}$

AFFICHE 2
(suite)

Le périmètre est constant quelle que soit la position de M.

---

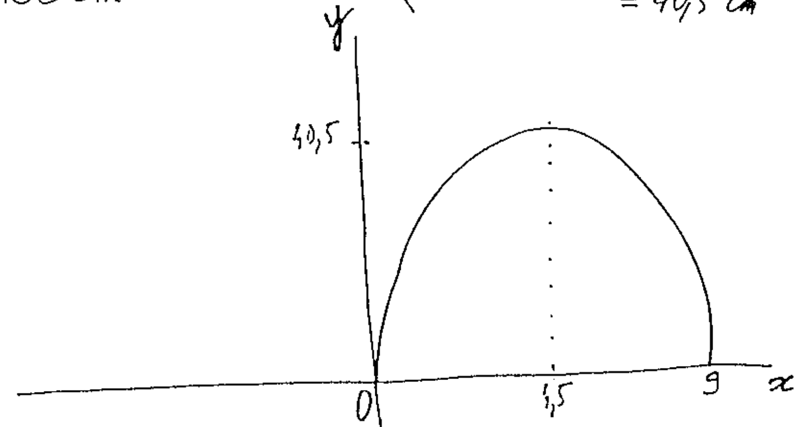
## 3°) Calcul de l'Aire.

$\mathcal{A} = x\sqrt{2} \times \sqrt{2}\,(9 - x)$

$\mathcal{A} = 18x - 2x^2$

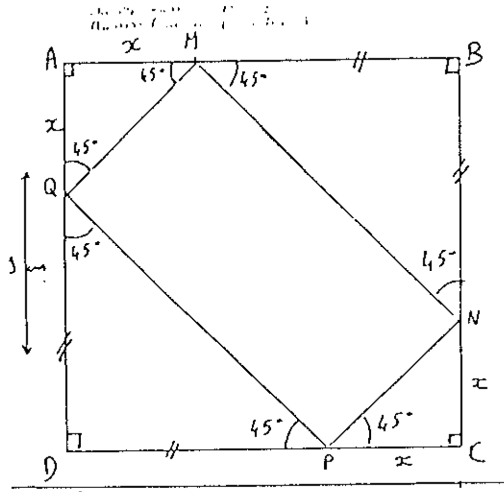
. $1\ cm^2$ : Oui
. $50\ cm^2$ : Non
. $100\ cm^2$ : Non

Etant donné que l'aire maximum $= 18x - 2x^2$
$= (18 \times 4,5) - 2(4,5)^2$
$= 81 - 40,5$
$= 40,5\ cm^2$




air maximum : AM = 4,5 cm
minimum : AM = 0 ou 9 cm

Remarque : Pour cet maximum M est le milieu de [AB].




- H) ABCD carré
AB = BC = CD = DA = 9 cm.

$M \in [A,B]$, $N \in [B,C]$, $P \in [C,D]$, $Q \in [D,A]$ $\Rightarrow$ CN = AH, CN = CP = AQ

## 1°) FORME

a) cas général (rectangle)

Par hypothèse $AM = AQ$
D'où AMQ isocèle en A
et $\widehat{AMQ} = \widehat{MQA}$
Comme ABCD carré, $\widehat{MAQ} = 90°$
Dans AMQ :
$\widehat{AMQ} + \widehat{MQA} + \widehat{MAQ} = 180°$
D'où : $\widehat{AMQ} = \dfrac{180 - 90}{2}$

$\widehat{AMQ} = \widehat{MQA} = 45°$

Même raisonnement pour MBN
$\widehat{BNM} = \widehat{BMN} = 45°$
Par hypothèse $M \in [AB]$
$\widehat{AMB} = 180°$
$\widehat{QMN} = 180 - (\widehat{AMQ} + \widehat{NMB})$
$= 180 - (45 + 45)$
$\widehat{QMN} = 90°$
Même raisonnement dans les triangles NCP ; QDP
$\widehat{QMN} = \widehat{MNP} = \widehat{NPQ} = \widehat{PQM} = 90°$
[QMNP est un rectangle]

b) cas particuliers

- M milieu de [AB]
Si M milieu de [AB]
AM = MB = BN = NC = PC = DP = DQ = QA
D'où AMQ ; MBN ; NCP ; QDP superposables
QM = MN = NP = QP
[QMNP est un carré]

- M = B
D'où N = B ; P = Q = D
[QMNP rectangle aplati]

AFFICHE 3

## 2°) PERIMETRE $\mathcal{P}$

Soit $x = AM = AQ = NC = PC$

$\mathcal{P} = MQ + MN + NP + QP$
- Comme MNPQ rectangle
$MQ = NP$ et $MN = QP$
$\mathcal{P} = 2MQ + 2MN$
- Comme AMQ isocèle et rectangle en A
$MQ = \sqrt{2}\,AM = \sqrt{2}x$
- Comme MBN isocèle et rectangle en B
$MN = \sqrt{2}\,MB = \sqrt{2}(9 - x)$

$\mathcal{P} = 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}(9 - x)$
$= 2\sqrt{2}(\cancel{x} + 9 - \cancel{x})$
$\boxed{\mathcal{P} = 18\sqrt{2}\text{ cm}}$

Comme $\mathcal{P}$ ne varie pas

[Il n'y a pas de maximum et de minimum à $\mathcal{P}$]

## 3°) AIRE $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{AMQ} + \mathcal{A}_{PNC} + \mathcal{A}_{MBN} + \mathcal{A}_{...}$
- Comme AMQ et PNC superposables : $\mathcal{A}_{AMQ} = \mathcal{A}_{PNC}$
et MBN et QDP " : $\mathcal{A}_{MBN} = \mathcal{A}_{QDP}$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ABCD} - (2\mathcal{A}_{AMQ} + 2\mathcal{A}_{MBN})$
- Par hypothèse ABCD carré de 9 cm de côté
$\mathcal{A}_{ABCD} = 9^2 = 81\text{ cm}^2$
- Comme AMQ rectangle et isocèle de côté x
$\mathcal{A}_{AMQ} = \dfrac{x^2}{2}$
- Comme MBN rectangle et isocèle de côté 9 - x
$\mathcal{A}_{MBN} = \dfrac{(9-x)^2}{2}$

$\Longrightarrow \mathcal{A} = 81 - \left(\dfrac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + \dfrac{\cancel{2}(9-x)^2}{\cancel{2}}\right)$
$= 81 - x^2 - (81 + x^2 - 18x)$
$= \cancel{81} - x^2 - \cancel{81} - x^2 + 18x$
$\boxed{\mathcal{A} = (18x - 2x^2)\text{ cm}^2}$

Tableau de variation de $f(x)$ tel que $f(x) = 18x - 2x^2$
Il nous semble que $\mathcal{A}$ max. pour $x = 4,5$ cm

- $[0 ; 4,5]$
Soit $x_1$ et $x_2$ tels que $0 \leq x_1 < x_2 \leq 4,5$
$f(x_1) - f(x_2) = 18x_1 - 2x_1^2 - 18x_2 + 2x_2^2$
$= 18(x_1 - x_2) - 2(x_1^2 - x_2^2)$
$= 18(x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$
$= 2(x_1 - x_2)(9 - x_1 - x_2)$

[$x_1 + x_2 < 9$, $9 - x_1 - x_2 > 0$]

$\Longrightarrow f(x)$ croissante pour $[0 ; 4,5]$

- $[\ ; 9]$
Soit $x_3$ et $x_4$ tels que $4,5 \leq x_3 < x_4 \leq 9$
$f(x_3) - f(x_4) = 2(x_3 - x_4)(9 - x_3 - x_4)$

[$x_3 + x_4 > 9$, $9 - x_3 + x_4 < 0$]

$\Longrightarrow f(x)$ décroissante pour $[4,5 ; 9]$

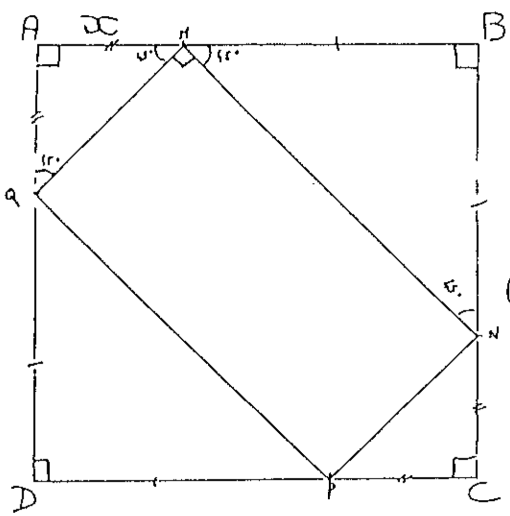
Comme $0 \leq \mathcal{A} \leq 40,5\text{ cm}^2$
- $\mathcal{A}$ peut être égale à $1\text{ cm}^2$
- $\mathcal{A}$ ne peut pas être de $50\text{ cm}^2$ ou $100\text{ cm}^2$

$\mathcal{A}$ max. pour $x = 4,5$ cm
$\mathcal{A}$ min pour $x = 0$ cm

| $x$ | 0 | | 4,5 | | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 40,5 | ↘ | 0 |

$\Longrightarrow$ $0 \leq \mathcal{A} \leq 40,5$ cm

## AFFICHE 4




Ⓗ ABCD est un carré.
AB = 9 cm.
$M \in [AB]$. $N \in [BC]$.
$P \in [CD]$. $Q \in [DA]$.
$CN = AM$ et $CN = CP = AQ$

Ⓒ 1°/forme
2°/périmètre en fonction de $x$
3°/aire en fonction de $x$

1° Sa forme.

MNPQ semble être un rectangle.
Par hypothèse $AM = AQ = CN = CP$,
donc AMQ et CNP sont 2 triangles rectangles isocèles en A et en C, ils sont égaux.
Comme ABCD est un carré,
$AB - AM = BC - CN = CD - CP = AD - AQ$ :
QDP et BMN sont 2 triangles rectangles isocèles en D et en B, ils sont donc égaux.
Dans un triangle, la somme des angles est égale à 180°. Comme $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ et $\hat{D}$ sont égaux à 90° et comme les triangles sont isocèles alors dans le triangle AMQ, $\widehat{AMQ}$ et $\widehat{AQM} = 45°$.
De même dans le triangle BMN,
$\widehat{BMN}$ et $\widehat{BNM} = 45°$.

L'angle $\widehat{AB} = \widehat{BMN} + \widehat{AMQ} + \widehat{QMN}$
$= 45° + 45° + \widehat{QMN}$
Comme AB est une droite, l'angle $\widehat{AB} = 180°$
donc $180° = 90° + \widehat{QMN}$
$\widehat{QMN} = 90°$.
De même pour les angles $\hat{N}$, $\hat{Q}$ et $\hat{P}$.
Quelque soit la position de M, N, P et Q, le quadrilatère sera toujours un rectangle.
* Voir cas particuliers

2) DANS MNPQ : Son périmètre

$P(x) = QM + QP + PN + NM$
soit $x$ la ~~valeur~~ distance AM

(Pythagore) $AM^2 + AQ^2 = QM^2$
DAns AMQ : comme $AM = AQ = x$
$2x^2 = QM^2$ donc $QM = x\sqrt{2}$

Dans MBN : $MN^2 = BM^2 + BN^2$ et $MN = y\sqrt{2}$
comme $BM = BN = 9 - x$ $\quad MN = (9-x)\sqrt{2}$
soit $P(x) = 2x\sqrt{2} + 2\sqrt{2}(9-x) = 18\sqrt{2}$ constante

Ben non il n'y a pas de position de $x$ pour lequel $P(x)$ est à son minimum ou maximum. (* sauf cas particulier $x = 0$ ou $x = 9$ ...)

3) Son AIRE EN FONCTION DE $x$

- $A(x) = y\sqrt{2} \times x\sqrt{2} = (9-x)2x = 18x - 2x^2$
- On étudie la fonction $A(x)$
  soit $I_1$ l'intervalle $[0 ; 4,5]$ : $0 < a < b < 4,5$
  $f(a) - f(b)$ ⊖ si croissante.
  $= (18a - 2a^2) - (18b - 2b^2)$
  $= 2(9a - a^2) - 2(9b - b^2)$
  $= 18(a-b) - 2(a+b)(a-b)$
  $= (a-b)[18 - 2a - 2b]$
  $\underbrace{⊖ \quad ⊕}_{⊖}$ sur $I_1$ $f(x)$ croissante sur $I_1$

  Sur $I_2$ : $[4,5 , 9]$
  $f(a) - f(b) = (a-b)(18 - 2a - 2b)$
  $\underbrace{⊖ \quad ⊖}_{⊕}$ $f(x)$ est décroissante sur $I_2$

| $x$ | 0 | 4,5 | 9 |
|---|---|---|---|
| $A(x)$ | 0 ↗ | | ↘ 0 |

Quelques remarques à propos de la présentation et du contenu des affiches

Les élèves, soucieux de produire un travail soigné et esthétique, ont besoin de temps. Ce facteur temps est à prendre en compte par l'enseignant. Ainsi cette forme de présentation du travail ne peut pas être systématique. De plus sa répétition risque de lasser les élèves et d'émousser leur envie de s'investir dans la réalisation soignée d'une telle production. Toutefois, avoir à produire une affiche claire, précise quant aux informations qu'elle apporte, agréable à voir, demande aux élèves un effort de réflexion qui contribue à affiner leur pensée.

Chaque groupe dispose de calculatrices graphiques. Celles-ci sont utilisées de façon différente dans l'étude de l'aire de MNPQ :

- ou le graphique est reproduit et sert de preuve (affiche 2)
- ou bien le graphique permet de conjecturer un maximum. "Il nous semble que $A_{max}$ pour x = 4,5 cm" (affiche 3).

Dans ce cas, le graphique n'est pas dessiné mais les variations de la fonction sont partiellement (affiche 1) ou entièrement (affiche 3 et affiche 4) étudiées et données dans un tableau.

Dans la première question, la justification rédigée de "MNPQ rectangle ou carré" n'est pas toujours complète. En effet, la fonction de l'affiche n'est pas perçue de la même façon par chacun. Ceci explique les différences. L'affiche s'adresse aux "copains" et éventuellement au professeur. De plus, celle-ci est commentée par le rapporteur du groupe. Donc, est-il nécessaire de tout justifier par écrit (affiche 3) ? ou bien un codage de la figure, explicité lors de l'exposé, n'est-il pas suffisant (affiche 1) ?

Suivant les situations, le contrat lié à l'exercice est clairement expliqué par l'enseignant. Ici, la forme de l'énoncé laisse volontairement toute liberté dans l'écrit sur l'affiche. Cet écrit se complète par des réponses orales aux questions posées par la classe.

# LES VECTEURS : A QUOI SERVENT-ILS ?

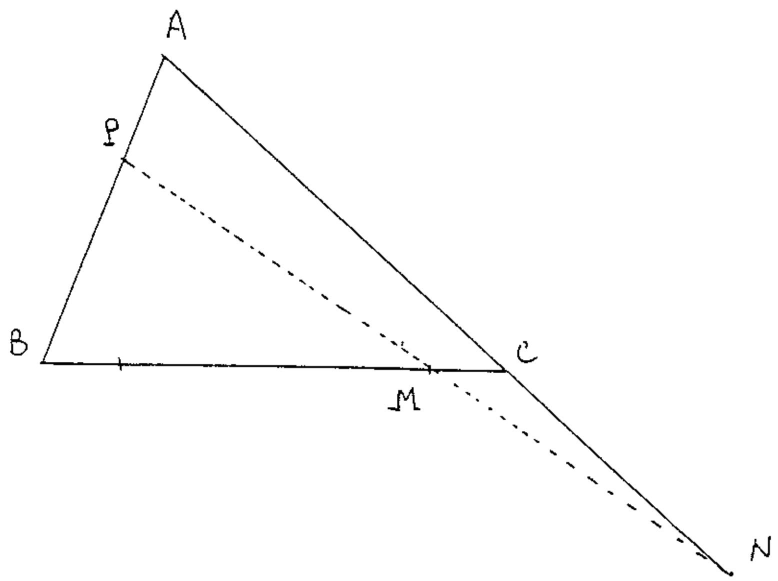
# LES VECTEURS : A QUOI SERVENT-ILS ?

Nous supposons ici que les élèves ont déjà manipulé le calcul vectoriel à travers des exercices simples et que le cours sur les vecteurs a été mis en place. Dans ce chapitre, nous voulons plutôt essayer de donner des éléments de réponses aux questions que nous posent les élèves : à quoi servent les vecteurs ? Qu'ont-ils de plus performants que les connaissances de géométrie précédemment acquises ?

Nous avons tous été confrontés à la situation suivante : on donne un exercice où nous voulons faire fonctionner l'outil vecteur ; on obtient des démonstrations souvent simples, dans lesquelles les élèves utilisent des configurations connues (parallélogramme), le théorème de Thalès version 3ème ....... Nous n'avons rien à reprocher à ces démarches mais notre objectif n'est pas atteint.

Certes, les manuels ne manquent pas de sujets fabriqués tout spécialement pour faire fonctionner les vecteurs, par exemple :

| |
|---|
| Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Construire les points M, N et P définis par $\overrightarrow{BM} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. En déduire l'alignement de M, N, P. |




(On trouve en fait

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}\ ).$$

Ces exercices sont indispensables afin de familiariser les élèves avec le calcul vectoriel et l'outil vecteur ; en effet dans cet exemple les vecteurs servent à démontrer que trois points sont alignés et, en même temps, qu'un point est milieu d'un segment.

Par contre, choisir un exercice dans lequel l'outil vecteur est plus performant qu'une autre méthode géométrique n'est pas très aisé en seconde ; pourtant c'est bien de cela qu'il faut convaincre nos élèves. (Peut-être progressivement pour certains).

C'est ce que nous essayons de faire à travers les exemples qui suivent.

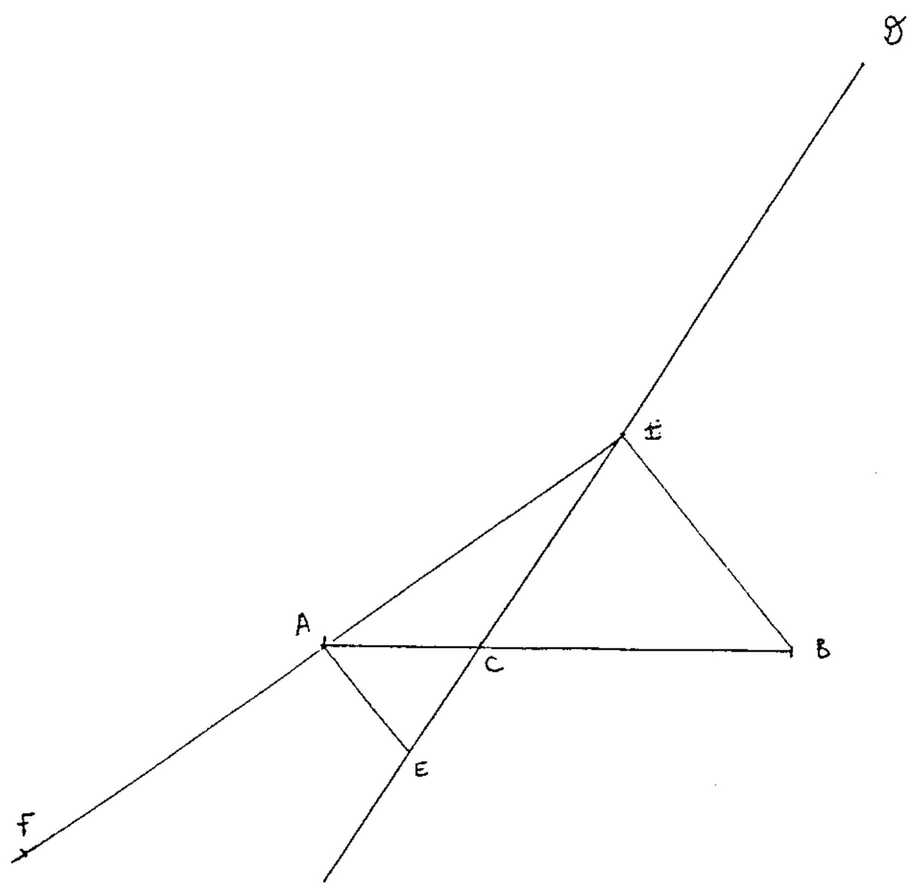
## 1er exemple : alignement de 3 points

<u>Enoncé donné aux élèves :</u>

[AB] est un segment. C est le point de [AB] tel que $AC = \frac{1}{3} AB$.

$\mathcal{D}$ est une droite distincte de (AB) et qui passe par C
E est un point de $\mathcal{D}$ distinct de C
I est à l'intersection de $\mathcal{D}$ avec la parallèle à (AE) passant par B.
F est le symétrique de I par rapport à A.
Comment sont placés les points F, E, B ?

figure non fournie aux élèves



En module. Pourquoi ?

Pour différentes raisons, en particulier les suivantes :

- constituer des groupes : mettre ensemble des élèves qui veulent à tout prix utiliser les vecteurs même lorsque ce n'est pas très adapté (goût de la nouveauté ?) et des élèves réfractaires qui cherchent à s'appuyer systématiquement sur leurs connaissances de collège ; celles-ci leur sont familières, ce qui les rassure.

- laisser aux élèves le temps de comprendre l'énoncé, faire la figure, hésiter sur la stratégie à adopter pour résoudre le problème, faire des erreurs, dialoguer entre eux et avec le professeur.

- cet exercice peut n'être effectué que par une partie de la classe. On pourra le donner à chercher à la maison pour l'autre partie de sorte que le bilan en classe entière soit profitable à tous.

Type du module : 3 pour les raisons suivantes :

- Il s'agit de permettre aux élèves de résoudre un problème : pas de difficulté dans la lecture, l'énoncé est écrit avec des phrases courtes ; ainsi chaque élève peut s'approprier le problème rapidement.
- Il n'y a pas de questions intermédiaires ce qui leur laisse la liberté d'engager différentes procédures.
- De plus, l'énoncé laisse le choix des outils de résolution.

Durée : 1 H 30, suivi d'un compte rendu d'une demi-heure en classe entière au cours duquel sont comparées les rédactions des solutions géométriques ou vectorielles. L'objectif est de montrer la performance de l'outil vecteur dans ce type de problème.

Raisons des choix :

- Aucun vecteur n'apparaît dans l'énoncé afin de ne pas provoquer chez l'élève de réflexe conditionné. Pour la même raison, il est souhaitable que cet exercice soit proposé assez longtemps après le travail de seconde sur les vecteurs.

- D'une part la figure n'est pas difficile à construire, d'autre part les élèves peuvent engager des procédures de résolution ; leurs connaissances permettent de proposer des solutions vectorielles ou non.

- La démonstration de l'alignement des points B, E, F est délicate. En effet, que font les élèves ?

Les uns "voient" que les 3 points sont alignés, dessinent la droite passant par ces 3 points, puis se servent de cet alignement (non prouvé) pour montrer que E est milieu de [FD]. Les autres n'ont pas une figure très juste ; cela provoque alors des confrontations au sein du groupe à propos de la conjecture à émettre ; le travail "en groupe" prend alors tout son sens.

<u>Quelques procédures utilisées par les élèves :</u>

- Nommer le point d'intersection de (IE) et (BF) et démontrer qu'il est confondu avec E ; cette démarche n'est pas courante en 2nd surtout lorsqu'elle est laissée à l'initiative de l'élève. C'est l'occasion de la souligner.

- Prouver que le point C est centre de gravité du triangle BIF et se servir de ses propriétés.

- Utiliser les vecteurs.

Plusieurs démarches vectorielles sont accessibles aux élèves (démontrer que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EF}$ ou que $\overrightarrow{FB} = 2\overrightarrow{FE}$ ......) Là aussi, certains joignent B, E, F et utilisent (AE) // (IB) pour affirmer que E est milieu de [BF]. Mais, lorsqu'ils sont convaincus qu'ils n'ont pas prouvé l'alignement, les solutions vectorielles ont l'avantage de démontrer en même temps que les points sont alignés et que E est milieu de [BF]. C'est un point important qu'il faut souligner.

- Si l'homothétie a été traitée, elle peut être utilisée dans cet exercice (ce qui revient à utiliser le calcul vectoriel).

La durée du travail en module donne à certains élèves le temps de s'égarer, de se tromper, de constater leurs erreurs soit par la critique de leurs camarades soit par l'intervention du professeur. On peut espérer alors les convaincre que, dans un tel exercice, le calcul vectoriel est plus performant, plus sûr et que surtout, la rédaction de la solution est moins délicate.

## Exemple 2 : Réciproque de Thalès
## Configuration parallélogramme

> Soient 2 triangles ABC et BCD. $G_1$ est le centre de gravité de ABC, $G_2$ celui de BCD.
> 1) Démontrer que les droites ($G_1 G_2$) et (AD) sont parallèles
> 2) Si $BG_1CG_2$ est un parallélogramme, que peut-on dire du quadrilatère ABDC ?
>
> (Dimathème 2nd)

- Ce travail peut être effectué en T.D

En effet il concerne toute la classe et peut être effectué en 50 minutes. Si la rédaction n'est pas achevée, elle peut l'être à la maison.

On peut concevoir 5 minutes de travail individuel pour que chacun dessine la figure. Si pour certains, la figure est peu lisible (droites ($G_1 G_2$) et (AD) presque confondues par exemple), on peut persuader ces élèves qu'au lieu de bloquer sur une telle figure, en faire une autre n'est pas forcément une perte de temps.

Deux types de figures apparaissent suivant que les triangles ABC et BCD sont placés de part et d'autre de (BC) (figure 1) ou du même côté de (BC) (figure 2). Cela n'a aucune importance pour la 1ère question, mais dans la 2ème, sur la configuration 2, les quadrilatères dont parlent l'énoncé ne sont pas convexes ... donc difficiles pour eux d'être des parallélogrammes.

Si l'on veut gagner du temps, on peut demander aux élèves de faire la figure chez eux avant la séance de T.D.

- Raisons des choix de cet exercice :

Les deux questions permettent de valoriser l'outil vecteur.

Dans la 1ère question, après avoir réinvesti la position du centre de gravité sur chacune des médianes d'un triangle, la réciproque du théorème de Thalès permet de montrer le parallélisme de ($G_1 G_2$) et (AD). Or les théorèmes *Thalès vecteur* sont nouveaux en 2nd ; certains élèves ont du mal à les appliquer et

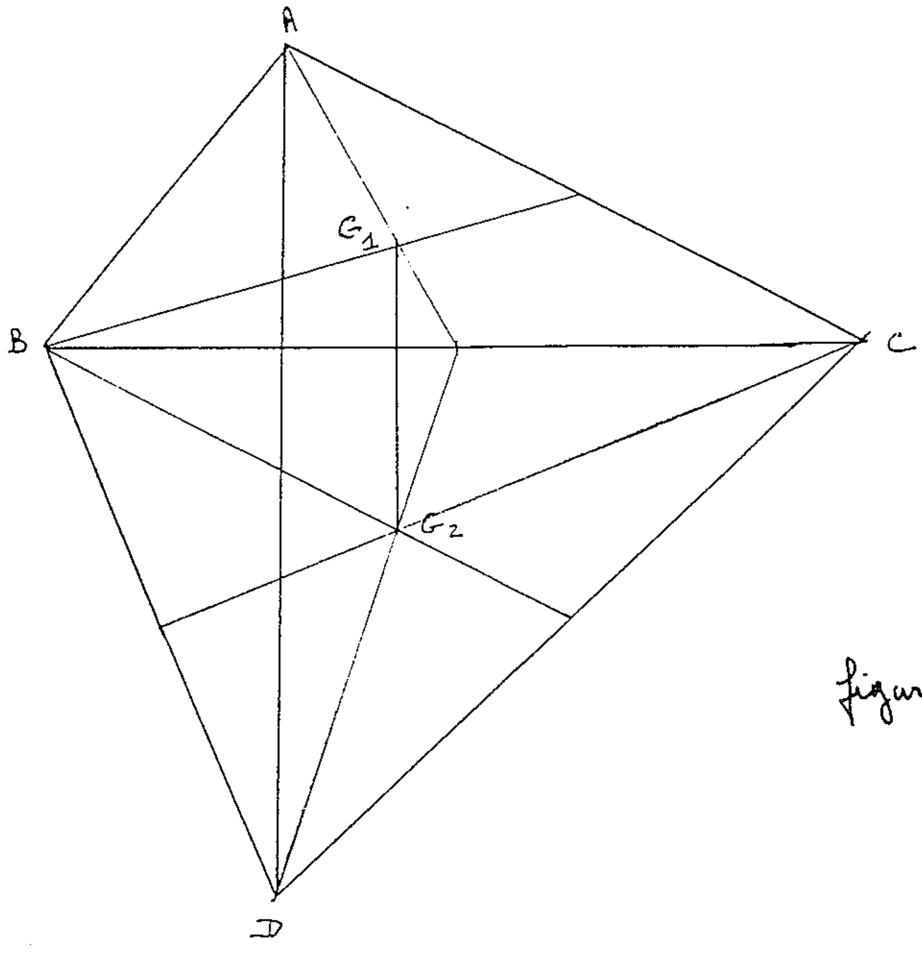



figure 1

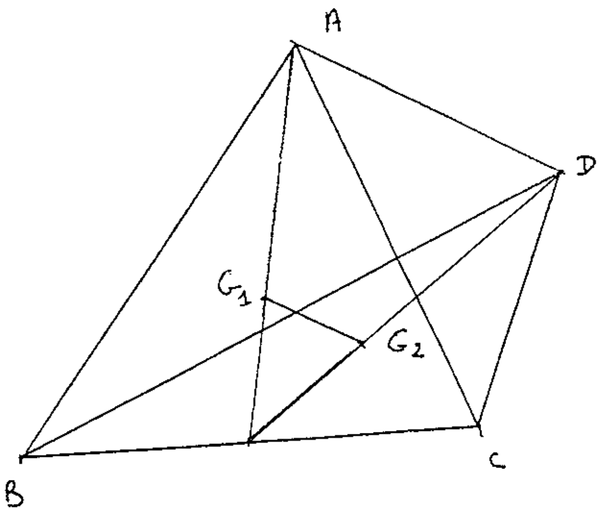



figure 2

utilisent la réciproque du théorème de Thalès comme ils le faisaient en 3ème ; toutefois le point délicat de la démonstration, positions relatives des points, est souvent occulté. C'est l'occasion de mettre en évidence l'économie d'écriture apportée par l'utilisation des vecteurs. La rédaction est ainsi facilitée. Si l'homothétie a été traitée, on peut l'utiliser et pointer la performance de cet outil.

Dans la 2ème question, on peut attendre deux types de procédures :

- Calcul vectoriel sans support de dessin :

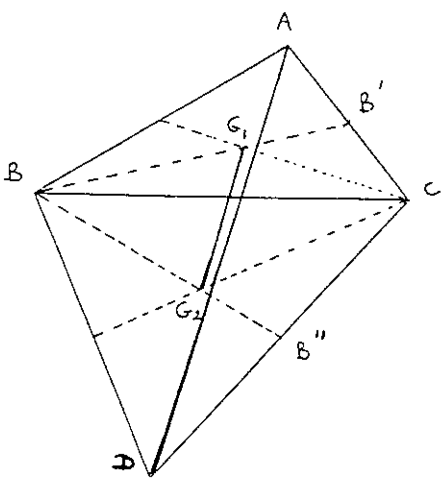
La nouvelle hypothèse, $BG_1CG_2$ est un parallélogramme, n'est pas représentée. Cette procédure, lorsqu'elle a été utilisée, n'a pas abouti. C'est la difficulté du calcul vectoriel dans lequel les élèves ne voient pas le fil conducteur.

- Dessin où figure la nouvelle hypothèse.

L'observation des figures dans lesquelles $BG_1CG_2$ n'est pas un parallélogramme, conduit à faire un nouveau dessin. A partir de l'hypothèse $BG_1CG_2$ est un parallélogramme, les élèves construisent les points A et D. Cette procédure permet généralement de conclure, le calcul vectoriel a ici un support visuel.

<u>Quelques procédures élèves pour la 1ère question</u>

1)

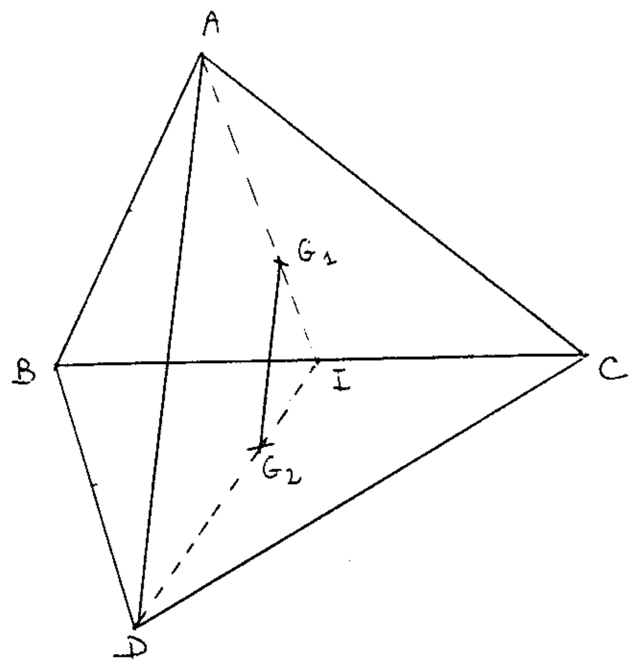



- introduction des points B' et B", milieux de [AC] et [DC]

- puis utilisation de la réciproque de Thalès (ou de la relation de Chasles) pour démontrer que (B'B") et ($G_1$ $G_2$) sont parallèles.

- puis utilisation de *la droite des milieux* pour prouver que (B'B") et (AD) parallèles.

2)




a) Utilisation de la réciproque de Thalès (ou de la relation de Chasles).

ou

b) Utilisation de l'homothétie de centre I.

## Exemple 3 : Parallélisme
## Configuration parallélogramme
## Milieu d'un segment

Enoncé donné à chaque groupe

Soit un triangle ABC.

k étant un nombre donné, on définit les deux points M et N par

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + k.\overrightarrow{AC}$ et

$\overrightarrow{AN} = k.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

1°) Donnez chacun, à k, une valeur numérique et construisez les points M et N obtenus pour la valeur choisie.
Comparez vos figures. Y-a-t-il des valeurs de k pour lesquelles M et N sont confondus ? Lorsque M et N sont distincts, que peut-on raisonnablement conjecturer sur la droite (MN) ?

2°) Démontrez que le résultat conjecturé au 1°) est vrai quelle que soit la valeur de k.

3°) Trouvez, si elles existent, la (les) valeur(s) de k telles que les propositions suivantes soient vérifiées :

a) M = N

b) MNBC est un parallélogramme

c) BCNM est un parallélogramme

d) MBNC est un parallélogramme

e) $MN = \frac{3}{4}BC$

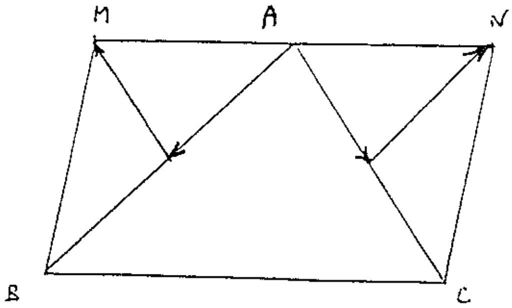
Faites les figures correspondantes lorsque cela est possible.

Prolongement :

Sur quelle ligne se déplace le point M lorsque k varie ?

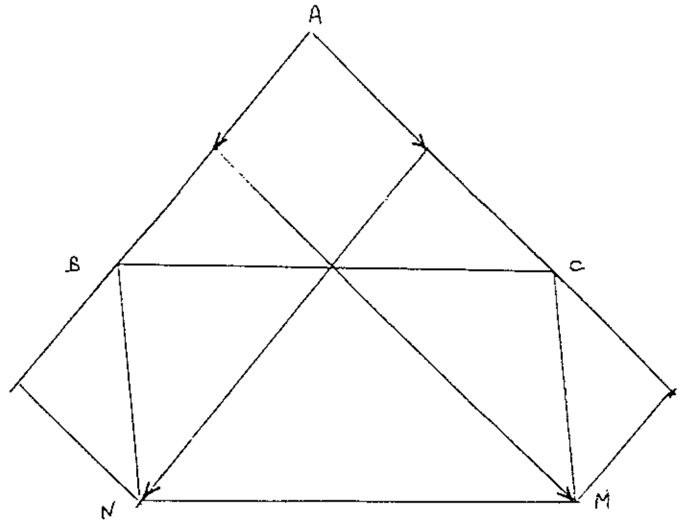
Sur quelle ligne se déplace le point N lorsque k varie ?

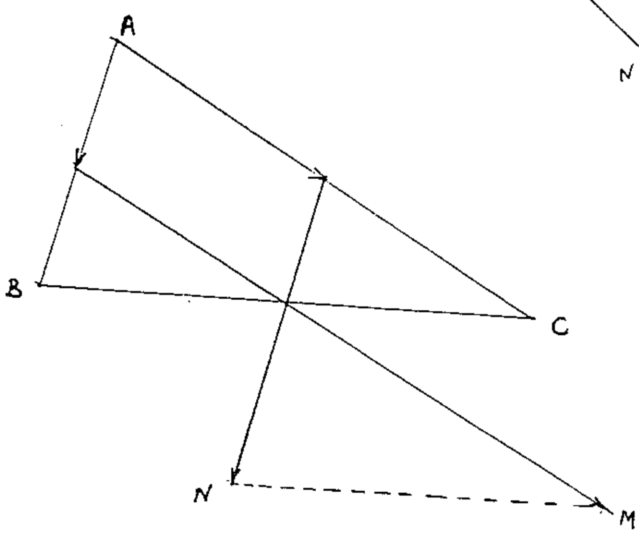
Sur quelle ligne se déplace le milieu I de [MN] lorsque k varie. (Justifiez vos affirmations)




MNCB parallélogramme
($k = -\frac{1}{2}$)

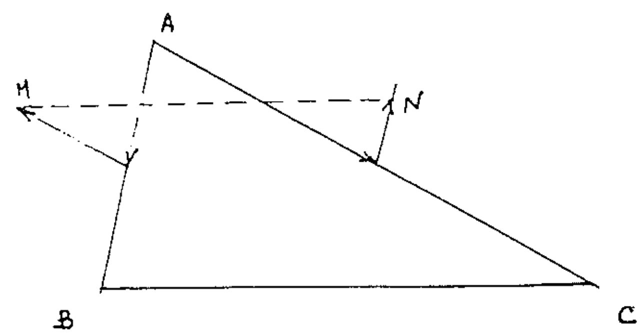
MNBC parallélogramme
($k = \frac{3}{2}$)




$MN = \frac{3}{4}\, BC$

($k = \frac{5}{4}$ ou $k = -\frac{1}{4}$)



En module, pourquoi ?

Les raisons principales de la place de ce travail en module en sont la durée (1 H 30) et la possibilité de travailler en groupe. En effet les élèves doivent avoir le temps de :

- exécuter plusieurs figures (1° et 3°) et les comparer au sein du groupe.
- effectuer des conjectures (1°) puis les démontrer (2°).
- différencier dans le 3°) les quadrilatères MNBC -BCNM - MBNC.

Il est souhaitable que chaque groupe effectue une rédaction (en classe ou à la maison, cela dépend de sa rapidité) sous une forme laissée à l'appréciation du professeur. Un bilan en classe entière est indispensable afin d'approfondir au maximun chacune des questions.

Type de module :

Le module étant directement rattaché au calcul vectoriel nous le classons en type 2.

Travail en groupe. Pourquoi ?

Dès la 1ère question, le groupe a ainsi sous les yeux plusieurs figures obtenues pour des valeurs de k différentes.

Ceci peut faciliter la conjecture *la droite (MN) est parallèle à (BC)* ou la rendre difficile.

Les groupes peuvent être hétérogènes de sorte qu'il n'y ait pas blocage dans un groupe. Des élèves pas très habiles en calcul vectoriel peuvent se montrer performants pour exécuter des figures et voir ainsi leurs qualités valorisées.

Raisons des choix et commentaires sur les productions des élèves :

L'objectif de ce problème est de mettre les élèves dans une situation où ils ne peuvent rien faire sans l'outil vecteur. Il s'agit d'utiliser le calcul vectoriel pour démontrer et caractériser des propriétés géométriques.

La 1ère question est d'abord destinée à montrer aux élèves que des figures différentes construites à l'aide du même processus peuvent avoir une propriété commune.

Les valeurs choisies sont en général 1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$.

Si on veut des valeurs négatives il faut les provoquer.

La valeur $k = 0$ est exceptionnellement utilisée.

Cette première question est aussi posée pour permettre d'effectuer la conjecture, *la droite (MN) est toujours parallèle à (BC)* puis on s'interroge *est-ce vrai pour n'importe quelle valeur de k ?* ce qui conduit à la question 2°). Mais, dans un groupe on obtient les quatre situations suivantes : (voir p. 93).

. M et N confondus ($k = \frac{1}{2}$) donc pas de droite (MN) (figure 3)

. un dessin "correct" (figure 2)

. une construction fausse qui donne (MN) et (BC) sécantes (figure 4).

. une construction imprécise qui ne permet pas de trancher dans la conjecture (figure 1).

L'enseignant a dû intervenir pour faire avancer le groupe : les droites (MN) et (BC) ont-elles des directions quelconques ? pour le savoir, on essaie de répondre à la question :

"peut-on exprimer $\overrightarrow{MN}$ uniquement en fonction de $\overrightarrow{BC}$ ?".

<u>La 2ème question</u> a pour but de faire le lien entre

*colinéarité des 2 vecteurs* $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{BC}$

et *parallélisme des droites (MN) et (BC).*

Cela fait partie des apprentissages de 2nd.

Les élèves n'ont pas de problème pour écrire

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

mais les difficulté apparaissent au niveau des calculs et du regroupement judicieux des vecteurs.

Autre difficulté : pour certains, dans l'écriture

$$\overrightarrow{MN} = (\frac{1}{2} - k) . \overrightarrow{BC}$$

$\frac{1}{2}$ - k n'est pas lu comme un coefficient de colinéarité. En effet, dans le cours nous avions écrit la "définition habituelle" de la colinéarité avec $\overrightarrow{u} = k. \overrightarrow{v}$ , k réel. Cette difficulté n'était pas du tout attendue ; elle a pu être détectée grâce aux échanges groupe-professeur. Serait-elle apparue si, dans le texte, k avait été remplacé par t ?

La 3ème question est posée afin de faire caractériser des situations géométriques par des égalités vectorielles

a) M = N se caractérise par $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{O}$

b) c) chaque parallélogramme se caractérise par une égalité vectorielle ( $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CB}$ ou $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$).

Puis il faut dans chacune de ces questions trouver k sachant que $\overrightarrow{MN} = (\frac{1}{2} - k) . \overrightarrow{BC}$.

Ces questions présentent deux niveaux de difficulté :

- penser à cette caractérisation
- passer des égalités vectorielles à des égalités algébriques en identifiant des coefficients.

e) cette question est donnée pour deux raisons : non unicité de la valeur de k et traduction exceptionnelle d'une égalité de distances par des égalités vectorielles

$$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\ \overrightarrow{BC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\ \overrightarrow{CB}.$$

Ceci est peut-être dangereux par la suite ....

A la fin de la troisième question, les figures sont demandées pour obliger l'élève à vérifier la cohérence de ses résultats. Donner l'habitude de s'auto-contrôler est un objectif à long terme.

Les élèves utilisent dans a), b), c) deux types de démarches :

- ou bien le groupe a déjà fait les figures avec des valeurs de k, solutions de ces questions, ($\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$). Les élèves prennent alors ces nombres comme réponse sans soupçonner l'existence d'autres solutions éventuelles.

Ils raisonnent par condition suffisante.

- ou bien ils n'ont pas exhibé au préalable de valeur de k répondant aux questions. Ils raisonnent ainsi :

*pour que MNBC soit un parallélogramme il faut que*

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CB}$

ou *si* $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CB}$ *alors MNBC est un parallélogramme.*

Ils raisonnent par condition nécessaire.

Les élèves ne voient pas pourquoi raisonner par condition nécessaire et suffisante. En effet, cette forme de raisonnement n'intervient pas au collège ; il faut commencer à la travailler de façon homéopathique dès la seconde, bien que les situations pertinentes soient assez rares à ce niveau de classe. Les problèmes de lieux géométriques en première S en fourniront de bons exemples.

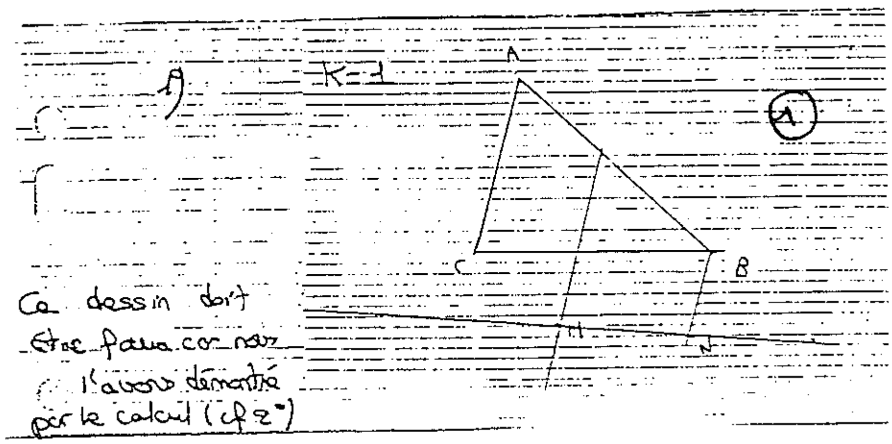
Les questions posées en prolongement ne sont pas des recherches de lieux géométriques puisqu' on ne demande que des conditions nécessaires. Ce n'est qu'une première étape. Le programme de seconde précise *L'étude systématique de tels problèmes (lieux géométriques) est en dehors des objectifs du programme*. La question, "tous les points de la droite proposée correspondent-ils à une valeur de k ?", semble prématurée. En effet d'une part, il est utile de laisser aux élèves le temps d'assimiler la première étape du raisonnement, d'autre part les élèves ne comprennent la nécessité d'une réciproque que si on leur fournit des exemples où des points sont à éliminer.

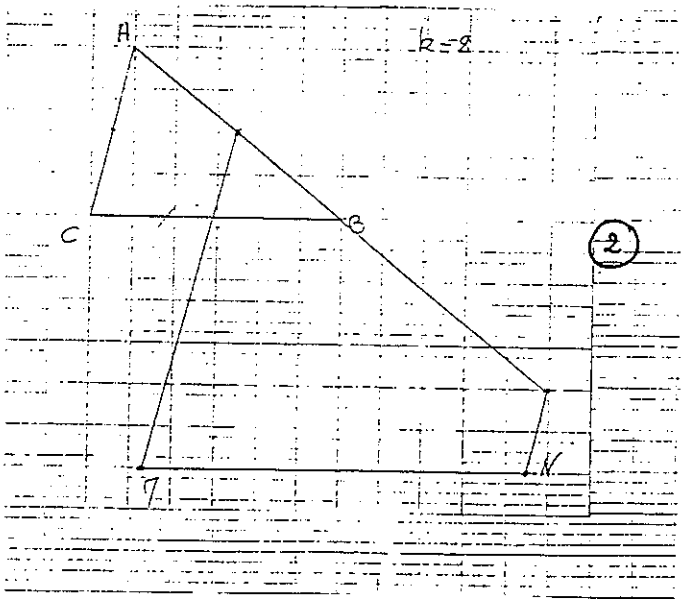
Remarques

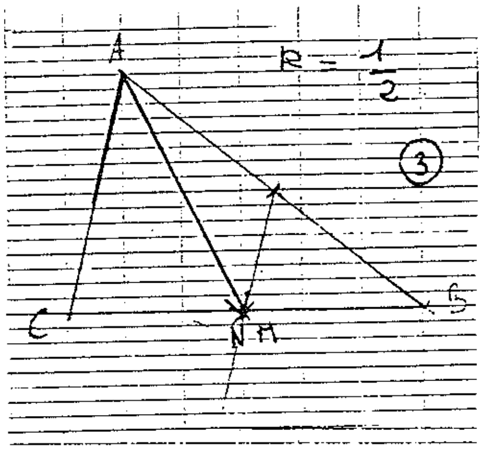
Si on veut faire traiter aux élèves tout le problème, il faut prévoir un temps relativement important ; la troisième question peut toutefois être exploitée partiellement en module et être achevée par un travail à la maison.

Ce problème pourrait faire appel à l'outil géométrie analytique ; le repère intéressant est $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Or, même si le programme comporte la notion de repère quelconque du plan, il précise *pour la résolution de problèmes de géométrie on se limitera à l'emploi de repères orthonormaux*. De plus, si on conserve la question 3) e) qui fait intervenir les distances, l'utilisation du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est exclue.

Productions d'un groupe d'élèves



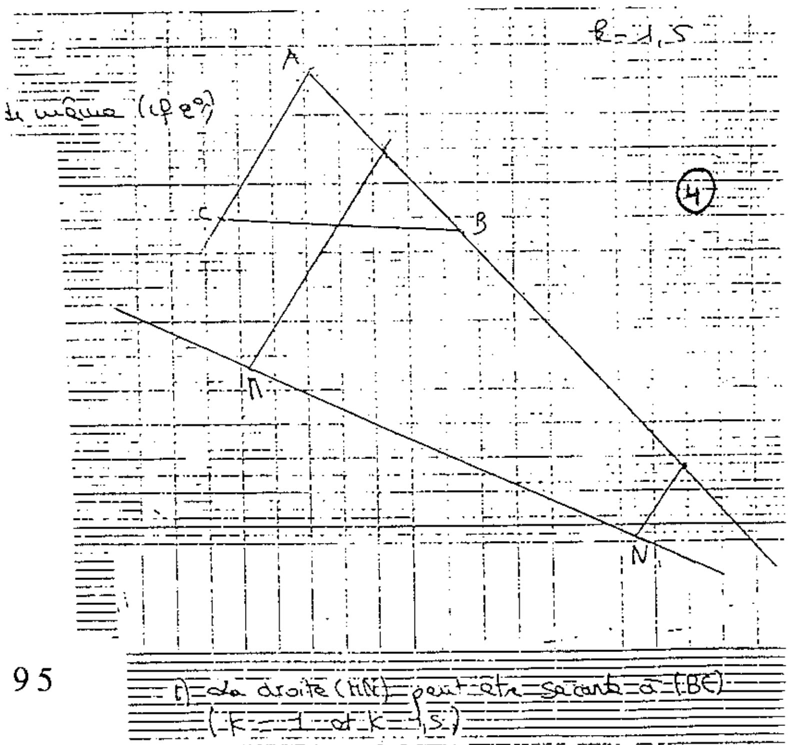




**Fig. 1 et 4** fausses ((MN) et (BC) sont sécantes).

- Dans 1, milieu de [AB] mal placé d'où M inexact.
- Dans 4, $\frac{3}{2}\ \overrightarrow{AB}$ construit à partir de B au lieu de A, d'où N faux.

**Fig. 2** exacte ((MN) // (BC))

**Fig. 3** pas de conjecture sur (MN) puisque M = N

# TRAVAIL SUR LA DEMONSTRATION EN GEOMETRIE

# TRAVAIL SUR LA DEMONSTRATION EN GEOMETRIE A PARTIR D'UN TEST DE L'EVALUATION

## QUELQUES REFLEXIONS

Au collège les élèves ont travaillé la démonstration en géométrie. En fin de Troisième, la plupart des problèmes comportent essentiellement un seul pas de démonstration, c'est à dire que pour arriver à la conclusion il faut :

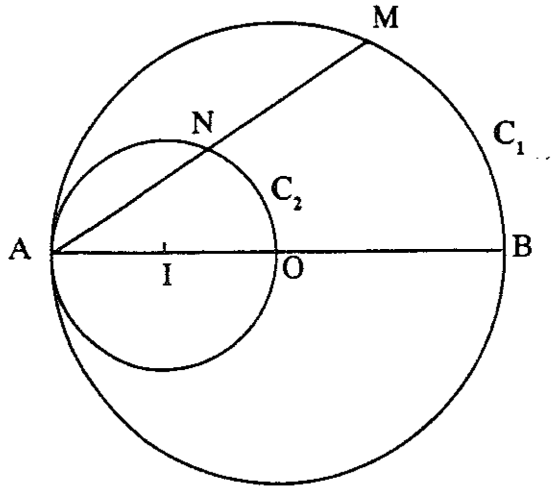
- soit utiliser une partie des hypothèses puis appliquer un théorème ou une définition ou une propriété caractéristique. La charge de l'élève est ici de trouver le "bon" théorème et de trier les hypothèses pour ne prendre que celles qui conviennent.

- soit utiliser une partie des hypothèses et un résultat démontré dans une question précédente puis faire comme précédemment. Les élèves ont une charge un peu plus lourde puisqu'ils doivent, en plus, avoir l'idée d'aller rechercher un résultat dont il est question antérieurement.

Dans certaines situations les élèves doivent prendre l'initiative de démontrer d'abord une condition d'application d'un théorème qui permet ensuite de prouver le résultat demandé. Ces situations sont réservées plutôt à des travaux en classe ou à la maison. Leur rôle est de sensibiliser les élèves à la démarche des deux ou même trois pas de démonstration.

C'est ce type de démarche qui est testé dans un exercice proposé dans la première évaluation à l'entrée en Seconde.

**Exercice 6 B.**




$C_1$ est le cercle de diamètre [AB] et de centre O.

$C_2$ est le cercle de diamètre [AO] et de centre I.

M est un point du cercle $C_1$, distinct de A et B.

Le segment [AM] coupe le cercle $C_2$ en N.

Démontrer que le point N est le milieu du segment [AM].

Notre intention n'est pas de faire une analyse détaillée des difficultés des élèves dans l'élaboration des démonstrations "canoniques" qui, pour nous, font partie des exigences de Seconde. Le thème a été travaillé par de nombreux IREM ; des brochures ou articles ont été publiés, en particulier par les IREM de Poitiers, Grenoble, Rouen, Strasbourg...la bibliographie en annexe donne les références; on y analyse des difficultés et des causes de celles-ci. On y propose des séquences destinées à améliorer le raisonnement conduisant à LA démonstration, séquences qui avaient été expérimentées dans des classes.

Néanmoins, et pour comprendre peut-être ce que l'on trouve dans certaines copies, il nous semble utile de souligner quelques raisons de distorsions entre les attentes de l'enseignant et les productions de ses élèves.

- L'enseignant veut et attend une démonstration mathématique.

- Les élèves, même s'ils ont bien l'intention de répondre à l'attente de leur professeur, ont des profils différents.
Aussi peut-on prévoir des productions différentes de leur part.

Voici quelques types d'élèves qui peuvent être rencontrés:

1) Ceux qui ont compris les exigences du professeur et sont (ou l'étaient déjà) convaincus de l'utilité de toutes les articulations du raisonnement vont fournir des productions "conformes" aux attentes de l'enseignant.

2) D'autres peuvent savoir

* utiliser des théorèmes
* parler de toutes les conditions d'application du théorème

mais ne pas savoir mener une démonstration correctement jusqu'au bout.

Cela peut se produire dès le départ dans le choix du théorème ou de la propriété. Ceux-ci sont mal adaptés aux hypothèses du problème donc les justifications des conditions d'application deviennent laborieuses ou même impossibles pour l'élève.
Par exemple, dans la proposition 2 de la page 104, l'élève pense aux propriétés de "agrandissement-réduction" de 3ème. Mais dans cette voie il n'a pas les moyens mathématiques de prouver que $AN = \frac{1}{2} AM$ ; il ne dispose pas de l'homothétie. L'enseignant sait que le choix est mathématiquement possible mais pas judicieux.

Cela se produit aussi lorsque l'élève écrit, à la place des théorèmes, des phrases-clé comme

*" on sait que si une droite passe par le milieu d'un côté....".*

Pour certains, ces phrases n'ont plus le label THEOREME car elles lui sont devenues familières à cause de la fréquence de leur utilisation dans les problèmes, mais l'enseignant n'est pas sûr du statut donné par l'élève à ces affirmations. Parfois ces "phrases-clé" proviennent uniquement de la description correcte de la situation géométrique et non d'une ébauche de raisonnement.

Dans ce cas l'enseignant est perplexe...

C'est aussi le cas lorsque l'élève énonce les conditions d'application d'un théorème sans les prouver.
Par exemple, dans la proposition 4 de la page 104, l'élève commence par *"On sait que (NO) est parallèle à (MB) par construction"*
puis utilise ce parallélisme sans l'avoir démontré avec néanmoins un souci de justification par le
"par construction".

La situation est alors claire pour l'enseignant.

3) L'élève n'a pas encore compris les règles du jeu de LA démonstration mathématique mais il veut faire plaisir au professeur ou veut étoffer sa copie comme les copains sont en train de faire . Alors il raconte, décrit la figure, parle de propriétés vraies mais qui n'ont rien à voir avec la finalité du problème posé ....enfin il écrit, il est occupé, il est en train, à son point de vue, de remplir son contrat d'élève .....
Et l'enseignant constate.... et constitue, par exemple des groupes pour un travail modulaire .

## EXPOSE D'UN TRAVAIL EN MODULE

Ce travail est réalisé à l'issue des résultats de l'exercice 6B proposé dans l'évaluation de Septembre 92 à l'entrée en Seconde.
Dans l'ensemble de la classe, l'enseignant a trouvé les trois types de productions décrits précédemment. Une séquence modulaire d'une heure et demie est alors mise en place pour tous les élèves qui ont 9 ou 0 à l'item correspondant, c'est-à-dire pour ceux dont les écrits ne correspondent pas à une démonstration attendue par le professeur.
Le module consiste à faire travailler les élèves concernés à partir de réponses représentatives de l'ensemble de leur production.

### OBJECTIF et TYPE de MODULE

L'objectif principal est la construction et la rédaction d'une démonstration en géométrie ; c'est donc un module méthodologique de type 1

TEXTE DONNE AUX GROUPES

Vous avez 9 propositions de réponses à un problème posé.

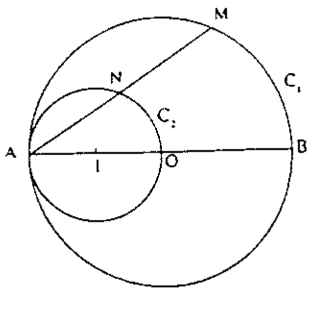
1°)
a) Pour chaque proposition, dire si elles répondent au problème ou non et justifier.

b) Dans chaque cas où il n'y a pas réponse au problème, essayer de compléter ces propositions afin qu'elles deviennent de "bonnes " réponses.

2°)
Donner une bonne réponse du groupe.

Voir au dos les 9 propositions

Exercice 6 B.




$C_1$ est le cercle de diamètre [AB] et de centre O.

$C_2$ est le cercle de diamètre [AO] et de centre I.

M est un point du cercle $C_1$, distinct de A et B.

Le segment [AM] coupe le cercle $C_2$ en N.

Démontrer que le point N est le milieu du segment [AM].

1

Comme O est le milieu de [AB]
et que I est le milieu de [AO]
et comme le triangle AMB est rectangle
en M, donc :
ANO est un triangle rectangle en N.
Le rayon de $C_2$ est deux fois plus petit
que le rayon de $C_1$ donc :

AO = OB
Comme les deux triangle AMB et ANO ont
le même sommet A et ont un côté
commun donc
AN = NM donc N est le milieu de
[AM]

Démontrer que le point N est le milieu du segment [AM].
$C_1$ a un diamètre 2 fois plus grand que $C_2$ car le
diamètre [AO] est la moitié du diamètre [AB] -
[AN] et [AM] sont confondus et font (AM) -
~~comme~~ le diamètre $C_1$ est 2 fois plus grand que le
diamètre $C_2$. la corde [AN] de $C_2$ est la même qu
la corde [AM] de $C_1$ mais en 2 fois plus petit -
Donc N est le milieu de [AM] -

2

3

Tout Comme $AO = \frac{1}{2} AB$ ;
$AN = \frac{1}{2} AM$ (et comme toutes
les autres égalités entre A et
un point de $C_1$ qui sont égales à
$\frac{1}{2}$ du segment [AP] (suppos
que P soit sur $C_1$ et aligné
avec A et avec le point de $C_2$)

Démontrer que le point N est le milieu du segment [AM].
On sait que (NO) est parallèle à (MB) par
construction. Et O le milieu de [AB]. Or
on sait que dans un triangle si une
droite passe par le milieu d'un côté
et est parallèle à un second, elle passe
forcemment par le milieu du troisième
côté
(ON) est parallèle à (MB) et passe par le milieu
de [AB]. Donc d'après le théorème ci-dessus,
on peut dire que dans le triangle AMB
(ON) passe par le milieu de [AM]. Donc N
est le milieu de [AM]. 4

Démontrer que le point N est le milieu du segment [AM]. 5

construisons simplement le triangle AMB.
sur le segment [AB], O est le milieu, d'où $AI = \frac{1}{2} AB$ et aussi $AO = \frac{1}{2} AB$.
Soit [I'I] le segment parallèle à [MB] et qui passe par I alors $AI' = \frac{1}{2} AM$.
de même, [NO] est le segment parallèle à [MB] et qui passe par O.
Comme $AO = \frac{1}{2} AB$ alors, $AN = \frac{1}{2} AM$ d'où N milieu de [AM]

7

Démontrer que le point N est le milieu du segment [AM]

$[AO] = \frac{[AB]}{2}$
Puisque l'on sait que O est le centre
de C I , de même que $[AI] = \frac{[AO]}{2}$
car I centre de $C_2$ donc $AI \neq AO$
Comme $C_1$ intercepte N, et que M
est distinct de A et B alors $[AN] = \frac{AM}{2}$
donc N milieu [AM].

Démontrer que le point N est le milieu du segment [AM].

- Puisque O est le centre de $C_1$
- Puisque $C_2$ a pour diamètre [AO]
- Alors [AO] = [OB] donc $[AO] = \frac{[AB]}{2}$
- Puisque M est sur $C_1$
- Puisque N est sur $C_2$
- Puisque $[AO] = \frac{[AB]}{2}$
- Alors N est le milieu de [AM]

6

Démontrer que le point N est le milieu du segment [AM]. 8

ON trace les parallèles (MB)//(NO)//(DI)
Puisque O est milieu de [AB]
alors N est milieu de [AM]

9

Par réduction du cercle $C_1$ on obtient le cercle $C_2$

$A \in C_1$ et $C_2$
$O \in C_2$ et est le centre de $C_1$
donc on peut dire que $2AO = AB$ et que $2AN = AM$,
comme $2AN = AM$
alors $AN = NM$
par conséquent N est le milieu du segment [AM].

RAISON DES CHOIX

Les textes proposés proviennent des élèves des groupes et sont représentatifs des écrits proposés par l'ensemble de ceux-ci. Il serait peut-être intéressant de donner aussi une "bonne" démonstration mais celle-ci ne serait-elle pas un obstacle à la création, pour chaque groupe, de SA démonstration ?
Ce serait à tester...

Certaines propositions, comme la 1, correspondent au type d'élève 3 précédemment décrit. Le rite de la démonstration est en partie respecté:
*"comme....et que...."*
mais par la suite, on ne sait plus si les affirmations proviennent uniquement de l'observation de la figure ou de propriétés inconsciemment connues et non énoncées. Enfin le dernier "donc" qui n'a pas de liaison avec ce qui précède montre la nécessité d'un travail approfondi sur la démonstration de la part de l'auteur de ces lignes...

D'autres propositions, comme la 4, correspondent au type d'élève 2 décrit auparavant; il manque le "premier maillon" c'est-à-dire la justification du parallélisme. C'est au moment du bilan que les auteurs de ces propositions sont convaincus de ce manque.

DEROULEMENT DE LA SEQUENCE

Quatre groupes se constituent au gré des élèves afin que chacun se sente à l'aise avec les autres et que les critiques ou corrections puissent se faire naturellement, librement, sans complexe vis à vis des autres.

La consigne est de rédiger une réponse aux questions posées. Ce papier est utilisé lors du compte-rendu du travail de chaque groupe pendant la dernière demi-heure. L'enseignant collecte ces écrits qui pourront lui permettre de suivre l'évolution des élèves concernés.

Voici les réponses des groupes aux questions 1a et 1b.

## Groupe B

Démonstration

Axel
Hervé
Benédicte
Laurent

groupe (A)

Texte (1) a) ce n'est pas une démonstration (idées non liées, pas de théorème cité)
b) cf 2)

Texte (2) a) ce n'est pas une démonstration (voir (1) a)
b) nous ne pouvons pas nous baser sur ce raisonnement

Texte (3) a) voir (1)
b) voir (2)

Texte (4) a) c'est une démonstration incomplète
b) La première phrase n'est pas justifiée, il faut utiliser le théorème de Thalès.

Texte (5) a) ce n'est pas une démonstration
b) voir (2)

Texte (6) a) ce n'est pas une démonstration
b) voir (2)

Texte (7) a) ce n'est pas une démonstration
b) voir (1)

Texte (8) a) ce n'est pas une démonstration
b) voir (2)

Texte (9) a) c'est une démonstration incomplète
b) Il faut montrer grâce au théorème de Thalès que 2AN = AM

Laure
Delphine
Florence, Eve

A)
1ère démonstration :
a) C'est une démonstration mais incomplète
b) Il faut qu'il prouve par une propriété que ceux sont des triangles rectangles.
Puis prouver qu'avec ces triangles que (NO) // (HB)

2ème démonstration :
a) ce n'est pas une démonstration
b) Voir démons. 1 complète

3ème démonstration :
a) Ce n'est pas une démonstration
b) Il faut qu'il prouve que N est le milieu de [AH] et ne démontre pas que $AN = \frac{1}{2} AM$.

4e démonstration :
a) c'est une démonstration incomplète
b) La fin est bien une démonstration mais il n'a pas justifié que (NO) // (HB)

5e démonstration :
Démonstration incomplète
Démontrer que les droites (NO) et (HB) sont parallèles

6e démonstration = 7e démonstration = 8e démonstration :
m̂ idée

8 démonstration :
C'est une démonstration incomplète.
Il faut démontrer que (NO) // (HB) avec les triangles ANO et AHB qui sont rectangles.

Démonstration 9 :
m̂ idée que la démonstration 8

Groupe C : Anne
Marjolaine
Stephanie
Celine

7 oct 92.

Demonstration n° 1

→ Demonstration incomplète

b) Triangle Rectangle AMB : Non justifié :

↳ Comme M appartient au cercle G et que le diamètre du Cercle G constitue ~~l'hypothenuse~~ d'un côté du triangle AMB alors le triangle AMB est inscrit dans le demi-cercle G d'ou triangle AMB rectangle en M.

a) les éléments posés ne sont pas ceux qui justifie la demonstration.

Demonstration n° 2 :

Non ce n'est pas une démonstration. La person ne ayant fait cette démonstration, décrit ce qu'elle constate mais ne sait pas l'utiliser.
il n'y a pas de theoreme.

Demonstration n° 3

Ceci n'est pas une Demonstration, car il affirme un Raisonnement qu'il ne demontre pas dans sa parenthèse.

Demonstration n° 4

Demonstration dans laquelle il manque le début pour prouver que (NO) est parallele (MB)

Demonstration 5.

Arguments inutiles car elle affirme sans démontrer. De plus il manque le theorème et s'est mal expliqué.

Demonstration 6

Il manque toute la demonstration. elle utilise toutes les hypothèses pour former sa conclusion sans former de Demonstration
Mauvaise utilisat° des crochets.

Demonstration 7

Demonstration fausse car elle est basée sur des affirmations mauvaises.

Demonstration 8

Demonstration incomplète.

Demonstration 9

Il avance des conclusions sans demontrer

② a) La démonstration est incomplète : il n'y a aucun théorème mathématique, ni aucune justification

b) ~~Pour~~ compléter cette démonstration, il faudrait la refaire entièrement car il manque la plupart des justifications

① a) Démonstration incomplète : il n'est pas démontré, ni justifiez les projections

Theorème : sur le cercle circonscrit

b) Comme O est le milieu de [AB] et que I est le milieu de [AO] et comme le triangle AMB est rectangle en M donc :

- ANO est un triangle rectangle en N
- le rayon de $C_2$ est 2 fois + petit que le rayon de C

donc :

AO = OB.

On peut dire que (NO) // (MB) car :

(NO) ⊥ (AM)

(MB) ⊥ (AM)

Donc on peut prouver, par projection orthogonale de (AB) sur (AM)

A → A

O → N

B → M

Comme la projection conserve les milieux.

Alors N milieu (AM)

Groupe ⓓ Nicolas, Olivier C, Olivier G., Elisa, Mathieu F

③ a) Ce n'est pas une démonstration, ni aucune justification

b) Trop de choses à corriger.

④ a) Ce n'est pas justifiez.

b) La reprise serait trop longue.

⑤ a) Aucune justification, que des constatations

⑥ a) Pas de justification, ni de liaison entre les différentes constatations

b) Trop de choses à rajouter.

⑧ Le parallélisme de (MB) et de (NO) est avancé sans l'avoir prouvé.

⑦ Le texte ne tient compte que des faits sans les justifier.

Il manque la partie prouvant le parallélisme de (MB) et de (NO)

⑨ Cette démonstration n'en n'est pas tout à fait une car les éléments écrits ne constituent que ce que l'on doit justement démontrer.

" Si un triangle a un de ses côtés qui est le diamètre de son cercle circonscrit le triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse "

QUELQUES REMARQUES

1) Les groupes sont en général catégoriques dans leur jugement:

"ce n'est pas une démonstration: idées pas liées, pas de théorème cité"

"ce n'est pas une démonstration: la personne.....décrit ce qu'elle constate mais ne sait pas l'utiliser. Il n'y a pas de théorème."

"ce n'est pas ....car il affirme un raisonnement qu'il ne démontre pas.."

"arguments inutiles car il affirme sans démontrer. De plus il manque le théorème et c'est mal expliqué."

"c'est une démonstration incomplète; la fin est bien une démonstration mais il n'a pas justifié que (NO)//(MB)".

2) Les auteurs des propositions sur lesquelles les groupes travaillent sont dans ces groupes. Le fait d'avoir laissé les élèves se choisir favorise le travail collectif. Ceux dont la production est "sélectionnée " ne se sentent pas jugés et participent comme les autres à la critique de leur écrit. Ces critiques viennent petit à petit grâce aux échanges dans lesquels l'enseignant n'intervient pas.

L'influence du groupe s'est souvent fait sentir dans les échanges verbaux mais aussi dans des écrits où l'évolution entre les convictions initiale et finale est flagrante. Par exemple, pour cet élève qui avait rédigé son travail personnel et qui ensuite est devenu "secrétaire" du groupe A .

Sur son brouillon on trouve :

1 a) 1: C'est une démonstration, car il présente ses hypothèses malgré une absence de justification et ses idées sont liées.

4 a) démonstration : voir a) 1

Un camarade du même groupe A écrit :

(1) La conclusion n'est pas démontrée
malgré une recherche de méthode...
A partir de la 3^e ligne, il manque la
preuve que N est bien le milieu de [AM]
Pour cela, il aurait fallut passer
par la réciproque du théorème de Thalès
dans le triangle AMD avec (NO) et (MD)
supposées parallèles.

(4) Dans ce texte, tout y est si ce n'est
la preuve que les droites (ON) et (MB) sont
parallèles.

Et la réponse du groupe A est:

groupe (A)

Texte (1) a) ce n'est pas une démonstration (idées non liées, pas de théorème cité)
b) cf 2)

Texte (2) a) ce n'est pas une démonstration (voir (1) a)
b) nous ne pouvons pas nous baser sur ce raisonnement

Texte (4) a) c'est une démonstration incomplète
b) La première phrase n'est pas justifiée, il faut utiliser le
théorème de Thalès.

3) Bien sûr ce travail est une première (re)mise au point relative aux attentes de l'enseignant. Les conclusions de chaque groupe, si en conformité avec ces attentes soient-elles, sont à prendre avec réserve quant à la conviction intime de chacun.
L'enseignant peut apprécier la syntaxe des démonstrations écrites. Il lui est plus difficile de connaitre le sens donné par l'élève à cette syntaxe.

Pour certains élèves, une démonstration n'est-elle pas qu'un exercice de style conforme aux modèles donnés, exercices qu'il faut réussir pour avoir une bonne note ou pour une autre raison ? C'est certainement lors d'un dialogue avec l'élève, à l'occasion d'autres exercices que l'enseignant pourra connaitre le sens donné par chacun à la démonstration.

**PROLONGEMENT**

Ce module a été suivi pour les mêmes élèves par une séquence où le travail demandé porte sur la démonstration. Il est en général bien réussi par les groupes. Cependant c'est dans les productions personnelles lors des devoirs ou des contrôles qu'on pourra estimer l'impact de ces séquences dans l'apprentissage en cours chez chaque élève .

Voici le texte donné au début de la séquence :

CONSIGNE
*Pour chaque texte*
* *Faire une figure sur laquelle on peut lire toutes les hypothèses*
* *Par écrit donner explçicitement ces hypothèses*
* *Enoncer la conclusion à laquelle on veut arriver*
* *Formuler une preuve de la conclusion énoncée à partir des hypothèses et du cours de math.*

PROBLEME 1
ABCD est un rectangle, D est la médiatrice de [AC], D coupe (AB) en E et (BC) en F.
Les droites (EC) et (AF) sont-elles perpendiculaires ?

PROBLEME 2
C est un cercle de centre O, A est un point de ce cercle, M est un point de C distinct de A et non aligné avec A et O, I est le milieu de [AO], C' est le cercle de diamètre [AO], N est le point d'intersection de (AM) avec C' distinct de A.
Les droites (IN) et (OM) sont-elles parallèles ?

PROBLEME 3
ABC est un triangle équilatéral, BECD est un carré.
Les points A, D, E sont-ils alignés ?

PROBLEME 4
ABCD est un parallélogramme. Où faut-il placer le point M intérieur à ABCD pour que la somme des aires des triangles MAB et MCD soit maximale ?

## POUR CONCLURE

La formation de l'esprit critique est un objectif permanent pour l'enseignant de math. En Seconde, un des objectifs est aussi de faire adhérer les élèves aux principes de la démonstration c'est-à-dire:

Démontrer en mathématique c'est
- exhiber des "vérités" reconnues par la "communauté scientifique"
- vérifier que la situation dans laquelle on se trouve correspond aux hypothèses de ces "vérités"
- Utiliser un raisonnement déductif.

Dans les classes ultérieures, les élèves découvriront d'autres formes de raisonnement, par exemple:
par récurrence,
par condition suffisante,
par l'absurde
par contre-exemple
........
que ce soit dans leur cadre scolaire, dans leur vie professionnelle ou dans leur vie "tout court" car le besoin de preuves ... est partout présent.

## BIBLIOGRAPHIE

N. BALACHEFF (1982) Preuve et démonstration en mathématique au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n° 3.3, pp. 261-304. La Pensée Sauvage, Grenoble

G. ARSAC (1988) Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n° 9.3, pp. 247-280. La Pensée Sauvage, Grenoble

M. LEGRAND (1988) Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n° 9.3, pp. 365-406. La Pensée Sauvage, Grenoble

B. POULAIN (1991) Des activités pour raisonner. *Brochure IREM de Rouen*

F. PLUVINAGE, J.C RAUSCHER, D. MAURETTE, C. HINDELANG, IREM de Strasbourg (1987-88) Vers l'apprentissage du raisonnement en géométrie. *Suivi Scientifique, classe de 4ème,* pp. 353-364, IREM de Lyon.

IREM de Poitiers (1987-88) Propos sur la démonstration. *Suivi Scientifique, classe de 4ème,* pp. 365-373, IREM de Lyon.

M. MANTE, IREM de Lyon (1987-88) De l'initiation au raisonnement déductif à l'apprentissage de la démonstration. *Suivi Scientifique, classe de 4ème,* pp. 375-394, IREM de Lyon.

D. GAUD et J. P. GUICHARD, IREM de Poitiers (1984) Apprentissage de la démonstration. *Petit x n° 4,* pp. 5-25, IREM de Grenoble.

J. HOUDEBINE, IREM de Rennes (1990) Démontrer ou ne pas démontrer. *Repères - IREM n° 1,* pp. 5-27, Topiques Edition, Pont à Mousson

B. BETTINELLI, IREM de Besançon (1991) Intuition et démonstration chez Archimède. *Repères - IREM n° 2,* pp. 12-29, Topiques Edition, Pont à Mousson

D. BERGUE, J. BORREANI, B. POULAIN, IREM de Rouen (1992) Des activités pour raisonner au collège. *Repères - IREM n° 8,* pp. 33-48, Topiques Edition, Pont à Mousson

Thèmatique Démonstration. *Repères - IREM n° 12* , Topiques Edition, Pont à Mousson

N. VOGEL, IREM de strasbourg (1994) Quelques repères pour apprendre à démontrer avec la relation de Chasles. *Repères - IREM n° 16,* pp. 83-109, Topiques Edition, Pont à Mousson

# CONCLUSION

Modules, T.D, quel est leur apport dans l'apprentissage de la classe de seconde ?

Dans toutes ces séances, l'effectif réduit permet de mettre les élèves en action par rapport au travail mathématique qui leur est proposé. L'enseignant est plus disponible pour intervenir auprès de chaque élève ou de chaque groupe. Séquences modulaires ou T.D sont placés avant ou après le cours, pour introduire ou utiliser des notions.

Qu'apportent les modules par rapport aux T. D ?

Dans la situation idéale, deux facteurs interviennent :

- la durée (une heure et demie par quinzaine) permet d'engager avec les élèves des travaux qui demandent du temps pour réfléchir, proposer une solution et en donner une rédaction.
- la possibilité du choix des élèves donne à l'enseignant plus de souplesse pour faire progresser chacun dans sa réflexion et dans l'acquisition des connaissances.

Le professeur peut éventuellement gérer un temps modulaire plus court, mais à notre avis, le fait de pouvoir choisir les élèves est fondamental. Si ce choix n'est pas possible, les modules sont-ils différents des T.D ?

**I.R.E.M**
**Université Paris 7**
**Denis Diderot**
**Tour 56 couloir 56/55 - 3e étage, Case 7018**
**2, place jussieu 75251 PARIS CEDEX 05**

**Tel :**
**01 44 27 53 83**
**Télécopie : 01 44 27 56 08**

**Novembre 1998**

*Nous vous indiquons le prix des brochures sans le port, le poids et le tarif postal pour calculer le coût du port*

| Poids jusqu'à | Ordinaires |
|---|---|
| 20 g | 3,00 F |
| 50 g | 4,50 F |
| 100 g | 6,70 F |
| 250 g | 11,50 F |
| 500 g | 16,00 F |
| 1 000 g | 21,00 F |
| 2 000 g | 28,00 F |
| 3 000 g | 33,00 F |

# PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M PARIS 7

## BROCHURES

| Nº | Titre | Prix | Poids |
|---|---|---|---|
| 4 | Groupe Français-Mathématiques (Tome 1) | 56F | 490 gr |
| 5 | Quelques réflexions sur la démonstration | 27F | 220 gr |
| 7 | Pavages et coloriages | 27F | 170 gr |
| 14 | De la température résultante à l'angle solide | 21F | 170 gr |
| 15 | Groupe Français-Mathématiques (Tome 2) | 52F | 440 gr |
| 16 | Les jeux du "Club des Cordelières" | 58F | 420 gr |
| 21 | Almanathématique | 18F | 160 gr |
| 22 | Frises | 10 F | 85 gr |
| 23 | Récurrence | 53F | 410 gr |
| 24 | Climatisons les Mathématiques | 33F | 270 gr |
| 25 | Les Forces en statique | 18F | 110 gr |
| 27 | Nombre d'or | 74F | 640 gr |
| 29 | La vitesse | 35F | 290 gr |
| 30 | Représentations graphiques | 35F | 300 gr |
| 34 | Métrologie | 31F | 240 gr |
| 36 | Au pays des Cycloïdes | 38F | 340 gr |
| 38 | Conceptions du cercle chez les élèves de l'école élémentaire | 50F | 430 gr |
| 39 | Pot Pourri | 44F | 350 gr |
| 43 | Cinématique relativiste | 34F | 260 gr |
| 45 | Petites variations ou l'art de dériver sans le savoir | 39F | 330 gr |
| 46 | Nombres à l'école élémentaire | 45F | 390 gr |
| 47 | Matériaux pour Logo | 36F | 300 gr |
| 48 | Mesure des longueurs et des aires | 40F | 340 gr |
| 49 | Devoirs à la maison pour le premier cycle | 38F | 310 gr |
| 50 | Deug SSM Section E - Un an de fonctionnement | 35F | 310 gr |
| 51 | Instruments de Géométrie | 20F | 160 gr |
| 53 | Lisp et Prolog | 39F | 320 gr |
| 54 | Echelles logarithmiques | 22F | 160 gr |
| 55 | Dessin géométrique | 25F | 200 gr |
| 56 | Héliomath | 31F | 240 gr |
| 57 | Statistiques | 50F | 420 gr |
| 58 | Informatique et Mathématiques en Terminale C | 70F | 630 gr |
| 59 | "Et si la descriptive servait à quelque chose" (2 tomes). | 35F | 140 gr |
| 61 | Mathématiques : Approche par des textes historiques | 50F | 450 gr |
| 62 | Liaison Ecole-Collège, Nombres décimaux | 59F | 520 gr |
| 63 | Une section de Deug SSM Première année 84-85 | 62F | 560 gr |
| 64 | Une année de Géométrie en Terminale C | 29F | 230 gr |
| 68 | Problèmes Ruraux - de marins - d'argent - de durée - de grandeurs - de graduations - farfelus - de certificat d'études | 49F | 440 gr |
| 69 | Situations d'apprentissage en géométrie 6ème - 5ème | 50F | 440 gr |
| 71 | Activités géométriques en Terminale C | 24F | 180 gr |
| 72 | De la géométie analytique à l'algèbre linéaire | 24F | 190 gr |
| 73 | Angles de couples et rotations | 32F | 280 gr |
| 74 | Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire | 45F | 380 gr |
| 75 | La géométrie au lycée | 49F | 420 gr |
| 76 | Questionnaire de travail sur les différentielles | 31F | 240 gr |
| 77 | Une recherche menée dans le cadre du projet Euclide | 49F | 410 gr |
| 78 | Calcul mental | 43F | 400 gr |
| 79 | Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 2 - | 60F | 530 gr |
| 80 | Travaux d'étudiants en temps non limité (niveau licence, présentés par A. Robert) | 55F | 530 gr |
| 81 | La pratique de mémoires étudiants en Deug SSM première année L'expérience de Lille 1 | 48F | 420 gr |
| 82 | Les mythes historiques, sociaux et culturels des mathématiques : leur impact sur l'éducation | 31F | 270 gr |
| 83 | Recherche de spécificités dans l'enseignement à distance des mathématiques en licence-maîtrise à l'université P. et Marie Curie (Paris) | 25F | 210 gr |
| 84 | Modules - TD en Seconde Leur apport dans l'apprentissage des Mathématiques | 42F | 360 gr |
| 85 | La calculatrice en 1ère et Terminale Scientifique | 38F | 310 gr |
| 86 | La calculatrice au lycée | 28F | 220 gr |
| 87 | Pourquoi pas des mathématiques à l'école maternelle ? | 24F | 180 gr |

## LES CAHIERS DE DIDACTIQUE

| Nº | Titre | Auteur(s) | Prix | Poids |
|---|---|---|---|---|
| 1 | De l'ingénierie didactique | J. Robinet | 3F | 60 gr |
| 2 | Quelques éléments de théorie piagétienne et.... didactique des Mathématiques | J. Rogalski | 6F | 90 gr |
| 3 | Rapport enseignement apprentissage : Dialectique outil-objet, jeux de cadre | R. Douady | 6F | 90 gr |
| 5 | Quelques concepts, quelques généralités et quelques références | Collectif | 3F | 60 gr |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | De la didactique des Mathématiques à l'heure actuelle | R. Douady | 6F | 90 gr |
| 7 | Acquisition des premiers concepts de l'analyse sur R dans une section ordinaire de première année de DEUG | F. Boschet<br>A. Robert | 21F | 230 gr |
| 8 | Modélisation et reproductibilité en didactique des Mathématiques | M. Artigue | 11F | 130 gr |
| 9 | Histoire de la convergence uniforme | J. Robinet | 6F | 80 gr |
| 10 | Des Analystes avant l'analyse | M.C Bour | 9F | 110 gr |
| 12 | A propos de l'acquisition de la bidimensionnalité chez les élèves d'âge préscolaire et scolaire | J. Rogalski | 13F | 150 gr |
| 13 | Enseignement et acquisition de la bidimensionnalité (Analyse des effets macroscopiques de l'enseignement) | J. Rogalski | 7F | 90 gr |
| 15 | Analyse non standard et enseignement | M. Artigue<br>V. Gautheron<br>E. Isambert | 21F | 230 gr |
| 16 | Typologie de logiciels pouvant impliquer des activités mathématiques à l'école élémentaire : quelques résultats | F. Tréhard | 10F | 120 gr |
| 17 | Une intervention en didactique des Mathématiques à des élèves instituteurs en 3ème année d'école normale (FP3) | A. Robert | 14F | 160 gr |
| 18 | Rapports enseignement/Apprentissage (débuts de l'analyse sur R) | | | |
| | Fascicule O : connaissance des élèves sur les débuts de l'analyse sur R à la fin des études scientifiques secondaires françaises | A. Robert | 4F | 60 gr |
| | Fascicule 1 : Analyse d'une section de DEUG A première année (les connaissances antérieures et l'apprentissage | A. Robert | 11F | 130 gr |
| | Fascicule 2 : Analyse d'une section de DEUG A première année (connaissances antérieures et procédures en cours d'apprentissage) | C. Houard<br>M. Quatreville | 6F | 80 gr |
| | Fascicule 3 : Les limites de l'évaluation :<br>- la section témoin<br>- heurs et malheurs de la section expérimentale | A. Robert | 6F | 90 gr |
| 19 | Introduction de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels | D. Butlen | 28F | 290 gr |
| 20 | A propos de l'enseignement de la proportionnalité | M. Pezard | 4F | 70 gr |
| 21 | Les réels : Quels modèles en ont les élèves ? | J. Robinet | 13F | 150 gr |



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année | D. Grenier<br>M. Legrand<br>F. Richard | 24F | 260 gr |
| 23 | Comment faire du neuf avec du vieux ? Tracés de courbes en Logo | P.Jarraud | 12F | 150 gr |
| 24 | Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège | M.J Perrin | 15F | 180 gr |
| $25_1$ | Utilisation de l'ordinateur pour l'apprentissage d'un algorithme de calcul des produits Compte-rendu de l'expérimentation | D. Butlen<br>C.Lethielleux | 5F | 80 gr |
| $25_2$ | Utilisation de l'ordinateur pour l'apprentissage d'un algorithme de calcul des produits Compte-rendu de l'expérimentation | D. Butlen<br>C. Lethielleux | 16F | 180 gr |
| 26 | L'histoire de l'enseignement des Mathématique comme sujet de recherches en didactique des Mathématiques | G. Schubring | 9F | 130 gr |
| 27 | Basic, Riemann, Darboux Illustration de l'intégrale sur un micro-ordinateur | P. Jarraud | 8F | 110 gr |
| 28 | Didactique dans l'enseignement supérieur : une démarche | A. Robert | 11F | 140 gr |
| 29 | Esquisse d'une genèse des notions d'algèbre linéaire enseignées en DEUG | J. Robinet | 28F | 300 gr |
| 30 | Sur l'analyse des traités d'analyse : les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870-1914 | M. Zerner | 7F | 110 gr |
| 31 | Etude comparative de diverses productions d'étudiants de première année de DEUG scientifique selon les séries de baccalauréat d'origine<br>Annexe sur la méthode graphique | H. Authier<br>M. Cantacuzene | 22F | 250 gr |
| 32 | Un essai d'expérience didactique : L'enseignement des Mathématiques à l'école expérimentale de Bonneuil S/Marne | I. Bloch | 13F | 170 gr |
| 33 | Travail en classe en petits groupes - Première approche Introduction de Mme N. LEORAT | N. Baron | 37F | 390 gr |
| 34 | Quelques reflexions sur l'utilisation des jeux en classe de mathématique | J. Robinet | 3F | 60 gr |
| 35 | Travaux dirigés de mathématiques sur micro-ordinateurs en DEUG SSM | C. Laurent<br>P. Jarraud | 17F | 200 gr |
| | + disquette | | 4F | |
| | Cahier + disquette | | 22F | 210 gr |
| 36 | Eléments de bibliographie sur la relation entre origine sociale et réussite ou echec scolaires | M.J. Perrin-Glorian | 17F | 200 gr |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 37 | Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane .................................................. | R. Douady<br>M.J Perrin-Glorian | 14F | 170 gr |
| 38 | Enseigner des méthodes........................................ | A. Robert<br>J. Rogalski<br>R. Samurçay | 8F | 110 gr |
| 39 | Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture Le cas de "La somme des angles d'un triangle............... | N. Balacheff | 10F | 130 gr |
| 40 | Travail en petits groupes en Terminale C..................... | M.C Marilier<br>A. Robert<br>I. Tenaud | 20F | 230 gr |
| 41 | Apprendre des Mathématiques et comment apprendre des mathématiques : Premiers éléments pour une étude des représentations des élèves de l'enseignement post-obligatoire de l'accès au savoir mathématique.......... | E. Bautier<br>A. Robert | 13F | 170 gr |
| 42 | Représentations de l'enseignement des mathématiques (un exemple : l'organisation de la classe de seconde)........ | N. Léorat<br>A. Moussa | 21F | 240 gr |
| 43 | Acquisition de savoirs et de savoir-faire en informatique.... | J. Rogalski | 7F | 100 gr |
| 44 | Recherche d'une démarche d'enseignement en mathématiques, au C.N.A.M................................ | J.P Drouhard<br>Y. Paquelier | 12F | 150 gr |
| 45 | Travaux dirigés de mathématiques sur micro-ordinateurs en DEUG SSM 2ème partie..................................... | P. Jarraud | 14F | 170 gr |
| 46 | Connaissances mathématiques des étudiants issus des bac F............................................................ | H. Authier | 19F | 220 gr |
| 47 | De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement postobligatoire (EPO)............................................................ | A. Robert | 8F | 120 gr |
| 48 | Représentation plane des figures de l'espace................ | J. Boudarel<br>F. Colmez<br>B. Parzysz | 8F | 120 gr |
| 49 | Réussite en IUT selon l'origine scolaire....................... | A. Jacquemin | 11F | 140 gr |
| 50 | Une introduction à la didactique des Mathématiques....... | A. Robert | 17F | 210 gr |
| 51 | Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels.......................................................... | A. Robert | 23F | 260 gr |
| 52 | Un aperçu des travaux de VYGOTSKI . LEONTIEV et BRUNER, Disciples de VYGOTSKY.... | F. Boschet | 17F | 200 gr |
| 53 | Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG......................... | A. Robert<br>J. Robinet | 6F | 90 gr |



## CAHIERS DE DIDIREM

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement | A. Robert<br>J. Robinet | 20F | 160 gr |
| 2 | La genèse du calcul algébrique (Une esquisse) | J. Robinet | 14F | 100 gr |
| 3 | Epistémologie et didactique | M. Artigue | 16F | 120 gr |
| 4 | Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels | A. Robert<br>J. Robinet | 28F | 240 gr |
| 5 | Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficulté | M.J Perrin-Glorian<br>D. Butlen<br>M.Lagrange | 21F | 170 gr |
| 6 | Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A (*) en algèbre linéaire.<br>(*) Premier cycle scientifique des universités françaises | J.L Dorier<br>C. Lavergne | 48F | 420 gr |
| 7 | Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire | J.L Dorier | 35F | 290 gr |
| 8 | Innovation pédagogique et représentations des étudiants Présentation et analyse des résultats du dépouillement d'un questionnaire sur l'enseignement des mathématiques en DEUG SSM Première année | P. Jarraud | 25F | 200 gr |
| 9 | Un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie - licence en formation continuée) | A. Robert | 36F | 290 gr |
| 10 | Analyse du discours des enseignants :<br>A) Apports de 2 ouvrages récents de linguistique par C.M Chiocca<br>B) Méthode de BRONCKART et références bibliographiques complémentaires | | 19F | 150 gr |
| 11 | Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année | M. Rogalski | 27F | 230 gr |
| 12 | Le pourquoi et le comment d'une ingénierie. (La convergence uniforme) | J. Robinet | 15F | 120 gr |
| 13 | Une expérience d'enseignement de mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté | D. Butlen<br>M. Pezard | 29F | 250 gr |
| 14 | Illustrer l'aspect unficateur et simplificateur de l'algèbre linéaire | J.L Dorier | 21F | 170 gr |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes : "quelques commentaires épistémologiques et didactiques" | M.Artigue<br>A.Deledicq | 30F | 250 gr |
| 16 | Analyse du discours des enseignants | | | |
| | A) Etude comparée des discours de deux enseignants de mathématiques pendant une même leçon (en 2d). | E. Josse | | |
| | B) Une méthode d'analyse de discours d'enseignant en classe de mathématiques. | C.M. Chiocca<br>E. Josse<br>A. Robert | 31F | 270 gr |
| 17 | Télé enseignement universitaire<br>Les mathématiques dans une section de Deug SSM première année. | C. Cazes | 22F | 180 gr |
| 18 | Les problèmes didactiques de l'enseignement des mathématiques dans l'association AUXILIA | F. Stamon Millet | 19F | 150 gr |
| 19₁ | L'ingénierie didactique<br>Un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage. | R. Douady | 22F | 180 gr |
| 20 | "Les oeufs"<br>Entretiens sur la modélisation algébrique en classe de seconde. | E. Hébert | 44F | 400 gr |
| 21 | Prise en compte du méta en didactique des Mathématiques | A. Robert<br>J. Robinet | 27F | 230 gr |
| 22 | Représentations des professeurs de mathématiques et des élèves de terminales des lycées de Conakry sur les mathématiques et leur enseignement | A. Tidjane Diallo | 49F | 440 gr |
| $23_1$ | Changements de cadres à partir des surfaces minimales. | A. et R. Douady | 20F | 230 gr |
| Numéro Spécial n° 2 : | Que faut-il savoir en mathématiques en fin de troisième pour "réussir sa seconde" ? | E. Josse | 33F | 270 gr |
| 25 | A propos de l'utilisation des calculatrices au lycée | M. Lattuati<br>I. S. Rodrigues | 18F | 120 gr |
| Numéro spécial n° 3 : | Une recherche sur le logiciel Dérive<br>Rapport | Equipe<br>DIDIREM | 88F | 780 gr |
| 26 | Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques.<br>Un essai de didactique professionnelle | A. Robert | 20F | 140 gr |



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 27 | Rapports entre habileté calculatoire et "prise de sens" dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire. | M. Pezard<br>D. Butlen | 27F | 200 gr |
| 28 | Comment, en didactique des mathématiques, prendre en compte les pratiques effectives, en classe, des enseignants de mathématiques du lycée ?<br>Une approche à travers des analyses de pratiques de quelques enseignants de mathématiques dans des séances d'introduction aux vecteurs en classe de seconde | C. Hache<br>A. Robert | 41F | 340 gr |
| 29 | Pratiques des élèves et des enseignants des mathématiques<br>Rapport de recherche<br>Rôle des gestes de clôture dans l'enseignement des mathématiques<br>Institutionnalisation en classe de seconde : valeur absolue, Intervalles, encadrements, approximations première partie : choix globaux des enseignants et résultats des élèves | A. et<br>R. Noirfalise<br>M.J Perrin | 56F | 464 gr |
| 30 | DEA de didactique des disciplines<br>Didactique des mathématiques<br>Le tableau noir : un outil pour la classe de mathématiques | E. Roditi | 42F | 350 gr |
| 31 | DEA de didactique des disciplines<br>Didactique des mathématiques<br>L'entrée dans le monde de pensée fonctionnel en classe de seconde | D. Pihoue | 44F | 390 gr |
| | Numéro spécial n° 4<br>Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée | M. Artigue<br>B. Defouad<br>M. Duperier<br>G. Juge<br>J.B Lagrange | 114F | 1026 gr |

## DOCUMENT DE TRAVAIL POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

| N° | Titre | Auteurs | Prix | Poids |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Formation en didactique des mathématiques, une expérience en CPR interne | A. Robert | 18F | 140 gr |
| 2 | Formation des moniteurs (Mathématiques) | D. Perrin et A. Robert | 13F | 100 gr |
| 3 | Formation professionnelle initiale des enseignants du second degré en mathématiques<br>Actes de la journée de réflexion organisée le 06/04/1991 à Paris par la Commission Inter-IREM Université et l'équipe DIDIREM | | 22F | 190 gr |
| 4 | Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs instituteurs-maîtres-formateurs | D. Butlen et M. Pezard | 31F | 260 gr |
| 5 | Formation à l'enseignement des mathématiques : exemples de pratiques effectives et éléments de réflexion d'un point de vue didactique<br>I Exemples de différentes stratégies de formation (R. Douady et A. robert)<br>II Questions sur la formation, sur l'observation en formation (A. Robert)<br>III Questions sur la formation en didactique des mathématiques (M. Artigue, M. Henry, D. Butlen) | | 21F | 160 gr |
| 6 | Une séquence d'enseignement au lycée :<br>Les angles en seconde | C. Jeulin<br>D. Sperandio<br>R. Proteau | 13F | 90 gr |
| 7 | L'isogonologie<br>Un exemple de l'utilisation de l'algèbre linéaire en géométrie. | F. Rideau | 14F | 90 gr |
| 8 | Quelle didactique des mathématiques en formation des maîtres : quelques questions posées par des expériences d'enseignement en formation initiale et continue d'instituteurs, des professeurs de collèges et de lycées. | D. Butlen<br>J. Bolon | 27F | 220 gr |
| 9 | Enseigner la didactique des mathématiques aux futurs professeurs d'école. | D. Butlen<br>M.L Peltier | 20F | 150 gr |
| 10 | IUFM - An 3<br>* une réflexion sur la formation des PLC2<br>* une analyse des modules communs mathématiques à l'IUFM de Versailles | A. Robert | 21F | 140 gr |



| N° | Titre | Auteurs | Prix | Poids |
|---|---|---|---|---|
| 11 | IUFM - An 3<br>Diversités et points communs des formations des PLC2 en mathématiques en IUFM - comparaison sur 18 IUFM<br>L'avis des stagiaires (une enquête auprès de néo-certifiés et certifiés de l'an 1) | J. Penninckx | 26F | 190 gr |
| 12 | IUFM - An 3<br>L'observation de classes<br>Réflexion sur la formation à l'observation de classes des stagiaires PLC2 de Mathématiques à l'IUFM de Rouen | E. Hébert<br>P. Tavignot | 26F | 180 gr |
| 13 | IUFM Rouen<br>Maths 2ème année<br>Evaluation 1993/94 | J. Borréani<br>E. Hébert<br>G. Le Hir<br>C. Castela<br>P. Tavignot | 24F | 190 gr |
| 14 | Professeurs de mathématiques de collège et lycée : formation professionnelle initiale, ou comment désaltérer qui n'a pas soif ? | A. Robert | 22F | 156 gr |
| 15 | La formation professionnelle initiale des futurs enseignants de mathématiques : exemples de séances organisées à l'IUFM pour les stagiaires de deuxième année (PLC2) | D. Dumortier,<br>M. Lattuati<br>M. Ponticq,<br>C. Perdon,<br>J. Poirier,<br>A. Robert,<br>C. Robert,<br>et E. Roditi | 30F | 200 gr |
| 16 | Formation professionnelle initiale en mathématiques :<br>Tuteurs et stagiaires en collège et lycée | M.C. Audouin | 21F | 140 gr |
| 17 | La racine carrée en troisième<br>Etude d'une activité | E. Roditi | 20F | 140 gr |

## BROCHURE THEMATIQUE

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | Revue de documents à propos des calculatrices dans l'enseignement mathématique au collège et au lycée (IUFM Grenoble mathématiques) | 14F | 90 gr |
| 2 | Publications IREM. APMEP. ESM ... Sur l'enseignement des probabilités et des statistiques au collège et au lycée | 16F | 110 gr |
| 3 | Sommaires des bulletins de liaison des IREM | 36F | 290 gr |
| 4 | Répertoire des thèses autour de la didactique des mathématiques | 16F | 110 gr |
| 5 | Informations générales sur le CAPES et l'AGREGATION de mathématiques | 49F | 480 gr |

## DIVERS

| | | | |
|---|---|---|---|
| Questionnaires de travail | E. Saltiel<br>L. Viennot | 29F | 310 gr |
| Systèmes différentiels Etude graphique<br>Ed. Cedic | M. Artigue<br>V. Gautheron | 50F | 360 gr |
| Mécanique et énergie pour débutants | L. Viennot | 40F | 330 gr |
| Les cinq polyèdres réguliers de $R^3$ et leurs groupes | J.M Arnaudiès | 34F | 270 gr |
| Le calcul des variations | M. Gréhant | 21F | 150 gr |
| Rapporteurs (plastique) | | 6F | |



## Le groupe M : A.T.H
## (Mathématiques : Approche par les Textes Historiques)

vous propose :

1. La revue **Mnémosyne** pour échanger expériences et réflexion à propos de l'histoire et de l'enseignement des mathématiques.

Vous trouverez dans Mnémosyne

- Un article de réflexion sur un thème ou un moment de l'histoire des mathématiques. Les numéros reprennent, entre autres, les exposés du séminaire animé par Jean Luc Verley et du séminaire de l'Union des professeurs de Spéciales, animé par Michel Serfati.

- De "bonnes vieilles pages", extraits d'ouvrages anciens peu répandus, des textes inédits ou difficiles à trouver, des traductions inédites...

- "Les contes du Lundi", qui donneront un aperçu des exposés et des échanges qui ont lieu lors de réunions du groupe M : A.T.H, ouvertes à tous, rassemblant de façon régulière, un lundi par mois à l'IREM, une quinzaine d'enseignants partageant notre passion.

- Des exemples d'activités avec les élèves, des documents divers pour les classes.
- Des comptes rendus de lectures, de conférences...
- Un calendrier des diverses rencontres et manifestations parisiennes et nationales sur l'histoire des mathématiques.

| | | |
|---|---|---|
| numéro 1 :<br>La démonstration par exhaustion chez les grecs et les arabes | 26F | 200 gr |
| numéro 2 :<br>La querelle entre Descartes et fermat | 30F | 210 gr |
| numéro 3 :<br>Fragments d'une étude des systèmes linéaires | 30F | 220 gr |
| numéro 4-5 :<br>L'élaboration du calcul des variations et ses applications à la dynamique | 40F | 300 gr |
| numéro 6 :<br>Leibniz et l'Ecole continentale | 30F | 220 gr |
| numéro 7 :<br>Autour du théorème de Fermat. C. Goldstein | 33F | 230 gr |
| numéro 8 :<br>Isaac Newton. Détermination de tangentes à des courbes à l'aide de la méthode de fluxions | 33F | 250 gr |
| numéro 9 :<br>Desargues et Pappus. R. Tossut | 33F | 240 gr |
| numéro 10 :<br>Le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries<br>Anne Michel Pajus | 33F | 260 gr |

numéro 11 :
Des cartes-portulants à la formule d'Eward Wright :
l'histoire des cartes à "rumbs"
Marie-Thérèse Gambin — 33F — 255 gr

numéro 12 :
Histoire de quelques projections cartographiques
Marie Benedittini — 33F — 255 gr

numéro 13 :
Histoire et origine du calcul différentiel — 33F — 210 gr

numéro 14 :
La méthode des pesées chez Archimède
Michèle Bathier-Fauvet — 33F — 214 gr

**Mnémosyne** : Numéro spécial
N° 1 : Histoires de Pyramides (M. Grégoire) — 46F — 380 gr



## 2. Les brochures (déjà citées en 1ère page)

n° 61 : Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 1 -....... 50 F 450 gr

n° 79 : Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 2 - ....... 60 F 530 gr

## 3. La Reproduction de textes anciens

(Ancienne série) :

I Disme (Simon Stevin)........ 14 F 80 gr

II Géométrie élémentaire (Félix Klein)........ 25F 180 gr

III Dictionnaire Mathématiques (1er fascicule) (M. Ozanam)........ 31F 250 gr

IV Dictionnaire Mathématique (2ème fascicule) (M. Ozanam)........ 32F 250 gr

(Nouvelle série) :

N° 1 : Histoire des recherches sur la quadrature du cercle
(J.E Montucla)........ 38F 340 gr

N° 2 : Elémens du calcul des probabilités
(Marquis de Condorcet)........ 28F 240 gr

N° 3 : Traité des Indivisibles
(Gilles-Personne de Roberval)........ 32F 270 gr

N° 4 : Les Porismes d'Euclide
(Michel Chasles)........ 35F 300 gr

N° 5 : Sur la théorie des Ensembles
(Georg Cantor)........ 52F 450 gr

N° 6 : Traité des sections coniques
(M. de La Chapelle)........ 42F 450 gr

N° 7 : Traité élémentaire de calcul des probabilités
(S-F Lacroix)........ 37F 300 gr

N° 8 : Elémens d'algèbre
Alexis-Claude Clairaut........ 41F 350 gr

N° 9 : Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal
Jean-Frédéric Frénet........ 44F 384 gr

N° 10 Problèmes pour les arpenteurs
Lorenzo Mascheroni........ 21F 156 gr

N° 11 Méthode des moindres carrés
Carl-Friedrich Gauss........ 36F 295 gr

N° 12 Traité du calcul différentiel et du calcul intégral
Sylvestre-François Lacroix........ 70 F 600 gr

N° 13 Géométrie ou de la mesure de l'étendue........ 52 F 395 gr

## COPIRELEM

| | | |
|---|---|---|
| Actes du XVIIème colloque des Professeurs d'Ecole Normale (Paris - Mai 1990) | 61F | 650 gr |
| Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome I) | 56F | 470 gr |
| Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome II) | 55F | 630 gr |
| Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome III) | 45F | 360 gr |
| Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome IV) | 67F | 612 gr |
| Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome V) | 68F | 538 gr |
| Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome VI) | 96F | 870 gr |
| Second concours interne de recrutement des professeurs d'école<br>Choix de sujets 92-93-94-95<br>Les sujets du concours 1996<br>19 académies | 61F | 500 gr |
| Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole Mathématiques.<br>Annales 97 (21 sujets et leurs corrigés) | 60 F<br>80 F port compris | 810 gr |
| Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole Mathématiques.<br>Annales 98 (21 sujets et leurs corrigés) | 110 F<br>131 F port compris | 810 gr |
| Actes : XXIVEME colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres | 70 F | 610 gr |



## BROCHURES INTER-I.R.E.M

| | | |
|---|---|---|
| N° 3 : Quelles activités pour quel apprentissage | 42F | 450 gr |
| Actes du colloque Inter-IREM Histoire et épistemologie des mathématiques | 33F | 610 gr |
| Budapest : Pour une perspective historique dans l'enseignement des Mathématiques | 65F | 440 gr |
| Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A - Première Année Principes et réalisations | 99F | 850 gr |
| Quelques supports pour des activités dans le cadre des enseignements modulaires en seconde (Réseau national des I.R.E.M) | 24F | 180 gr |
| Catalogue des publications des IREM de 1988 à 1991 | 50F | 280 gr |
| Catalogue des publications des IREM de 1991 à 1994 | 40F | 500 gr |
| Histoire d'infini (Actes du 9ème colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques) (Landerneau, 22-23 mai 1992) | 160F | 790 gr |
| Apports de l'outil informatique à l'enseignement de la géométrie | 60F | 365 gr |
| L'Enseignement des Mathématiques : des Repères entre Savoirs, Programmes et Pratiques | 60F | 410 gr |
| Actes du colloque Inter-IREM de géométrie Limoges, les 11, 12 et 13 juin 1992 | 80F | 800 gr |
| Enseigner les probabilités au lycée<br>Commission Inter-IREM Statistiques et probabilités | 100 F | 788 gr |

## BULLETINS INTER-I.R.E.M

| | | |
|---|---|---|
| N° 21 : Rétroprojecteur | 1OF | 190 gr |
| N° 24 : Astronomie | 2OF | 340 gr |
| Suivi scientifique 85-8 6 (6ème) | 45F | 400 gr |
| Suivi scientifique 86-87 (5ème) | 50F | 390 gr |
| Suivi scientifique 87-88 (4ème) | 60F | 530 gr |
| Suivi scientifique 88-89 (3ème) | 60F | 590 gr |

| | | |
|---|---|---|
| Activités en Première | 35F | 310 gr |
| Images et Maths | 47F | 410 gr |
| Liaison collège-seconde (1989-1990) | 50F | 250 gr |
| Des chiffres et des lettres au collège 1991/92 | 50F | 360 gr |
| Maths en seconde : énoncés et scénarios | 50F | 330 gr |
| Module en seconde | 25F | 150 gr |
| Autour de Thalès | 60F | 350 gr |
| Des Mathématiques en sixième | 50F | 262 gr |



## THESES

| | | |
|---|---|---|
| Aline Robert :<br>L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur.<br>Divers articles de Mathématiques | 1O0F | 1410 gr |
| Jacqueline Robinet :<br>Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur | 70F | 770 gr |
| Michèle Artigue :<br>Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques<br>(en réd.) | 68F<br>37F | 780 gr<br>400 gr |
| Régine Douady :<br>Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques<br>- Une réalisation dans tout le cursus primaire | 120F | 690 gr |
| Denis Butlen :<br>Apport de l'ordinateur à l'apprentissage des écritures multiplicatives au cours élémentaire | 40F | 330 gr |
| Monique Pezard :<br>Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs | 50F | 460 gr |
| Françoise Tréhard :<br>Logiciels pouvant impliquer des activités mathématiques à l'école élémentaire : typologie et enjeux didactiques | 60F | 690 gr |
| Bernard Parzysz :<br>Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir /savoir | 90F | 850 gr |
| Isabelle Tenaud :<br>Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes | 130F | 1300 gr |
| Marie-Jeanne Perrin-Glorian :<br>Aires de surfaces planes et nombres décimaux.<br>Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème | 160F | 1390 gr |
| Antoine Dagher :<br>Environnement Informatique et apprentissage de l'articulation entre registres graphique et algébrique de représentation des fonctions | 88F | 970 gr |
| Alain Kuzniak :<br>Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré | 98F | 920 gr |
| Maha Abboud Blanchard<br>L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire des mathématiques : symptômes d'un malaise.<br>Un exemple : l'enseignement de la symétrie orthogonale au collège | 96F | 890 gr |
| Catherine Houdement<br>Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies | 102F | 930 gr |

| | | |
|---|---|---|
| Christiane Larere<br>Construction et appropriation de connaissances mathématiques par trois enfants infirmes moteurs cérébraux handicapés de la parole | 80F | 720 gr |
| Marie-Lise Peltier Barbier<br>La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école :<br>"entre conjoncture et éternité"<br>Etude des sujets de concours de recrutement et contribution à la recherche des effets de la formation sur les professeurs stagiaires | 100F | 924 gr |
| Brigitte Grugeon<br>Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement :<br>BEP et Première G | 189F | 1600 gr |
| Jeanne Bolon<br>Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ?<br>Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège | 94F | 834 gr |
| Marie-françoise Jozeau<br>Géodésie au XIXème Siècle<br>De l'hégémonie française à l'hégémonie allemande<br>Regards belges<br>Compensation et méthode des moindres carrés | 162F | 1648 gr |
| Marlène Alves Dias<br>Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire | 148F | 1322 gr |

TITRE : Modules, T.D en seconde

AUTEURS : Th. Antoine, A. Beaumont, M. Mathiaud

DATE : Septembre 94

RESUME :

Séquences de travail pouvant être effectuées tantôt en modules, tantôt en T.D. Leur organisation et leur place par rapport au cours.

MOTS-CLES :

Mathématiques
Seconde
Modules
T.D

Editeur : IREM
Directeur Responsable de la publication : R. DOUADY
Dépôt légal : Septembre 1994
ISBN : 2-86612-070-1
IREM Université Paris 7 Denis Diderot
Tour 56/55 - 3ème étage, Case 7018
2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05