

Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 6



DE LA CHAPELLE

Traité des sections coniques
et
autres courbes anciennes

UNIVERSITE PARIS VII
DENIS DIDEROT

L' abbé de LACHAPELLE:

né à Rouen vers 1710; mort à Paris en 1792, l'abbé de LACHAPELLE fut censeur royal, membre des Académies de Lyon et de Rouen, et de la Société Royale de Londres. Il collabora à l'Encyclopédie.

Les quelques renseignements que nous avons sur lui nous incitent à le considérer comme un personnage curieux, intéressé par des sujets très variés et originaux.

Dans la Biographie Universelle ou Dictionnaire de gens de lettres éditée en 1841 il est cité comme un littéraire et dont les "*ouvrages les plus remarquables sont :*

-*Discours sur l'étude des mathématiques* (Paris 1743)

-*Le ventriloque ou l'Engastrimythe* (Londres - Paris 1772)

-*Le traité sur la construction du scaphandre ou le bateau de l'Homme* (Paris 1774)". Il ne restait donc plus guère de traces du mathématicien qu'il avait été.

Au XXème siècle son nom a déserté bon nombre de dictionnaires et biographies, ouvrages de référence tant généraux que scientifiques. Cependant il ne fut pas seulement un inventeur original. Il eut le souci de diffuser largement les connaissances mathématiques. Dans la revue d'Histoire des Sciences tome V (1952) Jean ITARD a publié "*les opinions de l'Abbé de la Chapelle sur l'enseignement des mathématiques*"⁽¹⁾ afin d'illustrer de manière concrète comment fut pensé ce problème de l'enseignement des mathématiques au XVIIIème siècle et c'est, principalement à partir de ce texte, que la présente introduction est réalisée.

Les ouvrages de mathématiques de notre auteur ont récolté un jugement favorable lors de leur parution puis sont tombés dans l'oubli. LEBLOND (le "maître de mathématiques des Enfants de France", dont le duc de Bourgogne frère aîné de Louis XVI) qui rédigea les articles de Stratégie de l'Encyclopédie, juge très bon le "*Traité des sections coniques*". Ce dernier traité, ainsi que les "*Institutions de Géométrie*" publiées quatre années avant, contribuèrent vraisemblablement à permettre à un large public l'accès à cette science. De plus ses idées sur l'éducation, plus particulièrement à propos de l'étude des mathématiques, s'inscrivent dans le long débat commencé au siècle précédant avec "*les MM de Port-Royal dans leur Logique, puis dans leur Géométrie*".⁽¹⁾

Son souci d'aller toujours de la théorie à la pratique est exprimé dans la préface du Traité des sections coniques. "*Dans les Livres qui servent à l'éducation, on ne trouve presque rien d'appliqué directement aux arts ..., ils ne contiennent que de la Théorie pure. Les jeunes gens, rebutés par les difficultés, la sécheresse et la stérilité apparente de cette étude y renoncent ; ... et ne soupçonnent pas ... le peu d'adresse des Auteurs, ils se croient incapables tandis qu'ils ne sont que mal conduits.... Mon sujet s'est présenté à moi sous trois points de vue, qui me paroissent se donner mutuellement secours, la Théorie des Courbes, leurs usages dans les Arts, l'Histoire de leur origine et de leur progrès. la théorie en sera la lumière, l'usage le fruit, et l'Histoire le délassement.*

C'est élever plus haut les sciences que de travailler à leur propagation."

C'est pourquoi il a construit son ouvrage de telle sorte qu'il soit accessible à tous : tant à ceux qui se destinent à *"l'étude de la haute géométrie"* qu'à ceux qui en font usage en physique.

En ce qui concerne sa participation à l'histoire de l'enseignement, LACHAPELLE veut justifier la thèse suivante : la géométrie et son enchaînement de propositions est à la portée d'un jeune enfant, thèse développée dans le *"Discours sur l'étude des mathématiques"*.

"L'organe de la vue vient presque toujours au secours en Géométrie : il s'y agit, au moins, aussi souvent de voir, que de se ressouvenir. On est un peu trop prévenu, que cette science ne combine que des idées abstraites.

Cependant nous sommes naturellement portés à compter et à mesurer : le seul instinct nous mène là. Des enfants prennent-ils la largeur d'un chemin? La perpendiculaire est la ligne qu'ils cherchent; (ils n'en savent pas le nom, mais le nom ne fait rien aux idées.)...Ils font de la Géométrie sans le savoir.

Nous ne croyons pas dégrader cette science, en disant qu'elle ne nous présente d'abord que des idées sensibles; elle est assez relevée par sa certitude et par son utilité: elle peut donc prendre facilement sur des esprits qui ne font encore usage que de leurs organes.....

L'important à l'égard des enfants, est d'exciter leur attention. De la matière, des figures, du mouvement rien n'est plus propre à cet effet. Ils tiennent continuellement à ces choses et ils veulent y tenir."

Mais LACHAPELLE, ainsi que nous l'annoncions au début, eut, en dehors des mathématiques et de leur enseignement, d'autres centres d'intérêt : cela mérite notre attention.

"Le Ventriloque" est une tentative d'explication rationnelle de phénomènes rapportés par l'histoire: "L'auteur s'attache d'abord à prouver que les oracles et plusieurs faits merveilleux, qui n'avaient point été expliqués jusqu'alors, peuvent l'être au moyen de l'engastrimysme^(*)....Il établit ensuite que les ventriloques doivent la faculté dont il s'agit à une extrême mobilité des organes de la parole, accrue par de nombreux exercices..... *Cet ouvrage curieux est encore le plus complet que nous ayons sur cette matière, quoique les ventriloques soient devenus beaucoup plus communs de nos jours.*⁽²⁾

Quant à l'invention d'un vêtement insubmersible, elle fut essayée par son constructeur en personne sur la Seine, au quai de la Rapée, en 1767. Ce scaphandre était conçu en liège et permettait à l'homme de marcher horizontalement sur un fleuve, remonter contre un courant ... L'Académie des sciences envisagea que, dans certaines circonstances, il était possible de s'en servir utilement. MONTUCLA⁽³⁾ également souligna l'intérêt de cette invention non seulement à des fins militaires mais aussi dans les naufrages. *" Il est presque superflu d'observer en combien de cas cette invention seroit utile tant sur la terre que sur mer."* et le Traité sur la construction du scaphandre

^(*)signifie ventriloquie

s'achève sur l'analyse des différents ouvrages publiés sur l'art de nager!

Pour conclure retenons de ce personnage original que ce sont ses prises de positions dans son "*Discours*" quant au rôle joué par les mathématiques en matière d'éducation qui, si elles soulèverent bien des débats dans la presse savante et justifièrent une "*Suite au Discours*", témoignent des préoccupations pédagogiques de cette période lesquelles accompagneront toujours le développement des connaissances.

"Nous croyons seulement, que de toutes les sciences qui concourent à perfectionner l'éducation, les mathématiques ont droit au privilège d'être particulièrement cultivées ;leurs principes sont sous nos yeux, et sous nos mains :des corps, un compas, une règle. Un enfant peut agir ici comme un homme fait ; au lieu que les autres sciences demandent, pour être raisonnablement entendues, une suite d'expériences, qu'il n'est possible d'acquérir qu'après le tems de l'éducation." (fin du Discours).

De son oeuvre nous connaissons:

- 1) Discours sur l'étude des mathématiques, où l'on essaie d'établir que les enfants sont capables de s'y appliquer. Paris (1743)
- 2) Les institutions de géométrie (2 volumes) publiées en 1746 (4ème édition en 1764 laquelle est précédée du Discours et d'une Suite au Discours.)
- 3) Traité des sections coniques et autres courbes anciennes appliquées et applicables à la pratique des différents arts. (1750).
- 4) L'art de communiquer ses idées (1765). C'est un plan d'éducation composé en 1751, à l'occasion de l'établissement de l'École royale militaire; mais en le publiant en 1763 l'auteur y ajouta des notes critiques.
- 5) Le Ventriloque ou l'Engastrimythe. Paris (1772)
- 6) Traité de la construction du scaphandre ou le bateau de l'Homme. Paris (1774)

L'ouvrage qui fait l'objet de la présente brochure se présente ainsi :

Théorie pour chaque courbe dont seules les propriétés nécessaires sont démontrées
" tout ce qui est trop difficile, ou éloigné de sujet est supprimé " immédiatement suivie d'applications concrètes.

La parabole et son usage dans le jet de bombes et dans la configuration d'un porte-voix.

L'ellipse et son usage dans la construction de "verres brulants" et de lunettes.

L'Hyperbole et son usage pour la construction des verres " ardents" et de lunettes,
mais aussi pour la trisection de l'angle et la duplication du cube.

La cisoïde : son historique.

La conchoïde et son usage pour la duplication du cube.

La quadratrice et la spirale.

La cycloïde, son usage dans la construction d'horloges, dans la marine
ainsi que l'historique de cette courbe.

Michèle LACOMBE

(1) Essais d'histoire des mathématiques de J. Itard, réunis et introduits par Rashed. ed. Blanchard 1984

(2) D'après la Biographie universelle, ancienne et moderne, publiée par Michaud. Paris 1813

(3) Tome II page 40 des "Récréations mathématiques" d' Ozanam. édition de 1778

T R A I T É
D E S
S E C T I O N S C O N I Q U E S ,
E T
A U T R E S C O U R B E S A N C I E N N E S ,

*Appliquées ou applicables à la Pratique de différens Arts ;
tels que l'Artillerie, l'Architecture, la Construction des
Miroirs ardens, des Télescopes, des Lunettes, des Porte-
voix, des Échos, des Cornets acoustiques, ou des Instrumens
qui servent à corriger les défauts de l'Ouïe. &c.*

*Avec un petit Traité de la Cycloïde, où l'on fait voir comment
cette Courbe a contribué à perfectionner les Horloges à
Pendule.*

*Le tout enrichi de Notes ou de Dissertations Historiques &
Critiques sur l'origine & le progrès des Sciences & des
Arts, qui sont entrés dans le Plan de cet Ouvrage.*

Par M. DE LA CHAPELLE, Censeur Royal, & Membre
de la Société Royale de Londres.



A P A R I S ,

CHEZ J. F. QUILLAU, Fils, Libraire, rue Saint Jacques,
vis-à-vis celle des Mathurins, aux Armes de l'Université.

M. D. C C. L.

Avec Approbation & Privilège du Roy.



A MONSEIGNEUR
LE RECTEUR
ET
A L'UNIVERSITÉ
DE PARIS.



MONSEIGNEUR & MESSIEURS,

*On oſoit à peine, il n'y a guères plus de
vingt-cinq ans, dicter quelques Propositions
de Géométrie dans les Leçons publiques,*
a ij

dont Messieurs les Professeurs de Philosophie sont chargés. Le nom seul de l'Algèbre causoit de l'étonnement, & cette Science étoit presque regardée comme inaccessible à l'esprit humain.

Votre courage, MESSIEURS, en a inspiré au Public. Il sçait aujourd'hui par vos soins, que l'Algèbre & la Géométrie sont deux Sciences, où règne la raison sans mélange d'erreur. On n'y voit, à l'entrée ni sur leur route, aucune des causes qui ont coutume d'en corrompre la pureté. Jamais on n'y entend parler de soupçons, de vrai-semblances, de craintes, de respect humain, de préjugés, de superstition.

Ce privilège, qui les rend déjà si recommandables, n'est pas le seul qui ait attiré votre attention. Les hommes en société augmentent leur bonheur, ou se soulagent dans leurs peines, en se communiquant réciproquement leur industrie. L'étendue de vos con-

tilité s'annonce par le Frontispice, vous a paru propre à y contribuer. Je l'ai entrepris par vos conseils ; je souhaite qu'il soit exécuté selon vos vûes. Ce sera un des meilleurs garans que je puisse avoir de l'approbation publique.

J'ai l'honneur d'être avec un très-profond respect,

MONSEIGNEUR & MESSIEURS,

Votre très-humble &
très-obéissant Serviteur.
LA CHAPELLE,

noissances vous a fait appercevoir, que de bons principes faisoient éclore cette industrie, hâtoient la pesante marche du tâtonnement, & faisoient naître, dans le court intervalle de quelques années, des ressources que l'expérience de plusieurs siècles n'avoit pas même fait soupçonner.

Convaincus que l'on en étoit principalement redevable à l'étude de l'Algèbre & de la Géométrie, vous l'avez introduite dans l'éducation publique ; & le succès en a été si rapide, que les Elémens de ces Sciences, qui consommoient autrefois la vie entière d'un homme, ne sont plus aujourd'hui chez vous que l'exercice de quelques mois.

Il vous faut à présent quelque chose de plus profond. Vous avez senti qu'il est de l'intérêt de la Société, & de votre gloire, de faire monter l'éducation, dans vos célèbres Ecoles, au niveau des plus hautes Sciences. Cet Ouvrage sur les Courbes, dont l'u-

a iij



TABLE DES MATIÈRES

Contenues dans ce Volume.

P R É F A C E , dont la lecture est absolument nécessaire.	Page xxxiiij.
Du calcul des Puissances par leurs Exposans.	1
Comment se fait la multiplication , ainsi que la division de ces Puissances dont les Exposans sont positifs. Ce que c'est qu'une Puissance dont l'Exposant est 0.	2
Comment un Exposant positif peut devenir négatif , & réciproquement un négatif devenir positif , sans changer la valeur de la Puissance. Comment l'on multiplie & l'on divise les Puissances à Exposans négatifs.	3 & 4
Comment on Élève une Puissance quelconque à un degré quelconque , dont l'Exposant est positif ou négatif.	4 & 5
Ce que c'est qu'une grandeur élevée à une Puissance négative.	6
Comment on peut , moyennant le calcul des Exposans , délivrer du signe Radical une grandeur quelconque , sans en changer la valeur.	7
Des Exposans fractionnés.	7 & 8

Du Calcul des Radicaux.

Ce que c'est qu'un Radical.	8
Dans quel cas une grandeur peut être délivrée , en tout ou en partie , du signe Radical , sans changer de valeur.	9 & 10
Comment une quantité peut devenir radicale , sans changer de valeur.	10

a iv

ij	T A B L E	
	<i>Ce que c'est qu'un incommensurable, une grandeur imaginaire, & pourquoi l'on admet des imaginaires dans le calcul.</i>	11 & 12
	<i>Comment les imaginaires peuvent devenir réelles, & en quoi elles diffèrent du zéro.</i>	12
	<i>Comment on réduit un Radical à sa plus simple expression, & comment une Fraction sous un signe Radical, peut être transformée en entier, sans changer la valeur de la quantité radicale.</i>	12 & 13
	<i>Pourquoi l'on peut transformer l'Exposant d'un Radical en un autre, sans changer la valeur de la quantité radicale. Et combien cela est commode, pour donner les mêmes Exposants à différents signes radicaux.</i>	14 & 15
	<i>Comment on peut découvrir, si des grandeurs incommensurables prises séparément, sont ou ne sont pas commensurables entre elles.</i>	15 & 16
	<i>De l'addition & de la soustraction des Radicaux.</i>	16 & 17
	<i>De la multiplication des Radicaux.</i>	17, 18, 19 & 20
	<i>De la division des Radicaux.</i>	21, 22, 23 & 24
	<i>Élever une grandeur radicale à une Puissance donnée quelconque, & de l'extraction des Racines des Radicaux.</i>	25 & 26
	<i>Comment on peut donner un seul signe radical à une grandeur, qui en auroit plusieurs, sans changer la valeur de cette quantité.</i>	26 & 27

De la Parabole.

	<i>Génération du Cône, & des Sections coniques. De l'ancienneté de ces Courbes, & des principaux Auteurs qui en ont écrit</i>	27 & 28
PROP. I. II. & III.	<i>Une Perpendiculaire sur un Plan, est nécessairement Perpendiculaire sur toutes les Lignes du Plan, menées par le pied de cette Perpendiculaire. Ainsi, d'un Point pris dans un Plan, on ne sauroit élever qu'une Perpendiculaire au-dessus de ce Plan. Il n'est pas possible non plus d'abaisser deux Perpendiculaires sur un Plan, d'un même Point pris au-dessus de ce Plan. C'est pourquoi la commune Section de deux Plans, Perpendiculaires sur un troisième Plan, est</i>	

iv T A B L E.

PROP.	<i>Une Parabole étant donnée, trouver un Diamètre qui fasse avec ses Ordonnées un Angle égal à un Angle oblique donné.</i>	49
PROP. XII.	<i>Les carrés des Ordonnées à un Diamètre quelconque d'une Parabole, sont entr'eux comme les Abcisses correspondantes.</i>	50
	<i>Ce que c'est que le Paramètre d'un Diamètre.</i>	51
	<i>Le quart d'une Ordonnée quelconque à un Diamètre est égal au Rectangle de l'Abcisse par le Paramètre de ce Diamètre.</i>	51
PROP.	<i>Une Ligne indéfinie, dont l'origine est déterminée, étant donnée pour le Diamètre d'une Parabole, ainsi que le Paramètre de ce Diamètre, décrire une Parabole, de manière que l'Angle des Ordonnées à ce Diamètre, soit égal à un Angle donné.</i>	52
PROP.	<i>préparatoire pour la Quadrature de la Parabole. Inscrive dans un Segment de Parabole, le plus grand Triangle possible.</i>	55
	<i>Le plus grand Triangle inscriptible à un Segment de Parabole, vaut toujours plus de la moitié du Segment où il peut être inscrit.</i>	56
	<i>Progression d'où l'on déduit la Quadrature de la Parabole, suivant la Méthode d'Archimède.</i>	57
	<i>Quadrature de cette Courbe.</i>	57 & 58
LEMME	<i>pour la Quadrature de la Parabole, par une Méthode générale & beaucoup plus simple que la précédente.</i>	58 & 59
	<i>Cette Quadrature est expliquée & démontrée.</i>	59, 60 & 61
	<i>Cubature du Paraboloides ou évaluation de sa solidité.</i>	61 & 62
PROP. XIV.	<i>Le quart du Paramètre d'un Diamètre quelconque, est égal au Paramètre de l'Axe, joint à l'Abcisse de l'Axe déterminée par l'Ordonnée, menée du Sommet de ce Diamètre.</i>	63
PROP. XV.	<i>Si le Sommet d'un Diamètre quelconque on tire une Tangente, & que l'on fasse l'Angle TMF = l'Angle TMO, le côté MF ira rencontrer l'Axe en un Point F, tel que MF = le quart du Paramètre de ce Diamètre.</i>	63 & 64
PROP. XVI.	<i>La distance du Point F au Sommet de l'Axe d'une Parabole, est égale au quart du Paramètre de l'Axe.</i>	65

DES MATIERES.

	<i>aussi perpendiculaire sur ce troisième Plan.</i>	29 & 30
	<i>Génération de la Parabole.</i>	30
PROP. IV.	<i>Les carrés des Ordonnées, dans la Parabole, sont entr'eux comme les Abcisses correspondantes.</i>	30, 31 & 32
	<i>Le Périmètre de la Parabole est une Courbe, qui s'éloigne toujours de plus en plus de son Axe.</i>	33 & 34
	<i>Ce que c'est que le Paramètre d'une Parabole, & comment on démontre que c'est une Ligne constante, qui se déduit des propriétés de cette Courbe.</i>	35 & 36
	<i>Le quart d'une Ordonnée quelconque à la Parabole, est toujours égal au Rectangle du Paramètre par l'Abcisse correspondante.</i>	36
PROP.	<i>Une Ligne étant donnée pour le Paramètre d'une Parabole, construire cette Courbe.</i>	38
PROP.	<i>Une Parabole étant donnée avec son Sommet, trouver son Axe, son Paramètre, l'Ordonnée & la double Ordonnée égale au Paramètre.</i>	40
PROP. V.	<i>Dans la Parabole, la sous-Tangente est toujours double de l'Abcisse correspondante.</i>	41
	<i>Toute corde parallèle à la Tangente d'une Parabole est coupée en deux parties égales par une Ligne, tirée du Point de contingence parallèlement à l'Axe de la Courbe.</i>	46
	<i>Mais cela ne sera pas, si cette corde n'est point parallèle. C'est pourquoi, quand une corde est coupée en deux parties égales par un Diamètre, elle est nécessairement parallèle à la Tangente au Sommet de ce Diamètre. Ainsi une Ligne, menée par le Sommet d'un Diamètre parallèlement à une des Ordonnées de ce Diamètre, est nécessairement Tangente à la Courbe.</i>	47
	<i>Une Ligne, menée par le milieu de deux cordes parallèles, est parallèle à l'Axe de la Courbe.</i>	48
PROP.	<i>Une Parabole étant donnée, trouver un de ses Diamètres, son Axe & son Sommet.</i>	48
PROP.	<i>Trouver le Diamètre qui passe par un Point donné d'une Parabole donnée, ainsi que la position des Ordonnées à ce Diamètre.</i>	49
PROP.	<i>Tirer une Tangente par un Point quelconque d'une Parabole donnée, sans avoir recours à son Axe.</i>	49

DES MATIERES.

PROP. XVII.	<i>Le Point F est un Foyer.</i>	65
	<i>Des rayons, émanés du Foyer d'une Parabole, sont réfléchis par la Courbe parallèlement à son Axe.</i>	66
PROP.	<i>Trouver le Foyer d'une Parabole donnée.</i>	66
	<i>Le Paramètre d'un Diamètre quelconque, est toujours quadruple de la distance du Sommet de ce Diamètre au Foyer de la Parabole. Ainsi le Foyer d'une Parabole étant donné, avec le Sommet de cette Courbe, on aura facilement le Paramètre d'un Diamètre quelconque.</i>	66
PROP.	<i>Le Foyer & l'Axe d'une Parabole étant donnés, tirer une Tangente en un Point quelconque de la Courbe.</i>	67
	<i>Si d'un Point de contingence l'on mène une Ligne au Foyer, cette Ligne sera égale à la distance du Foyer au Point où la Tangente rencontre l'Axe.</i>	67
	<i>Ce que c'est qu'un Rayon vecteur.</i>	67
	<i>Si aux Points M, m, où se trouve un corps qui se meut dans une Parabole, on tire des Tangentes; & que du Foyer on abaisse des Perpendiculaires sur ces Tangentes, ces Perpendiculaires, seront entr'elles comme les Racines carrées des Rayons vecteurs.</i>	67 & 68
	<i>Ce que c'est qu'une Directrice.</i>	68
	<i>L'Ordonnée au Foyer est égale à la moitié du Paramètre de l'Axe.</i>	68
	<i>La Perpendiculaire au Sommet de l'Axe est Tangente à la Parabole.</i>	69
PROP.	<i>Avec le Paramètre & la Directrice d'une Parabole, construire cette Courbe.</i>	69

Usage de la Parabole dans le Jet des Bombes.

	<i>Origine de cette Science.</i>	71
	<i>Loix du mouvement découvertes par Galilée. 1°. Les espaces, qu'un corps parcourt en tombant, suivent la progression Arithmétique des nombres impairs, 1, 3, 5, 7, &c. 2°. Les espaces parcourus sont entr'eux, comme les carrés des tems employés à les parcourir. Ainsi connaissant le tems de la chute d'un corps, on découvre la hauteur d'où il est tombé; & com-</i>	

- moissant la hauteur de la chute, on en découvre le tems. 3°. Les vitesses acquises sont comme les tems employés à parcourir des espaces. 4°. Les espaces sont comme les quarrés des vitesses acquises à la fin de ces espaces; & les vitesses acquises sont entr'elles, comme les Racines quarrées des espaces. 5°. Un corps mù uniformément avec la vitesse acquise à la fin du premier instant de sa chute, parcourt dans un tems égal au premier un espace double du premier. 6°. Un corps repoussé en haut perpendiculairement à l'horison avec la vitesse acquise à la fin de sa chute, doit nécessairement, dans un tems égal à celui de sa chute, remonter au même Point d'où il a commencé à descendre. 72, 73, 74, 75, 76 & 77
- Un corps jetté obliquement à l'horison, & abandonné à lui-même, décrit une Parabole, en supposant qu'il n'éprouve aucun obstacle. 77
- PROB. De quelle hauteur doit tomber un mobile, pour avoir à la fin de sa chute une force, qui lui fasse parcourir uniformément un espace, dans le même tems que sa pesanteur lui fait parcourir une hauteur verticale connue? 79
- Ce que c'est que la Ligne de hauteur. 82
- Ce que l'on entend par l'Amplitude d'une Parabole. 83
- Ce que c'est que l'Amplitude d'une Parabole au niveau de la Batterie, ainsi qu'un Angle d'élévation. 85 & 86
- PROP. très-essentielle. Les étendues de différens jets au niveau d'une Batterie, ou autrement, les Amplitudes de deux Paraboles, décrites par un mobile, chassé avec une même force, suivant des directions obliques à l'horison, sont entr'elles comme les Sinus du double des Angles d'élévation. 86
- Ainsi le plus grand de tous les jets est à l'élévation de 45 degrés; & c'est alors que l'on tire à toute volée. 86 & 87
- Les Amplitudes sont égales, quand le mobile est jetté sous des Angles d'élévation également éloignés de 45 degrés. L'un ou l'autre de ces Angles n'est pourtant pas indifférent dans la Pratique. 87
- La portée sous l'Angle de 15 degrés, est égale à la moitié de la plus grande Amplitude. Importance de cette vérité dans le calcul des Tables pour le jet des Bombes. 88

Manière de construire artificiellement un Conoïde, ou un solide quelconque convexe ou concave. Combien doivent être suspendues les machines dont on se sert, pour décrire les Courbes par un mouvement continu. 112, 113

Usage de la Parabole dans la construction des Porte-voix.

- Ce que c'est qu'un Porte-voix. Principes d'expérience pour sa construction. 113, 114
- Le Porte-voix de forme cylindrique, ou conique, ainsi qu'on le construit communément, n'est pas aussi parfait qu'il pourroit l'être. 115
- La construction en forme de cône est préférable à la cylindrique; mais la parabolique paroît être la plus avantageuse. 116

Dissertation sur la découverte du Porte-voix.

- Son invention est fort ancienne. Le P. Kircher, Jésuite, paroît être le premier en Europe, qui l'a retrouvé. Plagiat du Chevalier Morland, Anglois. 117, 118 & 119
- Usage de la Parabole dans la construction des instrumens acoustiques, ou des cornets propres à corriger les défauts de l'ouïe. 119
- Usage de la Parabole dans la construction des miroirs brûlans par réflexion. 120
- Comment on peut convertir un Foyer en Ligne brûlante, & pourquoi l'on a soutenu qu'avec des miroirs Paraboliques, on pourroit porter l'incendie à une distance quelconque. 121 & 122
- Lanterne parabolique, avec laquelle on peut lire des petits caractères à une très-grande distance. 122 & 123
- Les jambages des cheminées devraient être construits paraboliquement. Les appartemens en seroient beaucoup mieux échauffés. Moyen simple de perfectionner cette commodité. 124

- La Ligne de hauteur est toujours la moitié de la plus grande portée; & une bombe ne sauroit s'élever plus haut que la Ligne de hauteur. 89
- Les Sommets de toutes les Paraboles, décrites par un mobile avec une même force, suivant toutes les inclinaisons possibles, se trouvent dans une Ellipse, dont le grand Axe, égal à la plus grande portée, est double du petit. 90
- Ce que l'on entend par un coup de volée, & une portée de but en blanc. 91
- La portée de but en blanc d'un mobile, est égale au double de la moyenne proportionnelle géométrique entre la Ligne de hauteur, & la distance du mobile à l'horison. 91
- Comparaison de la Synthèse à l'Analyse. 92
- Pratique du jet des bombes. 1°. Trouver l'Amplitude d'un jet dont l'étendue est au niveau des Batteries, & l'Angle d'élévation donné. 2°. Trouver l'Angle d'élévation, que l'on doit donner à un Mortier, pour chasser une bombe à une distance déterminée. 3°. Déterminer la distance ou la pièce doit porter son boulet, quand on la tire de but en blanc, étant à une hauteur connue au-dessus du niveau de la campagne. 4°. Trouver le Point dans lequel une bombe rencontrera un Plan incliné au-dessus ou au-dessous de l'horison, la pièce étant tirée sous un Angle donné. 5°. Déterminer l'Angle d'élévation nécessaire, pour que la bombe passe par un Point déterminé sur un Plan, incliné au-dessus ou au-dessous de l'horison. 94, 95, 96, 97, 98
- PROB. L'Amplitude d'une Parabole étant donnée, avec l'Angle d'élévation de son mortier, trouver la plus grande hauteur, à laquelle la bombe doit s'élever. 102
- PROB. Quel doit être l'Angle d'élévation d'un mortier, pour qu'une bombe s'élève à une hauteur donnée? 103
- PROB. Comment peut-on donner à un mortier une inclinaison déterminée? 103
- Réponse aux objections faites contre cette Théorie du jet des bombes. Expériences qui la confirment. 104, 105, 106, 107
- Usage de la Parabole, pour calculer l'excavation des Mines. Ce que c'est qu'une Mine. Combien M. de Vallière, actuellement Lieutenant-Général, a contribué à les perfectionner. 108, 109, 110, 111

- Expériences de Mrs Dufay & de Mairan sur deux miroirs brûlans paraboliques. 125
- Écho parabolique, qui semble tenir du prodige. 125 & 126
- Le miroir parabolique convexe a la propriété, comme le concave, de rendre parallèles des rayons de lumière. 127
- Usage de la Parabole pour la duplication du Cube. 127

De l'Ellipse.

- PROP. I. Si une figure Curviligne est telle que les quarrés des Ordonnées, perpendiculaires sur une de ses cordes, soient toujours égaux aux produits des Segmens de cette corde, faits par ces perpendiculaires, cette figure est un Cercle. 129
- Ce que c'est qu'une Section anti-parallèle ou sous-contraire. 130
- PROP. II. Si on coupe un cône scalène anti-parallèlement à sa Base, la surface qui en naîtra sera un Cercle. 130
- PROP. III. Mais, si le cône est coupé de manière que la Section ne soit ni parallèle ni anti-parallèle à sa Base, cette coupe ne sera pas un Cercle. 131
- Définition de l'Ellipse & de ses principales Lignes. 133
- PROP. IV. Dans une Ellipse, les quarrés des Ordonnées à l'Axe sont entr'eux comme les Rectangles des Segmens de cet Axe, correspondans à chaque Ordonnée. 133
- La converse de la proposition précédente est fautive. 134
- PROP. V. Le quarré d'une Ordonnée quelconque au grand Axe, est au Rectangle des Segmens correspondans de cet Axe, comme le quarré du petit Axe est au quarré du grand. 134
- Le quarré d'une Ordonnée au petit Axe, est au Rectangle des Segmens correspondans de cet Axe, comme le quarré du grand Axe est à celui du petit. 137
- Définition des Axes conjugués. 137
- Si les abscisses d'une Ellipse sont égales, les Ordonnées correspondantes le sont aussi. Et réciproquement l'égalité des Ordonnées fait celle des Abscisses correspondantes. 138
- Quoiqu'un cône soit plus grêle vers son Sommet que vers sa Base, l'Ellipse qui est une coupe de haut en bas de ce solide,

I **T A B L E**

<i>n'est pourtant pas plus grosse à son extrémité inférieure qu'à sa supérieure.</i>	139
Définition du Paramètre de l'Ellipse.	139
Pourquoi l'Ellipse a été ainsi appelée.	141
PROP. VI. Si des Foyers d'une Ellipse, l'on mène deux Lignes à un même Point du Périmètre de cette Courbe, leur somme sera toujours égale au grand Axe de la figure.	141
Comment on a la Tangente d'une Ellipse.	143
Comment on trouve que cette Courbe a des Foyers.	144
Si un Angle, formé par deux Lignes menées des Foyers de l'Ellipse à un même Point de son Périmètre, est coupé en deux parties égales par une Ligne, cette Ligne sera perpendiculaire à la Courbe, ou à sa Tangente en ce Point.	145
Proposition très-utile dans la Dioptrique.	145 & 146
Toute Tangente à l'Ellipse, en quelque Point différent des extrémités des Axes, est nécessairement déterminée à rencontrer le grand Axe.	147
L'Ordonnée à l'un des Foyers de l'Ellipse, est égale à la moitié du Paramètre du grand Axe.	147
Trouver la valeur de la sous-Tangente de l'Ellipse, par une méthode nouvelle & générale de mener les Tangentes des Courbes.	150
Pourquoi l'on peut se servir indifféremment du grand & du petit Axe de l'Ellipse, pour trouver la Tangente.	154
Quatre vérités nécessaires pour l'intelligence des Institutions Newtoniennes de M. Sigorgne. 154, 155, 156, 157, 158, 159	154, 155, 156, 157, 158, 159
PROP. Deux Lignes étant données pour les deux Axes d'une Ellipse, en trouver les Foyers & construire cette Courbe.	160
LEMME. Si l'on décrit un Cercle sur le grand Axe d'une Ellipse, les Ordonnées de l'Ellipse seront proportionnelles aux Ordonnées correspondantes du Cercle.	162
L'Aire d'une Ellipse est à la surface du Cercle décrit sur son grand Axe, comme le petit Axe de cette Courbe est à son grand Axe.	163
	Si

T A B L E

xij	
PROP. D'un Point donné au dehors d'une Ellipse, mener une Tangente à cette Courbe.	186
PROP. Trouver le rapport du Rectangle des Axes d'une Ellipse, au Parallélogramme de deux de ses Diamètres conjugués quelconques, circonscrit à cette Ellipse.	187

Usage de l'Ellipse dans la Dioptrique, ou dans la construction des verres brûlans par réfraction, & d'autres instrumens, tels que les Lunettes, qui servent à perfectionner la vue ou à en corriger les défauts.

Ce que c'est que la Dioptrique, & sa loi fondamentale. 188 & 189

Que M. Descartes est l'inventeur de cette Loi. 190

Comment les rayons de lumière sont déterminés, en traversant un Ellipsoïde de verre, à concourir au Foyer le plus éloigné. 191

Comment doit être construit un Ellipsoïde, pour avoir la vertu de réunir des rayons de lumière à l'un de ses Foyers, & pour en faire un excellent verre brûlant. 192

Ce qu'il faut faire pour construire une Ellipse, dont le grand Axe & la distance de ses Foyers soient dans le rapport de la réfraction. Précaution importante pour rendre plus parfait un verre brûlant Ellipsoïde. 193

Comment ce verre est propre à changer le Foyer des yeux naturels & très-utile à ceux qui ont la vue courte. 194 & 195

Éloge de la Dioptrique de M. Descartes. 195

Dissertation sur la découverte de la Loi de la Réfraction. 196

On a nié à M. Descartes qu'il en fut l'inventeur, & la gloire en a été attribuée à Willebrord Snellius. 197

Sur quels fondemens on a voulu dépouiller M. Descartes de cet honneur. 197 & 198

Examen & réfutation de ces fondemens. 198 & 199

D E S M A T I È R E S.

<i>l'on se peut servir d'un Cercle en raison donnée, par une Ligne tirée d'un point de sa surface, différent du centre, à sa circonférence, on pourroit aussi diviser l'Ellipse en raison donnée, par une Ligne menée de l'un de ses Foyers.</i>	164
Résolution de ce Problème très-simple & fort approché.	165
La surface d'une Ellipse est égale à celle d'un Cercle, dont le Diamètre est moyen proportionnel géométrique entre le grand Axe & le petit Axe.	166
Les Aires des Ellipses sont entr'elles, comme les produits de leurs Axes.	166
Ce que c'est qu'une Ellipsoïde.	166
Comment on en trouve la solidité.	167
Définition des Diamètres conjugués de l'Ellipse.	170
Ce qu'il faut faire pour les trouver, quand ils sont égaux.	171
Comment on détermine les deux Axes d'une Ellipse, quand on en a deux Diamètres conjugués inégaux.	174
PROP. XIII. Le Rectangle des Segmens d'un Diamètre quelconque, faits par une Ordonnée à ce Diamètre, est au carré de cette Ordonnée, comme le carré de ce même Diamètre est au carré de son conjugué.	175
Une corde quelconque Ordonnée à un Diamètre, ou Parallèle à la Tangente au Sommet de ce Diamètre, est coupée en deux parties égales par ce Diamètre.	178
Une Ligne qui joint les Points de milieu de deux cordes parallèles dans une Ellipse, est un Diamètre de cette Courbe.	179
Comment les propriétés, qui conviennent aux Axes conjugués, conviennent aussi à deux Diamètres conjugués quelconques.	181
Ce que c'est que le Paramètre de deux Diamètres conjugués.	183
PROP. Une Ellipse étant donnée, en trouver un Diamètre quelconque, le Centre, les Axes, les Foyers, les Diamètres conjugués égaux.	183 & 184
PROBL. Ayant un Diamètre quelconque d'une Ellipse, trouver la position des Ordonnées à ce Diamètre; tirer une Tangente à l'une ou l'autre de ses extrémités; & trouver son Diamètre conjugué.	185

D E S M A T I È R E S.

<i>Exposition de la découverte de Snellius comparée à celle de M. Descartes. L'une se déduit de l'autre très-facilement. Pourquoi on n'en peut rien conclure contre M. Descartes. Ce grand homme entièrement justifié.</i>	199, 200, 201, 202
Usage de l'Ellipse dans la construction du Porte-voix.	203
Comment l'Ellipse peut servir à rendre la lumière plus vive. Son utilité dans la construction des échos à voix basse. Explication de ces échos.	204 & 205
Usage de l'Ellipse dans la construction des cornets acoustiques. Et pourquoi ces cornets paroissent préférables aux Paraboliques.	205 & 206
Usage de l'Ellipse dans la construction & le calcul des voutes surbaissées.	206 & 207

De l'Hyperbole.

Génération de cette Courbe.	208
Dans l'Hyperbole les carrés des Ordonnées sont entr'eux, comme les Rectangles des Abscisses par l'Axe intercepté correspondant à ces Abscisses.	209
Le même Plan, qui engendre une Hyperbole dans un cône, en engendre une autre égale & semblable dans le cône opposé. Définition des Hyperboles opposées.	209 & 210
Comment on déduit le second Axe de l'Hyperbole, en vertu de sa principale propriété; & comment ce second Axe se trouve dans la Section d'un cône.	211 & 212
Pourquoi les Axes de l'Hyperbole sont appelés conjugués.	213
Dans l'Hyperbole, le Rectangle d'une Abscisse quelconque par son Axe intercepté, est au carré de l'Ordonnée correspondante, comme le carré du premier Axe est au carré du second.	214
Remarque sur la Section du cône parallèlement à son Axe.	214
Equation caractéristique de l'Hyperbole. Ce que c'est qu'une Hyperbole équilatère. Comment on la trouve dans le cône. Et dans quels cas la Section de ce solide fait les Axes égaux ou inégaux.	215 & 216
Pourquoi le second Axe de l'Hyperbole n'est pas à proprement parler un Axe.	217

Comment on détermine le second Axe d'une Hyperbole. 219 &

La différence de deux Lignes, menées d'un même Point de l'Hyperbole à son Foyer & à celui de son opposée, est toujours égale au premier Axe de cette Courbe. 222

Définition du Paramètre de l'Hyperbole. Il est toujours égal à la double Ordonnée au Foyer. Et la distance du Foyer d'une Hyperbole à son Sommet, est plus petite que le quart de ce Paramètre. 223

Le carré d'une Ordonnée quelconque au premier Axe d'une Hyperbole, est plus grand que le Rectangle de l'Abcisse correspondante par le Paramètre de ce premier Axe. 224

Pourquoi l'Hyperbole a été ainsi appelée. 225

Comment on trouve le Paramètre du second Axe. 225

Le carré d'une Ordonnée quelconque au second Axe, est plus grand que le Rectangle de l'Abcisse correspondante par le Paramètre de ce second Axe ; pourvu que l'Abcisse soit plus grande ou plus petite que la moitié du second Axe. 225

En tirant une Ligne dans l'Angle des Asymptotes parallèlement au second Axe, de manière qu'elle coupe l'Hyperbole, le Rectangle des deux parties de cette Ligne, faites par la rencontre de la Courbe, est égal au carré du second Axe. 226

La converse de cette Proposition est vraie. 227

Tous les Rectangles, formés des deux parties d'une Ligne quelconque, tirée dans l'Angle des Asymptotes parallèlement au second Axe, & coupée par la Courbe, sont égaux entr'eux. 228

L'Hyperbole s'approche continuellement de ses Asymptotes, sans pouvoir jamais les rencontrer, quand on les prolongeroit à l'infini. Et c'est proprement ce que signifie le mot Asymptote. 229

Comment on peut trouver les Asymptotes de l'Hyperbole dans le cône même. 230

Une Ligne tirée par le centre de l'Hyperbole, dans l'Angle de ses Asymptotes, coupe nécessairement cette Courbe, ou son opposée en quelque Point, & entre au-dedans de cette Courbe, sans la couper une seconde fois. 231

Ce que c'est qu'un premier Diamètre de l'Hyperbole, & com-

ment il est coupé en deux parties égales par le centre de cette Courbe. 231

Si par un Point quelconque de l'une des Asymptotes de l'Hyperbole, l'on tire dans l'Angle des Asymptotes, une Parallele à l'autre, cette Parallele coupera nécessairement la Courbe en un seul Point. 231 & 232

Par un Point quelconque d'une Hyperbole menant deux Lignes parallèlement aux Asymptotes, & terminées par ces Lignes, le Rectangle de ces deux Lignes sera toujours égal à la puissance de l'Hyperbole. 232

La converse de cette proposition est vraie. 232 & 233

La puissance de l'Hyperbole est égale à la quatrième partie de la somme des carrés des deux demi-Axes. 233

Le premier demi-Axe est égal à la Racine quarrée du double de la puissance de l'Hyperbole. 233

Si l'on tire, par un Point quelconque d'une Asymptote une Ligne coupant les branches de l'Hyperbole, ainsi que les Asymptotes ; les parties de cette Ligne, comprises entre une Asymptote & une branche de la Courbe la plus proche, sont égales. 233 & 234

La converse de cette proposition est vraie. 234

Comment on trouve la Tangente de l'Hyperbole. 235

Une Ligne terminée par les Asymptotes, & coupée en deux parties égales au Point, où elle rencontre l'Hyperbole, est nécessairement une Tangente. 235

La converse de cette proposition est vraie. 235

La Ligne menée au Sommet de l'Hyperbole, parallèlement au second Axe, est Tangente à la Courbe. 235

Ce que c'est qu'un second Diamètre conjugué, & comment il est coupé en deux parties égales. 236

Les Asymptotes d'une Hyperbole étant données avec un Point de cette Courbe, en trouver deux Diamètres conjugués. 237

Avec deux Diamètres conjugués déterminer les Asymptotes de l'Hyperbole. 237

Si une corde de l'Hyperbole est coupée en deux parties égales par un Diamètre, cette corde sera nécessairement parallèle à la Tangente, tirée par le Point où le Diamètre coupe la

b iij

Courbe. 238

Si deux cordes parallèles d'une Hyperbole, sont coupées en deux parties égales par une Ligne, cette Ligne prolongée passera nécessairement par le centre de la Courbe. 238

Ce que c'est qu'une Ordonnée à un Diamètre. 239

Tout premier Diamètre, différent de l'Axe, fait des Angles obliques avec ses Ordonnées. Ainsi l'Axe est le seul premier Diamètre, qui fasse des Angles droits avec ses Ordonnées. 239

Le carré d'une Ordonnée quelconque à un premier Diamètre, est au Rectangle du Diamètre intercepté par l'Abcisse correspondante, comme le carré du Diamètre parallèle à cette Ordonnée, est au carré du conjugué. 239

Les carrés des Ordonnées à un premier Diamètre, sont entr'eux comme les Rectangles des Diamètres interceptés par les Abcisses correspondantes. 240

Les propriétés & les équations de l'Hyperbole, par rapport à ses Axes & aux Paramètres de ces Axes, ne diffèrent des équations de la même Courbe, par rapport à deux de ses Diamètres conjugués quelconques, & aux Paramètres de ces Diamètres, qu'en ce que les Axes sont entr'eux des Angles droits, au lieu que les Diamètres conjugués sont entr'eux des Angles obliques. 241 & 242

Qu'elle est l'équation de l'Hyperbole équilatère. 243

Deux Tangentes à l'Hyperbole sont divisées par les Points de contingence, & par le Point où elles se coupent, de manière que les parties de l'une sont proportionnelles aux parties de l'autre. 244

Toute Tangente à l'Hyperbole rencontre un premier Diamètre quelconque de cette Courbe, en un Point au-dessous du centre, tel qu'il en résulte une Loi pour trouver la Tangente de l'Hyperbole. 244

Trouver cette loi par une nouvelle Méthode générale pour toutes les Courbes. 246

Combien cette dernière méthode est expéditive. Le petit nombre d'éléments qu'elle exige. 247 & 248

En quel sens on peut dire que les Asymptotes de l'Hyperbole, en

deviennent enfin des Tangentes. 249

Trois Propositions très-utiles pour l'intelligence des Institutions Newtoniennes de M. Sigorgne. 250, 251 & 252

Si d'un même Point de l'Hyperbole, on tire deux Lignes aux Foyers, & une Tangente à cette Courbe, l'Angle formé par ces deux Lignes sera coupé en deux également par la Tangente. 253 & 254

La converse de cette proposition est vraie. 254

Combien elle est utile pour trouver les Foyers de cette Courbe & de son opposée. 255

Proposition très-utile dans la Dioptrique, ou dans la construction des Lunettes. Sa converse ne l'est pas moins. 256 & 257

Si l'on tire, à deux Points quelconques d'une Hyperbole, deux Tangentes, & que de son Foyer on abaisse des Perpendiculaires sur ces Tangentes, elles croîtront moins, l'une par rapport à l'autre, que dans la raison des Racines quarrées des rayons vecteurs. 257

Proposition, dont M. Sigorgne fait usage dans ses Institutions Newtoniennes. 258

PROBL. Construire une Hyperbole & son opposée, de manière que la distance de ses Foyers soit à son Axe transverse en raison donnée. 259

Construire des Hyperboles avec deux Lignes données, pour les deux Axes de ces Courbes. 262

PROBL. Une Hyperbole étant donnée, trouver son centre, ses Axes, ses Paramètres, son Foyer, ses Asymptotes. 262

PROBL. Trouver le rapport du Rectangle des Axes, au parallélogramme de deux Diamètres conjugués quelconques, circonscrit aux Hyperboles opposées. 263

PROBL. Trouver la surface de l'Hyperbole. 264

Lemme pour la Cubature de l'Hyperboloïde. Une couronne circulaire est égale au Cercle, décrit avec un rayon moyen proportionnel Géométrique entre la somme des rayons des Cercles concentriques, & la différence de ces rayons. 265

PROBL. Trouver la solidité de l'Hyperboloïde. 265 & 266

Des Hyperboles conjuguées.

Ce que l'on entend par ces Hyperboles. Comment elles ont les mêmes Asymptotes & les mêmes Axes, que celles dont elles sont conjuguées. 267, 268 & 269

Les Hyperboles conjuguées passent par les extrémités de tous les seconds Diamètres des Hyperboles dont elles sont conjuguées. Ce qui a fait dire à quelques Géomètres, que quatre Hyperboles conjuguées n'étoient que quatre quartiers de la même Courbe. Combien cela est peu fondé. 269 & 270

Usage de l'Hyperbole dans la Dioptrique, soit pour la construction des verres ardents, soit pour celle des Lunettes.

Connoissances préliminaires. 270

Une Hyperbole étant construite suivant le rapport de la réfraction, il en peut naître un Hyperboloïde, qui ait la propriété de réunir en un seul Point; tous les rayons parallèles à son Axe. Comment on peut construire une pareille Hyperbole. 271

Comment on peut engendrer un Hyperboloïde, qui ait la propriété, s'il est de verre, de faire que tous les rayons parallèles deviennent divergens, après l'avoir traversé, comme s'ils partoient tous du Foyer de l'Hyperbole opposée à la génératrice. 273

Comment des verres Hyperboliques peuvent être utiles aux Vieillards, ainsi qu'à ceux qui ont la vue courte. 274 & 275

Observation importante sur la réduction de cette Théorie en pratique.

Pourquoi l'usage de tailler sphériquement les verres de Lunettes, a prévalu? combien il seroit utile que les Sçavans devinssent artistes. Exemple de cette vérité dans les personnes de Mrs. Huyghens, Mydorge, Descartes. Combien le défaut d'ouvriers intelligens nuit au progrès des Arts. Que l'on construit aujourd'hui en Angleterre des Miroirs Télésc-

Par le moyen de cette Courbe, on trouve quatre Lignes en proportion Géométrique continue. D'où résulte son usage pour la duplication du Cube. 294 & 295

De la Conchoïde.

Sa génération, son inventeur, son ancienneté. Elle a une Asymptote. 296

Quelqu'inclinée que soit sur l'Asymptote d'une Conchoïde une Ligne droite, cette droite sera nécessairement coupée, ou déterminée à être coupée par la Conchoïde. 297

Lemma nécessaire pour comprendre l'usage de cette Courbe en Géométrie. 297

Usage de la Conchoïde pour la duplication du Cube. Elle sert à trouver géométriquement deux moyennes proportionnelles entre deux Lignes données. 297 & 298

De la Quadratrice.

Génération de cette Courbe. Pourquoi ainsi appelée. Dinostrate en est l'inventeur. 299

Si par un Point quelconque de la Quadratrice, on tire un rayon de l'Arc générateur, & du même Point une Perpendiculaire sur l'Axe de la Courbe, l'Arc générateur sera à sa partie coupée par le rayon, comme l'Axe de la Courbe est à sa partie coupée par la Perpendiculaire. 299

LEMME. I. Si du Sommet d'un Angle l'on décrit plusieurs Arcs concentriques entre ses côtés, & que l'on coupe ces Arcs par des rayons, les Arcs entiers seront entr'eux, comme leurs parties coupées par les rayons. 300

LEMME. II. La Tangente d'un Arc est plus grande que cet Arc. 300

Usage de la Quadratrice pour la rectification géométrique très-approchée de la circonférence du Cercle. L'Arc générateur est une troisième proportionnelle à la Base de la Quadratrice & au rayon de cet Arc. 300

Dans quel cas la circonférence du Cercle seroit rectifiée par le

pliques, suivant la doctrine de M. Descartes. Succès de cette pratique. L'intérêt qu'ont les ouvriers français à s'y appliquer. 275, 276, 278

Usage de l'Hyperboloïde dans la Catoptrique. 278

Usage de l'Hyperbole pour la Trisection de l'Angle. 279

Usage de l'Hyperbole pour la duplication du Cube. 281

Dissertation sur les Miroirs d'Archimède & de Proclus.

Ce qu'il faut sçavoir pour apprécier ce que quelques Historiens racontent là-dessus. 283

Tzetzes parle des Miroirs d'Archimède. Plutarque n'en dit rien. En supposant qu'ils aient existé, la portée de ces Miroirs paroît fort exagérée. Confirmation de ce jugement par le P. Kircher. 284

Il n'est pas probable que ces Miroirs aient été paraboliques; ni que l'on puisse, par le moyen de la Parabole, transformer un Foyer en Ligne brûlante indéfinie. Insuffisance des Miroirs Elliptiques & Hyperboliques. 285

Examen des Miroirs sphériques concaves. Ils n'ont point proprement de Foyer, & ne laissent pas que d'être caustiques. D'où leur vient cette propriété. La Théorie est d'accord avec l'expérience. Il n'est pourtant pas vraisemblable que les Miroirs d'Archimède aient eu cette forme, non plus que ceux de Proclus dont parle Zonaras. 286, 287, 288, 289

Les Miroirs d'Archimède & de Proclus étoient-ils des Miroirs plans? Expériences du P. Kircher à ce sujet. La vertu caustique de ces Miroirs est prédite. La prédiction s'accomplit en M. de Buffon. Il fonde une nouvelle doctrine. 289; 290; 291, 292, 293

De la Cissoïde.

Génération de cette Courbe. Dioclès en est l'inventeur. Elle a plus de 1400 ans d'ancienneté. Elle a une Asymptote. 293, 294

moien de la Quadratrice. Pourquoi elle ne l'est pas. Comment la rectification en est très-approchée, & par conséquent sa Quadrature aussi. Pourquoi la description de cette Courbe est inutile à la Quadrature du Cercle très-approchée, quoique cette Quadrature soit fondée sur ses propriétés. 301

Quand on auroit la Quadrature absolue du Cercle, par cette méthode, on n'auroit pas pour cela le rapport du Diamètre à la circonférence. C'est pourquoi le travail d'Archimède à cet égard paroît plus estimable. 302

Erreur de quelques Modernes, qui ont attribué à cette Courbe la propriété de diviser un Angle quelconque en un nombre quelconque de parties égales. 303

En quoi consiste leur Paralogisme. Dans quel cas la Quadratrice seroit omni-sectrice. Ce cas est une pétition de principe. Pappus l'a observé il y a environ 1400 ans. 304

De la Spirale.

Sa génération. Ce que c'est qu'une première, une seconde, une troisième Spirale, &c. Ces dénominations peu exactes. On y en substitue d'autres. 305

Comment la Spirale peut être conçue engendrée par un Point qui coule. Dans quel cas la Spirale seroit propre à diviser une circonférence de Cercle en raison donnée. Ce cas suppose la division géométrique d'une circonférence de Cercle en un nombre quelconque de parties égales. Cette Courbe, qui est d'Archimède, ne sçauroit donc être utile dans les opérations, ou l'on recherche une précision absolue. 306

De la Cycloïde.

Sa génération, ses différens noms. Que sa Base est exactement égale à la circonférence de son Cercle générateur. Ce que c'est que son Point culminant. Comment toutes ses doubles Ordonnées sont coupées en deux parties égales par son Axe. Pourquoi une Perpendiculaire, élevée sur son Axe à son Point culminant, est Tangente à cette Courbe. 307

PROP. I. La partie d'une Ordonnée quelconque à la Cycloïde,

- comprise entre cette Courbe & la rencontre du Cercle générateur, est toujours égale à l'Arc de ce Cercle, compris entre le Point de rencontre & le Point culminant. 308
- Réciproquement, si une Courbe est telle, qu'ayant décrit un Cercle sur son Axe, toutes les droites tirées de l'un de ses Points quelconques soient toujours égales à l'Arc correspondant du Cercle, cette Courbe sera nécessairement une demi-Cycloïde, dont le Cercle décrit sur son Axe sera le Cercle générateur. 308
- PROP. II. Ayant mené une Ordonnée quelconque à la Cycloïde, jusqu'à la rencontre du Cercle générateur, si après avoir tiré à ce Point une Tangente au Cercle, l'on mène, par le Point où l'Ordonnée rencontre la Cycloïde, une parallèle à cette Tangente, cette parallèle entrera nécessairement au-dessus de l'espace Cycloïdal. 309
- PROP. III. En supposant toujours l'Ordonnée précédente, si l'on conçoit, aux Points où elle rencontre la Cycloïde & son Cercle générateur, une Tangente à la Cycloïde & une Tangente au Cercle, ces deux dernières Lignes seront nécessairement déterminées à se rencontrer. 310
- PROP. IV. Dans la supposition de la même Ordonnée, les deux Tangentes précédentes se rencontreront en un Point tel que cette Ordonnée sera égale à la Tangente correspondante du Cercle générateur. 310
- Réciproquement, après avoir tiré d'un Point quelconque de la Cycloïde, une Ordonnée ou une Parallèle à sa Base, comme ci-dessus, & du Point où cette parallèle rencontre le Cercle générateur, mené une Tangente à ce Cercle, si l'on fait cette Tangente égale à l'Ordonnée, ces deux Lignes formeront un Angle, dont la Base sera une Tangente à la Cycloïde. 310
- PROP. V. Supposant la Tangente, dont on vient de parler, la corde tirée du Point de rencontre du Cercle au Point culminant est parallèle à la Tangente correspondante de la Cycloïde. 311
- Réciproquement, d'un Point quelconque de la Cycloïde, tirant une Ordonnée jusqu'à la rencontre du Cercle générateur, &

- loquée est toujours concave du même sens, la Développante sera aussi toujours concave du même sens que sa développée. 318 & 319
- LEMME. Deux Courbes toujours concaves du même côté, & qui ont la même origine, ne peuvent être telles que toutes les perpendiculaires à l'une soient en même tems Perpendiculaires à l'autre. 319
- Une demi-Cycloïde étant donnée, déterminer la nature de sa Développante. 320
- La Développante d'une Cycloïde est aussi une Cycloïde égale en tout à sa Développée. 321
- L'Arc Cycloïdal est toujours double de la corde correspondante du Cercle générateur. 322
- Observation importante sur cette Rectification. 322
- Un fil, qui se développe de dessus une Cycloïde égale à sa longueur, décrit par son extrémité mobile une Cycloïde égale & semblable à sa Développée. 323
- Exposition des Éléments, sur lesquels est fondée la démonstration de l'Ischronisme dans la Cycloïde.
- Si un corps commence à tomber de différentes hauteurs le long d'une Courbe, les vitesses acquises à des Points quelconques au-dessous des Points de partance, seront entr'elles comme les racines carrées des longueurs verticales, qui désignent les hauteurs d'où le corps est tombé. 323
- Une Courbe peut être partagée en parties si petites, que les vitesses d'un mobile acquises depuis un Point de partance, n'augmenteront point sensiblement, c'est-à-dire, relativement à la vitesse acquise, en parcourant ces portioncules. 323 & 324
- Dans le mouvement uniforme, quand les vitesses sont entr'elles comme les espaces parcourus, les tems employés à parcourir ces espaces sont nécessairement égaux. 324
- PROP. VI. Un corps qui se meut en vertu de sa pesanteur dans une Cycloïde renversée, dont la Base est parallèle à l'horizon, décrit une demi-Cycloïde entière, dans le même tems qu'il en

- de ce dernier Point l'on mène une corde au Point culminant, & que du Point où l'Ordonnée coupe la Cycloïde, l'on tire une parallèle à cette corde, cette parallèle sera Tangente à la Cycloïde. 311 & 312
- Ainsi la Perpendiculaire sur la Base de la Cycloïde, à l'un ou l'autre Point d'origine de cette Courbe, est Tangente à la Cycloïde. 312
- PROB. Trouver la Quadrature ou déterminer la surface de la Cycloïde. 312
- Combien est simple la nouvelle application que l'on fait de la méthode des Limites, pour la Quadrature des Courbes. 313
- COR. Si l'on avoit la Quadrature absolue du Cercle, on auroit celle de la Cycloïde, & réciproquement. 313
- PROB. Décrire une Cycloïde. La Description en peut être ou toute mécanique, ou en partie mécanique & en partie géométrique. Attention que l'on doit avoir dans la Description mécanique de cette Courbe. Moyen simple de rectifier mécaniquement la circonférence du Cercle d'une manière très-parfaite. 314
- Décrire la Cycloïde en partie mécaniquement & en partie géométriquement. Sur quoi est fondée cette résolution mixte. 315

De la Développante de la Cycloïde.

- Ce que c'est qu'une Développante, une Développée, un rayon de la Développée. 316
- Tout rayon de la Développée est toujours égal à la partie de cette Courbe, de dessus laquelle il s'est détaché. Ce rayon est toujours une Tangente à la Développée. 316
- COR. En élevant à l'extrémité d'un rayon quelconque de la Développée, une Perpendiculaire sur ce rayon, elle sera Tangente à la Développante. Et ainsi tous les rayons d'une Développée sont Perpendiculaires à sa Développante. 316 & 317
- Pourquoi il ne suffit pas, pour démontrer qu'une Ligne est Tangente à une Courbe, que cette Ligne ne rencontre la Courbe qu'en un seul Point. 317 & 318
- La Développante d'une Courbe est une Courbe, & si la Déve-

- partant un Arc quelconque, & c'est ce qu'il faut entendre, quand on dit que les vibrations ou oscillations d'un Pendule dans une Cycloïde sont isochrones ou d'égale durée. 325
- Usage de la Cycloïde dans la construction des Horloges à pendule. L'utilité du pendule dans cette Machine. Il en modère le mouvement, & il faut qu'il le rende uniforme. Le pendule, mu circulairement, ne produit point ce dernier effet. 326 & 327
- Un pendule, qui décrit des Arcs Cycloïdaux, a toutes ces vibrations isochrones ou d'égale durée, soit qu'elles soient grandes, soit qu'elles soient petites. 328
- Comment un pendule peut se mouvoir dans une Cycloïde. Quel est l'usage de la Fourchette. Quel doit être la longueur du pendule, & comment doivent être disposées les Lames Cycloïdales, pour déterminer le pendule à décrire une Cycloïde. Pourquoi le pendule doit être composé de deux parties, l'une flexible & l'autre inflexible. 328
- Pourquoi la Cycloïde n'est plus d'usage dans les Horloges à pendule. Comment elle a servi néanmoins à les perfectionner.

Histoire de la Cycloïde.

- Le P. Mersenne l'a observée le premier, Roberval en a découvert la quadrature, Descartes la Tangente, Wren la rectification, & Huyghens l'isochronisme dans cette Courbe. 330

Fin de la Table.

AVERTISSEMENT.

1°. QUAND, en lisant cet Ouvrage, on rencontrera un chiffre entre deux parenthèses de cette manière (12), cela signifiera que, pour les fondemens de ce qu'on lit actuellement, il n'y a qu'à recourir au n°. 12 de la manière que l'on étudie. Si l'on en est à la Parabole; on ira consulter le n°. 12. de la Parabole, & ainsi des autres. Mais, si étudiant l'Ellipse ou quelque autre Courbe, on tombe sur un renvoi de cette espèce (n°. 15. Parab.), cela voudra dire, qu'il faut se rappeler ou revoir le nombre 15 de la Parabole, &c.

2°. Si on trouve immédiatement après une équation une Lettre capitale, telle que D ou (D), on doit entendre que cette Lettre D, ou toute autre semblable, désigne cette équation, à laquelle il faudra recourir, quand on verra un pareil signe.

3°. Les Elémens de Géométrie sur lesquels on s'appuie dans cet Ouvrage, sont mes Institutions de Géométrie, imprimées en 1745, & qui se vendent chez de Bure l'aîné. Elles sont citées de cette manière (306. Inst. T. 1. ou 2.); c'est-à-dire, par le n°. 306. des Institutions, Tome premier ou second, suivant les cas.

PRÉFACE

ij
que forte effrayantes, si l'on ne jette, pour ainsi dire, un pont qui les lie & couvre l'abîme qui les sépare.

Souvent même il ne faut s'en prendre qu'à l'ingratitude des autres hommes, quand les esprits supérieurs ne laissent pas échapper sur leurs productions un degré suffisant de lumière. Ce qui coûte peu à comprendre, paroît, à bien des gens avoir peu coûté à produire. Ils mesurent la considération ou l'estime, qu'ils doivent avoir pour les Inventeurs, sur le plus ou le moins de difficulté qu'ils ont eu à saisir leurs idées. Voilà pourquoi de très-grands hommes ont quelquefois laissé exprès des obscurités dans leurs Ouvrages, & mis des entraves à l'avancement des Sciences.

M. Descartes en est un exemple que je ne cite qu'à regret. Peut-être n'y a-t-il jamais eu d'homme, plus porté que lui à travailler directement pour l'avantage du genre humain : mais persécuté par ses envieux, qui affectoient de publier que ses nouvelles vues en Mathématiques, en Philosophie, & sur-tout en Physique, n'avoient rien de fort extraordinaire, & que l'on devoit les rencontrer assez facilement, pour peu que l'on fit profession de penser, sans changer de sentiment, il changea de conduite. Ayant compris que le peu de cas qu'ils sembloient faire de ses productions, venoit uniquement de la grande clarté qu'il avoit répandue jusqu'alors dans ses Ouvrages, il se proposa d'en être un peu moins libéral dans



PRÉFACE

Dont la lecture est absolument nécessaire, pour savoir comment on doit lire cet Ouvrage, & dans quel esprit il a été composé. On y trouvera une Analyse de ce Livre, propre à en former un tableau complet dans l'esprit des Lecteurs.



L y a deux moyens d'étendre les limites des Sciences & des Arts; c'est d'y faire des découvertes, & de mettre le Public en possession de ces découvertes. Ces deux moyens qui sembleroient d'abord devoir être produits en même-temps, & marcher d'un pas égal, laissent souvent entre eux de très-grands intervalles.

Les véritables inventeurs, dont le nombre est fort petit aux yeux qui apperçoivent l'enchaînement des productions, franchissent à la fois des espaces immenses, & arrivent à des vérités inaccessibles au commun des hommes, & en quel-

c

PRÉFACE.

ij
la suite. Sa Géométrie lui en présenta bien-tôt l'occasion. Il y laissa tant de choses à désirer, & en fit entrevoir en même-temps tant d'autres, qu'ils convinrent alors que jamais il n'avoit paru d'aussi grand Géomètre. Cependant vaincus par la difficulté de l'entendre, ils lui reprochèrent son lachisme excessif; sans réfléchir que le motif de leur accusation, étoit le principal & peut-être l'unique fondement de leur estime.

Ce petit ressentiment en apparence, qui échappa à la grande ame de M. Descartes, eut des suites fâcheuses pour l'avancement des Sciences. De très-bons esprits, en état de servir le genre humain par leurs propres recherches, usèrent toutes leurs pensées à pénétrer celles de cet excellent Géomètre. Sa Géométrie, que l'on peut entendre aujourd'hui, dans le cours d'une année, avec le secours des Elémens & de l'Algèbre, a été pendant près de cent ans l'objet des Commentaires des plus forts Mathématiciens ses successeurs. Dans les premiers tems qu'elle parut, il n'y eut même que deux hommes en Europe, Messieurs de Beaune & Schooten, en état de la comprendre [a].

Ce ne sont pas là les seules causes qui rallentissent l'avancement des Sciences. Depuis environ 150 ans on s'est élevé à des spéculations très-sublimes, mais on a un peu trop négligé

[a] Voyez Baillet, Vie de Descartes.

de faire voir, comment elles contribuoient à la perfection des Arts. Si les hommes se bornoient à la simple curiosité & au seul raisonnement, la Théorie suffiroit; ils ont encore d'autres besoins, & le gros du monde n'est guères touché que des objets matériels ou tout-à-fait palpables; il faut donc les attacher par ce qui est le plus généralement assorti à leur caractère. Après trois ou quatre ans d'une profonde étude de la haute Géométrie, je ne vois rien de si humiliant que d'avoir encore à se demander, de quelle utilité cela peut-il être dans le commerce de la vie? Comment en convaincre les autres hommes? Et, si je ne leur suis pas utile, puis-je espérer qu'ils me sçauront gré de mon travail?

Cependant, dans les Livres qui servent à l'éducation, on ne trouve presque rien d'appliqué directement aux Arts. Messieurs de la Hire, Guisnée & de l'Hôpital, ont travaillé sur les *Sections coniques*; leurs Ouvrages sont sans doute excellents; mais ils ne contiennent que de la Théorie pure. Les jeunes gens commencent la haute Géométrie par ces Auteurs. Ainsi rebutés par la difficulté, la sécheresse & la stérilité apparente de cette étude, ils y renoncent; & ne soupçonnant pas la négligence ou le peu d'adresse des Auteurs, ils se croient incapables tandis qu'ils ne sont que mal conduits.

Parmi tous ces obstacles, qui ne permettent aux Sciences que de marcher à pas très-lents, je compte, comme un des plus forts, celui de ne

pas montrer assez les occasions, les degrés ou la chaîne, par où l'on est arrivé à une découverte. De la manière dont on la produit communément, il sembleroit qu'elle est descendue du Ciel tout à coup; mais qui ose dans ces matières prétendre au droit d'être inspiré? Faire observer les nuances ou les degrés qui conduisent à une production, c'est dévoiler le génie même qui y a présidé. Par-là on s'accoutume à remarquer la liaison des plus petites choses avec les plus grandes; & guidé par la raison plutôt que par la mémoire, on est quelquefois assez heureux pour appercevoir la fin d'une recherche, parce qu'on en a bien vu le commencement.

Si l'on fait attention au point où les hautes Sciences se sont élevées depuis deux siècles, on ne sçauroit douter que cela ne vienne, de ce que quelques Scavans se sont attachés à en applanir les routes. Plus de personnes y ont pénétré, les vûes se sont multipliées, & il est arrivé, ce que l'on devoit naturellement attendre, que les découvertes, en se répandant, en ont fait naître de nouvelles. C'est donc élever plus haut les Sciences que de travailler à leur propagation.

Après m'être appliqué très-sérieusement à reconnoître les différentes causes, qui peuvent retarder leur progrès, j'ai cherché à en diminuer le nombre; & dans ce dessein, mon sujet s'est présenté à moi sous trois points de vûe, qui me paroissent se donner mutuellement du secours, la Théorie des Courbes, leurs usages dans les Arts,

c iij

L'Histoire de leur origine & de leur progrès. La Théorie en fera la lumière, l'usage le fruit, & l'Histoire le délassement.

Cette économie générale m'a paru nécessaire. On ne voit que trop de monde se dispenser d'étudier les *Courbes*, sous le prétexte que les usages en sont très-bornés, ou plutôt parce que l'application n'en est point manifeste. Cette objection tombe ici, les usages abondent; & ceux, dans l'éducation desquels cette étude doit entrer, ne pourront plus s'y refuser sous ce prétexte. S'ils opposent encore la sécheresse d'un pareil travail, j'ai tâché d'y obvier par l'Histoire des Sciences & des Arts, & par de courtes Differtations sur leurs premiers Inventeurs. Dans les études sérieuses où l'esprit est tendu, un trait d'Histoire est comme un lieu de repos où l'on se rafraîchit sur la route, & où l'on reprend des forces pour le reste du voyage.

On vient de voir mon plan, en voici l'exécution.

Quand j'en suis à la Théorie d'une Courbe, je n'en démontre que les propriétés, nécessaires pour l'intelligence de son application aux Arts. Tout ce qui ne m'a paru que curieux & en même-temps trop difficile, ou avoir un rapport très-éloigné à mon plan, a été entièrement supprimé. Il y a tant de choses utiles pour exercer l'esprit, pourquoi l'occuper du superflu?

Cette économie du tems & des forces de l'esprit, n'y est pas médiocrement aidée par l'atten-

tion que j'ai eue, de déduire toutes les propositions immédiatement les unes des autres, sans y laisser rien à deviner. Il m'a toujours paru que, dans l'explication des matières difficiles, c'étoit assez bien deviner que de les entendre.

Je ne suppose que la connoissance de mes *Institutions*. S'il se présente quelque vérité incidente, qu'on ne trouve point dans les *Éléments* ordinaires de Géométrie, je la démontre exactement en Note au bas des pages. Et, comme j'ai eu besoin du *Calcul des Puissances par leurs Exposans* ainsi que de celui des *Radicaux*, j'en ai mis une explication suffisante à la tête de ce *Traité*, ces Calculs ne m'ayant point paru traités ailleurs d'une manière assez simple. L'un s'est trouvé déduit de l'autre avec une extrême facilité, par la seule transformation des *signes Radicaux* en simples *Exposans*. Cet Ouvrage n'a donc besoin que de lui-même pour être entendu.

Il le sera d'autant plus commodément, par ceux qui suivent l'éducation publique, que j'ai indiqué par des étoiles ou par des avis particuliers, tout ce qu'ils peuvent passer sans inconvénient. Ceux, par exemple, qui ne se soucieront pas d'entendre l'Artillerie ou le Calcul des Mines, n'ont pas besoin des Propositions sur lesquelles l'intelligence de ces Arts est fondée. En les en avertissant, l'Ouvrage s'abrège & l'on ménage le tems.

Les *Institutions Newtoniennes* de M. Sigorgne m'ayant paru propres à s'introduire de plus en

c iv

plus dans les Cours de Philosophie, j'ai cru rendre quelque bon office à Messieurs de l'Université, en démontrant avec une juste étendue toutes les Propositions des *Coniques*, qui servent de Base à ces *Institutions*. Mais on pourra se passer, si l'on a d'autres vûes; elles ne tiennent au corps de mon Ouvrage qu'en qualité de Corollaires, dont la suppression ne détruit point l'édifice.

Indépendamment de cette disposition des différentes parties de mon travail par rapport à la Théorie, on y verra une nouvelle Méthode générale de trouver les *Tangentes* des Courbes Algébriques, dont on a l'équation, ainsi qu'une nouvelle application de la *méthode des limites* à la *Quadrature* des Courbes. Cette dernière est, pour le moins, aussi simple & aussi expéditive que celle du *Calcul intégral*, sans en avoir l'obscurité.

Si tous ces caractères distinguent déjà mon Ouvrage de ceux qui l'ont précédé, la manière, dont la Théorie y est appliquée, lui donnera un nouveau degré de distinction.

J'y remonte toujours aux premiers Éléments de chaque Art qui est entré dans mon plan; les doutes y sont discutés, les expériences soumises à l'examen, le moindre nuage dissipé. Il y a encore tant de choses à découvrir ou à perfectionner dans les hautes Sciences, que je ne saurois approuver la conduite de ceux qui laissent, dans leurs explications, quelque chose à faire au génie des Lecteurs. C'est imposer inutilement la nécessité

faire voir sur le champ l'application à la Pratique. Mais, comme il y a beaucoup de Propositions, qui n'ont d'autre usage que de servir à la démonstration des vérités, immédiatement applicables aux Arts, il a fallu suivre une autre méthode. La grande distance qu'il y auroit eue alors entre plusieurs vérités de Théorie, dépendantes les unes des autres, en eut infailliblement rompu le fil dans l'esprit des Lecteurs. C'est pourquoi on n'a donné les *usages* ou *applications* d'une Courbe, qu'après en avoir exposé toute la Théorie, dont on avoit besoin.

C'est donc la même marche dans l'*Ellipse* & l'*Hyperbole*. Après en avoir donné la Théorie, on applique ces Courbes à la Dioptrique ou à l'art de tailler les verres propres à corriger les défauts de la vûe ou à en augmenter la puissance. On y revient aux Porte-voix & aux Cornets acoustiques. On y démontre que ces instrumens sont beaucoup plus parfaits, en faisant les premiers *Elliprico-paraboliques*, & les seconds simplement *Elliptiques*. On explique, à cette occasion, les Échos à voix basse. Les Miroirs brûlans par *réfraction* n'y ont pas été oubliés, non plus que la manière de calculer la solidité des voûtes *surbaiissées*. Toute la doctrine de l'*Ellipse* est terminée par une Dissertation, où l'on fait voir que M. Descartes est le véritable Inventeur de la *Dioptrique*; & l'on recherche dans une autre, à la fin de l'*Hyperbole*, les espèces de Miroirs dont *Archimède* & *Proclus* ont pu se servir, pour opérer les prodigieux

d'inventer, en quelque sorte, ce qui est trouvé. La route des Sciences est longue, & la vie fort courte. Rendons facile la première, & faisons jouir promptement dans la seconde; ce sera abrégé l'une, & étendre l'autre.

Composée dans cet esprit, chaque application est devenue un Traité complet. Ainsi la Théorie & la Pratique du *Jet des Bombes*, y sont démontrés avec tout le détail nécessaire. On n'y a oublié la résolution d'aucun Problème; &, pour assurer la Théorie ou répondre aux difficultés que l'on y oppose, on a produit un grand nombre d'expériences, faites uniquement dans le dessein d'en comparer les résultats avec ceux que l'on déduit de la Géométrie. L'accord en est aussi parfait qu'il le puisse être; ce seroit donc oublier les intérêts de la Société, que de s'en tenir encore au simple tâtonnement.

On s'est conduit de la même manière à l'égard du Calcul de l'excavation des Mines, supposant toujours que l'on parle à des Lecteurs, qui n'entendent que ce qu'on leur fait entendre. On n'a pas été moins scrupuleux pour ce qui concerne la construction la plus avantageuse des Porte-voix, des Corners acoustiques, des Miroirs brûlans par *réflexion*, des jambages des cheminées pour échauffer les appartemens, & de quelques Échos singuliers qui tiennent du prodige.

Tous ces usages sont une suite des propriétés de la *Parabole*. On auroit fort souhaité, à mesure que l'on découvroit une vérité de Théorie, d'en

effets que quelques Historiens leur attribuent.

Les quatre Courbes suivantes, la *Cysoïde*, la *Conchoïde*, la *Quadratrice*, & la *Spirale d'Archimède*, ayant peu ou point d'usage dans les Arts utiles, on s'est borné à en expliquer les propriétés, nécessaires à l'intelligence de ce qui en a occasionné la naissance; & ce Traité devoit finir là, c'est-à-dire, qu'on devoit n'y faire mention que des Courbes anciennes. On s'étoit réservé à parler des Courbes modernes, applicables aux Arts, dans un autre Ouvrage, au cas que celui-ci fût bien reçu du Public, & que d'autres circonstances ne s'y opposassent pas; mais plusieurs personnes ont fait tant d'instances, par rapport à la *Cycloïde*, que l'on n'a pu se refuser à en donner ici un petit Traité. On s'y est principalement attaché à considérer les propriétés, qui conduisent à l'intelligence de l'application de cette Courbe à l'Art des Horloges à pendule. On y est entré dans tout le détail de la Mécanique, qui peut faire comprendre le jeu de ces admirables machines. Enfin l'on verra, par une courte Histoire de la *Cycloïde*, combien sont importantes de pures spéculations de Géométrie, qui paroissent ne présenter d'abord que des vérités indifférentes.

Tels sont les objets que j'ai embrassés dans l'exécution de mon Plan. Je puis bien répondre qu'il n'y a, en France, aucun Ouvrage de cette espèce, composé dans ce goût; c'est au Public à décider si, en cherchant à lui être utile d'une manière nouvelle, j'ai eu le bonheur, par la

variété des usages & l'Histoire des découvertes ; de sauver la sécheresse dont ces matières ne sont que trop susceptibles.

Cependant les Préfaces étant devenues un peu suspectes ; parce qu'il est plus aisé de promettre que de tenir, & qu'ordinairement il y a assez de différence entre le fait, & ce qu'il falloit faire, je crois ne pouvoir mieux rassurer les Lecteurs, justement prévenus, que de leur produire cette Approbation de l'Académie Royale des Sciences.

EXTRAIT DES REGISTRES

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Du 7 Mai 1750.

NOUS avons examiné, par ordre de l'Académie, un Traité des *Sections coniques* & des autres Courbes anciennes, ainsi que de la *Cycloïde*, composé par M. de la Chapelle, de la Société Royale de Londres.

L'Auteur, après avoir montré les propriétés de ces Courbes par le moyen de l'*Analyse*, explique les usages qu'on en a fait dans différens Arts. Ainsi, à l'article de la Parabole, il donne la Théorie [a] du *Jet des Bombes*, & le Calcul de l'*Excavation des Mines*. A l'article de l'*Ellipse*,

[a] La Pratique y est aussi amplement expliquée.

il explique l'usage qu'on en a fait, ou qu'on en peut faire pour les Miroirs brûlans & pour les verres de Lunette. A l'article de l'*Hyperbole*, il montre aussi l'application de cette Courbe aux recherches de Catoptrique & de Dioptrique. Enfin, à l'article de la *Cycloïde*, il fait voir comment la Théorie de cette Courbe a servi à perfectionner les Pendules, & comment elle y sert encore, en quelque manière, par les petits Arcs de cercle qu'on leur fait décrire. L'Auteur traite aussi des Échos & des Porte-voix ; & il joint à toutes ces Recherches des Dissertations sur chaque Découverte, sur l'origine des Sciences & des Arts, qui sont entrés dans son Plan, ainsi que des observations sur les expériences propres à confirmer la Théorie.

M. de la Chapelle donne les *Tangentes* des différentes Courbes, dont il parle, en regardant ces *Tangentes* comme des *Secantes*, dont les Points d'intersection avec la Courbe se confondent, & il trouve la *Quadrature* des mêmes Courbes par la Méthode des limites, qu'il avoit expliquée dans ses *Institutions de Géométrie*, déjà approuvées par l'Académie ; de sorte que, sans employer le Calcul différentiel & intégral, il ne laisse pas de faire concevoir aux Commencans la vraie Métaphysique de ces Calculs.

Nous croyons donc que ce nouvel Ouvrage de M. de la Chapelle fera utile à ceux qui se destinent à l'étude de la haute Géométrie, & de son application à la Physique, tant parce que l'Auteur

y renferme plusieurs matières auparavant éparées dans différens Livres, que parce qu'il les a traitées avec beaucoup de soin & de clarté.

Signé, CASSINI, D'ALEMBERT.

Je certifie le présent Extrait, conforme à l'Original & au jugement de l'Académie. A Paris ce 15 Mai 1750.

GRAND JEAN DE FOUCHY,
Secrétaire perpétuel de l'Académie
Royale des Sciences.



**Fautes essentielles à corriger avant que d'étudier
cet Ouvrage.**

P_{ag.} 9 $\sqrt{y}$ *lif.* $\sqrt{y}$

119 *lig.* 18, 19 & 20 $\overline{PM}$ *lif.* $\overline{BM}$

154 *lig.* 12 $b - y \times b$ *lif.* $b - y \times b$

164 *lig.* 36 Propositions *lif.* Proportions

177 *lig.* 16 $xx - mm \times aa - xx$ *lif.* $xx - mm \times aa - xx$

228 *lig.* 22 $\overline{BH}$ *lif.* $\overline{BH}$

258 *lig.* 8 $\frac{fT}{fM}$ *lif.* $\frac{fT}{fM}$

262 *lig.* 21 du côté y *lif.* du côté de y

282 *lig.* 7 dernier *lif.* premier

297 *lig.* 2 dirigée à son Pole, supprimez ces mots.

309 *lig.* 24 moitié l'Arc *lif.* moitié de l'Arc.

Fautes non-essentielles.

P_{ag.} 16 *lig.* 15 transformés *lif.* transformés

22 *lig.* 15 nne *lif.* une

28 *lig.* 21 eette *lif.* cette

33 *lig.* 28 coupant *lif.* coupant

38 *lig.* 25 le *lif.* la

38 *lig.* 33 enfin *lif.* enfin

57 *lig.* 24 certe *lif.* cette

36 *lig.* 16 alternes, internes *lif.* alternes internes

69 *lig.* 8 on *lif.* ou

84 *lig.* 27 déterminée *lif.* déterminée

97 *lig.* 9 la *lif.* le

101 *lig.* 25 l'horison *lif.* l'horizon

P_{ag.} 121 *lig.* 32 brûlant *lif.* brulant

125 *lig.* 34 Parabolique *lif.* de Miroir parabolique

136 *lig.* 11 membre *lif.* membre

137 *lig.* 25 an *lif.* au

147 *lig.* 16 extrémisé *lif.* extrémité

160 *lig.* 26 contruire *lif.* construire

190 *lig.* 20 le le *lif.* le

194 *lig.* 23 puisque *lif.* puisque

197 *lig.* 7 explique *lif.* expliqué

211 *lig.* 5 proportionel *lif.* proportionel

211 *lig.* 28 portionel *lif.* proportionel

226 *lig.* 20 l'Hyperbole *lif.* l'Hyperbole

226 *lig.* 27 toujours *lif.* toujours

255 elle est fausement marquée 245

255 *lig.* 24 Cor. *lif.* 96. Cor.

284 *lig.* 29 Vaisseaux *lif.* Vaisseaux

285 *lig.* 29 présentement *lif.* présentement

287 *lig.* 13 maintenaut *lif.* maintenant

303 & 304 elles sont marquées fausement 203, 204



TRAITÉ DES COURBES.

DU CALCUL DES PUISSANCES

Par leurs Exposans.



VERTISSEMENT. Les deux Calculs suivans, celui des Puissances par leurs Exposans, & celui des Radicaux, sont indispensables pour ceux qui veulent connoître la haute Géométrie des modernes, & très-commodes dans l'étude de celle des anciens. Néanmoins les commençans pourront absolument s'en passer ici; la plus grande partie de cet Ouvrage pouvant être entendue sans un pareil secours.

1. On enseigne dans ce chapitre ce que l'on doit faire touchant les Exposans des Puissances, soumises aux opérations du calcul.

L'Exposant d'une grandeur est une quantité quelconque, par laquelle on a coutume d'exprimer combien de fois cette grandeur devroit être écrite, si l'on n'employoit pas un pareil signe. Ainsi, quand cet Exposant est un Entier, il indique toujours une multiplication. L'on ne sçauroit donc augmenter un Exposant, sans multiplier la grandeur à laquelle il appartient; & par conséquent le diminuer, sans diviser cette même grandeur. Et, comme l'élevation

A

2. **TRAITÉ**
à des Puissances & l'extraction des Racines, ne se font que par des multiplications & des divisions, il s'ensuit que l'on ne peut agir sur des Exposans, que quand on propose d'en multiplier les Puissances, de les diviser, de les élever à d'autres Puissances, ou enfin d'en extraire les Racines.

2. **REMARQUE.** Toute grandeur, qui ne paroît élevée à aucune Puissance, est toujours censée avoir l'unité pour Exposant; ainsi $b = b^1$; $cd = c^1 d^1$; $a + b = a^1 + b^1$.

3. Pour multiplier les Puissances d'une même Racine, lesquelles ont pour Exposans des nombres entiers, on écrira une seule fois cette Racine, & on lui donnera pour Exposant la somme des Exposans des Puissances qui se multiplient. Ainsi $y^2 \times y^4 = y^{2+4} = y^6$; car $y^2 = yy$, & $y^4 = yyyy$; donc $y^2 \times y^4 = yy \times yyyy = y^6$; par conséquent la Règle proposée est très-évidente, & très-certaine: C'est pourquoi, si les Exposans sont indéterminés, on en indiquera la somme par le signe $+$; c'est-à-dire que $y^2 \times y^4 = y^{2+4}$.

4. D'où il suit que, pour diviser des Puissances semblables aux précédentes, il faut soustraire l'Exposant de la Puissance, qui fait la fonction de Diviseur, de l'Exposant de la Puissance à diviser, & donner pour Exposant à la Racine le reste de cette soustraction. Voulez-vous diviser c^3 par c^2 ? Vous n'avez qu'à écrire $c^{3-2} = c^1$, qui sera le Quotient cherché; puisque le Diviseur c^2 multiplié par le Quotient $c^1 = c^{2+1} = c^3$ le Dividende c^3 . Donc, en général, c^3 divisé par $c^2 = \frac{c^3}{c^2} = c^{3-2}$.

5. Soit dans l'exemple précédent $r = s$ on aura $c^{r-r} = c^0 = 1$; mais (4) $c^{r-r} = \frac{c^r}{c^r} = 1$. donc $c^r = c^r$. On voit par-là que toute grandeur quelconque, élevée à nulle Puissance, ou dont la Puissance est zéro, devient égale à l'unité.

6. Si l'on supposoit donc l'Exposant $= 0$, on auroit $\frac{c^r}{c^r} = \frac{c^0}{c^0} = c^{0-0} = c^0$. Ce qui démontre qu'une Puissance peut avoir un Exposant négatif. Mais alors elle exprime une véritable Fraction, quoiqu'elle n'en ait pas la forme.

DES COURBES.

Car $c^0 = 1$ (5); donc $\frac{c^r}{c^r} = \frac{1}{c^r}$; mais on vient de voir que $\frac{c^r}{c^r} = c^{-r}$; donc $c^{-r} =$ la Fraction $\frac{1}{c^r}$.

7. Un Exposant positif peut donc être transformé en négatif, & réciproquement, sans que la Puissance change de valeur. Car $1^0 \cdot \frac{1}{c^r} = c^{-r}$ (6). 2°. Je dis que $c^r = \frac{1}{c^{-r}}$;

puisque $\frac{1}{c^r} = c^{-r}$ (6); donc $1 = c^r \times c^{-r}$; par conséquent $\frac{1}{c^{-r}} = c^r$.

8. Pareillement $d^4 f^{-3}$ peut devenir $\frac{d^4}{f^3}$. Car f^{-3} étant $= \frac{1}{f^3}$ (6), $d^4 \times f^{-3} = d^4 \times \frac{1}{f^3} = \frac{d^4}{f^3}$. La même grandeur

$d^4 f^{-3}$ peut aussi devenir $\frac{f^{-3}}{d^{-4}}$. Puisque d^4 égalant $\frac{1}{d^{-4}}$ (7), on aura $d^4 f^{-3} = \frac{1}{d^{-4}} \times f^{-3} = \frac{f^{-3}}{d^{-4}}$. On peut enco-

re transformer cette même grandeur $d^4 f^{-3}$ en $\frac{1}{d^{-4} f^3}$. Car $d^4 = \frac{1}{d^{-4}}$ (7), & $f^{-3} = \frac{1}{f^3}$ (6); donc $d^4 f^{-3} = \frac{1}{d^{-4}} \times \frac{1}{f^3} = \frac{1}{d^{-4} f^3}$.

On employe ces Transformations, quand on veut reconnoître dans un Calcul, si des grandeurs sont semblables, quoiqu'elles ne le paroissent pas.

9. Puisque les Puissances peuvent avoir des Exposans négatifs (6), il est à propos de voir comment elles se multiplient ou se divisent à cet égard. Il n'y a pas d'autres Règles à suivre que celles des n°. 3. & 4. Ainsi, pour multiplier d^{-2} par d^{-3} , on écrira $d^{-2} \times d^{-3} = d^{-2-3} = d^{-5}$ (3). Pa-

A ij

reillement $d^{-r} \times d^{-s} = d^{-r-s}$. Car $d^{-r} = \frac{1}{d^r}$ & $d^{-s} = \frac{1}{d^s}$ (6); ainsi $d^{-r} \times d^{-s} = \frac{1}{d^r} \times \frac{1}{d^s} = \frac{1}{d^r \times d^s} = \frac{1}{d^{r+s}}$ (3) $= d^{-r-s}$ (6). Voulez-vous encore multiplier d^4 par d^{-5} ? Vous aurez $d^4 \times d^{-5} = d^{4-5} = d^{-1}$; puisque $d^{-5} = \frac{1}{d^5}$ (6); donc $d^4 \times d^{-5} = d^4 \times \frac{1}{d^5} = \frac{d^4}{d^5} = d^{4-5} = d^{-1}$.

10. De même, en suivant la Règle établie & démontrée n°. 4. on divisera avec une extrême facilité les Puissances, dont les Exposans seront négatifs, soit au Dividende, soit au Diviseur. Pour diviser donc d^{-5} par d^{-3} , on écrira $\frac{d^{-5}}{d^{-3}} = d^{-5+3} = d^{-2}$, qui fera le Quotient cherché. De forte que les Exposans étant indéterminés; c'est-à-dire, ayant par exemple d^{-r} à diviser par d^{-s} , on écrira $\frac{d^{-r}}{d^{-s}} = d^{-r+s}$ pour le Quotient de cette Division; puisque ce Quotient d^{-r+s} , multiplié par le Diviseur d^{-s} , $= d^{-r+s-s} = d^{-r}$ le Dividende d^{-r} . On trouvera encore que d^r divisé par $d^{-s} = \frac{d^r}{d^{-s}} = d^{r+s}$; car $d^{r+s} \times d^{-s} = d^{r+s-s} = d^r$ (9) $= d^r$. Et, si l'on divisoit d^{-r} par d^s , on auroit au Quotient d^{-r-s} ; puisque $d^{-r-s} \times d^s = d^{-r-s+s} = d^{-r}$.

11. Moyennant le Calcul des Puissances par leurs Exposans, on peut délivrer du signe radical $\sqrt{\quad}$ une grandeur qui en seroit affectée. Mais il est nécessaire de voir auparavant, & d'être convaincu par une bonne démonstration que, pour élever une Puissance quelconque y^r à un degré quelconque, dont l'Exposant r ou $-r$ est positif ou négatif, il faut multiplier l'Exposant s de la Puissance proposée par l'Exposant donné r ou $-r$; & faire que ce produit devienne l'Exposant de cette même Puissance. Ainsi y^r élevée à la Puissance $r = y^{rr}$; & y^{-r} élevée à la Puissance $-r = y^{-rr}$. Ce que je démontre ainsi.

TRAITÉ

6 à la Puissance $-r = y^{-rr}$. Et, si vous voulez avoir la suite de toutes les Egalités ou Equations qui nous ont conduit à cette dernière, vous écrirez $yyyy, \&c. = \frac{1}{yyyy, \&c.} = \frac{1}{y^{rr}} = \frac{1}{y^{rr}}$ (art. 1.) $= y^{-rr}$ (6).

De même y^{-r} élevée à la Puissance négative $-r = y^{-rr}$. Car $y^{-r} = \frac{1}{y^r}$ (6). Or, pour élever la Fraction $\frac{1}{y^r}$ à la Puissance $-r$, il faut élever ses deux termes à la Puissance $-r$, & par conséquent écrire $\frac{1^{-r}}{y^{r \times -r}}$ (artic. II.); mais 1^{-r} ne peut évaluer que 1; puisque $1^{-r} = \frac{1}{1^r}$ (6) $= \frac{1}{1} = 1$; donc $\frac{1^{-r}}{y^{r \times -r}} = \frac{1}{y^{rr}} = y^{-rr}$.

12. On demandera peut-être ce que signifie une grandeur élevée à une Puissance négative? C'est une quantité qui devient plus petite que 1; & qui est par conséquent transformée en Fraction, lorsqu'avant d'être élevée au degré proposé elle avoit un Exposant positif; mais au contraire, dont la valeur devient un entier, si son Exposant étoit négatif. Vous avez, par exemple, la grandeur a^3 , que vous voudriez élever à la Puissance négative -2 ; il faut qu'elle devienne a^{-6} (art. II. n°. 11.) $= \frac{1}{a^6}$ (6). Où vous voyez que la grandeur a^3 , qui a un Exposant positif, est devenue plus petite que l'unité. Soit, au contraire, a^{-3} qu'il s'agit d'élever à la Puissance -2 ; on aura a^6 (art. II. n°. 11.); c'est-à-dire que la grandeur a^{-3} ou $\frac{1}{a^3}$ qui étoit une Fraction ou plus petite que l'unité, est devenue plus grande que 1. Car nous supposons dans tout ceci que a est > 1 .

* L'expression y^r indique que la grandeur y est élevée à la Puissance r .

I. y^r élevée à la Puissance positive r , doit nécessairement devenir y^{rr} . Car en élevant y^r à la Puissance positive r , on la multiplie par elle-même autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans r ; c'est-à-dire que l'on écrit cette Puissance autant de fois que la lettre r est supposée contenir d'unités; de sorte qu'elle devient $y^r y^r y^r y^r$, &c. où y^r se trouve écrite autant de fois que l'on suppose d'unités dans r ; mais $y^r y^r y^r y^r$, &c. $= y^{r+r+r+r}$ (3), dans laquelle expression l'Exposant s doit se trouver écrit ou pris autant de fois que la lettre r contient d'unités; or, pour prendre s autant de fois que r contient d'unités, il faut multiplier s par r ; donc, en ce cas, $y^{r+r+r+r}$ $= y^{rr}$. Et vous vous convaincrez en particulier de la vérité de cette assertion, en élevant la grandeur a^3 à la quatrième ou à toute autre Puissance déterminée; puisqu'alors il faut écrire $a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12}$ ou $a^{3 \times 4}$, ainsi que la Règle générale le prescrit.

II. y^r élevée à la Puissance négative $-r$ est $= y^{-rr}$. On doit se rappeler pour cela que $y^r = \frac{1}{y^{-r}}$, &c. où la lettre y doit être écrite autant de fois que l'on suppose d'unités dans l'Exposant s : ainsi en élevant y^r ou son égale $yyyy, \&c.$ à la Puissance $-r$, on doit écrire $yyyy, \&c.^{-r}$; ce qui signifie que la grandeur proposée est censée élevée à la Puissance $-r$. Mais $yyyy, \&c.^{-r} = \frac{1}{yyyy, \&c.^r}$ (6), & $\frac{1}{yyyy, \&c.^r} = \frac{1}{y^{rr}}$ élevée à la Puissance positive r ; puisque $yyyy, \&c. = y^r$; or $\frac{1}{y^{rr}}$ élevé à la Puissance $r = \frac{1}{y^{rr}}$ (art. 1.): car 1 élevé à une Puissance quelconque donne toujours 1; & par conséquent, pour élever la fraction $\frac{1}{y^{rr}}$ à la Puissance positive r , il n'y a qu'à agir simplement sur son Dénominateur, suivant qu'il est prescrit à l'article premier, & elle deviendra $\frac{1}{y^{rr}}$. Mais $\frac{1}{y^{rr}} = y^{-rr}$ (6); donc enfin y^r élevée

A iij

DES COURBES.

13. Remarquez qu'il y a une grande différence entre y^3 élevée à la quatrième Puissance, & $y^3 \times y^4$. Puisque $y^3 = y^{12}$ (11) $= y^{12}$; au lieu que $y^3 \times y^4 = y^{3+4}$ (3) $= y^7$, qui est fort différent de y^{12} . Pareillement $p^r = p^{rs}$ $= p^{rs}$; mais $p^r \times p^s = p^{r+s}$.

14. Il nous sera bien aisé maintenant de délivrer du signe radical $\sqrt{\quad}$ accompagné d'un Exposant quelconque, toute grandeur qui en seroit affectée, telle que $\sqrt[r]{y^p}$, sans en changer la valeur: Car puisque, pour élever une grandeur à une Puissance quelconque, il faut (11) multiplier son Exposant par celui de la Puissance proposée, l'extraction des Racines étant contraire à l'élevation aux Puissances, pour tirer la Racine s de y^p , il faudra diviser l'Exposant de cette grandeur par l'Exposant donné s ; & par conséquent $\sqrt[r]{y^p} = y^{\frac{p}{r}}$, où il n'y a plus de Radical. Effectivement $y^{\frac{p}{r}}$, élevée à la Puissance s , $= y^{\frac{p}{r} \times s}$ (11) $= y^p$; comme cela doit être.

Pareillement $\sqrt[r]{x^s} = x^{\frac{s}{r}} = x^{\frac{s}{r}}$, comme on le sçait d'ailleurs. $\sqrt[r]{x^s} = x^{\frac{s}{r}} = x^{\frac{s}{r}}$. Ce que l'on sçait encore être très-véritable. De même $\sqrt[r]{x^s}$, ou $\sqrt[r]{x^s} = x^{\frac{s}{r}}$.

Puis donc qu'une grandeur peut avoir pour Exposant une Fraction, il est à propos d'en sçavoir faire la multiplication & la division.

15. On se conduira pour la multiplication de ces grandeurs, comme au n°. 3. Ainsi $y^{\frac{m}{n}} \times y^{\frac{p}{q}} = y^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$ (A) $= y^{\frac{mq+np}{nq}}$, en réduisant à la même dénomination les deux termes de l'Exposant de la grandeur A.

Voulez-vous pareillement multiplier $y^{\frac{m}{n}}$ par $y^{-\frac{p}{q}}$? Vous aurez $y^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$ (9) $= y^{\frac{mq-np}{nq}}$. Et, si vous aviez $y^{-\frac{m}{n}}$ à multiplier par $y^{\frac{p}{q}}$, le produit seroit $y^{-\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = y^{\frac{mq-mn}{nq}}$.

T R A I T É

16. Quant à la division des grandeurs semblables aux précédentes, on se conformera à la Règle du n°. 4. On verra donc que $y^{\frac{1}{2}}$ divisé par $y^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{1}{2} - \frac{m}{n}} = y^{\frac{n-2m}{2n}}$.

Vous trouverez pareillement que $y^{\frac{1}{2}}$ divisé par $y^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{1}{2} - \frac{m}{n}} = y^{\frac{n-2m}{2n}}$. Et que $y^{\frac{1}{2}}$ divisé par $y^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{1}{2} - \frac{m}{n}} = y^{\frac{n-2m}{2n}}$. Enfin $y^{\frac{1}{2}}$ divisé par $y^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{1}{2} - \frac{m}{n}} = y^{\frac{n-2m}{2n}}$.

17. Il est bon que l'on soit prévenu qu'en transformant une grandeur affectée du signe Radical $\sqrt{}$ en une autre qui en soit délivrée, par exemple, en faisant que $\sqrt{a+b}$ devienne $a+b$, l'on peut approcher à l'infini de la Racine cubique de la grandeur $a+b$, & tomber dans ce que l'on appelle le Calcul des Suites, si utiles dans la Géométrie, où l'on employe les Calculs Différentiel & intégral : Mais n'ayant pas besoin ici de ces connoissances, je passe tout de suite au Calcul des Radicaux, si commode dans la Géométrie analytique.

Du Calcul des Radicaux.

18. **U**N Radical est une grandeur affectée du signe $\sqrt{}$, entre les branches duquel on écrit un chiffre ou une grandeur quelconque, à laquelle on a donné le nom d'Exposant, parce qu'il indique de quel degré est la Racine, que l'on suppose extraite ou à extraire par le signe Radical $\sqrt{}$. Ainsi $\sqrt{x}$ ou simplement $\sqrt{x}$ désigne la Racine quarrée ou seconde de x . Pareillement $\sqrt[5]{b^2-x^2}$ exprime la Racine cinquième de b^2-x^2 . En un mot,

10

T R A I T É

seul élevée à la troisième Puissance; par conséquent a^3b est le Cube de $\sqrt[3]{a^3b}$.

11. Je dis pareillement que a^3b est le Cube de $\sqrt[3]{a^3b}$ $= a \times \sqrt[3]{b}$; puisque l'on ne sçaitroit élever au Cube une grandeur, à moins que tous ses Facteurs n'y soient élevés; par exemple $b^2c^3x^3 = b^2c^3x^3$; par conséquent dans la grandeur $a \times \sqrt[3]{b}$, que l'on se propose d'élever au Cube, la quantité a deviendra a^3 , & $\sqrt[3]{b}$ deviendra b (art. I.); par conséquent le Cube de $\sqrt[3]{a^3b}$ est a^3b ; mais cette même grandeur est aussi le Cube de $\sqrt[3]{a^3b}$. Donc $\sqrt[3]{a^3b} = \sqrt[3]{a^3b}$. De même vous verrez que $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{4 \times 2} = 2\sqrt[3]{2}$; & que $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \times 2} = 3\sqrt[3]{2}$, &c.

22. On peut donc faire passer sous le signe Radical une grandeur qui, en étant délivrée, en multiplie une autre que ce signe affecte, sans que le Produit de ces grandeurs en soit aucunement altéré; pourvu que la quantité que l'on fait passer sous le signe, étant élevée à la Puissance marquée par l'Exposant du Radical, multiplie celle qui est sous le Radical; puisque l'on vient de voir (21) que $\sqrt[3]{a^3b} = \sqrt[3]{a^3b}$. Pareillement $\sqrt[3]{a-b} \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{(a-b)c}$ $= \sqrt[3]{a^3c-2ab^2c+bb^3c} = \sqrt[3]{a^3c-2abc+b^3c}$, où l'on a fait passer la grandeur $a-b$ sous le signe Radical, en l'élevant à la seconde Puissance, & la multipliant par la quantité c qui est sous le signe. Il faut prendre garde à ces transformations, elles facilitent beaucoup le Calcul des Radicaux. Ayant donc $4\sqrt[3]{5}$, vous pourrez en faire $\sqrt[3]{4^3 \times 5} = \sqrt[3]{16 \times 5} = \sqrt[3]{80}$, sans rien changer à la valeur de $4\sqrt[3]{5}$.

23. Mais il y a des grandeurs dont on ne peut tirer la

$\sqrt[3]{y}$ indique la Racine indéterminée y de la grandeur y , &c.

19. Quand l'Exposant d'un Radical est le même que celui de la Puissance positive qui est sous le signe Radical, ou quand cette grandeur est une Puissance parfaite, du même degré que l'Exposant du signe, cette quantité peut être délivrée du signe Radical. Ainsi $\sqrt{x^2} = x$; $\sqrt[3]{16} = 2$; ou $\sqrt[3]{4^3} = 4$; $\sqrt[3]{27} = 3$; ou $\sqrt[3]{3^3} = 3$; $\sqrt[3]{4^3-246+66} = 4$; ou $\sqrt[3]{4^3-6} = 4-1$. Ce qui est évident.

20. Une grandeur peut donc prendre la forme d'un Radical quelconque, sans changer de valeur; pourvu que l'on élève cette grandeur à la Puissance du même degré que l'Exposant du Radical dont elle sera affectée. Soit la grandeur b^3x , que vous voudriez transformer en Radical du même degré que $\sqrt[3]{x}$. Élevez b^3x au Cube, ou à la troisième Puissance, & la mettant sous le signe $\sqrt[3]{}$, vous aurez $b^3x = \sqrt[3]{b^9x^3}$, qui a le même signe Radical que $\sqrt[3]{x}$. Ce qui est encore tout-à-fait évident (19).

21. Il suit encore du n°. 19. qu'une grandeur dont les Facteurs, (c'est-à-dire les quantités qui concourent à sa formation par voye de multiplication) sont tels que les uns ont le même Exposant que celui de son Radical, & les autres ne l'ont pas; que cette grandeur, dis-je, peut être délivrée en partie du signe Radical.

I. Ainsi $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$, où il n'y a plus que le Facteur b affecté du signe Radical: car deux grandeurs sont égales, quand élevées à la même Puissance elles donnent des Produits égaux; or en élevant au Cube ou à la troisième Puissance $\sqrt[3]{a^3b}$, on a la grandeur a^3b ; puisque $\sqrt[3]{a^3b}$ signifie que l'on tire la Racine cubique de a^3b ; on suppose donc que cette grandeur est un Cube: ainsi, en lui ôtant le Radical $\sqrt[3]{}$ dans l'expression $\sqrt[3]{a^3b}$, elle sera par cela

DES COURBES.

11

Racine d'un degré quelconque, ni en entier ni en partie; c'est-à-dire que l'on ne peut pas à la rigueur délivrer de leur Radical. Telles sont $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{7}$, &c. que l'on appelle *incommensurables*, c'est-à-dire qui n'ont aucune commune mesure avec l'unité, ou avec quelque partie de l'unité; de sorte qu'il n'y a aucun nombre, soit entier ou fraction, qui soit la Racine quarrée de 5. ainsi que je l'ai démontré au n°. 72. *Algeb. des Ind. T. 1.* Cependant, quoiqu'il y ait des quantités dont on ne puisse avoir la Racine à toute rigueur, j'ai fait voir dans mes *Institutions*, que l'on pouvoit en approcher à l'infini; & qu'ainsi l'on avoit à cet égard un supplément qui alloit bien au-delà des besoins de la société.

24. On trouve même quelquefois des quantités radicales, dont l'approximation de la Racine est impossible, & dont la recherche seroit absurde. Ainsi $\sqrt{-a^2}$ n'est ni ne peut être $+a$ ou $-a$; car $+a$ ou $-a$ élevé au quarré, ne produira jamais $-a^2$. De même $\sqrt{-9}$ n'est ni 3 ni -3 ; puisque 3×3 ou -3×-3 donnent 9, & non pas -9 . C'est pourquoi ces sortes de grandeurs s'appellent *imaginaires*, & l'on jugera qu'une quantité est *imaginaire*, toutes les fois qu'étant négative, elle se trouvera sous un signe Radical dont l'Exposant sera un nombre pair; par exemple $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt{-a^4}$, &c. sont des grandeurs *imaginaires*; parce qu'aucune grandeur positive ou négative, multipliée par elle-même en nombre pair, ne peut jamais donner un produit négatif.

25. Mais que signifie une grandeur *imaginaire*, pourquoi l'admettre dans le Calcul? Quand on propose la résolution d'un Problème, celui qui la tente ne sçait pas d'abord si on lui a proposé une chose possible ou absurde; il est donc obligé d'exprimer toutes les conditions de la question, quoiqu'il y en ait peut-être qui se contredisent sans qu'on s'en apperçoive; & si, après avoir comparé tout ce qui pouvoit le conduire à la résolution qu'il cherche, il

arrive à un résultat exprimé *imaginativement* ; il est sûr , & il peut démontrer qu'on lui a fait une question absurde , & que par conséquent le Problème est résolu. Comme je l'ai fait voir dans mes *Instit.*

26. Les grandeurs *imaginaires* peuvent donc & doivent entrer dans le Calcul ; elles peuvent même devenir *réelles* en détruisant l'impossibilité qui les empêchoit d'être telles. — 4 est une grandeur *réelle* & très-possible , puisque l'on peut être 4 au-dessous de 0 ou de rien ; tel est l'état d'un homme qui n'ayant rien doit 100^{fr} ; il a 100^{fr} moins que rien , puisqu'en lui donnant 100^{fr} , il seroit encore dans l'état de rien. Si l'on propoisoit donc d'extraire la Racine quarrée de — 4 , dont l'expression seroit $\sqrt{-4}$, on demanderoit une chose absurde , & $\sqrt{-4}$ seroit une *imaginaire* , qui pourroit devenir *réelle* en la multipliant par elle-même , c'est-à-dire , en détruisant l'absurdité qui l'empêche d'être *réelle* ; de sorte que $\sqrt{-4} \times \sqrt{-4} = -4$. Car , comme c'est le Radical $\sqrt{}$ qui fait uniquement l'absurdité de l'expression $\sqrt{-4}$, la seule suppression de ce Radical rendra *réelle* la grandeur qui est dessous. On ne doit donc point s'étonner dans la suite , si l'on voit que des *imaginaires* se calculent , & même qu'elles deviennent *réelles*.

27. Remarquez bien qu'il y a une fort grande différence entre une grandeur *imaginaire* & une grandeur égale à rien ou à zéro ; parce qu'une grandeur égale à rien n'est pas absurde ; il est possible qu'une quantité soit détruite par une autre , au lieu qu'une grandeur *imaginaire* est une quantité absurde , ou qui emporte contradiction. Vous ne pourrez pas dire qu'une *imaginaire* puisse être considérée comme zéro , c'est quelque chose de pis ; de même une grandeur égale à zéro ne peut pas être prise pour une *imaginaire* , puisqu'il n'est pas absurde qu'une grandeur devienne zéro.

28. Moyennant les considérations précédentes , on peut quelquefois simplifier ou réduire à sa plus simple expression

30. Il peut arriver aussi qu'une grandeur Radicale ne change point de valeur , quoique l'Exposant de son signe Radical soit transformé en un autre ; pourvu que la quantité , qui est sous le signe , soit élevée en même-temps au degré qu'indique le nombre par lequel on a multiplié l'Exposant du Radical pour le transformer. Voudriez-vous , par exemple , que l'Exposant de $\sqrt{b}$ fût 6 ? Multipliez l'Exposant 3 par 2 ; élevez après cela la grandeur b au quarré ou au second degré , & vous aurez $\sqrt{b} = \sqrt[6]{b^2}$, lequel a pour Exposant le nombre 6 que l'on demandoit. Pareillement s'agit-il de transformer $\sqrt{c}$ en un autre dont l'Exposant soit 12 ? On multipliera par 3 l'Exposant 4 , & l'on élèvera la grandeur c au troisième degré ; ce qui donnera $\sqrt{c} = \sqrt[12]{c^3}$, où l'on voit l'Exposant demandé.

DÉM. Il s'agit de prouver généralement que $\sqrt{b} = \sqrt[12]{b^2}$: Or cela est évident ; car (14) $\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$, & $\sqrt[12]{b^2} = b^{\frac{2}{12}} = b^{\frac{1}{6}}$: Démonstration qui faute aux yeux.

31. Cette transformation est fort commode pour donner le même Exposant à deux signes Radicaux qui ne l'ont pas , tels que $\sqrt{c}$, $\sqrt[3]{f}$; puisque $\sqrt{c} = \sqrt[12]{c^6}$, & $\sqrt[3]{f} = \sqrt[12]{f^4}$ (30) ; par conséquent , en prenant en la place des deux Radicaux proposés , les grandeurs $\sqrt[12]{c^6}$ & $\sqrt[12]{f^4}$ qui leurs sont égales , on aura des Radicaux dont l'Exposant est le même. Afin donc que deux signes Radicaux , qui n'ont pas le même Exposant , parviennent à l'avoir , il faut multiplier l'Exposant du premier par celui du second , & élever la grandeur sous le signe du premier à la Puissance indiquée par l'Exposant du second ; & réciproquement multiplier l'Exposant du second par celui du premier , & élever la grandeur sous le signe du second à la Puissance indiquée par l'Exposant du premier.

32. Cette Règle n'est sujette à exception , qu'en ce qu'on

une grandeur Radicale : par exemple $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$; $\sqrt{54} = \sqrt{27 \times 2} = \sqrt{3^3 \times 2} = 3\sqrt[3]{2}$. Pareillement $\sqrt{192} = \sqrt{64 \times 3} = \sqrt{4^3 \times 3} = 4\sqrt[3]{3}$ (21). De même $\sqrt{a^2c - a^2b} = \sqrt{a^2 \times c - b} = a\sqrt{a - b}$; on aura encore $\sqrt{c^2s - 2bcs + b^2s} = \sqrt{c^2 - 2bc + b^2} \times s = (c - b)\sqrt{s}$, &c. De sorte que , pour réduire un Radical à sa plus simple expression , il faut tirer la Racine des Facteurs de la grandeur sous le signe , lesquels sont élevés à une Puissance du même degré que celui de l'Exposant du Radical ; laisser les autres Facteurs sous le Radical , & multiplier ce signe par la Racine trouvée : ainsi qu'on l'a démontré au n^o. 21.

29. Ceci nous montre comment l'on peut transformer une quantité Radicale , qui a une Fraction sous le signe , en une autre de même valeur , dont la Puissance sous le signe soit un entier : car , en faisant que le Dénominateur de cette Fraction soit une Puissance parfaite du même degré que l'Exposant du Radical , on pourra , par l'extraction des Racines , ou en réduisant à la plus simple expression , dégager de la grandeur qui est sous le signe , la quantité par laquelle cette grandeur est déterminée à être une Fraction. Ainsi $\sqrt{\frac{2}{3}}$ peut avoir un entier sous le signe sans changer de valeur. Vous n'avez qu'à multiplier le Numérateur & le Dénominateur de cette Fraction par 8 , & vous aurez $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{16 \times 2}{16 \times 3}} = \sqrt{\frac{32}{48}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{3}}$ (28). Vous transformerez par une semblable méthode la grandeur $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, en élevant au Cube le Dénominateur de la Fraction $\frac{2}{3}$; c'est-à-dire en multipliant le Numérateur & le Dénominateur de cette Fraction par le quarré de son Dénominateur ; & vous aurez $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 2}{16 \times 3}} = \sqrt[3]{\frac{32}{48}}$ (21). Enfin $\sqrt[3]{\frac{32}{48}}$ pourra devenir $\sqrt[3]{\frac{b^2d \times c^2}{c^2 \times d \times c^2}} = \sqrt[3]{\frac{b^2d}{c^2}} = \sqrt[3]{b^2d} \times \sqrt[3]{\frac{1}{c^2}}$, &c.

peut la simplifier , lorsque les Exposants des Radicaux ont un Diviseur commun. Alors , après avoir divisé ces Exposants par leur plus grand commun Diviseur , les Quotients qui en proviendront , multiplieront réciproquement les Exposants des Radicaux proposés ; & les grandeurs sous le signe Radical , seront élevées au degré indiqué par le nombre qui aura multiplié l'Exposant de leur Radical. Par exemple : le Radical $\sqrt{b}$ & $\sqrt[3]{c}$ ayant 3 pour leur plus grand commun Diviseur , on divisera 6 par 3 = 2 , & ensuite 9 par 3 = 3 ; après quoi multipliant l'Exposant 6 du premier Radical par le second Quotient 3 , & l'Exposant 9 du second Radical par le premier Quotient 2 , on aura $\sqrt{b} = \sqrt[6]{b^3}$, & $\sqrt[3]{c} = \sqrt[9]{c^2}$; moyennant quoi $\sqrt{b}$ & $\sqrt[3]{c}$ seront transformées en $\sqrt[18]{b^9}$, & $\sqrt[18]{c^4}$, dont le signe Radical a le même Exposant , sans que les Radicaux aient changé de valeur (30).

DÉM. Quant à la manière dont on se comporte à l'égard des grandeurs qui sont sous le signe Radical , elle tire sa Démonstration du n^o. 30. Il reste donc à faire voir , pour les Exposants , que deux grandeurs différentes deviendront égales , si après les avoir divisées par leur plus grand commun Diviseur , on multiplie la première par le second Quotient , & la seconde par le premier. Soient a , c deux grandeurs , & d leur plus grand commun Diviseur. Supposons que $\frac{a}{d} = p$, & $\frac{c}{d} = r$; il faut démontrer que $a \times r = c \times p$. Or cela est manifestement certain ; car , puisque $\frac{a}{d} = p$, on aura $a = dp$, & par la même raison , $c = dr$. Donc $a \times r = c \times p$; ainsi , en divisant par d , $a \times r = c \times p$.

33. Ce que l'on vient d'exposer dans les n^{os}. 31. & 32. peut servir à faire découvrir avec facilité , si deux grandeurs incommensurables , prises séparément , ne seroient pas commensurables entr'elles , ou en les comparant l'une avec l'autre ; c'est-à-dire , si elles ne seroient pas entr'elles , comme un nombre entier ou rompu est à un autre nombre entier

ou rompu ; car , en donnant le même Expoſant aux ſignes Radicaux des grandeurs propoſées , ſi après avoir réduit le Tout à ſa plus ſimple expreſſion , on trouve précifément la même quantité ſous les ſignes Radicaux , ces grandeurs ſeront *commenſurables* , autrement elles ne le ſeront pas.

Par exemple , on trouvera par cette méthode , que $\sqrt{27}$ & $\sqrt{12}$, *incommenſurables* en elles-mêmes , ſont pourtant *commenſurables* entr'elles ; puifqu'elles ſont entr'elles comme 3 eſt à 2 : car $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$ (28) , &

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$. Donc $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2}$.

Par conſéquent $\sqrt{27}$ eſt à $\sqrt{12}$ comme 3 eſt à 2.

Mais , en ſuivant ce qui eſt preſcrit au n°. 31. on trouvera que les Radicaux $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{18}$, *incommenſurables* en ſoi , le ſont auſſi entr'eux ; car les Radicaux propoſés ſe réduiſent à $\sqrt[3]{2^3 \times 2}$, $\sqrt[3]{3^3 \times 2}$, leſquels transformés en Radicaux , dont le ſigne Radical ait le même Expoſant , deviendront $\sqrt[3]{2^3 \times 4}$, $\sqrt[3]{3^3 \times 8}$ (31) de même valeur que les propoſés (30) ; mais ces dernières grandeurs , réduites à leur plus ſimple expreſſion , deviennent $2\sqrt[3]{4}$, & $3\sqrt[3]{8}$ (28) , leſquelles n'ayant pas la même quantité ſous le ſigne Radical , ſont *incommenſurables* entr'elles ; puifque , pour être comme nombre à nombre , il faudroit qu'en les comparant , on pût faire évanouir les ſignes Radicaux ; ce qui n'eſt poſſible que dans le cas , où les grandeurs ſous le ſigne ſont une même quantité.

34. De l'Addition des Radicaux. Nous ſuppoſerons qu'avant d'entamer cette opération , l'on ait fait ſur les Radicaux , au cas qu'il en ſoit beſoin , les préparations que nous venons d'enseigner ; afin que l'on puiſſe juger avec plus de facilité de la ſimilitude des grandeurs de cette eſpèce ; & l'on doit bien remarquer que des grandeurs Radicales ſemblables ſont celles qui ont précifément la même quantité ſous leur ſigne Radical , dont l'Expoſant eſt auſſi le

rention qu'on doit toujours ſuppoſer le Coefficient 1 à tout Radical délivré de Coefficients , ainſi $\sqrt{c} = 1\sqrt{c}$.

1°. Pour multiplier donc une grandeur Radicale par une Rationnelle , on eſt convenu d'écrire la Rationnelle immédiatement avant la Radicale , ſans aucune autre forme , pourvu cependant que l'on obſerve les Règles de la multiplication , par rapport aux ſignes + & —. Par conſéquent $\sqrt{ab} \times c$ ou $c \times \sqrt{ab} = c\sqrt{ab}$. De même $-b \times \sqrt{df}$ ou $-\sqrt{df} \times b = -b\sqrt{df}$. Pareillement $c - d \times \sqrt{f^2} = g^2 = c - d\sqrt{f^2} = g^2$.

2°. Mais , pour multiplier deux Radicaux l'un par l'autre , on commencera par donner un même Expoſant à leur ſigne Radical (31) , s'ils ne l'ont pas ; après quoi on multipliera l'une par l'autre les quantités , qui ſeront hors du ſigne Radical par voie de multiplication ; enfin multipliant l'une par l'autre les grandeurs poſées ſous les ſignes Radicaux , on en fera précéder le produit du ſigne Radical commun , que l'on fera régner au-deſſus de toute l'étendue de ce Produit ; & toute cette grandeur ainſi affectée , ſera écrite immédiatement à la ſuite du Produit des grandeurs qui ſeront hors du ſigne Radical , en obſervant toujours les Règles des ſignes + & — , ſans oublier de réduire le tout à ſa plus ſimple expreſſion. Ainſi $2b\sqrt{cd} \times 4b\sqrt{cd} = 8b^2\sqrt{c^2d^2} = 8b^2cd$ (19). Pareillement $2c\sqrt{bd} \times 3b\sqrt{bc} = 6bc\sqrt{b^2cd} = 6b^2c\sqrt{cd}$ (21). De même $-\sqrt{c-d} \times +\sqrt{c-d} = -\sqrt{c-d}^2 = -1 \times c-d$ (19) = $-c+d$. On trouvera encore que $2a\sqrt{3bc} \times 3b\sqrt{4ab} = 6ab\sqrt{12ab^2c} = 6ab\sqrt{4b^2 \times 3ac} = 12ab^2\sqrt{3ac}$ (21). On verra auſſi que $-\sqrt{c^3} \times -\sqrt{c} = +\sqrt{c^4} = +c$ (19). Voulez-vous ſçavoir quel ſeroit le produit de $\sqrt{cd} \times \sqrt{c^3d}$? Transformez-les d'abord en grandeurs dont le ſigne Radical

le même , & qui outre cela ont des Coefficients ſemblables ; telles ſont les grandeurs $3b\sqrt{cd}$, & $5b\sqrt{cd}$; mais les quantités $a\sqrt{f}$ & $a\sqrt{f}$ ne ſont pas ſemblables. Cela ſuppoſé , pour faire l'Addition des Quantités $2a\sqrt{bc} - 3b\sqrt{df} + c\sqrt{f} + s$ (A) & $3c\sqrt{f} - a\sqrt{bc} - r - b\sqrt{df}$ (B) , vous les diſpoſerez de manière que les termes ſemblables de l'une ſoient ſous les termes ſemblables de l'autre , comme on le voit pratiqué dans l'opération :

$$\begin{array}{r} 2a\sqrt{bc} - 3b\sqrt{df} + c\sqrt{f} + s \text{ (A)} \\ - a\sqrt{bc} - b\sqrt{df} + 3c\sqrt{f} - r \text{ (B)} \\ \hline \end{array}$$

Somme.... $a\sqrt{bc} - 6b\sqrt{df} + 4c\sqrt{f} + s - r$ (D)

Après quoi faiſant la réduction des termes ſemblables , on verra que la Somme des Polynomes A , B , eſt la quantité D.

35. De la Souſtraction des Radicaux. On ſe conduira ici précifément comme dans l'opération précédente , excepté qu'on changera les ſignes des Termes du Polynome à ſouſtraire. Par conſéquent le Polynome $2\sqrt{ad} - b\sqrt{fg} - a\sqrt{fm} + b$ (G) ſouſtrait du Polynome $3b\sqrt{fg} - 2a\sqrt{fm} + 4\sqrt{ad} - d$ (M) donnera le Polynome L pour la différence cherchée ,

$$\begin{array}{r} 3b\sqrt{fg} - 2a\sqrt{fm} + 4\sqrt{ad} - d \text{ (M)} \\ + 2a\sqrt{fm} - 4\sqrt{ad} + b\sqrt{fg} - b \text{ (G)} \\ \hline \end{array}$$

Différ.... $4b\sqrt{fg} - a\sqrt{fm} + 2\sqrt{ad} - d - b$ (L)

ainſi que l'opération le démontre.

36. De la Multiplication des Radicaux. Par oppoſition aux quantités Radicales ou *incommenſurables* , nous appellerons dans la ſuite grandeurs Rationnelles , celles qui ne ſeront affectées d'aucun ſigne Radical , ou qui ne ſeront multipliées par aucune grandeur Radicale. On fera encore ar-

B

ait le même Expoſant , & vous aurez $\sqrt{c^3d^3} \times \sqrt{c^4d^2}$ (31) = $\sqrt{c^7d^5} = \sqrt{c^6 \times c \times d^5} = c\sqrt{cd^5}$ (21). S'agit-il de multiplier l'un par l'autre les deux Radicaux $\sqrt{cd}$ & $\sqrt{df}$? Après avoir donné le même Expoſant à leur ſigne Radical , ils deviendront $\sqrt[3]{c^3d^3}$ & $\sqrt[3]{d^3f^3}$ (32) , leſquels multipliés l'un par l'autre donneront $\sqrt[3]{c^3d^3f^3}$ pour le produit de $\sqrt{cd} \times \sqrt{df}$.

3°. Cependant , ſi l'on avoit une *imaginaire* à multiplier par une *imaginaire* ou par une grandeur *réelle* , il ſeroit mieux d'indiquer ſeulement la multiplication ; afin que dans le cours ou le réſultat du Calcul , on pût toujours reconnoître chaque grandeur imaginaire. Ainſi , pour multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{-c}$, on écrira $\sqrt{a} \times \sqrt{-c}$. Pareillement le produit de $\sqrt{-c^2}$ par $\sqrt{-d^2}$ ſera $\sqrt{-c^2} \times \sqrt{-d^2}$. De même $c\sqrt{df} \times -f\sqrt{-d^2} = -cf\sqrt{df} \times \sqrt{-d^2}$. Enfin $2c\sqrt{-d^2} \times 3b\sqrt{-d^2} = 6bc\sqrt{-d^2} \times \sqrt{-d^2} = 6bc \times -d^2$ (26) = $6bcd^2$.

DÉM. Elle ſe réduit à faire voir que , quand les ſignes Radicaux ont le même Expoſant , il faut multiplier l'un par l'autre les grandeurs qui ſont ſous le ſigne Radical , & affecter ce produit du ſigne Radical commun : car il n'y a aucune difficulté pour les Quantités qui ſont hors du ſigne.

Il ſ'agit donc de démontrer que $\sqrt{c} \times \sqrt{d} = \sqrt{cd}$. Or cela eſt évident ; puifqu'en élevant ces deux grandeurs à la Puiffance 2 , vous trouverez de part & d'autre le même produit cd (Dém. du n°. 21.)

4°. Les Polynomes Radicaux n'étant compoſés que de Monomes , quand on propoſe de multiplier l'un par l'autre deux Polynomes de cette eſpèce , il eſt viſible que l'on ne doit multiplier que des Monomes autant de fois qu'il en eſt beſoin ; & que par conſéquent il faut obſerver ici tout ce

B ij

que l'on a dit & démontré au n°. 36. En supposant toujours que l'on ait eu soin, avant de commencer l'opération, de donner le même Exposant à tous les signes Radicaux. Il suffira donc de proposer des exemples.

$$\begin{array}{r} 2b\sqrt{c} + d\sqrt{f} \\ \times \\ 2b\sqrt{c} + d\sqrt{f} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4b^2c + 2bd\sqrt{cf} \\ + 2bd\sqrt{cf} + d^2f \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4b^2c + 4bd\sqrt{cf} + d^2f \text{ Prod. tot.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3c + \sqrt{-d^2} \\ \times \\ 3c - \sqrt{-d^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9c^2 + 3c\sqrt{-d^2} \\ - 3c\sqrt{-d^2} - 1 \times -d^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9c^2 + d^2 \text{ Prod. tot.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{fg} - \sqrt{cc} - dd \\ \times \\ \sqrt{fg} - \sqrt{cc} - dd \end{array}$$

$$\begin{array}{r} fg - \sqrt{c^2fg} - d^2fg \\ - \sqrt{c^2fg} - d^2fg \end{array}$$

$$\begin{array}{r} fg - 2\sqrt{c^2fg} - d^2fg + c^2 - d^2 \text{ Prod. tot.} \end{array}$$

(20) $= \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{9 \times \frac{1}{3}} = 3\sqrt{\frac{1}{3}}$ (21) : car $3\sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{3} = \sqrt{9 \times \frac{1}{3}} = \sqrt{3}$ (36) = le Dividende 3. Pareillement, s'il s'agit de diviser $\sqrt{21}$ par 7 ; on écrira $\frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{49}} = \sqrt{\frac{21}{49}} = \sqrt{\frac{3 \times 7}{7 \times 7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Si l'on propose de diviser $\sqrt{c^2 - d^2}$ par $\sqrt{c + d}$ On écrira $\frac{\sqrt{c^2 - d^2}}{\sqrt{c + d}} = \frac{\sqrt{c^2 - d^2} \times \sqrt{c + d}}{c + d} = \frac{\sqrt{c^2 - d^2}}{\sqrt{c + d}}$. Soit encore $\sqrt{c^2 - d^2}$ à diviser par $\sqrt{c^2 - d}$: on écrira $\frac{\sqrt{c^2 - d^2}}{\sqrt{c^2 - d}} = \sqrt{\frac{c^2 - d^2}{c^2 - d}} = \sqrt{c^2 - d} = c\sqrt{d}$ Quotient cherché (28).

Supposons, enfin, que l'on veuille diviser $\sqrt[3]{cd}$ par $\sqrt[3]{cd}$. On aura $\frac{\sqrt[3]{cd}}{\sqrt[3]{cd}} = \frac{\sqrt[3]{c^3 d^3}}{\sqrt[3]{c^3 d^3}} = \sqrt[3]{\frac{c^3 d^3}{c^3 d^3}} = \sqrt[3]{1} = 1$ (31) = $\sqrt[3]{\frac{c^3 d^3}{c^3 d^3}}$. Tout cela se démontre en multipliant le Quotient par le Diviseur ; car on retrouve toujours le Dividende.

2°. Mais, si l'on a une Racine imaginaire à diviser par une imaginaire, il suffira d'en indiquer la Division, en donnant la forme de Fraction aux grandeurs proposées, & les réduisant toujours à leur plus simple expression. C'est afin que l'on puisse toujours reconnoître les grandeurs ima-

ginales. Ainsi $\sqrt{-aa}$ divisé par $\sqrt{-bb} = \frac{\sqrt{-aa}}{\sqrt{-bb}}$.

Pareillement $\sqrt{-4}$ divisé par $\sqrt{-2} = \frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{-2}$. De même

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d} - \sqrt[3]{f} \\ \times \\ \sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{d} + \sqrt[3]{f} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{c^2} + \sqrt[3]{cd} - \sqrt[3]{cf} \\ - \sqrt[3]{cd} - \sqrt[3]{d^2} + \sqrt[3]{df} \\ + \sqrt[3]{cf} + \sqrt[3]{df} - \sqrt[3]{f^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{d^2} + 2\sqrt[3]{df} - \sqrt[3]{f^2} \text{ Pr. tot.} \end{array}$$

37. De la Division des Radicaux. La Division étant contraire à la multiplication, tout ce qui s'est multiplié dans l'opération précédente, doit se diviser dans celle-ci. Ainsi 1°. pour diviser un Monome Radical par un Monome Radical ou Rationnel, on commencera par les réduire à de purs Radicaux (20) ; & , après avoir donné le même Exposant aux signes Radicaux du Dividende & du Diviseur (31), on divisera simplement les quantités, qui seront sous le signe Radical du Dividende, par celles du Diviseur ; d'où naîtra une grandeur, laquelle affectée du signe Radical commun fera le Quotient cherché. Par conséquent, s'il s'a-

git de diviser $c\sqrt{d}$ par $\sqrt{cd}$, on écrira $\frac{c\sqrt{d}}{\sqrt{cd}} =$

$$\frac{\sqrt{c^2 d}}{\sqrt{cd}} = \sqrt{\frac{c^2 d}{cd}} = \sqrt{c} \text{ pour le}$$

Quotient cherché ; puisque le Diviseur $\sqrt{cd} \times$ le quotient $\sqrt{c} = \sqrt{c^2 d}$ (36) = le Dividende $c\sqrt{d}$ (28).

Voulez-vous diviser 3 par $\sqrt{5}$? Écrivez $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}$

Bij

me $cd\sqrt{-cc}$ par $-d\sqrt{-cc}$ donnera $\frac{cd\sqrt{-cc}}{-d\sqrt{-cc}} =$

$-c$ pour Quotient. On trouvera encore que $-d^2$

$$\text{divisé par } \sqrt{-d^2} = \frac{-d^2}{\sqrt{-d^2}} = \frac{\sqrt{-d^2} \times \sqrt{-d^2}}{\sqrt{-d^2}} =$$

$\sqrt{-d^2}$ Quotient cherché.

3°. Quand le Dividende fera un Polynome, tandis que le Diviseur n'aura qu'un terme, on divisera successivement chaque terme du Dividende par le Diviseur ; & tous les Quotiens particuliers donneront le Quotient cherché. Voyez l'exemple :

$$\begin{array}{r} \sqrt{24} + \sqrt{48} - \sqrt{72} \quad \sqrt{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{3} - \sqrt{11}} \text{ Quotient} \\ \hline -2\sqrt{6} \text{ ou } -\sqrt{24} - \sqrt{48} + \sqrt{72} \end{array}$$

Soit encore proposé de diviser $c\sqrt{cd} - f\sqrt{cf} - c\sqrt{df}$ par $\sqrt{c}$. On commencera par transformer le Dividende en un Polynome, dont les termes aient toutes leurs lettres sous le signe Radical (22) ; ainsi qu'on le voit pratiqué en B ; après quoi on opérera comme ci-dessus.

$$\begin{array}{r} (B) \sqrt{c^3 d} - \sqrt{cf^3} - \sqrt{c^2 df} - \sqrt{c} \\ \hline -\sqrt{c^3 d} + \sqrt{cf^3} + \sqrt{c^2 df} \quad -c\sqrt{d} + f\sqrt{f} + \sqrt{c^2 df} \text{ Quotient} \end{array}$$

4°. Il est fort possible que le Dividende & le Diviseur soient l'un & l'autre des Polynomes ; alors on se conduira, si rien ne s'y oppose, comme on a fait au n°. 64 Alg. Infir. T. 1. où l'on a donné la méthode de diviser des quantités complexes algébriques, qui ne renferment aucun Radical ; en supposant toujours les préparations dont nous avons

B iv

24. **T R A I T É**
parlé ci-dessus, lesquelles sont particulières aux Radicaux.
Ainsi, pour diviser $c\sqrt{bc} - c\sqrt{bd} + d\sqrt{cm} - d\sqrt{dm}$
par $\sqrt{c} - \sqrt{d}$. On commencera par faire passer sous les
signes Radicaux toutes les lettres qui sont au-dehors par
voye de multiplication : après quoi on procédera, comme
on le voit en G, où le Dividende a reçu la préparation né-
cessaire.

$$(G) \frac{\sqrt{bc^3} - \sqrt{bc^2d} + \sqrt{cd^2m} - \sqrt{d^3m}}{\sqrt{c} - \sqrt{d}} = \frac{\sqrt{bc^3} - \sqrt{bc^2d} + \sqrt{cd^2m} + \sqrt{d^3m}}{c\sqrt{c} + d\sqrt{d}}$$

5°. Cependant, comme en suivant cette méthode, il
arrive fort souvent, que l'on ne peut pas finir entièrement
une Division de Radicaux, on a eu recours à d'autres
transformations, qui sauvent quelquefois cet inconvé-
nient. Pour en faire comprendre l'artifice, soit la gran-
deur $4\sqrt{7} + 3\sqrt{5}$ à diviser par $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$; en les

disposant en forme de Fraction, on aura $\frac{4\sqrt{7} + 3\sqrt{5}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$:

Or, il est évident que cette Fraction ne changera point de
valeur, si on en multiplie le Numérateur & le Dénomina-
teur par une même quantité; ainsi, en les multipliant l'un
& l'autre par $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, on trouvera la nouvelle

Fraction $\frac{12\sqrt{14} + 9\sqrt{10} - 8\sqrt{21} - 6\sqrt{15}}{6}$ demê-

me valeur que la précédente. Si l'on veut donc achever la
Division, après avoir divisé chaque terme du Numérateur
par le Dénominateur 6, on aura $2\sqrt{14} + \frac{3}{2}\sqrt{10} - \frac{4}{3}\sqrt{21} - \sqrt{15}$ pour le Quotient cherché.

Tout l'art de ces sortes de Divisions consiste, comme on

26. **T R A I T É**
par celui de la Racine cherchée, & de réduire le tout à sa
plus simple expression. Ainsi, pour avoir la Racine seconde
de $\sqrt[3]{c}$, on écrira $\sqrt[3]{\sqrt[3]{c}} = \sqrt[6]{c} = \sqrt[6]{c}$. Car $\sqrt[3]{c}$
 $= c^{\frac{1}{3}}$ (14); donc, par la même raison, $\sqrt[3]{\sqrt[3]{c}} = c^{\frac{1}{9}}$
 $= \sqrt[9]{c}$; donc aussi $\sqrt[3]{\sqrt[3]{c}} = \sqrt[6]{c}$.

Pareillement la Racine troisième de $\sqrt[3]{8} = \sqrt[9]{8} =$
 $\sqrt[9]{8}$. Car, puisque $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$, & que $\sqrt[3]{8^{\frac{1}{3}}} = 8^{\frac{1}{9}}$
 $= \sqrt[9]{8}$. On aura $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[9]{8}$.

De même $\sqrt[3]{\sqrt[3]{c}} = \sqrt[6]{c} = \sqrt[6]{c}$, en le
réduisant à sa plus simple expression : ce qui se fait en divi-
sant par une même grandeur l'Exposant du signe Radical,
& celui de la quantité qui est sous ce signe : d'ailleurs, il est
aisé de voir que $\sqrt[6]{c}$, réduit à sa plus simple expression,
 $= \sqrt[6]{c}$. Puisque $\sqrt[6]{c} = c^{\frac{1}{6}} = c^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{c}$ (14).

En général, la Racine r de $\sqrt[3]{c} = \sqrt[r]{c}$; puisque $\sqrt[3]{c}$
 $= c^{\frac{1}{3}}$, on aura $\sqrt[r]{\sqrt[3]{c}} = \sqrt[r]{c^{\frac{1}{3}}} = c^{\frac{1}{3r}} = \sqrt[r]{c}$ (14).

Enfin, la Racine r de $\sqrt[3]{c} = \sqrt[r]{c}$. Car $\sqrt[3]{c}$
 $= c^{\frac{1}{3}}$. Donc $\sqrt[r]{\sqrt[3]{c}} = \sqrt[r]{c^{\frac{1}{3}}} = c^{\frac{1}{3r}} = \sqrt[r]{c}$
(14).

40. Par où l'on voit qu'il est très-facile de ne donner
qu'un seul signe Radical à une grandeur qui en seroit affecté

* $\sqrt[r]{\sqrt[3]{c}}$ Signifie la Racine seconde de la Racine troisième de c .

DES COURBES. 25
le voit, à faire que le Diviseur en soit délivré de Radicaux,
moyennant quoi l'opération est fort simple : mais il n'est
pas toujours aisé, & il est quelquefois très-difficile & fort
laborieux, de trouver la quantité propre à faire évanouir
les signes Radicaux du Diviseur. C'est un des secrets d'une
science très-fine, que l'on appelle *Analyse**, mais dont je
ne traiterai point dans cet Ouvrage.

38. Élever une grandeur Radicale à une Puissance donnée
quelconque. Comme cette opération ne diffère en rien de la
multiplication, on suivra à cet égard tout ce que l'on a
dit & démontré au n°. 36. Ainsi on élèvera au second de-
gré une quantité Radicale, en la multipliant une fois par
elle-même; deux fois pour le troisième; trois fois pour le
quatrième, &c. Voulez-vous avoir le quarré de $\sqrt{a}$? écri-
vez $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2}$ (36) pour le quarré ou le deuxiè-
me degré du Radical proposé. $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^3}$
en sera le cube ou le troisième degré, &c. En général on
élèvera une quantité Radicale à une Puissance p quelcon-
que, en élevant à cette Puissance la grandeur qui sera sous
le signe Radical : par conséquent $\sqrt{x}$, élevée à la Puissance
 $p = \sqrt[p]{x^p}$. Car $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (14); or $x^{\frac{1}{2}}$, élevée à la Puissan-
ce p , $= x^{\frac{p}{2}} = \sqrt[p]{x^p}$ (14) donc, &c.

Pareillement $\sqrt[p]{y}$, élevée à la Puissance n , $= \sqrt[pn]{y^n}$. Puif-
que $\sqrt[p]{y} = y^{\frac{1}{p}}$ (14); mais $y^{\frac{1}{p}}$, élevée à la Puissance n , $=$
 $y^{\frac{n}{p}} = \sqrt[pn]{y^n}$ (14) donc, &c.

39. De l'extraction des Racines des grandeurs Radicales.
Il suffit, dans cette opération, de mettre en la place de
l'Exposant du Radical proposé, le produit de cet Exposant

* *Analyse*, c'est proprement l'art de décomposer, ou de trouver les grandeurs
qui ont concouru à la formation d'une quantité.

DES COURBES. 27
tée de plusieurs : puisque, pour cela, il n'y a qu'à mettre
en la place de l'Exposant du signe Radical, sous lequel se
trouve la quantité Rationnelle, le produit de tous les Expo-
sans des signes Radicaux. Ainsi $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[12]{a^3} =$
 $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[12]{a^3}$. Car $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[12]{a^3}$ (39) donc $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} =$
 $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[12]{a^3}$ (39) $= a^{\frac{3}{12}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$.

Vous trouverez pareillement que $\sqrt[3]{x^4 \sqrt[4]{x^3}} =$
 $\sqrt[12]{x^{19}} = \sqrt[12]{x^{19}}$, en commençant par faire passer sous les
signes Radicaux, les grandeurs qui sont au-dehors par voye
de multiplication (22), & multipliant en suite l'un par l'autre
tous les Exposants des signes Radicaux, afin que leur
produit soit l'Exposant du seul signe Radical qui reste (39).
Nous n'irons pas plus loin sur ce Calcul, quoiqu'on y
ait fait bien d'autres belles découvertes, d'une utilité in-
dispensable pour ceux qui voudroient s'appliquer à l'*Ana-*
lyse, mais absolument superflues pour l'objet que nous
avons ici en vûe.

De la Parabole.

1. DÉFINITIONS. Soit un Triangle quelconque HDC
(fig. 1.); par l'un de ses côtés HC soient conçues
des parallèles, telles que BS, à sa Base CD. Si l'on imagi-
ne présentement que le Triangle HDC tourne sur le côté
HD, comme sur une charnière, en sorte qu'il fasse une cir-
convolution entière, il tracera un espace lequel supposé
Plein est ce que l'on nomme un *Cône*; HD en est l'*Axe*;
CHF le *Triangle par l'Axe*; le Cercle CLF la *Base*; H le
Sommet.

Il est clair que, dans cette circonvolution, les Lignes CD, BS, décrivent des Cercles parallèles; puisqu'on suppose qu'elles conservent leur parallélisme, pendant toute la durée de leur mouvement. Si l'on suppose donc que l'on coupe un Cône par un Plan parallèle à sa Base, il en naîtra un Cercle parallèle; & le Triangle HCF par l'Axe coupant ces deux Cercles, fera que leurs communes Sections BM, CF, seront parallèles (369 *Instr. T. 2.*). Or ce sont les différentes coupes, que l'on peut faire d'un Cône, auxquelles on a donné le nom de *Sections coniques*. Quoique le Triangle & le Cercle soient au nombre de ces *Sections*, on ne les y met pas ordinairement; parce qu'on en suppose les propriétés connues par les *Eléments*. Ainsi nous allons exposer séparément les coupes du Cône, différentes du Triangle & du Cercle. On verra dans la suite qu'il ne peut y en avoir que trois.

L'Histoire ne nous apprend point, si les premiers Géomètres se sont portés à la spéculation de ces *Sections*, par l'attrait de la curiosité ou par la force du besoin (a). Mais, si dans les premiers tems elles ont été une production du

(a) Il me semble que la Géométrie de première nécessité; c'est-à-dire, cette Géométrie indispensable pour la conservation de notre bien être dans l'état de société, a dû être trouvée assez promptement. Tant de personnes ont eu à de pareilles découvertes un intérêt si pressant, qu'il n'y a point de tout lieu d'être surpris, que les inventions les plus utiles soient en même-tems les plus anciennes; mais pour la Géométrie des Courbes, on ne voit pas que les premiers besoins des hommes y aient conduit; le simple nécessaire ne demandant pas des spéculations si profondes. Il faut donc que leur origine soit due à la curiosité de l'esprit humain, qui cherche toujours à être frappé par des sensations nouvelles.

Le premier Auteur des *Sections coniques*, & l'époque précise de leur invention, sont également inconnus. On sait seulement que ces Courbes sont fort anciennes. *Arcimède*, qui vivoit il y a plus de deux mille ans, fait mention, dans les écrits, d'*Eléments de coniques*, comme de Courbes connues par ses prédécesseurs. Peu de tems après lui, Apollonius de Perge travailla sur ces *Sections* avec tant de succès, qu'il en fut surnommé le *Grand Géomètre*. Cependant les modernes ont fait oublier Apollonius. Grégoire de Saint-Vincent s'est distingué par la clarté de ses démonstrations; & j'ignore pourquoi nos Contemporains le recherchent si peu. Il semble que l'on ne connoisse aujourd'hui, en France, que M. de la Hire, & sur-tout Messieurs Guisnée, & de l'Hôpital; sans doute, parce que ces derniers y ont fait usage de l'*Algèbre*, instrument à découvertes le plus commode, le plus expéditif, le plus étendu, & par conséquent le plus beau que l'esprit humain ait jamais inventé.

premier motif, elles sont devenues aujourd'hui le fruit du second. On a découvert que la Nature agit en bien des rencontres, suivant les Courbes que produisent ces *Sections*, & qu'elles sont indispensables dans la perfection des Arts: il faut donc en étudier les propriétés, ne fût-ce que pour augmenter notre bonheur.

2. PROPOSITION I. Une Perpendiculaire DA (fig. 2.) sur un Plan BM, est nécessairement Perpendiculaire sur toutes les Lignes AB, AC, AM, &c. du Plan, menées par le pied A de cette Perpendiculaire.

DÉM. Car une Perpendiculaire sur un Plan, est une Ligne qui n'incline d'aucun côté sur le Plan, au-dessus duquel elle est élevée. Or, si la Ligne AD n'étoit pas Perpendiculaire à toutes les Lignes, menées par son pied A sur le Plan BM, il faudroit qu'elle inclinât de quelque côté. Ce qui est contre la supposition. Donc, &c. C. Q. F. D.

3. PROPOS. II. D'un Point A, pris dans un Plan, on ne sçauroit élever qu'une Perpendiculaire AD au-dessus de ce Plan. Il n'est pas possible non plus d'abaisser deux Perpendiculaires sur un Plan, d'un même point D pris au-dessus de ce Plan.

DÉM. 1°. Puisque AD est Perpendiculaire sur le Plan BM, elle fait donc des Angles droits avec toutes les Lignes du Plan, lesquelles passent par le point A (2): ainsi toute Ligne AS, différente de AD, fera des Angles plus petits ou plus grands; elle ne sera donc pas Perpendiculaire.

2°. par la même raison, toute autre Ligne DO ne pourra pas être Perpendiculaire sur le Plan BM; car, si elle l'étoit, elle le seroit aussi sur AB, tirée par l'extrémité O (2), & l'Angle AOD seroit droit ainsi que DAO; par conséquent les trois Angles du Triangle DAO vaudroient plus de deux Angles droits, ce qui est impossible. Il est donc aussi impossible que la Ligne DO soit Perpendiculaire. C. Q. F. D.

4. PROPOS. III. La commune Section DA (fig. 3.) de deux Plans BM, CT, Perpendiculaires sur un troisième Plan OS, est aussi Perpendiculaire sur ce troisième Plan.

DÉM. Elevons du point A une Perpendiculaire sur le

DÉM. Imaginons que, par un Point M quelconque du Périmètre de la *Parabole*, on fasse passer un Plan, qui coupe la solidité du Cône parallèlement au Cercle de sa base; ce Plan, dont la coupe est aussi un Cercle (1), sera Perpendiculaire au Plan du Triangle par l'Axe, à cause que la Base du Cône est supposée Perpendiculaire sur le Plan de ce même Triangle; la Parabole DAS & le Cercle CDFS sont donc Perpendiculaires sur le même Plan HCF; par conséquent leur commune Section DBS est aussi Perpendiculaire sur ce Plan (4); donc elle est Perpendiculaire au Diamètre CF & à l'Axe AB, qui passent par son extrémité B (2); parce que ces Lignes sont dans le Plan du Triangle par l'Axe; ainsi DB est une Ordonnée à l'Axe AB (5), & DB = BS (par la nature du Cercle). Et, si nous raisonnons précisément de même par rapport à la commune Section MPT de la Parabole & du Cercle OMGT, nous verrons que MPT est Perpendiculaire sur le Diamètre OG, ainsi que sur l'Axe AB; que par conséquent MP est une autre Ordonnée à la Parabole, & que MP = PT.

Ceci bien entendu, considérons les Triangles semblables APO, ABC, nous aurons AP. AB :: PO. BC :: PO x PG. BC x BF; parce que PG = BF, à cause du parallélisme des Lignes AB, HF (supp.), & de celui des Lignes PG, BF (const.); donc AP. AB :: PO x PG. BC x BF. Or PO x PG = PM, & BC x BF = BD (par la nature du Cercle.) par conséquent (en substituant ces dernières valeurs) nous aurons AP. AB :: PM. BD, ou PM. BD :: AP. AB. C. Q. F. D.

* 7. Réciproquement, si la Section d'un Cône, faite perpendiculairement au Triangle HCF par l'Axe de ce solide (& non parallèlement ni antiparallèlement (a) à sa Base circulaire), est telle que les quarrés des Ordonnées à l'Axe de la Section soient entr'eux comme les Abscisses correspondantes, cette coupe sera une *Parabole*, c'est-à-dire, que si

30 T R A I T É

Plan OS, elle se trouvera nécessairement dans le Plan BM, ainsi que dans le Plan CT. Car, comme une Perpendiculaire sur un Plan n'incline d'aucun côté, si elle ne se trouveroit pas en même-tems, dans les Plans BM, CT, il faudroit que ces Plans s'en écartassent, & qu'ainsi ils penchassent plus d'un côté que de l'autre sur le Plan OS, ce qui est contre la supposition: la Perpendiculaire, élevée du Point A sur le Plan OS, se trouve donc nécessairement sur les deux Plans BM, CT; or cette Perpendiculaire étant unique (3), ne peut se trouver que dans l'étendue commune à ces Plans, c'est-à-dire, dans leur commune Section. Ainsi la commune Section DA n'est pas différente de la Perpendiculaire, que l'on élèveroit au Point A sur le Plan OS; cette commune Section est donc Perpendiculaire sur ce Plan. C. Q. F. D.

5. DEFINITIONS. Supposons que le Triangle HCF (fig. 4.) soit la coupe d'un Cône droit ou oblique par l'Axe de ce solide; que d'un Point A quelconque d'un côté HC de ce Triangle, l'on tire sur sa surface la Ligne AB parallèlement à l'autre côté HF; & que par cette Ligne AB l'on fasse passer un Plan Perpendiculaire à celui du Triangle HCF; ce Plan formera, dans la solidité du Cône, une nouvelle surface DMATS, à laquelle on a donné le nom de *Parabole* (a); la Ligne AB en est l'*Axe*; le point A le *Sommet*; toute Ligne MP ou DB, abaissée d'un Point quelconque M ou D de son Périmètre perpendiculairement à son *Axe* s'appelle *Ordonnée* à cet *Axe*; une partie quelconque de cet *Axe* comprise entre le Sommet A & la rencontre d'une Ordonnée, est une *Abcisse*; ainsi les Lignes AP, AB sont des *Abcisses*; quelquefois on les nomme *Coupées* ou *Flèches Sagitta* (b).

6. PROPOS. IV. Les Quarrés des Ordonnées dans la Parabole, sont entr'eux comme les *Abcisses* correspondantes, c'est-à-dire que PM. BD :: AP. AB.

(a) On en verra bien-tôt la raison.

(b) C'est par le rapport de toutes ces Lignes, les unes à l'égard des autres, que l'on parvient à déterminer les propriétés des Courbes, &c.

(a) Voyez au n°. 4. de l'Ellipse ce que c'est qu'une coupe *Antiparallèle*.

l'on a en ce cas, $PM. BD :: AP. AB$, l'Axe de la Section sera parallèle au côté HF du Triangle HCF.

DEM. Supposons que, quand on a fait cette coupe, tous les Cercles Perpendiculaires au Plan du Triangle par l'Axe du Cône aient été décrits; il est évident que cette coupe a dû passer par le Plan de plusieurs de ces Cercles, tels que OMGT, CDFS, & que par conséquent les communes Sections PM, BD, qu'elle fait avec ces Plans, sont Perpendiculaires sur le Plan du Triangle HCF (4); ainsi PM, BD étant par-là Perpendiculaires à l'Axe AB de la coupe, & aux Diamètres OG, CF des Cercles (2), on voit que ces Lignes sont, en même-tems, Ordonnées à l'Axe de la coupe & aux Diamètres des Cercles; donc $PM = OP \times PG$, & $BD = CB \times BF$; mais (supp.) $PM. BD :: AP. AB$; par conséquent, (en substituant dans cette proportion la valeur de PM & celle de BD) on aura $OP \times PG. CB \times BF :: AP. AB$. Or, (à cause des Triangles semblables APO, ABC,) $AP. AB :: OP. CB$; donc $OP \times PG. CB \times BF :: OP. CB$; ainsi $OP \times PG \times CB = CB \times BF \times OP$; donc (en divisant par $OP \times CB$) on aura $PG = BF$. Par conséquent, puisque les Cercles, OMG, CDF sont parallèles (conf.), leurs communes Sections OG, CF, faites par le Plan HCF, sont aussi Parallèles (369 *Inst. T. 1.*); ainsi les Lignes AB, HF, qui passent par les extrémités des Parallèles égales PG, BF, sur le même Plan, sont aussi Parallèles, & par conséquent la Section conique proposée est une *Parabole* (5) [4].

[4] Quand on parle d'un Triangle par l'Axe d'un Cône, il ne faut pas se persuader que ce que l'on en dit, soit tellement particulier à ce Triangle déterminé, qu'il ne puisse pas convenir à une infinité d'autres Triangles par l'Axe de ce même Cône. Puisque le Triangle générateur de ce solide, passant toujours par son Axe, est répété autant de fois qu'il y a de Points dans la circonférence de la Base du Cône.

Cependant un Triangle par l'Axe étant une fois déterminé; la Section du Cône, qui se fait perpendiculairement à son Plan, ne convient qu'à lui; c'est-à-dire, en reprenant la fig. 4. que de tous les Triangles possibles par l'Axe du Cône, si l'on s'est déterminé au Triangle HCF, il est le seul sur lequel puisse tomber perpen-

8. REMARQ.

de plus en plus; car $PM. BD :: AP. AB$. Or AB étant plus grande que AP, il faut que BD soit aussi plus grand que PM; & par conséquent, que l'Ordonnée BD soit plus grande que l'Ordonnée PM. Ainsi plus l'Axe s'allonge, plus les Ordonnées croissent; c'est-à-dire que leurs extrémités sont plus éloignées de l'Axe; or ces extrémités sont à la Parabole; par conséquent la Parabole s'éloigne de plus en plus de son Axe.

11. COROL. III. D'où il suit qu'en tirant une parallèle quelconque OV (fig. 5.) à l'Axe de la Parabole, cette parallèle rencontrera nécessairement la Courbe en un seul Point M, & entrera ou sera déterminée à entrer dans l'espace parabolique: car une parallèle à l'Axe est toujours à égale distance de cet Axe; mais nous venons de voir que la Parabole s'en écarte toujours de plus en plus; elle passera donc au-delà de cette parallèle, & ne pourra avoir qu'un Point de commun avec elle.

12. COROL. IV. Si l'on joint les Points D, M, par une corde, elle ira nécessairement rencontrer l'Axe en quelque Point T; puisque, si elle étoit parallèle à l'Axe, elle ne pourroit couper la Courbe qu'en un seul point (11); or elle la coupe en deux Points (supp.); elle n'est donc pas parallèle à l'Axe: ainsi elle est déterminée à le rencontrer en quelque Point T.

13. COROL. V. Une Tangente à la Parabole, ira aussi nécessairement rencontrer l'Axe de cette Courbe. Car elle sera déterminée à rencontrer cet Axe, ou elle lui sera parallèle; or, si elle lui étoit parallèle, elle entreroit dans l'espace parabolique (11); ce qui est impossible, puisqu'on la suppose Tangente. Par conséquent une Tangente à la Parabole va nécessairement rencontrer l'Axe de cette Courbe.

14. COROL. VI. Deux Tangentes quelconques, TRG, CHL, à la même branche d'une Parabole, se coupent nécessairement, ou sont déterminées à se couper en quelque Point I: Puisque, si l'une des Tangentes CHL étoit paral-

8. REMARQ. Le Triangle HCF, Section du Cône par l'Axe, fait voir que le circuit d'une Section conique n'est pas toujours une Courbe: on ne peut donc pas avancer, sans démonstration, que le Périmètre de la *Parabole* en soit une.

9. COROLAIRE I. Une portion quelconque AMD, du Périmètre de la Parabole est une Ligne courbe. Car, si la Ligne AMD étoit droite, on auroit $PM. BD :: AP. AB$; mais (6) $PM. BD :: AP. AB$, donc $PM. BD :: PM. BD$; ainsi $PM \times BD \times BD = PM \times PM \times BD$ [4]. Donc (en divisant par $PM \times BD$) on auroit $BD = PM$, & par conséquent $AB = AP$; ce qui est absurde. La Ligne AMD ne sauroit donc être une droite; ainsi il est nécessaire que ce soit une courbe.

Puisque la Parabole, son Axe & ses Ordonnées se trouvent dans un même Plan, nous pouvons considérer cette Courbe, indépendamment du Cône, où elle a pris naissance; la transporter sur une surface plane & rechercher les autres propriétés qui la caractérisent; de manière que toutes les Lignes tirées à ce dessein, seront toujours supposées dans le Plan de la Parabole.

10. COROL. II. La Parabole s'éloigne donc de son Axe

diculairement la commune Section DBS; étant évident qu'une Ligne perpendiculaire à l'un de deux ou plusieurs Plans qui se coupent, ne peut pas être en même-tems perpendiculaire à tous les autres.

Ce n'est pas qu'il ne puisse naître une Section conique de la coupe d'un Plan, qui ne seroit pas perpendiculaire au Triangle par l'Axe que l'on auroit choisi; parce que, si ce Plan coupant n'est pas perpendiculaire à un certain Triangle par l'Axe, il le sera nécessairement à quelqu'autre: ainsi la raison pour laquelle on se détermine à faire couper le Cône, par un Plan perpendiculaire à celui du Triangle par l'Axe, auquel on s'est arrêté, est que cette manière de le couper est plus propre que toute autre aux démonstrations dont on a besoin; & que d'ailleurs, sans cette condition, les communes Sections telles que DBS, MPT, ne seroient pas coupées en deux parties égales, par les Diamètres CF, OG; cela ne pouvant arriver que dans le cas, où DBS & MPT sont perpendiculaires à ces Diamètres; or la perpendicularité de ces Lignes dépend de celle du Plan coupant au Triangle par l'Axe, ainsi qu'il est évident.

[4] J'avertis une fois pour toutes que, quand je conclurai une égalité d'une proportion, c'est que j'aurai fait le produit des Extremes & celui des Moyens.

C

lèle à l'autre, comme elle a un de ses Points H au-dessous de l'autre Tangente TRG, par rapport à l'Axe, il faudroit nécessairement que tous ses autres Points, fussent aussi au-dessous de cette Tangente, & par conséquent qu'elle entrât dans l'espace parabolique; ce qui n'est pas possible, vu qu'on la suppose Tangente: or, CHL n'étant pas parallèle à TRG, coupe nécessairement, ou est déterminée à couper cette dernière en quelque Point I.

15. COROL. VII. Par conséquent, en tirant d'un Point quelconque K de la Parabole, une parallèle KS à une Tangente quelconque TRG à cette Courbe, cette parallèle coupera nécessairement la Courbe en un autre Point Q. Car, si l'on menoit par un Point quelconque H, au-dessous de R, une autre Tangente CHL, elle couperoit nécessairement la première en quelque Point I (14); donc elle couperoit aussi la parallèle KS; mais elle ne pourroit la couper qu'au-dehors de la Courbe; il faudroit donc que cette parallèle sortît au-dehors, & par conséquent qu'elle coupât une seconde fois la Parabole.

16. DÉFIN. Cherchez une troisième proportionnelle à une Abcisse AP quelconque & à son Ordonnée correspondante PM; c'est-à-dire faites AP. PM :: PM. p, où p est à une quatrième Ligne, ou AB. BD :: BD est à un quatrième terme, & la Ligne que vous trouverez de cette manière, est ce que les anciens Géomètres appelloient *Latus rectum*, & ce que les modernes nomment *Paramètre*; nous la désignerons dans la suite par la lettre p, à cause que cette quatrième proportionnelle est une *Constante*; c'est-à-dire que l'on en trouve toujours la même valeur, de quelque Abcisse que l'on se serve; ainsi qu'on va le faire voir.

17. COROL. VIII. Si l'on fait donc AP. PM :: PM. p, & AB. BD :: BD. m, (en quelqu'endroit de l'Axe que tombent les Points P, B.) Je dis qu'on trouvera toujours $p = m$. Car alors $PM = AP \times p$ & $BD = AB \times m$: ainsi $PM. BD :: AP \times p. AB \times m$. Mais (6) $PM. BD :: AP. AB$, donc $AP \times p. AB \times m :: AP. AB$, ainsi $AP \times AB \times p = AP \times AB$

C ij

$\times m$; & par conséquent (en divisant par $AP \times AB$) on trouve $p = m$ [a].

* 18. *Autre manière de trouver le Paramètre.* Cela est fort aisé, quand la Parabole & son Axe AB sont donnés, en tirant du Sommet A une corde quelconque AN, (fig. 19.) sur laquelle on élèvera, au Point N, la Perpendiculaire NB, qui coupera l'Axe en quelque Point B; car, après cela, si du Point N on tire l'Ordonnée NF, la Ligne FB sera le Paramètre (16); puisque $AF : NF :: NF : FB$ (291 *Inst. T. 2.*).

* 19. *Troisième manière.* Tirez au Sommet de l'Axe, une corde qui fasse avec lui un Angle demi-droit ou de 45 degrés; & du Point M où cette corde coupe la Courbe, abaissez une Perpendiculaire ou une Ordonnée PM à l'Axe; alors cette Ordonnée ou son Abcisse correspondante sera égale au Paramètre. Car AP égalant PM (const.) on aura $AP \times AP = PM \times PM = AP \times p$ (16). Donc $p = AP = PM$.

20. COROL. IX. Puisque le Paramètre p est une grandeur constante, & qu'il est toujours une troisième proportionnelle à une Abcisse quelconque & à son Ordonnée correspondante; il est clair que le carré d'une Ordonnée quelconque à la Parabole, est toujours égal au Rectangle du Paramètre par l'Abcisse correspondante. En effet, si l'on reprend les proportions $AP : PM :: PM : p$ & $AB : BD :: BD : m$, du n°. 17 (fig. 5) & que l'on mette p au lieu de m (17.), on aura toujours $PM = AP \times p$ & $BD = AB \times p$, & ainsi des autres Ordonnées. En faisant donc une Ordonnée quelconque $PM = y$, & son Abcisse correspondante $AP = x$, l'on aura $yy = px$; équation qui caractérise la Parabole; & d'où cette Courbe a tiré son nom; car le mot Grec *Paraballein*

[a] Comme cette troisième proportionnelle à une Abcisse quelconque & à son Ordonnée correspondante, se trouve toujours la même, c'est ce qui lui a fait donner le nom de Paramètre; parce que cette Ligne est une espèce de *Motule*, qui détermine les Dimensions de la Parabole, en quelque Point qu'on la prenne: sans cette Ligne, qui se trouve déterminée par la nature de la Section, il seroit difficile de construire cette Courbe indépendamment du Cône; &, au moins, l'on ne pourroit pas en fixer les Dimensions; puisque les Abcisses & les Ordonnées en sont indéterminées.

HD. Car $MP = AP \times p$ (20) & $MD \times DC = HD \times p$ (21). Donc $MP : MD \times DC :: AP \times p : HD \times p :: AP : HD$. (en divisant par p). Ainsi $MP : MD \times DC :: AP : HD$.

* 23. Réciproquement, si une Ligne quelconque MC, divisée en deux parties égales par une Perpendiculaire AP, est telle qu'étant divisée en un autre Point quelconque D par une Perpendiculaire HD l'on ait toujours $MP : MD \times DC :: AP : HD$: je dis que les Points M, A, H, C, seront à une Parabole, dont AP est l'Axe.

DEM. Nous savons déjà que $MD \times DC = MP - HG$ (Dém. du n°. 21.), & $HD = AP - AG$. Or (supp.) $MP : MD \times DC :: AP : HD$. Donc $MP : MP - HG :: AP : AP - AG$; donc (en soustrayant) $HG : MP :: AG : AP$. Les carrés des Ordonnées HG, MP, sont donc entr'eux comme les Abcisses correspondantes AG, AP. Par conséquent, les Points M, A, H, sont à la Parabole dont l'Axe est AP (7); d'ailleurs PC étant $= PM$ (supp.), le Point C est aussi à la même Parabole. C. Q. F. D.

Ce Corollaire & sa converse sont utiles dans la doctrine du jet des bombes.

24. PROBLÈME. La Ligne BD (fig. 5.) étant donnée pour le Paramètre d'une Parabole, construire cette Courbe.

RÉSOLUTION. Prenez une Ligne quelconque indéfinie AB, dont vous déterminerez l'origine au Point A, & le regardant comme l'Axe de la Courbe à construire, divisez cette Ligne en autant de parties égales ou inégales que vous le voudrez, mais cependant les plus petites qu'il vous sera possible; aux Points de division P, E, élevez des Perpendiculaires PM, EN, (on n'en tire ici que deux pour éviter la confusion des Lignes), dont chacune soit moyenne proportionnelle entre son Abcisse correspondante & le Paramètre donné BD; enfin, faites passer une Courbe par les

signifie *égaler*. Par conséquent, si dans la résolution d'un Problème, il arrive que le carré d'une Ordonnée ou d'une Perpendiculaire quelconque PM à une Ligne AB, dont l'origine A est fixe, soit égal au Rectangle de l'Abcisse AP par une constante p , on pourra assurer que les extrémités M de toutes ces Ordonnées se trouveront dans une Parabole; & qu'ainsi, pour avoir la solution entière du Problème, il faudra construire cette Courbe.

Car, faisant une autre Ordonnée $BD = z$, & son Abcisse correspondante $AB = u$, on aura (supp.) $yy = px$, & $zz = pu$; donc $yy : zz :: px : pu :: x : u$ (en divisant par p); c'est-à-dire que les carrés yy, zz des Ordonnées sont entr'eux comme les Abcisses x, u , correspondantes. Or, quand cela arrive, la Ligne qui passe par les extrémités de ces Ordonnées est une Parabole (7). L'équation $yy = px$, ou $zz = pu$ exprime donc une Parabole; & l'Ordonnée y ou $PM = \sqrt{px}$.

* 21. COROL. X. D'un Point quelconque H d'une Parabole (fig. 6.), différent du Sommet A, abaissez une Perpendiculaire HD sur la double Ordonnée MC à l'Axe AP de cette Courbe, & vous aurez toujours $MD \times DC = HD \times p$.

DÉMONST. $MD \times DC = MP + PD \times PC - PD = MP + PD \times MP - PD$ (parce que $MP = PC$) $= MP - PD = MP - HG$ (à cause de $HG = PD$); donc $MD \times DC = MP - HG$. Or, $MP = AP \times p$, & $HG = AG \times p$ (20); donc $MP - HG = AP \times p - AG \times p = AP - AG \times p = GP \times p = HD \times p$. Ainsi $MP - HG = HD \times p$. Par conséquent, puisque $MD \times DC = MP - HG$, ainsi qu'on l'a vu; il est clair que $MD \times DC = HD \times p$. C. Q. F. D.

* 22. COROL. XI. D'où il suit que $MP : MD \times DC :: AP : C$ ij

extrémités M, N, de ces Perpendiculaires, ce sera la Parabole qu'on demande.

DEM. Par la const. $AP : PM :: PM : BD$, donc $AP \times BD = PM^2$: de même $AE : EN :: EN : BD$: donc $AE \times BD = EN^2$, & ainsi à tous les autres Points; on a donc, en quelque Point que ce soit, le carré de l'Ordonnée PM égal au Rectangle de l'Abcisse AP correspondante par le Paramètre BD; & par conséquent l'on a (20) la Parabole cherchée.

25. *Autre manière.* Soit la Ligne indéfinie AL (fig. 7.) dont la partie AC est le Paramètre donné. Au Point C élevez la Perpendiculaire indéfinie ds. Après quoi d'un Point quelconque D pris sur AL, & d'un Rayon DA > BA moitié de AC, décrivons le Cercle HmA. Opérons de même aux Points F, G, C, &c. avec les Rayons FA, GA, CA, &c. nous aurons des Cercles qui couperont l'indéfinie ds aux Points m, o, p, r, &c. Enfin avec les deux Lignes Cm, CH, achevons le Rectangle Cr, pour avoir le Point r qui sera à la Parabole cherchée. Opérant de même avec les deux Lignes CO, CI; ainsi qu'avec Cp, CK; ou encore Cr, CL, &c. nous trouverons de cette manière autant de Points u, x, y, &c. lesquels seront à la même Parabole.

DEM. Soit le Paramètre AC = p, par la nature du Cercle CH. $Cm : AC$ ou p , donc $Cm = CH \times p$. Or $Cm = Hr$. Ainsi $Hr = CH \times p$; donc (20) le Point r est à une Parabole, dont le Paramètre = AC. Et l'on se conduira de même pour démontrer, que les autres Points u, x, y, &c. sont à cette Parabole. C. Q. F. T. & D.

26. *Je me suis beaucoup étendu sur les premières idées, qui nous ont fait découvrir les propriétés fondamentales ou caractéristiques de la Parabole, & nous ont conduit à sa construction; mais, comme ce sera une marche semblable pour les autres Sections coniques, ceci est démontré une fois pour toutes. Ainsi les Commencans, qui voudront prendre bien l'esprit de la Géométrie, c'est-à-dire, la manière dont on procède pour y faire des découvertes, doivent insister continuellement sur ces premiers Eléments,*

40. *être très-persuadés que savoir bien c'est savoir beaucoup.*

27. PROB. Une Parabole DAH (fig. 5.) étant donnée avec son Sommet A, trouver son Axe, son Paramètre, l'Ordonnée & la double Ordonnée égales au Paramètre.

RÉSOL. 1°. Du Point A, d'une ouverture de compas quelconque AM, décrivez un Cercle qui coupe la Parabole en deux Points M, R; & tirant la corde MR, menez du Point A la Ligne indéfinie AB par son milieu P; il est clair que PM = PR fera Perpendiculaire sur AB; & que par conséquent (5) AB fera l'Axe & PM ou PR une Ordonnée.

2°. Faites AP. PM :: PM est à une quatrième Ligne, & vous aurez le Paramètre p . (16).

3°. Prenez l'Abcisse AP égale au Paramètre trouvé p , & tirez l'Ordonnée PM, elle sera égale au Paramètre. Car, puisque $\overline{PM} = AP \times p$ (20) = pp (supp.), vous aurez $\overline{PM} = p$.

4°. Faites AP = $\frac{p}{2}$ & tirez l'Ordonnée MP, que vous prolongerez jusqu'à la rencontre R de l'autre branche de la Parabole, & vous aurez MR = p . Car $\overline{PM} = AP \times p$ (20) = $\frac{p}{2} \times p$ (supp.) = $\frac{p^2}{2}$. Donc $\overline{PM} = \frac{p}{2}$. Donc 2 PM ou MR = p .

28. DEF. Nous avons déjà vu (13) qu'une Tangente NT (fig. 8.) à la Parabole rencontre nécessairement l'Axe de cette Courbe; ainsi, en tirant du Point de contingence N une Ordonnée NE à l'Axe, la Tangente NT, l'Ordonnée NE & la portion de l'Axe TE, que l'on nomme alors *sous-Tangente*, formeront un Triangle-Rectangle TEN. Mais on sait que deux côtés quelconques d'un Triangle-Rectangle étant déterminés, le troisième l'est nécessairement: par conséquent, si on proposoit de trouver une méthode de mener une Tangente en un Point N quelconque d'une Parabole ou d'une Courbe, dont on connoît le rapport des Abcisses aux Ordonnées de l'Axe, on voit qu'après avoir mené du Point donné N l'Ordonnée NE à l'Axe, il ne s'agit que de déterminer la sous-Tangente TE, c'est-à-dire, de trouver le rapport qu'elle a avec l'Abcisse AE ou quel-

qu'autre Ligne connue. Or, voici la méthode générale dont je me fers pour cela, & qu'aucun Auteur n'a donnée, au moins que je sache; elle est fort simple: mais l'exemple suivant la fera encore mieux entendre que le raisonnement pur.

29. PROB. V. Dans la Parabole, la sous-Tangente TE est toujours double de l'Abcisse AE.

DEM. Que l'on se représente d'abord la Sécante TMD (fig. 5.) qui passe au Point M, où l'on voudroit avoir une Tangente. En ce cas, si l'on faisoit tourner la Ligne TMD sur le Point T vers la gauche, jusqu'à ce qu'elle cessât de couper la Courbe; il est clair que les Points D, M, d'intersection, se rapprochant toujours l'un de l'autre, se confondroient enfin, lorsque TMD deviendroit Tangente, & qu'alors PT seroit la *sous-Tangente*. Faisons présentement

AP = x . PB = d . Ainsi AB = $x + d$. PT = s , & PT = ss , donc BT = $s + d$, & BT = $ss + 2ds + dd$

Ceci supposé, nous avons (6) BD. PM :: AB ($x + d$). AP (x), & (à cause des Triangles semblables TBD, TPM) BD. PM :: BT ($ss + 2ds + dd$). PT (ss). Par conséquent $x + d : x :: ss + 2ds + dd : ss$. Donc, (en soustrayant) $d : x :: 2ds + dd : ss$. Ainsi $ds = 2dsx + ddx$. Donc, (en divisant par d) $s = 2sx + dx$ (A), ou $2s + d : s :: s : x$; ainsi le rapport de s à x , c'est-à-dire de la sous-Tangente à l'Abcisse, vaut celui de $2s + d$ à la quantité s , en supposant que TMD soit Sécante. Mais, dans l'instant que TMD devient Tangente, les Points D, M se confondent, & la différence PB = d des Abcisses devient = 0; Effaçant donc, dans l'équation A, le terme où d se trouve, cette équation devient $s = 2sx$, ou (en divisant par s) $1 = 2x$. Ce qui signifie que la sous-Tangente PT est double de l'Abcisse correspondante AP. Et, comme cela arrive, en quelque Point que ce soit de la Courbe, on voit que, si l'on suppose TN Tangente (fig. 8.), on aura la sous-Tangente TE double de l'Abcisse AE. C. Q. F. D.

30. Réciproquement, si après avoir tiré du Point N de la Parabole une Ordonnée NE à son Axe, l'on fait AT = AE, pour avoir TE double de l'Abcisse AE, je dis que TN, menée du Point T à l'extrémité N de l'Ordonnée NE, sera Tangente à la Parabole.

DEM. Elle sera Tangente ou Sécante; or il est impossible qu'elle soit Sécante; car, si elle l'étoit, on pourroit donc du Point N tirer une Tangente NS, qui iroit rencontrer l'Axe (13) en un Point s au-dessus ou au-dessous de T; mais, quand NS est Tangente, nous venons de voir que la sous-Tangente ES est double de l'Abcisse AE; ainsi l'on auroit ES = 2 AE: or (supp.) TE = 2 AE. Donc ES = TE, c'est-à-dire, la partie égale au tout, ce qui est absurde. Il est donc impossible que TN soit Sécante; c'est par conséquent une Tangente.

31. COROL. I. D'où il suit, qu'en élevant au Point N de contingence, la Perpendiculaire NL à la Tangente NT, cette Perpendiculaire rencontrera l'Axe en un Point L, tel que la sous-Perpendiculaire ou sous-Normale EL sera égale à la moitié du Paramètre; il faut donc prouver que EL = $\frac{p}{2}$.

DEM. Supposant NE = y . AE = x . TE = $2x$ (29); nous aurons 2 x (TE). y (NE) :: y (NE). EL (parce que le Triangle TNL est Rectangle en N, & que NE est Perpendiculaire sur TL (const.)); donc EL = $\frac{y^2}{2x}$. Or $yy = px$ (20); par conséquent EL = $\frac{px}{2x} = \frac{p}{2}$.

* 32. COROL. II. D'un Point quelconque de la Parabole, tirez une double Ordonnée MPQ à l'Axe AO de cette Courbe (fig. 9.), une Tangente MG, & une Perpendiculaire QG au Point Q. Si l'on mène, après cela, une Ligne quelconque MT ou t , jusqu'à ce qu'elle coupe la Courbe en quelque Point T ou t , au-dessus ou au-dessous de MQ, & qu'elle rencontre QG au Point R ou r ; qu'enfin du Point T ou t , l'on abaisse la Perpendiculaire TS ou ts sur MQ, prolongée s'il est nécessaire; je dis que, si la Ligne MT tombe au-dessus ou au-dessous de MQ, & qu'on joigne les Points S, R, ou s , r , par la droite SR

ou sr , cette Ligne SR ou sr sera nécessairement parallèle à la Tangente MG.

DEM. Du premier cas, il faut démontrer que MQ. QG :: QS. QR. Soit AP = x ; PL = $2x$ (29); le Paramètre = p ; PQ = MP = $\sqrt{px}$ (20); MQ = $2\sqrt{px}$; QG = $4x$, (car MQ = 2 MP; donc QG = 2 PL = $4x$) PS = d ; MS = MP + PS = $\sqrt{px} + d$; QS = PQ - PS = $\sqrt{px} - d$; tirant l'Ordonnée TO = PS = d , l'on aura AO $\times$ p = TO = dd (20), donc AO = $\frac{dd}{p}$; ainsi PO = AP - AO = $x - \frac{dd}{p}$ = ST. Mais MS. ST :: MQ. QR; c'est-à-dire (en mettant les valeurs analytiques de MS, ST, MQ) $\sqrt{px} + d : x - \frac{dd}{p} :: 2\sqrt{px}.$

QR = $\frac{x - \frac{dd}{p} \times 2\sqrt{px}}{\sqrt{px} + d}$. Voici donc les valeurs analyti-

ques 2 $\sqrt{px}$, $4x$, $\sqrt{px} - d$, $\frac{x - \frac{dd}{p} \times 2\sqrt{px}}{\sqrt{px} + d}$ des quatre

grandeurs MQ, QG, QS, QR: or je dis que 2 $\sqrt{px}$.

$4x :: \sqrt{px} - d : \frac{x - \frac{dd}{p} \times 2\sqrt{px}}{\sqrt{px} + d}$, ou (en multipliant les

deux derniers termes par $\sqrt{px} + d$): $px - dd : x - \frac{dd}{p}$

$\times 2\sqrt{px}$. Ce qui est incontestable; puisque le produit des extrêmes 2 $\sqrt{px} \times x - \frac{dd}{p} \times 2\sqrt{px} = 4x \times px - dd$

produit des moyens; car on a de part & d'autre 4 $pxx - dd$. Donc MQ. QG :: QS. QR. & par conséquent SR est parallèle à MG. C. Q. F. D.

DEM. Du second cas. Si tr est parallèle à MG, les Triangles

44 **T R A I T É**
gles sQr , MQG seront semblables; il faut donc prouver que $MQ \cdot QG :: Qr \cdot Qr$.

Soit, comme ci-dessus, $Ps = d$; donc $Qs = Ps - PQ = d - \sqrt{px}$; & tirant l'Ordonnée $10 = Ps = d$, on aura $Ao = \frac{dd}{p}$. Donc $Ps = Ao - AP = \frac{dd}{p} - x = st$. Or $M.s. st :: MQ \cdot Qr$ ou $\sqrt{px} + d \cdot \frac{dd}{p} - x ::$

$$2\sqrt{px} \cdot \frac{dd}{p} - x \times 2\sqrt{px} = Qr. \text{ Ainsi il s'agit de démon-}$$

$$\text{trer que } 2\sqrt{px} \cdot 4x :: d - \sqrt{px} \cdot \frac{dd}{p} - x \times 2\sqrt{px} \text{ ou (en}$$

multipliant les deux derniers termes par $\sqrt{px} + d$) : $dd - px \cdot \frac{dd}{p} - x \times 2\sqrt{px}$. Or cela est certain, puisque

$$2\sqrt{px} \times \frac{dd}{p} - x \times 2\sqrt{px} = 4x \times dd - px. \text{ Donc } MQ \cdot QG :: Qr \cdot Qr. \text{ Par conséquent } rs \text{ est parallèle à } MG. \text{ C. Q. F. D.}$$

* 33. Réciproquement, après avoir tiré MR ou Mr au-dessus ou au-dessous de l'Horizontale MQ , jusqu'à la rencontre R ou r de la Perpendiculaire GQr à MQ ; si l'on mène RS ou rs parallèle à la Tangente MG , & qu'aux Points S, s , où ces Lignes coupent la double Ordonnée MQ , on élève les Perpendiculaires ST, st , elles couperont nécessairement la Courbe aux mêmes Points T, t , où elle est rencontrée par les obliques MR, Mr , prolongées suivant le besoin.

DÉM. Si les Perpendiculaires ST, st , ne coupoient pas la Courbe aux Points T, t , elles la couperoient en d'autres Points; ainsi des Points T, t , abaissant des Perpendiculaires sur MQs , elles tomberoient en des Points différens de S, s ; donc, en menant de ces nouveaux Points des Lignes en R, r , ces dernières Lignes seroient parallèles à MG , comme l'on a vu ci-dessus; mais (supp.) RS ou rs est

46 **T R A I T É**
37. PROPOS. IX. Le Triangle $SAI =$ le Trapèze $IueG = udoi + deGO$.

DÉM. Le Triangle $sxu =$ le Rectangle $AxeG$ (36); par conséquent, en ôtant de part & d'autre la partie commune $Axul$, on aura le Triangle $SAI =$ le Trapèze $IueG = udoi + deGO$. C. Q. F. D.

38. PROPOS. X. Si l'on prolonge la parallèle Sr , jusqu'à ce qu'elle rencontre la Courbe en un autre Point K (15); & que du Point K l'on tire l'Ordonnée KDB à l'Axe, il en naîtra un nouveau Triangle rDK égal au Triangle reu .

DÉM. Comme les Triangles sxu, SBK , sont semblables, l'on aura $sxu. SBK :: xu. BK$ (306. *Inst. T. 2.*); or $xu. BK :: Ax. AB$ (6) : $Ax \times xe. AB \times BD$ (à cause que $xe = BD$); par conséquent le Triangle sxu est au Triangle SBK comme le parallélogramme $AxeG$ est au Rectangle $ABDG$, ou, en alternant, $sxu. AxeG :: SBK. ABDG$. Mais $sxu = AxeG$ (36); donc $SBK = ABDG$. Or ces deux dernières surfaces ont la partie commune $BDIA$; par conséquent la somme des autres parties, qui ne sont pas communes, d'une part, est égale à la somme des autres parties de l'autre part, c'est-à-dire que $SAI + rDK = reu + IueG$; mais (37) $SAI = IueG$; donc enfin $rDK = reu$. C. Q. F. D.

39. COROL. I. Puisque le Triangle $rDK =$ le Triangle reu , & que d'ailleurs ces Triangles sont évidemment semblables, il s'ensuit que $ur = rK$ (11); c'est-à-dire que la corde uK , parallèle à la Tangente TM , est coupée en deux parties égales par la Ligne ME , tirée du Point de contingence M parallèlement à l'Axe. Et, comme ur a été prise à volonté, il est évident que toutes les parallèles à une Tangente quelconque de la Parabole, menées par un Point

[e] Je dis que, deux Triangles semblables, rDK, reu , égaux en surface, ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun. Car, ces Triangles étant semblables. $DK. eu :: rD. re$; & comme on en suppose les surfaces égales, $rD \times DK = re \times eu$, ou $rD. re :: eu. DK$; donc $DK. eu :: eu. DK$; ainsi $DK = eu$, ou $DK = eu$; par conséquent $rD = re$, & $rK = ur$.

DES COURBES. 45
aussi parallèle à MG . Donc du même Point R ou r , il y auroit deux parallèles à la même Ligne; ce qui est absurde. On fera usage dans le *jet des bombes* des n°. 32. & 33.

34. PROPOS. VI. Soit, comme ci-dessus, la Tangente TM (fig. 10.), l'Ordonnée PM ; & que du Point M de contingence, l'on tire parallèlement à l'Axe une Ligne ME ; si par le Point A l'on mène une Perpendiculaire AG à l'Axe, jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne ME , prolongée du côté de G , on aura le Triangle $TOA = OMG$.

DÉM. Car les Triangles TOA, OMG étant évidemment semblables ou équiangles, on a $AT. MG :: AO. OG$. Or $AT = AP$ (29) & $AP = MG$ (conf.) donc $AT = MG$; par conséquent $AO = OG$. Donc le Triangle $TOA = OMG$.

35. PROPOS. VII. Le Triangle $TPM =$ le Rectangle $APMG$; & en tirant AQ parallèlement à TM , on trouvera le Triangle $AQG =$ le Parallélogramme $AQMT$.

DÉM. 1°. Puisque le Triangle $TOA = OMG$ (34) on aura $TOA + AOMP = OMG + AOMP$; c'est-à-dire, le Triangle $TPM =$ le Rectangle $APMG$.

2°. Le Triangle $AQG =$ le parallélogramme $AQMT$. Car ces deux figures ont la partie commune $QMOA$, & les deux autres parties TOA, OMG , qui les complètent respectivement, sont égales (34) donc, &c.

36. PROPOS. VIII. Par un Point quelconque x de l'Axe, entre A & P , menons xe parallèlement à la Tangente AG ; & par le Point u , où elle coupe la Courbe, soit tirée SuK parallèlement à la Tangente TM ; alors le Triangle $Sxu =$ le Rectangle $AxeG$.

DÉM. Il est évident que les Triangles TPM, sxu , sont semblables; ainsi $TPM. sxu :: PM. xu$ (306. *Inst. T. 2.*); or (6) $PM. xu :: AP. Ax$; par conséquent $TPM. sxu :: AP. Ax :: AP \times PM. Ax \times xe$ (parce que $PM = xe$); donc $TPM. sxu :: AP \times PM. Ax \times xe$, ou, (en alternant) $TPM. AP \times PM :: sxu. Ax \times xe$; mais $TPM = AP \times PM$ (35); donc le Triangle $sxu =$ le Rectangle $Ax \times xe$. C. Q. F. D.

DES COURBES. 47
de cette Courbe, & prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent la Parabole en un autre Point K (15), seront coupées en deux parties égales par une Ligne, tirée comme ME ; & c'est la raison pourquoi la Ligne ME , ou toute autre Ligne semblable, tirée parallèlement à l'Axe, a été nommée *Diamètre*; & les Lignes ur ou rK , tirées par un Point quelconque r du Diamètre parallèlement à la Tangente TM au Sommet, sont nommées *Ordonnées*.

40. COROL. II. Toute corde Az (fig. 10. & 11.) menée par un Point y d'un Diamètre NH , au-dessous du Sommet N , sans être parallèle à la Tangente à ce Sommet, ne sçauroit être coupée en deux parties égales par ce Diamètre. Car, si Az étoit coupée en deux parties égales en y , en tirant du Point A la parallèle AC à la Tangente TN , cette parallèle tombant au-dessous (fig. 10.) ou au-dessus (fig. 11.) de Az , seroit aussi coupée en deux parties égales, par le Diamètre NH au Point r (39); l'on auroit donc $Ay. yz :: Ar. rz$. Par conséquent, si l'on tiroit la corde cz , elle seroit parallèle à yr ou à l'Axe AB (279. *Inst. T. 2.*); ainsi une parallèle à l'Axe de la Parabole, pourroit couper cette Courbe en deux Points. Ce qui est absurde (11).

41. COROL. III. Ainsi une corde AC , coupée en deux parties égales par un Diamètre NH , sera nécessairement parallèle à la Tangente au Sommet N de ce Diamètre.

Supposons qu'elle ne le soit pas; on pourroit donc du Point A mener à cette Tangente une parallèle Az , laquelle tombant au-dessus ou au-dessous de AC donneroit $Ay = yz$ (39). Or, en supposant AC divisée en deux parties égales, il est impossible que $Ay = yz$ (40); par conséquent une corde ne sçauroit être coupée en deux parties égales par un Diamètre de la Parabole, sans être parallèle à la Tangente au Sommet de ce Diamètre.

42. COROL. IV. Menez par le Sommet M , (fig. 10.) une parallèle MT à une Ordonnée quelconque ur au Diamètre ME ; je dis que cette parallèle sera nécessairement Tangente à la Courbe au Point M .

Si elle ne l'étoit pas, on pourroit donc tirer une Tan-

gente en ce Point, à laquelle l'Ordonnée ur seroit parallèle (41); & par conséquent il y auroit au même Point deux parallèles à une même Ligne: ce qui est absurde. Donc, &c.

43. COROL. V. Si deux cordes AH , uK (fig. 12.) de la Parabole parallèles entr'elles, sont coupées en deux parties égales aux Points Q , r ; je dis que la Ligne Qr , menée par les Points de division, est nécessairement parallèle à l'Axe de la Courbe, c'est-à-dire qu'elle est un de ses Diamètres.

Car, supposant que Qr n'est pas un Diamètre ou parallèle à l'Axe TB , on pourroit par le milieu r de la corde uK , tirer srP parallèlement à TB ; & alors la corde uK seroit parallèle à la Tangente sT tirée par le Sommet s du Diamètre sP (41); ainsi AH seroit aussi parallèle à cette Tangente; donc AH seroit coupée en deux parties égales au Point x , par le Diamètre srP (39); mais (supp.) elle est aussi coupée en deux parties égales au Point Q ; donc $AQ = Ax$, ce qui est absurde. Par conséquent une Ligne, qui coupe en deux parties égales deux cordes parallèles d'une Parabole, est nécessairement un des Diamètres de cette Courbe.

44. PROBL. Une Parabole étant donnée, trouver un de ses Diamètres, son Axe, & son Sommet.

RÉSOL. 1°. Tirez dans la Parabole deux cordes quelconques AH , uK (fig. 12.) parallèles entr'elles: coupez chacune de ces Lignes en deux parties égales aux Points Q , r , & tirez par ces Points la Ligne Qr , que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle coupe la Courbe en quelque Point M ; & la Ligne MQ sera un Diamètre de la Parabole (43).

2°. D'un Point quelconque K (fig. 10.) où l'une des parallèles uK coupe la Courbe, abaissez une Perpendiculaire KD sur le Diamètre MQ , prolongé, s'il en est besoin; & continuez cette Perpendiculaire, jusqu'à ce qu'elle coupe la Parabole en un autre Point q ; enfin sur le milieu B de cette nouvelle corde Kq , élevez une Perpendiculaire indéfinie BT ; ce sera l'Axe cherché & le Point A , où elle coupe la Courbe, en sera le Sommet.

45. PROBL.

45. PROBL. Trouver le Diamètre qui passe par le Point donné N d'une Parabole donnée; ainsi que la position des Ordonnées à ce Diamètre (fig. 11.).

RÉSOL. 1°. Trouvez un autre Diamètre quelconque MQ (44), & par le Point donné N menez NH parallèlement à MQ , & vous aurez le Diamètre cherché; puisque MQ étant parallèle à l'Axe de la Courbe (39), NH lui sera aussi parallèle, & fera par conséquent un Diamètre.

2°. Pour avoir la position des Ordonnées à ce Diamètre, prenez un Point quelconque C , au-dessous de N ; tirez la corde CN & faites son prolongement $NT = CN$; menez ensuite par T une parallèle TA au Diamètre NH ; & du Point A , où cette parallèle rencontre la Courbe, tirez au Point C la Ligne AC ; cette Ligne sera coupée en deux parties égales en r : car $CN : NT :: Cr : rA$. Or (const.) $CN = NT$; donc $Cr = rA$: ainsi AC est une corde coupée en deux parties égales par le Diamètre NH ; & par conséquent AC est parallèle à la Tangente au Sommet N de ce Diamètre (41), ce qui détermine la position des Ordonnées au Diamètre NH (39).

46. PROBL. Tirer une Tangente TM par un Point M quelconque d'une Parabole donnée, sans avoir recours à son Axe, (fig. 10.).

RÉSOL. Trouvez d'abord le Diamètre ME qui doit passer par le Point M de la Parabole donnée, ainsi que la position des Ordonnées à ce Diamètre (45); & menez par ce Sommet M une parallèle MT à quelqu'une des Ordonnées au Diamètre ME ; cette parallèle sera Tangente à la Parabole au Point M (42).

47. PROBL. Une Parabole étant donnée, trouver un Diamètre NH (fig. 10.) qui fasse, avec ses Ordonnées Ar , &c. ainsi qu'avec la Tangente Nt au Sommet N , un Angle ArN égal à un Angle oblique quelconque donné g .

RÉSOL. Trouvez un Diamètre quelconque AB (44). Au Point A où ce Diamètre coupe la Parabole, faites l'Angle $rAB = g$. Prolongez Ar , jusqu'à ce qu'elle coupe la Courbe en un autre Point C ; & par le milieu r de AC , menez

D

NrH parallèlement à AB ; alors NH sera un Diamètre (39), dont Ar sera une Ordonnée (39 & 41); laquelle fera, avec son Diamètre, l'Angle $ArN = g$. Car, à cause des parallèles AB , NH , l'Angle $ArN =$ l'Angle rAB ; mais $rAB = g$ (const.); donc $ArN = g$. C. Q. F. 1°. T.

2°. Par conséquent, en tirant par le Sommet N de ce Diamètre une parallèle Nr à l'Ordonnée Ar , on aura une Tangente (42), qui fera, avec l'Axe ou tout autre Diamètre, un Angle égal à l'Angle donné g .

48. PROPOS. XI. Le Triangle reu ou son égal rDK (38) est égal au parallélogramme $rMTS$ (fig. 10.).

DÉM. 1°. Ces deux figures ont la partie commune $rMdu$; il reste donc à démontrer que le Triangle dMe d'une part, est égal à l'autre partie $udTS = udOI + IOTS$. Mais le Triangle MGO , ou $dMe + deGO = TAO$, ou $SAI + IOTS$ (34); ajoutant donc de part & d'autre le Quadrilatère $udOI$, on aura $dMe + deGO + udOI = SAI + IOTS + udOI$. Or (37) $udOI + deGO = SAL$. Donc $dMe = IOTS + udOI = udTS$, & par conséquent $dMe + rMdu = udTS + rMdu$; c'est-à-dire que le Triangle reu ou $rDK =$ le parallélogramme $rMTS$. C. Q. F. D.

49. PROPOS. XII. Les quarrés des Ordonnées AQ , ur , à un Diamètre quelconque ME d'une Parabole, sont entr'eux comme les Abcisses MQ , Mr correspondantes. Il faut donc prouver que $AQ : ur :: MQ : Mr$.

DÉM. En comparant les Triangles semblables AQG , reu , ou aura $AQG : reu :: AQ : ur$ (506. *Inst. T. 2.*); mais le Triangle $AQG =$ le parallélogramme $AQMT$ (35); & le Triangle $reu =$ le parallélogramme $rMTS$ (48); ainsi

$AQMT : rMTS :: AQ : ur$. Or les parallélogrammes $AQMT$, $rMTS$ ont même hauteur, étant compris entre les mêmes parallèles AT , QM ; donc ils sont entr'eux comme leurs Bases correspondantes MQ , Mr ; c'est-à-dire que $AQMT : rMTS :: MQ : Mr$; & par conséquent $AQ : ur :: MQ : Mr$. C. Q. F. D.

50. DÉFIN. Une troisième proportionnelle à une Abcisse Nr (fig. 11.) d'un Diamètre NH d'une Parabole & à son Ordonnée correspondante Ar , est appelée Paramètre de ce Diamètre [4].

51. COROL. I. Il est évident, en vertu de la Prop. XII. que ce Paramètre est une Constante; c'est-à-dire qu'on trouvera toujours la même troisième proportionnelle, de quelque Abcisse que l'on se serve; ainsi qu'on l'a démontré (17), par rapport au Paramètre de l'Axe.

52. PROP. XIII. Le quarré d'une Ordonnée quelconque AQ à un Diamètre MD , est égal au Rectangle de l'Abcisse MQ par le Paramètre r de ce Diamètre (fig. 10.).

DÉM. Car puisque (51) on a toujours $MQ : AQ :: AQ : r$, on aura $AQ = MQ \times r$. Et prenant une autre Ordonnée ur , comme on trouve encore $Mr : ur :: ur : r$ (51), on en déduira $ur = Mr \times r$, &c. donc le quarré d'une Ordonnée, &c.

* 53. COROL. I. Par conséquent, si l'on prenoit une Ligne indéfinie, dont on déterminât l'origine N ; que l'on divisât cette Ligne en un très-grand nombre de parties égales, ou inégales; qu'elle fût coupée aux Points de division par des parallèles Ar , &c. qui fissent avec elle un Angle, de manière qu'elles fussent moyennes proportionnelles entre leurs Abcisses correspondantes Nr & une Ligne constante r ; la Courbe, que l'on seroit passer par les extrémités A , C , &c. de toutes ces moyennes proportionnelles, seroit telle que le quarré d'une Ordonnée quelconque égaleroit le Rectangle de l'Abcisse correspondante par le Paramètre, & seroit par conséquent une Parabole; puisqu'alors les quarrés des Ordonnées seroient entr'eux, comme les Abcisses correspondantes. Car, si cela n'étoit pas, il y auroit quelque Courbe, différente de la Parabole, dont tous les Points, rapportés à une même Ligne, donneroient précisément les mêmes propriétés, ou auroient les mêmes effets

(4) Pour la même raison qu'à l'Axe.

que ceux de la Parabole; ce qui est impossible, puisque tous les Points des deux Courbes seroient ou pourroient être, en ce cas, les extrémités des mêmes Lignes; & par conséquent tous les Points de ces deux Courbes se confondant, ne seroient plus qu'une seule & unique Courbe: la Courbe proposée ne seroit donc pas différente d'une *Parabole*.

54. Ce Corollaire est la *converse* de la Proposit. XIII. & il n'est vrai qu'à cause que généralement tous les Points de la Courbe ont la même propriété. Car, si cette propriété n'étoit démontrée que par rapport à quelques Points, on n'en pourroit pas conclure absolument que ce fût une *Parabole*; puisqu'une autre Courbe pourroit, en coupant la première aux mêmes Points, avoir à ces Points la même propriété que la première; mais être caractérisée par d'autres propriétés à d'autres Points: ainsi que je le ferai voir plus bas.

REM. On voit par-là combien il est indispensable de démontrer les *converses*; parce que ce sont toujours ces propositions qui servent à la résolution des Problèmes.

* 55. PROB. La Ligne indéfinie AB (fig. 13.) dont l'origine est en A, étant donnée pour un Diamètre d'une Parabole, ainsi que le prolongement AP pour le *Paramètre* de ce Diamètre, décrire la Parabole de manière que l'Angle des Ordonnées à ce Diamètre soit égal à l'Angle donné PAO.

RÉSOL. Au Point A menez la Perpendiculaire indéfinie Ab; & d'un Point K tel que KP soit $> KA$, décrivez le Cercle Peb; ensuite, d'un Point I, au-dessous & le plus près que vous pourrez du Point K, décrivez un autre Cercle Pfe, & ainsi de suite, en prenant toujours des Points au-dessous de K, très-proches les uns des autres, & faisant toujours passer les circonférences par P: alors, si aux Points b, c, d, &c. où ces circonférences coupent le Diamètre AB, vous tirez les Lignes br, cs, dt, &c. qui fassent avec ce Diamètre un Angle égal à l'Angle donné PAO, & qu'enfin vous fassiez $br = Ae$, $cs = Af$, $dt = Ag$, &c.

tr'eux comme les Abcisses correspondantes; or un Diamètre quelconque de la Parabole a aussi les carrés de ses Ordonnées dans le rapport des Abcisses correspondantes (49); par conséquent on en conclura, comme dans la Prop. V. que $OS = 2MS$, & réciproquement que si $OS = 2MS$, ou $OM = MS$, en tirant l'Ordonnée Sf (45), la Ligne Of sera Tangente.

* 58. PROB. D'un Point donné O, au-dehors d'une Parabole, tirer une Tangente à cette Courbe (fig. 11.).

RÉSOL. Si vous n'avez ni l'Axe ni aucun des Diamètres de la Courbe, vous en chercherez un (44), que je suppose être NH; ensuite, par le Point donné O, vous tirerez parallèlement au Diamètre NH, l'indéfinie OQ, qui rencontrera la Courbe en quelque Point M (11) & en fera un Diamètre (39); vous ferez $MS = OM$, & par le Point S vous menerez l'Ordonnée Sf au Diamètre MQ (45); alors la Ligne Of tirée du Point donné O au Point f sera Tangente (57); puisque la sous-Tangente OS est double de l'Abcisse MS (const.).

* 59. COROL. IV. Donc, si aux extrémités d'une corde ED, (fig. 14.) l'on tire les Tangentes EK, DK, elles iront rencontrer au même Point K le Diamètre prolongé Kr, qui passe par le milieu L de cette corde.

Car, par cette construction, les Lignes EL, LD étant parallèles à la Tangente au Sommet N de ce Diamètre (41) feront des Ordonnées à ce Diamètre (39); donc NL fera l'Abcisse de l'une & l'autre Ordonnée; or (57 & 29) la sous-Tangente est double de l'Abcisse; donc la sous-Tangente sera égale, dans l'un & l'autre cas, c'est-à-dire qu'elle ira se terminer au même Point K du Diamètre Kr.

* 60. Nous allons présentement donner, avec le secours du Problème suivant; la quadrature d'un Segment quelconque parabolique. On appelle ainsi une portion quelconque de la surface de la Parabole, telle que ANCA (fig. 14.) terminée par un Arc ANC de la Courbe & la corde AC qui le *sous-tend*: & l'on dit qu'un Triangle est *inscrit* dans un Segment parabolique ANCA: quand, ayant

Je dis que la Ligne Arst, &c. qui passera par les extrémités de ces Lignes, sera une *Parabole*.

DÉM. Par la nature du Cercle AP. $Ae :: Ae. Ab$; or $Ae = br$ (const.); donc $AP. br :: br. Ab$ de même $AP. Af :: Af. Ac$ mais $Af = cs$; donc $AP. cs :: cs. Ac$, &c. & ainsi des autres parallèles; elles sont donc moyennes proportionnelles entre leurs Abcisses correspondantes & la constante AP; par conséquent leurs extrémités r, s, t, &c. sont à une Parabole (53), dont AB est un des Diamètres, qui fait avec les Ordonnées un Angle égal à l'Angle donné PAO (const.).

* 56. COROL. II. Donc, si de tous les Points m, n, o, &c. d'une droite indéfinie AO, dont l'origine est fixe en A, l'on tire des parallèles mr, ns, ot, &c. qui soient entr'elles comme les carrés Am, An, Ao des Abcisses correspondantes, les extrémités r, s, t, &c. de ces parallèles seront encore à une *Parabole*.

Car tirant l'indéfinie AB parallèlement à mr, & faisant $Ab = mr$; $Ac = ns$; $Ad = ot$, &c. on aura alors $br = Am$; $cs = An$; $dt = Ao$; par conséquent, puisque $Am :: An :: mr. ns :: Ab. Ac$ (supp.) on aura $br. cs :: Ab. Ac$. Donc (53) les Points r, s, t, &c. sont à une Parabole.

57. COROL. III. Rappeliez-vous maintenant la Prop. V. (29), où l'on a démontré que, par rapport à l'Axe, la sous-Tangente étoit toujours double de l'Abcisse, quand on supposoit une Tangente; & réciproquement, qu'en supposant la sous-Tangente double de l'Abcisse l'on avoit nécessairement une Tangente, &c. alors vous verrez, sans qu'il soit besoin de répéter la démonstration, que si d'un Point f (fig. 11.) d'une Parabole l'on tire une Tangente fO, qui rencontre un Diamètre MQ en O, & que du même Point f l'on mène une Ordonnée fS à ce Diamètre (45), vous verrez, dis-je, que la sous-Tangente OS est double de l'Abcisse MS, ou que $OM = MS$.

Car on n'a démontré cette propriété, par rapport à l'Axe, que parce que les carrés des Ordonnées à l'Axe sont en-

D iij

pour Base la corde AC de ce Segment, il a son Sommet en quelque Point N de l'Arc ANC.

* 61. PROB. Inscrire dans un Segment de Parabole ANCA, le plus grand Triangle possible (fig. 15.).

Par le milieu r de la corde AC, menez le Diamètre Nr (44); & du Point N, où il coupe la Courbe, tirez les droites NA, NC; je dis que le Triangle ANC est le plus grand Triangle que l'on puisse inscrire dans le Segment ANCA.

DÉM. Par la const. Ar ou Cr est une Ordonnée au Diamètre rN; c'est-à-dire qu'elle est nécessairement parallèle à la Tangente NT, au Sommet N de ce Diamètre (41). Ainsi de tous les Points de l'Arc ANC, c'est le Point N, qui est le plus éloigné de la Base AC; tous les autres Points se trouvant au-dessous de la Tangente NT; par conséquent les Triangles différens de ANC, que l'on pourroit inscrire, ayant même Base AC que ce Triangle, mais une hauteur plus petite, seroient nécessairement plus petits. Donc le Triangle ANC est le plus grand, &c.

* 62. COROL. V. Le plus grand Triangle inscriptible ANC (fig. 15.) vaut toujours plus de la moitié du Segment ANCA où il est inscrit. Car supposant la Tangente TP au Sommet N, & les Lignes AT, CP, parallèles au Diamètre ND, il est évident que le Triangle ANC est la moitié du parallélogramme CATP, de même Base & de même hauteur. Or CATP est plus grand que le Segment ANCA; le Triangle ANC est donc plus de la moitié de ce Segment.

* 63. COROL. VI. Donc, si l'on continuoît à inscrire les plus grands Triangles possibles dans les nouveaux Segments NCN, NAN, on ôteroit encore, par ce moyen, plus de la moitié de chaque Segment; & continuant toujours à inscrire de ces Triangles, à mesure que l'on auroit de nouveaux Segments, c'est-à-dire, en retranchant toujours du Segment ANCA plus de la moitié de ce qui resteroit, on parviendroit enfin à une grandeur plus petite qu'aucune grandeur donnée [a]. Ce qui signifie que la

[a] Il est clair qu'ayant une grandeur quelconque, un pied par exemple, si l'on

omme de tous ces Triangles différerait du Segment parabolique, moins que d'une grandeur quelconque, si petite qu'on la puisse supposer. Par conséquent, si l'on pouvoir déterminer le rapport de la somme de tous ces Triangles à une grandeur connue & quarrable, il est évident que l'on auroit la quadrature du Segment parabolique, qui n'est autre chose que la somme de tous ces Triangles. Or c'est ce que l'on va déterminer dans le Corollaire suivant.

* 64. COR. VII. Si l'on inscrit dans le Segment ANCA (fig. 14.) le plus grand Triangle possible ANC (61); ce Triangle sera quadruple de la somme des deux plus grands Triangles CEN, ADN, que l'on peut inscrire dans les Segmens CENC, ADNA, ou ce qui est la même chose, le Triangle NrC, moitié du plus grand Triangle ANC, sera quadruple du Triangle CEN, & son autre moitié ArN sera quadruple de ADN.

DEM. Menez la Tangente EK, jusqu'à ce qu'elle rencontre le Diamètre prolongé Nr en quelque Point K (13); tirez aussi par le Sommet N la Tangente NI, jusqu'à ce qu'elle rencontre, en quelque Point I, le Diamètre EQ prolongé; enfin par les Points E, F, tirez EL, FM, parallèles à la Tangente NI; & considérez que, EQ étant parallèle à Kr (const.), ainsi que EK à FN (41), vous aurez $EF = KN$. Or $KN = NL$ (57), & $NL = EI$, à cause du parallélogramme ELNI; donc $EF = EI$. Donc FI est double de FE; par conséquent le Triangle NFI est double du Triangle NFE, parce que ces deux Triangles ayant même hauteur en N, le premier a une Base double de celle du second: mais le Triangle CEN est aussi double de NFE (const.); donc le Triangle CEN = NFI. Or NFI = NFM; puisque la figure FMNI est un parallélogramme; donc $CEN = NFM$. Mais NFM n'est que le quart du Triangle

en prend la moitié, ensuite la moitié de l'autre moitié, & toujours la moitié de ce qui reste; il est clair, dis-je, que par cette Soustraction l'on arrivera à un reste plus petit qu'aucune grandeur donnée; donc on y arrive, à la plus forte raison, si l'on ou ôte toujours plus de la moitié.

Segment parabolique ANCA est au plus grand Triangle ANC, qui est le plus grand de tous les termes, comme 4 est à 3; c'est-à-dire, qu'un Segment parabolique quelconque vaut toujours les 4 tiers du plus grand Triangle, qui lui est inscriptible. Or tout Triangle est quarrable; donc on a la quadrature de la Parabole [a].

* 66. COROL. IX. En divisant donc la Base AC du Triangle ANC en trois parties égales, & augmentant cette Base d'une troisième partie, on aura un Triangle qui sera les 4 tiers de ANC, & par conséquent égal au Segment parabolique (65).

* 67. COROL. X. Et si des Points A, C, on tire les parallèles AZ, CV, au Diamètre Nr, jusqu'à ce qu'elles rencontrent aux Points Z, V, la Tangente au Sommet N de ce Diamètre, l'on aura le parallélogramme circonscrit ACVZ, dont le Segment parabolique ANCA fera les deux tiers. Car il est évident que le Triangle ANC n'est que la moitié du parallélogramme ACVZ. Or (65) le Segment ANCA vaut les 4 tiers du Triangle ANC; donc il ne vaudra que les 2 tiers du double de ce Triangle; c'est-à-dire, du parallélogramme circonscrit ACVZ.

REM. Cette méthode de quarrer la Parabole, ou de déterminer son rapport au parallélogramme circonscrit, quoique très-ingénieuse, est longue & assez difficile. M'étant donc appliqué à chercher une autre solution de ce Problème, j'ai eu le bonheur d'en rencontrer une, applicable à toutes les Courbes quarrables, & en même-temps si élégante, qu'au moyen d'une seule proportion l'affaire est terminée. Je la fonde sur un seul Lemme, qu'on se conçoit presque sur le simple énoncé.

68. Lemme pour la quadrature de la Parabole ou de toute autre Courbe quarrable (fig. 16.). Soit AC une Courbe ou

au lieu de b , elle deviendra $S = \frac{a-a}{a-a} = \frac{a-a}{\frac{2}{3}a} = \frac{4a-a}{\frac{3}{4}a} = \frac{4a}{\frac{3}{4}a}$. Donc $S = \frac{4}{3}a$.

ou $S \times \frac{3}{4} = 4 \times a$; & par conséquent $S : a :: 4 : 3$. C. Q. F. D.

[a] C'est Archimède à qui l'on est redevable de cette Méthode de quarrer la Parabole.

NrC [a]; parce que les côtés du premier ne sont que la moitié des côtés homologues du second (const.). Donc CEN est aussi le quart de NrC, ou le Triangle NrC est quadruple de CEN.

Si l'on fait la même construction, par rapport au Triangle ADN, c'est-à-dire, en tirant la Tangente DK (59), &c. on trouvera par le même raisonnement que ci-dessus, que le Triangle ArN est quadruple de ADN; par conséquent le Triangle entier ANC est quadruple de la somme des deux Triangles CEN, ADN. C. Q. F. D.

Ce que l'on vient de démontrer du Triangle ANC par rapport aux Triangles CEN, ADN, on le démontrera du Triangle CEN, par rapport aux plus grands Triangles inscriptibles dans les Segmens CEC, ENE; & du Triangle ADN par rapport aux plus grands Triangles inscriptibles dans les Segmens ADA, DND; & ainsi de suite, en inscrivant toujours les plus grands Triangles possibles, à mesure qu'il naîtra de nouveaux Segmens.

* 65. COROL. VIII. On aura donc une progression ou une suite de Triangles, inscrits dans le Segment parabolique proposé, lesquels rattachant toujours plus de la moitié du Segment, où ils seront inscrits (62), donneront une somme qui pourra être prise pour la surface du Segment parabolique (63). Mais cette progression est telle que son premier terme est quadruple du second; le second quadruple du troisième; le troisième quadruple du quatrième, & ainsi de suite à l'infini (64). Or la somme de tous les termes d'une pareille progression, est au premier ou au plus grand terme, comme 4 est à 3 [b]; par conséquent le

[a] C'est-à-dire que $NFM : NrC :: NF : NC$, ou : le carré de s est au carré de 2; & ainsi : 1. 4.

[b] La somme S d'une progression infinie descendante, dont les deux premiers termes sont a, b , étant exprimée par la formule $S = \frac{a-a}{a-a}$ (270. Inf. T. 2.); comme, dans l'exemple présent, le deuxième terme b n'est que le quart du premier : terme a ; c'est-à-dire que $b = \frac{a}{4}$; si l'on met, dans la formule $S = \frac{a-a}{a-a}$, l'expression $\frac{a}{4}$

une portion de Courbe, toujours concave, ou toujours convexe du même côté; dont BC soit l'Axe & AB une Ordonnée. Faisons de ces deux Lignes le Rectangle BD; divisons AB ou DC en un très-grand nombre de parties égales; aux Points de division b, g, h , &c. menons les parallèles bf, gh , &c. à CB; par leurs Points, r, x , &c. d'intersection avec la Courbe menons des parallèles à AB, afin qu'il en naîsse des Rectangles, dont les uns sont inscrits & les autres circonscrits à l'espace mix-ti-Ligne ADCA, ainsi qu'à l'espace ABCA. Par exemple, le Rectangle ba est ce que j'appelle un Rectangle circonscrit à l'espace ADCA, & le Rectangle bn son inscrit correspondant. Pareillement gr est un autre Rectangle circonscrit à ce même espace, dont l'inscrit correspondant est le Rectangle og , &c.

Ceci bien conçu, je dis que l'on peut diviser DC en un nombre de parties égales, tel que la somme des inscrits diffère de celle des circonscrits, moins que d'une grandeur donnée quelconque, si petite qu'on puisse la supposer.

DEM. Il est évident (const. de la fig. 16.) que la différence de la somme des inscrits à celle des circonscrits à l'espace ADCA, est le Rectangle ba : or, en faisant les divisions sur DC excessivement petites, ce Rectangle peut devenir plus petit qu'aucune grandeur donnée. Donc, &c.

La même figure démontre aux yeux que la différence de la somme des inscrits à celle des circonscrits à l'espace ABCA, est aussi le Rectangle ba . Donc ce Lemme est vrai, soit qu'on prenne la Courbe par sa convexité, soit qu'on la considère par sa concavité.

69. COROL. I. Si on emploie ici les mêmes raisonnemens, dont on a fait usage aux n°. 423. & 424. Inf. T. 2. on connoîtra que la somme des inscrits, celle des circonscrits & la surface de l'espace ADCA, ou ABCA, auquel ils sont inscrits ou circonscrits, sont trois grandeurs absolument égales, ou qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité, plus petite qu'aucune grandeur donnée.

70. Quadrature très-simple de la Parabole (fig. 17.). Soit

la demi Parabole ABC; AB sa Base; AT sa Tangente au Point A, & par conséquent BC = CT (29); BD son parallélogramme circonscrit. Soit de plus DC divisée en un très-grand nombre de portions égales, telles que Db; & par les Points de division b soient menées des parallèles à AD, comme bf; afin de tirer par le Point d'intersection r de la Courbe, une parallèle rM à la Ligne AB: ce qui produira des Rectangles DAbf, circonscrits à l'espace DACD, & rABM circonscrits à l'espace parabolique ABC.

Cette construction supposée, considérant la portioncule rA de la Courbe, comme une partie de la Tangente AT, les Triangles semblables rAf, ABT, donneront BT. AB :: rf. fA; or BT = 2 CB (29), & rf = BM; donc 2 CB. AB :: BM. fA; ainsi fA = $\frac{AB \times BM}{2 CB}$; donc, puisque CB = bf, fA x bf = $\frac{AB \times BM \times CB}{2 CB}$ = $\frac{AB \times BM}{2}$; c'est-à-dire que le Rectangle fA x bf, circonscrit à l'espace DACD, n'est que la moitié du Rectangle AB x BM circonscrit à l'espace parabolique ABCA; & la même chose arrivera à tous les autres Points de la Courbe, déterminés comme le Point r. La somme des Rectangles circonscrits à l'espace DACD, n'est donc que la moitié de la somme des circonscrits à l'espace parabolique ABCA. Mais, dans une division poussée très-loin, chaque somme co-incide avec son espace (69). Ainsi l'espace DACD est la moitié de l'Aire de la demi-parabole ABCA. Donc l'espace DACD étant = 1, la surface ABCA de la demi-Parabole sera = 2, & le Rectangle BD = 3; c'est-à-dire que la demi-Parabole ABCA sera les 2 tiers du parallélogramme circonscrit BD; ainsi qu'on l'a vu n°. 67. mais par une voye beaucoup plus difficile. C. Q. F. T. & D. [4].

[a] Cette Résolution est évidemment plus simple que celle que l'on trouve par le Calcul intégral; puisque, sans employer plus d'Eléments, je fais passer de ce Calcul, qui de plus suppose le Différentiel. Si l'on ajoute à cet avantage la clarté de la méthode des Limites ou d'Exhaustion dont je fais usage, je ne doute pas que cette Quadrature ne soit fort du goût des Connaisseurs en ces matières.

1^{re}, de même hauteur (supp.), comme la Base circulaire du premier est à celle du second, & ces Bases sont entr'elles comme les carrés de leurs rayons ds, dt, ou :: ds. dt. mais ds. dt. :: cd. cl (6) :: 1. 2 (const.); donc le Cylindre décrit par le Rectangle dh; est au décrit par le Rectangle li. :: 1. 2. Et l'on démontrera précisément de même que le Cylindre décrit par le Rectangle dh, est au décrit par le Rectangle gf :: 1. 3. &c. en sorte que la somme de tous ces Cylindres circonscrits, formera une progression Arithmétique 1, 2, 3, 4, &c. ou 0, 1, 2, 3, 4, &c. Mais on a la somme d'une pareille progression, c'est-à-dire, celle de tous les Cylindres circonscrits, lesquels pris ensemble ne sont pas différens du Paraboloidé, en multipliant le plus grand terme, c'est-à-dire en ce cas, le Cylindre décrit par le Rectangle Bm, en le multipliant, dis-je, par la moitié du nombre des termes [a], ou par la moitié de la hauteur CB

[a] 1°. J'ai démontré n°. 260. Inf. T. 2. que dans une proportion Arithmétique, la somme des Extrêmes est égale à celle des Moyens.

2°. Ainsi, dans une progression Arithmétique quelconque a, b, c, d, e, f, g, &c. la somme c, d, e de deux termes quelconques c, e, à égale distance des Extrêmes a, g, est égale à la somme a + g de ces Extrêmes. Car, en développant la progression proposée, elle devient a, b; b, c; c, d; d, e; e, f; f, g, &c. (M); ou l'on voit d'abord que a, b :: f, g. Donc (art. premier) a + g = b + f; il est clair aussi que b, c :: e, f; ainsi b + f = c + e; donc c + e = a + g.

3°. Par conséquent le nombre des termes de la progression étant impair, comme dans la proposée, le terme du milieu d = $\frac{a+f}{2}$ moitié de la somme des Extrêmes. En reprenant la progression M, il est visible que c, d :: d, e; donc 2 d = c + e = a + g (art. 2.); ainsi d = $\frac{a+f}{2}$.

4°. D'où il suit, que la somme de tous les termes d'une progression Arithmétique quelconque, est égale à la somme des Extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes de la progression. Car, si le nombre des termes est pair, en réduisant la progression en sommes de deux termes à égale distance des Extrêmes, le nombre de ces sommes ne sera que la moitié de celui des termes de la progression. Or chaque somme est égale à celle des Extrêmes (art. 2.); ainsi, dans la somme des termes d'une progression Arithmétique, celle des Extrêmes s'y trouve autant de fois, qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre de ses termes. Donc, pour avoir la somme de ses termes, il faut multiplier la somme des Extrêmes par la moitié du nombre des termes.

Si le nombre est impair, en supposant le terme du milieu ôté, on auroit la somme des autres, en multipliant celle des Extrêmes par la moitié du nombre des termes restans; donc, pour compléter la somme de la progression, il faudroit y remettre le

* 71. COROL. II. Donc, pour avoir l'Aire du Segment parabolique ANC (fig. 15.), il faut y inscrire le plus grand Triangle possible (61); & après en avoir déterminé la surface, y ajouter le tiers de sa valeur. Par ce moyen l'on aura les 4 tiers du Triangle ANC, lesquels vaudront la surface du Segment ANCA (65).

Ou bien, circonscire à ce Segment le parallélogramme ACPT, & prendre les 2 tiers de son Aire (70).

La méthode énoncée au n°. 68. est fort propre à nous faire découvrir la Solidité du Paraboloidé, c'est-à-dire, d'un corps engendré par la circonvolution d'une Parabole autour de son Axe.

* 72. Cubature du Paraboloidé ou évaluation de sa solidité (fig. 18.). Divisez l'Axe CB en un nombre indéfini de parties égales cd, dl, &c. les plus petites que vous pourrez concevoir; afin d'y inscrire & d'y circonscire des Rectangles comme la figure le montre. Il est évident que la différence des circonscrits aux inscrits est le Rectangle dd, qui peut devenir plus petit qu'aucune grandeur donnée. Imaginons présentement que la Parabole fasse une circonvolution autour de son Axe; elle engendrera un Paraboloidé, & les Rectangles, tant les inscrits que les circonscrits, engendreront des Cylindres, dont les rayons des Bases circulaires seront des Ordonnées à la Parabole; de manière que la différence de la somme des Cylindres circonscrits à celle des inscrits, sera le Cylindre décrit par le Rectangle dd; & par conséquent ce Cylindre pourra devenir plus petit qu'aucune grandeur donnée. Donc on pourra prendre le Paraboloidé, pour la somme des Rectangles circonscrits ou celle des inscrits; parce que sa différence à la somme des inscrits ou à celle des circonscrits est visiblement plus petite que celle des circonscrits aux inscrits.

Donc, si nous pouvons déterminer le rapport de la somme des circonscrits ou de celle des inscrits à quelque grandeur connue, dont il soit facile d'avoir la solidité, il est clair que nous aurons celle du Paraboloidé. Or le Cylindre décrit par le Rectangle db, est au Cylindre décrit par le Rectangle

qui exprime ce nombre; & en multipliant ce même Cylindre par toute la hauteur CB, on a le Cylindre décrit par le Rectangle BD. D'où l'on voit que le Paraboloidé n'est que la moitié du Cylindre de même Base & de même hauteur, qui lui est circonscrit.

73. PROPOS. XIV. Le quart du Paramètre t d'un Diamètre quelconque MD (fig. 10.) est égal au quart du Paramètre p de l'Axe, joint à l'Abcisse AP déterminée par l'Ordonnée MP menée du Sommet M de ce Diamètre, c'est-à-dire que $\frac{t}{4} = x + \frac{p}{4}$.

DÉM. Par le Sommet M du Diamètre MD tirez la Tangente MT, & par le Sommet A de la Parabole menez, parallèlement à MT, la Ligne AQ, qui sera une Ordonnée au Diamètre MD. Et remarquez que AQ = MT; MQ = AT (const.) = AP = x; PT = 2x (29); PT = 4xx; PM = px (20). Or AQ = MQ x t (52); donc $t = \frac{AQ}{MQ} = \frac{MT}{x}$; mais, à cause du Triangle-Rectangle MPT, on a MT = PT + PM. Donc $t = \frac{PT+PM}{x} = \frac{4xx+px}{x} = 4x + p$. Donc $\frac{t}{4} = x + \frac{p}{4}$.

74. COROL. Puisque $t = 4x + p$, il s'ensuit que $p < t$; c'est-à-dire que le Paramètre de l'Axe est le plus petit de tous les Paramètres.

75. PROPOS. XV. Si au Sommet M d'un Diamètre quelconque MI (fig. 19.), on tire la Tangente MT, & qu'on fasse l'Angle TMF = l'Angle TMO, que cette Tangente forme avec le Diamètre MI prolongé; le côté MF ira rencontrer l'Axe en un Point F, tel que MF = le quart du

terme ôté, qui est égal à la moitié de la somme des Extrêmes (art. 3.); la somme entière seroit donc égale à la somme des Extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes pairs, plus la moitié de celui du terme impair; c'est-à-dire, par la moitié du nombre de tous les termes.

5°. Si l'on suppose donc la progression ascendante, & son premier terme zéro, la somme des Extrêmes ne sera plus que le dernier terme; & par conséquent (art. 4.) la somme de tous les termes d'une pareille progression sera égale à son dernier ou plus grand terme multiplié par la moitié du nombre de ses termes. C. Q. F. D.

Paramètre de ce Diamètre; c'est-à-dire que $MF = \frac{1}{2}$ ou $x + \frac{1}{2}$ (73).

DEM. Faites $MO = MF$, & tirez FO . Il est clair que FO est perpendiculaire sur MT , puisqu'en comparant les deux Triangles MyF , MxO , on a l'Angle $MFO = MOF$, & $TMF = TMO$ (const.); donc l'Angle $y = x$. La Ligne FO est donc Perpendiculaire sur MT . Ainsi élevant au Point de contingence M la Perpendiculaire ML sur MT , la fig. $OFLM$ est un parallélogramme; donc $MO = FL$. Or (const.) $MO = MF$. Donc $MF = FL$; ainsi $FP = FL = PL = MF = PL$. Mais la sous-Perpendiculaire $PL = \frac{1}{2}$ (31); donc $FP = MF = \frac{1}{2}$; donc $FP = MF = p \times MF + \frac{1}{2}$. Ainsi, puisque le Triangle-Rectangle FPM donne $MF = FP + PM$ (S), on aura (en mettant dans l'équation S, $MF = p \times MF + \frac{1}{2}$ pour FP , & px pour PM) $MF = MF = p \times MF + \frac{1}{2} + px$; donc (en ôtant MF & transposant $-p \times MF$) on a $p \times MF = px + \frac{1}{2}$. Ainsi (en divisant par p) $MF = x + \frac{1}{2}$ (73). C. Q. F. D.

76. COROL. I. D'où il suit que la Ligne MF rencontre l'Axe en un Point F au-dessous du Sommet A . Car, à cause du parallélisme des Lignes TL , OM , l'Angle $FTM = TMO$. Or $TMO = TMF$ (const.); donc $FTM = TMF$; donc $TF = FM$; mais $FM = x + \frac{1}{2}$ (75), ainsi $TF = x + \frac{1}{2}$; mais TA ne vaut que x , puisqu'il est égal à l'Abcisse AP (29); donc $TF > TA$, & par conséquent le Point F tombe au-dessous de A .

77. COROL. II. Et si du Point O l'on abaisse OK perpendiculairement sur l'Axe, le Point K tombera au-dessus du Sommet A ; puisqu'alors la fig. $OMPK$ étant un parallélogramme, on a $PK = MO = FM$ (const.) $= x + \frac{1}{2}$ (75); donc $PK = x + \frac{1}{2}$. Mais $PA = x$. Donc $PK > PA$; c'est-à-dire que le Point K tombe au-dessus du Sommet A .

78. PROP.

78. PROPOS. XVI. La distance du Point F , ainsi que celle du Point K , au Sommet A de l'Axe, est égale au quart du Paramètre de l'Axe; c'est-à-dire que AF ou $AK = \frac{1}{4}$.

DEM. 1°. Par la Proposition XV. $x + \frac{1}{2} = MF = TF$ (const.) $= TA + AF = AP + AF$ (29) $= x + AF$. Ainsi $x + \frac{1}{2} = x + AF$. Donc $AF = \frac{1}{4}$.

2°. $x + \frac{1}{2} = MF = MO$ (const.) $= PK = PA + AK = x + AK$. Donc $x + \frac{1}{2} = x + AK$; d'où l'on voit que $AK = \frac{1}{4}$. C. Q. F. D.

79. COROL. I. Donc 1°. $AF = AK$. 2°. $FK = AF + AK = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (78) $= \frac{1}{2}$; c'est-à-dire que $FK =$ la moitié du Paramètre de l'Axe.

80. COROL. II. Comme le Diamètre MI a été pris à volonté, il est évident qu'en faisant passer, par un Point M quelconque d'une Parabole, un Diamètre MI & une Tangente MT , si l'on fait l'Angle $TMF = TMO$, formé par la Tangente & le Diamètre prolongé, le côté MF ira toujours rencontrer l'Axe au même Point F ; puisqu'on trouvera, dans tous les cas, que la distance AF de ce Point au Sommet de la Parabole, est égale au quart du Paramètre de l'Axe (78); lequel Paramètre est une grandeur constante.

81. PROPOS. XVII. Supposant la const. de la Prop. XV. Je dis que le Point F est un FOYER *Focus vel umbilicus*; c'est-à-dire que des rayons de lumière, qui viendroient frapper la concavité de la Parabole, parallèlement à son Axe, se réfléchiroient tous au Point F .

DEM. Car l'Angle d'incidence $IMq =$ l'Angle TMO , formé par le Diamètre & la Tangente; or $TMO = TMF$ (const.); donc $TMF = IMq$; c'est-à-dire que le rayon IM se réfléchira dans la Ligne MF ; puisque l'Angle IMq , que le rayon fait en tombant sur la Ligne TMq , est toujours égal à celui que ce même rayon fait, en se relevant de dessus la même Ligne (suivant le principe fondamental de la Catoptrique). Par conséquent les rayons, parallèles à l'Axe de la Parabole, se réfléchiront toujours de manière que l'Angle de réflexion TMF sera égal à l'Angle TMO , formé par

E

le Diamètre & la Tangente, tirés au Point d'incidence M ; or, quand cela arrive, la Ligne de réflexion MF va toujours rencontrer l'Axe au même Point F (80); donc le Point M est un Foyer.

82. Réciproquement, des rayons de lumière FM , qui partiroient du Foyer F , & fraperoient la concavité de la Parabole en un Point quelconque M , se réfléchiroient dans une Ligne OMI , parallèle à l'Axe AB de cette Courbe.

DEM. En tirant du Point M la Tangente MT , & l'Ordonnée MP à l'Axe, il est aisé de remarquer que $FT = AT + AF = AP + AF = x + \frac{1}{2}$ (78). Or $MF = x + \frac{1}{2}$ (75); donc $FT = MF$; donc l'Angle $FTM = FMT$; mais l'Angle d'incidence $FMT =$ l'Angle de réflexion IMq (par le principe de Catoptrique) $= OMT$ son opposé au Sommet; par conséquent l'Angle $FTM = OMT$; c'est-à-dire que les Angles alternes, internes sont égaux; donc la Ligne OMI dans laquelle se réfléchit le rayon FM , est parallèle à l'Axe AB ou TAB . C. Q. F. D.

Cette Proposition est célèbre & d'un très-grand usage dans la Catoptrique.

83. PROBL. Une Parabole étant donnée, trouver son Foyer. (fig. 19.)

RÉSOL. Trouvez son Axe AB & le Paramètre de cet Axe (27 & 44); portez le quart de ce Paramètre depuis le Sommet A de la Courbe, jusqu'en un Point F de l'Axe, & ce Point F sera le Foyer de la Courbe (78 & 81).

84. COROL. I. Ainsi, en regardant l'Axe comme un Diamètre, on voit que le Paramètre d'un Diamètre quelconque, est toujours quadruple de la distance du Sommet de ce Diamètre au Foyer. 1°. Cela vient d'être démontré par rapport à l'Axe (Propos. XVI. & XVII.). 2°. La même chose a été démontrée (Propos. XV.) par rapport à un Diamètre quelconque.

85. COROL. II. Par conséquent, le Foyer d'une Parabole étant donné, avec le Sommet de cette Courbe, on aura le Paramètre d'un Diamètre quelconque, en prenant le quadruple de la distance de ce Foyer au Sommet du Diamètre proposé.

86. PROBL. Le Foyer F & l'Axe d'une Parabole étant donnés, tirer une Tangente en un Point quelconque M de la Courbe.

RÉSOL. Prenez avec un compas ordinaire la distance FM ; portez-la sur l'Axe de F en T , & tirez TM ; ce sera la Tangente cherchée.

DEM. Abaissez l'Ordonnée MP , pour avoir l'Abcisse $AP = x$. On a démontré (75) que $MF = x + \frac{1}{2}$. Or $MF = TF$ (const.) donc $TF = x + \frac{1}{2}$, & $FP = AP + AF = x + \frac{1}{2}$ (78); ainsi $TF = FP$, c'est-à-dire, $PT = x + \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} = 2x$. Ce qui signifie que PT est le double de l'Abcisse AP . Donc TM est une Tangente (30).

De toutes les manières d'avoir une Tangente, celle-ci est la plus aisée, quand on a le Foyer & l'Axe de la Courbe.

87. Réciproquement, si MT est Tangente, & que du Point de contingence M l'on mène MF au Foyer, cette Ligne MF sera égale à la distance FT du Foyer au Point T , où la Tangente rencontre l'Axe. Car, en abaissant l'Ordonnée MP , on a $AP = AT = x$ (29); ainsi $AT + AF$, c'est-à-dire, $FT = x + \frac{1}{2}$; mais $MF = x + \frac{1}{2}$ (75); donc $MF = FT$.

* 88. On tire de la Résolut. de ce Problème & du n°. 29. une Proposition, dont $M. Newton$ fait usage dans ses Principes. Nous la rapporterons, après avoir expliqué les termes que l'on y emploie (fig. 20.).

Quand un corps m ou M se meut dans une Parabole ou toute autre Section conique, les Lignes Fm , FM , tirées du Foyer de la Courbe aux Points m , M , où se trouve le Mobile, s'appellent Rayons Vecteurs, du Latin *Vector*, Porteur; parce que le Rayon porte en quelque sorte le mobile. Cela supposé.

* 89. COROL. III. Si aux Points M , m , où se trouve le mobile, on tire les Tangentes MT , mt ; & que du Foyer F on abaisse les Perpendiculaires FR , Fr , sur ces Tangentes, ces Perpendiculaires seront entr'elles comme les Racines

E ij

quarrées des *Rayons Vecteurs* FM, Fm, tirés aux Points de contact M, m; c'est-à-dire que $FR : Fr :: \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$.

DÉM. Puisque MT est Tangente, on a (87) $MF = FT$; donc la Perpendiculaire FR tombe sur le milieu R de MT (Dém. du n°. 79. *Inst. T. 1.*); ainsi en tirant la Perpendiculaire au Sommet A, elle passera par le Point R; car menant l'Ordonnée MP, on aura TA. AP : TR. RM. Or $AT = AP$ (29); donc $TR = RM$; la Perpendiculaire au Sommet A, passe donc par le milieu R de la Tangente MT. Et l'on prouvera de même que Fr tombe sur le milieu r de mt, & que AR passe par le Point r.

Considérez maintenant le Triangle-Rectangle FRT, dans lequel on a abaissé de l'Angle droit la Perpendiculaire RA, & vous aurez FT. FR : FR. FA (292. *Inst. T. 2.*); Donc $FR = FT \times FA$. Mais $FT = FM$ (87); ainsi $FR = FM \times FA$. Pareillement on aura, dans le Triangle Frr

Rectangle en r, Fr. Fr : Fr. FA. Donc $Fr = Fr \times FA$. Or $Fr = Fm$ (87); ainsi $Fr = Fm \times FA$. Et par conséquent

$FR : Fr :: FM : Fm$. Donc, en tirant les Racines quarrées, $FR : Fr :: \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$. C. Q. F. D.

90. COROL. IV. Si, après avoir fait $AK = AF = \frac{p}{2}$ (fig. 19.), l'on élève au Point K la Perpendiculaire KS nommée *Directrice*, prolongée indéfiniment de part & d'autre du Point K; chaque Point du Périmètre de la Parabole sera autant éloigné de cette Perpendiculaire que du Foyer F; c'est-à-dire qu'en abaissant d'un Point quelconque M, une Perpendiculaire MO sur KS, on aura toujours $MO = MF$. Car, supposant l'Ordonnée MP, on aura $MO = PK = PA + AK = x + \frac{p}{2}$ (const.) $= MF$ (75); donc $MO = MF$.

91. Les Géomètres appellent *Directrice* l'indéfinie KS; parce qu'en vertu de sa propriété, elle peut diriger dans la construction de la Courbe, comme on le verra bientôt.

92. COROL. V. L'Ordonnée FN au Foyer est égale à la

moitié du Paramètre de l'Axe; c'est-à-dire que $FN = \frac{p}{2}$. Puisque nous venons de voir (90) que $FN = NG$; or $NG = FK$ (const.) $= \frac{p}{2}$ (79). Donc $FN = \frac{p}{2}$.

93. COROL. VI. Donc, en prolongeant NF, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'autre branche de la Courbe, on aura la double Ordonnée au Foyer égale au Paramètre de l'Axe.

94. COROL. VII. La Perpendiculaire Ax au Sommet A de l'Axe, est Tangente à la Parabole, on ne touche cette Courbe qu'en un seul Point.

Car, si elle la touchoit en quelqu'autre Point d; en abaissant dg perpendiculairement sur la *Directrice* KS, & menant dF au Foyer, l'on auroit $dF = dg$ (90) $= AK$ (const.) $= AF$ (79); donc $dF = AF$. Ce qui est absurde; n'écartant pas possible que l'hypothénuse dF d'un Triangle-Rectangle FAd soit égale à l'un de ses côtés AF. Donc, &c.

* 95. PROBL. FB = p étant donnée pour le Paramètre d'une Parabole, construire cette Courbe en se servant d'une *Directrice*. (fig. 19.)

RÉSOLUT. Prenez une Ligne quelconque AB pour l'Axe de la Parabole à construire, & dont l'origine soit en A. Portez ensuite sur l'Axe le quart $\frac{p}{4}$ du Paramètre, de A en F & K; & prenant F pour le Foyer de la Courbe (83), vous élèverez au Point K l'indéfinie KS, qui en sera la *Directrice* (90 & 91). Prenez sur cette *Directrice* un Point O quelconque; élèvez-y une Perpendiculaire OI; tirez de ce même Point la Ligne OF au Foyer, & faites l'Angle OFM = FOM; je dis que le Point M, où FM rencontrera la Perpendiculaire OI, sera à une Parabole, dont le Paramètre sera FB, le Foyer F, & la *Directrice* KS. Il n'y aura donc qu'à prendre d'autres Points sur la *Directrice*; & faire à leur égard la même construction, que l'on vient de faire par rapport au Point O; & l'on aura, par ce moyen, autant de Points de la Courbe qu'on voudra.

DÉM. Après avoir abaissé du Point M la Perpendiculaire MP sur l'Axe AB, & fait $AP = x$; remarquez que $MF = MO$, à cause du Triangle isoscèle FMO (const.); or $MO = PK$ (const.) $= AP + AK = x + \frac{p}{2}$

E iij

(const.); donc $MF = x + \frac{p}{2}$. Ainsi $MF = xx + \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}$; & $PF = AP - AF = x - \frac{p}{2}$; donc $PF = xx - \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}$; mais le Triangle-Rectangle FPM donne $MF = PF + MP$, c'est-à-dire (en substituant les valeurs analytiques) $xx + \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} = xx - \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + yy$; donc

(en ôtant de part & d'autre $xx + \frac{p^2}{4}$, & faisant passer dans le premier membre $-\frac{p}{2}x$) vous aurez $\frac{p}{2}x$ ou $px = yy$. Ce qui démontre que le Point M, ou tout autre Point trouvé de la même manière, est à une Parabole (20); puisque le carré de l'Ordonnée est égal au Rectangle du Paramètre par l'Abcisse correspondante, &c. [a].

[a] Je finis la Théorie de cette Courbe, par où la plupart des Modernes ont coutume de la commencer. Quoique la Parabole ait pris naissance dans le Cône, ils ont mieux aimé la décrire en conséquence de quelques-unes de ses propriétés, & déduire de cette description tout ce qu'ils avoient à en dire, qu'à partir, comme nous avons fait, de la simple supposition, que l'on coupe un Cône parallèlement à un côté du Triangle par l'Axe de ce solide. Ainsi la Description de ces Auteurs, supposant la connoissance de quelques propriétés de la Courbe qu'ils veulent faire connoître, ne fût point decouvrir ces propriétés. C'est pourquoi nous avons cru devoir prendre une autre route, pour trouver, par une chaîne non-interrompue de propositions, ces mêmes propriétés que les Modernes supposent, & qu'ils n'auroient pas évidemment supposées, s'ils n'avoient déjà connu la nature de la Courbe. On est principalement redevable à Apollonius de la découverte ou de la collection de la plupart des propriétés qui caractérisent cette Courbe; mais, malgré le travail de M. Barrow, Anglois, sur ce précieux monument de l'antiquité, il me paroît que sans une vocation irrésistible pour la Géométrie, il n'est pas possible d'en soutenir la lecture. Jusqu'à l'énoncé même de ces propositions, tout s'y présente obscurément, avec très-peu d'ordre, & par conséquent beaucoup de difficulté. Archimède a précédé Apollonius dans ce travail, & nous a donné là-dessus de très-belles découvertes. Les Modernes ont pris la peine de les développer à leur façon; & je les donne ici dans l'ordre où je les ai conçues, engendrées immédiatement les unes des autres, sans y rien supprimer. Ce que je n'ai vu exécuté nulle part.



Usage de la Parabole dans le Jet des Bombes, ou d'un Projectile quelconque.

AVERTISSEMENT. Les Commencans peuvent passer toute cette doctrine; mais, en même-tems qu'ils se priveront d'un très-beau spectacle pour l'esprit, ils auront le désagrément d'ignorer ou de ne connoître que par écho, une suite de découvertes qui ont fait beaucoup d'honneur au 17^e & au dix-huitième siècle.

96. VOICI une Science toute nouvelle [a], & sur laquelle les anciens ne nous ont absolument rien laissé; quoique l'usage fréquent de leurs machines de guerre, les Ba-

[a] Les Sciences ne doivent proprement compter leur origine, que du tems où elles ont acquis des principes sûrs, & des méthodes fondées sur ces principes. Ainsi, quoique le jet des bombes puisse être réduit, à certains égards, au jeu des Balistes & des Catapultes, machines de guerre si connues chez les Anciens, nous nous garderons bien de lui donner une origine si reculée. Nous ne le ferons pas même remonter jusqu'à l'année 1588, qui est, selon M. Biandel, la date des premières bombes que l'on ait vues en Europe, & que le Comte de Mansfeld fit jeter dans la Ville de Waltheim en Gueldres, Province de Hollande, lorsqu'il en faisoit le siège sous le Prince de Parme; parce qu'alors on n'avoit d'autre règle pour cet Art, que le pur tâtonnement.

C'est pourquoi Galilée, Philosophe de Florence, me paroît être sans contredit l'inventeur de cette Science; laquelle sur ce pied-là n'a pas 150 ans d'ancienneté, ce grand homme étant mort en 1642. Je me fonde sur ce qu'il a inventé le premier les loix qu'observent les corps dans leur ascension & dans leur chute, lorsqu'ils ont reçu une impulsion quelconque, ils sont abandonnés à l'action de leur pesanteur.

Effectivement il me semble que le titre d'inventeur, titre si distingué, convient uniquement à celui qui a non-seulement découvert les principes ou la théorie d'un Art; mais dont le pénétrant génie en ayant aperçu tout-à-coup l'étendue, en fit sur le champ l'application aux principaux Problèmes de la doctrine du jet des bombes. Ce qu'on y a ajouté dans la suite, pour finir ou achever cette Science, quoique très-digne de l'estime des Connoisseurs, ne peut passer que pour un développement; puisqu'il ne suppose aucune loi nouvelle.

Il est vrai que c'est un développement, où il y a beaucoup de sagacité, & un grand Art de manier la Géométrie; mais enfin Galilée avoit ouvert la route, & tourné toutes les *Données* des Problèmes; au lieu qu'avant ce rare génie, on ne sçavoit pas même comment s'y prendre. Les hommes de tous les siècles, qui l'ont précédé, n'avoient là-dessus rien imaginé d'exact; quoiqu'ils eussent nos mêmes besoins. Il est donc juste que cet illustre Italien ait toute la fleur de cette gloire, & que les autres se contentent du mérite de s'être aperçus, qu'à cet égard il étoit digne d'être leur Maître.

listes & les Catapultes, eût dû les y conduire. *Galileo Galilei*, Italien, & vulgairement nommé *Galilée*, en est l'inventeur. Elle est fondée sur les loix, qu'observent les corps pesans dans leurs chûtes; lorsqu'abandonnés à eux-mêmes ou à la seule action de leurs propres poids, ils descendent vers la surface de la terre. Pour peu que l'on ait ouvert les yeux sur le mouvement des corps, on a remarqué qu'ils frappoient la terre avec plus de force, quand ils tomoient de plus haut.

Si un corps alloit toujours également vite, dans les différens instans de sa chûte, il n'auroit pas plus de force à la fin qu'au commencement; or, puisque le contraire arrive, il est nécessaire que sa vitesse augmente à chaque instant, c'est-à-dire que dans le second instant il parcourt un espace plus grand que dans le premier; plus dans le troisième que dans le second, & ainsi de suite. Mais suivant quelle loi se fait cette augmentation de vitesse?

En supposant la pesanteur constante, c'est-à-dire que le corps, à chaque instant de sa chûte, soit sollicité au mouvement par une force qui ne cesse de se répéter également dans chaque Point de son trajet, Galilée découvrit d'abord par la seule force du raisonnement; à ce que l'on assure [a], & se convainquit ensuite par l'expérience, que *les espaces qu'un corps parcourt en tombant, forment la progression Arithmétique 1, 3, 5, 7, 9, &c.* de manière que, si dans le premier instant, il s'avance de 1 toise vers la surface de la terre, il en fera 3 dans le second instant, 5 dans le troisième, 7 dans le quatrième; & ainsi de suite.

97. COROL. I. D'où il suit que, *les espaces parcourus sont entr'eux, comme les quarrés des tems employés à les parcourir*, en prenant le premier terme de ces espaces, au Point où le corps a commencé à tomber; c'est-à-dire que l'espace parcouru dans les deux premiers instans, est à l'espace parcouru dans le premier, comme le quarré de 2 est au quarré de 1, ou :: 4. 1.

[a] Voy. le Schol. 2. de la pag. 13. n°. 89. de la Mécanique de M. Volé.

RÉSOL. Rappelez-vous que l'espace x doit être à l'espace 15, comme le quarré 16 du tems 4, est au quarré 1 du tems 1, ou que $x : 15 :: 16 : 1$. (97). Ainsi $x = 15 \times 16 = 240$. Ce qui démontre qu'en 4 secondes le corps est descendu de 240 pieds.

100. PROB. Voulez-vous sçavoir présentement, combien de tems un corps sera à tomber de la hauteur de 540 pieds?

RÉSOL. Dites, l'espace 15 parcouru en une seconde, est à l'espace proposé 540, comme le quarré de 1 est au quarré y du tems cherché, ou $15 : 540 :: 1 : y = \frac{540}{15} = 36$. Donc le tems cherché $y = \sqrt{36} = 6$. Un corps emploiera donc 6 secondes à tomber de la hauteur de 540 pieds.

101. COROL. II. Comme on suppose la pesanteur constante, c'est-à-dire qu'à chaque instant elle donne au corps qui tombe une nouvelle impulsion, égale à chacune des impulsions reçues dans chaque instant précédent; qu'une impulsion égale produit dans un même tems une vitesse égale, & que toutes ces impulsions conspirant du même côté, sans se détruire aucunement, il est évident que dans un tems donné, le corps reçoit autant d'impulsions ou de vitesses égales, que l'on y peut compter d'instans égaux. *Les vitesses acquises sont donc comme les tems employés à parcourir des espaces*: Mais les espaces parcourus sont entr'eux comme les quarrés des tems (97); par conséquent, les tems étant entr'eux comme les vitesses, *les espaces seront comme les quarrés des vitesses acquises à la fin de ces espaces*. Donc *les vitesses acquises seront entr'elles, comme les Racines quarrées des espaces*.

Soient T, t les tems; V, v les vitesses; E, e les espaces que l'on compare. On aura $T : t :: V : v$ (101); ou $TT : tt :: VV : vv$. Or $E : e :: TT : tt$ (97); donc $E : e :: VV : vv$; ainsi $T : t :: \sqrt{E} : \sqrt{e}$; ou $V : v :: \sqrt{E} : \sqrt{e}$. On doit faire attention à toutes ces loix.

Effectivement le corps étant supposé par courir 1 toise dans le premier instant, & 3 dans le second, suivant la loi de la nature (96), il aura parcouru en tout 4 toises à la fin du second instant. Ainsi l'espace parcouru dans les deux premiers instans sera à l'espace parcouru dans le premier :: 4. 1. mais 4 est le quarré de 2, & 1 est aussi le quarré de 1. Il est donc clair que, dans la supposition de la loi énoncée ci-dessus (96), *les espaces parcourus sont entr'eux, comme les quarrés des tems employés à les parcourir*. Observation très-essentielle pour la suite.

Voulez-vous, pour porter la conviction plus loin, comparer l'espace parcouru en 2 instans, à celui qui l'aura été en 3; Vous trouverez qu'à la fin des deux premiers instans, il aura parcouru 4, ou $1 + 3$, & à la fin des 3 instans il aura parcouru 9, ou $1 + 3 + 5$; ensuite que l'espace des deux premiers instans est à l'espace des 3 instans :: 4. 9. Or 4 est le quarré de 2, & 9 celui de 3. Cette seconde loi n'est donc pas moins constante que la première; & vous allez voir qu'elle est très-commode, pour découvrir de quelle hauteur un corps est tombé, quand on connoît le tems qu'il a employé à tomber par la seule action de sa pesanteur; ou combien de tems un corps sera à parcourir une hauteur donnée, en vertu de sa seule pesanteur.

98. Nous supposons ici, comme dans toute la suite, que le corps dans sa chute n'éprouve aucun obstacle, soit de la part de l'air, soit de toute autre cause quelconque; en un mot, comme si son mouvement s'exécutoit dans un vuide parfait; prenant ainsi les choses dans la pureté Mathématique, afin d'avoir des principes fixes; mais nous réservant à examiner par l'expérience, jusqu'à quel point la résistance de l'air peut altérer les résultats de cette hypothèse. Nous supposons encore qu'un corps en tombant, parcourt 15 pieds dans la première seconde de sa chute, comme on l'a déterminé à peu près par l'expérience.

99. PROB. Un corps a été 4 minutes à tomber par la seule action de sa pesanteur. On demande de quelle hauteur il est descendu, ou la longueur x de l'espace qu'il a parcouru pendant ce tems?

102. COROL. III. Un corps mù uniformément [a] avec la vitesse acquise à la fin du premier instant de sa chute, parcourt dans un tems égal au premier, un espace double du premier. Car, la pesanteur étant supposée constante, pousse toujours le corps également; elle lui fait donc parcourir 1 dans le second tems, comme elle a fait dans le premier: mais, puisque dans ce second tems le corps en a parcouru 3, il est nécessaire qu'en vertu de la vitesse acquise à la fin du premier instant, il ait parcouru 2, double de 1, premier espace parcouru. Or cette vitesse acquise est uniforme, puisqu'elle n'est altérée par aucune cause. La progression Arithmétique 1, 3, 5, 7, 9, &c. que suivent les espaces parcourus par un corps, dans les instans successifs de sa chute, démontre donc que ce corps mù uniformément avec la vitesse acquise à la fin du premier instant de sa chute, parcourt dans un tems égal au premier, un espace double de l'espace parcouru dans le premier tems. Ce qu'il est très-important de bien remarquer.

Et pour n'avoir aucun doute que cela arrive invariablement, prenez l'espace 4 parcouru en 2 instans; je dis qu'avec la vitesse acquise à la fin de ces deux premiers instans, le corps aura véritablement parcouru 8, double de 4, dans les deux instans suivans. Car dans ces deux instans il parcourra $5 + 7 = 12$. Or on suppose que la pesanteur lui en fait parcourir 4 dans les deux premiers instans; donc, puisqu'elle est constante, elle lui en fera aussi parcourir 4, dans les deux instans suivans égaux aux deux premiers; il en restera donc 8 parcourus par la vitesse acquise; laquelle ne peut pas manquer d'être toujours uniforme; vu que rien ne l'empêche d'être la même.

103. COROL. IV. Un corps repoussé en haut perpendiculairement à l'horison, avec la vitesse acquise à la fin de sa chute doit nécessairement, dans un tems égal à celui

[a] Le Mouvement uniforme est celui par lequel un corps parcourt des espaces égaux, en tems égaux.

de sa chute, remonter au même Point d'où il a commencé à descendre (fig. 21.).

DEM. Supposons qu'en 3 tems égaux, le corps soit descendu de A en B; qu'il ait parcouru 1 dans le premier tems, & par conséquent 3 dans le second, & 5 dans le troisième; de manière que AB soit en tout de 9 parties égales. Les tems étant entr'eux comme les degrés de vitesse (101), le mobile aura acquis, à la fin de sa chute, 3 degrés égaux de vitesse; il commencera donc à remonter avec ces 3 degrés; mais en vertu du degré acquis pendant le premier instant de sa chute, il a parcouru 2 (102); donc, en vertu des 3 degrés égaux acquis à la fin, il en parcourra $6 = 3$ fois 2. Ainsi le mobile, en possession de ces 3 degrés de vitesse, parcoureroit d'un mouvement uniforme 6 parties de AB, dans le premier tems de son ascension, ou remonteroit de B jusqu'en 3, si la pesanteur s'opposant à son action dans un sens directement contraire, ne le faisoit pas reculer de 1; il ne parviendra donc que jusqu'en 4, après avoir décrit 5 parties de AB. Dans le second tems de son ascension, il décrirait aussi d'un mouvement uniforme 6 parties de AB; mais la pesanteur le faisant reculer de 3 dans ce second tems, il n'ira au-delà du Point 4, que de trois parties de AB. Donc, à la fin des deux premiers tems de son ascension, il sera remonté jusqu'en 1; & il continueroit, dans le troisième tems, de faire uniformément 6 parties de AB, si la pesanteur le repoussant de 5, ne le réduisoit pas à n'avoir décrit que 1 partie de AB. De manière donc qu'à la fin des 3 tems, il sera revenu précisément au Point A, d'où il avoit commencé à descendre. Et il ne passera pas ce Point de pance.

Car, si on vouloit qu'il continuât dans un quatrième tems à faire d'un mouvement uniforme 6 parties de AB, en remontant au-dessus du Point A; comme il seroit repoussé de 7 parties dans ce même quatrième tems, il se trouveroit à la fin de cet instant au Point 1, au-dessous de A. On voit par-là qu'il redescendrait, & que par

DEM. 1°. Le chemin AMD du mobile est une *Parabole*. Car, les espaces parcourus par la pesanteur étant entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir, l'espace FM ou AG parcouru en vertu de la pesanteur à la fin de 1 seconde, (durant laquelle le mobile aura décrit uniformément AF ou GM moitié de AC) sera à l'espace CD ou AB, parcouru en vertu de la pesanteur à la fin des 2 secondes, (pendant lesquelles il aura décrit uniformément AC ou BD (supp.)) comme le quarré de 1 est au quarré de 2; c'est-à-dire que FM ou AG. CD ou AB :: 1. 4; or AF étant moitié de AC, GM = AF est moitié de BD = AC; ainsi BD = 2 GM; donc BD = 4 GM; donc GM. BD :: 1. 4. mais nous venons de voir que AG. AB :: 1. 4. Par conséquent GM. BD :: AG. AB. Les quarrés des Ordonnées GM, BD, sont donc entr'eux, comme les Abcisses AG, AB correspondantes; ce qui démontre que le chemin AHD est une *Parabole* (7).

2°. AB en est évidemment l'Axe, puisque les Ordonnées GM, BD, lui sont perpendiculaires (1).

3°. En tirant BF, & élevant sur cette Ligne une perpendiculaire FH, menée jusqu'à ce qu'elle rencontre, en quelque Point H, le prolongement de BA vers H, on aura AH troisième proportionnelle aux Lignes AB, AF (291 *Infir.* T. 2.); & dont je dis que le quadruple sera le *Paramètre* de la Courbe AMD; c'est-à-dire que $4 AH = p$. Car remarquez que $AF = AH \times AB$, puisque (supp.) AB. AF :: AF. AH. Ainsi $4 AF = 4 AH \times AB$; mais BD = 2 AF, & BD = 4 AF; donc BD = 4 AH $\times$ AB; mais l'on sçait d'ailleurs (20) que BD = AB $\times$ p. Donc AB $\times$ p = 4 AH $\times$ AB; & par conséquent p = 4 AH. C. Q. F. D.

4°. Le mobile étant détourné, par la pesanteur, de sa direction AC, dès qu'il s'est avancé du Point A vers CD, on voit que la demi-Parabole AMD n'a que le Point A de commun avec la Ligne AC; & que ce seroit précisément la

conséquent un corps repoussé, perpendiculairement à l'horizon, avec la vitesse acquise à la fin de sa chute, remontera, dans un tems égal à celui de sa descente, précisément à la même hauteur, d'où il a commencé à se mouvoir, sans qu'il lui soit possible d'aller au-delà.

Si l'on avoit de la peine à concevoir qu'un corps mù uniformément en haut, fût repoussé suivant la même loi, avec laquelle il accélère son mouvement en descendant, il n'y auroit qu'à l'imaginer roulant sur un plan, oblique à l'horizon, lequel plan seroit mù uniformément dans un sens directement opposé à la chute du corps; & l'on verroit évidemment que, tandis que le plan entraîneroit le corps de 6 parties au-dessus de l'horizon, dans le premier instant, la pesanteur le feroit redescendre en roulant, de 1 partie pendant ce même tems; d'où il est clair que tout le reste s'enfuit.

104. REM. La théorie du *jet des bombes* se déduit uniquement, des loix de ce mouvement accéléré des corps pesans, combinées avec celles du mouvement uniforme, où l'on suppose qu'une impression donnée à un corps mis en mouvement, continue d'être la même dans les instans suivans, tandis que rien ne s'y oppose, & lui fait parcourir des espaces égaux en tems égaux; comme cela arriveroit nécessairement dans un vuide parfait. Il faut donc, avant de passer aux Propositions suivantes, se rendre ces loix bien familières, & tâcher qu'il ne reste aucun nuage.

105. PROPOS. I. Quand un corps est poussé uniformément le long d'une Ligne AC (fig. 22.), parallèle à l'horizon BT; qu'il décrit, par exemple, en 2 secondes, tandis que la pesanteur le fait descendre de la hauteur AB; je dis qu'en vertu de la composition de ces deux mouvemens, l'un uniforme & l'autre accéléré, il arrivera à la fin de ce tems au Point D, après avoir tracé la Parabole AMD, laquelle a pour *Axe* la hauteur AB; les Lignes GM, BD, pour deux de ses *Ordonnées*; pour *Paramètre* p le quadruple d'une Ligne troisième proportionnelle aux deux grandeurs AB, & AF moitié de AC; & enfin AC pour *Tangente*.

même chose, si le corps, après avoir été porté de A vers la droite, étoit poussé du même Point A vers la gauche sur le prolongement de CA, pour décrire l'autre moitié de la Parabole. Par conséquent la Ligne AC, ne rencontrant la Parabole entière qu'en un seul Point, est nécessairement Tangente à cette Courbe.

106. PROPOS. II. Supposons présentement que le même corps décrive uniformément BF, oblique à l'horizon BT, dans le même tems qu'il a parcouru AF, c'est-à-dire dans 1 seconde; & il arrivera que l'action de la pesanteur, combinée avec celle de l'impulsion uniforme suivant BF, fera décrire au mobile en 4 secondes, la Parabole entière BMCNT, tout-à-fait égale à la Parabole dont AMD, est une moitié.

DEM. A la fin de la première seconde le mobile seroit arrivé en F, si la pesanteur ne l'avoit pas fait descendre de la hauteur FM, quatrième partie de AB, comme au n°. 105. ainsi le Point M sera à la nouvelle Courbe. Le corps continuant à se mouvoir uniformément dans la même direction, auroit parcouru FR = BF, à la fin de la 2^{me} seconde, & seroit parvenu en R, sans la pesanteur qui l'a fait descendre alors de la longueur AB = 4 AG = 4 FM (supp.): or AB = RC, puisque AF = FC; ainsi à la fin des 2 premières secondes, le mobile sera descendu de la longueur RC = 4 FM, & le Point C sera à la Courbe du *Jet*. J'ajoute qu'il en sera le *Sommet*, puisque le mobile ayant parcouru uniformément RK dans la troisième seconde, seroit parvenu en K à la fin de 3 secondes, si la pesanteur ne l'avoit pas fait alors descendre de 9 FM (97), c'est-à-dire, de KN = 9 FM; le Point N de la nouvelle Parabole se trouvera donc au-dessous de AP; car KV étant double de RC (à cause de FK double de FR), & RC = AB quadruple de FM ou de AG, la Ligne KV sera octuple de FM ou = 8 FM; mais KN = 9 FM = 8 FM + FM; ainsi KN > KV, & VN = FM: le mobile sera donc descendu alors au-dessous de AP, & C sera le plus haut Point de son ascension, ou le *Sommet* de la Courbe BCT. Dans la

quatrième seconde il auroit parcouru, en vertu de son mouvement uniforme, $KS = BF$, & seroit arrivé à la fin de 4 secondes en S; mais la pesanteur l'ayant fait descendre alors de 16 FM (97), il sera précisément arrivé au Point T de l'horizon, qui déterminera par conséquent toute l'étendue du Jet. Etant évident que $ST = SP + PT = 16 FM$; puisque SP égalant RC (à cause de $FS = 3 FR$) & RC égalant 4 FM, on a $SP = 12 FM$; d'ailleurs $PT = AB = 4 AG = 4 FM$; donc $SP + PT = 16 FM$, ou $ST = 16 FM$, ou 4 AB. Par conséquent, à la fin des 4 secondes, le mobile sera précisément retombé sur l'horizon, & le chemin CNT qu'il aura parcouru en descendant pendant 2 secondes, sera égal au chemin BMC décrit aussi en 2 secondes qu'il a employées à monter; étant clair, par la figure, que le chemin BMCNT est une Parabole. Car $ME = GM$; $CE = AG$; $CD = AB$. Donc, puisque $GM \cdot BD :: AG \cdot AB$ (105), on aura $ME \cdot BD :: CE \cdot CD$; la Courbe BMC est donc une demi-Parabole (7).

On prouvera de même, que la Courbe CNT est une autre moitié de Parabole égale à la demi-Parabole BMC, laquelle ne diffère en rien de AMD; ces deux Courbes ayant une égale hauteur, & des Ordonnées égales, à des Points également éloignés de leur Sommet: par conséquent la Parabole entière BMCNT est tout-à-fait égale à la Parabole, dont AMD est une moitié.

107. PROBL. Mais de quelle hauteur doit tomber le mobile, pour avoir à la fin de sa chute une force, qui lui fasse parcourir uniformément BR double de BF, dans le même-temps que sa pesanteur lui fait parcourir AB, c'est-à-dire, en 2 secondes? (fig. 22.).

RÉSOL. Cherchez une troisième proportionnelle aux deux grandeurs AB, BF; c'est-à-dire, élevez au Point F sur BF la Perpendiculaire FH, jusqu'à ce qu'elle rencontre en quelque Point H, le prolongement de BA vers H; & la longueur HB sera la hauteur, dont le mobile doit descendre, pour acquérir à la fin de sa chute une force, qui le mette

en

le même temps que le corps a mis à tomber de A en B. C. Q. F. D.

Nous appellerons dans la suite BH la *Ligne de hauteur*.

108. Si l'on est curieux de savoir, comment l'on est parvenu à trouver que la hauteur HB, troisième proportionnelle aux deux Lignes AB, BF, étoit propre à résoudre cette question. Soit y la hauteur cherchée; V la vitesse acquise à la fin de AB; & que l'on se rappelle que les vitesses acquises en tombant, sont entr'elles comme les Racines quarrées des espaces parcourus (101); ce qui donne $V : u :: \sqrt{y} : \sqrt{AB}$; mais (supp.) en vertu de la vitesse V acquise à la fin de l'espace y , le mobile doit parcourir uniformément $BR = 2 BF$ en 2 secondes; & la vitesse u acquise à la fin de l'espace AB, doit faire parcourir au mobile, avec un mouvement uniforme, un espace double de AB en 2 secondes (102); or, dans le mouvement uniforme, quand les temps sont égaux, les vitesses sont entr'elles comme les espaces parcourus [4]; donc $V : u :: 2 BF : 2 AB :: BF : AB$. Ainsi $\sqrt{y} : \sqrt{AB} :: BF : AB$. Donc, en quarrant tous les termes, $y : AB :: BF^2 : AB^2$ (254. *Inf. T. 2.*) d'où l'on tire $y = \frac{BF^2}{AB}$, ou $AB : BF :: BF : y$. Ce qui démontre que la hauteur cherchée y , est une troisième proportionnelle aux deux Lignes AB, BF; ainsi qu'on l'a supposé (107) pour la Résolution de ce Problème, & que la vérité en a été reconnue par la Démonstration, dont il est suivi.

109. COROL. Il est clair 1°. que les Lignes BS, AP, sont Tangentes de la Parabole BMCNT; 2°. que AH est le quart du Paramètre de l'Axe CD de cette Courbe, ainsi qu'il l'est de son égale AMD (105); 3°. que l'indéfinie HO, Perpendiculaire à HB, en est la *Directrice* (90); 4°. que

[4] Etant évident que, si deux espaces différens ont été parcourus dans le même-temps, il a fallu employer, pour le plus grand, d'autant plus de vitesse qu'il surpasse le petit.

en état de parcourir uniformément BR en 2 secondes, c'est-à-dire, dans le temps qu'il sera à parcourir AB par sa pesanteur.

DÉM. Supposons donc que le mobile soit tombé de la hauteur HB, & voyons quelle longueur il doit parcourir d'un mouvement uniforme pendant 2 secondes, en conséquence de la vitesse acquise à la fin de HB. Les espaces parcourus, en vertu de la pesanteur, étant entr'eux comme les quarrés des temps employés à les parcourir (97), si nous appelons t le temps que le mobile emploiera à descendre le long de HB, nous aurons $AB : HB :: 4 : t^2 = \frac{4HB}{AB}$.

Donc $t = 2 \sqrt{\frac{HB}{AB}}$ (21. Calc.) est l'expression du temps, que le mobile a employé à parcourir HB, en vertu de la pesanteur; & cette expression de t est en grandeurs connues. Soit donc x la quantité, par laquelle il faut multiplier t , afin qu'il soit $= 2$ secondes, on aura $tx = 2$;

donc $x = \frac{2}{t} = \frac{2}{2 \sqrt{\frac{HB}{AB}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{HB}{AB}}}$. Mais $\frac{HB}{AB} = \frac{BF^2}{AB^2}$. Car

$HB : BF :: BF : AB$ (const.); donc $HB : BF :: HB : AB$ (256.

Inf. T. 2.); ainsi $\frac{HB}{BF} = \frac{BF}{AB}$. Donc, puisque $x = \frac{1}{\sqrt{\frac{HB}{AB}}}$,

on aura $x = \frac{1}{\sqrt{\frac{HB}{AB}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{BF}{HB}}} = \frac{BF}{HB}$, (37. *Arithm. Inf.*

T. 1.) donc $x = \frac{BF}{HB}$. Or, avec la vitesse acquise à la fin du temps t , le mobile doit parcourir uniformément, pendant un temps égal à t , un espace double de HB, c'est-à-dire 2 HB; ainsi pendant $t \times x$ ou pendant 2 secondes, il parcourra uniformément 2 HB $\times x = 2 HB \times \frac{BF}{HB}$, (puisque $x = \frac{BF}{HB}$); or 2 HB $\times \frac{BF}{HB} = 2 BF = BR$; par conséquent le mobile parcourra uniformément, en vertu de la vitesse acquise le long de HB, l'espace BR en 2 secondes, qui est

F

$ST = 4 FQ = 4 AB$, puisque $BS = 4 BF$; 5°. que l'Amplitude BT, ou la plus grande étendue de la Parabole, $= 4 AF$ ou 4 BQ; 6°. que la plus grande élévation CD $= AB$; & 7°. qu'enfin la *Ligne de hauteur* HB est égale à la plus grande élévation ou à l'Axe CD $= AB$ de la Parabole, en y ajoutant le quart AH de son Paramètre.

110. Au lieu de la direction BS (fig. 23.), prenons une autre direction quelconque Br, renfermée dans l'Angle droit HBT, & faisant avec l'horizon Br l'Angle rBr. Supposons toujours que le mobile, soit poussé d'un mouvement uniforme suivant la direction Br, avec la vitesse acquise en tombant de H en B, c'est-à-dire, avec la même vitesse qui lui a fait décrire la Parabole BCT en 4 secondes, étant poussé dans la direction BS; & voyons quelle partie de Br le mobile auroit parcourue uniformément, à l'instant que la pesanteur le ramènera à l'horizon.

111. PROPOS. III. Si l'on décrit un demi-Cercle sur la Ligne de hauteur HB, je dis que le mobile, poussé d'un mouvement uniforme suivant la direction Br, auroit précisément parcouru 4 Bb $= Br$, à l'instant qu'il retombera au Point t de l'horizon.

DÉM. Nous allons d'abord chercher le temps, que le mobile doit employer à parcourir uniformément 4 Bb ou Br. Après quoi nous examinerons si, en vertu de sa pesanteur, il a dû regagner l'horizon précisément à la fin de ce temps.

Dans le mouvement uniforme, quand les vitesses sont égales, les espaces parcourus sont entr'eux comme les temps employés à les parcourir [4]; ainsi 4 BF ou BS. 4 Bb ou Br :: 4 secondes (employées à parcourir BS) sont à un quatrième terme T, qui sera le temps que le mobile aura mis à décrire uniformément Br. Or, puisque 4 BF. 4 Bb :: 4. T, on aura $T = \frac{4Bb}{4BF}$ pour l'expression du temps, pendant lequel la longueur 4 Bb ou Br aura été parcourue.

[4] Car, si l'on va toujours d'un pas égal, on fera d'autant plus de chemin, que l'on y emploiera plus de temps.

Appellons maintenant z l'espace que le mobile aura fait, en tombant pendant le tems $\frac{AB}{BF}$; nous savons d'ailleurs (106) que l'espace ST , qu'il a fait en tombant pendant 4 secondes, est égal à $4 AB$: mais les espaces parcourus en tombant, sont entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir (97); on aura donc $z : 4 AB :: \frac{16}{BF^2} : 16$; donc $z = \frac{4 \times AB \times BH}{BF}$ (M). Or, en tirant les Li-

gnes bH , FH , il est clair que $Bh = BH \times AB$ (292. *Inst.* T. 2.), & pareillement que $BF = BH \times AB$; donc, en substituant ces valeurs de Bh & de BF dans l'équation M, elle deviendra $z = \frac{4 \times AB \times BH \times AB}{BH \times AB} = 4 AB = 4 bh$, en supposant la Perpendiculaire hl ; mais $rt = 4 hl$, puisque $Br = 4 bh$, donc $z = rt$; c'est-à-dire, que le mobile aura parcouru rt , en vertu de sa pesanteur, ou sera retombé à l'horison, à l'instant précisément qu'il auroit achevé de parcourir Br ou $4 Bh$ d'un mouvement uniforme, avec la vitesse acquise en tombant de H en B . C. Q. F. D.

112. REM. Je ne m'arrête point à démontrer que, dans l'hypothèse présente, le mobile ne pourroit être descendu à l'horison, avant d'être arrivé en r ; & qu'au-delà de ce Point il seroit tombé au-dessous de l'horison; parce que cela me paroît tout-à-fait évident, ou au moins, très-aisé à déduire des principes établis, en suivant pied à pied les traces de la dernière démonstration.

113. COROL. I. L'étendue du jet suivant la direction Br , ou ce qui est la même chose, l'amplitude de la nouvelle Parabole est donc déterminée par l'horizontale Br ; ainsi que l'amplitude de la Parabole BCT, décrite par le mobile suivant la direction BS, est déterminée par la longueur BT. Par conséquent, Br étant Tangente de la nouvelle Parabole, si l'on élève au Point t , milieu de Br , la Perpendiculaire ex , elle sera la sous-Tangente (28), & par-là double de l'Abcisse qui lui répond (29). Or Bx étant double de Bh , ex sera double de hl ou de AB ; mais $AB = xd$ (puisque

que $Bh = bx$), donc $ex = 2 xd = xd + de$. Ainsi $de = xd$; donc ex double de xd fera double de de ; la Ligne de sera donc l'Abcisse; le Point d le Sommet de la Parabole Bdt , laquelle ne s'élève pas au-dessus de la parallèle ag à l'horison, tirée par le Point b ; & AB ou de la plus grande élévation de ce jet.

114. COROL. II. On verra avec la même facilité, que cette plus grande élévation AB ou de est le quart de rt . Car $AB = bl$; or $bl = \frac{rt}{4}$, puisque $Bh = \frac{rt}{4}$; donc AB ou de est le quart de rt .

115. COROL. III. On s'apercevra de même que l'amplitude $Br = 4 ab$ ou $4 Bl$; à cause que Br égalant $4 Bh$, Br égalera $4 Bl$ ou $4 ah$.

116. COROL. IV. Il est clair encore que aH est le quart du Paramètre p de l'Axe de de la Parabole Bdt . Car $Be = de \times p$; (n°. 20.) or $Be = ad = 2 ah$; donc $Be = 4 ah$; donc $de \times p = 4 ah$; mais $ah = aH \times AB$ (291. *Inst.* T. 2.); donc $4 ah = 4 aH \times AB = 4 aH \times de$; ainsi $de \times p = 4 aH \times de$; donc $4 aH = p$, ou $aH = \frac{p}{4}$.

117. COROL. V. La Perpendiculaire indéfinie HO à la Ligne de hauteur HB est donc la Directrice de la Parabole Bdt (90), ainsi qu'elle l'est de la Parabole BCT (109).

118. COROL. VI. On voit enfin que la Ligne de hauteur HB est égale à la somme de l'Axe $de = AB$ de la Parabole Bdt , & du quart aH de son Paramètre.

De sorte que les Lignes, que nous venons de considérer par rapport à la Parabole Bdt , sont respectivement les mêmes que celles dont nous avons fait usage lorsqu'il s'est agi de la Parabole BCT. Ce qui arrivera de même dans tous les autres jets, suivant une direction quelconque entre HB & Br ; pourvu qu'ils se fassent toujours avec la même force.

119. REM. On dit que l'étendue d'un jet, ou l'amplitude d'une Parabole est au niveau de la Batterie [a], quand le

[a] Une Batterie est un endroit préparé, & communément à couvert d'un Pag F iii

Point où le mobile tombe, est dans la même Ligne horizontale que le Point d'où part ce mobile; tels sont les Points T , t , de l'horizontale Br , par rapport au Point de partance B . On appelle aussi Angle d'élévation un Angle quelconque Sbt , ou rBt , formé par l'horizontale Br & par une Ligne de jet, suivant une direction quelconque BS ou Br , élevée obliquement à l'horison.

120. PROPOS. IV. très-essentielle. Les étendues de différens jets au niveau d'une Batterie, ou ce qui est la même chose, les amplitudes Br , BT des Paraboles Bdt , BCT, décrites par un mobile, chassé avec une même force, suivant les directions Br , BS , obliques à l'horison, sont entr'elles comme les Sinus du double des Angles d'élévation rBt , Sbt .

Dém. Du centre E tirez les rayons Eh , EF ; & remarquez que l'Angle hEB au centre, a pour mesure l'arc entier Bh , & que l'Angle d'élévation rBt n'est mesuré que par la moitié de ce même Arc (105. *Inst.* T. 1.), étant formé par la corde Bh & la Tangente Bt du demi-Cercle. Pareillement, que l'Angle BEF est double de l'Angle d'élévation Sbt , le premier ayant pour mesure l'Arc entier BF , & l'autre seulement la moitié de ce même Arc. Or ah est le Sinus de l'Angle hEB (445. *Inst.* T. 2.); donc ah est le Sinus du double de l'Angle d'élévation rBt . De même AF étant le Sinus de l'Angle BEF , est le Sinus du double de l'Angle d'élévation Sbt . La Démonstration se réduit donc à faire voir que $Bt : BT :: ah : AF$; ce qui est très-simple, car on a vu (115) que $Bt = 4 ah$, & $BT = 4 AF$ (art. 5. du n°. 109.). Ainsi $Bt : BT :: 4 ah : 4 AF :: ah : AF$. C. Q. F. D.

121. COROL. I. D'où il suit que le plus grand de tous les jets, ou la plus grande des amplitudes des Paraboles, décrites par un même corps, poussé avec une même force suivant différens degrés d'élévation, est celle où le mobile est chassé à l'élévation de 45° ; ce qui s'appelle tirer à

rapet, d'où l'on tire du Canon ou des Mortiers, pour battre l'ennemi ou une Place attaquée.

toute volée. Car nous venons de voir que ces amplitudes, sont toujours égales aux quadruples des Sinus du double de leurs Angles d'élévation; mais le Sinus du double de 45° , ou le Sinus de 90° étant le Sinus total, est le plus grand de tous les Sinus; donc son quadruple est la plus grande amplitude. Ce qui est conforme à l'expérience.

Cela est même visible à l'inspection de la fig. 24, dans laquelle l'amplitude correspondante à l'Angle d'élévation hBT de 45° est égale à $4 Eh$; & celles qui répondent à des Angles MBT au-dessus, ou FBT au-dessous de 45° , valent $4 LM$ ou $4 AF$; mais, comme Eh est visiblement plus grande qu'aucune autre Ordonnée LM ou AF , prise au-dessus ou au-dessous du centre E , il n'y a rien de plus manifeste que $4 Eh$ est une étendue plus grande que $4 LM$ ou $4 AF$. Et l'on voit en même-tems, que la plus grande portée ou amplitude $4 Eh$, est double de la Ligne de hauteur HB , laquelle vaut toujours $2 Eh$.

122. COROL. II. Les amplitudes sont égales, quand le mobile est jetté, toujours avec la même force, sous des Angles d'élévation également éloignés de 45° ; puisque, dans ce cas, les Sinus étant égaux, leurs quadruples qui déterminent les amplitudes, sont aussi égaux. Soit (fig. 24.) l'Angle FBT de 30° , & l'Angle MBT de 60° , lesquels sont également éloignés de 45° , le premier ayant 15° au-dessous, & le second 15° au-dessus de 45° . Je dis alors les amplitudes sont égales; la première étant déterminée par le quadruple du Sinus de 60° double de 30 , & la seconde par le quadruple du Sinus de 120° double de 60 ; mais le Sinus de 120° est précisément le même que celui de 60 ; puisque, pour avoir le Sinus de 120° , il faut prendre celui de son complément à deux Angles droits (448. *Inst.* T. 2.), lequel est de 60° . Les Sinus étant donc égaux, c'est une nécessité que leurs quadruples le soient aussi, & que par conséquent les amplitudes soient égales. Ce qui est encore confirmé par l'expérience.

123. COROL. III. Il n'est pourtant pas toujours indifférent dans la pratique, de prendre l'un de ces Angles pour

l'autre. Si l'on se proposoit, par exemple, d'écraser un édifice, on voit qu'il seroit convenable de se servir de l'Angle au-dessus de 45° , parce qu'alors la Bombe s'élevant jusqu'à la hauteur LB (113), qui est plus grande que AB hauteur du jet au-dessous de 45° , elle frapperoit avec beaucoup plus de force, la vitesse étant augmentée en tombant de plus haut. On devroit au contraire s'en tenir à l'Angle au-dessous de 45° , si l'on avoit en vue d'incommoder ceux que l'on attaque par ce moyen : la Bombe s'élevant moins haut & passant alors par un chemin plus court, il est clair qu'elle donneroit moins de tems à l'ennemi, pour se mettre à couvert des éclats qu'elle lance de tous côtés, lorsqu'elle vient à crever [2].

124. COROL. IV. La portée sous l'Angle de 15° est égale à la moitié de la plus grande amplitude, ou à la moitié de l'amplitude de 45° ; car l'amplitude de 15° est à celle de 45° , comme le Sinus de 30° double de 15, est au Sinus de 90° double de 45 : mais le Sinus de 30° est la moitié du Sinus total, ou du Sinus de 90° (451. *Inst. T. 2.*); par conséquent l'amplitude ou la portée sous l'Angle de 15° , est la moitié de celle que l'on trouve sous l'Angle de 45° , c'est-à-dire (121) la moitié de la plus grande amplitude.

125. REM. Indépendamment de ce que ceci est fort commode pour avoir la plus grande portée, en mesurant simplement celle que l'on a moyennant 15° d'élevation, M. Bélidor s'en est servi dans son *Bombardier François*, pour construire une table des différentes portées d'une même Bombe, poussée avec une même force suivant différents degrés d'élevation. C'est un travail fort estimable, & je ne scaurois trop conseiller d'y avoir recours. On y trouvera un bon nombre d'observations très-judicieuses, qui peu-

[2] Une Bombe est un gros boulet creux, que l'on remplit de poudre, à laquelle on communique une fusée, qui doit conserver son feu à peu près autant de tems que la Bombe est en l'air. On la chasse par le moyen d'un gros Canon court, appelé *Mortier*; & lorsqu'elle est vers la fin de sa chute, la fusée à laquelle on a mis le feu avant de tirer, enflamme la poudre renfermée dans la Bombe, qui crevé à l'instant & jette en éclats.

de la Parabole Bdt, décrite sous la direction Bb, est éloigné de la Ligne de hauteur HB, d'une longueur $ad = 2 ab$; parce que dans les Triangles semblables abB , dbx , Bb étant $= bx$, il faut que $ab = bd$, & qu'ainsi $ad = 2 ab$. Pareillement que la Distance du Sommet C de la Parabole BCT, (décrite sous la direction BF) à la Ligne de hauteur HB, vaut $2 AF = AC$. Ainsi (fig. 24.) faisant les prolongemens $MG = LM$; $BD = Eb$; $FC = AF$; le Point G sera le Sommet de la Parabole sous l'inclinaison BM; D celui de la direction Bb; C le Sommet de la direction BF, &c. Il faut donc démontrer que les Points G, D, C, & tous les autres déterminés d'une manière semblable, sont à l'ellipse proposée. Or, puisque $MG = LM$ (const.), $LG = 2 LM$; donc $LG = 4 LM$. De même $ED = 4 Eb$. Ainsi $LG : 4 LM :: ED : 4 Eb$, ou $LG : LM :: ED : Eb$ (252. *Inst. T. 2.*); mais $LM = HL \times LB$ (289. *Inst. T. 2.*); ainsi $LG : HL \times LB :: ED : Eb :: 4 ED$ ou $4 HB : 4 Eb$; c'est-à-dire, que le carré LG de l'Ordonnée LG, est au Rectangle $HL \times LB$ des Segmens HL, LB, faits par cette Ordonnée, comme le carré $4 ED$ ou $4 HB$ de $2 ED$ ou $2 HB$ est au carré $4 Eb$ de $2 Eb$ ou HB; mais c'est-là précisément la propriété caractéristique de l'ellipse, qui auroit $2 ED$ ou $2 HB$, c'est-à-dire, la plus grande portée $4 Eb$ pour grand Axe, & $2 Eb = HB$ pour le petit (n°. 12. de l'ellipse); donc, &c.

130. COROL. IX. Enfin la Perpendiculaire HO est la Directrice commune de toutes les Paraboles décrites par un mobile jetté d'un Point B, selon toutes les inclinaisons possibles à l'horizon BT, avec la force acquise en tombant de H en B.

131. REM. Après avoir vu ce qui doit arriver à un corps, jetté suivant une Direction quelconque BS ou Br oblique à l'horizon Br (fig. 23.), avec une force acquise en tombant

vent considérablement perfectionner la pratique du jet des Bombes. J'avertirai seulement que l'Auteur en ayant donné la théorie dans son *Cours de Mathématiques*, il a jugé à propos de la supprimer dans son *Bombardier François*; & qu'ainsi on ne pourra pas lire cet Ouvrage avec intelligence, à moins que l'on n'ait bien conçu tout ce que nous avons dit jusqu'ici.

126. COROL. V. Les portées croissent depuis l'horizontale jusqu'à 45° ; après quoi elles vont en diminuant, jusqu'à ce que l'Angle d'élevation soit égal à un Angle droit; auquel cas l'amplitude sera nulle, & la Bombe retombera précisément dans la bouche de son Mortier, si aucun accident ne s'y oppose. Ce qui est tout-à-fait évident par la figure.

127. COROL. VI. La Ligne de hauteur HB est toujours la moitié de la plus grande portée. Car la Ligne de hauteur BH $= 2 Eb$, n'est évidemment que la moitié de $4 Eb$ qui est la plus grande portée (121).

128. COROL. VII. Il est impossible que la Bombe monte plus haut que le Point H, c'est-à-dire, qu'elle parvienne à une hauteur verticale plus longue que la moitié de la plus grande portée, parce qu'un corps, repoussé avec la force qu'il a acquise en tombant de H en B, ne peut tout au plus remonter qu'au Point H, d'où il a commencé à descendre pour acquiescir cette force (103); c'est pourquoi tous les jets ou routes les inclinaisons de l'hypothèse présente, sont renfermées dans le demi-Cercle HMB.

129. COROL. VIII. Je dirai ici, par anticipation, ne pouvant pas le dire ailleurs, que les Sommits de toutes les Paraboles, décrites par un mobile jetté avec une même force, suivant toutes les inclinaisons ou directions possibles, se trouvent dans une ellipse BCDGH, dont le grand Axe est égal à la plus grande portée $4 Eb$, & le petit est égal à la Ligne de hauteur HB $= 2 Eb$, moitié de la plus grande portée (127); de manière que le grand Axe de cette ellipse est double du petit.

DÉM. Reprenant la fig. 23; remarquez que le Sommet

de H en B; examinons quelle doit être la portée de ce même mobile, chassé avec la même force parallèlement à l'horizon. On comprend bien qu'il ne s'agit dans tout ceci, que de l'étendue des coups de volée, c'est-à-dire, de l'étendue en ligne droite sur le terrain, depuis l'endroit où le mobile commence à se mouvoir en l'air, jusqu'à celui précisément où sa pesanteur le ramène à Terre; n'y ayant point de règle, & n'étant pas possible d'en établir aucune sur l'espace, qu'une bombe peut parcourir en roulant après être tombée, vu l'irrégularité du terrain, la variété & la multiplicité des obstacles; d'autant plus qu'une bombe est presque toujours destinée à se fracasser à l'instant de sa chute à terre, quand on en veut à des hommes; ou à s'enfoncer, lorsqu'on se propose d'abattre, ou d'écraser des édifices. Ainsi la portée d'une bombe, tirée dans la direction même de l'horizon, seroit absolument nulle; puisqu'alors ses Points de départ & de chute seroient le même Point. Nous n'avons donc qu'à rechercher quelle doit être l'amplitude d'un jet, qui se fait au-dessus du niveau de la campagne, parallèlement à l'horizon. Or l'on appelle *Portée de but en blanc*, celle qui résulte de la direction du mobile, chassé parallèlement à l'horizon.

132. PROP. V. La Portée de but en blanc d'un mobile placé en B (fig. 25.) au-dessus de l'horizon DS, & chassé dans une Direction BT parallèle à l'horizon, avec une force acquise en tombant, par exemple, de H en B, est égale au double de la moyenne proportionnelle géométrique BM entre la Ligne de hauteur HB, ou ce qui est la même chose, entre la moitié de sa plus grande Portée (127) & la distance BD de l'horizon.

Ainsi, en décrivant un demi-cercle sur le Diamètre HD, & portant le double de BM (moyenne proportionnelle géométr. entre HB & BD (289. *Inst. T. 2.*)) de D en O sur l'horizon DS, il faut faire voir que le mobile, ayant parcouru uniformément DO ou BR $= 2 BM$, avec la vitesse acquise en tombant de H en B, sera tombé précisément, dans le même tems, de la hauteur BD ou RO.

DEM. Soit T le tems que le mobile a employé à tomber de H en B ; & le tems qu'il sera à parcourir BD en vertu de sa pesanteur. On sçait qu'en vertu de la vitesse acquise en tombant de H en B , dans le tems T , le mobile doit parcourir uniformément $2HB$, double de HB , dans le même tems T (102.). De plus, quand les vitesses sont égales dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus $2HB$, $2BM$ ou DO , sont entre eux comme les tems T , t , employés à les parcourir; ainsi $2HB : 2BM$, ou $HB : BM :: T : t$; donc $t = \frac{BM \times T}{HB}$ est l'expression du tems, que le mobile a mis à parcourir $2BM$ ou DO d'un mouvement uniforme.

Examinons maintenant si le mobile est précisément tombé de la hauteur BD ou RO , en vertu de sa pesanteur, dans le tems $\frac{BM \times T}{HB}$. Quelle que puisse être cette hauteur x , elle sera à la hauteur HB , parcourue en tombant dans le tems T , comme le carré du tems $\frac{BM \times T}{HB}$ est au carré du tems T (97), ou $x : HB :: \frac{BM \times T}{HB} : T$; d'où l'on tire $x = \frac{BM \times T}{HB}$. Ce qui signifie que, pendant le tems que le mobile a mis à parcourir $2BM$ ou DO uniformément, il est tombé, en vertu de sa pesanteur, d'une hauteur égale à $\frac{BM}{HB}$; mais cette hauteur est précisément la hauteur BD ou RO ; puisque (const.) HB étant à $BM :: BM : BD$, on aura BD ou $RO = \frac{BM}{HB}$. Donc, &c. C. Q. F. D.

133. Voulez-vous sçavoir présentement comment on a pu trouver, dans l'hypothèse présente, que la portée de but en blanc DO ou BR , devoit être égale au double de la moyen. proport. Géom. BM entre HB & BD ; c'est-à-dire, comment on a pu déterminer le Point O , où la pesanteur fait rencontrer au mobile l'horizon DS ? Voici une manière de vous le faire concevoir. Les espaces parcourus en tombant, étant entre eux comme les carrés des tems employés à les parcourir, on aura $HB : BD :: TT : tt$ (97). Ainsi $t = \frac{TT \times BD}{HB}$. Donc $t = T \sqrt{\frac{BD}{HB}}$ est l'expression du tems

BD ou $RO = \frac{BM}{HB}$. Donc, &c. C. Q. F. D.

133. Voulez-vous sçavoir présentement comment on a pu trouver, dans l'hypothèse présente, que la portée de but en blanc DO ou BR , devoit être égale au double de la moyen. proport. Géom. BM entre HB & BD ; c'est-à-dire, comment on a pu déterminer le Point O , où la pesanteur fait rencontrer au mobile l'horizon DS ? Voici une manière de vous le faire concevoir. Les espaces parcourus en tombant, étant entre eux comme les carrés des tems employés à les parcourir, on aura $HB : BD :: TT : tt$ (97). Ainsi $t = \frac{TT \times BD}{HB}$. Donc $t = T \sqrt{\frac{BD}{HB}}$ est l'expression du tems

Application de route la Théorie précédente à la Pratique.

134. PROB. Trouver l'amplitude d'une Parabole ou d'un jet, dont l'étendue est au niveau des Batteries, en supposant que l'Angle d'élévation soit déterminé.

RÉSOL. On commencera par faire une épreuve bien exacte, en tirant la pièce d'Artillerie sous un Angle quelconque d'élévation bien connu, & que j'appelle a . Après quoi l'on mesurera avec la plus rigoureuse précision l'étendue p de ce jet. Moyennant quoi on va voir que l'on détermine, avec une extrême facilité, toutes les portées d'une même pièce, quelque soit l'Angle d'élévation; pourvu que les bombes ou les boulets jettés soient toujours du même calibre, du même poids, & poussés avec la même force, c'est-à-dire, avec la même quantité de poudre, à laquelle on suppose toujours la même force.

Veut-on jeter la bombe sous l'Ang. de 30° , & connoître où elle ira tomber? On fera cette Règle de Proportion, le Sinus du double de l'Angle a de l'épreuve, est au Sinus du double de l'Angle de 30° , ou au Sinus de 60° comme la portée p de l'épreuve est à un quatrième terme x qui sera l'amplitude cherchée (120). Or les trois premiers termes de cette proportion sont donnés; le quatrième x sera donc connu, quelque soit l'Angle d'élévation.

135. PROB. Trouver l'Angle de l'élévation que l'on doit donner à la pièce, pour chasser le boulet ou la bombe à une distance E déterminée [4].

RÉSOL. Faites encore cette Règle de Proportion: la portée p de l'épreuve est à l'amplitude E donnée comme le Sinus

[4] Il est clair que cette distance ne doit pas excéder la plus grande portée, c'est-à-dire, celle qui résulte de la pièce élevée à 45° degrés; c'est pourquoi, afin que l'on connût d'abord cette plus grande portée, je conseillerois que l'on fit toujours l'épreuve sous l'Angle de 45° degrés; ou, ce que j'aime mieux, sous celui de 15° , dont l'amplitude doublée seroit connoître celle de la plus grande (124); parce qu'alors on auroit bien moins de peine à mesurer le coup d'épreuve, & en même-tems beaucoup moins d'erreurs à craindre.

que le mobile sera à tomber de B en D , ou d'une hauteur égale à BD ; c'est-à-dire, à tomber sur l'horizon DS . Il reste donc à examiner quelle partie de l'horizontale BT , le mobile

peut parcourir uniformément, dans le tems $T \sqrt{\frac{BD}{HB}}$, avec la vitesse acquise en tombant de H en B . On sçait que dans le tems T , avec cette même vitesse acquise, le mobile doit parcourir $2HB$ d'un mouvement uniforme (102);

donc pendant le tems $T \times \sqrt{\frac{BD}{HB}}$ c'est-à-dire, pendant le tems t , il parcourra $2HB \times \sqrt{\frac{BD}{HB}} = 2 \sqrt{HB \times BD}$

$2 \sqrt{HB \times BD}$. Or (const.) $HB : BM :: BM : BD$. Donc $BM = \sqrt{HB \times BD}$, ou $BM = \sqrt{HB \times BD}$, donc $2BM = 2 \sqrt{HB \times BD}$; d'où l'on voit que pendant le tems $t = T \times \sqrt{\frac{BD}{HB}}$, employé par le mobile à tomber de B sur l'horizon DS , il parcourra d'un mouvement uniforme, avec la vitesse acquise en tombant de H en B , une longueur BR ou DO double de BM , moyenne proportionnelle géométrique entre la Ligne de hauteur HB ou la moitié de la plus grande portée, & la distance BD ou RO au-dessus de l'horizon; qui est tout ce que nous avons supposé dans la Proposition précédente, & démontré être vérifiable, sans avoir fait connoître comment nous y étions parvenus [4]

[4] Je sais, autant qu'il m'est possible, en faveur des Commencens, l'occasion de comparer la Synthèse à l'Analyse; afin de les convaincre de la grande supériorité de cette dernière sur la première. Par la Synthèse on propose les vérités toutes découvertes; & l'on démontre qu'elles sont effectivement ce qu'on les suppose; mais par l'Analyse on fait voir comment on les a découvertes. La Synthèse expose les productions du génie; l'Analyse montre le génie même. Dans la Synthèse on ne sçauroit douter que l'on ne doive aux autres tout ce que l'on apprend; dans l'Analyse on est tenté de croire, & il arrive fort souvent qu'on ne doit qu'à soi-même ce que l'on découvre. Enfin avec l'une la mémoire est plus exercée, & avec l'autre le génie est plus cultivé.

du double de l'Angle a de l'épreuve est à un quatrième terme y , qui sera le Sinus du double de l'Angle cherché. On trouvera donc ce Sinus, puisque les trois premiers termes de cette proportion sont donnés, & par conséquent son Angle correspondant, dont la moitié désignera l'Angle d'élévation que l'on cherche.

136. REMARQUE. Comme il y a deux Angles également éloignés de 45° , qui satisfont à cette question (122); on prendra le plus convenable au dessein que l'on aura. Si l'on a besoin que le boulet ou la bombe s'élève à une hauteur considérable, & que l'Ang. trouvé soit, par exemple, de 35° , il faudra mettre la pièce à 55° ; afin que le Projectile s'élève plus haut, &c.

137. PROB. Déterminer la distance où la pièce porte son boulet, quand on la tire de but en blanc; étant à une hauteur connue au-dessus du niveau de la campagne.

RÉSOL. Vous n'avez qu'à prendre le double de la moyenne proportionnelle géométrique, entre la moitié de la plus grande portée de la pièce & la hauteur au-dessus de l'horizon (132). Or nous supposons que la moitié de la plus grande portée est connue par l'épreuve, & que l'on a mesuré aussi la hauteur de la pièce au-dessus du niveau de la campagne. Ainsi la moyenne proportionnelle géométrique entre ces deux grandeurs se trouvera aisément. Si ces deux quantités sont données en nombres, après les avoir multipliées l'une par l'autre, on en tirera la Racine carrée, dont le double exprimera la portée de but en blanc. Car soit m la moitié de la plus grande portée; h la hauteur de la pièce au-dessus de l'horizon; z la moyenne géométrique cherchée; on aura $m : z :: z : h$; donc $zz = hm$; ainsi $z = \sqrt{hm}$; donc $2z = 2 \sqrt{hm}$ (132).

138. Il peut arriver, & il arrive fort souvent, que les Batteries sont placées plus bas ou plus haut, que l'endroit où l'on se propose de jeter des bombes; c'est-à-dire, que cet endroit se trouve dans un Plan incliné au-dessus ou au-dessous de l'horizon. Et, dans ces deux cas, ou il s'agit de

trouver le Point dans lequel la bombe rencontrera le Plan incliné, la pièce étant tirée sous un Angle donné; ou bien il faut déterminer l'Angle d'élévation nécessaire, pour que la bombe passe par un Point déterminé sur ce Plan. Nous allons donc proposer ces Problèmes, dont la résolution achèvera de nous faire connoître, tout ce qui nous reste à sçavoir sur la doctrine dont nous traitons.

139. PROB. Soit MQ (fig. 26 & 27) l'amplitude horizontale connue d'une bombe, tirée suivant l'Angle donné GMQ, avec une force quelconque. On demande en quel point la Parabole MTQ rencontrera le Plan MR, incliné au-dessus ou au-dessous de l'horizon MQ; c'est-à-dire, qu'avec l'amplitude donnée MQ & l'Angle connu GMQ, il s'agit de déterminer la distance MT.

RESOL. Par les Points T, Q, imaginez les perpendiculaires TS, GQ, sur l'horizontale MQ prolongée, s'il est nécessaire; & du Point R, où le Plan incliné rencontre la perpendiculaire GQ, tirez RS au Point S de l'horizontale, où tombe la perpendiculaire TS: il est certain (32) que cette construction donne RS parallèle à MG; on peut d'ailleurs connoître avec une grande facilité sur le terrain, l'Angle RMQ que le Plan incliné MR fait avec l'horizon MQ; on n'aura qu'à le mesurer avec un instrument.

Remarquez maintenant que dans le Triangle-Rectangle MQG, on connoît l'Angle d'élévation GMQ, & par conséquent son complément MGQ à un droit; l'amplitude MQ est aussi connue; ainsi l'on déterminera GQ en disant, *le Sinus de l'Angle G connu est au Sinus de l'Angle GMQ donné, comme l'amplitude MQ donnée est à GQ*, laquelle sera déterminée par ce moyen. On déterminera de même la valeur de RQ dans le Triangle-Rectangle MQR, en faisant cette proportion, *le Sinus de l'Angle MRQ connu est au Sinus de l'Angle QMR aussi connu, comme la longueur donnée MQ est à RQ*; dans laquelle les trois premiers termes donnés font connoître RQ. Or, puisque RS est parallèle à MG, les Triangles semblables GQM, RQS, donneront GQ.RQ::MQ.SQ. On aura donc la valeur de SQ, puisque les trois

Lignes

tre S de la Directrice HO. Maintenant, puisque le Point B doit être à la Parabole que nous cherchons, ce Point sera autant éloigné de la Directrice HO que du Foyer de cette Parabole (90); en décrivant donc du Point B avec le rayon BH l'Arc indéfini Hff, le Foyer de cette Parabole se trouvera en quelque Point de l'Arc Hff. Pareillement le Point D devant être à la Parabole cherchée, il sera autant éloigné de la Directrice HO que du Foyer de cette courbe; ce Foyer sera donc en quelque Point de l'Arc Sff, décrit du Point D avec le rayon DS; & par conséquent il se trouvera à la fois dans les Arcs Hff, Sff; ce qui ne peut arriver qu'aux intersections F, f, de ces Arcs. Ainsi les Points F, f, sont les Foyers des Paraboles qui passent par le Point D, & il y a deux jets qui résolvent également le Problème proposé.

Pour en avoir les amplitudes, des Foyers F, f, on abaissera sur l'horizon BV les Perpendiculaires FG, fg, prolongées jusqu'aux Points de rencontre T, t, de la Directrice HO; on fera GK=BG; gV=Bg; & BK fera l'amplitude du jet, qui a le Point F pour Foyer, & BV celle du jet dont le Foyer est f. Présentement, le sommet d'une Parabole coupant toujours en deux parties égales la Distance de son Foyer à sa Directrice (79), on divisera les Lignes FT, Ft, en deux parties égales aux Points C, c; qui seront par conséquent les sommets des Paraboles BCK, BDV. Enfin on aura les Tangentes de ces deux jets, en prenant sur les prolongemens de GC ou gC vers T, t, des parties CL, cl égales à leurs Abcisses CG, cg correspondantes, afin de tirer du Point B aux extrémités L, l, de ces prolongemens des Tangentes Bb, Bd (30), lesquelles coupant l'Arc Hff, aux Points b, d, détermineront les élévations que l'on doit donner au mortier, pour faire passer la bombe par le Point D proposé. Puisqu'il n'y aura plus qu'à mesurer avec un instrument les Arcs bg, dg, (fig. 28), ou les Arcs bK, dK, (fig. 29).

On en pourroit pourtant apprécier la valeur trigonométriquement; mais le détail m'en ayant paru excessivement

Lignes, GQ, RQ, MQ, sont connues; & par conséquent celle de MS. Il ne s'agira donc plus, pour connoître MT dans le Triangle-Rectangle MST, que de faire cette proportion, *le Sinus de l'Angle MTS connu est au Sinus de l'Angle MST ou au Sinus total aussi connu, comme la Ligne connue MS est à MT*, dans laquelle les trois premiers termes connus déterminent le quatrième MT. C. Q. F. T.

REMARQ. Comme cette démonstration renferme les deux cas du Problème, & qu'elle s'applique à la fig. 26, où la Plan MR est incliné au-dessus de l'horizon, aussi-bien qu'à la fig. 27, où l'on suppose le Plan incliné au-dessous; pour n'être point obligé de considérer à la fois deux figures, on appliquera successivement à chacune d'elles, les raisonnemens qui conduisent à la résolution de ce Problème.

140. PROB. On se propose de jeter une bombe au Point D (fig. 28 & 29) du Plan BD, incliné au-dessus ou au-dessous de l'horizon BV. Quelle doit être l'inclinaison du Mortier placé en B, pour faire passer le jet par le Point D?

RESOL. Nous supposons toujours que le Projectile soit poussé avec une force déterminée, comme celle qu'il auroit acquise en tombant de H en B; que l'on connoisse sa plus grande portée sur le Plan horizontal BV; que l'on sçache la valeur de l'Angle DBV, formé par le Plan BD & l'horizon BV; & qu'enfin l'on ait trouvé, trigonométriquement ou d'une autre manière, la longueur de BD; moyennant quoi on construira, sur un carton bien uni & avec le secours d'une échelle, le Triangle-Rectangle BAD, lequel déterminera l'élévation DA du Point D au-dessus ou au-dessous de l'horizon, & la distance horizontale BA correspondante. Cela supposé; comme la Ligne de hauteur est toujours égale à la moitié de la plus grande portée du projectile sur le Plan horizontal (127), on fera la perpendiculaire HB égale à la moitié de cette plus grande portée connue; on élèvera au Point H la Perpendiculaire indéfinie HO, qui sera la Directrice commune de toutes les Paraboles décrites par un Projectile poussé avec une force acquise en tombant de H en B (117); & l'on prolongera AD jusqu'à la ren-

G

long, sans une grande apparence de nécessité, j'ai cru devoir négliger cette recherche. Si l'on veut se satisfaire sur tous les raffinemens, dont cette matière est susceptible, on consultera M. Blondel dans son *Art de jeter les Bombes* [a].

DÉM. Commençons par le jet BCK de la fig. 28. Il exige que nous démontrions deux choses. 1°. Que ce jet est une Parabole, dont l'Axe CG joint au quart de son Paramètre, est égal à la Ligne de hauteur HB; ainsi que cela doit être suivant le n°. 118. Il faut donc que 4TC

ou 4HR ou 4CF×CG=BG² carré de l'Ordonnée BG.

2°. Que le Point D est nécessairement un des Points de cette Courbe. Or remarquons 1°. que BF=BH (const.) =GT=FG+CF+CT=2CF+FG (parce que

CT=CF (const.)); ainsi BF=4CF+4CF×FG

+FG; mais, (à cause du Triangle-Rectangle BGF) BF

=BG+FG; donc BG+FG=4CF+4CF×FG

+FG, ou BG=4CF+4CF×FG=CF+FG

×4CF=CG×4CF; le carré BG de l'Ordonnée BG,

est donc égal au Rectangle de l'Abcisse CG par 4CF; par

conséquent le jet BCK est une Parabole (20), dont le Pa-

ramètre=4CF ou 4CT, ou 4HR; ainsi HR est le quart

du Paramètre de ce jet, & ce quart joint à l'Axe CG ou

RB, est égal à la Ligne de hauteur HB. C. Q. F. 1°. D.

2°. Pour être convaincu que le Point D est à la Para-

bole BCK, il faut abaisser la Perpendiculaire DM sur

l'Axe CG; & faire voir que DM=CM×4CF. ce qui

est très-aisé; car DF=DS (const.)=TM=2CF+FM; ainsi DF=4CF+4CF×FM+FM; mais, par le

[a] J'avertirai ici qu'il seroit tout-à-fait inutile d'entamer la lecture de cet Ouvrage, si l'on n'est pas au fait de la théorie de la Parabole. M. Blondel n'y démontre aucunes propriétés de cette Courbe. Il renvoie continuellement à *Archimède*, dont les démonstrations seroient plus d'effort à l'intelligence, que tout ce Traité des Courbes.

Triangle-Rectang. FMD, l'on a $DF = DM + FM$; donc $DM + FM = 4CF + 4CF \times FM + FM$, ou $DM = 4CF + 4CF \times FM = CF + FM \times 4CF = CM \times 4CF$; ainsi le carré $DM =$ l'Abcisse CM multipliée par le Paramètre $4CF$. Or, si au Point M on supposoit une Ordonnée y à l'Axe CG de la Parabole BCK , on auroit $yy = CM \times 4CF$ (20); donc $DM = yy$, ou $DM = y^2$; ce qui démontre que DM est l'Ordonnée correspondante au Point M de l'Abcisse CM , & qu'ainsi le Point D est à la Parabole BCK . C. Q. F. 2°. D.

Prenons maintenant le jet BcV , & montrons 1°. en raisonnant précisément comme nous venons de faire, que $Bg = cg \times 4ct$, ou $cg \times 4cf$ (parce que $ct = cf$; (const.)). 2°. Que $Dm = mc \times 4cf$, ou $mc \times 4ct$.

Rappelons-nous donc que $Bf = BH$ (const.) $= g + cg + ct = cg + cf = cf + ct + gf = 2cf + gf$; ainsi $Bf = 4cf + 4cf \times gf + gf$. Mais le Triangle-Rectangle Bgf donne $Bf = Bg + gf$; donc $Bg + gf = 4cf + 4cf \times gf + gf$, ou $Bg = 4cf + 4cf \times gf = cf + gf \times 4cf = cg \times 4cf$, ou $cg \times 4ct$; par conséquent $Bg = cg \times 4ct$; ainsi (20) le jet BcV est une Parabole, dont le Paramètre $= 4ct$; donc ct est le quart de ce Paramètre. Or il est clair que ce quart joint à l'Axe cg , est égal à DH Ligne de hauteur, ainsi que cela doit être (118). Il nous reste donc à démontrer que le Point D est à la Parabole BcV .

Or il est certain que $Df = DS = mt = mc + ct = mc + cf = mc + mc + mf = 2mc + mf$; ainsi $Df = 4mc + 4mc \times mf + mf$; mais (à cause du Triangle-Rectangle Dmf) $Df = Dm + mf$; donc

$Dm + mf = 4mc + 4mc \times mf + mf$, ou $Dm = 4mc + 4mc \times mf = mc + mf \times 4mc = cf \times 4mc = ct \times 4mc = mc \times 4ct$; donc $Dm = mc \times 4ct$; mais le carré zz de l'Ordonnée z au Point m de l'Axe cg , égaleroit aussi le Rectangle de l'Abcisse mc par le Paramètre $4ct$; donc $zz = Dm$, ou $z = Dm$. Par conséquent Dm est véritablement l'Ordonnée au Point m de l'Axe cg ; d'où il est manifeste que le Point D est à la Parabole BcV [4].

141. REMARQUE. Il n'y a rien, ce me semble, de plus simple que la construction de ce Problème; l'intersection de deux Arcs de Cercle déterminant les Foyers des jets; moyennant quoi tout le reste se trouve avec une extrême facilité. Je me suis pourtant appliqué particulièrement à en développer l'esprit; dans la persuasion où je suis que, s'il y a un art de former le génie, comme je crois en avoir de fortes démonstrations, c'est de faire passer le Lecteur par tous les degrés, qui ont conduit à certaines découvertes importantes. A force de voir comment on s'y est pris pour en faire, il reste dans la tête des espèces de Moules, où de nouvelles productions viennent prendre leurs formes. Dans les Sciences & dans les Arts, ce sont moins les inventions que j'admire, que les Méthodes d'inventer. Une découverte n'est qu'une découverte; au lieu qu'une bonne Méthode est comme la mère d'un nombre illimité de découvertes.

Quand le Point D sera supposé au-dessous de l'horizon; on se servira de la fig. 29; sur laquelle faisant les mêmes raisonnemens, on trouvera les Foyers F, f , des deux jets, qui résoudreont le Problème; & les Tangentes Bb, Bd de

[4] Je prie les Lecteurs pénétrants de me pardonner la diffusion où je me jette; une longue expérience m'avant convaincu, qu'en ces fortes de matières, les Commencans préfèrent la facilité d'apprendre à l'honneur qu'on feroit à leur sagacité, ou ne leur présentant que des démonstrations bien serrées & bien concises, qui donneroient la torture à leur esprit. De la manière dont je m'y prens, j'ai en vue d'exercer l'esprit plutôt que de le fatiguer; encore avec cette précaution, si-je tout lieu de craindre que, pour bien des gens, cet exercice ne soit un vrai travail.

G iij

ces jets au Point B , seront les directions suivant lesquelles il faudra pointer le Mortier, pour chasser la bombe au Point D au-dessous de l'horizon.

On verroit bien, sans que je le dise, que le Problème n'auroit qu'une seule résolution dans ces deux cas, si les deux Cercles ne faisoient que se toucher, & qu'il seroit absolument impossible, s'ils ne s'entrecoupoient pas. Je n'y fais faire attention que parce qu'un grand nombre de personnes ne pensent aux choses, que quand on les en avertit. Le génie même consistant souvent beaucoup plus, à s'aviser de faire une recherche, qu'à trouver les moyens d'arriver à son terme. C'est pourquoi j'ajouterais encore ici que, pour trouver les Tangentes Bb, Bd , ou les directions du Mortier, il n'est point du tout nécessaire d'en tracer les Paraboles; il suffira, après avoir trouvé les Foyers des jets, de déterminer les sommets de leurs Axes, par le secours de leur Directrice commune. Car alors avec les Ordonnées, menées du Point B , on aura les Sous-Tangentes (30), & par conséquent les Tangentes cherchées ou les Directions du Mortier.

Comme il est utile, en certaines rencontres, de connoître la hauteur à laquelle une bombe s'élève, afin d'être en état d'évaluer, par la vitesse acquise, la force avec laquelle elle doit frapper le corps sur qui elle tombe, nous allons donner la Résolution de quelques Problèmes relatifs à cet objet.

142. PROB. L'Amplitude Bt (fig. 23.) étant donnée avec l'Angle d'élévation bBt , trouver la plus grande hauteur de , à laquelle la bombe s'est élevée.

RÉSOL. La Ligne Bb ou Bx étant la Tangente du jet, il est évident que la perpendiculaire ex , élevée sur le milieu e de l'Amplitude Bt , en est la Sous-Tangente, laquelle est double de l'Abcisse ou de la hauteur de que l'on cherche. Ainsi, en déterminant ex , la moitié de sera connue. Or, dans le Triangle-Rectangle Bex , Be moitié de l'Amplitude Bt est donnée; on suppose aussi l'Angle eBx connu; donc l'Angle Bxe le sera aussi. Par conséquent en faisant cette

proportion, le Sinus de l'Angle x connu est au Sinus de l'Angle eBx donné, comme la longueur Be connue est à la hauteur cherchée ex , on déterminera ex , & par conséquent la moitié de , qui marquera la hauteur où la bombe s'est élevée C. Q. F. T.

143. PROB. On voudroit qu'une bombe s'élevât à une hauteur connue de , quel doit être l'Angle d'élévation du Mortier placé en B ?

RÉSOL. Il ne faut pas que la hauteur proposée soit plus grande que BH , moitié de la plus grande portée, que je suppose connue. Parce que la moitié de la plus grande portée, est toujours égale à la hauteur d'où le mobile a dû tomber, pour acquérir la force avec laquelle il est chassé (127); & qu'il n'est pas possible que ce corps s'élève au-dessus de cette hauteur (128).

Remarquez donc que de étant connue, aB son égale le sera aussi, & par conséquent aH ; puisque BH est donnée; donc ah , moyenne proportionnelle géométrique entre aB & aH , sera déterminée. Maintenant dans le Triangle Rectangle Bab , avec les deux côtés connus aB, ah , on aura l'hypothénuse Bb . Donc, en faisant cette proportion, $Bb, aB ::$ le Sinus total est au Sinus de l'Angle Bba , ce dernier Sinus sera connu; & par conséquent l'Angle Bba , qui est égal à l'Angle d'élévation bBt cherché. C. Q. F. T.

PROB. Mais comment peut-on donner à un Mortier une inclinaison déterminée, par exemple, de 50° (fig. M. PL. 2.)?

RÉSOL. Comme le commencement du jet de la bombe doit se faire dans la Direction de l'Axe TS , afin d'éviter, le plus qu'il est possible, le frottement de ce boulet contre les Parois de son Mortier; le Problème se réduit à trouver un moyen d'incliner TS sur l'horizontale Tr , de manière que l'Angle $STr = 50^\circ$.

Pour cela on prendra un quart de Cercle ABC divisé en ses degrés & minutes; on y joindra une large Règle AD parallèle à BC , avec un Pendule Bf , on mettra cette Règle diamétralement sur l'orifice ou la Bouche du Mortier; on fera, moyennant le Pendule, que

G iv

Usage de la Parabole pour calculer l'excavation des Mines.

* 145. U NE Mine est une chambre ou un fourneau souterrain, dans lequel on met une quantité de poudre suffisante, pour faire sauter ce qui est au-dessus. Les Mines sont d'un très-grand usage dans les sièges, & peut-être la meilleure invention & la plus redoutable défense, que l'on puisse opposer à l'ennemi qui attaque; il est donc important de réduire leur construction à des principes, qui sauvent les longueurs du tâtonnement & la pesante marche de l'expérience.

Je ne connois rien en ce genre de plus profond ni de plus élégant, que l'excellente Dissertation sur les Mines par M. de Vallière, actuellement Lieutenant Général. Je conseille fort qu'on s'applique à la bien concevoir. On la trouvera à la fin du troisième Tome de *Polybe*, si admirablement commenté par M. le Chevalier *Folard*. Ceux qui ont tant de foi à l'expérience, y verront que sans le secours de la Géométrie, cet illustre Auteur ne feroit jamais parvenu à ses découvertes : mais qu'à l'aide d'une bonne théorie, quelques années d'application lui ont dévoilé ce que la pratique de plusieurs siècles avoit tenu constamment dans les ténèbres.

S'il ne s'agissoit que de la construction des Mines, on n'auroit besoin que de la Géométrie simple. Mais, pour ne pas consommer inutilement de la poudre, & afin même de ne causer du désordre qu'au degré que l'on se propose, il est nécessaire d'en proportionner la quantité au poids que l'on veut enlever. Or ce poids ne peut être connu, qu'en calculant la solidité de la masse de terre que fait sauter la Mine; connoissance à laquelle on ne peut parvenir, sans celle de la figure du vuide, ou de l'excavation que doit laisser la Mine, après qu'elle a joué.

neau sur la surface du terrain que l'on veut enlever; & comme c'est de ce côté-là que la Mine doit produire son effet, la Perpendiculaire FB est appelée *Ligne de moindre résistance*, que l'on a toujours trouvée égale au rayon BC de l'ouverture de l'entonnoir.

Afin donc que l'on voie, que la simple connoissance de la longueur de la Ligne FB suffit, pour avoir la solidité de l'excavation d'une Mine ou du Paraboloïde AGDHC, soit $FB = BC = a$; & (à cause du Triangle-Rectangle isocèle FBC) FC ou CM ou BI (90) $= FB + BC = 2a$; donc $BI = \sqrt{2aa}$; & $FI = BI - FB = \sqrt{2aa} - a$; donc $FD = \frac{1}{2}(\sqrt{2aa} - a)$; donc $FB + FD$,

c'est-à-dire $BD = a + \frac{\sqrt{2aa} - a}{2}$, où tout est connu.

Mais le rayon BC de la Base de l'entonnoir étant connu, la surface de cette Base le sera aussi : il n'y aura donc qu'à la multiplier par la moitié de la hauteur BD du Paraboloïde, pour avoir la solidité que l'on cherche (72).

Pourvu donc que l'on sache, de combien le Mineur doit s'enfoncer Perpendiculairement pour construire son Fourneau, on saura la solidité ou le nombre de pieds Cubes de terre, que la Mine fera sauter : & en déterminant par expérience, la quantité de poudre nécessaire pour enlever un pied Cube de l'espèce de terrain, où la Mine est pratiquée, on connoitra tout ce qu'il faudra en employer, pour faire sauter la masse entière de l'Excavation.

Cependant il me semble que l'on ne doit faire entrer, dans la solidité des Terres enlevées par la Mine, que le Paraboloïde tronqué AGFHC; c'est-à-dire, la partie du Paraboloïde entier ADC, laquelle se trouve au-dessus de la double Ordonnée GH au Foyer F; la cavité inférieure ou le petit Paraboloïde GDH n'étant occasionné en apparence, que par la compression de la Poudre, du côté du

M. de Vallière a trouvé que dans les terrains, qui résistent à peu près également dans toutes leurs parties, cette excavation ou, comme s'expriment les Mineurs, cet entonnoir avoit la figure d'un Paraboloïde; c'est-à-dire, d'un solide engendré par la circonvolution d'une Parabole AGDHC (fig. 30.) autour de son Axe DB, dont le Foyer occupe le centre du fourneau F.

Avant l'Observation de ce célèbre Officier Général, ce solide avoit été pris pour un Cône AFC, dont le Sommet étoit en F. On remarqua ensuite qu'il approchoit plus du Cône tronqué AGHC [4]. Mais, après un grand nombre d'expériences, faites, à ce qu'il paroît, avec un soin très-scrupuleux, M. de Vallière s'apercevant que le Talud ou la Pente de l'excavation n'étoit pas en ligne droite, soupçonna que ce pouvoit être un Paraboloïde, dont il supposa le Foyer au centre du Fourneau.

Pour tourner ses soupçons en certitude, il fit le prolongement $DI = FD$; & se rappelant que la distance FC du Foyer F, à un Point quelconque C de la courbure de la Parabole, étoit toujours égale à la distance CM ou BI du même Point C à la Directrice KM (90), il porta FC sur BI, & trouva $FC = BI$. Il prit une portion quelconque de l'Axe DT, plus grande que DF, & en ayant retranché $TS = DF$ ou DI , il éleva la Perpendiculaire SR; après quoi il trouva la distance $FR = DT$, comme elle le devoit être dans le cas du Paraboloïde : car alors $FR = RP$ (90) $= SD + DI = SD + TS = DT$.

On sçait encore que l'Ordonnée FH au Foyer, est égale à la moitié du Paramètre de la Courbe (92), & que la distance DF en est le quart (78); ainsi $FH = \frac{1}{2}DF$, de même que l'expérience le donna à M. de Vallière, &c.

Voilà assez de propriétés qui caractérisent la Parabole. On doit donc calculer l'excavation d'une Mine sur le pied d'un Paraboloïde. Or ce calcul se fait moyennant la simple connoissance de la Perpendiculaire FB, élevée du Four-

[4] M. de Blied, Cours de Mathématique.

Sommet D. En ce cas, pour avoir la vraie solidité des Terres enlevées, on ôtera du Paraboloïde entier ADC le petit Paraboloïde GDH, dont toutes les dimensions sont connues par celles du grand (puisque $FH = \frac{1}{2}FD$ (92 & 78) qui est une grandeur déterminée); & ce qui restera de cette Soustraction, exprimera la solidité du Paraboloïde tronqué.

Mais, si l'on vouloit calculer cette excavation, dans l'hypothèse du Cône tronqué AGHC, il faudroit encore mesurer FH; moyennant quoi, on trouveroit aisément par le secours des Triangles semblables CBE, HFE, la longueur des hauteurs FE, BE, lesquelles serviroient à déterminer la solidité du grand Cône AEC, ainsi que celle du petit Cône GEH; après quoi ôtant GEH de AEC, il est clair que l'on auroit le Cône tronqué AGHC.

* 146. REMARQ. Ceux qui regardent l'excavation d'une Mine comme un Cône tronqué, disent qu'ils ont trouvé par expérience, que $FH = \frac{5}{8}FC$. Or il faut bien remarquer qu'il n'en est pas de même dans la supposition d'un Paraboloïde entier ou tronqué. Car alors on auroit $GH = BC$; mais $GH =$ le Paramètre de la Courbe génératrice (93);

ainsi l'Ordonnée BC seroit égale au Paramètre p . Donc BC étant égal à $BD \times p$ (20), on auroit $pp = BD \times p$, ou $p = BD$; or on a déjà vu que $p = BC$; donc $BD = BC$; mais l'expérience a aussi démontré que $BC = BF$; donc BD égaleroit BF; ce qui est absurde.

On doit se rendre attentif à cette observation, afin de se garantir d'une inadvertance, où sont tombés quelques Auteurs, qui n'ont pas laissé de supposer $FH = \frac{5}{8}FC$; quoi qu'ils calculassent l'excavation d'une Mine, dans la supposition d'un Paraboloïde.

147. Comme il sera question, dans la suite de *Conoïdes* convexes ou concaves, il est à propos de faire connoître comment on peut les former artificiellement. Un *Conoïde* est un solide engendré par la circonvolution d'une *Section conique* quelconque autour de son Axe. Mais on l'appelle

en particulier *Paraboloïde*, *Ellipsoïde*, ou *Hyperboloïde*, selon que la Courbe génératrice est une *Parabole*, une *Ellipse* ou une *Hyperbole*.

148. *Manière de construire artificiellement un Conoïde ou un Solide quelconque convexe ou concave.* On tracera sur du Cuivre, de l'Acier, &c, la Courbe génératrice proposée, une *Parabole*, par exemple, s'il s'agit d'un *Paraboloïde*; ayant un très-grand soin que la matière, sur laquelle on tracera cette Courbe, soit un Plan le plus poli & le plus parfait que l'Art pourra le donner. On fera passer par son Axe un effieu avec une manivelle, ainsi que le montre la figure 31: après quoi découplant le tour, on taillera en biseau le bord terminé par la courbure; afin que dans la circonvolution qu'on lui fera faire, il n'y ait que la Courbe qui donne la forme à la matière qui lui sera présentée. On préparera donc cette matière, en l'excavant à l'œil de manière que l'on puisse y introduire le Plan sur lequel est tracée la figure génératrice; fixant ensuite l'Axe de ce Plan, de peur qu'il ne change de Direction, on conçoit qu'en tournant la manivelle, la Courbe imprimera sa forme, dans tous les Points de sa circonvolution, sur la matière où elle roulera; à laquelle on suppose d'ailleurs assez de mollesse, pour être enlevée facilement par le biseau, & assez de consistance pour retenir la forme imprimée; & en jetant dans cette concavité que l'on vient d'engendrer, une matière qui la remplisse exactement, on aura un solide convexe de la même forme que celui qui lui aura servi de moule.

149. REMARQUE. On a donné des machines pour décrire les Courbes par un mouvement continu: mais elles me paroissent fort suspectes, quand il s'agit de descriptions bien précises. Les cordes, les ressorts, les coulisses &c, sont sujettes à des irrégularités & à des variations, non-seulement de la part de l'air ou de l'eau, du sec ou de l'humide qui les travaille perpétuellement, les tourmente & les déjette; mais encore en conséquence des impressions plus ou moins fortes, que ces différentes pièces reçoivent dans les mouvemens qu'elles exercent: de sorte que par ce

que d'autant mieux, qu'elle est plus précisément dirigée vers l'endroit où l'on veut se faire entendre.

1°. Moins la voix s'étend à la ronde de l'endroit d'où elle part, plus elle a de force pour se porter aux Lieux, vers lesquels on lui laisse la liberté de se propager.

3°. Plus les canaux par où la voix passe sont unis intérieurement, c'est-à-dire, moins il y a d'inégalités dans les chemins de la voix, plus est grande la facilité de la porter au loin.

4°. La voix conduite par un canal, qui va toujours en diminuant, n'acquiert pas un aussi grand volume, & ne se porte pas aussi loin, que si elle passoit par un tuyau dont le Diamètre augmentât continuellement. Les ressorts de l'Air réduits en un petit espace, où ils ne peuvent s'étendre, & trop serrés les uns contre les autres, perdent beaucoup de leur activité, le son ou la voix doit donc s'émouffer, & faire moins de chemin. C'est le contraire quand elle passe dans des canaux dont le calibre va toujours en augmentant.

151. COROL. Il s'ensuit des principes précédens, 1° Que l'embouchure d'un *Porte-voix* est une des pièces de cet instrument, qu'il faut travailler avec le plus de soin. Elle devroit s'adapter si exactement à la bouche, qu'en parlant il ne s'échappât de ce côté aucun filet d'air.

2°. Le corps du *Porte-voix* ne doit point être composé, (autant que la commodité le permet) de tuyaux qui s'emboîtent les uns dans les autres. Cela causeroit des inégalités préjudiciables à la propagation de la voix.

3°. Entre les matières propres à la construction de cet instrument, il faut choisir celles qui sont les moins sonores, ou celles dont il est le moins aisé de mettre l'élasticité en action (sauf les droits de la plus grande commodité); parce que les matières résonnantes répandant le son à la ronde, cela ne peut être qu'un préjudice de la propagation des sons vers un endroit déterminé. Afin donc d'empêcher l'action du ressort de la propre matière du *Porte-voix*, il me semble qu'il seroit fort à propos de revêtir la surface extérieure

ce moyen, on n'est pas sûr autant qu'on peut l'être, que l'on ait un seul Point de la Courbe, dont la description étoit proposée. Il me paroît donc évident que l'on doit toujours construire une Courbe génératrice, avec le compas, la plus simple de toutes les machines; c'est-à-dire, en cherchant successivement & géométriquement des Points (25), qui soient à la Courbe que l'on demande suivant les conditions proposées. A force de multiplier ces Points, ils formeront une Courbe continue ou fort approchante, aussi rigoureuse qu'il est possible à l'art des hommes de la donner. Et dans le cas où la Courbe seroit décrite avec une machine plus composée, je conseillerois qu'on en vérifiât toujours la description, ou qu'on la rectifiât avec le simple compas.

USAGE de la Parabole dans la construction des Porte-voix.

150. Un *Porte-voix* est un instrument qui sert à se faire entendre aux autres ou à leur parler de fort loin. Il n'y a guères plus de cent ans que cette invention est connue, ou a été renouvelée en Europe [4]. C'est principalement en Mer que l'on en sent toute l'utilité. Deux Vaisseaux qui se rencontrent, ne s'approchent pas l'un de l'autre aussi impunément que deux hommes. Pour peu qu'ils se heurtassent, ils seroient, à cause de leur énorme masse, exposés au danger de se disloquer & de couler à fond.

Cependant on a des avis à se donner mutuellement. Le tems ne permet pas toujours de mettre la Chaloupe en Mer. Le souffle des Vents & le bruissement des Eaux dominant sur la simple voix; il faut parler plus haut que la tempête. Il est donc utile de rechercher la meilleure construction de l'instrument qui peut nous procurer cet avantage.

Principes d'Expérience. 1°. La voix ou la parole se distin-

[4] Voy. la Dissertation qui suit le n°. 156.

de cet instrument de quelque peau, cuir ou chagrin, qui arrêtar ou amortit l'oscillation de ses molécules.

J'appellerai dans la suite *Ligne vocale* ou *Rayon sonore*, toute Ligne ou tout filet d'air sur lequel la voix est portée.

4°. Quant à la figure géométrique du *Porte-voix*, il faut qu'elle détermine les Lignes vocales à se croiser le moins qu'il est possible, & par conséquent à tendre au parallélisme, ou même à suivre des directions parallèles; moyennant quoi elles iront toutes de la manière la plus parfaite à l'endroit où l'on a intérêt de faire entendre sa voix, ou de faire distinguer ses paroles.

152. PROPOS. I. Le *Porte-voix* de forme cylindrique ou conique, ainsi qu'on le construit communément, n'est pas aussi parfait qu'il pourroit l'être (fig. 33. & 34.).

DEMONSTRATION. Soit AA l'embouchure du *Porte-voix*, BC son corps; CD son Pavillon; Ox son Axe; O le Point de l'embouchure d'où les Lignes vocales OF, OL, &c. sont supposées partir. L'expérience démontre qu'un filet d'air qui part d'un Point, ou qui passe par un trou fort étroit, s'épanouit en forme d'aigrette, dès que rien ne s'y oppose; la plupart des Lignes vocales OF, OL, viendront donc heurter les parois intérieures du tube BC; & se réfléchiront à leur rencontre, de manière que l'Angle de réflexion sera toujours égal à l'Angle d'incidence, suivant le principe de Catoptrique si connu. Or je dis que dans le *Porte-voix* cylindrique (fig. 33.), il n'est pas possible que les Lignes de réflexion deviennent parallèles à l'Axe Ox; comme elles devroient l'être pour se diriger toutes du même sens, & confpirer au même effet. Car il est évident que pour être parallèles à l'Axe Ox, dans le cas où elles tomberoient aux Points F, L, &c. il faudroit qu'elles glissassent le long des parois BC parallèles à Ox; mais cela ne peut jamais arriver; l'Angle obtus OLC de réflexion ne pouvant pas être égal à son Angle OLB d'incidence.

De plus, il n'y auroit pas alors d'Angle de réflexion, puisque la Ligne vocale OL enfilant la paroi BC, ne se relèveroit pas de dessus les côtés du corps de l'instrument. Donc, &c.

Il n'est pas moins aisé à démontrer dans le Porte-voix de figure conique (fig. 34.), que les Lignes *F₁*, *L₁* de réflexion, ne peuvent pas être parallèles à l'Axe *Ox* : autrement, elles seroient parallèles entr'elles ; & dans ce cas les Angles de réflexion *LC*, *FC*, seroient tous égaux entr'eux ; donc les Angles d'incidence *OFB*, *OLB*, le seroient aussi ; ce qui est absurde (65. *Inst. T. 1.*). Donc, &c.

153. REMAR. Quoique la figure conique ne me paroisse pas la plus avantageuse pour la construction des Porte-voix, je la crois néanmoins préférable à la cylindrique, parce que (toutes choses égales d'ailleurs) les Lignes de réflexion tendent plus au parallélisme dans la première que dans la seconde ; ainsi qu'il est aisé à démontrer. Par-là elles sont moins sujettes à être ballottées dans le corps de l'instrument ; & par conséquent elles conservent & dirigent plus parfaitement la modification que la bouche leur a une fois imprimée.

Car il est essentiel ici d'avoir toujours présent à l'esprit, qu'il ne s'agit pas simplement de faire du bruit avec le Porte-voix, mais de propager des sons articulés, avec la même impression qu'ils ont reçue de la bouche. On verra plus bas pourquoi un canon, une trompette, un cor, un tambour, une cloche, &c. peuvent se faire entendre de plus loin qu'un Porte-voix ; sans pouvoir servir à propager des paroles ou des sons articulés.

154. PROPOS. II. La construction la plus avantageuse du Porte-voix simple, c'est-à-dire dont le corps n'est composé que d'une seule figure, est de le former en Paraboloïde, dont le Foyer se trouve dans l'embouchure, précisément à l'endroit où l'on parle ; afin que les sons articulés puissent partir de ce Foyer, autant que cela est possible (fig. 35.).

DÉM. Toutes les Lignes vocales *OF*, *OC*, ou la plupart de ces Lignes étant supposées partir du Foyer *O*, se réfléchiront à la rencontre du Paraboloïde, parallèlement à son Axe *Ox* (82) ; ainsi elles se dirigeront toutes du même sens ; & conspirant par-là à un même effet, elles le rendront aussi parfait qu'il est possible.

le siècle précédent. Le P. Kircher, Jésuite, dit (pag. 132. de sa *Phonurgie*) qu'en faisant des recherches dans la Bibliothèque du Vatican à Rome, il tomba sur un Livre qui avoit pour titre *Secreta Aristotelis ad Alexandrum magnum* : Secrets d'Aristote dédiés ou envoyés à Alexandre le grand. Il y est question entr'autres, d'un corner bien prodigieux (fig. 32.) dont ce grand Capitaine faisoit usage. Le son en étoit si fort, qu'il pouvoit se faire entendre à toute son Armée, & la rassembler par son moyen, quand même elle auroit été dispersée à cent stades à la ronde du quartier de son Général. Comme le P. Kircher estime à 8 stades le mile d'Italie, on voit que 100 stades valent 12 miles & $\frac{1}{2}$ d'Italie ; c'est environ 6 lieues communes de France. Je ne sçache pas que nous ayons des Porte-voix aussi puissans que celui-là. Il avoit 5 coudées ou 15 palmes de diamètre. En supposant la coudée égale à 1 pied & $\frac{1}{2}$, c'étoit 7 pieds & $\frac{1}{2}$ de diamètre. Ce qui compose un très-gros volume pour un pareil instrument. Citons les paroles de l'ingénieur & très-sçavant Jésuite : *Ubi, inter cetera, de cornu prodigioso Alexandri magni hac leguntur : faciebat hoc cornu adeo vehementem sonum, ut eo exercitum suum ad centum stadia (quorum 8 unum milliare Italicum conficiunt) dispersum convocasse perhibebatur : habebat autem, ut libellus monstrat, quinque cubitos in Diametro.*

Malgré ce témoignage, le Chevalier Morland, Anglois, donna en 1670 ou 71, comme de son invention, un Traité écrit en Anglois, sur la construction de différens Porte-voix. Je n'y ai trouvé aucune théorie, à l'exception de quelques raisonnemens qui m'ont paru fort vagues, sur la manière dont l'air exerce son ressort, le long de son passage dans ces sortes d'instrumens. Si l'Auteur Anglois s'étoit avisé le premier d'en renouveler l'usage, on pourroit lui accorder une partie de l'honneur dû à une première invention. Quoique le véritable génie consiste à imaginer des moyens qui ne se soient pas présentés à l'esprit de nos prédécesseurs, ou dont l'invention antérieure ne soit pas venue à notre connoissance, c'est en quelque sorte faire

155. REMARQ. I. Comme il peut y avoir d'autres causes, qui concourent à augmenter l'effet du Porte-voix, que celles de sa forme ; il est bon d'observer que notre assertion se borne ici, à démontrer que le Porte-voix simple, quant à sa figure ou à sa forme géométrique, doit être un Paraboloïde. C'est-à-dire que, toutes choses d'ailleurs égales, on ne retireroit pas un si grand avantage de toute autre construction.

156. REMARQ. II. Il y a une très-grande différence entre la manière dont l'air est modifié dans un Porte-voix, & celle dont il l'est dans un Cor ou une Trompette. C'est principalement en vertu du ressort de leur propre matière, qui frappe l'air par des oscillations très-fréquentes, très-serrées, très-brusques, que ces derniers instrumens se font entendre d'assez loin : il est même nécessaire qu'en y soufflant, l'air sorte de la bouche avec une grande prestesse. Mais la matière du Porte-voix ne doit point être résonnante (151) ; 1°. parce que cela ne pouvant arriver qu'en conséquence du déplacement ou des oscillations de ses molécules, le corps de cet instrument changeroit continuellement de figure ; ce qui ne manqueroit pas de nuire à la régularité des réflexions des Lignes vocales. 2°. Parce qu'il faut parler avec une certaine modération, afin que l'on puisse faire distinguer ses paroles. D'où l'on voit que l'on ne se feroit presque pas entendre, même d'assez près, si l'on parloit dans un cor ou une trompette, comme on le fait avec un Porte-voix, &c.

On verra plus bas qu'en adaptant un Ellipsoïde à un Paraboloïde, l'effet du Porte-voix peut devenir beaucoup plus puissant ; mais alors l'instrument est composé, & il ne s'agit ici que du simple.

Differtation sur la découverte du Porte-voix.

Quoique nous ne tenions des Anciens ni théorie ni pratique sur la construction du Porte-voix ; il faut avouer pourtant que cette invention n'a été que renouvelée dans

Hij

une découverte toute neuve que de retrouver ce qui étoit perdu. Mais le Chevalier Morland est fort éloigné de se trouver dans un cas aussi favorable, & l'on ne peut pas se plaindre, avec plus de raison que le P. Kircher, de l'usurpation de cet Anglois. Il est hors de doute que cet honneur appartient au célèbre Jésuite. Ouvrez son fameux Ouvrage *Ars magna lucis & umbræ*, imprimé à Rome en 1646, & vous y verrez que plus de 24 ans avant la publication du Traité du Chevalier Morland, le P. Kircher avoit construit un Porte-voix de forme conique, long de 21 palmes, dont l'issue ou le pavillon en avoit 3, & l'embouchure $\frac{1}{4}$; que ce grand Physicien s'en servoit pour parler au Portier du Collège de Rome, & pour en recevoir des réponses. Cela est confirmé dans un autre Ouvrage de sa composition, qui a pour titre *Musurgia* ; c'est un Traité de Musique fort curieux. Mais il s'explique en termes formels sur cette déprédation, à la page 112 de sa *Phonurgie*, imprimée en 1673. On y lit qu'un Porte-voix de son invention avoit été construit à Rome, environ 24 ans avant que le Chevalier Morland publiât son Traité sur le même sujet ; & qu'un très-grand nombre de personnes avoient vu cet instrument au Collège des Jésuites de Rome. Si l'on se donne la peine d'examiner soi-même les pièces de ce procès, on trouvera que le larcin de l'Auteur Anglois est tout-à-fait démontré, & même que son travail, indépendamment du défaut d'invention, est de beaucoup inférieur à celui du P. Kircher.

Du reste, cette discussion seroit fort indifférente, si l'on n'étoit pas convaincu que la considération, dont on se sent naturellement pénétré pour les Auteurs de découvertes utiles à la société, est une des plus grandes sources du bien public.

157. USAGE de la Parabole dans la construction des instrumens acoustiques, ou des cornets propres à corriger les défauts de l'ouïe. Ceux qui entendent difficilement, ou qui ont ce que l'on appelle l'oreille dure, peuvent avoir recours à un corner dont le corps ait la forme d'un Paraboloïde (fig. 36.). Comme il s'agit alors de donner au Timpan une com-

Hiv

motion plus forte qu'à l'ordinaire; si le Foyer F de ce cornet est situé à l'orifice ou près de l'orifice du *Porte-vent* G, c'est-à-dire du petit tuyau courbé que l'on place dans l'oreille extérieure; & que l'on dirige le cornet du côté où l'on veut entendre; alors toutes les Lignes vocales telles que AB, CD, qui en viendront heurter les parois intérieures, parallèlement à l'Axe OF, seront réfléchies au Foyer F (81). Elles se trouveront donc plus condensées en ce Point que partout ailleurs; ainsi déployant leurs efforts principalement du côté G où il y aura moins de résistance (parce que le souffle ou l'ébranlement de la voix forme un obstacle dans le sens opposé), elles enfleront avec plus d'impétuosité que de coutume le *Porte-vent* G, & seront plus en état d'agiter le timpan, une des pièces qui transmet au siège de l'ouïe, l'agitation de l'air que l'on sçait être la cause physique des sons.

158. *USAGE de la Parabole dans la construction des Miroirs brûlans par réflexion.* Dirigez, à peu près vers le centre du Soleil, l'Axe OH d'un Paraboloïde concave (fig. 37.), dont les parois intérieures soient bien lisses & bien polies; quand il ne seroit fait que de papier ou de carton, il y aura alors un si grand nombre de rayons, qui viendront frapper l'intérieur de cet instrument parallèlement ou presque parallèlement à son Axe [4], qu'étant réfléchis à son Foyer F (81),

[4] Les rayons qui viennent d'un Point fort éloigné, tomber sur une surface d'une très-petite étendue, relativement à la distance de ce Point rayonnant, sont sensiblement parallèles. Pour le concevoir facilement, représentez-vous un faisceau de rayons partans d'un Point lumineux G (fig. D. PL. 3.) & renfermés entre les Lignes GA, GC, lesquelles forment l'Angle très-sensible AGC sous d'abord fort éloignées d'être parallèles; mais si le Sommet G est reculé en H, la Base AC demeurant toujours la même, alors l'Angle AGC devient AHC, beaucoup plus petit qu'il n'étoit dans la première position de son Sommet en G; comme il est aisé à démontrer en tirant la Ligne HGB. De sorte qu'en reculant continuellement le Sommet H de la Base AC, l'Angle AHC diminuera toujours; & par conséquent pourra devenir si petit, qu'il ne soit d'aucune considération par rapport aux deux Angles HAC, HCA; donc ces deux Angles ensemble vaudront à très-peu près deux Angles droits; ainsi, HA étant supposé égal ou presque égal à HC, l'Angle HAC sera égal ou presque égal à l'Angle HCA; chacun d'eux ne différera donc pas sensiblement d'un Angle droit; & les Lignes AH, CH, seront sensiblement perpendiculaires sur AC. Or deux Lignes perpendiculaires sur une troisième Ligne sont parallèles; donc la Base AC

corps combustibles à une distance quelconque. Il n'y auroit qu'à disposer un Miroir B Paraboloïde (fig. 38.) & très-grêle, de manière qu'il eût le même Foyer F que le Paraboloïde A d'un volume beaucoup plus grand. Car alors il est évident que la grosse masse cylindrique des rayons parallèles RR, étant réfléchie au Foyer F du Paraboloïde tronqué A (81), se divisera, au-delà de ce Foyer vers B, en rayons divergens, lesquels rencontrant les parois intérieures du Tube B, redeviendront parallèles en rr (82); mais, comme on suppose que le petit Paraboloïde B est très-menu, ils composeront ensemble un filet ou un faisceau cylindrique de lumière fort condensée. Et par conséquent ils paroîtroient en cet état fort propres à enflammer des corps combustibles à une très-grande distance; le Foyer alors régnant en quelque sorte sur tous les Points de la Ligne radieuse indéfinie. Mais cet effet, auquel on s'attend naturellement au premier aspect, est détruit par la cause Physique, que nous avons fait observer (159); sans compter que la multiplicité des réflexions affoiblit la vigueur de la Lumière, & que des rayons parallèles ne doivent jamais avoir autant de force pour brûler, que s'ils étoient réunis en un Foyer.

161. Si l'on place la flamme d'une bougie ou d'une chandelle, au Foyer F d'un Paraboloïde concave, (fig. 37.) dont les parois intérieures soient les plus unies & les mieux étamées qu'il sera possible, ce Miroir placé dans une Lanterne la fera paroître toute enflammée, & la lumière de la bougie sera réfléchie, ou se propagera à une très-grande distance, avec assez de force pour que l'on y puisse lire.

La raison en est que les rayons, qui partent du Foyer F, se réfléchissent à la rencontre de la surface concave du Paraboloïde, parallèlement à son Axe (82); & forment par conséquent un Cylindre de lumière, qui s'étend directement à une fort grande distance avec quelque force, quoi qu'il n'y ait qu'une assez petite portion de la flamme de la bougie, qui puisse être précisément au Foyer F. Aussi

leur réunion y causera une chaleur si puissante, qu'elle pourra y enflammer des matières combustibles. Ce qui est conforme à l'expérience.

159. *REMARQ.* Comme le Foyer F d'un Paraboloïde, ou de la Parabole génératrice de ce solide, est assez près du Sommet H, quand le Paramètre est d'une grandeur médiocre; puisque ce Foyer n'est éloigné du Sommet que du quart du Paramètre (78); si l'on veut approcher commodément du Point F du côté de H, ou que ce Foyer soit au-dehors du Miroir, on enlèvera une partie de ce solide, telle que GHT; & la portion qui en restera, rassemblera les rayons en un Point F, qui ne sera plus au-dedans de sa concavité. Mais il est évident alors que le Foyer perdra de sa force.

Cependant le Foyer d'un Paraboloïde, peut être autant éloigné que l'on voudra du Sommet de ce solide. Car son Paramètre pouvant être pris d'une grandeur quelconque, le quart de ce Paramètre, qui est toujours la distance du Sommet au Foyer (78), pourra aussi être d'une grandeur quelconque. Mais quand cette distance est trop considérable, le Foyer cesse d'être brûlant; parce que l'expérience & le raisonnement démontrent, que la lumière réfléchie perd peu à peu de sa force, à mesure qu'elle s'éloigne de son Point de réflexion. Effectivement il y a un si grand nombre de petits corps solides, qui nagent perpétuellement dans l'air, qu'ils renvoient une partie des rayons qui composent un filet ou un faisceau lumineux. Si ce faisceau réfléchi a un long espace à traverser, il se dégrossit continuellement & n'a plus à la fin qu'une chaleur ou qu'une force insensible.

160. Sans cet inconvénient, on pourroit par le moyen du Paraboloïde concave, convertir un Foyer brûlant en une Ligne brûlante indéfinie, c'est-à-dire, enflammer des

écart fort petite, & la distance BH fort grande, les rayons AH, CH, tendans au Sommet H, ne s'écartent pas sensiblement du parallélisme, & ont pendant un assez long trajet,

le P. Tacquet assure [4] qu'au moyen d'un pareil Miroir, il a été en état de lire un Livre d'un petit caractère, à la distance d'environ 400 pieds du Miroir, ou de la flamme de la bougie placée à son Foyer; sans autre lumière que celle qui étoit réfléchie.

162. *REMARQ.* Cette espèce de Lanterne étant principalement destinée, à propager la lumière directement devant celui qui la porte, le châssis ou la cage qui renferme le Miroir parabolique, doit avoir une disposition parallèle à l'horizon, & le reste à l'ordinaire.

163. Il seroit aussi beaucoup mieux de donner une forme Parabolique, aux faces intérieures des jambages d'une cheminée. Pour que les Ouvriers le fissent commodément, l'Architecte traceroit géométriquement sur une planche, une branche de Parabole, d'une longueur proportionnée à la largeur des jambages proposés; en observant que le Foyer de cette Courbe tombât vers le milieu de l'âtre. Ce qui seroit fort aisé en donnant à son Paramètre ou à sa double Ordonnée LK au Foyer (93), une longueur égale à la largeur de la cheminée. Ce seroit une espèce d'Équerre, dont les Maçons se serviroient dans leurs constructions; lesquelles en deviendroient évidemment beaucoup plus avantageuses pour échauffer une chambre. Car le Foyer de la Parabole génératrice, régnant alors tout le long d'une Ligne verticale de 3 ou 4 pieds, qui s'élèveroit du milieu de l'âtre; la flamme ou tous les corps pénétrés de feu, qui occuperoient cette Ligne focale ou même les environs, enverroient leur chaleur, c'est-à-dire, leurs molécules ou corpuscules ignés sur les jambages paraboliques LGD, KTN, suivant des Lignes FL, FG, &c., que l'on sçait devoir être réfléchies dans des Directions LR parallèles à l'Axe HO (82); ou très-approchantes d'être parallèles, quand elles viennent des environs de la Ligne focale; & par conséquent elles seroient précisément renvoyées dans la chambre. Ainsi concourant à l'échauffer avec les rayons

[4] Lib. 3. Catopt.

directs, il faudroit beaucoup moins de bois & moins de tems pour y produire une chaleur modérée. Car, par les constructions ordinaires, la plupart des rayons ignés sont renvoyés sur eux-mêmes, ou dans la cheminée, & entraînés sur le champ par le torrent perpétuel de l'air, qui se précipite en cet endroit, dès qu'il y a du feu.

Si l'on vouloit encore économiser davantage, & se procurer, sans qu'il en coûtât plus, de la chaleur à tel degré que l'on voudroit; de même que l'on fait venir de l'eau par des canaux & des robinets, on pratiqueroit, directement sous l'âtre entre les solives & les carreaux, un réservoir ou un bassin d'air d'environ un pied en quarté, & de 3 ou 4 pouces de profondeur, suivant les circonstances; des Faces latérales de ce bassin partiroient deux tuyaux, que l'on feroit courir, toujours entre les carreaux & les solives, jusques vers le milieu du mur attenant de part & d'autre, & enfin à leur issue en cet endroit seroit adapté un robinet, dont on va bien-tôt voir l'usage.

Pour peu que l'on ait employé le feu terrestre avec intelligence, on sçait que sa chaleur pousse plus au-dessous qu'au-dessus; qu'elle descend plus qu'elle ne monte, ou qu'elle est plus déterminée à descendre qu'à monter. La chaleur de l'âtre pénétrant donc assez promptement jusqu'au bassin, y chauffe l'air contenu, le raréfie & le rendra plus léger qu'un pareil volume d'air non raréfié, ou dans l'état ordinaire; celui de dehors plus fort se précipitera donc dans les tuyaux que je suppose ouverts, & arrivant au bassin il en chassera l'air chauffé, pour être bien-tôt chassé lui-même par un air plus vigoureux, qui ne résistera guères à l'effort de celui qui vient après. Il y aura donc une perpétuelle circulation d'air, lequel s'échauffant dans le réservoir viendra en répandre la chaleur dans la chambre, qui ne peut pas manquer par ce moyen d'en avoir bien-tôt un degré suffisant. Après avoir reconnu au Thermomètre ou autrement, celui qui convient le mieux à la santé ou au besoin actuel, on fermera les robinets, pour la conserver à peu près dans cet état. De manière que

peuvent dire des personnes fort éloignées de cet endroit, si bas qu'elles puissent parler. Quand on se met à y crier, on croit y entendre les voix réunies de toute une Armée. Les Prêtres du Pays ont très-bien conçu l'usage que l'on pouvoit faire de cette espèce de merveille. Pour démontrer au peuple qu'ils sont en commerce direct avec la Divinité, ils font monter ceux qui les consultent au Sommet du rocher; parlant ensuite à voix très-basse aux endroits les plus propres à leur dessein, leurs paroles vont se répéter en l'air aux oreilles des Consultants. Ceux-ci n'apercevant autour d'eux aucune cause ordinaire de cet effet, se croient très-véritablement inspirés. Mais le Lecteur conçoit qu'avec un pareil artifice, on est en état de faire des choses fort surprenantes pour le peuple. Citons les propres paroles de *Laër*, qui met le lieu de la Scène dans les montagnes de *Goyam*: ... *Est hinc in montibus (Goyama) rupes ingens ea natura industriâ excavata, ut speculum remotè aspicientibus appareat. Hinc alia rupes opposita, in cujus cacumine nil adeò submissè à quantumvis remotis dici possit, quod non audiatur: clamantibus verò in dicto loco, sonum adeò intendi, ut vox exercitus alicujus videatur. Norunt occultam resonantis naturæ vim sacrificii istius loci, qui ut se divinos demonstrent, homines in cacumine montis positis occultis hujusmodi vocibus de rebus futuris admonent; ita verò se numinis voce affatos arbitrati, non raro in maximas calamitates devolvuntur, dum jussa exequi inconsultius properant.* Supposant la vérité de ce fait, je crois avec le P. Kircher, que cela n'arrive qu'en conséquence de la forme d'un miroir concave Sphérique ou Parabolique, que la nature a donnée au premier rocher, & dont le Foyer se trouve assez précisément au Sommet du second. Moyennant une pareille disposition, la plupart des Lignes vocales RL (fig. 37.) réfléchies à la rencontre du rocher concave, sont renvoyées comme à un même Point du côté de l'autre rocher, au Sommet duquel on éprouve cette espèce de prodige.

* 166. Il n'a été question jusqu'à présent que du Miroir parabolique concave, dans lequel les rayons partans

la chaleur inférieure, qui est presque à pure perte sans cet artifice, deviendra alors la principale source de celle dont on aura besoin.

164. Puisque des rayons lumineux ou calorifiques FH (fig. 39.) qui partent du Foyer F d'un Paraboloïde concave MHP, sont réfléchis parallèlement à son Axe FG (82); il est évident que ces rayons, reçus dans cet état sur la surface concave d'un autre Paraboloïde OLS, dont l'Axe GF & le Foyer G soient sur la même Ligne que l'Axe & le Foyer du premier Miroir, il est évident, dis-je, que ces rayons LG réfléchis une seconde fois, viendront se réunir au Foyer G, (81.) & pourront par conséquent y brûler des corps combustibles.

Cette Théorie a été confirmée par plusieurs expériences. M. Dufay de l'Académie Royale des Sciences de Paris, ayant appris qu'on en avoit fait une à Prague qui avoit très-bien réussi, se proposa de la répéter à Paris. Elle fut exécutée en présence de M. de Mairan, Membre & ancien Secrétaire de la même Académie. Voici ce que m'en a dit lui-même ce célèbre Académicien. En l'année 1726. on disposa, à six pieds l'un de l'autre, deux Miroirs Paraboliques concaves, ainsi que l'indique la fig. 39. A l'un des Foyers F on mit des charbons ardens, & de la poudre à Canon à l'autre Foyer G. Après quoi ayant fait agir un soufflet au Foyer F, pour en aviver les charbons, on vit la poudre en G prendre feu en très-peu de tems. Ce qu'il se conçoit au premier aspect de la figure, en se rappelant la théorie de ses Foyers, que nous avons déjà expliquée tant de fois.

165. Le P. Kircher rapporte dans sa *Phonurgie* un trait d'Histoire où il s'agit d'un fait beaucoup plus curieux que le précédent. Il dit l'avoir lû dans l'Histoire des Abissins de *Jean Paes*. Cet Historien rapporte qu'un grand rocher excavé en forme parabolique, est capable de faire entendre, à cinquante pas de-là, une voix basse qui part de très-loin. Vis-à-vis de ce rocher s'en trouve un autre, au Sommet duquel on entend très-distinctement tout ce que

du Foyer, sont renvoyés par la courbure parallèlement à son Axe; mais on trouve aussi que le Miroir parabolique convexe SAs (fig. 40.) a précisément la même propriété, lorsque des rayons rS rencontrent sa convexité dans une direction à son Foyer F.

Pour en avoir la démonstration, on tracera en quelque Point S la Tangente mt à la Parabole génératrice (30); & par le même Point S ayant fait passer une parallèle dg à l'Axe Fg, on verra que l'Angle d'incidence rSm = l'Angle FSr. Or FSr = dSm (81) = rSg; donc rSm = rSg; ainsi rSm étant l'Angle d'incidence, il faut que son égal rSg soit l'Angle de réflexion, c'est-à-dire, que les rayons rS se réfléchissent dans des Lignes Sg, parallèles à l'Axe AF & par conséquent parallèles entre elles. [a]

* 167. USAGE de la Parabole pour la duplication du Cube. On a vu dans mes *Institutions* (398. Inst. T. 2.) qu'il s'agissoit pour cela, de trouver deux moyennes proportionnelles entre le côté AD du Cube donné, & AC le double de ce côté, (fig. 41.)

Ayant donc pris AC pour l'Axe de la Parabole à décrire, & AD pour le Paramètre de cette Courbe, on la tracera ainsi qu'il a été enseigné (n°. 25); & après avoir porté AD sur l'Axe, du Sommet A en D, on élèvera, sur le milieu M de AD, la perpendiculaire MO = AD; & du Point O décrivant un Cercle par le Point A, si de l'autre Point d'intersection G du Cercle & de la Parabole, on

[a] Remarquez qu'un rayon, qui tombe sur une surface courbe, s'y réfléchit comme s'il tomboit sur la Tangente à cette Courbe, au Point d'incidence. Car, si par ce Point l'on faisoit passer effectivement un Plan Tangent, on auroit la direction de la Courbe en ce Point, & par conséquent l'Angle qu'elle y formeroit avec un rayon incident; n'étant pas possible de déterminer autrement l'Angle qu'une Ligne droite fait avec une Courbe; parce que la Tangente à un Point d'incidence déterminé est invariable, & fait avec la Courbe un Angle plus petit qu'aucun Angle Recti-Ligne; au lieu que, si l'on vouloit estimer l'Angle, que fait une Ligne droite en tombant sur une Courbe, par la divergence de cette droite & d'une portion quelconque de la Courbe, il n'y auroit plus de règle; une Courbe changeant de direction à chacun de ses Points, l'Angle seroit plus ou moins grand selon que l'on prendroit une portion de la Courbe plus ou moins grande, pour servir de côté à cet Angle.

abaisse sur l'Axe la perpendiculaire GS, les Lignes GS, AS, feront les deux moyennes proportionnelles cherchées entre AD & AC.

DÉM. 1.^o. Le centre du Cercle se trouve nécessairement au-dehors de la Parabole. Car AD étant le Paramètre (supp.), l'Ordonnée DL au Point D sera égale à la Ligne AD (27). Or $AD = OM$ (const.). Donc $DL = OM$. Mais $DL > MT$ (10); donc $OM >$ que l'Ordonnée MT au Point M. Ainsi le centre O du Cercle est au-dehors de la Parabole. Il y a donc une partie de ce Cercle au-dedans de cette Courbe (const.), & une autre partie au-dehors; ainsi il coupe nécessairement la Parabole en deux Points; l'un en y entrant, & l'autre en sortant.

2.^o. Je dis que $AD : GS :: GS : AS :: AS : AC$. Car abaissant du centre O la Perpendiculaire OR sur GS, on verra d'abord que $RS = OM = AD$ est la moitié de AC. Ainsi $2 RS = AC$. Mais $2 RS = RS + RH + HS = RS + GR + HS$ (étant clair que $GR = RH$) $= GS + HS$. Donc $GS + HS = AC$.

Mais par la nature du Cercle (287. *Inst. T. 2.*) $AS : GS :: HS : DS$, ou $AS = AD$. Ainsi $GS \times HS = AS \times AS = AS \times AD$; ou, en transposant, $GS \times HS + AS \times AD = AS \times AS$; or (20) $AS \times AD = GS^2$; donc $GS \times HS + GS^2 = AS \times AS$, c'est-à-dire $HS + GS \times GS = AS$; &, comme $HS + GS = AC$, ainsi qu'on l'a fait observer, on trouve que $AC \times GS = AS^2$; donc $GS : AS :: AS : AC$. Mais $AD : GS :: GS : AS$ (20); donc enfin $AD : GS :: GS : AS :: AS : AC$. C. Q. F. D.

168. COROL. Par conséquent $AD : GS :: AD : AC$ (257. *Inst. T. 2.*); mais $AC = 2 AD$ (supp.); donc $GS = 2 AD$; ce qui démontre que le cube GS^3 , fait sur la première des deux moyennes proportionnelles GS, AS, entre AD & son double AC, est double du cube AD proposé.

De

feront toujours supposés perpendiculaires au Plan du Triangle ABC (fig. 43.) par l'Axe de ce Solide; & que, quand il y en aura plusieurs qui se couperont, leur commune Section LOM sera perpendiculaire au Plan de ce Triangle, & par conséquent à toutes les lignes tracées sur ce Plan, qui passeront au Point O, où il est coupé par la commune Section LOM. Car tout cela a été démontré (n^o. 2, 3 & 6 de la Parabole.)

4. DÉF. Quand les côtés AB, AC, (fig. 43.) d'un Triangle ABC par l'Axe d'un Cône scalène, sont coupés par un Plan GLRM, de manière que la commune Section GR de ce Plan & du Triangle fasse avec le côté AB l'Angle AGR = l'Angle ACB, que le Diamètre BC de la base fait avec l'autre côté AC, on dit que ces côtés sont coupés *anti-parallèlement* à la Base, & que la coupe GR est une *Section anti-parallèle* ou *sous-contraire*.

* 5. PROPOS. II. Si on coupe un Cône scalène *anti-parallèlement* à sa Base, la surface GLRM qui en naîtra sera un Cercle.

DÉM. Par un Point quelconque L de la surface *anti-parallèle*, faisons passer un Plan, qui coupe le Cône parallèlement à la Base de ce solide; afin d'avoir par là le Cercle DLPM parallèle à la Base du cône, ainsi que son Diamètre DP parallèle à BC (n^o. 1. de la Parabole); & l'Angle DPA = BCA = AGR (supp.). De plus, comme on suppose la base du cône perpendiculaire au Plan du Triangle ABC, le Cercle DLPM sera aussi perpendiculaire à ce même Plan; & par conséquent la commune Section LOM des deux Plans GLRM, DLPM, sera perpendiculaire aux Lignes DP, GR, tracées sur ce Triangle; & ainsi coupée par le milieu en O (122. *Inst. T. 1.*). Or, à cause de l'*anti-parallélisme*, les Triangles DOG, POR sont semblables; donc $DO : OG :: OR : OP$; ainsi $OG \times OR = DO \times OP = OL$ ou OM (289. *Inst. T. 2.*); donc $OG \times OR = OL$; & par conséquent la surface GLRM est un Cercle (1).

De l'Ellipse.

P. PROPOS. I. Soit AMD (fig. 42.) une figure Curviline, telle que les quarrés BM des Ordonnées BM, perpendiculaires sur une de ses cordes AD, soient toujours égaux aux Rectangles correspondans $AB \times BD$ des Segmens AB, BD, faits par ces perpendiculaires, je dis que cette figure est un Cercle, dont AD est le Diamètre.

DÉM. Soit C le milieu de AD; alors $AB = AC - BC$, & $BD = AC + BC$ (à cause de $CD = AC$) donc, puisque l'on a (supp.) $BM^2 = AB \times BD$, on aura $BM^2 = AC^2 - BC^2 + AC^2 + BC^2 = 2 AC^2 - BC^2$. Tirons présentement CM. Il est clair que $BM^2 = CM^2 - BC^2$. Ainsi $AC^2 - BC^2 = CM^2 - BC^2$; d'où l'on tire $AC = CM$; par conséquent tout Point M du Périmètre de la Courbe est toujours à égale distance de C. La figure proposée est donc un Cercle, dont AD est le Diamètre.

* 2. COROL. D'où il suit que les quarrés des Ordonnées GP, BM, au Cercle, sont entr'eux comme les Rectangles correspondans; c'est-à-dire, que $GP : BM :: AG \times GD : AB \times BD$. Car (1) $GP^2 = AG \times GD$, & $BM^2 = AB \times BD$; donc $GP : BM :: AG \times GD : AB \times BD$. [2.]

3. REM. Afin de n'être pas obligés de donner dans des répétitions ennuyeuses, on observera pour ce qui va suivre, que les Plans par lesquels nous allons couper le cône,

[4.] La converse du n^o. 2. est fautive; c'est-à-dire que l'on ne peut pas conclure que des Ordonnées appartiennent à un Cercle de ce que leurs quarrés sont entr'eux comme les Rectangles correspondans; cette propriété pouvant convenir à l'ellipse; ainsi que nous le verrons n^o. 104.

1

* 6. PROPOS. III. Mais, si le Cône est coupé de manière que la Section LMTP (fig. 44.) ne soit ni parallèle ni anti-parallèle à la Base de ce solide; c'est-à-dire, que l'Angle ALT soit $>$ ou $<$ que l'Angle BCA, cette Coupe ne sera pas un Cercle.

DÉM. Par le milieu O de LT, faisons passer un Plan anti-parallèle à la Base BC; ce qui donnera le Cercle GMRP (5); par conséquent $PO = OM$, & PO ou $OM = OG \times OR$. Mais, si la figure LMTP étoit aussi un Cercle, on auroit encore $OM = LO \times OT$; donc $LO \times OT = GO \times OR$, ou $LO : GO :: OR : OT$; par conséquent les Triangles GOL, ROT, seroient semblables (284. *Inst. T. 2.*); donc les Angles OGL, OTR, opposés aux côtés homologues LO, OR, seroient égaux (283. *Inst. T. 2.*); donc l'Angle LTA égaleroit RGA = ACB (const.); ainsi LT seroit parallèle à BC; ce qui est contre la supposition; la figure LMTP ne peut donc pas être un Cercle.

7. REMARQ. On pouvoit faire passer par le Point O un Plan parallèle à la Base, au lieu de l'*anti-parallèle* dont nous avons fait usage. Mais en ce cas la troisième proposition n'auroit pas été déduite de la deuxième, ce qui est un défaut, quand on peut faire autrement.

* 8. COROL. Puis donc que la figure LMTP n'est pas un Cercle, & que LT la traverse par le milieu; (vu que les perpendiculaires MOP, abaissées d'un Point quelconque M de son Périmètre sur cette Ligne, se trouvent toujours coupées en deux parties égales) le Point O ne sera pas également éloigné de tous les Points de ce Périmètre. Voyons donc de quel côté se trouve la plus longue dimension.

Cette question renferme deux cas. Car la Section LT peut faire l'Angle TLA $<$ ou $>$ que l'Angle BCA, ou RGA fait par l'*anti-parallèle* GR menée par le milieu O de LT. Dans le premier cas, c'est-à-dire, quand l'Angle TLA $<$ RGA, la Ligne LT est plus grande que la Per-

I ij

pendiculaire MOP élevée sur son milieu O ; & dans le deuxième cas , ou quand $TLA > RGA$, la Ligne LT est plus petite que MOP.

DÉM. Du premier cas. Après avoir tiré par le milieu O l'anti-parallèle GOR , (fig. 44) on mènera par ce même Point la parallèle DH ; & l'on observera que GR étant anti-parallèle (const.) , l'Angle ODG du Triangle GOD est égal à l'Angle ORH du Triangle HOR ; mais ORH extérieur est plus grand que son intérieur OTR ; donc ODG $>$ OTR ; on pourra donc prendre , dans l'Angle ODG ou ODL , un Angle ODS égal à l'Angle OTR ou OTH ; & alors DS coupera LT en un Point S , du côté de O par rapport à L ; ainsi OS $<$ OL ou OT , & les Triangles ODS , OTH sont semblables ; donc OS . DO :: OH . OT , ou OS $\times$ OT = DO $\times$ OH = OM² ou OP² (en supposant le Cercle dont DH est Diamètre ; parce qu'alors OM seroit la commune Section du Cercle & de la figure LMTP ; puisqu'on ne sauroit élever , au Point O , qu'une seule perpendiculaire sur le Plan du Triangle ABC) par conséquent , OL $\times$ OT ou OL² étant plus grand que OS $\times$ OT , il sera aussi plus grand que son égal OM² ; donc OL $>$ OM ; ainsi 2 OL ou LT $>$ 2 OM ou MP . C. Q. F. 1°. D.

DÉM. Du second cas , (fig. 45.) où l'Angle TLA $>$ que l'Angle RGA de l'anti-parallèle RG , menée par le milieu O de LT. On tirera , comme ci-dessus , la parallèle DOH à BC ; & l'on verra que l'Angle ODG = ORH ; mais ORH $<$ OTH ; donc ODG ou ODL $<$ OTH ; donc , en tirant DS jusqu'à la rencontre du prolongement TL , pour avoir l'Angle ODS = OTH ; la Ligne DS rencontrera nécessairement OL , en un Point S de l'autre côté de O par rapport à L. Et l'on aura OS $>$ OL , ainsi que les Triangles semblables ODS , OTH ; donc OD . OS :: OT . OH , ou OS $\times$ OT = OD $\times$ OH = OM² ; mais OS $\times$ OT $>$ OL $\times$ OT ou que OL² ; donc OM² $>$ OL² , ou OM

semblables TOQ , TrG , donneront OQ . rG :: OT . rT , donc , en multipliant par ordre les termes de ces deux proportions , nous trouverons celle-ci OR $\times$ OQ . rF $\times$ rG :: OL² $\times$ OT : rL $\times$ rT , dans laquelle mettant OS au lieu de OR $\times$ OQ , & rM en la place de rF $\times$ rG , elle deviendra OS . rM :: OL $\times$ OT : rL $\times$ rT C. Q. F. D.

11. Mais , si l'on trouvoit que les quarrés des Ordonnées ou des perpendiculaires OS , rM , à une Ligne LT , sont entr'eux comme les Rectangles des Segmens correspondans , il n'en faudroit pas conclure que les extrémités , S , M , de ces perpendiculaires sont à une Ellipse , puisque la même propriété convient au Cercle (2) . c'est pourquoi la converse de cette proposition est fautive [a] .

12. PROPOS. V. Le quarré OS d'une Ordonnée quelconque OS au grand Axe LT , est au Rectangle OT $\times$ OL des Segmens correspondans OT , OL , comme le quarré du petit Axe est au quarré du grand Axe , ou comme le quarré de la moitié du petit Axe est au quarré de la moitié du grand ; c'est-à-dire , que OS . OT $\times$ OL :: KD . KT.

DÉM. KD étant une Ordonnée , il s'ensuit (10) que OS . KD :: OT $\times$ OL . KT $\times$ KL ou KT² ; donc , en alternant , OS . OT $\times$ OL :: KD . KT . C. Q. F. D.

13. REMARQ. Je crois que l'on me dispensera de prouver , que le Périmètre de l'Ellipse est une courbe : & comme elle se trouve décrite sur un Plan , recherchons en les autres propriétés indépendamment du solide , où elle a pris naissance ; mais toujours en déduisant ce qui va suivre immédiatement de ce qui précède.

14. COROL. I. Considérons donc la fig. 47 , dont AB

[a] Mais elle sera vraie , si l'on suppose ou si l'on sçait d'ailleurs , que le quarré d'une Ordonnée quelconque n'est pas égal au Rectangle des Segmens de l'Axe , mais par la rencontre de cette Ordonnée.

$>$ OL ; ainsi 2 OM ou MP $>$ 2 OL ou LT . C. Q. F. 2°. D.

9. DÉFIN. Soit à présent LMSTPL (fig. 46.) la Section d'un cône par un Plan , qui coupe les deux côtés AB , AC , du Triangle BAC par l'Axe de ce solide , sans être parallèle ni anti-parallèle à la Base BC. On a vu (6) que cette coupe n'étoit pas un Cercle , les Anciens l'ont appelée Ellipse [a] ; & , si l'on suppose que l'Angle ALT soit plus petit que celui de l'anti-parallélisme , conformément aux constructions précédentes , LT sera l'Axe principal , le grand Axe ou la plus grande dimension de l'Ellipse (8) . Toute Ligne OS ou rM , abaissée d'un Point quelconque du Périmètre de cette figure perpendiculairement sur LT , est une Ordonnée à cet Axe ; les Portions OT , OL , de l'Axe , déterminées par la rencontre d'une Ordonnée OS , sont nommées Segmens ; la perpendiculaire ID élevée sur le milieu K de LT , s'appelle le petit Axe , ou l'Axe conjugué [b] à l'Axe LT. Toute Ligne , abaissée d'un Point quelconque du Périmètre de la figure perpendiculairement sur ID est Ordonnée au petit Axe , & les parties du petit Axe , déterminées par cette Ordonnée , en sont les Segmens.

10. PROP. IV. Dans une Ellipse ; c'est-à-dire , dans une Section de cône telle que LMSTPL , qui n'est pas un Cercle (6) , les quarrés OS , rM , des Ordonnées OS , rM , à l'Axe LT , sont entr'eux comme les Rectangles des Segmens de cet Axe , correspondans à chaque Ordonnée ; c'est-à-dire , que OS . rM :: OT $\times$ OL . rL $\times$ rT (fig. 46.)

DÉM. Par deux Points quelconques S , M , du Périmètre de cette figure , faisons passer des Plans , qui coupent le cône parallèlement à sa Base , ils y formeront des Cercles ; ainsi OS = OR $\times$ OQ , & rM = rF $\times$ rG (289. Inf. T. 2.) Considérons maintenant les Triangles semblables LRO , LFr ; nous aurons OR . rF :: OL . rL ; & les Triangles sem-

[a] On en verra la raison au n°. 12.

[b] La raison de cette dénomination sera expliquée n°. 21.

est l'Axe principal ; CD le petit Axe ; G le centre de l'Ellipse ; MP une Ordonnée quelconque au grand Axe. En ce cas , toute portion GP de cet Axe , comprise entre le centre G & l'extrémité P d'une Ordonnée MP , est appelée Abcisse. Soit donc AB = 2 a ; AG ou GB = a , CD = 2 b ; CG ou GD = b ; MP = y ; GP = x ; on aura AP = a — x , & PB = a + x ; donc AP $\times$ PB = a² — x $\times$ a + x = aa — xx.

Ainsi , en exprimant analytiquement la propriété de l'Ellipse , que l'on a déterminée dans la Propos. V. (12) , on aura yy (MP) . aa — xx (AP $\times$ PB) :: bb (CG) . aa (AG $\times$ GB ou GB²) . D'où l'on tire aa — xx = $\frac{aayy}{bb}$; équation qui convient à tous les Points de cette Courbe rapportés à son Axe principal ; & par laquelle elle est différenciée du Cercle. Parce que dans cette dernière figure , les Axes ou les Diamètres étant égaux , a = b. Donc l'équation précédente devient , pour le Cercle , aa — xx = yy.

15. COROL. II. Puisque MP . AP $\times$ PB :: CG . GB , & que CG $<$ GB , on voit que MP $<$ AP $\times$ PB ; c'est-à-dire que le quarré d'une Ordonnée à l'Axe principal d'une Ellipse , est plus petit que le Rectangle des Segmens correspondans de cet Axe. Ce qui constitue une autre différence entre cette Courbe & le Cercle : car , dans celui-ci , le quarré de l'Ordonnée est égal au Rectangle des Segmens correspondans.

16. COROL. III. L'expression du quarré de l'Abcisse xx = $\frac{aabb}{bb} - \frac{aayy}{bb}$. Car , puisque (14) l'on a aa — xx = $\frac{aayy}{bb}$, en faisant passer le terme — xx du premier membre dans le second , & le terme $\frac{aayy}{bb}$ du second dans le pre-

mier, on aura $aa - \frac{aay}{bb}$, ou $\frac{aabb - aay}{bb} = xx$.

17. COROLAIRE IV. Le carré de l'Ordonnée $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$. Pour le voir, on n'a qu'à multiplier par bb .

les deux termes de l'équation $aa - xx = \frac{aay}{bb}$, & l'on aura $aabb - bbxx = aay$; donc $\frac{aabb - bbxx}{aa} = yy$.

18. COROL. V. Supposant toujours l'équation $aa - xx = \frac{aay}{bb}$, il est évident que, si l'Abcisse x augmente, il faut que l'Ordonnée y diminue; puisque x augmentant, xx augmentera; & par conséquent le membre $aa - xx$ diminuera; à cause qu'on ôtera du carré aa une plus grande quantité xx ; mais le membre $aa - xx$ devenant plus petit, son égal $\frac{aay}{bb}$ doit le devenir aussi; or ce second

membre ne peut pas diminuer par la Fraction $\frac{aa}{bb}$, qui est une grandeur constante; ce sera donc par le carré yy : ainsi les Abcisses augmentant, les Ordonnées diminuent; c'est-à-dire, que les Ordonnées de l'Ellipse diminuent en s'éloignant du centre. Donc la moitié du petit Axe est la plus grande Ordonnée à l'Axe principal; & les deux extrémités C, D, du petit Axe, déterminent la plus grande largeur de l'Ellipse.

19. COROL. VI. D'où il suit qu'une Perpendiculaire DQ à l'une ou l'autre extrémité D du petit Axe, ne touche la Courbe qu'au seul Point D. Car DQ étant parallèle au grand Axe AB (const.), si elle rencontroit la Courbe en un autre Point H; en abaissant de ce Point l'Ordonnée HK, on auroit HK = DG; c'est-à-dire que les Ordonnées ne diminueroient pas, à mesure qu'elles s'éloignent du centre. Ce qui est absurde (18).

ne diminueroient pas, à mesure qu'elles s'éloignent du centre. Ce qui est contraire au n°. 21.

23. COROL. X. Quand les Abcisses GP, GS, (fig. 48.) sont égales, les Ordonnées correspondantes PV, SK, le sont aussi. Car, en conservant les dénominations précédentes, & faisant GS = t , SK = z , l'on aura (16) $xx = \frac{aabb - aay}{bb}$, & par la même raison $tt = \frac{aabb - aaz}{bb}$: ainsi, puisque (supp.) GP = GS, ou $x = t$, on aura $xx = tt$, & par conséquent $\frac{aabb - aay}{bb} = \frac{aabb - aaz}{bb}$; donc (en multipliant par bb ; ôtant ensuite $aabb$ de part & d'autre, & divisant les deux restes par aa) l'on aura, en transposant, $zz = yy$, ou $z = y$; c'est-à-dire SK = PV.

24. Réciproquement, les Ordonnées SK, PV, étant égales, les Abcisses GS, GP, correspondantes le seront aussi. Pour s'en convaincre, il faut se rappeler que (17) $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$, & pareillement que $zz = \frac{aabb - bbt}{aa}$; donc y étant = z (supp.), yy sera = zz , & par conséquent $\frac{aabb - bbxx}{aa} = \frac{aabb - bbt}{aa}$; d'où l'on tirera, comme au n°. 23. $x = t$, ou GP = GS.

25. COROL. XI. Par conséquent, en joignant les extrémités V, K, de deux Ordonnées quelconques égales PV, SK, par la Ligne VK, cette Ligne passera par le centre G, & y sera coupée en deux parties égales. Car il est évident que les Triangles-Rectangles GPV, GSK, sont équiangles; donc PV. SK :: GP. GS :: GV. GK. Or PV = SK (supp.), donc GP = GS, & GV = GK; c'est-à-dire que la distance PS des Ordonnées égales, est coupée en deux également par la Ligne VK; mais le centre de l'Ellipse coupe aussi en deux parties égales cette même distance (24); donc G en est le centre. Ainsi toute Ligne VGK, laquelle passant par le centre G de l'Ellipse, se termine à deux Points de cette Courbe, est divisée en deux parties égales au Point G;

20. COROL. VII. D'un Point quelconque M abbaissés, sur le petit Axe, la Perpendiculaire ou l'Ordonnée MR = GP = x ; alors RG = MP = y ; CR = CG = RG = $b - y$; RD = GD + RG = $b + y$. Ainsi CR × RD = $bb - yy$; mais (16) $\frac{aabb - aay}{bb} = xx$, ou $xx \times bb = bb - yy \times aa$; donc $bb - yy = \frac{bbxx}{aa}$, ou en-

core $xx. bb - yy :: aa. bb$; c'est-à-dire MR. CR × RD :: AG. CG.

21. COROL. VIII. L'Ellipse a donc la même propriété, soit qu'on prenne les Ordonnées au grand Axe, soit qu'on les prenne au petit; & c'est la raison pour laquelle on appelle ces Axes conjugués l'un à l'autre; du Latin *conjugatus* conjugué; c'est-à-dire qui a de l'affinité, ou qui fait des fonctions semblables. On en conclura donc, comme au n°. 18, que les Abcisses y du petit Axe augmentant, les Ordonnées x diminueront; que la moitié du grand Axe est la plus grande Ordonnée au petit Axe, & que les deux extrémités A, B, déterminent la plus grande longueur de l'Ellipse: mais qu'au contraire du Coroll. II. (15.) le carré d'une Ordonnée au petit Axe, est plus grand que le Rectangle des Segmens correspondans de cet Axe; puisque dans la proportion $xx. bb - yy :: aa. bb$ du n°. 20, aa étant > bb , il est nécessaire que xx soit aussi plus grand que $bb - yy$, ou que $MR > CR \times RD$. Ce qui est une autre différence de l'Ellipse au Cercle.

22. COROL. IX. De ce que les Ordonnées au petit Axe diminuent, à mesure qu'elles s'éloignent du centre, il s'en suit qu'une Perpendiculaire AV, à l'une ou l'autre extrémité du grand Axe, ne touche la Courbe qu'au seul Point A: puisque, si elle la touchoit en quelqu'autre Point T, en menant de ce Point une Ordonnée TN au petit Axe, auquel la Perpendiculaire AV est parallèle (const.), on auroit TN = AG; c'est-à-dire que les Ordonnées au petit Axe

c'est pourquoi toute Ligne semblable à VGK a été appelée Diamètre.

26. Réciproquement, si des extrémités V, K, d'un Diamètre, on abbaissés les Ordonnées VP, KS, elles seront égales entr'elles, & les Abcisses correspondantes GP, GS, le seront aussi. Car les Triangles semblables GPV, GSK donnent VG. GK :: VP. KS :: GP. GS; or VG = GK (25), parce que VGK est un Diamètre (supp.); donc VP = KS, & GP = GS.

* 27. COROL. XII. Puisque les Ordonnées à égale distance du centre sont égales (23), l'Ellipse n'est pas plus grosse ou plus évasée vers son extrémité inférieure L (fig. 46.), que vers son extrémité supérieure T; quoique le Cône soit plus grêle ou plus mince en T qu'en L [a].

* 28. COROL. XIII. Si l'on fait AB. CD :: CD est à un troisième terme p (fig. 47.), ou $2a. 2b. :: 2b. \frac{4bb}{2a}$

$\frac{2bb}{a}$, on aura $p = \frac{2bb}{a}$; or ce troisième proportionel p ainsi déterminé, est ce que l'on nomme le Paramètre du premier terme AB de la proportion, ou le Paramètre du grand Axe: cela posé, l'on trouvera que le Rectangle AP × PB de deux Segmens quelconques du grand Axe est au carré PM de l'Ordonnée correspondante, comme le grand Axe AB est au Paramètre p ; c'est-à-dire qu'en faisant $2a. 2b. :: 2b. p$, on aura $aa - xx$ (AP × PB). yy (PM) :: $2a$ (AB) p .

Dém. Puisque $2a. 2b. :: 2b. p$ (supp.), on aura $4aa.$

[a] Cette considération est fort propre à nous rendre retenus dans nos jugemens. Quand on coupe un Cône en haudrier, ou de haut en bas; en sorte qu'il en naisse une Section LSTPL, comme celle de la fig. 46, on juge d'abord que cette espèce d'ovale doit avoir une forme de poire ou de cloche, parce que le Cône va toujours en grossissant de haut en bas. Cela est pourtant très-faux, indépendamment de la théorie. On n'a qu'à couper un Cône réel, ainsi qu'on l'indique ici, & la Démonstration s'en fera à l'œil.

$$4bb :: 2a.p \text{ (256. Inf. T. 2.) ; donc } \frac{4aa}{4bb} \text{ ou } \frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}.$$

Ainsi dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, trouvée n°. 14.

en mettant $\frac{2a}{p}$ au lieu de $\frac{aa}{bb}$, elle deviendra $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$, ou $aa - xx \times p = 2a \times yy$, d'où l'on tirera $aa - xx :: 2a.p$.

* 29. COROL. XIV. Pareillement, en faisant CD. AB :: AB est à un troisième terme m , nommé *Paramètre* du petit Axe CD, on trouvera que le Rectangle CR $\times$ RD de deux Segmens quelconques du petit Axe, est au carré MR de l'Ordonnée correspondante, comme le petit Axe CD est au Paramètre m . Que l'on fasse donc $2b. 2a :: 2a.m$, & l'on aura CR $\times$ RD ($bb - yy$). MR (xx) :: CD ($2b$). m .

Pour le voir, il n'y a qu'à répéter la Démonst. du n°. 28. en disant, puisque $2b. 2a :: 2a.m$. On aura $4bb. 4aa :: 2b.m$, ou $\frac{bb}{aa} = \frac{2b}{m}$; donc l'équation $bb - yy = \frac{bbxx}{aa}$ trouvée n°. 20. deviendra $bb - yy = \frac{2bxx}{m}$, ou $bb - yy \times m = 2b \times xx$; d'où l'on tire $bb - yy :: 2b.m$.

* 30. REM. L'équation $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$ (28), ou $bb - yy = \frac{2bxx}{m}$ (29) s'appelle l'équation de l'Ellipse par rapport au *Paramètre*, parce qu'elle peut servir, ainsi que l'équation aux Axes, à décrire la Courbe & à en découvrir les propriétés. Elle est même plus simple, parce que $\frac{2a}{p}$ est un rapport de Lignes substitué à l'expression $\frac{aa}{bb}$, qui est un rapport de carrés.

242 T R A I T É
F, f, au centre G, & rappelons nous la cinquième Prop. (12) qui a donné $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ (14), d'où l'on a tiré $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (17). Remarquons aussi qu'en tirant CF = AG = a , le Triangle-Rectangle FGC donne FG = FC - CG, ou $cc = aa - bb$ [a]; & que du Point M abaissant l'Ordonnée PM, nous aurons FP = FG - GP = $c - x$; ainsi FP = $cc - 2cx + xx$; & Pf = fG + GP = $c + x$, donc Pf = $cc + 2cx + xx$; par conséquent FM = PM + FP sera = $yy + cc - 2cx + xx$; donc (en substituant dans cette équation les valeurs de cc & de yy) on trouvera FM = $\frac{aabb - bbxx}{aa} + aa - bb - 2cx + xx$ (en réduisant à la même dénom.)
FM = $\frac{aabb - bbxx + a^4 - aabb - 2a^2cx + aaxx}{aa}$
= $\frac{a^4 - 2a^2cx + aaxx - bbxx}{aa}$; donc (en mettant cc , en la place de $aa - bb$ qui multiplie xx) FM = $\frac{a^4 - 2a^2cx + ccxx}{aa}$; & par conséquent (en extrayant la Racine quarrée) FM = $\frac{aa - cc}{a}$.

[a] Puisque $cc = aa - bb$; on aura $bb = aa - cc$ = $a - c \times a + c$. Or $a - c = AG - GF = AF$, & $a + c = GB + GF = FB$; d'où l'on voit que bb ou CG = AF $\times$ FB. Ou encore AF = $\frac{CG}{FB}$.

* 31. COROL. XV. Le carré PM de l'Ordonnée au grand Axe, est plus petit que le Rectangle du Segment AP par le *Paramètre* p de cet Axe.

DÉMONST. On a vu (n°. 28.) que ce Paramètre $p = \frac{2bb}{a}$; or on sçait que GP = x , & que AP = $a - x$. Il faut donc prouver que PM < AP $\times$ p , ou que $yy < a - x \times p$, ou enfin que $yy < a - x \times \frac{2bb}{a}$. Pour cela rappelons

nous que $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (17), & nous aurons PM. AP $\times$ $p :: \frac{aabb - bbxx}{aa} : a - x \times \frac{2bb}{a} ::$ (en divisant les deux derniers termes par $\frac{bb}{a}$) $\frac{aa - xx}{a} : a - x \times 2 ::$ (en divisant encore par $a - x$) $\frac{a + x}{a} : 2$, ou (en multipliant par a) $a + x : 2a$. Donc PM. AP $\times$ $p :: a + x : 2a$, ou :: BP. BA; mais BP < BA; donc PM < AP $\times$ p . C. Q. F. D.

* 32. REM. C'est ce défaut d'égalité du carré PM de l'Ordonnée PM, avec le Rectangle AP $\times$ p du Segment AP par le Paramètre, qui a fait que les anciens Géomètres ont appelé cette Courbe une *Ellipse*; car le Grec *Ellipsis*, d'où le mot *Ellipse* est évidemment dérivé, signifie *défaut*.

33. PROPOS. VI. Si avec le rayon AG = a , & de l'extrémité C ou D du petit Axe, prise comme centre, on marque sur le grand Axe les Points F, f; & que de ces Points ainsi déterminés, l'on mène à un même Point quelconque de la courbe elliptique les Lignes FM, fM, leur somme FM + fM sera toujours égale au grand Axe AB = $2a$. (fig. 47.).

DÉM. Soit appelée c la distance GF ou Gf des Points

Pareillement FM = PM + Pf = $yy + cc + 2cx$ + xx (en faisant les mêmes substitutions que ci-dessus)

$$\frac{aabb - bbxx + a^4 - aabb + 2a^2cx + a^4x^2}{aa} = \frac{a^4 + 2a^2cx + a^4x^2 - b^2x^2}{aa} \text{ (en remettant } cc \text{ en la place de } a^4 - b^2 \text{ qui multiplie } xx)$$

$$\frac{a^4 + 2a^2cx + ccxx}{aa} \text{ ; ainsi (en tirant la Racine quarrée) } fM = \frac{aa + cx}{a}.$$

$$\text{Par conséquent } FM + fM = \frac{aa - cx}{a} + \frac{aa + cx}{a} = \frac{2aa}{a} = 2a. \text{ C. Q. F. D.}$$

34. COROL. I. D'où il suit qu'en menant par un Point quelconque M (fig. 49.) de la courbe, une Ligne fM prolongée jusqu'à ce que MP = MF, & tirant PF, si l'on mène, par le milieu L de cette Ligne & par le Point donné M, une autre Ligne OLMS, elle sera Tangente en M.

DÉM. Il s'agit uniquement de prouver que OLMS ne touche la courbe qu'au seul Point M. Or (const.) OLMS est perpendiculaire sur le milieu de PF; donc, si elle rencontre la courbe en quelqu'autre Point Q, on auroit QP = QF; ainsi fQ + QP = fQ + QF = $2a$ ou AB (33); mais fM + MF = aussi $2a$ (33), = fM + MP (const.); donc fQ + QP = fM + MP = fP; c'est-à-dire, qu'une Ligne droite fP seroit égale à une Ligne courbe fQP comprise entre les mêmes extrémités P, f, ce qui est absurde; donc, &c.

35. COROL. II. L'Angle FMO = fMS. Car FMO = PMO (const.) = fMS son opposé au Sommet; donc FMO = fMS; c'est-à-dire, qu'en tirant des Points, F, f, les Lignes FM, fM, à un même Point M, l'Angle qu'elles forment avec la Tangente en ce Point, sera égal de part & d'autre.

36. COROL. III. Par conséquent, si l'on mettoit à l'un des Points F un corps lumineux, ou en feu, tous les rayons portés à la circonférence de la courbe, seroient réfléchis ou renvoyés à l'autre Point f: ces rayons ne pouvant pas faire l'Angle de réflexion égal à l'Angle d'incidence, sans passer par f. C'est pourquoi les Points F, f, déterminés comme dans la const. de la Proposition VI. (33), sont nommés *Foyers*.

Cette propriété de l'Ellipse est très-célèbre. Nous en ferons usage, quand il s'agira d'appliquer cette courbe à la pratique des Arts.

* 37. I. La distance AF (figure 47.) de l'un des Foyers F d'une Ellipse, à l'extrémité A de l'Axe la plus proche, est plus grande que le quart du Paramètre de cette Courbe: c'est-à-dire que $AF > \frac{b^2}{a}$.

DÉM. $AF = \frac{CG}{FB}$ (note du n°. 33.); & $p = \frac{4b^2}{a}$ (28); donc $\frac{b^2}{a} = \frac{CG}{\frac{4b^2}{a}}$. Or il est évident que $\frac{CG}{FB} > \frac{CG}{\frac{4b^2}{a}}$; puis que $FB < AB$; donc aussi $AF > \frac{b^2}{a}$.

* 37. II. COROL. IV. Si par le centre G d'une Ellipse, (fig. 49.) on tire une parallèle NV à une Tangente quelconque HR, cette parallèle retranchera de la Ligne FK, (menée du Foyer le plus éloigné F au Point K de contingence,) une Portion TK égale à la moitié du grand Axe; c'est-à-dire, que $TK = a$ ou $\frac{AB}{2}$.

DÉM. De l'autre Foyer f menant se parallèle à NV, l'on aura l'Angle $Kef = KTV = HKT$ son alterne $= fKR$ (35) $= efK$ son alterne (const.); ainsi l'Angle $Kef = efK$; donc $Ke = Kf$, & $Fe = FK - Ke = FK - Kf$. De plus FG étant $= Gf$, FT $= Te$, ou $Te = \frac{FT}{2} = \frac{FK - Kf}{2}$ (puisque $Fe = FK - Kf$); donc $Te + eK = \frac{FK - Kf}{2} + Kf$ (à cause que $Kf = eK$); c'est-à-dire que $TK = \frac{FK + Kf}{2} = \frac{AB}{2}$ (33). C. Q. F. D.

38. COROL. V. Il est clair qu'en élevant la perpendiculaire Md au Point M de contingence, cette perpendiculaire ne passera pas par le centre G; puisque Md & FP étant (const.) perpendiculaires sur la Tangente OS, les Triangles

semblables fPF , fMd donnent fM . MP ou MF: : fd . dF; mais $fM > MF$; donc $fd > dF$. Le Point d de la perpendiculaire Md à la courbe, n'est donc pas au centre de l'Ellipse. Ainsi voilà encore une autre différence entre l'Ellipse & le Cercle, dans lequel toute Ligne perpendiculaire à la circonférence passe nécessairement par le centre.

39. COROL. VI. On voit donc que toute Ligne MG, menée d'un Point de contingence M au centre G de l'Ellipse, fait avec la Tangente un Angle oblique GMO (on suppose que le Point de contingence n'est pas une des extrémités de l'un ou de l'autre Axe); & que l'Angle FMf est coupé en deux parties égales par la perpendiculaire Md.

40. Réciproquement, si l'Angle FMf est coupé en deux parties égales par la Ligne Md, je dis 1°. que cette Ligne est perpendiculaire sur la Tangente OS au Point M. 2°. Que la perpendiculaire OS à l'extrémité M de cette même Ligne Md, est nécessairement Tangente à l'Ellipse au Point M.

DÉM. 1°. $dMF = dMf$ (supp.), & $FMO = fMS$ (35); donc $dMO = dMS$; ainsi Md est perpendiculaire sur OS.

2°. Puisque l'Angle $dMO = dMF + FMO = dMf + fMS$, & que $dMF = dMf$ (supp.) l'Angle $FMO = fMS = PMO$ son opposé au Sommet; donc $FMO = PMO$; ainsi, en faisant le prolongement MP $= MF$ & tirant PF, l'Angle $MPL = MFL$, & l'Angle $MLP = MLF$; c'est-à-dire, que OS est perpendiculaire sur la Base PF du Triangle isocèle PMF; elle passe donc par le milieu L de cette Base, & par conséquent elle est Tangente au Point M (34).

* 41. COROL. VII. Tirons une Ligne quelconque DM, (fig. K.) parallèlement au grand Axe AB d'une Ellipse; du Point M où elle rencontre le Périmètre de cette courbe, menons aux Foyers F, f, les Lignes MF, Mf; coupons l'Angle FMf en deux parties égales par l'indéfinie LH, laquelle sera perpendiculaire à la courbe, ou à sa Tangente CME au Point M (40); faisons $MD = Mf$; alors, si de K

Points D, f, on abaisse les perpendiculaires DL, fH, sur LH; elles seront entr'elles comme le grand Axe est à la distance des Foyers; c'est-à-dire, que $DL : fH :: AB : Ff$.

DÉM. DM étant parallèle à AT (supp.), l'Angle $DML = ATM$; donc abaissant la perpendiculaire MP, les Triangles-Rectangles DLM, MPT, sont Équiangles; ainsi $DL : MP :: MD$ ou Mf . MT. Or, si l'on abaisse la perpendiculaire TS sur Mf, les Triangles-Rectangles fHM, MST, ayant l'Angle commun fMH, sont semblables; donc $Mf : MT :: fH$. TS; donc $DL : MP :: fH$. TS, ou $DL : fH :: MP$. TS. :: fM . fT (parce que les Triangles-Rectangles fPM, fST, sont Équiangles.); mais, en prolongeant fM, jusqu'à ce que $MO = MF$, & tirant OF qui sera perpendiculaire sur la Tangente CE (Dém. du n°. 34.), & par conséquent parallèle à MT ou à LH, qui est aussi perpendiculaire sur la même Ligne CE (const.) on aura $fM : fT :: fO$. Ff; donc $DL : fH :: fO$. Ff :: fM . MF. Ff (parce que $fO = fM + MF$); AB . Ff (car $fM + MF = AB$ (33)); par conséquent $DL : fH :: AB$. Ff. C. Q. F. D.

Réciproquement, si l'on abaisse la perpendiculaire fH sur la Ligne LMH, qui coupe en deux parties égales un Angle quelconque FMf, formé par deux Lignes MF, Mf, tirées d'un même Point M d'une Ellipse à ses deux Foyers F, f; & qu'après avoir cherché une quatrième proportionnelle DL aux trois Lignes Ff, AB, fH, l'on construise au Point M sur le prolongement de HM, un Triangle-Rectangle MDL, dont l'hypothénuse $= Mf$ ou DM, & l'un des deux autres $= DL$, il arrivera que DM sera parallèle à AB.

DÉM. $DL : fH :: AB$. Ff (const.); fO . fF (parce que $fO = AB$ (const. & n°. 33.)) :: fM . fT (à cause de MT parallèle à OF (const.)) :: DM. fT (puisque DM $= fM$ (const.)); ainsi $DL : fH :: DM$. fT, ou $DL : DM :: fH$. fT; donc les Triangles-Rectangles DLM, fHT, sont semblables (286 *Inst. T.* 2.); ainsi l'Angle $DML = fTH = ATM$; donc les deux Lignes DM, AT, ou AB, sont

également inclinées sur la même Ligne LH; & par conséquent elles sont parallèles. C. Q. F. D.

Il faut s'attacher à bien concevoir ce Corollaire & sa converse. Nous en ferons usage dans la Dioptrique.

* 42. COROL. VIII. Toute Tangente OS (fig. 49.) en quelque Point M de l'Ellipse, différent des extrémités des Axes, est nécessairement déterminée à rencontrer le grand Axe en quelque Point O. Car, si OS étoit parallèle à l'Axe AB, on auroit l'Angle $FfM = LMP = LMF$ (const.) $= MFf$ son alterne; donc l'Angle FfM égaleroit l'Angle MFf ; donc Mf égaleroit MF; ce qui est absurde. La Tangente OS n'est donc pas parallèle à l'Axe AB; par conséquent elle le rencontre, ou est déterminée à le rencontrer en quelque Point O.

* 43. COROL. IX. La distance FA de l'un des Foyers F à l'extrémité A du grand Axe, la plus proche de ce Foyer, est plus grande que le quart du Paramètre de l'Axe principal AB de l'Ellipse.

Car $FA = AG - FG = a - c$, & le Paramètre $p = \frac{2bb}{a}$ (28), ainsi $\frac{p}{4} = \frac{2bb}{4a} = \frac{bb}{2a}$. Or $a - c$ (FA). $\frac{bb}{2a}$:: (en multipliant les deux termes de ce rapport par 2a) $2aa - 2ac$. bb :: (en mettant aa - cc en la place de bb (note du n°. 33.)) $2aa - 2ac$. $aa - cc$:: (en divisant les deux derniers termes par a - c) $2a$. $a + c$; donc FA . $\frac{bb}{2a}$ ou $\frac{p}{4}$.

$2a$. $a + c$, ou :: AB. BF; mais $AB > BF$; donc $FA > \frac{p}{4}$.

* 44. COROL. X. L'Ordonnée FN (fig. 48.) à l'un des Foyers F de l'Ellipse, est égale à $\frac{p}{2}$ moitié du Paramètre de l'Axe principal AB.

DÉM. Après s'être rappelé la cinquième Proposit. (12), on remarquera que $AF = AG - FG = a - c$, & $FB = a + c$. Ainsi $AF \times FB = a - c \times a + c = aa -$
K ij

$cc = bb$ (note du n°. 33.); on aura donc $\overline{FN} (yy)$. $AF \times FB (bb) :: \overline{CG} (bb), \overline{AG} (aa)$ (n°. 12.); donc $\overline{FN}$ ou $yy = \frac{b^4}{a^2}$; & par conséquent $\overline{FN} = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}$ (28) C. Q. F. D.

* 45. PROPOS. VII. En supposant au Point de contingence M (fig. 50.) la Perpendiculaire Md à la Tangente OM, & abaissant l'Ordonnée MP à l'Axe AB, on trouvera que l'expression de la demi-différence des Lignes fM , FM, menées des Foyers à ce Point M, est $= \frac{cx}{a}$.

DÉM. Par la Prop. VI. (33) $2a$ étant la somme des Lignes fM , FM; si l'on appelle leur différence $2d$, leur demi-différence sera $= d$; ainsi $fM = a + d$, & $FM = a - d$ (Inst. 103. Alg. T. 1.); donc $fM = aa + 2ad + dd$, & $FM = aa - 2ad + dd$. De plus $FP = FG - GP = c - x$, & $Pf = Gf + GP = c + x$; ainsi $FP = cc - 2cx + xx$, & $Pf = cc + 2cx + xx$. Cela supposé, il faut prouver que $d = \frac{cx}{a}$.

Considérons le Triangle-Rectangle FPM, nous aurons $\overline{FM} = \overline{FP} + \overline{PM}$, ou $aa - 2ad + dd = cc - 2cx + xx + yy$ (A). Pareillement le Triangle-Rectangle fPM donnera $\overline{fM} = \overline{Pf} + \overline{PM}$, ou $aa + 2ad + dd = cc + 2cx + xx + yy$ (B); en ôtant donc le premier membre de l'équation A, du premier membre de l'équation B, & le second membre du second membre, on aura $4ad = 4cx$; d'où l'on tire $d = \frac{cx}{a}$. C. Q. F. D.

* 46. PROPOS. VIII. En faisant le prolongement $MV = FM$, on trouvera que FM ou $MV = \frac{aa - cx}{a}$.

puisque $GP = x$, & $Pd = \frac{bbx}{aa}$ (48), on aura GP. Pd

$:: x. \frac{bbx}{aa} :: aax. bbx :: aa. bb :: 2a. p$ (Dém. du n°. 28.).

Donc GP. Pd $:: 2a. p$. C. Q. F. D.

* 50. PROPOS. XI. L'expression de la sous-Tangente PO

DÉM. Puisque le Triangle Omd est Rectangle en M, & que MP est perpendiculaire sur Od, on a Pd. PM $::$ PM.

PO (191. Inst. T. 2.): or $Pd = \frac{bbx}{aa}$ (48), & $PM = y$;

donc $\frac{bbx}{aa} \cdot y :: y. PO = \frac{aay}{bbx}$; mais $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$

(17); donc $PO = \frac{aa \times aabb - bbxx}{aa \times bbx} = \frac{aa - xx}{x}$.

C. Q. F. D.

* 51. AUTRE Démonstration, tirée de la méthode générale de mener la Tangente des Courbes, expliquée au n°. 28 & 29 de la Parabole. Si nous avions voulu nous dispenser, de suivre le fil des vérités que nous venons d'établir, nous aurions pu dès le commencement, & immédiatement après la Proposition IV. (n°. 10), découvrir la valeur $\frac{aa - xx}{x}$ de la sous-Tangente PO; comme nous allons le faire voir (fig. 50.).

Supposons donc qu'on veuille mener une Tangente au Point N de l'Ellipse, il est évident qu'elle doit rencontrer l'Axe prolongé en quelque Point O (42): ainsi, en abaissant l'Ordonnée NP, il est clair que, si dans le Triangle-Rectangle NPO l'on peut déterminer le rapport de la sous-Tangente PO à quelque grandeur connue, on aura la Tangente ON.

Pour cela, concevons d'abord que ON soit Sécante,

DÉM. Puisque (Dém. du n°. 45.) FM ou $MV = a - d$, & que $d = \frac{cx}{a}$ (45), on aura FM ou $MV = a - \frac{cx}{a} = \frac{aa - cx}{a}$. C. Q. F. D.

* 47. PROPOS. IX. La distance Fd du Foyer F au Point d, où la Perpendiculaire Md à la Tangente rencontre l'Axe, est $= \frac{a^2c - c^2x}{aa}$.

DÉM. Ayant tiré FV, qui sera nécessairement Perpendiculaire sur OM (Dém. du n°. 34.), les Triangles fMd , fVF seront semblables; donc $fV. fF :: MV$ ou $FM. Fd$; mais $fV = fM + FM = 2a$ (33); $fF = 2c$; & MV ou $FM = \frac{aa - cx}{a}$ (46). Donc, en mettant ces valeurs analytiques dans la proportion précédente, elle deviendra $2a. 2c :: \frac{aa - cx}{a}. Fd$; ainsi $Fd = \frac{a^2c - c^2x}{aa}$. C. Q. F. D.

* 48. PROPOS. X. En supposant toujours la même construction que ci-dessus, on trouvera que l'expression de la sous-Perpendiculaire Pd $= \frac{bbx}{aa}$.

DÉM. On sçait que $FP = FG - GP = c - x$, & $Fd = \frac{a^2c - c^2x}{aa}$ (47). Or $Pd = Fd - FP = \frac{a^2c - c^2x}{aa} - c + x =$ (en réduisant à la même dénomination, & ôtant ce qui se détruit) $\frac{aax - cx}{aa}$; donc $Pd = \frac{a^2x - c^2x}{aa}$; mais $a^2 - c^2 = bb$; donc $Pd = \frac{bbx}{aa}$. C. Q. F. D.

* 49. COROL. Il s'enfuit que GP. Pd $:: 2a. p$. Car, K iij

c'est-à-dire, qu'elle coupe la Courbe en deux Points N, Q, & que l'on ait tiré l'Ordonnée QT. Faisons $AG = a$; $GP = x$; $PT = r$; $GT = GP - PT = x - r$; $AP = a - x$; $PB = a + x$; ainsi $AP \times PB = aa - xx$. $AT = AG - GP + PT = a - x + r$; $TB = PG + GB - PT = a + x - r$; donc $AT \times TB = a^2 - x^2$; $+ r \times a + x - r = aa - xx + 2rx - rr$; $PO = s$; $OT = PO + PT = s + r$; ainsi $PO = ss$, & $OT = ss + 2rs + rr$.

Remarquons maintenant que par la quatrième Proposition (n°. 10) $\overline{QT}. \overline{PN} :: \overline{AT} \times \overline{TB}. \overline{AP} \times \overline{PB}$; & (à cause des Triangles semblables OTQ, OPN) $\overline{QT}. \overline{PN} :: \overline{OT}. \overline{PO}$; donc $\overline{AT} \times \overline{TB}. \overline{AP} \times \overline{PB} :: \overline{OT}. \overline{PO}$; c'est-à-dire (en substituant les grandeurs analytiques des termes de cette proportion) $aa - xx + 2rx - rr. aa - xx :: ss + 2rs + rr. ss$; ainsi (en soustrayant) $2rx - rr. aa - xx :: 2rs + rr. ss$; donc (en faisant le produit des Extrêmes & celui des Moyens) $2rs^2x - r^2s^2 = 2a^2rs - 2rsx^2 + a^2r^2 - r^2x^2$, ou (en divisant par r) $2ssx - rss = 2a^2s - 2sx^2 + a^2r - rx^2$ (B), qui est l'équation où l'on parvient, lorsque la Ligne ONQ est Sécante; mais, en imaginant qu'elle tourne sur le Point O, jusqu'à ce que les Points N, Q, se confondent; auquel cas elle sera Tangente, QT deviendra NP, & la différence PT des Abcisses s'évanouira; c'est-à-dire qu'alors $r = 0$; ce qui fera évanouir tous les termes où r se trouve dans l'équation B. Alors cette équation deviendra $2ssx = 2a^2s - 2sx^2$. Donc (en divisant par $2s$) $sx = aa - xx$; & par conséquent s ou $PO = \frac{aa - xx}{x}$, comme au n°. 50.

* 52. COR. I. Donc $PO \times x = aa - xx = a - x \times a + x$; ainsi $x. a - x :: a + x. PO$, ou GP. AP $::$ K iv

BP. PO ; dans laquelle proportion les trois premiers termes sont donnés, quand le Point M & l'Axe AB le sont ; ce qui détermine PO, & par conséquent ON.

* 53. Réciproquement, le Point N & l'Axe AB d'une Ellipse étant donnés, si l'on fait GP. AP :: BP est à un quatrième terme, que l'on portera de P en O pour tirer ON, je dis que cette Ligne ON fera Tangente au Point N.

Car, si elle ne l'étoit pas, on pourroit donc mener au Point N une Tangente NS, qui tomberoit au-dessus ou au-dessous de ON ; & l'on auroit alors GP. AP :: BP. PS (52) ; puisque, dans ce cas, PS seroit sous-Tangente ; mais (supp.) GP. AP :: BP. PO ; donc PS égalerait PO ; ce qui est absurde.

On a donc par cette *Converse* un second moyen de mener une Tangente à un Point donné de l'Ellipse, sans avoir recours au n°. 34.

* 54. COROL. II. Si l'on ajoute GP = x à PO = $\frac{aa - xx}{x}$ (50 & 51), on aura GP + PO = x +

$\frac{aa - xx}{x} = \frac{xx + aa - xx}{x} = \frac{aa}{x}$; donc GO = $\frac{aa}{x}$, ou GO x x = a x a, ou GO x GP = GA x GA ; donc GP. GA :: GA. GO ; ce qui est un troisième moyen d'avoir la Tangente ON.

* 55. COROL. III. En ôtant GA = a de GO = $\frac{aa}{x}$ (54), on aura GO - GA = $\frac{aa}{x} - a = \frac{aa - ax}{x}$

= AO ; ainsi AO x x = aa - ax = a - x x a, ou AO x GP = AP x GA ; donc GP. AP :: GA. AO ; quatrième moyen d'avoir une Tangente au Point N.

* 56. COR. IV. Prolongeons le petit Axe DC, jusqu'à ce qu'il rencontre la Tangente OM en R ; & abaissons

donnée ML, la sous-Tangente LR se trouve déterminée, & par conséquent la Tangente MR.

* 58. COROL. VI. Si l'on ajoute y = GL à la grandeur $\frac{bb - yy}{y}$, on aura LR + GL = $\frac{bb - yy}{y} + y = \frac{bb - yy + yy}{y} = \frac{bb}{y}$; donc LR + GL, c'est-à-dire GR = $\frac{bb}{y}$, ou GR x y = b x b ; d'où l'on tire y. b :: b. GR, ou GL. GC :: GC. GR. Ce qui fournit un moyen d'avoir GR, & par conséquent la Tangente MR.

* 59. COROL. VII. En ôtant b = GC de $\frac{bb}{y} = GR$, on trouve GR - GC = $\frac{bb}{y} - b = \frac{bb - by}{y}$; donc GR - GC, c'est-à-dire CR = $\frac{bb - by}{y}$, ou CR x y = bb - by = b - y x b ; ainsi y. b :: b - y. CR, ou GL. GC :: LC. CR ; ce qui est un nouveau moyen d'avoir la Tangente MR.

60. REM. Tous ces Corollaires démontrent, que l'on peut se servir indifféremment du grand Axe ou du petit Axe, pour avoir une Tangente en un Point quelconque différent des extrémités de ces Axes. Car il est aisé de démontrer la vérité des *converses* de toutes ces propositions, ainsi que l'on a fait au n°. 53.

* 61. COR. VIII. [a] Aux extrémités du grand Axe AB (fig. 51.) élevons les perpendiculaires BQ, AS, terminées aux Points Q, S, par la Tangente OS au Point M ;

[a] On peut passer depuis le n°. 61. jusqu'au n°. 66. exclusivement ; cependant comme ces Corollaires sont d'un très-grand usage dans l'Astronomie Physique, particulièrement pour l'intelligence du Livre de M. Sigorgne, & qu'on ne les trouve pas toujours démontrés avec une juste étendue, je me suis appliqué à ne rien omettre à cet égard, qui pût arrêter les Commencans.

L'ordonnée ML à cet Axe ; alors l'expression de la sous-Tangente LR = $\frac{bb - yy}{y}$.

DÉM. GL = PM = y ; & les Triangles semblables OGR, OPM, donnent GR. PM :: GO. OP : mais GO = $\frac{aa}{x}$ (54), & OP = $\frac{aa - xx}{x}$ (50 & 51) ; donc la propor-

tion précédente devient GR. y :: $\frac{aa}{x} \cdot \frac{aa - xx}{x}$; d'où l'on

tire GR = $\frac{aay}{aa - xx}$; donc LR = GR - GL =

$\frac{aay}{aa - xx} - y = \frac{aay - aay + yxx}{aa - xx}$ (en réduisant à la

même dénomination) = $\frac{yxx}{aa - xx}$; ainsi LR = $\frac{yxx}{aa - xx}$

(A) : mais xx = $\frac{aabb - aayy}{bb}$ (16) ; substituant donc cette valeur de xx dans l'équation A, elle devient LR =

$\frac{aabby - aay^3}{bb} = \frac{aabb - aayy}{bb}$

$\frac{aabb - aayy}{bb} = \frac{aabb - aabb + aayy}{bb} =$

$\frac{aabby - aay^3}{bb} = \frac{bb - yy}{y}$ (en divisant par aay) ; donc LR

= $\frac{bb - yy}{y}$. C. Q. F. D.

* 57. COROL. V. Puisque LR = $\frac{bb - yy}{y}$, on aura

LR x y = bb - yy = b + y x b - y ; donc y. b + y :: b - y. LR, ou GL. DL :: LC. LR. Ainsi, quand le Point M & le petit Axe sont donnés ; en abaissant l'Or-

& le produit de ces perpendiculaires sera égal au carré de la moitié du petit Axe ; c'est-à-dire, que BQ x AS = CG.

DÉM. Abaisant l'ordonnée PM = y, soit toujours AG = GB = a ; GP = x ; OP = $\frac{aa - xx}{x}$ (50 & 51) ;

ainsi OB = OP + GP - GB = $\frac{aa - xx}{x} + x - a =$

= (en réduisant à la même dénomination ; & ôtant ce qui se détruit) $\frac{aa - ax}{x}$; donc OB = $\frac{aa - ax}{x}$. De même

OA = BA + OB = 2a + $\frac{aa - ax}{x} =$

$\frac{2ax + aa - ax}{x} = \frac{ax + aa}{x}$; donc OA = $\frac{ax + aa}{x}$;

cela supposé.

Considérons les Triangles semblables OPM, OBQ ; nous aurons OP. PM :: OB. BQ, ou (en substituant les valeurs analytiques) $\frac{aa - xx}{x} \cdot y :: \frac{aa - ax}{x} \cdot BQ$; donc

(en divisant les antécéd. par $\frac{aa - ax}{x}$, & en altern.) a + x.

a :: y. BQ (M). Pareillement les Triangles semblables OPM, OAS, donnent OP. PM :: OA. AS, ou $\frac{aa - xx}{x}$.

y :: $\frac{ax + aa}{x}$. AS ; donc (en divisant les antécéd. par $\frac{ax + aa}{x}$, & en altern.) a - x. a :: y. AS (N). Ainsi (en

multipliant par ordre les termes des deux proport. M, N)

l'on aura aa - xx. aa :: yy. BQ x AS = $\frac{aayy}{aa - xx}$ (T) ;

mais $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (17); donc (en substituant cette valeur de yy dans l'équation T) on trouvera $BQ \times AS = \frac{aa \times aa - xx \times bb}{aa} = bb$; c'est-à-dire que $BQ \times AS = aa \times aa - xx \times bb$.
C. Q. F. D.

* 62. COR. IX. Si des Foyers F, f , l'on tire des perpendiculaires FH, fh , sur une Tangente à l'Ellipse en un Point quelconque M , différent des extrémités des Axes; le produit de ces perpendiculaires sera égal au carré de la moitié du petit Axe, ou $fh \times FH = CG$.

DÉM. Conservant les mêmes dénominations que ci-dessus; faisant $Gf = GF = e$, & tirant $FC = a$ (n°. 33) pour avoir $ce = aa - bb$; on aura $Of = OP + GP = GF = \frac{aa - xx}{x} + x - e = \frac{aa - cx}{x}$; ainsi $Of = \frac{aa - cx}{x}$, & $OF = OP + GP + GF = \frac{aa - xx}{x} + x + e = \frac{aa + cx}{x}$; donc $OF = \frac{aa + cx}{x}$. L'on a vû encore (61) que $OB = \frac{aa - ax}{x}$, & que $OA = \frac{aa + ax}{x}$.

Remarquons présentement que les Triangles-Rectangles semblables Obf, OBQ , donnent $Of : OQ :: fh : BQ$ (S); pareillement les Triangles-Rectangles semblables OHF, OAS , donnent $OF : OS :: FH : AS$ (T). donc (en multipliant par ordre les termes des deux proportions S, T) l'on aura $Of \times OF : OQ \times OS :: fh \times FH : BQ \times AS$ (K); donc, si l'on démontre que $Of \times OF = OQ \times OS$, il sera démontré que $fh \times FH = BQ \times AS$, & par conséquent $= CG$ (61.).

$aa - xx : aa :: \frac{aa - xx}{xx} + yy$. $OQ \times OS = \frac{aa - xx \times aa - xx \times aa}{xx} + \frac{aayy}{a^2 - xx}$ (T). Or $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (17) $= aa - xx \times \frac{bb}{aa}$; donc (en substituant dans l'équation T, $aa - xx \times \frac{bb}{aa}$ en la place de yy) on aura $OQ \times OS = \frac{aa - xx \times aa - xx \times aa}{xx} + \frac{aa - xx \times \frac{bb}{aa} \times aa}{a^2 - xx} = \frac{aa \times aa - xx \times \frac{bb}{aa} \times aa}{a^2 - xx} = \frac{aa^2 - a^2x^2 + b^2x^2}{xx}$. Donc $OQ \times OS = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{xx} = Of \times OF$ (art. I.); ainsi (en reprenant la proportion K) on verra que $fh \times FH = BQ \times AS = CG$ (61).
C. Q. F. D.

63. COR. X. A deux Points quelconques M, T , (fig. 52.) d'une Ellipse, tirons deux Tangentes Hb, QR ; & abaïssons d'un même Foyer F , les perpendiculaires FH, FR sur ces Tangentes; je dis que ces perpendiculaires croîtront davantage, l'une par rapport à l'autre, que dans la raison des racines quarrées des rayons-vecteurs FM, FT , tirés du Foyer F aux Points de contingence, M, T ; c'est-à-dire, que FH est plus petite, par rapport à FR , que $\sqrt{FM}$ par rapport à $\sqrt{FT}$; il faut donc prouver que $\frac{FH}{FR} < \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$.

DÉM. Abaïssons perpendiculairement de l'autre Foyer f , la Ligne fb sur Hb , & fQ sur QR : après quoi re-

I. Or on a vû que $Of = \frac{aa - cx}{x}$, & $OF = \frac{aa + cx}{x}$;

donc $Of \times OF = \frac{aa - cx}{x} \times \frac{aa + cx}{x} = \frac{a^4 - c^2x^2}{xx}$
 $=$ (en mettant $aa - bb$ au lieu de cx) $\frac{a^4 - a^2xx + bbxx}{xx}$;

par conséquent $Of \times OF = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{xx}$.

II. Cherchons présentement les valeurs analytiques de OQ & de OS ; & pour cela remarquons d'abord qu'à cause du Triangle-Rectangle OPM , $OM = OP + PM = \frac{aa - xx}{x^2} + yy$; donc $OM = \sqrt{\frac{aa - xx}{x^2} + y^2}$. Or, en considérant les Triangles semblables OPM, OBQ , nous aurons $OP : OM :: OB : OQ$ ou (en substituant les valeurs analytiques) $\frac{aa - xx}{x} : \sqrt{\frac{aa - xx}{x^2} + y^2} :: \frac{aa - ax}{x}$.

OQ ; donc (en divisant les antécéd. par $\frac{aa - ax}{x}$ & en altern.)

$a + x : a :: \sqrt{\frac{aa - xx}{x^2} + y^2} : OQ$ (G). Pareillement les Triangles semblables OPM, OAS , donnent $OP : OM :: OA : OS$, ou $\frac{aa - xx}{x} : \sqrt{\frac{aa - xx}{x^2} + y^2} :: \frac{aa + ax}{x}$.

OS ; donc (en divis. les antécéd. par $\frac{aa + ax}{x}$, & en altern.)

$a - x : a :: \sqrt{\frac{aa - xx}{x^2} + y^2} : OS$ (L); ainsi, (en multipliant par ordre les termes des équations G, L,) l'on aura

marquons que les Triangles-Rectangles FHM, fhM , sont semblables; puisque l'Angle $FMH = fMh$ (35); donc $FM : FH :: fM : fh$; ainsi $fh = \frac{FM \times fM}{FM}$; donc $fh \times FH = \frac{FM \times fM}{FM}$. Or (62) $fh \times FH = CG$; ainsi $\frac{FM \times fM}{FM} = CG$; & par conséquent $FH = \frac{CG \times FM}{FM}$.

On verra pareillement que, les Triangles-Rectangles FRT, FQT étant semblables (à cause de l'Angle $FTR = fTQ$ (35)) $FT : FR :: fT : fQ = \frac{FR \times fT}{FT}$; donc $\frac{FR \times fT}{FT} = fQ \times FR = CG$ (62); ainsi $FR = \frac{CG \times fT}{fT}$; & par conséquent $FH : FR :: \frac{CG \times FM}{FM} : \frac{CG \times fT}{fT} :: \frac{FM \times fT}{FM \times fT}$. Ainsi $\frac{FH}{FR} = \frac{FM \times fT}{FM \times fT}$. Mais $\frac{FM \times fT}{FM \times fT} < \frac{FM}{FT}$, car $\frac{FM \times fT}{FM \times fT} = \frac{fT}{FM} < 1$. (en divis. les deux termes par $\frac{FM}{fT}$) : $fT : fM$. Or $fT < fM$; donc aussi $\frac{FM \times fT}{FM \times fT} < \frac{FM}{FT}$; par conséquent $\frac{FH}{FR} < \frac{FM}{FT}$; & en extrayant les Racines quarrées, $\frac{FH}{FR} < \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$. C. Q. F. D.

* 64. COR. II. Si l'on suppose, suivant le Corollaire de la première Proposition des *Principes de Newton*, que la vitelle en M d'une Planète (fig. 51.) qui se meut dans une orbite Elliptique $BMCA$, autour du Foyer F , soit à la vitelle en C , qui est la distance moyenne au Foyer F [a], comme la perpendiculaire FT , abaïssée de ce Foyer sur la Tangente au Point C , est à la perpendiculaire FH , abaïssée du même Foyer sur la Tangente en M ; je dis que la vitelle en M sera à la vitelle en C , comme la racine quarrée de la distance fM de la Planète à l'autre Foyer f ,

[a] FC est la distance moyenne de la Planète au Foyer F ; parce que FC est moyenne proportionnelle Arithmétique entre la plus grande distance FB & la plus petite FA . Car $FC = GA$ (33); or FB, GB ou $GA : GA, FA$; donc $FB : FC : FC, FA$.

est à la racine carrée de la distance FM au Foyer principal F.

DÉM. Soit u la vitesse de la Planète au Point M, & V la vitesse en C; il faut démontrer que $u. V :: \sqrt{FM}.$
 $\sqrt{FM}$. Or l'on a (supp.) $u. V :: FT$ ou $CG. FH$; donc
 $u^2. V^2 :: CG. FH$. Or $CG = fb \times FH$ (62); ainsi $u^2. V^2$
 $:: fb \times FH. FH :: fb. FH$; mais les Triangles-Rectangles
 $f b M$, $F H M$, sont semblables; puisque l'Angle $f M b =$
 l'Angle $F M H$ (35); donc $fb. FH :: f M. F M$; & par consé-
 quent $u^2. V^2 :: f M. F M$; d'où l'on tire $u. V :: \sqrt{f M. F M}$.
 C. Q. F. D.

65. COROL. XII. Le Rayon Vecteur FM est au Sinus de l'Angle FMH :: $\sqrt{FM \times f M. CG}$.

DÉM. Car, en prenant FM pour le Sinus total, ou pour le rayon de l'Arc qui mesure l'Angle FMH, il est évident que FH est le Sinus de l'Angle FMH; ainsi il faut démontrer que $FM. FH :: \sqrt{FM \times f M. CG}$. Or $FM \times FM. FM \times f M :: FM. f M :: FH. fb$ (parce que les Triangles-Rectangles $F H M$, $f b M$, sont semblables) : $FH \times FH. fb \times FH$; donc $FM \times FM. FM \times f M :: FH \times FH. fb \times FH$; or $fb \times FH = CG$ (62); ainsi $FM \times FM. FM \times f M :: FH \times FH. CG$; par conséquent (en tirant les Racines carrées & en altérant) $FM. FH :: \sqrt{FM \times f M. CG}$. C. Q. F. D.

66. PROB. AB, CD, étant données pour les deux Axes d'une Ellipse, en trouver les Foyers & contruire cette Courbe. (fig. 53.)

RÉSOL. I. Faites que les Lignes AB, CD, se coupent par le milieu perpendiculairement en G; & supposant AB > CD, prenez AG ou GB; portez-la de l'extrémité C ou D du petit Axe en F, f, sur le grand Axe; & les Points F, f, ainsi déterminés seront les Foyers de la Courbe à décrire (33, 35 & 36). II

$\frac{c^2 x^2}{aa}$; par conséquent (en mettant dans l'une des deux équations M, $\frac{cx}{a}$ au lieu de d , & $\frac{c^2 x^2}{aa}$ en la place de dd).

cette équation M deviendra $aa + 2cx + \frac{c^2 x^2}{aa} = cc + 2cx + xx + yy$; ou (en ôtant $2cx$ de part & d'autre) $aa + \frac{c^2 x^2}{a^2} = c^2 + x^2 + y^2$; donc (en multipliant par aa)
 $a^4 + c^2 x^2 = a^2 c^2 + a^2 x^2 + a^2 y^2$; ainsi (en mettant dans cette dernière équation, $aa - bb$ en la place de cc) on aura
 $a^4 + a^2 x^2 - b^2 x^2 = a^4 - a^2 b^2 + a^2 x^2 + a^2 y^2$; donc (en ôtant de part & d'autre $a^4 + a^2 x^2$, & transposant $-a^2 b^2$) l'on trouvera $a^2 b^2 - b^2 x^2 = a^2 y^2$, ou $aa - xx \times bb = aa \times yy$; d'où l'on tire $yy. aa - xx :: bb. aa$, ou $bs. AS \times SB :: CG. AG$; ce qui est la propriété caractéristique de l'Ellipse (12 & 14), quand $AG > CG$, ainsi qu'on le suppose ici. Le Point b, & tous les autres Points a, d, m, n, o, &c. trouvés d'une semblable manière, sont donc à une ellipse, dont les Lignes, AB, CD, sont les Axes. C. Q. F. T. & D.

67. LEMME. Si l'on décrit un Cercle ARB (fig. 54.) sur le grand Axe AB d'une Ellipse ACB, & que l'on tire les Ordonnées Ib, Kd, &c. au Cercle, lesquelles rencontrent l'Ellipse aux Points f, g; il arrivera que les Ordonnées fb, gd, &c. de l'Ellipse, seront proportionnelles aux Ordonnées correspondantes Ib, Kd, &c. du Cercle; c'est-à-dire que $fb. Ib :: gd. Kd :: CG. RG$.

DÉM. I. Car $fb. Ab \times bB :: CG. RG$ (12, 14 & 66); or, par la propriété du Cercle, $Ab \times bB = Ib^2$; donc $fb. Ib :: CG. RG$, ou $fb. Ib :: CG. RG$.

II. Par la même raison, $gd. Ad \times dB :: CG. RG$; mais

II. Maintenant, puisque la somme des Lignes, menées des Foyers F, f, à un même Point de l'Ellipse, doit toujours être égale à son grand Axe AB (33). Coupons AB en deux parties quelconques au Point L, pris du côté de G par rapport à F; après quoi du Foyer F avec la partie AL décrivons un Arc en a, a; & de l'autre Foyer f, avec l'autre partie LB, décrivons deux autres Arcs qui coupent les premiers en a, a; je dis que ces deux Points seront à l'Ellipse que l'on cherche, de manière qu'en divisant le grand Axe AB en deux autres parties quelconques aux Points H, K, &c. & opérant comme on vient de faire, on trouvera autant de Points que l'on voudra de la Courbe cherchée, comme la figure le démontre: en joignant donc tous ces Points par une seule Ligne, elle fera l'Ellipse que l'on demande.

DÉM. D'un Point quelconque b, déterminé comme dans la construction, abbaillons la perpendiculaire $bs = y$ sur $AB = 2a$; afin d'avoir $AG = GB = FC = a$, soit de plus $CG = GD = b$; $GS = x$; la différence de Fb à bf = $2d$; ainsi, comme $Fb + bf = 2a$ (33), $Fb = a - d$, & $fb = a + d$ (Inft. 103. Alg. T. 1.); $FG = Gf = c$; ainsi $FS = FG - GS = c - x$, & $fS = Gf + GS = c + x$; & comme le Triangle FGC est Rectangle, $FC = FG + CG$, ou $aa = cc + bb$; d'où l'on tire $cc = aa - bb$. Ceci supposé.

Considérons le Triangle-Rectangle fSb, nous aurons $fb = fS + bS$, ou $aa + 2ad + dd = cc + 2cx + xx + yy$ (M); & le Triangle-Rectangle FSb donnera $Fb = FS + bS$, ou $aa - 2ad + dd = cc - 2cx + xx + yy$ (L); donc (en soustrayant le premier membre de l'équation L, du premier membre de l'équation M, & le second du second) on aura $4ad = 4cx$; ainsi $d = \frac{cx}{a}$, & $dd = \frac{c^2 x^2}{a^2}$. L

$Ad \times dB = Kd^2$; donc $gd. Kd :: CG. RG$; ou $gd. Kd :: CG. RG$. Par conséquent, puisque (art. I.) $fb. Ib :: CG. RG$, on aura $fb. Ib :: gd. Kd$. C. Q. F. D.

68. PROB. Trouver le rapport de l'Aire de l'Ellipse, à celle du Cercle construit sur son grand Axe. (fig. 54.)

RÉSOL. I. Concevons que le demi grand Axe AG soit divisé en un très-grand nombre de parties (on n'en suppose que quatre, pour éviter la confusion); qu'àux Points de division b, d, e, G, on ait élevé des Ordonnées au Cercle ainsi qu'à l'Ellipse, & que de plus l'on ait circonscrit des parallélogrammes à ces deux figures; il est clair (n°. 68. de la Parabole) que le nombre des parallélogrammes, circonscrits au quart de Cercle, peut être tel qu'il diffère de la surface du quart de Cercle, moins que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer: on pourra donc prendre la somme de ces parallélogrammes, pour la surface du quart de Cercle; & par la même raison, celle des parallélogrammes circonscrits au quart d'Ellipse, pour la surface du quart d'Ellipse.

II. Ceci supposé, il est évident que le Rectangle $Ab \times bf. Ab \times bI :: bf. bI$ (à cause de la Base commune Ab); or $bf. bI :: CG. RG$ (67); donc $Ab \times bf. Ab \times bI :: CG. RG$.

De même $bd \times dg. bd \times dK :: dg. dK :: CG. RG$; donc $bd \times dg. bd \times dK :: CG. RG$.

Paraillement de $xh. de \times em :: eh. em :: CG. RG$; donc de $xh. de \times em :: CG. RG$.

Enfin $eG \times CG. eG \times RG :: CG. RG$; & par conséquent l'on a cette suite de rapports égaux $Ab \times bf. Ab \times bI :: bd \times dg. bd \times dK :: de \times eh. de \times em :: eG \times CG. eG \times RG$. Donc (258. Inft. T. 1.) $Ab \times bf + bd \times dg + de \times eh + eG \times CG. Ab \times bI + bd \times dK + de \times em + eG \times RG :: Ab \times bf. Ab \times bI :: CG. RG$; c'est-à-dire (art. I.) la surface du quart d'Ellipse, est à la surface du quart de Cercle comme CG. RG, ou :: $2CG. 2RG = AB$; donc l'Aire entière de l'Ellipse, est à la surface totale du Cercle décrit sur son grand Axe, comme le petit Axe est au grand Axe. C. Q. F. T. & D. Lij

COROL. L'Aire de l'Ellipse est donc égale au produit du petit Axe par l'Aire du Cercle, décrit sur son grand Axe, divisé par ce même grand Axe.

* 69. REMARQ. En construisant un Cercle sur le petit Axe, on démontreroit de même que la surface de l'Ellipse est à l'Aire de ce Cercle, comme le grand Axe est au petit Axe. D'où l'on voit que la quadrature du Cercle donneroit celle de l'Ellipse.

* 70. COR. I. Il suit de là que le demi-Segment elliptique $Adgfa$, est au demi-Segment circulaire $AdKIA$ correspondant, comme l'Aire de l'Ellipse à celle du Cercle construit sur son grand Axe.

Car on démontrera, comme ci-dessus, que tous les Rectangles circonscriptibles au demi-Segment elliptique, seront à ceux du demi-Segment circulaire correspondant, comme le petit Axe est au grand Axe, ou comme l'Aire de l'Ellipse est à celle du Cercle (68).

* 71. COR. II. Par conséquent, si l'on sçavoir trouver la position d'une Ligne droite FQ (fig. 55.) laquelle partant du Foyer F d'une Ellipse, diviserait en raison donnée le Cercle construit sur son grand Axe; en abaissant l'Ordonnée QP , & tirant FM au Point M où QP rencontre l'Ellipse, il arriveroit que FM diviserait aussi l'Aire de l'Ellipse dans la même raison donnée.

Supposons donc que le Triangle circulaire BFQ soit à l'Aire du Cercle, comme 1 est à 5; je dis que le Triligne elliptique BFM est aussi à l'Aire de l'Ellipse, comme 1 est à 5.

DÉM. Soit l'Aire du Cercle $= A$; celle de l'Ellipse $= E$; il faut prouver que si $BFQ. A :: 1. 5$, on aura $BFM. E :: 1. 5$. Pour cela rappelons nous 1°. Que le demi-Segment elliptique BMP est au demi-Segment circulaire $BQP :: E. A$ (70). 2°. Que le Triangle FPM est au Triangle FPQ , (de même Base FP) $:: MP. QP ::$ le petit Axe est au grand Axe (67) $:: E. A$ (68); ainsi $FPM. FPQ :: E. A$.

Nous avons donc ces deux Propositions $BMP. BQP :: E. A$, & $FPM. FPQ :: E. A$, dont les rapports de l'une

sont égaux aux rapports de l'autre; par conséquent en ajoutant par ordre les termes de ces proportions, nous aurons (255. *Inst. T. 2.*) $BMP + FPM. BQP + FPQ :: 2E. 2A :: E. A$; donc, en alternant, $BMP + FPM. E :: BQP + FPQ. A$. Or $BMP + FPM = BFM$, & $BQP + FPQ = BFQ$; donc $BFM. E :: BFQ. A$; mais $BFQ. A :: 1. 5$. (supp.); par conséquent $BFM. E :: 1. 5$. C. Q. F. D.

* 72. REMARQ. La division du Cercle en raison donnée, par une Ligne qui partiroit du Foyer de l'Ellipse, feroit donc le moyen de diviser aussi l'Aire de l'Ellipse en raison donnée, les Lignes de division partant du Foyer; & c'est là un des fameux Problèmes de *Képler*, si utile dans l'Astronomie Physique. Mais, comme il me paroît que la Résolution géométrique dépend de la quadrature du Cercle, ou de la rectification de sa circonférence; voici un moyen que j'ai trouvé d'en approcher tout d'un coup d'assez près, quand la distance FG du Foyer F au centre G (que j'appelle l'*Excentricité*) n'est pas considérable.

* 73. PROB. Diviser l'Aire du Cercle en raison donnée, de manière que les divisions partent d'un Point intérieur F , différent du centre G . (fig. 56.)

RÉSOLUTION très-simple & fort approchée. Après avoir mené, par les Points donnés F, G , un Diamètre AB , commencez par diviser le Cercle dans la raison proposée, en faisant partir les divisions du centre G ; c'est-à-dire que, si la raison est, par exemple, de 1 à 6, vous ferez l'Arc $BQ =$ la sixième partie de la circonférence; & le Secteur BGQ sera évidemment un sixième du Cercle. Tirez ensuite FQ , & par le centre C lui menant la parallèle GM , si vous tracez FM , je dis que le Triligne BFM diviserait le Cercle dans la raison donnée, à très-peu près.

DÉM. Elle se réduit à faire voir que le Triligne BFM , est presque égal au Secteur BGQ . Or ces deux figures ayant la partie commune $BGLM$, il reste à démontrer que le Triangle FGL est presque égal au Triligne LQM ; mais

L iij

cela se conçoit tout d'abord; puisque les Triangles FGM, GQM , étant de même Base GM , & situés entre les mêmes parallèles GM, FQ , (const.) sont égaux; & que par conséquent, en leur ôtant la partie commune GLM , on a le Triangle $FGL =$ le Triangle $LQM =$ presque le Triligne LQM ; parce que la corde QM se confond presque avec son Arc. Donc, &c. C. Q. F. D.

* 74. COR. III. Il suit encore du n°. 68, que la surface d'une Ellipse est égale à celle d'un Cercle, dont le Diamètre est moyen proportionnel géométrique entre le grand Axe & le petit Axe de cette Ellipse.

DÉM. Soit l'Aire de l'Ellipse $= E$; son grand Axe $= A$; l'Aire du Cercle construit sur cet Axe $= C$; le petit Axe $= D$; le Diamètre moyen proportionnel $= M$; l'Aire du Cercle de ce Diamètre $= P$; il s'agit de démontrer que $E = P$. Or (supp.) $A. M :: M. D$; donc $\overline{A. M} :: A. D$ (*Inst. 256. T. 2.*); mais $\overline{A. M} :: C. P$ (*Inst. 306. T. 2.*); donc $C. P :: A. D$; or $A. D :: C. E$ (68); donc $C. P :: C. E$; ainsi, puisque $C = D$, il faut que $E = P$.

* 75. COR. II. Les Aires des Ellipses sont entr'elles, comme les Produits de leurs Axes.

DÉM. Soient E, e , les Aires de deux Ellipses que l'on compare; A, B , les Axes de E ; & a, b , ceux de e . Il faut démontrer que $E. e :: A \times B. a \times b$.

Pour cela, au lieu des Ellipses, prenons les Cercles c & i leur sont égaux, c'est-à-dire, ceux dont les Diamètres sont moyens proportionnels géométriques, l'un entre A & B , & l'autre entre a & b (74). Soit donc E l'Aire du premier Cercle; M son Diamètre, & l'Aire du second Cercle; m son Diamètre. Or l'on a (supp.) $A. M :: M. B$, & $a. m :: m. b$; donc $M^2 = A \times B$ & $m^2 = a \times b$; ainsi $M^2. m^2 :: A \times B. a \times b$; mais $M^2. m^2 :: E. e$ (*Inst. 306. T.*) donc $E. e :: A \times B. a \times b$. C. Q. F. D.

76. DÉF. Un *Ellipsoïde* est un corps engendré par la circonvolution d'une demi-Ellipse ACB autour de l'un de ses Axes AB . (fig. 54.)

* 77. PROB. Trouver la solidité d'un *Ellipsoïde*.

RÉSOL. Puisqu'un Ellipsoïde est engendré par la circonvolution d'une demi-Ellipse au tour de son Axe; le demi-Ellipsoïde sera engendré par la circonvolution du quart d'Ellipse ACG au tour de la moitié AG de cet Axe; de même qu'une demi-Sphère sera engendrée, en faisant tourner le quart de Cercle ARG autour de AG . Si nous pouvons donc déterminer le rapport du demi-Ellipsoïde à la demi-Sphère, qui a pour Diamètre le grand Axe AB de l'Ellipse génératrice ACB ; comme on sçait évaluer la solidité de la Sphère, nous aurons par là celle de l'Ellipsoïde.

Remarquons qu'en faisant tourner le quart d'Ellipse ACG , ainsi que le quart de Cercle ARG autour de la moitié AG du grand Axe, les parallélogrammes circonscrits, tant ceux du quart d'Ellipse que ceux du quart de Cercle, engendreront des cylindres de même hauteur (parce qu'on suppose les divisions Ab, bd, de, eG égales; & qu'ainsi la somme des cylindres circonscrits à la demi-Sphère, pourra être prise pour cette demi-Sphère; & celle des circonscrits au demi-Ellipsoïde, ne sera pas différente de ce demi-Ellipsoïde; comme on l'a démontré, lorsqu'il s'est agi de la solidité du Paraboloidé (n°. 72 de la Parab.).

Cela supposé, on aura le cylindre de AI [4] est au cylindre de Af de même hauteur, comme le Cercle de bl est au Cercle de $bf :: \overline{bl. bf}$ (*Inst. 306. T. 2.*) $:: \overline{RG. CG}$ (67); donc le cylindre de AI est au cylindre de $Af :: \overline{RG. CG}$. Pareillement le cylindre de bK est au cylindre de bg , comme le Cercle de dK est au Cercle de $dg :: \overline{dK. dg} :: \overline{RG. CG}$; ainsi le cylindre de bK est au cylindre de $bg :: \overline{RG. CG}$. On démontrera de la même manière que le cylindre de dm est au cylindre de $db :: \overline{RG. CG}$, & que le cylindre de eR

[4] Je nomme les Rectangles générateurs des cylindres, par deux lettres prises diagonalement.

est au cylindre de $cC :: RG : CG$; par conséquent (258. *Inst. T. 2.*) la somme des cylindres circonscrits à la demi-Sphère, c'est-à-dire, la demi-Sphère (que j'appelle S) est à la somme des cylindres circonscrits au demi-Ellipsoïde, c'est-à-dire, au demi-Ellipsoïde (que j'appelle E) :: $RG : CG$, ou plus simplement $S : E :: RG : CG$; donc

$$2E = \frac{2S \times CG}{RG} \quad (L). \text{ Soit maintenant } a \text{ le Cercle de } RG,$$

& b le Cercle de CG ; on aura $b : a :: CG : RG$ (306. *Inst.*

T. 2.); donc $\frac{b}{a} = \frac{CG}{RG}$; & par conséquent, en substituant

$\frac{b}{a}$ au lieu de $\frac{CG}{RG}$ dans l'équation L, elle deviendra

$2E = \frac{2S \times b}{a}$; mais $2S$ signifie la solidité de la Sphère entière, qui est égale aux deux tiers du cylindre qui lui seroit circonscrit (*Inst. 393. T. 2.*); c'est-à-dire que $2S = a \times \frac{2}{3} AB$; donc $2E = a \times \frac{2AB}{3} \times \frac{b}{a} = \frac{2}{3} AB \times b$; par où l'on voit que la solidité de l'Ellipsoïde entier $2E$ se détermine, en multipliant le Cercle qui a pour rayon la moitié CG du petit Axe de l'Ellipsoïde proposé, par les deux tiers de son grand Axe AB .

* 78. PROP. XII. Après avoir tiré le Diamètre MK (fig. 57.) par le Point M de contingence, si l'on mène un autre Diamètre SF parallèle à la Tangente MO ; & que l'on abaisse les Ordonnées MP , IS , au grand Axe, on trouvera 1°. que le carré $GI =$ le Rectangle $AP \times PB$. 2°. que le carré $GP =$ le Rectangle $AI \times IB$.

DÉM. Soit toujours $AG = GB = a$; $CG = GD =$

transposant $-a^2ss$ l'équation devient $a^2s^2 = a^4 - a^2x^2$; & par conséquent (en divisant par a^2) $s^2 = aa - xx$, ou $GI = AP \times PB$. C. Q. F. 1°. D.

2°. Puisque $ss = aa - xx$, l'on aura (en transposant) $xx = aa - ss$; c'est-à-dire $GP = AI \times IB$. C. Q. F. 2°. D.

79. I. DÉFIN. Quand deux Diamètres MK , SF sont tels, que l'un des deux SF est parallèle à la Tangente MO à l'extrémité M de l'autre Diamètre MK ; ainsi qu'on l'a supposé dans la fig. on les appelle des *Diamètres conjugués*; parce qu'ils sont des fonctions semblables, comme nous le verrons plus bas. Et toute Ligne NH ou VH , (fig. 58.) tirée d'un Point quelconque N ou V de l'Ellipse parallèlement à la Tangente MO ou au Diamètre SF , est dite *Ordonnée* au Diamètre conjugué MK .

79. II. COROL. I. Il suit de la Proposition XII. que le Triangle $GPM =$ le Triangle GIS , ou que $GP \times PM = GI \times IS$. Car on vient de voir que $GI = AP \times PB$, & $GP = AI \times IB$; mais (10) $PM : IS :: AP \times PB : AI \times IB$; donc $PM : IS :: GI : GP$, ou $PM : IS :: GI : GP$; ainsi $GP \times PM = GI \times IS$.

* 80. COROL. II. Par conséquent, si les deux Diamètres conjugués étoient égaux, ou si $GM = GS$, on auroit $GI = GP$ [4] & $GI = GP$, ou $ss = xx$; par conséquent l'équation $ss = aa - xx$ (trouvée n°. 78) deviendrait $xx = aa - xx$; donc $2xx = aa$, ou $xx = \frac{aa}{2} = a \times \frac{a}{2}$; d'où l'on tire $a : x :: x : \frac{a}{2}$; c'est-à-dire que, quand les Diamètres conjugués sont égaux, l'Abcisse GP ou x , correspondante à l'Ordonnée abaissée de l'extré-

[4] Parce que deux Triangles-Rectangles GPM , GIS , égaux en surface & par leur hypothénuse, ont nécessairement tous leurs côtés égaux, chacun à chacun.

b ; $PM = y$; $GP = x$; ainsi $AP = a - x$; $PB = a - x$; & $AP \times PB = aa - xx$; $GI = s$; donc $AI = a + s$; $IB = a - s$; & $AI \times IB = aa - ss$. Il faut donc démontrer que $ss = aa - xx$, & que $xx = aa - ss$.

A cause de GS parallèle à MO (conf.), il est clair que les Triangles-Rectangles MPO , GIS , sont semblables; donc $PO : GI :: PM : IS$, ou $PO : GI :: PM : IS$; mais (Proposition XI. n°. 50 & 51) $PO = \frac{aa - xx}{x}$; ainsi $PO =$

$\frac{aa - xx \times aa - xx}{xx}$; par conséquent la proportion précédente, exprimée analytiquement, devient

$\frac{aa - xx \times aa - xx}{xx} : ss :: yy : IS$ (R); mais (12) $GB : CG :: AI \times IB : IS$, ou $aa : bb :: aa - ss : IS = \frac{aabb - bbs}{aa}$,

& $yy = \frac{aabb - bbs}{aa}$ (17); par conséquent en substituant

les valeurs de yy & de IS dans l'équation R, elle devient $\frac{aa - xx \times aa - xx}{xx} : ss :: \frac{aabb - bbs}{aa} : \frac{aabb - bbs}{aa}$, &

(en divisant les deux derniers termes de cette prop. par $\frac{bb}{aa}$) on aura $\frac{aa - xx \times aa - xx}{xx} : ss :: aa - xx : aa -$

ss ; & (si l'on divise encore les antécédens par $aa - xx$) on trouvera $\frac{aa - xx}{xx} : ss :: 1 : aa - ss$; donc (en fai-

sant le produit des Extrêmes & celui des Moyens)

$\frac{aa - xx \times aa - ss}{xx} = ss$, ou $ssxx = a^4 - a^2x^2 -$

$a^2s^2 + s^2x^2$; donc (en ôtant $ssxx$ de part & d'autre, &

mité de l'un de ces Diamètres sur le grand Axe, est une moyenne proportionnelle entre la moitié & le quart du grand Axe.

* 81. Réciproquement, si l'on prend sur le grand Axe AB , la Ligne GP ou x moyenne proportionnelle entre la moitié & le quart de ce grand Axe, c'est-à-dire, entre a & $\frac{a}{2}$; qu'au Point P l'on tire l'Ordonnée PM ; ensuite le Diamètre MK , la Tangente MO , & le Diamètre SF parallèlement à MO ; je dis que les Diamètres conjugués MK , SF , sont égaux, ou que $GM = GS$.

DÉM. Car, abaissant l'Ordonnée IS , $GI = AP \times PB$

(78) $= aa - xx$ (T); or $a : x :: x : \frac{a}{2}$ (supp.); donc $xx =$

$\frac{aa}{2}$; ainsi, en mettant cette valeur de xx dans l'équation T,

elle deviendra $GI = aa - \frac{aa}{2} = \frac{2aa - aa}{2} = \frac{aa}{2}$

$xx = GP$; donc $GI = GP$ [4]; mais $GI \times IS = GP \times PM$ (79. II.); ainsi $GI : GP :: PM : IS$; donc puisque $GI = GP$, l'on aura $IS = PM$, & par conséquent $GM = GS$, ou $MK = SF$. C. Q. F. D.

* 82. COROL. III. Il est évident que dans une Ellipse il n'y a qu'une paire de Diamètres conjugués égaux. Il est bien vrai qu'il y a sur le grand Axe deux Points, l'un du côté de A & l'autre du côté de B , où l'on peut avoir une Abcisse moyenne proportionnelle entre la moitié & le quart de ce grand Axe; mais, comme les Ordonnées tirées à ces Points détermineroient les mêmes Diamètres, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre (25); c'est une nécessité qu'il n'y ait qu'une paire de Diamètres conjugués égaux dans une même Ellipse.

[4] Remarquez que dans la fig. 57. l'Abcisse GI devoit être la même que GP , quand on suppose les deux Diamètres conjugués égaux: on ne les laisse différentes, qu'afin de faire mieux sentir la force de la Démonstration.

* 83. REMARQ. Pour avoir aisément ces Diamètres; sans chercher une moyenne proportionnelle, on remarquera que l'équation $xx = aa - xx$ (trouvée n°. 80.) est une équation au Cercle, dont les Abcisses ont leur origine au centre; & qui se construit évidemment en faisant l'Abcisse égale à l'Ordonnée: ce qui est d'une exécution très-facile, en abaissant une double Ordonnée de la moitié du quart de Cercle, construit sur le grand Axe de l'Ellipse; & les deux Points, où cette double Ordonnée coupera l'Ellipse, serviront à tirer les deux Diamètres conjugués égaux, puisqu'alors l'Abcisse du Cercle sera égale à son Ordonnée.

Ce procédé est plus court que de chercher une moyenne proportionnelle, mais il n'est pas essentiel.

* 82. COR. IV. Si l'on veut se servir du petit Axe CD, pour avoir les deux Diamètres conjugués égaux, on prendra GQ moyenne proportionnelle entre la moitié & le quart de cet Axe, c'est-à-dire, entre b & $\frac{b}{2}$; on mènera l'Ordonnée QM; par le Point M, où elle rencontrera l'Ellipse, on tirera le Diamètre MK & la Tangente MO, à laquelle on mènera par le centre G, la parallèle SF, & les deux Lignes MK, SF, feront les deux Diamètres conjugués égaux.

DÉM. Du Point M abaissant l'Ordonnée PM, on aura $PM = GQ$, & $\overline{PM} = \overline{GQ}$; donc, puisque $b. GQ :: GQ. \frac{b}{2}$ (const.), $\overline{GQ} = \frac{bb}{2}$, & par conséquent $\overline{PM} = \frac{bb}{2}$. Mais $\overline{PM}. AP \times PB :: \overline{CG}. \overline{GB}$ (12); c'est-à-dire (en substituant les valeurs analytiques) $\frac{bb}{2}. aa - xx :: bb. \frac{bb}{2}$; donc $aa \times \frac{bb}{2} = aa - xx \times bb$; donc (en divisant par bb) $\frac{aa}{2} = aa - xx$; ainsi (en transposant) $xx = aa - \frac{aa}{2}$.

Car $GM. GS :: GS. MT$ (supp.), donc $GM \times MT = \overline{GS}$, or $\overline{GS} = MO \times MH$ (85); donc $GM \times MT = MO \times MH$; ainsi $GM. MH :: MO. MT$; les deux Lignes GT, HO se coupent donc, de manière que les parties de l'une sont réciproques aux parties de l'autre, & par conséquent leurs extrémités O, G, H, T, sont dans la circonférence d'un même Cercle (par la conv. du n°. 287. *Inst. T. 2.*), dont le centre doit se trouver sur l'hypothénuse HO; puisque l'Angle droit OGH étant à la circonférence du Cercle, il faut nécessairement que HO soit un Diamètre.

Pour trouver le centre de ce Cercle, sur le milieu de la corde GT on élèvera une perpendiculaire LR, qui rencontrera l'hypothénuse HO en quelque Point R; parce que l'Angle GMO étant obtus (39), il faut que l'Angle LMR soit aigu; & qu'ainsi MR & LR se rencontrent en quelque Point R, qui sera évidemment le centre du Cercle, qui passe par les quatre Points, O, G, H, T.

* 87. COR. VII. On voit par là ce qu'il faut faire, pour trouver les deux Axes d'une Ellipse, dont SF, MK, sont deux Diamètres conjugués inégaux, donnés de grandeur & de position [a]; c'est de faire le prolongement MT troisième proportionel aux Lignes GM, GS; de tirer au Point M l'indéfinie HMO parallèlement à SF; d'élever la perpendiculaire LR sur le milieu de GT; & du Point R, où elle rencontre l'indéfinie HO, décrire par le Point d'intersection G le Cercle GHTO, qui coupera l'indéfinie HMO aux Points H, O: car, si de ces Points l'on tire au centre G, les Lignes OG, HG, indéfiniment prolongées, les deux Axes se trouveront sur ces Lignes; puisqu'elles se coupent au centre à Angles droits (const.); & que GM étant à GS :: GS. MT (const.) on a $\overline{GS} = GM \times MT =$

[a] On dit que des Lignes sont données de grandeur, quand leur longueur est déterminée; & qu'elles sont données de position, quand l'Angle qu'elles font est donné.

$= \frac{2aa - aa}{2} = \frac{aa}{2}$; ou $xx = a \times \frac{a}{2}$; donc $a. x :: x. \frac{a}{2}$, c'est-à-dire que l'Abcisse GP ou x est alors moyenne proportionnelle entre la moitié & le quart du grand Axe; or, quand cela arrive, l'Ordonnée PM détermine les deux Diamètres conjugués égaux (81).

* 85. COR. V. Prolongeant le petit Axe CD jusqu'à la rencontre H de la Tangente MO, on trouvera que GS, moitié du Diamètre conjugué SF au Diamètre MK, est moyenne proportionnelle entre les Segmens MH, MO, de la Tangente HMO, faits par le Point de contingence M & déterminés par les prolongemens des deux Axes. Il faut donc prouver $MH. GS :: GS. MO$, ou que $\overline{GS} = MO \times MH$.

DÉM. On a déjà observé que les Triangles - Rectangles MPO, GIS, étoient semblables (const.); donc $GS. MO :: GI. PO$ (S); & en tirant l'Ordonnée MQ au petit Axe, on verra encore que les Triangles-Rectangles HQM, GIS sont semblables (à cause de HO parallèle à GS (const.)) donc $GS. MH :: GI. MQ$ (T); ainsi, (en multipliant par ordre les termes des deux proportions, S, T,) on aura $\overline{GS}. MO \times MH :: \overline{GI}. PO \times MQ$ (R); mais $MQ = GP = x$, & $PO = \frac{aa - xx}{x}$ (50 & 51); donc $PO \times MQ = \frac{aa - xx}{x} \times x = aa - xx = a - x \times a - x = AP \times PB$ (78); donc $PO \times MQ = \overline{GI}$. Donc (en reprenant la proportion R) $MO \times MH = \overline{GS}$, ou $MH. GS :: GS. MO$. C. Q. F. D.

* 86. COR. VI. En supposant donc $GM < GS$; & prolongeant GM, jusqu'à ce que le prolongement MT soit troisième proportionel aux deux Lignes GM, GS, les quatre Points O, G, H, T, seront dans la circonférence d'un même Cercle, dont le centre est en quelque Point R de l'hypothénuse HO.

HM $\times$ MO (par la nat. du Cerc.) donc $\overline{GS} = HM \times MO$; ce qui démontre que les Points H, O, sont sur les Axes prolongés (85.)

Pour déterminer la longueur de ces Axes, on observera que la Ligne HMO étant Tangente (79. I.), si l'on abaisse perpendiculairement MP sur OG, & MQ sur HG; & qu'on prenne GB moyenne proportionnelle entre GP & GO, ainsi que GC moyenne proportionnelle entre GQ & GH, les Lignes GB, GC, feront les demi Axes (54 & 58) &c.

* 88. PROP. XIII. Le Rectangle MH $\times$ HK (fig. 58.) des Segmens d'un Diamètre quelconque MK, faits par une Ordonnée quelconque NH à ce Diamètre, est au carré NH de cette Ordonnée, comme le carré du Diamètre MK est au carré de son conjugué FS, ou comme le carré de GM est au carré de GS.

DÉM. Par le Point H, où l'Ordonnée NH coupe le Diamètre MK, tirons QHR parallèlement, & HL perpendiculairement à l'Axe AB; & des Points M, N, abaissons sur ce même Axe les Ordonnées MP, NT que nous prolongerons jusqu'à la rencontre R de QR. Après cela soit $AG = GB = a$; $CG = GD = b$; $GP = x$; $PM = y$; $GL = m$; $HR = LT = s$; ainsi $GT = GL + LT = m + s$; $GM = GK = g$; $GH = z$; $MH = GM - GH = g - z$; $HK = GK + GH = g + z$; ainsi $MH \times HK = g - z \times g + z = gg - zz$; $NH = r$, ou $NH = rr$; $GS = d$, ou $GS = dd$; $AT = AG + GL + LT = a + m + s$, & $TB = GB - GL - LT = a - m - s$; donc $AT \times TB = a + m + s \times a - m - s = aa - mm - ss$; $AP = AG + GP = a + x$; $PB = GB - GP = a - x$; donc $AP \times PB = a + x \times a - x = aa - xx$; &c, supposant la Tangente MO au Point M, $PO = \frac{aa - xx}{x}$ (50 & 51). Il faut donc démontrer que MH

× HK ($gg - zz$). $NH (tt) :: GM (gg) . GS (dd)$.
Les Triangles GPM, GLH, étant semblables, GP (x).

PM (y) :: GL (m). $LH = \frac{my}{x} = TR$; & comme NH est parallèle à MO (const.), les Triangles MPO, HNR, sont aussi semblables; donc PO ($\frac{aa - xx}{x}$). PM (y) ::

HR (s). $RN = \frac{sxy}{aa - xx}$; donc NT = TR - RN =

$$\frac{my}{x} - \frac{sxy}{aa - xx}; \text{ par conséquent } NT = \frac{my}{x} - \frac{sxy}{aa - xx} = \frac{m^2y^2}{xx} - \frac{2msy^2}{aa - xx} + \frac{s^2x^2y^2}{aa - xx}.$$

Mais nous pouvons

trouver une autre valeur de NT; car il a été démontré (10) que AP × PB ($aa - xx$). AT × TB ($aa - mm - 2ms - ss$) :: PM (yy). NT = $\frac{aayy - mmyy - 2msy^2 - s^2y^2}{aa - xx}$;

donc, en comparant les deux valeurs de NT, on trouve l'équation $\frac{m^2y^2}{xx} - \frac{2msy^2}{aa - xx} + \frac{s^2x^2y^2}{aa - xx} =$

$\frac{aayy - mmyy - 2msy^2 - s^2y^2}{aa - xx}$; laquelle devient (en effa-

çant de part & d'autre $\frac{2msy^2}{aa - xx}$, & (divisant par yy) $\frac{m^2}{xx} +$

$$\frac{s^2x^2}{aa - xx} = \frac{aa - mm - ss}{aa - xx}; \text{ \& (en multipliant par } xx) \text{ l'on a } mm + \frac{s^2x^4}{aa - xx} = \frac{a^2x^2 - m^2x^2 - s^2x^2}{aa - xx};$$

donc (en transposant mm , & le réduisant à la même dénom.) on

RHN, IGS) HR. GI :: NH. GS; donc MH × HK. GM :: NH. GS; & par conséquent, en alternant, MH × HK.

NH :: GM. GS, ou $gg - zz$. $tt :: gg . dd$. C. Q. F. D.

* 89. COR. I. L'Ordonnée NH ayant été prise à liberté, il s'ensuit que toute autre Ordonnée est dans le même cas, & qu'ainsi MH × HK. VH :: GM. GS; donc VH = NH, ou VH = NH; c'est-à-dire, qu'une corde quelconque NV, Ordonnée au Diamètre MK, ou parallèle à la Tangente au Sommet de ce Diamètre, est coupée en deux parties égales par ce Diamètre.

* 90. REMARQ. Si l'on avoit voulu démontrer cette vérité directement, par rapport à l'Ordonnée VH; au lieu de l'Ordonnée NT à l'Axe, & du Rectangle correspondant AT × TB, on se feroit servi de l'Ordonnée VE & du Rectangle correspondant AE × EB, ainsi que du Triangle HVQ, dont les côtés comparés avec ceux du Triangle MPO auroient conduit à faire voir que MH × HK. VH :: GM. GS.

* 91. COR. II. Puisque $gg - zz . tt :: gg . dd$, (88) on aura $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$; & par conséquent $z = GH$

diminuant, $z = NH$ augmentera, ou au contraire z augmentant, t diminuera, c'est-à-dire, que les Abcisses d'un Diamètre quelconque de l'Ellipse diminuant, les Ordonnées à ce Diamètre augmenteront, & qu'à la contraire ces mêmes Abcisses augmentant, les Ordonnées diminueront; ainsi qu'on l'a fait voir pour les Axes (18 & 21). on suppose, dans tout ceci, que le centre de la Courbe soit l'origine des Abcisses, & que les Ordonnées soient prises d'un même côté de ce centre.

* 92. COR. III. Si une corde quelconque Ax est coupée en deux parties égales par un Diamètre MK, au Point b, cette corde sera Ordonnée à ce Diamètre; c'est-à-

on trouve $\frac{s^2x^4}{aa - xx} = \frac{a^2x^2 - m^2x^2 - s^2x^2}{aa - xx} = \frac{a^2m^2 - m^2x^2}{aa - xx}$

ainsi (en ôtant ce qui se détruit, & multipliant par $aa - xx$)

$$\frac{s^2x^4}{aa - xx} = \frac{a^2x^2 - s^2x^2 - a^2m^2}{aa - xx}; \text{ donc (en transpo-}$$

sant le terme $-s^2x^2$, & le réduisant à la même dénom.)

$$\frac{s^2x^4 + s^2x^2 - s^2x^2}{aa - xx} = \frac{a^2x^2 - a^2m^2}{aa - xx}, \text{ ou (en ôtant ce qui}$$

se détruit) $\frac{a^2s^2x^2}{aa - xx} = \frac{a^2x^2 - a^2m^2}{aa - xx}$; & (en divis. par aa)

$$\frac{s^2x^2}{aa - xx} = \frac{x^2 - m^2}{aa - xx}; \text{ multipliant ensuite par } aa - xx,$$

l'équation devient $s^2x^2 = x^2 - m^2 \times aa - xx$ & (en di-

visant par xx) s^2 ou HR = $\frac{x^2 - m^2 \times aa - xx}{xx}$.

Revenons présentement aux Triangles semblables GPM, GLH, nous aurons GP (x). GM (g) :: GL (m). GH = $\frac{gm}{x}$. Ainsi GM - GH = $gg - \frac{g^2m}{xx}$. Or GM -

GH = GM - GH × GM + GH = MH × HK; donc

$$MH \times HK = gg - \frac{g^2m}{xx} = \frac{ggxx - g^2m}{xx}. \text{ Or, il est}$$

aisé de se convaincre que MH × HK ($\frac{ggxx - g^2m}{xx}$).

$$HR (\frac{xx - mm \times aa - xx}{xx}) :: GM (gg). GI (aa -$$

xx (78. Propos. XII.); puisque le produit des Extrêmes est égal à celui des Moyens; donc (en alternant) MH × HK.

GM :: HR. GI. Or (à cause des Triangles semblables M

dire, qu'elle sera nécessairement parallèle à la Tangente MO, tirée par l'une ou l'autre extrémité M de ce Diamètre.

DÉM. Si cela n'étoit pas, on pourroit donc tirer par le Point A, parallèlement à la Tangente MO, une Ligne Ay, laquelle tombant au-dessous ou au-dessus de la corde Ax, feroit ordonnée au Diamètre MK (79. I.); & par conséquent coupée par ce Diamètre en deux parties égales au Point r (89); donc Ar = ry; mais Ab = bx (supp.); ainsi Ar. Ab :: ry. bx; donc (en tirant la corde xy) rb ou MK feroit parallèle à xy (par la conv. du n°. 279. Inf. T. 2.); ainsi, en menant des Point x, y, les Ordonnées yr, xb, au Diamètre MK, elles feroient égales; parce que les parallèles entre parallèles sont égales; c'est-à-dire, qu'à des distances différentes du centre, on auroit du même côté des Ordonnées égales; ou, ce qui revient au même que les Abcisses diminuant, les Ordonnées n'augmenteroient pas. Ce qui est absurde (91).

* 93. COR. IV. Il suit de là qu'une Ligne HL (fig. 59.), qui joint les Points de milieu H, L, de deux cordes VB, rn de l'Ellipse, parallèles entr'elles, étant prolongée, s'il en est besoin, passe nécessairement par le centre G de la Courbe; c'est-à-dire, que cette Ligne est un des Diamètres de l'Ellipse.

DÉM. Du centre G tirons par le milieu H de la corde rn, le Diamètre MK; il est évident que rn sera une corde Ordonnée à ce Diamètre (92), & qu'ainsi VB parallèle à rn (supp.) sera aussi une corde Ordonnée au même Diamètre, qui la coupera par conséquent en deux parties égales (89); ainsi le Diamètre, qui passera par le milieu de rn, passera aussi par celui de VB; donc la Ligne HL, qui joint les Points de milieu de ces deux cordes, ayant deux Points communs avec ce Diamètre, n'en sera pas différente. Il faut donc conclure que toute Ligne, qui coupe en deux parties égales deux cordes parallèles d'une Ellipse, est nécessairement un des Diamètres de cette Courbe.

* 94. COR. V. Par un même Point H d'un Diamètre M ij

MK d'une Ellipse, il n'est pas possible de faire passer deux cordes, qui soient coupées en deux parties égales par ce Diamètre. Car, si cela étoit, ces deux cordes seroient Ordonnées au Diamètre MK (92), ou parallèles à la Tangente MO; & l'on auroit du même Point deux parallèles à une même Ligne. Ce qui est absurde.

* 95. COR. VI. Si une corde mn de l'Ellipse, est coupée en deux parties égales par un Diamètre MK; & que par l'une des extrémités M de ce Diamètre, l'on tire une parallèle MO à cette corde; je dis que cette parallèle sera Tangente au Point M.

DEM. Si MO n'étoit pas Tangente dans une pareille circonstance, on pourroit donc au Point M mener une Tangente Mx , laquelle tombant au-dessus ou au-dessous de MO, seroit parallèle à la corde mn ; puisque mn étant coupée en deux parties (supp.) par le Diamètre MK, seroit Ordonnée à ce Diamètre, ou parallèle à la Tangente au Point M (92); donc réciproquement la Tangente Mx seroit parallèle à la corde mn ; mais MO est aussi parallèle à cette même corde (supp.); l'on auroit donc au même Point M, deux Lignes MO, Mx , parallèles à une même Ligne mn . Ce qui est absurde. Il est donc nécessaire qu'une Ligne MO, tirée par l'extrémité d'un Diamètre parallèlement à une corde, coupée en deux parties égales par ce Diamètre, c'est-à-dire, parallèlement à une Ordonnée à ce Diamètre, soit Tangente au Point M.

96. REMARQ. On pouvoit établir cette vérité, de la même manière que l'on a démontré les n°. 19 & 22, en la déduisant immédiatement du n°. 91.

97. COR. VII. En supposant donc que l'on puisse avoir une Ordonnée à un Diamètre, sans le secours de la Tangente à l'une ou l'autre de ses extrémités, il est visible que l'on aura un moyen de tirer une Tangente à un Point quelconque M d'une Ellipse donnée.

Car du Point M tirant le Diamètre MK par le centre G (que je suppose donné ou trouvé), on lui cherchera une Ordonnée quelconque mn (ainsi que nous l'enseignerons

FS : c'est pourquoi les deux Diamètres MK, FS, sont appelés conjugués, parce qu'ils sont des fonctions semblables.

On voit en même tems que la propriété principale de l'Ellipse, relativement à ses Axes (10, 12, 20) s'étend, par le moyen des Propositions 13 & 14, à un Diamètre quelconque. Ainsi tout ce que l'on a déduit en vertu de cette propriété par rapport aux Axes, doit avoir lieu relativement à un Diamètre quelconque.

* 100. COR. I. On en conclura donc 1°. comme au n°. 10, que les carrés des Ordonnées à un Diamètre quelconque d'une Ellipse, sont entr'eux comme les Rectangles des Segmens correspondans.

2°. Comme au n°. 52 que, si l'on tire à un Point Z de l'Ellipse, différent des extrémités des Axes, une Tangente PZ, laquelle rencontre en P le prolongement d'un Diamètre quelconque FS, l'on aura, en tirant l'Ordonnée Zy à ce Diamètre, $Gy \cdot yS :: Fy \cdot yP$; ou, comme au n°. 54, $Gy \cdot GS :: GS \cdot GP$.

Et réciproquement, si après avoir tiré d'un Point P au-dehors de l'Ellipse la Ligne PG au centre, on cherche une troisième proportionnelle aux Lignes GP, GS, & qu'on la porte de G en y sur le demi-Diamètre GS, pour tirer à ce Diamètre l'Ordonnée yZ au Point y , alors la Ligne PZ sera Tangente. Ce que l'on démontrera comme au n°. 53.

* 101. COR. II. En reprenant l'équation $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$ du n°. 91. si l'on suppose que les deux Diamètres SF, MK (fig. 58.), soient égaux, ou que $g = d$; alors l'équation $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$ deviendra $gg - zz = tt$; ce qui

signifie que $MH \times HK = NH$; équation qui ne diffère de celle du Cercle, qu'en ce que dans l'Ellipse les Ordonnées ne sont pas perpendiculaires à leur Diamètre; au lieu qu'elles le sont toujours dans le Cercle. L'on ne sçaurroit donc décider par la seule inspection d'une équation $gg - zz = tt$, si cette équation appartient à l'Ellipse ou au

n°. 105) : après quoi par l'extrémité M, on tirera parallèlement à cette Ordonnée, la Ligne MO qui sera la Tangente cherchée (95). Or, dans la Résolution des Problèmes, que nous donnerons bientôt, nous proposerons un moyen d'avoir une Ordonnée quelconque à un Diamètre, sans le secours des Tangentes.

* 98. PROP. XIV. Après avoir tiré rT parallèlement au Diamètre MK, on trouvera que le Rectangle $FT \times TS$ des Segmens FT, TS, du Diamètre FS, est au carré de l'Ordonnée rT à ce Diamètre, comme le carré de ce Diamètre FS est au carré de son conjugué MK, ou comme le carré de GF est au carré de GM; il faut donc prouver que $FT \times TS. rT :: GF. GM$.

DEM. Il est clair que $GH = rT$, ou $\overline{GH} = \overline{rT}$, & que $rH = TG$, ou que $\overline{rH} = \overline{TG}$. Rappelons-nous donc la Proposition XII. (88), où il a été démontré que $MH \times HK. rH :: GM. GS$ ou $\overline{FG}$; & remarquons que $MH \times HK = \overline{MG} - \overline{GH} \times \overline{MG} + \overline{GH} = \overline{MG} - \overline{GH}$ (à cause de $GK = GM$) $= \overline{MG} - \overline{rT}$ (parce que $GH = rT$); donc $MH \times HK = \overline{MG} - \overline{rT}$. Ainsi la proportion précédente deviendra $\overline{MG} - \overline{rT}. TG :: GM. FG$, ou (en alternant) $\overline{GM}. \overline{GM} - \overline{rT} :: \overline{FG}. TG$; donc (en soustrayant) $\overline{rT}. \overline{GM} :: \overline{FG} - \overline{TG}. FG (M)$; mais $\overline{FG} - \overline{TG} = \overline{FG} - \overline{TG} \times \overline{FG} + \overline{TG} = \overline{FT} \times \overline{TS}$; donc, en mettant dans l'équation M, $FT \times TS$ au lieu de $\overline{FG} - \overline{TG}$, on aura $\overline{rT}. \overline{GM} :: \overline{FT} \times \overline{TS}. \overline{FG}$, ou (en altern.) $FT \times TS. rT :: FG. GM$. C. Q. F. D.

* 99. REMARQ. On trouve donc les mêmes propriétés de l'Ellipse, soit qu'on prenne les Ordonnées au Diamètre MK, soit qu'on prenne les Ordonnées au Diamètre

M iij

Cercle. Il faut absolument avoir recours à la nature des co-Ordonnées [4]. Quand il est droit, cette équation est au Cercle; mais, s'il est oblique, elle appartient à une Ellipse, dont elle représente les deux Diamètres conjugués égaux.

* 102. COR. III. Si l'on cherche une troisième proportionnelle p à deux Diamètres conjugués quelconques MK, FS; cette Ligne p est le Paramètre du Diamètre MK; mais elle seroit le Paramètre du Diamètre FS, si ce Diamètre étoit le premier terme de la proportion, & MK le second. Soit donc $2g. 2d :: 2d. p$, & l'on aura $4gg. 4dd :: 2g. p$

(256. Inf. T. 2.); donc $\frac{gg}{dd} = \frac{2g}{p}$. Par conséquent, en substituant dans l'équation aux Diamètres $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$, trouvée n°. 91. l'expression $\frac{2g}{p}$ au lieu de $\frac{gg}{dd}$, on aura

$gg - zz = \frac{2ggt}{p}$, qui est une équation à l'Ellipse, par rapport au Paramètre de l'un de ses Diamètres MK.

* 103. COROL. IV. D'où il suit, comme aux n°. 28 & 29, que le Rectangle $MH \times HK$ de deux Segmens quelconques d'un Diamètre MK, est au carré NH de l'Ordonnée correspondante, comme ce Diamètre est à son Paramètre. Car,

puisque $gg - zz = \frac{2ggt}{p}$ (102); donc (en multipl. par p)

$gg - zz \times p = 2g \times tt$; ainsi $gg - zz. tt :: 2g. p$, ou $MH \times HK. NH :: MK. p$.

* 104. PROP. Une Ellipse étant donnée, en trouver 1°. Un Diamètre quelconque. 2°. Le Centre. 3°. Les Axes; 4°. Les Foyers; 5°. Les Diamètres conjugués égaux. (fig. 60.).

[4] Quand l'Abcisse & son Ordonnée correspondante sont prises ensemble, elles s'appellent co-Ordonnées; ce qui signifie proprement Ordonnées ensemble. Finalement l'Abcisse GH d'un Diamètre MK (fig. 6.), peut-être prise pour l'Ordonnée rT à son Diamètre conjugué FS, & réciproquement.

RÉSOL. 1°. Tirez, dans cette Ellipse, deux cordes quelconques nB , mI , parallèles entr'elles; par leurs Points de milieu I , S , faites passer la Ligne OP , laquelle sera un Diamètre de la Courbe (93).

2°. Coupez le Diamètre OP en deux parties au Point G , & G en sera le centre (25).

3°. De ce centre G décrivez un Arc de Cercle, qui coupe l'Ellipse en deux Points P , T , menez la corde PT ; divisez là en deux parties égales au Point x ; par ce Point x & par le centre G menez la Ligne AB ; ce sera un des Axes.

Car la corde PT étant coupée en deux parties égales par AB , qui passe par le centre de son Arc, cette corde sera Ordonnée au Diamètre AB (92); & comme elle est perpendiculaire à ce même Diamètre (construction), il s'ensuit que AB est un des Axes: parce qu'il n'y a que les Axes, dont les Ordonnées soient perpendiculaires; puisque toute Ordonnée à un Diamètre est parallèle à la Tangente, menée par une des extrémités de ce Diamètre (79. I.); & qu'il n'y a que les Tangentes aux extrémités des Axes, qui soient perpendiculaires à ces Diamètres. Toute Ligne, menée du centre de l'Ellipse en tout autre Point de son Périmètre, faisant toujours un Angle oblique avec la Tangente en ce Point (39).

4°. Elevez présentement sur le milieu de AB , la perpendiculaire CGD , & cette perpendiculaire sera l'autre Axe de l'Ellipse (9). Si $AB > CD$, la Ligne AB sera le grand Axe, & CD le petit, ou l'Axe conjugué à l'Axe AB ; & au contraire, CD sera le grand Axe & AB le petit, si $CD > AB$.

5°. Après avoir déterminé les deux Axes, on trouvera les Foyers F , f , de cette Courbe, comme au n°. 66;

6°. Pour en avoir les Diamètres conjugués égaux; de l'une des extrémités A du grand Axe, on tirera aux extrémités C , D , du petit, les cordes AC , AD ; & par les Points de milieu r , r , de ces cordes l'on mènera du centre G les deux Lignes GP , GT , lesquelles prolongées en O , K , donneront les deux Diamètres conjugués égaux OP , KT .

Tangente PQ , menée par l'extrémité P du Diamètre OP ; est nécessairement conjugué au Diamètre OP (79. I.) C. Q. F. D.

* 106. PROBL. D'un Point donné P au-dehors d'une Ellipse, mener une Tangente à cette Courbe. (fig. 59.)

RÉSOL. Trouvez le centre G de l'Ellipse (104); & après avoir tiré PG , cherchez une troisième proportionnelle aux deux Lignes GP , GS ; portez la de G en y , où vous tirerez l'Ordonnée YZ (105); après cela menant du Point P au Point Z la Ligne PZ , vous aurez la Tangente cherchée; ce qui est évident (n°. 100), puisque Gy , GS :: GS , GP . (const.).

* 107. REMARQ. En prolongeant YZ de l'autre côté du Diamètre FS , jusqu'à ce qu'elle rencontre l'Ellipse en un autre Point (je supprime ce prolongement, ainsi que la Tangente tirée à son extrémité pour éviter la confusion des Lignes), si l'on tiroit une Ligne du Point P à l'extrémité de ce prolongement, elle seroit Tangente à l'Ellipse par la même raison que ci-dessus (106).

* 108. COROL. Ainsi d'un même Point P donné au-dehors d'une Ellipse, l'on peut toujours mener à cette Courbe deux Tangentes; lesquelles seront égales, quand le Point donné sera sur le prolongement des Axes; mais elles seront inégales en tout autre Point, à cause des Angles droits que font les Ordonnées dans le premier cas, & des Angles obliques qu'elles font dans le second.

* 109. PROBL. Trouver le rapport du Rectangle $LPxT$ (fig. 61.) des deux Axes d'une Ellipse, au parallélogramme $KgON$ de deux de ses Diamètres conjugués quelconques ef , zI ; c'est-à-dire, qu'ayant tiré par les extrémités A , B , C , D , des Axes, les Tangentes LP , Px , xT , TL ; pour avoir le Rectangle $LPxT$ circonscrit à l'Ellipse; & fait la même construction aux extrémités f , e , z , I , de deux Diamètres conjugués quelconques ef , zI , pour avoir le parallélogramme oblique $KgON$, circonscrit à la même Ellipse, on demande dans quel rapport sont ces deux parallélogrammes? Ou, ce qui revient au même, quel est le rapport du quart $BGDx$ du premier au quart $fGIO$ du second.

Car AC étant évidemment égale à AD , & GP tirée sur AD de la même manière que GT l'est sur AC , on en conclura aisément que $GP = GT$. De plus la corde AC étant coupée en deux parties égales par le Diamètre KT (const.), il s'ensuit que AC est une double Ordonnée à ce Diamètre (92). Ainsi, pour démontrer que le Diamètre OP est conjugué au Diamètre KT , il suffit de faire voir que OP est parallèle à AC (79. I.). Or, puisque $GD = CG$, & $Dr = tA$ (const.), GD , CG :: Dr , tA ; donc AC est parallèle à Gt ou OP (conv. du n°. 279. *Inst. T. 2.*) C. Q. F. D.

* 105. PROBL. Ayant un Diamètre quelconque OP d'une Ellipse donnée, trouver la position des Ordonnées à ce Diamètre; tirer une Tangente à l'une ou l'autre de ses extrémités; & trouver son Diamètre conjugué.

RÉSOL. Prenez sur le Périmètre de l'Ellipse, un Point quelconque n , différent des Points O , P ; de ce Point n menez à l'une des extrémités O du Diamètre OP la corde nO ; prolongez la jusqu'à ce que $Ob = nO$, & du Point b menez hb parallèlement à OP ; alors, si du Point n au Point B , où hb rencontre l'Ellipse, vous tirez la corde nB , elle sera Ordonnée au Diamètre OP , & en tirant par l'une ou l'autre extrémité P de ce Diamètre, une parallèle PQ à nB , elle sera Tangente au Point P ; enfin par le centre G , menez une parallèle KT à l'Ordonnée nB , ou à la Tangente PQ , & KT sera le Diamètre conjugué à OP .

DEM. Puisque hb est parallèle à OP (const.), vous aurez nO , Ob :: nS , SB . Or $nO = Ob$ (const.), donc $nS = SB$; la corde nB est donc coupée en deux parties égales par le Diamètre OP , & par conséquent elle est Ordonnée à ce Diamètre; c'est-à-dire, parallèle à la Tangente que l'on tireroit par l'une ou l'autre extrémité de ce Diamètre (92).

2°. La Ligne PQ étant parallèle à la corde nB Ordonnée au Diamètre OP , c'est-à-dire, coupée en deux parties égales par ce Diamètre (const.) est nécessairement Tangente au Point P (95).

3°. Pareillement le Diamètre KT , étant parallèle à la

RÉSOL. Joignons l'extrémité I d'un des Diamètres conjugués à l'extrémité B du grand Axe la plus proche; tirons par I la Ligne bQ parallèlement au grand Axe, & par B la Ligne Mr parallèle au Diamètre zI . Cela suppose.

Il est clair 1°. que le Triangle GIB est la moitié du Rectangle $BGbQ$; ces deux figures ayant même base GB , & étant entre les mêmes parallèles GB , bQ . Par la même raison le Triangle GIB est la moitié du Parallélogramme $GMrI$; ainsi $BGbQ = GMrI$.

2°. Il est encore évident que deux grandeurs sont égales, quand elles sont moyennes proportionnelles entre les mêmes grandeurs [a] par conséquent, si l'on démontre que les parallélogrammes $BGDx$, $fGIO$, sont l'un & l'autre moyens proportionnels entre les mêmes grandeurs, on sera convaincu que ces deux parallélogrammes sont égaux.

Remarquons donc que le parallélogramme $BGbQ$ ou $GMrI$ (Art. 1.) est au parallélogramme $BGDx$ de même base, :: Gb , GD : mais, en prolongeant GD jusqu'à la rencontre de la Tangente OV ; alors, à cause de l'Ordonnée Ib , tirée du Point de contingence I sur le petit Axe, Ch , GD :: GD , GV (58) :: $GD \times Dx$, $GV \times Dx$; c'est-à-dire, :: $BGDx$, $GVyS$; (parce qu'en prenant GV pour base du parallélogramme $GVyS$, la Perpendiculaire Dx en est la hauteur); ainsi $BGbQ$ ou $GMrI$, $BGDx$:: $BGDx$, $GVyS$.

Pareillement, & précisément par les mêmes raisons, $GMrI$, $fGIO$:: GM , Gf :: Gf , GS (54 & 100) :: $Gf \times Oa$, $GS \times Oa$; ainsi $GMrI$, $fGIO$:: $Gf \times Oa$, $GS \times Oa$. Or $Gf \times Oa = fGIO$, & $GS \times Oa = GVyS$; parce que la Perpendiculaire Oa est la hauteur commune de ces parallélogrammes; donc $GMrI$, $fGIO$:: $fGIO$, $GVyS$. Ainsi

[a] Soient x , z , toutes deux moyennes proportionnelles entre a & b ; je dis que $z = x$: car puisque $a, x :: x, b$; donc $xx = ab$; de même ayant aussi (supp.) $a, z :: z, b$, l'on aura encore $zz = ab$; donc $z = xx$, & par conséquent $z = x$.

les deux parallélogrammes BGDx, xGIO, sont l'un & l'autre moyens proportionnels entre les deux mêmes grandeurs GMxI, GVyS; & par conséquent, ils sont égaux (art. 2.); donc le quadruple LPxT du premier, est égal au quadruple KgON du second; il faut donc conclure que le rapport du Rectangle des deux Axes, circonscrit à l'Ellipse, au parallélogramme de deux Diamètres quelconques conjugués, circonscrit à la même Ellipse, est un rapport d'égalité.

Usage de l'Ellipse dans la Dioptrique, ou dans la construction des Verres brûlans par réfraction, & d'autres instrumens, tels que les Lunettes qui servent à perfectionner la vue, ou à en corriger les défauts.

110. **L**A Dioptrique est une Science, où l'on apprend les loix de la Réfraction. Il y a déjà long-tems que l'expérience a démontré, qu'un rayon de lumière passant de l'air dans l'eau, dans le verre, ou en général, d'un milieu [a] plus rare dans un milieu plus dense, changeoit de route ou de direction, à l'instant de son passage de l'un de ces milieux dans quelqu'un des autres. Un rayon de lumière AB (fig. 62.) qui passe obliquement en Ligne droite de l'air dans l'eau, ne suit pas à l'instant de son passage au Point B, le prolongement BL de la droite AB, mais il se

[a] On entend par Milieu, en Physique, tout espace que les corps peuvent traverser dans leurs mouvemens; ainsi l'Air, l'Eau, le Verre, &c. sont des Milieux de la lumière. Et l'on dit qu'un milieu est plus rare qu'un autre, quand le premier a moins de substance ou pèse moins que le second, l'un & l'autre ayant même volume. Ainsi un ponce cube d'air pèsant moins qu'un ponce cube d'eau, on dit que l'air est un milieu plus rare que l'eau. Pareillement le mercure ou le vit-argente est plus dense que l'eau; parce que le premier pèse plus que le second, sous un même volume.

rapport de réfraction, celui qui règne entre le Sinus de l'Angle d'inclinaison & le Sinus de l'Angle de réfraction. On a trouvé par expérience que dans le passage de l'air dans le verre, ce rapport étoit presque celui de 3 à 2; & dans le passage du verre dans l'Air, qu'il ne différoit guères du rapport de 2 à 3.

De manière donc qu'en observant par expérience, le rapport du Sinus d'un Angle d'inclinaison quelconque à celui de son Angle de réfraction, on connoitra, sans autre travail & par une simple règle de trois, la valeur de l'Angle de réfraction correspondant à une inclinaison quelconque. Supposons, par exemple, qu'un rayon de lumière soit tel, qu'en passant obliquement de l'air dans le verre, le Sinus de son Angle d'inclinaison soit au Sinus de son Angle de réfraction, comme 3 est à 2, ainsi que l'expérience le donne à très-peu près; ce rapport étant constant, suivant la découverte & la démonstration de M. Descartes (111), si l'on veut que l'Angle d'inclinaison soit de 20° , son Sinus que j'appelle a fera connu par les tables; ainsi, pour avoir le Sinus x de son Angle de réfraction, on fera cette proportion $3. 2 :: a. x$; donc $x = \frac{2a}{3}$; lequel Sinus trouvé dans les tables vous fera connoître la valeur de l'Angle de réfraction; & par conséquent la route que doit tenir le rayon après la réfraction.

113. REMARQ. II. Il n'y a que les rayons tombans obliquement sur une surface réfringente, qui soient soumis à la loi de la réfraction, l'expérience démontrant constamment qu'un rayon perpendiculaire ne se réfracte pas.

114. M. Descartes ayant trouvé par raisonnement & par expérience, que le rapport de Réfraction étoit un rapport constant, il n'en fallut pas davantage à ce profond Géomètre, à ce Législateur dans les hautes sciences, pour déterminer la forme ou la courbure la plus avantageuse que l'on devoit donner aux verres, destinés à corriger les défauts ou à augmenter la puissance de la vue; car voici comment il raisonna.

rompt dans une Ligne droite comme BG, en s'approchant de la perpendiculaire CBD, élevée à son Point B d'incidence sur l'eau; & au contraire, en passant de l'eau dans l'air, il se rompt en s'écartant de la perpendiculaire. Or c'est ce changement de direction que l'on appelle, Réfraction, du latin *refrangere* rompre; parce que effectivement le rayon AB paroît rompu ou plié en B.

111. Après cette observation, on chercha à s'assurer si cette Réfraction ne suivoit pas une loi, quelle que fût l'inclinaison du rayon AB ou SB à la perpendiculaire ou à l'Axe de réfraction CBD; & cette recherche valut à M. Descartes l'admirable découverte, avec laquelle son sublime génie s'éleva à des inventions, que les races présentes & futures ne pourroient méconnoître sans avilir leur raison [a]. Car ABC étant l'Angle d'inclinaison du rayon AB; l'Angle SBC celui du rayon SB; DBG l'angle de réfraction du rayon AB, & DBI celui du rayon SB, il trouva, en décrivant un Cercle du Point B avec un rayon quelconque AB ou SB, que le Sinus SR de l'Angle d'inclinaison SBC est toujours au Sinus MI de son Angle de réfraction DBI, comme le Sinus AT d'un autre Angle quelconque d'inclinaison ABC est au Sinus GP de son Angle de réfraction DBG, ou que SR. MI :: AT. GP.

Vous en verrez la démonstration, en lisant le Discours ou le Chapitre II. de sa Dioptrique, & vous y admirerez sans doute l'ingénieuse & élégante théorie qui l'a conduit à cette belle invention; confirmée d'ailleurs par des expériences mille fois répétées par des mains très-sçavantes & très-industrieuses.

112. REMARQ. I. Quand le rayon AB passe de l'air dans l'eau; il est clair que l'Angle d'inclinaison ABC, ou son égal DBL est plus grand que son Angle de réfraction DBG; mais au contraire, si le rayon GB passe de l'eau dans l'air, l'Angle d'inclinaison DBG est plus petit que l'Angle de réfraction ABC. Nous appellerons dans la suite

[a] Voy. la Dissertation du n°. 123.

Quand des yeux n'apperçoivent pas bien distinctement à 30 pieds de distance, un objet qu'il leur est aisé de bien discerner à 10 pieds, c'est que les yeux ne sont pas disposés pour recevoir les rayons, qui viennent de la première distance, de la même manière qu'ils le sont pour ceux qui partent de la seconde [a]: si je puis donc trouver un instrument, qui fasse que les premiers rayons entrent dans les yeux, comme s'ils venoient de la distance de 10 pieds; l'objet éloigné de 30 pieds sera distingué aussi parfaitement, que s'il n'étoit qu'à dix.

115. Pour y parvenir, supposons l'Ellipse AMB (fig. 63.) dont le grand Axe AB, & la distance Ff des Foyers foyent dans le Rapport de la Réfraction; c'est-à-dire, que AB. Ff :: 3. 2 (112) [b]; je dis que tous les rayons DM parallèles à l'Axe AB, en passant de l'air dans le solide de verre, engendré par la circonvolution de cette Ellipse autour de son grand Axe, seront nécessairement déterminés par la réfraction, à concourir au Foyer f le plus éloigné de l'objet d'où viennent les rayons.

DEM. Après avoir tiré la perpendiculaire LMH à la Courbe, ou à sa Tangente au Point M; & avoir pris DM = Mf, pour décrire du Point M, avec le rayon Mf ou DM, la circonférence fDT, il est évident que la perpendiculaire DL est le Sinus de l'Angle d'inclinaison DML, & que la perpendiculaire fH est le Sinus de l'Angle fMH. par conséquent, si nous démontrons que les Sinus DL, fH, sont dans le rapport de la Réfraction; DL étant le Sinus de l'Angle d'inclinaison DML, fH sera nécessairement celui de son Angle de réfraction; ainsi fMH sera l'Angle de réfraction de l'Angle d'inclinaison DML, c'est-à-dire, que le rayon DM fera, en vertu de la réfraction au Point M, dirigé au Foyer f.

Or il est certain 1°. par la loi de la réfraction, que le

[a] On suppose dans tout ceci, que l'insuffisance de l'œil ne vienne pas du défaut de lumière de la part de l'objet.

[b] Voyez n°. 117. comment se construit une parabole Elliptique.

rayon DM ne suivra point, à son passage de l'air dans le verre, le prolongement MR de la route DM; mais qu'il se rompra en s'approchant de la perpendiculaire LH (110); & qu'ainsi il passera entre cette perpendiculaire & le prolongement MR. 2°. En se dirigeant au Foyer f , le Sinus de l'Angle d'inclinaison & celui de l'Angle de réfraction seront précisément comme ils doivent être, suivant la loi de la réfraction; c'est-à-dire, que $DL.fH :: 3.2$. puisque (41) $DL.fH :: AB.Ff$; or $AB.Ff :: 3.2$ (const.); donc $DL.fH :: 3.2$.

3°. Si le rayon DM se détournait dans une autre Ligne que Mf , il seroit avec la perpendiculaire LH à la Courbe, un Angle plus ou moins grand que l'Angle fMH ; & par conséquent le Sinus de cet Angle seroit plus ou moins grand que le Sinus fH de l'Angle fMH . Donc DL ne pourroit pas être à cet autre Sinus :: 3.2. Ainsi, pour suivre la loi de la réfraction, le rayon DM ne peut pas se détourner, à son passage de l'air dans le verre, sans se diriger au Foyer f .

116. COROL. Le Point M ayant été pris à discrétion, il est clair que tous les rayons, qui rencontreront l'Ellipsoïde de verre parallèlement à son Axe AB, se réuniront tous au Foyer f au-dedans de ce solide. Donc, si du Point f & avec un rayon quelconque, on décrit un Arc de Cercle MSP, qui passe entre A & G, on aura une portion PAMSP de l'Ellipse génératrice, laquelle tournant au tour de son Axe engendrera un Solide, qui aura la propriété de réunir, en un seul Point f dans l'air, tous les rayons parallèles à son Axe, par lesquels il sera traversé, lorsqu'ils passeront de l'air dans sa substance.

Car le rayon OC, à son passage C de l'air dans le verre, quittera sa direction Cx, pour suivre celle qui conduit au Foyer f (115); donc, le Point f étant le centre de l'Arc MSP, cette dernière direction sera dans un des rayons de cet Arc; mais tout rayon de Cercle est perpendiculaire à sa circonférence; par conséquent le rayon OC, après avoir été rompu en C, tombera perpendiculairement sur l'Arc de

de Cercle MSP. Ainsi, en sortant du verre dans l'air, il ne sera point détourné de la direction Cf (parce qu'un rayon qui passe perpendiculairement d'un milieu dans un autre plus rare ou plus dense, n'y éprouve aucune réfraction (113)); donc le rayon OC ou tout autre semblable, qui s'est plié en entrant dans le verre proposé, pour se diriger au Foyer f , y sera encore dirigé à sa sortie du verre dans l'air. L'on a donc, par cette construction, un verre brûlant très-parfait.

117. REMARQ. I. Pour faire que l'Axe AB d'une Ellipse & la distance Ff de ses Foyers soient dans le rapport de la Réfraction, ou que AB soit à Ff :: 3.2. il n'y a qu'à diviser AB en trois parties égales; faire AF & Bf égales chacune à la moitié de l'une de ces parties; & alors AB sera évidemment à Ff :: 3.2. Or, ayant le grand Axe d'une Ellipse & ses Foyers, il est aisé de construire cette Courbe (Art. 2. du n°. 66.). Donc, &c.

118. REMARQ. II. L'expérience démontre que, plus un verre est épais, moins il est transparent (toutes choses d'ailleurs égales); il paroît donc que des verres brûlants par réfraction, auront cette propriété à un degré d'autant plus parfait, qu'ils seront plus minces. C'est une observation à laquelle les ouvriers qui travaillent ces sortes de verres, doivent se rendre extrêmement attentifs.

119. Réciproquement, tous les rayons qui viendront du Foyer f dans l'air, traverser le verre PAMSP, en sortiront parallèles à son Axe AB.

DEM. Le rayon fM , dans son passage de l'Air dans le Verre, rencontrant perpendiculairement la surface circulaire MSP, ne s'y réfractera pas (113); il ne subira donc la loi de la réfraction, qu'au sortir du Verre dans l'Air, du côté de D, pour s'écarter de la Perpendiculaire (110); en sorte que $DL.fH :: 3.2$ (112); or $AB.Ff :: 3.2$ (const.); donc $DL.fH :: AB.Ff$. Mais, quand cela arrive, DM est nécessairement parallèle à l'Axe AB (par la conv. du n°. 41.) donc, &c.

120. COR. Ainsi les rayons d'un corps lumineux, placé

N

au Foyer f , seroient propagés, au moyen d'un pareil Verre, à une très-grande distance avec assez de force, pour y faire discerner les objets.

121. Nous venons de considérer les rayons DM, OC, &c. (fig. 63.) parallèles à l'Axe AB de l'Ellipsoïde, dans le cas où ils rencontrent la convexité de ce solide; supposons maintenant qu'ils en rencontrent la concavité PAM (fig. 64.) toujours parallèlement à l'Axe BA. Je dis qu'en décrivant du Foyer f , avec un rayon un peu plus grand que fA , un Arc de Cercle OST; si l'on mène les Lignes OP, TM, &c. dirigées au Foyer f , la fig. OPAMTS engendrera, par sa circonvolution autour de l'Axe AB, un solide qui sera que les rayons venans parallèlement à son Axe du côté de f , seront rendus divergens, après avoir traversé un Verre de cette forme, comme s'ils partoient tous du même Point f .

DEM. Reprenant la fig. 63. il est certain, suivant la loi de la réfraction, que le rayon RM, parallèle à BA, passant de l'Air dans le Verre, quittera sa direction MD, pour se rompre dans une Ligne MV, en s'approchant de la Perpendiculaire HML à l'Ellipse (110) [4]; c'est-à-dire qu'il s'écartera autant de sa première direction en allant de R vers D, qu'il s'en est écarté, en venant du côté de D vers R (puisque l'on suppose que c'est le même milieu); ainsi l'écartement ou l'Angle DMV = l'écartement ou l'Angle RMf; mais $fMD + RMf =$ deux Angles droits; donc $fMD + DMV =$ aussi deux Angles droits; la Ligne MV est donc dans la même Ligne droite que fM (n°. 43. Inst. T. 1.); par conséquent les rayons RM, qui rencontrent la concavité de ce Verre Ellipsoïde parallèlement à son Axe, s'écarteront de leur direction en y entrant, ou deviendront divergens comme s'ils partoient du Foyer f .

Ainsi (fig. 64.) le rayon HM, en passant de l'Air dans le Verre OPAMTS, prendra, à l'instant de son passage par la concavité de ce solide, la direction MT tendante au Foyer f , centre de l'Arc de Cercle OST; le rayon MT tombera donc

[4] On suppose que l'on ait supprimé dans la fig. 63. l'Arc MSP, & que le rayon RM rencontre tout d'abord la Concavité elliptique.

perpendiculairement sur l'Arc de Cercle OST, & n'y éprouvera aucune réfraction (113). Par conséquent il sortira du Verre dans l'Air, en suivant une direction TK, laquelle prolongée du côté de M tend directement au Foyer f ; & c'est tout C. Q. F. D.

122. COR. Par conséquent, si un œil est disposé pour voir d'une manière distincte un Point de quelque objet placé en f ; & qu'il ne le voit pas pour le distinguer à une très-grande distance; comme les rayons, qui viennent d'un Point fort éloigné, sont sensiblement parallèles (note du n°. 158. de la Parab.), en mettant entre cet œil & l'objet proposé, un Verre tel que OPAMTS, dont la concavité Elliptique PAM soit tournée du côté de l'objet, & la convexité circulaire OST du côté de l'œil, & qui outre cela ait son Foyer en f , on fera que les rayons, qui viendront de ce Point fort éloigné, entreront dans l'œil comme s'ils partoient du Foyer f ; & qu'ainsi l'on aura remédié à cet égard au défaut de l'œil proposé; c'est-à-dire que l'on aura une Lunette excellente pour ceux qui ont la vue courte.

REM. Voyez l'admirable Dioptrique de M. Descartes. Moyennant ce que je viens de dire, & le Coroll. VII. de la Propos. VI. de l'Ellipse n°. 41. que j'ai expliqué fort au long, vous ferez en état de comprendre toute la doctrine Géométrique, nécessaire à l'intelligence de ses belles inventions, dans l'art de perfectionner le Télescope & le Microscope. Ne manquez pas d'y joindre ce que j'en explique à l'Article de l'Hyperbole, où il s'agit de montrer l'usage de cette Courbe dans la construction des Lunettes, & vous pourrez entamer la lecture de cet Ouvrage de M. Descartes. Quoiqu'il ait découvert le premier la vraie loi de la réfraction; que sa Dioptrique soit la première production en ce genre, fondée sur des principes incontestables; & qu'ainsi l'on ne doit pas s'attendre qu'une Science à sa naissance fût portée bien loin, il me paroît pourtant que c'est le plus profond & le plus sublime Ouvrage qui ait été publié sur cette matière. Je dirois presque qu'il a le singulier mérite, de l'avoir à la fois inventée & finie.

N ij

Dissertation sur la Découverte de la Loi de la Réfraction.

123. L'opinion que l'on a de la capacité d'un peuple, est sans doute ce qui contribue le plus à le rendre respectable. La capacité ne peut mieux s'établir que par des découvertes ingénieuses, appliquées aux besoins de la Société; il n'est donc pas indifférent de connoître le véritable Auteur d'une invention.

La Dioptrique de M. Descartes commença à devenir publique en 1637. [a] : Jamais on n'avait rien vu en ce genre, d'aussi solide dans les principes, ni d'aussi ingénieux dans ses conséquences. Cette matière s'étoit présentée à lui sous un point de vue si lumineux, qu'il en vit presque les limites dans le tems qu'il en jettoit les fondemens. Le Sçavant y est éclairé, l'Artiste y est conduit, & tout le genre humain servi.

Son édifice est fondé sur cette Proposition, que nous avons déjà rapportée : *quelque soit l'Angle d'inclinaison ou d'incidence, lorsqu'un rayon de lumière passe d'un milieu dans un autre plus ou moins dense, le rapport du Sinus de son Angle d'inclinaison à celui de son Angle de réfraction est toujours le même ; c'est-à-dire, que le Sinus d'un Angle d'inclinaison est au Sinus de son Angle de réfraction, comme le Sinus de tout autre Angle d'inclinaison quelconque est au Sinus de son Angle de réfraction.*

M. Descartes arrive à ce Théorème par une théorie fort ingénieuse, très-simple, & soutenue par la Géométrie. L'expérience la confirma, & tout à coup l'art d'avoir des yeux plus parfaits fut réduit en méthode infallible ; méthode dont le Philosophe François étoit incontestablement le père, si l'envie ne contestoit pas tout.

J'ai peu de chose à dire ici contre les Auteurs qui ont avancé, que *peut-être* il en étoit redevable à *Willebrord Snellius*, Hollandois, Contemporain de M. Descartes. Des doutes

[a] Vie de M. Descartes par Baillet.

coup de Manuscrits de sa composition sur la nature de la lumière, dans lesquels se trouvoit une Loi de la Réfraction, fort approchante de celle publiée par M. Descartes en 1637. que lui M. Huyghens a vu cette Loi énoncée dans lesdits Manuscrits ; & que *peut-être* M. Descartes en a tiré la sienne.

Mais, si M. Descartes a vu Snellius, Snellius a vu M. Descartes. Ils se sont entendus réciproquement ; & jusques-là il est encore impossible de décider lequel des deux est le déprédateur. On ne dit point en quel tems précisément ces Philosophes se virent [a], ni si la Découverte en question étoit faite en ce tems de part ou d'autre. Ce qu'il y a de bien sûr, c'est qu'on en entendit parler pour la première fois en 1637. que M. Descartes la publia comme de lui dans sa Dioptrique ; que personne ne la revendiqua ; que 24 ou 25 ans après, Vossius ayant mis au jour son *Traité de la Lumière*, il y avoue qu'il étoit redevable à Snellius de plusieurs belles observations, entre lesquelles on trouve celle, que l'on prétend être la même que la proposition de M. Descartes ; que Vossius n'objecta point cette déprédation au Philosophe François, quoiqu'il se fût déclaré contre sa Dioptrique, & qu'il eût actuellement des démêlés avec lui sur ce sujet ; que Messieurs Leibnitz & Bernoulli ne parlent du Théorème de Snellius que sur la foi de Vossius ; & qu'enfin l'on ignore où se trouvent imprimés les Livres d'Optique de Snellius, ou même s'ils sont imprimés.

Je demande présentement, si la Découverte de Snellius avoir été publiée en 1637. & qu'on l'eût retrouvée dans un Ouvrage de M. Descartes, imprimé pour la première fois en 1652. [b] ou devenu alors d'une notoriété publique, n'est-il pas évident que, suivant toutes les voyes légitimes de juger, l'honneur de la Découverte seroit & devoit être attribué à Snellius ? donc, puisque M. Descartes est le pre-

[a] Snellius est mort en 1626. Baillet, Vie de Descartes.

[b] C'est la date de la première édition du Livre De naturâ lucis de Vossius.

peuvent servir la malignité, mais ils ne sçauraient convaincre la raison. Arrêtons-nous à ceux qui ont affirmé sans restriction, que M. Descartes avoit publié le premier la Loi de la réfraction ; sans parler de Snellius, dans les Manuscrits duquel il avoit, dit-on, remarqué cette découverte.

C'est sur ce pied que s'en est expliqué M. Wolf dans sa Dioptrique. M. Chambers dans son Dictionnaire Encyclopédique, écrit en Anglois, l'a très-exactement répété au mot *Réfraction* ; & M. de Voltaire l'a supposé, apparemment pour mieux chanter M. Newton. Citons les paroles du Poète François, qu'on pourra lire aux pages 91. & 92. de ses *Éléments de la Philosophie de Newton*, première édition. « Snellius trouva le premier la proportion constante, suivant laquelle les rayons se rompent dans les différens milieux. On en fit honneur à Descartes. On attribue toujours au Philosophe le plus accrédité les Découvertes qu'il rend publiques. Il profite des travaux obscurs d'autrui, & il augmente sa gloire de leurs recherches. La découverte de Snellius étoit alors un chef-d'œuvre de sagacité, &c. »

Une accusation de cette nature méritoit, pour le moins, que l'on s'appuyât de quelque autorité ; mais, comme on n'en produit aucune, nous nous croyons obligés envers le public de faire ici les frais de cette recherche.

Il n'est point question de sçavoir si Snellius a pu découvrir, ou même, s'il a découvert le premier la Loi de la Réfraction. On est dans l'impossibilité de prouver un pareil fait. Combien de découvertes qui n'ont jamais été publiées, ou qui l'ont été trop tard ! il s'agit uniquement de démontrer que M. Descartes a volé à Snellius sa découverte, ou qu'il ne la lui a pas volée, exposons les faits.

M. Huyghens dit, dans sa Dioptrique, que M. Descartes, en passant en Hollande, vit Snellius [a], qui avoit beau-

[a] Ce fait me paroît douteux. On sçait avec quel scrupule & quelle diffusion M. Baillet a détaillé les circonstances de la Vie de M. Descartes ; néanmoins on n'y trouve nulle part l'entrevue de ces deux Philosophes.

mier en date, l'équité naturelle exige qu'on ne le trouble point dans sa possession, par des *peut-être* moyennant lesquels il seroit impossible, de jamais compter sur aucune propriété.

Mais, il y a plus. Les bons esprits apperçoivent par la méthode de procéder dans une recherche, si l'on a dû arriver à quelque production qui y tenoit. Or, de la manière dont M. Descartes entre en matière & traite son sujet, on pressent qu'il en va naître des coups de lumière ; au lieu que Snellius, de l'aveu même des adversaires de M. Descartes, ne fonde sa Découverte que sur des expériences [a], dont l'extrême délicatesse pouvoit faire soupçonner la solidité. Je n'en produirai qu'un exemple fort connu à ceux qui sçavent un peu les *Éléments de Géométrie*.

Un homme dit qu'il a une méthode, fondée sur l'expérience, d'inscrire un Polygone régulier de 15 côtés dans un cercle quelconque ; que cette méthode lui réussit toujours ; & que, pour s'en convaincre, on n'a qu'à en faire l'épreuve. Mais, à moins qu'on ne soit fort stilé dans ces opérations, on sçait que sur dix tentatives, souvent il n'y en a pas une qui réponde juste à toute rigueur. Ainsi, à ne s'en tenir qu'à l'expérience, il y a pour le moins 9 degrés de certitude contre 1, que la méthode proposée n'est pas exacte.

Je ne vois qu'un moyen de lever ici tous les doutes, de rassurer la main du Praticien, & de le faire revenir constamment sur ses pas ; c'est d'éclairer ou de convaincre son entendement par une Démonstration bien complète. Alors, quand il ne réussira pas, il n'y aura plus moyen de s'en prendre à la méthode, mais uniquement à la manière de s'en servir. Or c'est précisément ce qu'a fait M. Descartes dans la question que nous traitons. Sa proposition est prouvée indépendamment de toute expérience. Ainsi il a encore, à cet égard, la supériorité de génie sur Snellius.

[a] Quod profectò experientiâ ipsi notum erat. Huyghen: in Dioptricâ.

Le Lecteur sera peut-être inquiet de sçavoir, comment on démontre que la proposition de *Snellius* est, à peu de chose près, la même que celle de *M. Descartes*. Soit donc NQTZ (fig. L. PL. 5.) le profil d'un vase rectangulaire rempli d'eau. Au fond de ce vase sont les objets C, T, d'où l'on a élevé les Perpendiculaires CG, TZ, sur QT. Placez un œil en K dans l'air; l'objet C lui paroîtra s'élever, comme en D, sur la Perpendiculaire CG. par le Point d'incidence B de la surface réfringente, menez les Lignes KD, BC. *Snellius* appelle BC le rayon vrai; parce qu'effectivement sans eau, l'objet ne seroit apperçu qu'en C; & il nomme BD le rayon apparent, l'image de C ne paroissant en D, où l'objet n'est pas, qu'en vertu de la réfraction. Maintenant, après avoir mesuré très-exactement les rayons BC, BD, que le même œil regarde plus obliquement l'objet T pareil au précédent; & il le verra s'élever, comme en V, sur la Perpendiculaire TZ; que l'on mesure le rayon vrai RT, ainsi que le rayon apparent RV, & voici quelle est la proposition de *Snellius*: J'ai toujours trouvé, dit-il, que le rayon vrai BC étoit à son rayon apparent BD, comme le rayon vrai RT est à son rayon apparent RV; quelle que soit l'inclinaison des rayons vrais sur QT. La proposition de *M. Descartes* porte que le Sinus d'un Angle d'inclinaison d'un rayon de lumière, qui passe d'un milieu dans un autre plus ou moins dense, est au Sinus de son Angle de réfraction, comme le Sinus de tout autre Angle d'inclinaison quelconque est au Sinus de son Angle de réfraction. En sorte que, suivant *Snellius*, le rayon vrai & son rayon apparent sont en raison constante, quelle que soit l'obliquité de l'aspect; & selon *M. Descartes*, ce sont les Sinus des Angles d'inclinaison & de réfraction, qui ont respectivement cette propriété.

Il semble d'abord qu'il y ait une grande différence dans l'énoncé de ces propositions. *M. Leibnitz* même, tout pénétrant qu'il étoit, ne les faisoit rentrer l'une dans l'autre qu'avec assez de peine. On peut cependant les déduire réciproquement l'une de l'autre avec une extrême facilité. Par les Points B, R, menons les Perpendiculaires MH, OF,

à la surface réfringente NZ. Puisque les rayons CB, TR, quittent leurs directions CA, TI, aux Points B, R, de leur passage dans l'air, pour s'écarter des Perpendiculaires MH, OF, dans les Lignes BK, RK, dont BD, RV sont les prolongemens respectifs (supp.); il est clair que HBC, FRT, sont les Angles d'inclinaison; que KBM ou HBD est l'Angle de réfraction de HBC, & que KRO ou FRV est l'Angle de réfraction de FRT.

Cela supposé, je dis que, si l'on a, suivant *Snellius*, cette proportion le rayon apparent BD est au rayon vrai BC, comme le rayon apparent RV est au rayon vrai RT, l'on aura, selon *M. Descartes*, le Sinus de l'Angle d'inclinaison HBC est au Sinus de son Angle de réfraction HBD, comme le Sinus de l'Angle d'inclinaison FRT est au Sinus de son Angle de réfraction FRV.

DÉM. Soit S le caractère du Sinus d'un Angle, & considérant les rayons apparens & les vrais dans les Triangles BCD, RTV, rappelons-nous que les côtés des Triangles sont entr'eux, comme les Sinus des Angles opposés à ces côtés; donc BD. BC :: SBCD ou SHBC. SBDC ou SBDG == SHBD. Et RV. RT :: SRTV ou SFRT. SRVT ou SRVZ == SFRV. Or (supp.) BD. BC :: RV. RT. Par conséquent SHBC. SHBD :: SFRT. SFRV. C. Q. F. D.

Réciproquement la proposition de *Snellius*, peut se déduire avec la même facilité de celle de *M. Descartes*. Mais, parce qu'on démontre que les trois Angles d'un Triangle sont égaux à deux droits, en se servant de l'égalité des Angles alternes dans le parallélisme de deux Lignes, s'ensuit-il que l'Auteur de cette dernière proposition, le soit aussi de la première? On ne le pourroit pas même conclure, quand les deux propositions seroient absolument identiques. Il n'est pas rare, sans s'être rien communiqué, d'aboutir aux mêmes vérités, lorsque l'on spécule sur le même sujet; & quelquefois précisément par le même chemin. Cela m'est arrivé à moi-même plusieurs fois dans cet Ouvrage.

Ce qui auroit dû, ce me semble, retenir la plume de ceux qui ont opposé ici *Snellius* à *Descartes*; c'est que la

Découverte vraie ou prétendue de *Snellius* a été tout-à-fait stérile entre ses mains, & qu'il n'avoit pas pénétré fort loin dans la Science de la réfraction. Au contraire celle de *M. Descartes* nous a valu une des plus belles Sciences & des plus utiles que l'esprit humain ait jamais inventées. Mon garant pour les faits sera *M. Huyghens*, dont Messieurs *Wolf*, *Chambers*, & *Voltaire*, n'ont pas imité la modération. Parcourez la page 2 & 3 de sa Dioptrique Latine, imprimée à Amsterdam en 1728. vous y verrez qu'après avoir énoncé la Loi de la Réfraction de *M. Descartes*, & attribué quelque chose de semblable à *Snellius*, il ajoute ces paroles remarquables: *Verum ad hanc sinuum proportionem nequaquam attendit Snellius, & usque adeo ab apparente imagine rem omnem pendere existimavit, ut etiam in radio perpendiculari effectum refractionis, seu, ut falso opinatur, decurtationem radii visorii agnoscat; deceptus eo quod etiam recta de super in vas aqua plenum inspicienti, fundus omni parte attolli videtur. Cujus rei vera causa ex radiis ad utrumque oculum tendentibus petenda erat. Hac omnia, quæ de refractionis inquisitione volumine integro Snellius exposuerat, inedita mansere, quæ & nos vidimus aliquando, & Cartesium quoque vidisse accepimus; ut hinc, Fortasse mensuram illam, quæ in sinibus consistit, elicuerit, quæ in explicanda iride & vitrorum figuris investigandis felicissime est usus.*

Par où l'on voit la circonspection de *M. Huyghens* dans ses conjectures. La proposition de *M. Descartes* revient, selon lui, (& c'est aussi mon sentiment) à celle de *Snellius*; mais celui-ci n'y a pas fait attention, nequaquam attendit. Il a même crû fausement que le rayon perpendiculaire se réfractoît, falso opinatur. L'Ouvrage de *Snellius* n'avoit point encore été imprimé, lorsque *M. Huyghens* en parloit, inedita mansere. Il assure qu'il en avoit vu le Manuscrit, vidimus; qu'on lui avoit dit que *M. Descartes* l'avoit vu aussi, accepimus Cartesium vidisse; que peut-être la Loi des Sinus, &c. découverte par celui-ci, avoit été occasionnée par celle de *Snellius*, fortasse elicuerit. Et qu'enfin *M. Descartes* avoit très-heureusement appliqué la Découverte à

l'explication de l'Arc-en-Ciel ainsi qu'à la recherche de la forme des verres, dont on a besoin dans la construction des Lunettes, des Microscopes, & des Télescopes, felicissime est usus. Concluons donc que les soupçons en faveur de *Snellius* ont même de mauvais fondemens, & que toutes les raisons sont pour *M. Descartes*.

124. USAGE de l'Ellipse dans la construction du Porte-voix. Nous avons vu n°. 154 de la Parabole, que cette Courbe étoit fort propre à la construction du Porte-voix simple, mais elle ne paroît pas suffire, pour la plus grande perfection de cette machine. Non seulement il est nécessaire que les rayons sonores soient dirigés le plus précisément qu'il est possible, vers un endroit proposé (ce à quoi la Parabole est d'un excellent usage); mais il seroit avantageux que l'air s'accélérait dans le Porte-voix, sans nuire au Parallélisme des Lignes vocales. Quand on parle dans un Paraboloïde concave, l'air ne s'y trouvant arrêté que par les parois de l'instrument, qui lui laissent la liberté de s'étendre, s'y condense très-peu. Ainsi ses ressorts se déployant lentement, ne contribuent pas à la propagation de la voix, autant que l'art nous le fait concevoir possible.

Pour approcher donc de la perfection à laquelle nous tendons, soit l'Ellipsoïde Af (fig. 65.) adapté au Paraboloïde fT; de manière que ces deux conoïdes aient un Foyer commun f, & que l'autre Foyer de l'Ellipsoïde soit dans l'embouchure, à l'endroit où l'on doit parler. Il est évident que les rayons sonores Ab, Ac, partans du Foyer A, seront réfléchis à la rencontre de l'Ellipsoïde, à son autre Foyer f (36); que par conséquent leur action mutuelle les uns sur les autres les condenseront en cet endroit; d'où ne pouvant revenir vers A, où la voix fait obstacle, ils seront forcés de se précipiter dans la Paraboloïde en d, g; alors, en vertu de la forme de l'instrument, ils prendront un cours ds, gr, parallèle à son Axe AT (n°. 82. de la Parabole); & iront ainsi de concert porter la parole plus loin & avec plus de diligence, que si le Porte-voix étoit simple.

125. REMARQUE. Il n'y a que l'expérience qui puisse déterminer ici la longueur & la grosseur de l'Ellipsoïde, ainsi que le rapport de ces deux dimensions; mais ce premier conoïde une fois supposé, règle nécessairement le volume du second que l'on peut faire d'ailleurs aussi long que la commodité le permettra. Car le Foyer *f* de l'Ellipsoïde devant être commun au Paraboloïde qui lui est adapté, on voit que l'Ordonnée ou la double Ordonnée à ce Foyer est la même dans l'un & l'autre conoïde: mais la double Ordonnée au Foyer d'une Parabole, est toujours égale au Paramètre de cette Courbe (93. de la Parabole); & la construction se règle sur la longueur de son Paramètre (24. Parab.), par conséquent la seconde pièce du Porte-voix composé est déterminée par la première.

126. On est quelquefois obligé dans les Arts de travailler sur de très-petites parties, à la lueur d'une lampe, d'une bougie, ou d'une chandelle, dont la simple lumière n'éclaire pas assez; sans augmenter le nombre des bougies, dont la multitude deviendrait incommode & dispendieuse, on pourroit se servir d'un Ellipsoïde concave, dont les côtés seroient étamés & très-lisses. En supposant ce conoïde tronqué du côté de *f*, afin que l'on pût faire tomber où l'on voudroit ce Foyer, qui seroit alors en plein air; on conçoit que les rayons d'un corps lumineux placé au Foyer *A* & réfléchis en *f* (36), augmenteroient considérablement la lumière en ce Point, & par conséquent y seroient discernés de bons yeux, des corps d'une petitesse excessive.

127. Ce conoïde est encore d'un très-bon usage dans la construction artificielle des échos à voix basse. On appelle ainsi un écho, qui ne se fait entendre que quand on parle bas. Si l'on construit donc une voute ou le plafond d'un appartement en forme d'Ellipsoïde concave, quelqu'un qui parlera fort bas au Foyer *A*, se fera entendre fort distinctement à une oreille attentive au Foyer *f*; sans que des personnes, placées entre ces deux Points, & néanmoins à quelque distance, y puissent distinguer la moindre pa-

ruosité, & seroient par conséquent en état d'occasionner sur le tympan de l'oreille, un plus fort ébranlement qu'à l'ordinaire, car c'est tout ce que l'on se propose d'opérer avec de pareils instrumens.

130. Ce Cornet acoustique, en forme d'Ellipsoïde, me paroît avoir deux avantages sur le Paraboloïde. 1°. Parce que l'embouchure du Paraboloïde, ne s'adaptant point exactement à la bouche, laisse échapper un très-grand nombre de rayons sonores, qui ne sont point portés dans le corps de l'instrument. 2°. Parce qu'il n'y a que les rayons parallèles qui se réfléchissent précisément au Foyer du Paraboloïde. Or le nombre de ces rayons doit être assez petit; parce qu'ils sortent presque toujours de la bouche, en s'épanouissant en forme d'aigrette, & par conséquent fort éloignés d'être parallèles.

131. USAGE de l'Ellipse dans la construction & le calcul des voutes surbaissées. Une voute est un toit concave intérieurement, arrondi ou en forme d'arcade dans toute sa longueur; lequel présente au-dehors une apparence semblable à la figure BCGH. (fig. 67.) Les murs qui la portent, tels que ABHL, en sont les pieds droits; & l'on nomme pignons ceux qui la ferment comme ABCD. Il peut y avoir autant de voutes d'espèces différentes, qu'il y a d'espèces de Courbes toujours concaves du même côté. Les plus communes sont à plein cintre, en tiers Point ou en Arc de cloître, & celles que l'on nomme surbaissées. Les voutes à plein cintre sont celles dont la coupe verticale BMC est un demi-Cercle; car il est évident que la voute ne commence à s'élever que de l'horizontale BC, que l'on appelle pour cette raison naissance de la voute. Dans les voutes en tiers Point cette coupe est presque triangulaire; & elle forme une demi-Ellipse dans les voutes surbaissées dont il s'agit ici.

132. Pour la construction des voutes, il faut savoir qu'elles sont composées de voussours; ce sont des pierres ou des matériaux quelconques, taillés en espèce de coin tronqué, & propres à former le cintre ou le contour d'une voute. Il est donc nécessaire que l'extrémité de chaque

voûte. Ce dont j'ai fait l'expérience plusieurs fois, tant à l'Observatoire de Paris que chez M. Pagni de la même Ville, lequel a un talent distingué pour ce qui concerne les expériences de Physique, ou il fait paroître sa dextérité avec beaucoup de succès.

La raison en est que les Lignes vocales *Ab*, *Ac*, vont du Foyer *A* se réfléchir, à la rencontre de la voute ou de la courbure supérieure, à l'autre Foyer *f* où l'on suppose une oreille placée. Leur réunion en fait donc la cause pour laquelle la voix basse, qui part du Foyer *A*, est entendue en *f*; tandis qu'aux autres endroits entre *A* & *f*, où ne se fait point la réunion des Lignes vocales, elles n'ont pas assez de force pour ébranler les oreilles des Auditeurs.

128. REMARQUE. Ces sortes d'échos ne paroissent répéter que les voix basses; parce qu'en parlant haut, comme la distance entre les Foyers ne peut pas être considérable, vu la difficulté de la construction, la voix & l'écho frappent l'oreille en même tems. Mais la voix étant communément plus forte que son écho, il arrive que ce dernier est couvert par l'autre, & qu'ainsi il n'est pas possible de le distinguer. Au contraire, quand on parle très-bas, la voix ne faisant pas d'impression sensible sur l'oreille, laisse entendre l'écho, qui y en fait une assez grande par la réunion des Lignes vocales, dont nous avons parlé.

129. USAGE de l'Ellipse dans la construction des Cornets acoustiques. Il me semble qu'un tube Ellipsoïde, à peu près semblable à la figure 66, seroit beaucoup plus propre à la construction des Cornets acoustiques, que le Paraboloïde dont il a été fait mention au n°. 137. de la Parabole; surtout en lui donnant une embouchure, qui s'adaptât très-exactement, comme celle du Porte-voix, à la bouche de celui qui parleroit au Foyer *A*; alors les Lignes vocales seroient toutes forcées d'enfiler le corps de l'instrument; & après avoir été réfléchies de dessus les parois intérieures *cd* à l'autre Foyer *f* (36), où elles ne manqueroient pas de se condenser, leurs ressorts ne pouvant se déployer que du côté du Porte-vent *M*, elles s'y porteroient avec impé-

voussoir, qui compose la surface intérieure d'une voute surbaissée, soit taillée en Arc d'Ellipse; de manière que les extrémités réunies de tous les voussours mis en place, forment une demi-Ellipse dont la naissance *BC* de la voute soit le grand Axe: or nous avons vu (66) comment on pouvoit tracer une Ellipse; on pourra donc faire prendre aux voussours une forme Elliptique, pour en construire une voute qui sera d'autant plus surbaissée, que le second Axe sera plus petit par rapport au grand [4].

133. On toisera la solidité ou la maçonnerie de cette voute, en déterminant d'abord la surface de la demi-Ellipse BOCB (cor. du n°. 68. ou n°. 74): après quoi on la multipliera par la Ligne *BH*, qui désigne toute l'étendue de la voute entre les pignons, & que les Architectes appellent pour cette raison longueur dans œuvre; ce produit donnera la solidité de la voute, comme si elle étoit pleine depuis sa naissance; c'est pourquoi l'on dit alors que l'on toise tant plein que vuide. Mais il en faut retrancher le creux ou le vuide, dont la coupe est la demi-Ellipse inférieure BMCB; on multipliera donc cette demi-Ellipse par la même longueur dans œuvre *BH*; ayant par là le toisé du vuide de la voute, on l'ôtera du premier toisé tant plein que vuide; & l'on aura un reste qui sera évidemment la solidité de la voute, dont l'épaisseur est comprise entre les deux Lignes BOC, BMC.

Je ne parle point du toisé des pieds droits ni de celui des pignons; ce sont des Parallépipèdes qui se calculent aisément par la Géométrie commune.

[4] Si les circonstances le permettent, je traiterai la matière des Voutes plus à fond dans un autre Volume, où je ferai voir l'application des Courbes à la coupe des Pierres. Ce que j'en dis ici n'est que pour faire sentir de bonne heure la nécessité, dans l'Architecture, de savoir décrire l'Ellipse, & en calculer la surface.

De l'Hyperbole.

1. DÉFINITION. Soient les Cercles RST, LMV (fig. 68.) parallèles entr'eux, coupans perpendiculairement le Triangle par l'Axe d'un cône ERT, dont ils font des sections. Supposons aussi que ce même cône soit coupé par un autre plan, perpendiculaire au Triangle ERT, & tel que coupant les deux plans circulaires RST, LMV, ainsi qu'un côté ET du cône, son prolongement coupe le cône opposé Eyx, il en naîtra une troisième section OBS, à laquelle les Anciens ont donné le nom d'*hyperbole*. Nous en dirons la raison au n°. 39.

2. COR. I. Il est clair par la construction, & par tout ce que nous avons dit au commencement de la *Parabole* & de l'*Ellipse*, que OS est perpendiculaire au Diamètre RT, ainsi qu'à la commune section BG de l'*hyperbole* & du Triangle par l'Axe; & qu'elle est par conséquent coupée en deux parties égales en G. Par les mêmes raisons, MH est perpendiculaire au Diamètre VL ainsi qu'à BG, & coupée en deux parties égales en P; de manière qu'en faisant plusieurs coupes circulaires, comme LMV, entre le Sommet B de l'*hyperbole* & la Base RST du cône, toutes les communes sections de ces Cercles & de l'*hyperbole*, seroient coupées en deux également, & perpendiculaires à BG, commune section de l'*hyperbole* & du Triangle par l'Axe; ainsi que le sont OS, HM.

3. COR. II. Puis donc que OS, MH, & toutes les autres communes sections semblables, sont coupées en deux parties égales par la commune section BG, & perpendiculaires à cette commune section, il s'ensuit que BG est l'Axe de l'*hyperbole* (conformément aux définitions que nous en avons données pour la *Parabole* & l'*Ellipse*); les Lignes PM ou PH, GS ou OG en sont les *Ordonnées*; BP, BG, les *Abcisses*. De plus la portion AB de l'Axe, prolongé

tra sans doute tout-à-fait évident, lorsque la coupe Tt est parallèle à l'Axe OQ, prenons le cas le plus difficile; c'est-à-dire, celui du Triangle Scalène, où l'Axe OQ est oblique aux Bases opposées DH, dh, & dans lequel la section Pp, qui engendre les hyperboles opposées, n'est pas parallèle à l'Axe OQ, c'est pourquoi tirant par le Sommet C la Ligne sf, parallèle à la section génératrice Pp, & faisant l'Abcisse Br = l'Abcisse Ap, la démonstration se réduit à prouver que les Ordonnées correspondantes *ri*, *pm*, sont égales.

A cause de Cf parallèle à BP (const.); les Triangles semblables BPH, CfH, donnent, BP. PH :: Cf. fH (M); & des Triangles semblables APD, CfD, on tire AP. PD :: Cf. fD. (N); donc, en multipliant par ordre les termes des deux proportions M, N, on aura BP x AP. PH x PD ou PM :: Cf. fH x fD (L).

Remarquez maintenant que les cônes opposés CDH, Cdh, ayant tous leurs côtés égaux, chacun à chacun, c'est-à-dire, CD = Cd; CH = Ch, & l'Angle DCH = dCh, la Base DH = la Base dh; d'où il est clair que fH = sh; Cf = Cs, & fD = sd.

Après cela, les Triangles Apd, Csd, étant semblables, Ap. pd :: Cs. sd :: Cf. fD; ainsi Ap. pd :: Cf. fD (H). Et les Triangles semblables Bph, Csh, donnent Bp. ph :: Cs. sh :: Cf. fH; donc Bp. ph :: Cf. fH (K); ainsi, en multipliant par ordre les termes des deux proport. H, K, on a Ap x Bp. pd x ph ou pm :: Cf. fH x fD (T); donc, en comparant les deux proport. L, T, on trouvera Ap x Bp. pm :: BP x AP. PM. Or (4) BP x AP. PM :: Br x Ar. ri; donc Ap x Bp. pm :: Br x Ar. ri, ou, en alternant, Ap x Bp. Br x Ar :: pm. ri; mais Ap étant = Br (const.), il s'ensuit que Bp = Ar; & qu'ainsi Ap x Bp = Br x Ar; par conséquent pm = ri, ou pm = ri. C. Q. F. D.

7. PROP. II. Si, après avoir trouvé (fig. 68.) un quatrième

longé jusqu'à la rencontre A du cône opposé, s'appelle *Axe transverse*, ou *premier Axe*, relativement à un autre Axe que nous déterminerons bien-tôt; & l'on nomme *centre* de l'*hyperbole* le milieu C de l'Axe transverse; enfin nous appellerons *Axe intercepté* une portion quelconque AP ou AG de l'Axe prolongé, comprise entre le Point A & la rencontre d'une Ordonnée quelconque PM ou GS.

4. PROP. I. Dans l'*hyperbole* les quarrés des Ordonnées sont entr'eux, comme les Rectangles des Abcisses par l'Axe intercepté, correspondant à ces Abcisses; c'est-à-dire, que GS. PM :: BG x AG. BP x AP.

DÉM. Les Triangles semblables AGR, APL, donnent AG. GR :: AP. PL (M); & des Triangles semblables BGT, BPV, l'on tire BG. GT :: BP. PV (N); ainsi, en multipliant par ordre les termes des proportions M, N, on aura BG x AG. GT x GR :: BP x AP. PV x PL, ou, en alternant, GT x GR. PV x PL :: BG x AG. BP x AP (Q); mais, par

la nature du Cercle, GT x GR = GS, & PV x PL = PM; donc, en substituant ces valeurs dans la proportion Q, elle deviendra GS. PM :: BG x AG. BP x AP. C. Q. F. D.

5. COR. I. Il s'ensuit de cette propriété de l'*hyperbole*, que le Périmètre de cette section est une Courbe. Ce que l'on démontrera, comme l'on a fait pour la *Parabole* n°. 9.

* 6. II. En prolongeant du côté de A le plan coupant, qui a formé l'*hyperbole* LBM (fig. 69.), il engendrera dans le cône opposé une autre section *Am*, laquelle sera non seulement une *hyperbole*, suivant la définition, mais elle sera encore précisément égale & semblable à l'*hyperbole* LBM: or ces deux hyperboles, considérées ensemble, s'appellent *hyperboles opposées*.

DÉM. Pour démontrer l'égalité & la similitude de ces hyperboles, il suffit de faire voir que les Ordonnées prises de part & d'autre à égale distance du Sommet de ces Courbes, sont parfaitement égales. Et, comme cela paroît

terme *tt* proportionnel aux trois grandeurs BP x AP, PM, AB [4], l'on cherche un autre quatrième proportionnel *pp* à trois autres grandeurs quelconques semblables BG x AG, GS, AB, de l'*hyperbole*, je dis que l'on trouvera toujours le même quatrième proportionnel; c'est-à-dire, que *tt* = *pp*.

DÉM. Par la Prop. I. BP x AP. BG x AG :: PM. GS, ou en alternant, BP x AP. PM :: BG x AG. GS. Mais (supp.) BP x AP. PM :: AB. *tt*; donc AB. *tt* :: BG x AG. GS; or (supp.) BG x AG. GS :: AB. *pp*. donc AB. *tt* :: AB. *pp*. & par conséquent *tt* = *pp*. C. Q. F. D.

8. COR. Le quarré *tt*, quatrième proportionnel au Rectangle d'une Abcisse quelconque BP d'une hyperbole par son *Axe intercepté* AP, au quarré de son Ordonnée correspondante PM, & au quarré de son *Axe transverse* AB, est donc une grandeur constante, & par conséquent sa racine quarrée *t* est aussi une constante.

* 9. REMARQ. Pour trouver la grandeur *t* dans le cône (fig. 69.), il n'y a qu'à faire passer un plan par le Sommet C, parallèlement à la section génératrice Pp, & perpendiculairement au plan du Triangle par l'Axe CDH; c'est-à-dire, tirer Cf parallèlement à Pp, & mener l'Ordonnée *fe* au Cercle. Car la quatrième proportionnelle *p* aux trois grandeurs Cf, *fe*, AB, sera la valeur de *t*. Ainsi, il faut

[4] Pour trouver ce quarré *tt* quatrième proportionnel, on transformera le Rectangle BP x AP en un quarré DD, en cherchant une moyenne proportionnelle D entre BP & AP; après quoi déterminant le quatrième portionnel *t* aux trois grandeurs D, PM, AB, ce sera le côté du quarré cherché. Car, puisque D. PM :: AB. *t*, on aura DD ou BP x AP. PM :: AB. *tt*. C. Q. F. T. & D.

démontrer que, si l'on fait $Cf. fe :: AB. p$, l'on aura $p = z$.

DÉM. Puisque $Cf. fe :: AB. p$ (supp.); donc $Cf. fe :: AB. pp$. Or (n°. 6. proportion L) $Cf. fh \times fd$ ou $fe :: BP \times AP. PM$; donc $AB. pp :: BP \times AP. PM$. Mais (supp.) $BP \times AP. PM :: AB. tt$. Ainsi $AB. pp :: AB. tt$; d'où il est visible que $p = t$.

10. DÉFIN. Ainsi, puisque par la génération de l'hyperbole, cette Courbe se trouve décrite sur un Plan, mettons sur ce Plan la grandeur $t = GCD$ (fig. 70.); de manière que tombant perpendiculairement sur le milieu C de l'Axe *transverse* AB , elle soit coupée en deux parties égales par cet Axe, & cette Ligne déterminée & disposée ainsi que nous venons de le faire, est ce que l'on appelle le *second Axe* de l'hyperbole, relativement à l'Axe *transverse*, qui prend alors le nom de *premier Axe*. Les Géomètres les appellent encore, l'un par rapport à l'autre, *Axes conjugués*. Et, quand le second Axe GCD est prolongé indéfiniment de part ou d'autre, on l'appelle alors *second Axe indéterminé*.

* 11. COR. I. Puisque les hyperboles *opposées* sont égales & semblables (6), en faisant l'Abcisse $Ax = BP$, si l'on joint les extrémités M, m , des Ordonnées correspondantes PM, xm , par la Ligne Mm ; cette Ligne sera parallèle au premier Axe AB & coupée en deux parties égales par le second GD , prolongé s'il en est besoin.

Car les Abcisses BP, Ax , étant égales (supp.), les Ordonnées PM, xm , perpendiculaires à la même Ligne Px (const.), le seront aussi (6); par conséquent Mm sera parallèle à Px , ou au premier Axe AB ; donc $Mm = Px$. Or Px est coupée en deux parties égales par le second Axe GD (const.); donc Mm le sera aussi par ce second Axe, prolongé s'il est nécessaire.

* 12. COR. II. Toute Ligne Mm , menée d'un Point quelconque M d'une hyperbole à son opposée parallèlement

au premier Axe, est coupée en deux parties égales par ce second Axe, prolongé suivant le besoin.

Pour s'en convaincre, on abaissera des Points M, m , les Ordonnées MP, mx , lesquelles sont égales, à cause du Parallélisme des Lignes Mm, Px (supp.); or les Ordonnées étant égales, les Abcisses BP, Ax , le sont aussi; ainsi $Cx = CP$; mais les figures $mNCx, MPCN$ étant des Parallélogrammes (const.), $mN = Cx = CP = NM$; donc $mN = NM$.

Mais, si Mr n'étoit pas parallèle au premier Axe, elle ne pourroit pas être coupée en deux parties égales par le second Axe, comme l'est Mm . car cette Ligne Mr tomberoit de l'un ou de l'autre côté de Mm . Or, dans l'un & l'autre cas, elle ne peut pas être coupée en deux parties égales par GD ; autrement, tirant Mm parallèle à l'Axe AB , l'on auroit $mN = NM$, comme on vient de le démontrer; donc, si Mr égalait tr , l'on auroit $MN. Nm :: Mr. tr$; & par conséquent, en tirant mr , elle seroit parallèle à Nr , ou à GD (n°. 279. *Inst. T. 2.*); mais mx est aussi parallèle à GD (const.); donc mr seroit parallèle à mx . Ce qui est absurde; donc, &c.

* 13. COROL. III. C'est pourquoi la *converse* du Corollaire second est vraie; c'est-à-dire, que toute Ligne, menée d'un Point d'une hyperbole à son opposée, & coupée en deux parties égales par le second Axe indéterminé, est nécessairement parallèle au premier Axe; puisque, si elle ne l'étoit pas, elle ne pourroit pas être coupée en deux parties égales par le second Axe (12). Ce qui est contre la supposition.

14. REMARQ. Comme les Parallèles au premier Axe sont coupées en deux parties égales par le second, & que les Parallèles au second sont coupées en deux parties égales par le premier, c'est la raison pour laquelle les Géomètres appellent ces Axes, l'un par rapport à l'autre, des *Axes conjugués*; parce qu'ils sont des fonctions semblables. On voit aussi pourquoi l'on a appelé *second Axe indéterminé* la Perpendiculaire indéfinie ND , élevée sur le milieu du premier

O ij

Axe; parce qu'elle coupe en deux parties égales toutes les Lignes, qui lui sont perpendiculaires & terminées aux *Hyperboles opposées*; & ce qui fait encore que les Lignes, telles que MN, Nm , sont des *Ordonnées* au second Axe.

15. PROP. III. Le Rectangle d'une Abcisse quelconque BP par son Axe intercepté AP , est au carré de son Ordonnée correspondante PM , comme le carré du premier Axe AB est au carré du second GD , ou comme le carré de la moitié BC du premier, est au carré de la moitié CD du second; ainsi il faut prouver que $BP \times AP. PM :: AB. GD$, ou $BC. CD$.

DÉM. Elle est évidente par la seconde Proposition (7), où l'on a fait voir que l'on trouvera toujours le même quatrième terme proportionnel tt aux trois grandeurs $BP \times AP, PM, AB$; en quelque Point de l'Axe que l'on prenne l'Ordonnée: or le second Axe GD est la Racine quarrée de ce quatrième proportionnel (10); c'est-à-dire, que $GD = t$, ou $GD = tt$; donc $BP \times AP. PM :: AB. GD$. mais $AB. GD :: BC. CD$, ou $AB. GD :: BC. CD$; donc aussi $BP \times AP. PM :: BC. CD$. C. Q. F. D.

* 16. REMARQ. Quand la Section du cône se fait parallèlement à son Axe; c'est-à-dire, quand Tt est parallèle à l'Axe OQ (fig. 69.); 1°. Quoique $Ch > CD$, & $Ca > Cb$, cependant les deux *Hyperboles opposées*, Nbx, nay , rencontrent chacune leurs Bases, à la même distance de leur Sommet; c'est-à-dire, que $at = bt$. 2°. La distance de T au centre O , est égale au second demi-Axe de ces Hyperboles. 3°. La Ligne bK tirée parallèlement au Diamètre DH , est égale au second Axe de ces Hyperboles; c'est-à-dire que, $bK = 2 TO$.

DÉM. Tirons CV parallèlement à DH , & les Triangles semblables COH, aVC , donneront $CO. OH :: aV. VC$; & des Triangles semblables COD, CbV , on tirera $CO. OD :: OH :: Vb. VC$. Ainsi $aV. VC :: Vb. VC$; donc $aV = Vb$; mais (à cause du parallélisme des Lignes CV, DH ,

OQ, Tt , & de $CO = CQ$) on a $Vt = VT$, ou $aV = at = Vb + bT$; donc, puisque $aV = Vb$, on aura $at = bT$. C. Q. F. 1°. D.

2°. Les Triangles semblables bTD, bVC , donnent $bT. TD :: Vb. VC$; & les Triangles semblables aTH, aVC , produisent $aT. TH :: aV$ ou $Vb. VC$; ainsi, (en multipliant par ordre les termes de ces deux proport.) $bT \times aT. TD \times TH$ ou $TN :: Vb. VC :: 4Vb. 4VC :: ab. 4VC$ (parce que ab égalant $2Vb$; $ab = 4Vb$); donc $bT \times aT. TN :: ab. 4VC$. donc (7 & 10) $4VC$ est le carré du second Axe, $2VC$ est ce second Axe, & VC est le second demi-Axe. Or $VC = TO$; donc TO est le second demi-Axe. C. Q. F. 2°. D.

3°. $CO. OD :: CG. bG$, & $CO. OH$ ou $OD :: CG. GK$; donc $CG. bG :: CG. GK$; ainsi $bG = GK = VC$; donc $bG + GK = bK = 2VC = 2TO$ = le second Axe. C. Q. F. 3°. D.

17. COROL. I. Si l'on fait donc (fig. 70.) $AB = 2a$; $CA = CB = a$; $GD = 2b$; $CG = CD = b$; $PM = y$; $CP = x$; $BP = CP - CB = x - a$; $AP = CP + CA = x + a$; ainsi $BP \times AP = x - a \times x + a = xx - aa$, la proport. $BP \times AP. PM :: BC. CD$ du n°. 15. exprimée analytiquement, deviendra $xx - aa. yy :: aa. bb$; d'où l'on tire $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, qui est l'équation de l'Hyperbole par rapport à ses Axes.

* 18. REMARQ. I. On appelle Hyperbole *équilatère*, celle dont les Axes sont égaux; c'est-à-dire, celle où $a = b$; par conséquent l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ d'une Hyperbole quelconque, deviendra pour l'Hyperbole *équilatère*, $xx - aa = yy$. Ce qui signifie que dans l'Hyperbole *équilatère*, le carré de l'Ordonnée y est égal au Rectangle de l'Axe intercepté $x - a$ par l'Abcisse $x - a$.

O iv

* 19. REMARQ. II. Mais comment trouver dans le cône l'Hyperbole *équilatère*? On n'a qu'à supposer que le cône CDH (fig. 69.) est Rectangle en C, ou que l'Angle DCH de son Sommet est droit; & l'Hyperbole Nbx deviendra *équilatère*. On suppose toujours Tr parallèle à l'Axe OQ du cône.

DEM. L'Angle DCH étant droit, bCa le sera aussi; par conséquent, si du milieu V de l'Axe transverse ab, on décrit un Cercle avec le rayon Va ou Vb, la circonférence passera nécessairement par le Point C; ainsi, dans ce cas, VC sera un rayon de ce Cercle; donc Va = VC, ou 2Va = 2VC = 2TO; mais 2Va = le premier Axe ab, & 2TO = le second Axe bK (Art. 3. du n°. 16.); par conséquent le premier Axe = le second Axe. Donc, quand le cône est Rectangle, & que la Section s'en fait *parallèlement* à l'Axe de ce cône, il en naît une *Hyperbole équilatère*.

* 20. REMARQ. III. Quand l'Angle DCH au Sommet du cône est *obtus*, & que la Section Tr est parallèle à l'Axe de ce solide; alors le second Axe 2VC > que le premier Axe 2aV; mais, lorsque l'Angle DCH est *aigu*; le premier Axe 2aV > que le second Axe 2VC.

DEM. 1°. L'Angle DCH étant *obtus*, l'Angle bCa sera *aigu*; ainsi, en décrivant un Cercle du Point V sur le premier Axe ab = 2aV, la circonférence de ce Cercle coupera VC en deçà de C, par rapport au Point V; donc VC > aV, ou 2VC > 2aV; c'est-à-dire, que le second Axe est plus grand que le premier.

2°. L'Angle DCH étant *aigu*, l'Angle bCa sera *obtus*; ainsi la circonférence d'un pareil Cercle que ci-dessus passera au-delà de C; & par conséquent aV > VC, ou 2aV > 2VC; ce qui signifie que, dans ce dernier cas, le premier Axe est plus grand que le second.

Lors donc qu'il s'agit d'une pareille Section de cône, on peut toujours savoir, par la nature de l'Angle au Sommet du cône, si les Axes sont égaux ou inégaux; & quand ils sont inégaux, lequel des deux est le plus grand.

$\frac{aayy}{bb}$, l'on aura (en multipliant par bb) $bbxx - aabb = aayy$; ainsi (en divisant par aa) $yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$, qui est l'expression du carré de l'Ordonnée au premier Axe, ou de l'Abcisse du second.

24. COROL. V. Prenant encore l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; & transposant aa, ainsi que $\frac{aayy}{bb}$, on a $xx = \frac{aayy}{bb} + aa$ pour l'expression du carré aa de la moitié du premier Axe.

25. COR. VI. Nous en tenant toujours à l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, on aura (en multipliant par bb) $bbxx - aabb = aayy$; donc (en transposant) $bbxx = aayy + aabb$; ainsi (en divisant par aa) $bb = \frac{aayy + aabb}{aa} = yy$, qui est l'expression de la moitié du second Axe.

26. COROL. VII. De ce que $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, il est visible que les x, c'est-à-dire les CP, ou, si l'on veut, les Abcisses augmentans [a] les y ou les Ordonnées augmentent aussi. Car x augmentant, xx augmentera; ainsi $xx - aa$ sera plus grand qu'auparavant; donc $\frac{aayy}{bb}$, qui lui est égal, sera aussi plus grand; mais il ne sera pas plus grand par les quantités aa, bb, qui sont des grandeurs constantes; ce sera donc par yy; ainsi yy augmentant, y augmentera; par conséquent les Ordonnées croissent, quand les Abcisses augmentent. Ce qui nous montre que l'Hyperbole s'éloigne toujours de plus en plus de son Axe, & qu'elle ne le coupe qu'au seul Point B.

[a] Parce que les CP ne s'approchent croître, sans l'augmentation des Abcisses BP.

21. COROL. II. Puisque (17) $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, (fig.

70), on aura $xx = \frac{aayy}{bb} + aa = \frac{aayy + aabb}{bb}$, qui est l'expression du carré xx de l'indéterminée CP du premier Axe, ou de l'Ordonnée MN au second.

REM. J'avertis une fois pour toutes, que l'on doit faire une *soignée attention* à cette expression du carré de l'indéterminée CP du premier Axe, ainsi qu'à celles qui sont *suivantes*; parce qu'elles nous seront *très-commodes* dans la suite, pour découvrir les autres propriétés de l'Hyperbole.

22. COROL. III. Ayant donc $xx = \frac{aayy + aabb}{bb}$, on

aura $xx \times bb = yy + 1b \times aa$, d'où l'on tire $xx \cdot yy + bb :: aa \cdot bb$, ou :: $4aa \cdot 4bb$; c'est-à-dire qu'en menant au second Axe l'Ordonnée MN = CP = x, & considérant que l'Abcisse CN de ce second Axe = PM = y, on verra que le carré xx (MN) d'une Ordonnée quelconque MN au second Axe, est à la somme des carrés yy + bb (CN + CD) de l'Abcisse correspondante CN & de la moitié CD du second Axe, comme le carré aa de la moitié du premier Axe est au carré bb de la moitié du second, ou comme le carré 4aa du premier Axe est au carré 4bb du second [a].

23. COR. IV. Supposant toujours l'équation $xx - aa =$

[a] Les Points de l'Hyperbole, rapportés au second Axe, ne donnent pas la même équation qu'étant rapportés au premier, ainsi qu'il arrive dans l'Ellipse; c'est qu'à proprement parler, la Ligne GD (fig. 70.) n'est point un Axe des Hyperboles opposées, MBK, mAL. Si GD coupe en deux parties égales toutes les Lignes Mm, menées parallèlement à AB, cela n'arrive que parce que l'on considère en même-temps deux Hyperboles opposées; ce qui est purement accidentel; les propriétés d'une Hyperbole pouvant être absolument découvertes sans son opposée; & si cette Courbe peut être engendrée dans le Cône, & sa propriété caractéristique s'y découvre indépendamment de sa compagne, comme on l'a vu n°. 4. en supposant le Cône opposé, ou en n'y faisant pas attention.

27. COR. VIII. D'où l'on déduira 1°. comme dans les n°. 11, 12, 13, de la Parabole, qu'une Parallèle GQ. (fig. 70.) au premier Axe AB d'une Hyperbole, rencontrera nécessairement cette Courbe en un seul Point Q. 2°. Qu'une corde quelconque QM prolongée, s'il en est besoin, rencontrera nécessairement, ou est déterminée à rencontrer le premier Axe AB. 3°. Qu'une Tangente en un Point quelconque de cette Courbe, excepté son Sommet, ira aussi rencontrer le premier Axe; & qu'ainsi une Tangente, une Ordonnée au Point de contingence, & la portion de l'Axe comprise entre la rencontre de la Tangente & l'Ordonnée, formeront toujours un Triangle-Rectangle, d'où l'on pourra, si l'on veut, trouver l'expression de la *sous-Tangente* de l'Hyperbole, & par conséquent de la Tangente; en se servant de la méthode générale de tirer la Tangente des Courbes, que j'ai donnée au n°. 18 & 19 de la Parabole; ainsi que je le ferai voir plus bas.

* 28. COR. IX. Il est très-facile avec l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, de déterminer le second Axe d'une Hyperbole donnée, dont on a le premier. Pour cela il n'y a qu'à savoir, quelle doit être la valeur de l'indéterminée du premier Axe, correspondante à l'Ordonnée égale au second. C'est pourquoi de l'extrémité G de ce second Axe abaissant la Perpendiculaire GQ, qui rencontrera nécessairement l'Hyperbole en un Point Q (27), & tirant au premier Axe l'Ordonnée QS, cette Ordonnée sera égale à CG = b, moitié du second Axe; & l'on aura QS = yy = bb; par conséquent, en mettant dans l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, la grandeur bb en la place de yy, elle deviendra $xx - aa = \frac{aabb}{bb} = aa$, ou, en transposant, $xx = 2aa$.

Par où l'on voit que, quand l'Ordonnée est égale au second Axe, l'indéterminée x correspondante à cette Ordonnée,

est l'hypothénuse d'un Triangle isocèle Rectangle, donc chacun des côtés est égal à la moitié du premier Axe.

Ceci bien entendu, pour avoir le second Axe déterminé, quand le premier est donné avec la Courbe; sur le milieu C du premier on élèvera une Perpendiculaire indéfinie GV; on prendra sur cette Perpendiculaire la partie CT = CB, moitié du premier Axe, prenant ensuite BT, hypothénuse de ce Triangle-Rectangle, on la portera de C en S sur le premier Axe, d'où tirant l'Ordonnée SQ, cette Ordonnée sera égale à la moitié du second Axe.

DÉM. Puisque $\overline{BT} = \overline{BC} + \overline{CT} = aa + aa = 2aa$, & que CS = BT (const.), on aura CS ou $xx = 2aa$. Maintenant, quelque puisse être le second demi-Axe z de l'Hyperbole proposée, l'on aura (17) $xx - aa : yy$ ou $\overline{SQ} : aa : zz$ carré de la moitié du second Axe. Ainsi, en mettant, dans cette proportion, $2aa$ en la place de xx , elle deviendra $2aa - aa$, ou aa . $\overline{SQ} : aa : zz$. Donc $\overline{SQ} = zz$, ou $\overline{SQ} = z$; c'est-à-dire, que par cette construction, l'Ordonnée SQ = la moitié du second Axe. C. Q. F. D.

29. COR. X. Portons l'hypothénuse BD du centre C aux Points F, f, du premier Axe indéterminé des Hyperboles opposées; & d'un Point quelconque M de ces Hyperboles tirons les Lignes MF, Mf, aux Points F, f; enfin menons l'Ordonnée MP à l'Axe, & il arrivera toujours que Mf égale une quatrième proportionnelle aux trois grandeurs CB, Cf, CP, en y ajoutant le demi-Axe CB; & que MF sera toujours égale à la même quatrième proportionnelle, dont on ôtera le demi-Axe CB; c'est-à-dire, que

$$Mf = \frac{Cf \times CP}{CB} + CB, \text{ \& } MF = \frac{Cf \times CP}{CB} - CB.$$

DÉM. Supposant les mêmes dénominations que ci-dessus; & faisant de plus $BD = Cf = CF = c$; d'où l'on a $cc = aa + bb$; $FP = CP - CF = x - c$; donc $\overline{FP} = xx - 2cx + cc$; & $\overline{fP} = CP + Cf = x + c$;

$$= \frac{c^2x^2 - 2acx + a^2}{aa}; \text{ donc, (en extrayant la Racine}$$

$$\text{quarrée) } MF = \frac{cx - aa}{a} = \frac{cx}{a} - a. \text{ C. Q. F. 2}^\circ. \text{ D.}$$

& ce que l'on doit bien remarquer.

$$30. \text{ COROL. II. Puisque } Mf = \frac{cx + aa}{a}, \text{ \& } MF = \frac{cx - aa}{a}, \text{ on aura } Mf + MF = \frac{2cx}{a}; \text{ donc } Mf + MF$$

$\times a = 2cx$; par conséquent $Mf + MF : x :: 2c : a$; c'est-à-dire, que la somme des Lignes, menées d'un Point quelconque M de l'Hyperbole aux Points f, F, est toujours dans un rapport constant avec l'indéterminée CP correspondante au Point M; cette somme étant toujours à CP = x, comme 2c est à a, lesquelles sont des grandeurs constantes.

31. COROL. XII. Si, au lieu de prendre la somme des valeurs des Lignes Mf, MF, trouvées au n^o. 29, on retranche au contraire la plus petite de la plus grande, on aura $Mf - MF = \frac{2aa}{a} = 2a = AB$; c'est-à-dire que

la différence des Lignes Mf, MF, en quelque Point de la Courbe qu'on les prenne, sera toujours égale au premier Axe. Ce qu'il faut encore bien remarquer.

32. COR. XIII. Le Rectangle $AF \times BF = \overline{CD}$ carré de la moitié du second Axe. Car $AF = CF + CA = c + a$, & $BF = CF - CB = c - a$; donc $AF \times BF = c^2 - a^2$; or, (à cause du Triangle-Rectangle BCD, & de $BD = CF = c$) on a $cc = aa + bb$. Ainsi, en mettant la valeur de cc dans l'équation S, on aura $AF \times BF = aa + bb - aa = bb = \overline{CD}$; donc $AF \times BF = \overline{CD}$.

33. DÉF. Si l'on cherche une troisième proportionnelle

donc $\overline{fP} = xx + 2cx + cc$. Cela supposé, il s'agit de prouver que $Mf = \frac{cx}{a} + a = \frac{cx + aa}{a}$, & que MF

$$= \frac{cx}{a} - a = \frac{cx - aa}{a}$$

1^o. Le Triangle-Rectangle fPM nous donne $\overline{fP} + \overline{PM} = \overline{Mf} = xx + 2cx + cc + yy$ (D); par conséquent, en mettant, dans l'équation D, la quantité $aa + bb$ pour cc, & au lieu de yy l'expression $\frac{bbxx - aabb}{aa}$ (23), on au-

$$ra \overline{Mf} = xx + 2cx + aa + bb + \frac{bbxx - aabb}{aa},$$

$$\text{donc (eu réduisant à la même dénomination) } \overline{Mf} = \frac{a^2x^2 + 2a^2cx + a^4 + a^2b^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{aa} =$$

$$\frac{a^2x^2 + 2a^2cx + a^4 + b^2x^2}{aa} \text{ (M). Or } a^2x^2 + b^2x^2 =$$

$a^2 + b^2 \times x^2 = c^2x^2$; par conséq. en mettant dans l'équation M, la grandeur c^2x^2 en la place de $a^2x^2 + b^2x^2$, elle deviendra $\overline{Mf} = \frac{c^2x^2 + 2a^2cx + a^4}{aa}$; donc (en tirant la

$$\text{Racine quarrée) } Mf = \frac{cx + aa}{a} = \frac{cx}{a} + a. \text{ C. Q.}$$

F. 1^o. D.

2^o. Moyennant le Triangle-Rectangle FPM, nous aurons $\overline{MF} = \overline{PF} + \overline{PM} = cc - 2cx + xx + yy$; & en faisant précisément les mêmes substitutions que dans l'équation de l'art. 1. nous arriverons à cette équation, $\overline{MF}$

au premier & au second Axe, il vient une Ligne à laquelle on a donné le nom de *Paramètre* du premier Axe; ce seroit au contraire le *Paramètre* du second, si ce second occupoit le premier terme de la proportion. Faisant donc $2a$ (AB).

$$2b \text{ (GD)} :: 2b \text{ (GD)}. p = \frac{4bb}{2a} \text{ ou } \frac{2bb}{a}; \text{ cette grandeur } p$$

ou $\frac{2bb}{a}$ désignera, dans la suite, le *Paramètre* du premier Axe. Par où l'on voit que l'un des Axes est toujours une moyenne proportionnelle entre l'autre Axe & son *Paramètre*.

34. COR. XIV. L'Ordonnée FK à l'un des Points F, f, est égale à la moitié p du *Paramètre* du premier Axe; c'est-à-dire que $FK = \frac{p}{2}$ ou $\frac{bb}{a}$.

DÉM. Nous savons (15) que $\overline{FK} \times \overline{BF} :: \overline{CD} \times \overline{CB}$, ou :: $bb \times aa$. Mais $AF \times BF = \overline{CD}$ ou bb (32). Donc $\overline{FK} \times bb :: bb \times aa$, ou $FK : b :: b : a$; donc $FK = \frac{bb}{a}$ ou $\frac{p}{2}$. C. Q. F. D.

* 35. COR. XV. La distance BF de l'un des Points F au Sommet B le plus proche, est plus petite que le quart du *Paramètre* p; c'est-à-dire, que $BF < \frac{p}{4}$.

DÉM. $BF = CF - CB = c - a$; & puisque $p = \frac{2bb}{a}$ (33), on aura $\frac{p}{4} = \frac{bb}{2a}$. D'ailleurs $cc = bb + aa$; donc $bb = cc - aa$. Par conséquent $BF : \frac{p}{4} :: c - a : \frac{bb}{2a}$; c'est-à-dire, $c - a : \frac{cc - aa}{2a}$ (à cause de $bb = cc - aa$) :: $c - a$

$\times 2a : cc - aa$; (en divisant ces deux derniers termes par $c - a$) $2a : c + a$, ou :: $AB : AF$; donc $BF : \frac{p}{4} :: AB : AF$; mais $AB < AF$. Par conséquent aussi $BF < \frac{p}{4}$. C. Q. F. D.

36. REMARQ. Nous démontrerons au n^o. 35, que les

Points F, f, déterminés comme nous l'avons fait au n°. 29, sont de véritables Foyers; & que par conséquent 1°. la double Ordonnée au Foyer F d'une Hyperbole, est égale au Paramètre de son premier Axe (34). 2°. Que la distance du Foyer F d'une Hyperbole à son Sommet, est plus petite que le quart du Paramètre de son premier Axe (35.)

37. COROL. XV. Puisque $2a \cdot 2b :: 2b \cdot p$ (33); donc $4ab :: 2a \cdot p$ (256. Inf. T. 2.), ou $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$; ainsi, en

substituant dans l'équation $xx - aa = \frac{aay}{bb}$ de l'Hyperbole (trouvée n°. 17.), l'expression $\frac{2a}{p}$ au lieu de $\frac{aa}{bb}$, elle deviendra $xx - aa = \frac{2ay}{p}$, qui est une autre équation de l'Hyperbole par rapport à son Paramètre.

* 38. COR. XVI. Le carré PM d'une Ordonnée quelconque PM au premier Axe prolongé de l'Hyperbole, est plus grand que le Rectangle de l'Abcisse BP par le Paramètre p du même Axe.

DÉM. On sçait que $p = \frac{2bb}{a}$ (33); $BP = CP - CB = x - a$; donc $BP \times p = x - a \times \frac{2bb}{a}$; $PM = y$, ainsi $PM^2 = yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$ (23); $= \frac{xx - aa}{a} \times \frac{bb}{a}$; il faut donc démontrer que $PM^2 > BP \times p$, ou que $\frac{xx - aa}{a} \times \frac{bb}{a} > x - a \times \frac{2bb}{a}$. Or $\frac{xx - aa}{a} \times \frac{bb}{a} = \frac{xx - aa}{a} \times \frac{bb}{a}$; $x - a \times \frac{2bb}{a} ::$ (en divisant par $\frac{bb}{a}$) $\frac{xx - aa}{a} :: x - a$.

$2by [a]$; donc $bb + yy \times \frac{aa}{bb} > \frac{2aay}{b}$, c'est-à-dire $MN > m \times CN$. C. Q. F. D.

* 41. REMARQ. J'ai ajouté, pour la vérité de ce Corollaire, que l'Abcisse $CN = y$ doit être plus grande ou plus petite que la moitié b du second Axe. Car, si y égalait b, on auroit $bb + yy = 2bb$, & $2by = 2bb$; ainsi $bb + yy$ égaleroit $2by$; & par conséquent $MN = m \times CN$. par où l'on voit que le Corollaire précédent est sujet à cette exception.

42. PROP. IV. Par le Sommet B de l'Hyperbole (fig. 71.) menant HBT parallèle & égale au second Axe GD; de manière que $BH = BT = CG = CD = b$; & du centre C, tirant par les extrémités H, T, les droites indéfinies CN, CR; si l'on mène après cela, par un Point quelconque P de l'Axe prolongé, la droite LK parallèle à HT, ou au second Axe GD, on aura toujours 1°. $LM \times MK = BH = bb$.

2°. En prolongeant les Lignes CN, CR, indéfiniment de l'autre côté de C, & tirant du Point M ou F, où LK rencontre l'Hyperbole, la Ligne Ml parallèlement au premier Axe, il arrivera toujours que $Mk \times Ml = CB = aa$.

DÉM. de la première partie. Supposant aux mêmes Lignes les mêmes dénominations que ci-dessus; l'on aura, (à cause des Triang. sembl. CBH, CPL) $a (CB) \cdot b (BH) :: x (CP)$.

[a] C'est-à-dire que la somme des carrés bb, yy , de deux grandeurs inégales b, y, est toujours plus grande que le double du produit by de ces grandeurs. Soit $y > b$, & d leur différence; on aura $y - b = d$; donc (en quarrant) $yy - 2by + bb = dd$; ainsi $yy + bb = 2by + dd$, & par conséquent $yy + bb > 2by$.

$\times 2 ::$ (en divisant par $x - a$) $\frac{x + a}{a} ::$ (en mul-

tipliant par a) $x + a \cdot 2a :: AP \cdot AB$; donc $\frac{xx - aa}{a} \times \frac{bb}{a}$.

$x - a \times \frac{2bb}{a}$, ou $PM \cdot BP \times p :: AP \cdot AB$. Mais $AP >$

AB ; donc $PM > BP \times p$. C. Q. F. D.

39. REMARQ. C'est cet excès du carré de l'Ordonnée sur le Rectangle de l'Abcisse par le Paramètre, qui a fait donner le nom d'Hyperbole à cette espèce de Section conique, du mot Grec υπερβολη superlatio excès.

* COR. XVII. Cherchons présentement le Paramètre du second Axe, en faisant $2b \cdot 2a :: 2a$ est à un quatrième terme $= \frac{2aa}{b}$ que j'appelle m; & je dis encore que le

carré d'une Ordonnée quelconque MN au second Axe, prolongé s'il est nécessaire, est plus grand que le Rectangle de l'Abcisse CN correspondante, par le Paramètre m du second Axe; pourvu que CN soit plus grande ou plus petite que la moitié de ce second Axe.

DÉM. Soit donc $MN = CP = x$; $CN = MP = y$;

on vient de voir que $m = \frac{2aa}{b}$, & (21) $xx = \frac{aay + aabb}{bb}$

$= \frac{bb + yy}{b} \times \frac{aa}{b} = MN$. Il s'agit donc de prouver que

$MN > m \times CN$, ou que $\frac{bb + yy}{b} \times \frac{aa}{b} > \frac{2aay}{b}$.

Or $bb + yy \times \frac{aa}{bb} \cdot \frac{2aay}{b} ::$ (en divis. par $\frac{aa}{b}$) $\frac{bb + yy}{b}$

$2y ::$ (en multipliant par b) $bb + yy \cdot 2by$. Or $bb + yy >$

$\frac{bx}{a} = PL = PK$; ainsi $LM = PL - PM = \frac{bx}{a} - y$,

& $MK = PK + PM = \frac{bx}{a} + y$; donc $LM \times MK =$

$\frac{bx}{a} - y \times \frac{bx}{a} + y = \frac{b^2 x^2}{aa} - yy = bb$ (25); par consé-

quent $LM \times MK = bb$ ou BH ou GC. C. Q. F. 1°. D.

DÉM. de la seconde partie. Les Triang. semblables CPK, kMK, donnent $\frac{bx}{a} (PK) \cdot x (CP) :: \frac{bx}{a} + y (MK) \cdot Mk$

$= x + \frac{ay}{b}$. Ce que l'on trouvera en divisant le produit

des Moyens $x, \frac{bx}{a} + y$, par le premier terme $\frac{bx}{a}$.

Pareillement des Triangles semblables lML, LPC, on tire $\frac{bx}{a} (PL) \cdot x (CP) :: \frac{bx}{a} - y (LM) \cdot x - \frac{ay}{b} = Ml$; (ce

que l'on trouvera en multipliant les Moyens $x, \frac{bx}{a} - y$;

& divisant leur produit par le premier terme $\frac{bx}{a}$). Par consé-

quent $Mk \times Ml = x + \frac{ay}{b} \times x - \frac{ay}{b} = xx -$

$\frac{aay}{bb} = aa$ (24). Donc $Mk \times Ml = aa$ ou CB. C. Q.

F. 2°. D.

43. Réciproquement, si une Ligne quelconque LMK, terminée par les côtés d'un Triangle isocèle LCK, est divisée au Point M, de manière que le produit $LM \times MK$ de ses deux parties, soit égal au carré BH de la moitié d'une autre Ligne HT, terminée par les côtés du même

Angle & parallèle à LMK ; je dis que le Point M est à une Hyperbole, ou que la Courbe, qui divise ainsi toutes les indéterminées LMK, est une Hyperbole.

DEM. Du Sommet de l'Angle C tirons, par le milieu de HT parallèle à LK, l'indéfinie CQ ; laquelle divisera aussi LK par le milieu P ; faisons le prolongement CA = CB ; la Perpendiculaire CG = CD = HB = BT ; & , conservant les mêmes dénominations que ci-dessus, nous aurons

$$a (CB). b (BH) :: x (CP). \frac{bx}{a} = PL \text{ ou } PK. \text{ Donc } LM =$$

$$PL - PM = \frac{bx}{a} - y, \text{ \& } MK = PK + PM = \frac{bx}{a} + y. \text{ Donc } LM \times MK = \frac{b^2 x^2}{aa} - yy. \text{ Or (supp.) } LM \times$$

$$MK = BH = bb. \text{ Donc } bb = \frac{b^2 x^2}{aa} - yy. \text{ Ainsi (en multipliant par } aa) a^2 b^2 = b^2 x^2 - a^2 yy ; \text{ donc (en transposant) } a^2 yy = b^2 x^2 - a^2 bb = xx - aa \times bb ; \text{ par conséquent } yy (PM). xx = aa \text{ ou } x = a \times x + a \text{ (BP} \times \text{AP)}$$

: : bb (BH). aa (CB), qui est la propriété caractéristique de l'Hyperbole, que l'on a trouvée au n°. 15. le Point M est donc à une Hyperbole.

44. COROL. I. Le point P ayant été pris à volonté sur le prolongement du premier Axe, il s'ensuit que tous les Rectangles, comme LM $\times$ MK, sont égaux entr'eux ; puisqu'ils sont toujours égaux au même carré BH = bb ; c'est-à-dire qu'en tirant par un autre Point Q du premier Axe prolongé une parallèle IV à LK, l'on aura VE $\times$ EI = LM $\times$ MK, ou MK. EI :: VE. LM.

45. COR. II. On verra donc que VE est plus petite que LM ; puisqu'en tirant MS, parallèlement au premier Axe BQ, il est évident que MK < al ; or al < EI ; donc MK < EI ; mais (44) MK. EI :: VE. LM ; ainsi MK étant < EI, il faut que VE soit aussi < LM.

d'un Cône droit DCH, (fig. 72.), c'est-à-dire d'un Cône, dont l'Axe OC soit Perpendiculaire sur sa Base DH, & l'on fera que la Section AT de ce Cône soit parallèle à l'Axe OC ; ce qui donnera l'Hyperbole NBx. Après quoi, si l'on tire du Sommet B de cette Hyperbole, une Ligne BK dans le Plan du Triangle par l'Axe, parallèlement à la Base DH, & que du Point G, où cette Ligne coupe l'Axe OC, on décrive sur l'Axe OC & dans le Plan du Triangle par l'Axe, une Hyperbole nGy égale & semblable à l'Hyperbole NBx [4] ; de manière que le Point G soit le Sommet de la nouvelle Courbe, on verra que les côtés CD, CH, du Cône proposé sont les Asymptotes de l'Hyperbole nGy, ou de NBx transportée en G dans le Plan du Triangle par l'Axe.

DEM. 1°. BK est le second Axe de l'une ou l'autre Hyperbole (art. 3. du n°. 16.) ; 2°. (conf.) BK est Perpendiculaire sur l'Axe OC, au Sommet G de l'Hyperbole nGy ; elle y est aussi évidemment divisée en deux parties égales ; d'ailleurs le Point C est le centre de l'Hyperbole nGy ; comme cela est clair, en abaissant CV perpendiculairement sur le premier Axe AB de l'Hyperbole NBx. Par conséquent les côtés CD, CH, de la fig. 72. sont par rapport à l'Hyperbole nGy, précisément dans le même cas que les Lignes CN, CR, de la fig. 71. par rapport à l'Hyperbole MBF. Or les Lignes CN, CR, sont Asymptotes de l'Hyperbole MBF (supp.) ; donc aussi les côtés CD, CH, sont Asymptotes de l'Hyperbole nGy, ou de son égale NBx transportée en G dans le Plan du Triangle par l'Axe. C. Q. F. T. & D.

* 49. COROL. V. Si l'on tire (fig. 71.) par le centre C, & dans l'Angle des Asymptotes NCR, ou dans son opposé au Sommet, une Ligne quelconque de ; elle coupera nécessairement l'Hyperbole MBF ou son opposée en quelque

[4] L'Hyperbole nGy sera égale & semblable à l'Hyperbole NBx, si l'on fait que les Ordonnées sur GO, à une certaine distance du Sommet G, soient égales aux Ordonnées sur BT à une même distance du Sommet B. Ce qui ne peut pas être plus évident.

46. COROL. III. Par conséquent, en abaissant des Points E, M, les Perpendiculaires Et, Mr, sur le côté CN, la Perpendiculaire Et sera plus petite que Mr. Car les Triangles semblables VEt, LMr, donnent VE. LM :: Et. Mr. Or VE < LM (45) donc Et < Mr.

47. COROL. IV. Ainsi, à mesure que la branche Hyperbolique BMÉ s'éloigne du Sommet B, elle s'approche continuellement du côté CN. Cependant cette branche de l'Hyperbole & le côté CN, prolongés à l'infini, ne se rencontreront jamais. Car, si ces Lignes se rencontroient, on

aurait alors PM = PL, ou PM = PL ; c'est-à-dire que

$$yy = \frac{bbxx}{aa} ; \text{ puisque } PL = \frac{bx}{a} \text{ (par la Démonstration du}$$

$$\text{n°. 42.) : mais cela ne peut pas être, vu que (25) } yy = \frac{bbxx}{aa} - \frac{aabb}{aa}, \text{ laquelle est une grandeur plus petite que}$$

$$\frac{bbxx}{aa}.$$

C'est pourquoi les Anciens ont appelé Asymptotes les Lignes indéfinies CN, CR ; mot qui est composé de trois mots Grecs *a* privatif, *syn* avec, & *πλω* je tombe ; c'est-à-dire *incoincident* ou qui ne tombent point avec [4]. Les Asymptotes de l'Hyperbole sont donc des Lignes droites, qui s'approchent continuellement de cette Courbe, sans pouvoir la rencontrer ; & par conséquent cette Courbe est entièrement renfermée dans l'Angle NCR des Asymptotes.

* 48. REMARQ. Comme les Lignes CN, CR (fig. 71.) (tirées du centre de l'Hyperbole MBF par les extrémités de la Perpendiculaire HBT au Sommet, égale au second Axe GCD & telle que BH = BT) sont des Asymptotes (47) ; pour trouver de pareilles Lignes dans le Cône, on se servira

[4] Les Grecs donnoient toujours à certaines Lignes principales, des noms qui leur exprimoient quelque propriété, en sorte que le Peuple, comme les Scavans, en auroit ce que l'on vouloit dire en prononçant le mot Asymptotes.

Point F ou f ; & entrera au-dedans de cette Courbe, sans la couper une seconde fois. Car l'Hyperbole s'approchant sans cesse de l'Asymptote CR, & la Ligne ed s'en écartant toujours depuis le Point C, il faut bien que ces deux Lignes se coupent en quelque Point F, & non en davantage ; puisqu'après s'être rencontrées, l'une va d'un côté & l'autre d'un autre.

50. DEF. On appelle premier Diamètre toute Ligne FCf, laquelle passant par le centre rencontre les Hyperboles opposées ; parce qu'elle coupe en deux parties égales, toutes les Lignes qui lui sont Ordonnées parallèlement à la Tangente au Point F ou f, où cette Ligne coupe les Hyperboles ; ainsi que nous le verrons plus bas.

* 51. COR. VI. Par conséquent, si l'on prend arbitrairement & à égale distance du centre, deux Points P, p, sur l'Axe prolongé des Hyperboles opposées ; que l'on mène l'Ordonnée PF à l'Axe ; & que du Point F l'on tire par le centre C l'indéfinie FCe, il arrivera que cette Ligne rencontrera l'Hyperbole opposée au Point f, qui est l'extrémité de son Ordonnée pf au Point p.

DEM. 1°. Elle rencontrera l'Hyperbole opposée (49). 2°. Les Abcisses CP, Cc, étant égales (conf.), l'Ordonnée au Point p est égale à l'Ordonnée PF ; puisque les Hyperboles opposées sont égales & semblables : mais, comme les Triangles semblables CPF, Cpf, donnent CP. Cp :: PF. pf, & que CP = Cp ; il s'ensuit que PF = pf ; or PF = l'Ordonnée en p ; donc pf est aussi égale à cette même Ordonnée ; c'est-à-dire, qu'elle est elle-même cette Ordonnée. Donc le Point f, où la Ligne FCe rencontre l'Ordonnée au Point p, est l'extrémité de cette Ordonnée.

* 52. COR. VII. Donc tout premier Diamètre FCf est coupé en deux parties égales par le centre ; puisque, dans les Triangles Rectangles, CPF, Cpf, ayant CP = Cp, & PF = pf (51), il faut nécessairement que les Hypothénuses CF, Cf, soient aussi égales.

* 53. COR. VIII. De plus, si par un Point quelconque m de l'une des Asymptotes CN, l'on tire une Parallèle mg

à l'autre *Asymptote* CR; cette Parallèle coupera l'Hyperbole en un seul Point F; puisque cette Parallèle se tiendra toujours à une distance déterminée de l'*Asymptote* pendant tout son cours, & qu'au contraire l'Hyperbole s'en approche plus près que d'une grandeur donnée quelconque.

54. PROP. V. Par un Point quelconque M de l'Hyperbole MBF, (fig. 73.) menons parallèlement à l'*Asymptote* CR, une Ligne MI terminée en un Point I de l'autre *Asymptote* CL; & par le même Point M, une autre Parallèle Mf à l'*Asymptote* CL; si nous tirons de plus par le Sommet B les Hypothénuses égales BG, BD, rencontrant les *Asymptotes* en O, n; je dis que le Rectangle $IM \times MF = BO \times OC$.

DÉM. Remarquez d'abord que BG est parallèle à l'*Asymptote* CR; puisque BT étant égale & parallèle à GC, (const.), les Lignes BG, CT, qui les terminent, sont égales & parallèles; & par la même raison BD est Parallèle à CL; ainsi GC. CD :: GO. OB. Or GC = CD (supp.); donc GO = OB. De plus GB. BD :: GO. OC: mais GB = BD (const.); donc GO = OC. On prouvera de même que Dn = Bn = nC. Ainsi les Lignes GO, OB, OC, Dn, Bn, nC, sont toutes égales.

Tirons présentement par le Point M la Ligne MK perpendiculairement à l'Axe prolongé; & les Triangles semblables LMI, HBO, donneront BH. BO :: LM. IM. Pareillement des Triangles semblables BTn, MKf, on tirera BT ou BH. Bn ou OC :: MK. Mf. Donc (en multipliant par ordre les termes de ces deux proportions) on aura BH. BO $\times$ OC :: LM $\times$ MK. IM $\times$ Mf. Or (42) LM $\times$ MK = BH²; donc IM $\times$ Mf = BO $\times$ OC. C. Q. F. D.

55. Réciproquement, si l'on tire des Lignes IM parallèlement à CR, de manière que IM $\times$ IC ou Mf = toujours BO $\times$ OC; le Point M sera à l'Hyperbole.

On suppose que BO = OC. ce qui arrivera toujours en coupant l'Angle LCR en deux parties égales par l'indéterminée CP; & tirant OB, en un Point quelconque

à liberté une Ligne SHQR, coupant les branches de l'Hyperbole aux Points H, Q, & les *Asymptotes* en R, S; & vous aurez toujours RQ = SH.

DÉM. Menez d'abord les Lignes Hd, Hn; & Qo, Qb, parallèles aux *Asymptotes* CS, CR; & rappelez-vous que tous les Rectangles, tels que Qb $\times$ Qo, & Hn $\times$ Hd, sont égaux entr'eux (56); vous aurez donc Qb $\times$ Qo = Hn $\times$ Hd; ainsi Qb. Hd :: Hn. Qo: mais les Triangles semblables RQb, RHd, donnent Qb. Hd :: RQ. RH. Donc RQ. RH :: Hn. Qo; or (à cause des Triangles semblables SHn, SQo) Hn. Qo :: SH. SQ; par conséquent RQ. RH :: SH. SQ. Donc RH = RQ. RQ :: SQ = SH. SH, ou HQ. RQ :: HQ. SH. D'où il est clair que RQ = SH. C. Q. F. D.

59. Réciproquement, si l'on prend sur une Ligne SR, terminée par les côtés d'un Angle SCR, la partie SH = RQ, les Points Q, H, seront à l'hyperbole.

DÉM. Conservant la même construction que ci-dessus, nous aurons Qb. Hd :: RQ. RH :: SH. SQ (puisque RQ égalant SH (supp.), RH doit égalet SQ) :: Hn. Qo. Donc Qb. Hd :: Hn. Qo. Ainsi Qb $\times$ Qo = Hd $\times$ Hn: mais, si l'on coupoit l'Angle SCR en deux parties égales; & que cherchant une moyenne proportionnelle entre Qb & Qo, on la transportât de C en G, & que l'on tirât GB parallèlement à CR; laquelle Ligne GB seroit égale, en ce cas, à GC; l'on auroit Qb $\times$ Qo = GB $\times$ GC = Hd $\times$ Hn; donc les Points Q, H, seront à l'hyperbole (55).

60. COROL. Ainsi, de quelque manière que l'on tire dans l'Angle des *Asymptotes*, une Ligne SR terminée par ces *Asymptotes*, & coupant ou rencontrant l'hyperbole, la partie SH de cette Ligne, comprise entre une branche de la Courbe & son *Asymptote* voisine CS, sera toujours égale à une autre partie RQ de cette même Ligne, comprise entre l'autre branche de la Courbe & son *Asymptote* voisine CR. Ce que l'on doit bien remarquer; car cette propriété de l'hyperbole va nous servir à déterminer la manière de tirer une Tangente à cette Courbe, par un de ses Points donné quelconque.

O; parallèlement à CR. L'on suppose encore que HBT, ainsi que LMK soient perpendiculaires sur l'indéfinie CP.

DÉM. BH. BO :: LM. IM; & BT ou BH. Bn ou OC :: MK. Mf ou IC. Ainsi (en multipliant par ordre les termes de ces deux proportions) BH. BO $\times$ OC :: LM $\times$ MK. IM $\times$ IC. Or (supp.) IM $\times$ IC = BO $\times$ OC. Donc LM $\times$ MK = BH²; par conséquent le Point M est à l'Hyperbole (43).

56. COR. Et, comme le Point M a été pris à liberté, il s'ensuit que tous les Rectangles quelconques, tels que IM $\times$ Mf, ou IM $\times$ IC, sont égaux entr'eux; parce qu'on les trouvera toujours égaux au même Rectangle déterminé BO $\times$ OC.

57. REMARQ. 1°. Le Rectangle BO $\times$ OC, ou plutôt le carré OC est ce que les Géomètres appellent la *puissance de l'Hyperbole*; qui est toujours égale à la quatrième partie de la somme des carrés des deux demi-Axes CB, CD; puisque OC n'étant que la moitié de l'Hypothénuse BD, on aura OC = $\frac{BD}{2}$; or BD = CB + CD; donc OC = $\frac{CB + CD}{2}$.

2°. Tous les Rectangles IM $\times$ IC sont donc égaux à la *puissance de l'Hyperbole*. Ainsi, en connoissant un de ces Rectangles, la Racine quarrée de cette *puissance* sera aisément connue; puisque cette Racine sera une moyenne proportionnelle entre les deux côtés du Rectangle donné.

3°. De plus, si l'Angle HCT des *Asymptotes* étoit droit, l'Angle BOC le seroit aussi; & par conséquent BC = OC = $\frac{1}{2}IM \times IC$; donc BC = $\sqrt{\frac{1}{2}IM \times IC}$, c'est-à-dire qu'en ce cas, le premier demi-Axe BC, qui divise toujours l'Angle des *Asymptotes* en deux parties égales (const. du n°. 42.), est égal à la Racine quarrée du double de la *puissance* de l'Hyperbole.

58. PROP. VI. Par un Point quelconque S (fig. 74.) tirez

61. PROPOS. VII. Prenons sur l'hyperbole un Point quelconque H (fig. 75.), par lequel nous mènerons Hn parallèlement à l'*Asymptote* CR; après quoi faisant nS = nC, si du Point S nous menons par le Point donné H l'indéfinie SHR; cette Ligne sera Tangente en H; c'est-à-dire qu'elle ne touchera la Courbe qu'au seul Point H.

DÉM. Si SR rencontroit l'hyperbole en un autre Point quelconque d, on auroit Sd = HR (58 & 60); mais, à cause des Triangles semblables SnH, SCR (const.), Sn. nC :: SH. HR. Or Sn = nC (const.); donc SH = HR; ainsi, puisque Sd égaleroit aussi HR, on auroit Sd = SH; ce qui est absurde. Il n'est donc pas possible que SR rencontre l'hyperbole en un autre Point que H, en supposant la construction de l'énoncé; & par conséquent SR est une Tangente. C. Q. F. D.

On voit par la construction de cette Proposition, qu'une Ligne SR terminée par les *Asymptotes*, & coupée en deux parties égales au Point, où elle rencontre l'hyperbole, est nécessairement une Tangente.

62. Réciproquement, si une Ligne SR terminée par les *Asymptotes*, est Tangente de l'hyperbole en quelque Point H, elle sera nécessairement coupée en deux parties égales au Point de contingence.

DÉM. Car, pour avoir une Tangente au Point H, il faut, ainsi qu'on vient de le voir, mener une parallèle à CR; faire nS = nC; & tirer par les Points S, H, une Ligne SHR, laquelle sera Tangente en H (61); & par conséquent elle ne sera pas différente de la supposée: étant assez évident qu'au même Point, il n'est pas possible de tirer à la même Courbe deux Tangentes différentes. Or SHR est coupée en deux parties égales au Point de contingence H (const.); donc la supposée le sera aussi. C. Q. F. D.

63. COR. I. D'où il suit que la Ligne HBT (fig. 71.), menée au Sommet B de l'hyperbole, parallèlement au second Axe CD, est Tangente en ce Point; puisqu'elle y est coupée en deux parties égales (const.).

* 64. COR. II. Si par un Point H (fig. 75.) d'une hy-

perbole, l'on mène un premier Diamètre HCh (50); une Tangente SHR (61), & les parallèles HG , Hg , aux Asymptotes CS , CR , jusqu'à ce qu'elles rencontrent la Ligne GCg , menée par le centre C parallèlement à la Tangente SHR ; cette Ligne GCg ainsi déterminée, & que l'on appelle *second Diamètre conjugué* au premier Diamètre HCh , sera coupée en deux parties égales au centre C , & de plus elle sera égale à la Tangente SR .

DÉM. Car les Lignes SC , Hg , étant parallèles, ainsi que les Lignes SH , Cg (const.), il est évident que $Cg = SH$. Or $SH = HR$ (62); donc $Cg = HR$; mais $HR = GC$, puisque la figure $CGHR$ est un parallélogramme (const.); donc $Cg = GC$. Par conséquent le Diamètre conjugué GCg est coupé en deux parties égales au centre C de l'hyperbole, & est égal à la Tangente SHR ; car les moitiés HR , GC , étant égales, il faut que leurs doubles Gg , SR , le soient aussi. C. Q. F. D.

* 65. COR. III. Par l'autre extrémité b du Diamètre Hh , ayant tiré la Ligne thb parallèlement à la Tangente SHR , cette Ligne thb sera aussi Tangente au Point b de l'hyperbole opposée.

DÉM. A cause des Triangles semblables bCa , HCS , & de $HC = Ch$ (52), il est clair que $HS = bu$; de même les Triangles semblables bCt , HCR , feront connoître que $HR = bt$; or $HS = HR$ (62); donc $bu = bt$; c'est-à-dire que la Ligne tu est coupée en deux parties égales, par la rencontre de l'hyperbole au Point b ; & par conséquent cette Ligne est Tangente de l'hyperbole opposée (61).

* 66. COROL. IV. Les Lignes HnG , Hpg , menées du Point de contingence H aux extrémités G , g , du Diamètre conjugué Gg , sont aussi coupées en deux parties égales aux Points n , p , où elles rencontrent les Asymptotes CS , CR ; c'est-à-dire que $gp = pH$, & $Gn = nH$. Ce qui est assez clair; puisque Hg étant parallèle à CS (const.), l'on a 1° . $GC : Cg :: Gn : nH$. Or $GC = Cg$ (64); donc $Gn = nH$. 2° . Ayant encore HG parallèle à CR ; $gC : CG :: gp : pH$. Or $gC = CG$; donc $gp = pH$. C. Q. F. D.

DÉM. La Tangente SHR étant coupée en deux parties égales au Point de contingence H (62) par la Ligne hP , la parallèle Mm le sera aussi en P ; ainsi $ML = LP = ml$; or $ML = ml$ (60); donc $LP = Pl$. Donc, &c.

* 70. Réciproquement, 1° . si une corde Ll de l'Hyperbole est coupée en deux parties égales en un Point P , par un Diamètre bK ; cette Ligne Ll sera nécessairement parallèle à la Tangente SHR , tirée par le Point H où le Diamètre coupe la Courbe.

Car, si dans ces circonstances, Ll n'étoit pas parallèle à la Tangente SHR , on pourroit donc du Point l mener à cette Tangente une parallèle lx , laquelle tombant au-dessus ou au-dessous de Ll , seroit coupée en deux parties égales au Point y , par la rencontre du Diamètre bK (69); & l'on auroit $PL :: ly : yx$; donc la corde Lx seroit parallèle à Py ou au Diamètre bK ; & par conséquent une parallèle à un Diamètre de l'Hyperbole, pourroit couper cette Courbe en deux Points. Ce qui est absurde, vu que l'Hyperbole s'écarte toujours de plus en plus de l'un de ses Diamètres quelconques.

2° . Si deux cordes parallèles Ll , xT d'une hyperbole sont coupées en deux parties égales par la Ligne KP , cette Ligne prolongée passera nécessairement par le centre C de la Courbe.

Car, si elle n'y passoit pas, on pourroit tirer de ce centre une autre Ligne au Point de milieu P de la Ligne Ll ; ce qui seroit que Ll seroit parallèle à la Tangente au Point, où cette autre Ligne rencontreroit la Courbe (Art. 1°); par conséquent xT seroit aussi parallèle à cette Tangente, & par là, coupée en deux parties égales par la Ligne tirée du centre (69); mais (supp.) xT est aussi coupée en deux parties égales par KP , & en un Point différent de celui où la supposée la rencontre, autrement, ayant les deux Points communs P , K , elles co-incideroient: la Ligne xT auroit donc deux Points de milieu. Ce qui est absurde. Ainsi toute Ligne KP , qui joint le milieu de deux cordes parallèles dans l'hyperbole, passe nécessairement par le centre de cette Courbe.

* 67. COR. V. Ainsi les Asymptotes CS , CR , de l'hyperbole étant données, avec un Point H de cette Courbe; pour en avoir deux Diamètres conjugués, l'un desquels passe par le Point H , il n'y a qu'à tirer par le centre C la Ligne HCh ; faire $HC = Ch$; du Point H tirer Hn parallèlement à l'Asymptote CR ; prolonger Hn en sorte que $nG = Hn$, & tirer GCg coupée en deux parties égales au centre C ; alors les deux Lignes HCh , GCg , seront deux Diamètres conjugués de l'hyperbole.

DÉM. En tirant par le Point H , la Ligne SHR terminée par les Asymptotes & parallèle à la Ligne GCg , on trouvera que les Triangles HnS , GnC , étant semblables, & ayant les côtés égaux Hn , nG (const.), donneront $GC = SH$; mais, (à cause du parallélisme des Lignes GC , HR , & de celui des Lignes HG , CR (const.)), il est évident que $GC = HR$; donc $SH = HR$; la Ligne SHR est donc Tangente en H (61); donc la Ligne GCg , qui lui est égale & parallèle, est le Diamètre conjugué au Diamètre HCh (64). C. Q. F. D.

* 68. COR. VI. Si avec les deux Diamètres conjugués Hh , Gg , (fig. 75.) dont Hh est le premier, ou coupe l'Hyperbole, on veut déterminer les Asymptotes de cette Courbe; il faudroit joindre les extrémités G , g du second Diamètre par les Lignes HG , Hg ; & tirer du centre C par les Points de milieu n , p , de ces Lignes, les indéfinies CS , CR , qui seroient les Asymptotes cherchées. Puisque, si l'on avoit supposé les Asymptotes de la Courbe, elles auroient coupé par le milieu les Lignes HG , Hg (66); & n'auroient par conséquent pas été différentes des indéfinies CS , CR , que l'on vient de trouver; il faut donc que ces indéfinies soient les Asymptotes que l'on cherchoit.

* 69. COR. VII. Par un Point quelconque L de l'Hyperbole, différent de H , tirons parallèlement à la Tangente SHR , la Ligne Mm terminée aux Points M , m , des Asymptotes; & il arrivera que le Diamètre HCh , prolongé du côté de K , coupera en deux parties égales au Point P , la Ligne Ll terminée par la Courbe.

71. DÉF. On appelle *Ordonnée* à un Diamètre quelconque Hh de l'hyperbole, toute Ligne telle que LP ou Pt , tirée par un Point quelconque P de ce Diamètre prolongé, parallèlement à la Tangente SHR au Point H , où passe ce Diamètre.

72. COR. VIII. Tout premier Diamètre HCh , différent de l'Axe, fait des Angles obliques avec ses Ordonnées; ou, ce qui revient au même, avec les Tangentes SHR , thb , menées par les Points H , b , où ce Diamètre rencontre les hyperboles opposées.

DÉM. Tirant le demi-Axe CA , indéfiniment prolongé du côté de r , on pourra du point b lui mener l'Ordonnée ou la perpendiculaire br ; & comme toute Tangente de l'hyperbole doit nécessairement rencontrer l'Axe de cette Courbe en quelque Point e (27); il s'ensuit que la figure her est un Triangle-Rectangle en r ; ainsi l'Angle her est aigu & heC est obtus; donc l'Angle Cbe est aigu. Ce qui démontre la vérité de ce Corollaire.

73. COR. IX. D'où il suit que l'Axe est le seul premier Diamètre qui fasse des Angles droits avec ses Ordonnées.

* 74. COR. X. Le carré LP ou Pl d'une Ordonnée quelconque à un premier Diamètre prolongé Hh , est au Rectangle $bP \times HP$ du Diamètre intercepté bP par l'Abcisse HP , comme le carré Gg du Diamètre conjugué Gg est au carré Hb du Diamètre Hh .

DÉM. Par le Point l de l'hyperbole tirons lQ , lN , parallèles aux Asymptotes CS , CR ; & laissant le reste comme ci-dessus, faisons $CH = Ch = a$, ainsi $Hb = 2a$, & $Hb = 4aa$; $CG = Cg = SH = HR = b$; donc $Gg = 2b$, & $Gg = 4b^2$; Cp ou $nH = c$; $Hp = d$; $LP = Pl = z$; $CQ = Nl = r$; $Ql = t$; $CP = s$; par conséquent $bP = s + a$, & $HP = s - a$; donc $bP \times HP = s + a \times s - a = ss - aa$.

Cela posé; à cause des Triangles semblables CHR , CPm ; l'on aura $CH. HR :: CP. Pm = PM$, ou $a. b :: s. \frac{bs}{a} = Pm$ ou PM ; ainsi $Im = PM - Pl = \frac{bs}{a} - z$, & $IM = PM + Pl = \frac{bs}{a} + z$

Pareillement les Triangles semblables RHp , mIQ , donnent $HR. Hp :: Im. IQ$, ou $b. d :: \frac{bs}{a} - z. \frac{bds - adz}{ab} = IQ$. Et l'on tire encore des Triangles semblables HSn , IMN , $SH. Hn :: IM. IN$, ou $b. c :: \frac{bs}{a} + z. \frac{bcs + acz}{ab} = IN$. Mais $IQ \times IN = Hp \times pC$ (56); c'est-à-dire (en substituant les valeurs analytiques $\frac{bds - adz}{ab}$),

$$\frac{bcs + acz}{ab}, d, c, \text{ de ces Lignes) } \frac{b^2cds^2 - a^2cdz^2}{a^2b^2} = cd;$$

donc (en divisant par cd , & multipliant ensuite par a^2b^2) $b^2s^2 - a^2z^2 = a^2b^2$; ainsi (en transposant) $b^2s^2 - a^2b^2 = a^2z^2$ (D), ou $s^2 - a^2 \times b^2 = a^2 \times z^2$; d'où l'on tire $z^2. s^2 - a^2 :: b^2. a^2 :: 4b^2. 4a^2$, ou $LP. hp \times HP :: Gg. Hh$.

75. REMARQ. On voit par ce Corollaire, que les propriétés de l'hyperbole, par rapport à ses Axes, établies dans la Prop. 3. ainsi que dans les Corollaires ou les propositions qui s'en déduisent, conviennent aussi aux Diamètres conjugués de cette Courbe.

* 76. COR. II. Ainsi 1°. les carrés des Ordonnées à un premier Diamètre quelconque, seront entr'eux comme les Rectangles des Diamètres interceptés par les Abscisses correspondantes; c'est-à-dire que $xK. LP :: hK \times HK. bP \times HP$.

2°

$s + \frac{az}{b} = aa$, comme on l'a vu ci-dessus; donc enfin

$$Lf \times Lo = aa = CA. \text{ C. Q. F. D.}$$

4°. On démontrera encore très-facilement que les Lignes Lf, ob , terminées par les hyperboles opposées & par les Asymptotes, sont égales; en tirant par b une Ordonnée au Diamètre Hh ; laquelle Ordonnée se trouvera égale à LP ; d'où il sera clair que $Lf = Ob$.

5°. Si l'on fait $Hh. Gg :: Gg. p$, ou $2a. 2b :: 2b. p = \frac{2bb}{a}$; alors p ou $\frac{2bb}{a}$ sera le Paramètre du Diamètre Hh . Et

ainsi l'on trouvera que $4aa. 4bb :: 2a. p$, ou que $\frac{aa}{b^2} =$

$\frac{2a}{p}$. Par conséquent, en reprenant l'équation (D) du n°. 74.

& divisant par bb , pour avoir $ss - aa = \frac{aaz}{bb}$ (L), si

l'on substitue dans cette dernière équation l'expression $\frac{2a}{p}$

au lieu de $\frac{aa}{bb}$, elle deviendra $ss - aa = \frac{2aaz}{p}$: équation tout-à-fait semblable à celle du n°. 37. ainsi que l'équation

$ss - aa = \frac{aaz}{bb}$ (L) ressemble parfaitement à celle du

n°. 17. de sorte que les équations de l'hyperbole par rapport à ses Axes, & aux Paramètres de ces Axes, ne diffèrent des équations de la même Courbe, par rapport à deux de ses Diamètres conjugués quelconques, & aux Paramètres de ces Diamètres, qu'en ce que les Axes sont entr'eux des Angles droits, au lieu que les Diamètres conjugués sont entr'eux des Angles obliques.

6°. En supposant les Diamètres conjugués égaux; c'est-à-dire, en faisant $a = b$; l'équation $ss - aa = \frac{aaz}{bb}$

2°. Tous les Rectangles indéfinis, tels que $ML \times Lm$, seront toujours égaux au même carré HR ou $GC = bb$, & par conséquent égaux entr'eux; car, en reprenant l'équation D du n°. 74, on aura (en transposant) $b^2s^2 - a^2z^2 =$

$$a^2b^2; \text{ \& par conséquent } \frac{b^2s^2}{aa} - zz = bb; \text{ ou } \frac{bs}{a} - z =$$

$$\times \frac{bs}{a} + z = bb. \text{ Or } \frac{bs}{a} - z = ML, \text{ \& } \frac{bs}{a} + z =$$

$$Lm \text{ (74); donc } ML \times Lm = bb = HR = GC.$$

3°. En tirant d'un Point L de l'hyperbole une parallèle Lfo à un premier Diamètre HCh , jusqu'à ce qu'elle rencontre les Asymptotes aux Points f, o ; tous les Rectangles, tels que $Lf \times Lo$, seront toujours égaux au carré $CH = aa$, & par conséquent égaux entr'eux.

Pour en être convaincu, on va qu'à reprendre l'équation (D) du n°. 74. & l'on aura (en divisant par bb) $s^2 - \frac{a^2z^2}{bb} = \frac{aa}{bb}$; donc (en transposant) $s^2 - \frac{a^2z^2}{bb} = \frac{aa}{bb} = s - \frac{az}{b}$

$$\times s + \frac{az}{b}. \text{ Or } s - \frac{az}{b} = Lf, \text{ \& } s + \frac{az}{b} = Lo. \text{ Car les}$$

Triang. semblables CGS , Clf , donnent CG ou $HS. GS$ ou $CH :: Cl$ ou $LP. If$ ou Lo (parce que Is étant coupée en deux parties égales en G , la parallèle of doit l'être en I , & faire $If = Io$); c'est-à-dire (en substituant les valeurs ana-

lytiques) $b. a :: z. \frac{az}{b} = If$ ou Io ; par conséquent $Lf =$

$$IL - If = CP - Io = s - \frac{az}{b}, \text{ \& } Lo = IL + Io$$

$$= CP + Io = s + \frac{az}{b}; \text{ ainsi } Lf \times Lo = s - \frac{az}{b} \times$$

Q

$s + \frac{az}{b} = aa$, comme on l'a vu ci-dessus; donc enfin

$$Lf \times Lo = aa = CA. \text{ C. Q. F. D.}$$

4°. On démontrera encore très-facilement que les Lignes Lf, ob , terminées par les hyperboles opposées & par les Asymptotes, sont égales; en tirant par b une Ordonnée au Diamètre Hh ; laquelle Ordonnée se trouvera égale à LP ; d'où il sera clair que $Lf = Ob$.

5°. Si l'on fait $Hh. Gg :: Gg. p$, ou $2a. 2b :: 2b. p = \frac{2bb}{a}$; alors p ou $\frac{2bb}{a}$ sera le Paramètre du Diamètre Hh . Et

ainsi l'on trouvera que $4aa. 4bb :: 2a. p$, ou que $\frac{aa}{b^2} =$

$\frac{2a}{p}$. Par conséquent, en reprenant l'équation (D) du n°. 74.

& divisant par bb , pour avoir $ss - aa = \frac{aaz}{bb}$ (L), si

l'on substitue dans cette dernière équation l'expression $\frac{2a}{p}$

au lieu de $\frac{aa}{bb}$, elle deviendra $ss - aa = \frac{2aaz}{p}$: équation tout-à-fait semblable à celle du n°. 37. ainsi que l'équation

$ss - aa = \frac{aaz}{bb}$ (L) ressemble parfaitement à celle du

n°. 17. de sorte que les équations de l'hyperbole par rapport à ses Axes, & aux Paramètres de ces Axes, ne diffèrent des équations de la même Courbe, par rapport à deux de ses Diamètres conjugués quelconques, & aux Paramètres de ces Diamètres, qu'en ce que les Axes sont entr'eux des Angles droits, au lieu que les Diamètres conjugués sont entr'eux des Angles obliques.

6°. En supposant les Diamètres conjugués égaux; c'est-à-dire, en faisant $a = b$; l'équation $ss - aa = \frac{aaz}{bb}$

deviendra $ss - aa = zz$, qui est l'équation de l'Hyperbole équilatère, par rapport à deux de ses Diamètres conjugués quelconques. Effectivement, puisque dans l'Hyperbole équilatère les deux Axes conjugués sont égaux (18), l'Angle SCR des Asymptotes est droit (19); donc, si du Point H , milieu de $SR = Gg$, on décrivoit un Cercle avec HS ou HR , il passeroit par le centre C de l'hyperbole; & l'on auroit $HC = HS$, ou $2HC = 2HS$, c'est-à-dire $Hh = SR$; mais $SR = Gg$; donc $Hh = Gg$; par où l'on voit que dans l'Hyperbole équilatère, il y a égalité entre deux Diamètres conjugués quelconques, ainsi qu'entre les Axes.

* 77. PROP. VIII. Par deux Points quelconques M, I , de l'hyperbole (fig. 76.), tirons les Tangentes CMS, dIN , terminées par les Asymptotes aux Points $C, S; d, N$; & traçons les Lignes Cd, NS . il arrivera nécessairement que ces deux dernières Lignes seront parallèles, ou que $OC. ON :: Od. OS$.

DÉM. Par les Points de contingence M, I , menons les Lignes MP, IG , parallèles à l'Asymptote Od , & nous aurons $MP \times PO = IG \times GO$ (56). Donc $PO. GO :: IG. MP$, ou $2PO. 2GO :: 2IG. 2MP$ (D); mais $CP = PO$, puisque (62) $CM = MS$; donc $OC = 2PO$ ou $2CP$.

De même MP étant parallèle à OS (const.), on aura $OC. CP :: OS. MP$. Or $OC = 2CP$; donc $OS = 2MP$. & comme $NI = Id$ (62), $NG = GO$; ainsi $ON = 2GO$ ou $2NG$. Par conséquent, IG étant parallèle à Od (const.) $ON. NG :: Od. IG$; mais $ON = 2NG$; donc $Od = 2IG$.

En mettant donc, dans la proportion D trouvée ci-dessus, les valeurs que nous venons de déterminer; c'est-à-dire, OC pour $2PO$; ON pour $2GO$; Od pour $2IG$, & OS pour $2MP$; on aura $OC. ON :: Od. OS$. Ce qui démontre que Cd est parallèle à NS , ainsi qu'on s'étoit proposé de le prouver.

* 78. COR. Puisque NS est parallèle à Cd , $CN. ON :: dS. OS$.

* 79. PROP. IX. Si l'on mène la Ligne MI par les Points

Q ij

244 **T R A I T É**
de contingence M, l, elle sera parallèle aux Lignes Cd, NS.
DÉM. Car Cd est parallèle à NS (77); ainsi des Points
M, l, abaissant les Perpendiculaires TMK, SIF; 1°. les
deux Triangles semblables TMS, CMK, donneront CM.
MS :: MT. MK. Or CM = MS (62); donc MT = MK.
Donc $MK = \frac{KT}{1}$ ou $\frac{FS}{2}$. 2°. Des Triangles semblables
dlF, NIS, on tirera dl. lN :: lF. lS. Or dl = lN (62).
Donc lF = lS; donc lF = $\frac{FS}{2}$; or on a vû (art. 1°.) que
 $MK = \frac{FS}{2}$; par conséquent la Perpendiculaire MK = la
Perpendiculaire lF; donc Ml parallèle à Cd; mais Cd pa-
rallèle à NS (77). Ainsi Ml est parallèle aux deux Lignes
Cd, NS. C. Q. F. D.

* 80. PROP. X. Les Tangentes CMS, dN, sont divi-
sées par les Points de contingence M, l, & par le Point
x, où elles se coupent; de manière que les parties de l'une
sont proportionnelles aux parties de l'autre; c'est-à-dire que
CM. dl :: Mx. lx :: xS. xN.

DÉM. Cd étant parallèle à Ml (79), on a CM. dl ::
Mx. lx & Mx. lx :: xS. xN, parce que les Triangles xMl,
xNS, sont semblables. Par conséquent CM. dl :: Mx. lx ::
xS. xN. C. Q. F. D.

* 81. COR. Donc CM. Mx :: dl. lx. ainsi CM + Mx.
Mx :: dl + lx. lx; c'est-à-dire, Cx. Mx :: dx. lx, ou Mx.
Cx :: lx. dx.

* 82. PROP. XI. Tirons un premier Diamètre quelcon-
que OIP (fig. 77.) & par le Point l, où il rencontre la
Courbe, la Tangente Nld, afin de mener à ce Diamètre
une Ordonnée quelconque PM. De plus, faisons passer
par le Point M la Tangente CMS; je dis que cette Tan-
gente rencontrera le Diamètre OIP, en un Point R au-des-
sous du centre O; de manière que l'on aura OP. Ol ::
Ol. OR.

DÉM. Prolongeons l'Ordonnée PM, jusqu'à ce qu'elle

D E S C O U R B E S. 245
coupe l'Asymptote O' au Point G; & tirons IK parallè-
lement à la Tangente CS. Après cela; considérons 1°. que
la Tangente CS rencontre le Diamètre OP, en quelque
Point R au-dessous du Point O; puisque cette Tangente,
qui est toujours au-dessous de O, va de l'Asymptote OC
à l'Asymptote Od, entre lesquelles passe nécessairement
le premier Diamètre OP.

2°. Il faut à présent démontrer que OP. Ol :: Ol. OR.
mais (à cause des parallèles lN, PG) on a Pl. Ol :: GN.

ON, ou $\frac{Pl}{Ol} = \frac{GN}{ON} = \frac{GN \times NC}{NC \times ON}$. Or GM étant paral-
lèle à Nx (const.), GN. NC :: Mx. Cx :: lx. dx (81) ::
KS. dS (à cause de lK parallèle à xS (const.)); par consé-
quent GN. NC :: KS. dS, ou $\frac{GN}{NC} = \frac{KS}{dS}$.

De plus NC. ON :: dS. OS (78); donc $\frac{NC}{ON} = \frac{dS}{OS}$.

Donc, (en substituant dans l'équation $\frac{Pl}{Ol} = \frac{GN \times NC}{NC \times ON}$,

la grandeur $\frac{KS}{dS}$ au lieu de $\frac{GN}{NC}$, & $\frac{dS}{OS}$ au lieu de $\frac{NC}{ON}$)

on aura $\frac{Pl}{Ol} = \frac{KS}{OS}$. Or, à cause des parallèles lK, RS

(const.), KS. OS :: lR. OR, ou $\frac{KS}{OS} = \frac{lR}{OR}$. Donc $\frac{Pl}{Ol} =$

$\frac{lR}{OR}$, ou Pl. Ol :: lR. OR. Ainsi Pl + Ol. Ol :: lR +

OR. OR, c'est-à-dire OP. Ol :: Ol. OR. C. Q. F. D.

* 83. Réciproquement, si après avoir tiré une Ordon-
née PM à un Diamètre quelconque OP, on cherche une
troisième proportionnelle aux deux Lignes OP, Ol; & que
l'ayant portée de O en R, l'on tire la Ligne MR; je dis
Q iij

246 **T R A I T É**
que cette Ligne MR est Tangente à l'hyperbole.
DÉM. Si elle n'étoit pas Tangente au Point M, on pour-
roit donc en tirer une en ce Point, laquelle iroit ren-
contrer le Diamètre OP, en quelque Point V au-dessus
ou au-dessous de R: mais, en supposant OP. Ol :: Ol.
OR, il est absolument impossible que VM soit Tangente;
puisque VM étant supposée Tangente, l'on auroit (82)

OP. Ol :: Ol. OV; ainsi $OV = \frac{Ol^2}{OP}$; mais (supp.) OP.

Ol :: Ol. OR; donc $OR = \frac{Ol^2}{OP}$; par conséquent OV éga-
leroit OR. Ce qui est absurde.

84. REMARQ. Voilâ donc une autre manière d'avoir
une Tangente à l'hyperbole. Mais cette résolution s'est faite
attendre long-tems. Les commençans trouveront sans doute,
que l'on va lentement & assez difficilement à cette dé-
couverte. Il n'est donc pas hors de propos de reprendre notre
méthode de tirer les Tangentes des Courbes; afin qu'ils
voyent combien elle est étendue & expéditive, en com-
paraison de la méthode précédente, qui est conforme à la
manière des Anciens.

85. PROB. Trouver l'expression de OC, en supposant
que OH soit Tangente. (fig. 70.)

RÉSOL. Représentons nous d'abord que OH soit sécante
de l'hyperbole aux Points H, L; & tirons les Ordonnées
HE, LR, à l'Axe ou au Diamètre; & c'est là toute la con-
struction.

Il est évident que OC = CE - OE; c'est-à-dire que
OC est égale à l'indéterminée CE moins la sous-Tangente
OE; cherchons donc l'expression de la sous-Tangente.

1°. Et pour cela faisons CA = BC = a; CE = x;
ER = r; OE = s; OC = CE - OE = x - s; OR
= OE + ER = s + r; BR = BC + CE + ER =
a + x + r; AR = CE + ER - CA = x + r - a;
ainsi BR x AR = a + x + r x x + r - a = xx +

D E S C O U R B E S. 247
 $2rx + rr - aa$; AE = CE - CA = x - a; BE =
CE + BC = x + a. Donc BE x AE = x + a x x - a
= xx - aa.

2°. Cela supposé, les Triangles semblables ORL, OEH,
donnent OR. OE :: RL. EH, ou $\frac{OR}{OE} = \frac{RL}{EH}$.

Mais (4) RL. EH :: BR x AR. BE x AE. Ainsi BR x AR.

BE x AE :: OR. OE. C'est-à-dire (en substituant les va-
leurs analytiques des termes de cette dernière proportion,

trouvés art. 1°.) $xx + 2rx + rr - aa. xx - aa :: ss$

$+ 2rs + rr. ss$; donc (en soustrayant) $2rx + rr. xx -$

$aa :: 2rs + rr. ss$. Ainsi (en faisant le produit des Extrê-
mes & celui des moyens) l'on aura $2rs^2x + r^2s^2 = 2rsx^2$

$+ r^2x^2 - 2a^2rs - a^2r^2$; & (en divisant par r) $2s^2x +$

$rs^2 = 2sx^2 + rx^2 - 2a^2s - a^2r$ (E), qui est l'équation

on parvient, quand on suppose OH Sécante; mais
lorsque OH devient Tangente, les Points L, H, se con-
fondent, & la différence ER = r des Abcisses s'évanouit;
c'est-à-dire qu'alors r = 0. Il faut donc ôter de l'équation

E, tous les termes où r se trouve; & elle deviendra $2s^2x$
 $= 2sx^2 - 2a^2s$; donc (en divisant par 2s) $sx = xx -$

aa , ou $s = \frac{xx - aa}{x} = OE$, qui est la sous-Tangente.

3°. Ainsi OC = CE - OE = $x - \frac{xx - aa}{x} =$

$\frac{xx - xx + aa}{x} = \frac{aa}{x}$; donc OC = $\frac{aa}{x}$, ou OC x x =

$a \times a$. Par conséquent x. a :: a. OC, ou CE. CA :: CA.
OC. Ce qui est tout-à-fait semblable à ce que l'on a trouvé

n°. 82. pour la valeur de OR de la fig. 77.

86. REMARQ. Nous ne sommes parvenus à la valeur de

OC par la méthode précédente, qu'au moyen de neuf

Propositions, dont la neuvième toute seule est aussi lon-
gue & plus difficile que la résolution de ce Problème; parce
Q iv

que l'on y a besoin d'un plus grand nombre de comparaisons que dans ce dernier cas, où tout se trouve par le calcul, moyennant deux Triangles semblables & la propriété de l'hyperbole, établie dans la première Proposition n°. 4.

Mais on se persuadera peut-être, que cette découverte est inutile; puisque l'on n'en a pas absolument besoin, pour tirer des Tangentes à l'hyperbole. Ce qui est très-vrai, quand les Asymptotes entrent dans la résolution de ce Problème. Mais, outre que moyennant cette dernière méthode, l'on peut mener les Tangentes de l'hyperbole, sans le secours des Asymptotes, ayant seulement l'Axe ou un des premiers Diamètres de la Courbe; l'expression $\frac{aa}{x}$ de la Ligne OC, que nous venons de découvrir, va nous servir à trouver deux Points de l'hyperbole, fort importants pour l'application de cette Courbe à la pratique des Arts. Ce que nous ferons voir, après avoir tiré quelques Corollaires de la Proposition précédente.

87. COR. I. Puisque (fig. 70.) la sous-Tangente OE = $\frac{xx - aa}{x}$ (art. 2. du n°. 85.), l'on aura OE $\times$ x = $xx - aa$

$\times x - a$; c'est-à-dire $xx - a : x - a$. OE, ou CE. BE :: AE. OE sous-Tangente, d'où l'on déduit la Tangente. Ainsi un des Points H de l'hyperbole, & son Axe ou un de ses premiers Diamètres AB étant donnés; pour avoir la Tangente OH, il n'y a qu'à mener l'Ordonnée HE au Diamètre donné (n°. 105. de l'Ellipse) ce qui déterminera la grandeur CE, moyennant laquelle tout le reste se trouve.

88. COROL. II. Pareillement l'expression de OC étant $\frac{aa}{x}$ (art. 3°. du n°. 85.); en retranchant OC de CA, on aura

$$CA - OC = a - \frac{aa}{x} = \frac{ax - aa}{x} = AO, \text{ ou } AO$$

$$\times x = x - a \times a; \text{ d'où l'on tire } x \cdot x - a : a. AO, \text{ ou}$$

* 90. COR. IV. Si l'on prolonge la Tangente MO (fig. 78.) indéfiniment vers T, jusqu'à ce qu'elle rencontre en quelque Point H le second Axe GCD, prolongé s'il est nécessaire; & que du Point M l'on abaisse une Perpendiculaire MS sur ce second Axe, on trouvera que CS. CG :: CG. CH, ou que CS $\times$ CH = $\overline{CG}^2$.

DÉM. Abbaissant l'Ordonnée ME = CS = y; conservant aux mêmes Lignes les mêmes dénominations que ci-dessus, & nous rappelant que OE = $\frac{xx - aa}{x}$ & OC

$$= \frac{aa}{x} \text{ (art. 2. \& 3. du n°. 85.)}; \text{ si nous considérons les}$$

Triangles semblables OEM, OCH, nous aurons OE. EM ou CS :: OC. CH; c'est-à-dire (en substituant les valeurs analytiques) $\frac{xx - aa}{x} \cdot y :: \frac{aa}{x} \cdot CH$, ou (en ôtant les

$$\text{Fractions)} \quad xx - aa \cdot y :: aa \cdot CH. \text{ Mais } xx - aa = \frac{a \cdot yy}{bb} \text{ (17). Donc } \frac{a \cdot yy}{bb} \cdot y :: aa \cdot CH, \text{ ou (en faisant évanouir}$$

$$\text{la Fraction)} \quad ayy \cdot bby :: a^3 \cdot CH = \frac{a \cdot bby}{ayy} = \frac{bb}{y}. \text{ Donc}$$

née; car ceci ne pourroit avoir lieu que dans l'infini, c'est-à-dire, qu'au fond, il est impossible qu'il ait lieu. Ainsi quand, pour démontrer l'égalité de deux grandeurs, on se sert de ce principe, que deux quantités doivent nécessairement être égales, si leur différence est plus petite qu'aucune grandeur donnée, il faut bien distinguer, si la Limite dont les deux quantités approchent continuellement, est dans le fini ou dans l'infini; dans le premier cas il y aura égalité, parce qu'on démontrera l'impossibilité d'assigner aucune différence; mais dans le second cas, il en ira autrement; vu que la Limite étant supposée à une distance infinie, c'est comme s'il n'y avait pas de limite; & se fonder dessus est donner dans un Paralogisme très-certain, qui conduiroit à cette contradiction manifeste, que les Asymptotes de l'hyperbole ne peuvent jamais rencontrer cette Courbe, & que cependant elles la rencontrent.

J'ai inséré là-dessus en faveur des Commencans, qui pourroient, à cette occasion, suspecter le principe de l'égalité de deux grandeurs, dont la différence est démontrée plus petite qu'aucune grandeur donnée; d'autant plus que je ne connois aucun Géomètre, qui ait fait attention à la nécessité de sauver les apparences de la contradiction alléguée.

CE. AE :: CA. AO. Ce qui détermine encore le Point O de la Tangente, quand un Point de la Courbe & un de ses premiers Diamètres sont donnés.

89. COR. III. Remarquons ici qu'une Tangente, tirée en un Point quelconque de l'hyperbole, diffère de son Sommet, rencontre nécessairement l'Axe ou un de ses premiers Diamètres quelconques, en un Point entre le centre de la Courbe & le Sommet; & qu'elle est aussi déterminée à rencontrer une des Asymptotes dans un sens opposé. Par

conséquent, puisque l'on trouve toujours $OC = \frac{aa}{x}$ (art. 3.

du n°. 85.); c'est-à-dire CE. CA :: CA. OC; il est clair que l'indéterminée CE pouvant croître sans fin, & devenir infiniment grande en comparaison de CA, qui est une quantité constante; par exemple, CE pouvant devenir cent millions de fois plus grande que CA, la Ligne CA deviendrait aussi alors cent millions de fois plus grande que OC; ou, ce qui est la même chose, OC ne feroit que la cent millionième partie de CA: mais la cent millionième partie de CA ne feroit pas une grandeur sensible. Ainsi, quand l'indéterminée CE est très-grande, par rapport à son premier Diamètre, les Points O, C, se confondent en quelque sorte; c'est-à-dire, que la Tangente correspondante rencontre l'Axe ou le Diamètre presque au centre; & par conséquent cette Tangente n'est presque pas différente de l'Asymptote, puisqu'elle a deux Points communs avec cette Ligne, à très-peu près. On peut donc assurer que les Asymptotes de l'hyperbole, prolongées à une très-grande distance, deviennent sensiblement des Tangentes à cette Courbe [a].

[a] Si l'on objectoit que tout ceci contredit le n°. 46, où l'on a démontré que les Asymptotes de l'Hyperbole, prolongées tant que l'on voudra, ne rencontrent jamais cette Courbe, on observera que les Asymptotes ne deviennent Tangentes, que dans le cas où elles seroient actuellement prolongées à l'infini; mais ce cas étant impossible, c'est comme si l'on disoit qu'après un très-grand prolongement, elles approcheront si fort d'être Tangentes, que leur différence des Tangentes réelles sera insensible, & non pas plus petite qu'aucune grandeur donnée.

$$CH \times y = \overline{bb}^2, \text{ ou } CH \times CS = \overline{CG}^2. \text{ D'où l'on tire } CS, CG :: CG. CH. \text{ C. Q. F. D.}$$

* 91. COR. V. Aux extrémités B, A, du premier Axe AB, élevons les Perpendiculaires AV, BT; jusqu'à ce qu'elles rencontrent une Tangente quelconque indéfinie MOT; & l'on verra que le Rectangle AV $\times$ BT de ces Perpendiculaires, est égal au carré $\overline{CG}^2$ de la moitié du second Axe.

DÉM. CE. CA :: CA. OC (Art. 3. du n°. 85.); donc CE = CA. CA :: CA = OC. OC, ou AE. CA :: AO. OC, ou, en altern. AE. AO :: CA. OC; donc AE + AO. AO :: CA + OC ou BC + OC. OC; c'est-à-dire OE. AO :: OB. OC, ou AO. OE :: OC. OB. mais, (à cause des Triangles semblables OAV, OEM, AO. OE :: AV. EM; donc AV. EM :: OC. CB. Or les Triangles semblables OCH, OBT, donnent OC. OB :: CH. BT; donc AV. EM ou CS :: CH. BT. Ainsi AV $\times$ BT = CS $\times$ CH. Or CS $\times$ CH = $\overline{CG}^2$ (90); donc AV $\times$ BT = $\overline{CG}^2$. C. Q. F. D.

* 92. COR. VI. Si des Points, f, F, (déterminés comme au n°. 19) l'on abaisse les Perpendiculaires FL, fK, sur la Tangente MT; le produit fK $\times$ FL de ces Perpendiculaires se trouvera égal au carré $\overline{CG}^2$ de la moitié du second Axe. Il faut donc prouver que fK $\times$ FL = $\overline{CG}^2$.

DÉM. 1°. Supposant toujours les mêmes dénominations, & faisant CF = Cf = c, pour avoir $cc = aa + bb$

$$\text{(comme au n°. 19.)} \quad Of = Cf - OC = c - \frac{aa}{x} =$$

$$\frac{cx - aa}{x}; \text{ OF} = CF + OC = c + \frac{aa}{x} = \frac{cx + aa}{x};$$

$$AO = CA - OC = a - \frac{aa}{x} = \frac{ax - aa}{x}; \text{ OB} =$$

$$CB + OC = a + \frac{aa}{x} = \frac{ax + aa}{x}.$$

2°. Présentement, les Triangles semblables OAV, OKf, donnent Of. OV :: fK. AV (S); & des Triangles semblables OLF, OBT, on tire Of. OT :: FL. BT (T); donc (en multipliant par ordre les termes des deux Proportions S, T) on aura Of x OF. OV x OT :: fK x FL. AV x BT. (D); par conséquent, si l'on démontre que Of x OF == OV x OT, il sera démontré que fK x FL == AV x BT ==

$$\overline{CG} (91). \text{ Or } Of \times OF = (\text{art. } 1^{\circ}). \frac{cx - aa}{x} \times \frac{cx + aa}{x} \\ = \frac{c^2x^2 - a^4}{xx} = \frac{a^2x^2 + b^2x^2 - a^4}{xx} \text{ (en substituant } aa \\ + bb \text{ en la place de } cc). \text{ Ainsi il reste à démontrer que } OV \\ \times OT = \text{aussi } \frac{a^2x^2 + b^2x^2 - a^4}{xx}.$$

3°. Pour cela, rappelons-nous d'abord que OE == $\frac{xx - aa}{x}$ (art. 2. du n°. 85.); donc OE == $\frac{xx - aa}{xx}$, & le

Tr.-Rect. OEM nous donne OM == OE + EM, ou OM == $\sqrt{\frac{xx - aa}{xx} + yy}$. Considérons présentement les Triang. sembl. OEM, OAV, & nous aurons OE. OM :: AO. OV, ou $\frac{xx - aa}{x} \cdot \sqrt{\frac{xx - aa}{xx} + yy} :: \frac{ax - aa}{x} \cdot OV$; donc

(en divis. les antécéd. par $\frac{x - a}{x}$. Et en altern.) $x + a ::$

$$\sqrt{\frac{xx - aa}{xx} + yy} \cdot OV (G).$$

Pareillement les Triangles semblables OEM, OBT; nous donneront OE. OM :: OB. OT, ou $\frac{xx - aa}{x}$.

DÉM. Donnant toujours aux mêmes Lignes les mêmes dénominations que ci-dessus, rappelons nous le n°. 29,

où il a été démontré que Mf == $\frac{cx + aa}{a}$, & MF ==

$$\frac{cx - aa}{a}; \text{ par conséquent Mf. MF :: } cx + aa. cx - aa;$$

mais Cl étant par rapport à la Tangente Ml, ce que OC est par rapport à la Tangente OH, on a (art. 3. du n°. 85.)

$$Cl = \frac{aa}{x}; \text{ donc } fl = Cf + Cl = c + \frac{aa}{x} = \frac{cx + aa}{x}.$$

$$\text{Ainsi } fl = \frac{cx + aa}{x}, \text{ & } lf = Cf - Cl = c - \frac{aa}{x}$$

$$= \frac{cx - aa}{x}; \text{ donc } lf = \frac{cx - aa}{x}. \text{ Par conséquent } fl. lf$$

:: $cx + aa. cx - aa$. Or, on vient de voir que Mf. MF :: $cx + aa. cx - aa$. Donc Mf. MF :: fl. lf. Et par conséquent l'Angle fMl == l'Angle lMf. C. Q. F. D.

94. Réciproquement, si l'on coupe l'Angle fMF en deux parties égales; c'est-à-dire, si l'Angle fMl == l'Angle lMF, la Ligne Ml sera Tangente en M. Et pour le démontrer, il suffit de faire voir (suivant le n°. 83) que CP. CB ::

CB. Cl, ou que Cl == $\frac{aa}{x}$; car on suppose CP == x. (fig. 70.)

DÉM. Puisque (supp.) l'Angle fMl == l'Angle lMF; l'on a (n°. 281. Inff. T. 2.) Mf. MF :: fl. lf; donc Mf == MF. MF :: fl. lf. (G); or Mf == MF == 2a (31); MF

$$= \frac{cx - aa}{a} \text{ (art. 2. du n°. 29.); } fl - lf = Cl + CF$$

$$- lf = Cl + Cl + lf - lf = 2Cl; \text{ ainsi } fl - lf$$

$$= 2Cl; \text{ & } lf = \frac{cx - aa}{x} \text{ (ainsi qu'on vient de le voir$$

(93). Donc, en substituant dans la proportion G les va-

$$\sqrt{\frac{xx - aa}{xx} + yy} :: \frac{ax + aa}{x}. \text{ OT; donc (en divis. les}$$

antécéd. par $\frac{x + a}{x}$, & en altern.) on aura $x - a ::$

$$\sqrt{\frac{xx - aa}{xx} + yy}. \text{ OT (L). Par conséquent (en multipl.}$$

par ordre les termes des deux proport. G, L) on aura $xx -$

$$aa. aa :: \frac{xx - aa}{xx} + yy. \text{ OV } \times \text{ OT. Donc, en multipl.}$$

les Moyens de cette dernière proportion, après y avoir substitué la valeur de $yy = \frac{xx - aa}{x} \times \frac{bb}{aa}$ (23), il viendra (en

divif. ce produit par le premier terme $xx - aa$) $OV \times OT =$

$$\frac{xx - aa \times xx - aa}{xx} \times aa + \frac{xx - aa \times \frac{bb}{aa} \times aa}{aa} =$$

$$\frac{a^2x^2 - a^4}{xx} + bb = \frac{a^2x^2 + b^2x^2 - a^4}{xx}. \text{ Mais cette va-}$$

leur de $OV \times OT$ est précisément celle que nous avons trouvée (Art. 2°.) pour Of x OF. Par conséquent Of x OF

= $OV \times OT$. ainsi (en reprenant la proportion D de l'Art. 2°.), on verra que fK x FL == AV x BT. Or AV x

BT == CG (91). Donc enfin fK x FL == CG. C. Q. F. D.

93. PROP. XII. Après avoir porté du centre C (fig. 70.) l'hypothénuse BD aux Points F, f, de l'Axe des hyperboles opposées; si l'on tire d'un Point quelconque M de l'une des hyperboles, les Lignes MF, Mf, aux Points F, f, (ainsi qu'on l'a fait au n°. 29); & que de plus l'on mène la Tangente Ml au même Point M, je dis que l'Angle fMl == l'Angle lMF; ou, ce qui est la même chose (n°. 281, Inff. T. 2), que Mf. MF :: fl. lf.

leurs de Mf == MF, Mf, fl == lf, que l'on vient de trouver, elle deviendra $2a. \frac{cx - aa}{a} :: 2Cl. \frac{cx - aa}{x}$; d'où

$$\text{l'on tire } 2Cl = \frac{cx - aa \times 2a}{x} = \frac{cx - aa \times 2a \times a}{cx - aa \times x}$$

$$\frac{2aa}{x}; \text{ ainsi } Cl = \frac{aa}{x}, \text{ ou } Cl \times x = aa, \text{ donc } x. a :: a$$

Cl, ou CP. CB :: CB. Cl, & par conséquent Ml est Tangente (83). C. Q. F. D.

95. COR. I. Prolongeons indéfiniment les Lignes fM, lM, jusqu'aux Points b, a, & l'Angle aMb étant égal à son opposé fMl, qui est lui-même égal à l'Angle lMF (93), il s'ensuit que l'Angle aMb == lMF; c'est-à-dire que l'Angle d'incidence FMl == l'Angle de réflexion bMa. S'il y avait donc au Point F un corps lumineux, les rayons FM se réfléchiroient, à la rencontre de la Courbe, dans des Lignes Mb, telles que leurs prolongemens, du côté de A, passeroient par l'autre Point f; ainsi, ces rayons réfléchis iroient tous, étant prolongés, se réunir au Point f. Et réciproquement, si l'on plaçoit le corps lumineux en f, tous les rayons seroient réfléchis par la convexité de la Courbe MBK, de manière que les prolongemens de ces rayons réfléchis se réuniroient tous au Foyer F; comme il est visible, en prolongeant FM du côté de b. C'est pourquoi les Points f, F, sont des Foyers; ainsi que nous avons promis de le démontrer au n°. 36.

COR. II. D'un Point quelconque M (fig. 79) d'une hyperbole, menons les Lignes MF, Mf aux Foyers, F, f; coupons l'Angle fMF en deux parties égales par la Ligne CME; laquelle sera Tangente au Point M de l'hyperbole (94); sur cette Tangente élevons, au Point de contingence M, la Perpendiculaire GML; & par ce même Point menons MT == Mf parallèlement à l'Axe ABS; alors, si des

Points T, f, l'on abaisse sur GML les Perpendiculaires TL, fG, elles seront entr'elles comme le premier Axe AB est à la distance des Foyers Ff; c'est-à-dire que TL : fG :: AB. Ff.

DÉM. 1°. Prolongeons fM du côté de P, & du Point S abaissons SP, perpendiculairement sur fP; après cela, tirons FO parallèlement à GL; afin d'avoir Of pour la différence de Mf à MF; car GL étant Perpendiculaire sur CE (const.), FO le sera aussi; donc, puisque l'Angle FME = OME (const.), il est clair que MFE = MOE; donc MF = MO; donc Mf — MF = Mf — MO = Of. Ainsi la différence de Mf à MF est la Ligne Of. De plus cette Ligne Of = le premier Axe AB; car Mf — MF = AB (31); or Mf — MF = Of, comme on vient de le voir; donc Of = AB. Enfin menons MH perpendiculairement sur AS.

2°. Cela supposé, les Triangles-Rectangles TML, MSH, donnent TL. MH :: MT ou Mf. MS; or (les Triangles-Rectangles fGM, SPM, étant semblables) Mf. MS :: fG. PS; donc TL. MH :: fG. PS, ou TL. fG :: MH. PS. Or (à cause des Triangles-Rectangles semblables fPS, fHM) MH. PS :: fM. fS; ainsi TL. fG :: fM. fS; mais fM. fS :: Of. fF (à cause de OF parallèle à ML (const.)); donc TL. fG :: Of. fF :: AB. fF, parce que Of = AB (Art. 1°). Donc enfin TL. fG :: AB. fF. C. Q. F. D; & ce qu'il est très-important de bien remarquer.

97. Réciproquement, si l'on abaisse une Perpendiculaire fG sur la Ligne GML, perpendiculaire à la Ligne CME qui coupe en deux parties égales l'Angle fMF, formé par deux Lignes Mf, MF, menées d'un même Point M d'une hyperbole aux Foyers f, F; & qu'après avoir trouvé une quatrième proportionnelle TL aux trois Lignes données fF, AB, fG, l'on construise au Point M, sur le Prolongement de GM du côté de L, le Triangle-Rectangle LMT, dont l'hypothénuse MT = Mf, & l'autre côté

= TL [4]; je dis que MT sera parallèle à l'Axe ABS.

DÉM. TL. fG :: AB. fF (const.) :: Of. fF (parce que Of = AB (Art. 1°. du n°. 96)) :: fM. fS (à cause de OF parallèle à MS) :: MT. fS. (parce que MT = fM (supp.)); donc TL. fG :: MT. fS, ou TL. MT :: fG. fS. Ainsi les Triangles-Rectangles MLT, fGS, sont équiangles (n°. 286. *Inst. T. 2.*); donc l'Angle TML = l'Angle GSF. La Ligne GML coupe donc les Lignes MT, AS, de manière que les Angles alternes internes sont égaux; par conséquent MT est parallèle à AS. C. Q. F. D. & ce dont nous ferons usage.

* 98. COR. III. Tirons à deux Points quelconques d'une hyperbole (fig. 80.) deux Tangentes MS, TQ; & abaissons, du Foyer F, les Perpendiculaires FH, FR, sur ces Tangentes. Je dis que ces Perpendiculaires croîtront moins, l'une par rapport à l'autre, que dans la raison des Racines carrées des Rayons vecteurs FM, FT, tirés du Foyer F aux Points de contingence M, T; c'est-à-dire que FH est plus grande par rapport à FR, que $\sqrt{FM}$ par rapport à $\sqrt{FT}$. il faut donc prouver que $\frac{FH}{FR} > \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$.

DÉM. 1°. Après avoir tiré du Foyer f de l'hyperbole opposée les Lignes fM, fT, aux Points de contingence M, T, on remarquera que l'Angle FMH étant égal à l'Angle fMS (93), les Triangles-Rectangles FHM, fSM, sont semblables; donc FM. fM :: FH. fS = $\frac{FH \times fM}{FM}$, ou fS

$$\times FH = \frac{FH \times fM}{FM}. \text{ Or } fS \times FH = \overline{CG} \text{ (92); donc}$$

$$\frac{FH \times fM}{FM} = \overline{CG}; \text{ ainsi } FH = \frac{\overline{CG} \times FM}{fM}.$$

[*] La construction de ce Triangle-Rectangle sur le prolongement de GM du côté de L, est très-aisée: car la longueur de l'hypothénuse MT = Mf étant donnée avec la longueur de TL, (supp.) on aura celle de ML, sur laquelle on construira le Triangle.

R

2°. Pareillement, l'Angle FTR étant égal à l'Angle fTQ (93), les Triangles-Rectangles FRT, fQT, sont semblables; donc FT. fT :: FR. fQ = $\frac{FR \times fT}{FT}$. Ainsi fQ x FR

$$= \frac{FR \times fT}{FT}; \text{ mais } fQ \times FR = \overline{CG} \text{ (92); donc } \frac{FR \times fT}{FT}$$

$$= \overline{CG}; \text{ ainsi } FR = \frac{\overline{CG} \times FT}{fT}. \text{ Or l'on a vu (art. 1.)}$$

$$\text{que } FH = \frac{\overline{CG} \times FM}{fM}; \text{ par conséquent } FH. FR ::$$

$$\frac{\overline{CG} \times FM}{fM} \cdot \frac{\overline{CG} \times FT}{fT} :: \frac{FM}{fM} \cdot \frac{FT}{fT}; \text{ donc } \frac{FH}{FR} = \frac{FM}{fM} =$$

$$\frac{FM \times fT}{fM \times FT}. \text{ Mais } \frac{FM \times fT}{fM \times FT} > \frac{FM}{FT}, \text{ car } \frac{FM \times fT}{fM \times FT} \cdot \frac{FM}{fM} :: fT$$

$$:: fT. FM. \text{ Or } fT > FM; \text{ donc } \frac{FM \times fT}{fM \times FT} > \frac{FM}{FT}; \text{ \&}$$

$$\text{par conséquent, puisque } \frac{FH}{FR} = \frac{FM \times fT}{fM \times FT}, \text{ on aura } \frac{FH}{FR}$$

$$> \frac{FM}{FT}; \text{ donc (en extrayant les Racines carrées) } \frac{FH}{FR} > \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}.$$

C. Q. F. D.

* 99. COR. IV. Dans l'hyperbole, le second Diamètre indéterminé NS (fig. 81.) tiré parallèlement à une Tangente quelconque Mr, coupe le Rayon vecteur FM (mené du Foyer F de l'hyperbole opposée au Point M de contingence) en un Point O; de manière que la Partie OM de ce Rayon vecteur, est toujours égale à la moitié CB du premier Axe. Il faut donc prouver que OM = CB.

DÉM. Menez FT parallèlement à Mr, & tirez fM jusqu'à ce qu'elle rencontre FT. Maintenant considérez 2°. qu'à cause du parallélisme des Lignes FT, NS, Mr,

(const.) l'Angle MTF = rMf = rMF (93) = MFT son alterne; donc MTF = MFT; ainsi MT = MF.

2°. MT. MF :: MS. OM. Or MT = MF (art. 1°); donc MS = OM, ou 2MS = 2OM.

3°. fS. ST :: fC. CF. Mais fC = CF. Donc fS = ST. Ainsi fS + MS = ST + MS = MT = MF (art. 1°); donc fS + MS = MF; mais fS + MS = fM + 2MS; donc MF = fM + 2MS; par conséquent MF — fM = 2MS = 2OM (art. 2.); or MF — fM = AB (31) = 2CB. Donc 2OM = 2CB, ou OM = CB. C. Q. F. D.

100. REMARQ. Telles sont les propriétés principales, qui caractérisent l'hyperbole ou les hyperboles opposées; & dont l'on a le plus de besoin dans l'application de cette Courbe à différents Arts, & à la Théorie des loix du mouvement. Cependant, comme nous n'avons point parlé des hyperboles, que l'on a coutume d'associer aux hyperboles opposées, nous en dirons un mot, après avoir donné les Problèmes par lesquels nous finirons cet article. Ce qui sera bien suffisant; vu que ces hyperboles ont précisément les mêmes propriétés que celles auxquelles on les associe, & qu'elles ne sont point nécessaires pour découvrir les propriétés dont nous avons besoin. C'est même la raison pour laquelle il n'en a point encore été question; afin de ne pas rompre la chaîne de nos Propositions.

101. PROB. Construire une hyperbole & son opposée, de manière que la distance de ses Foyers Ff soit à son Axe transverse AB en raison donnée, par exemple, comme 3 est à 2 (fig. 82.).

RÉSOL. Ce Problème peut être résolu de plusieurs manières, dont voici la plus simple, à mon gré, la plus sûre & la plus expéditive dans la pratique des Arts. 1°. On prendra la distance Ff des Foyers, telle qu'on la jugera nécessaire pour ce que l'on a en vue; on la divisera en trois parties égales; ensuite, portant la moitié de l'une de ces parties de f en A & de F en B, la distance Ff se trouvera divisée comme on le demande; puisque Ff étant 3; Af, BF, chacune

R ij

$\frac{1}{2}$ (const.), AB sera $\frac{1}{2}$; & par conséquent Ff. AB. $\frac{1}{2}$ 3. 2.

2°. On portera AB sur une Ligne indéfinie A6; en mettant une des pointes du compas sur le Point f, on ouvrira de manière que son ouverture soit plus grande que fB; on décrira avec cette ouverture des Arcs en 1, 1; tant du Point f pour l'hyperbole 5B5, que du Point F pour son opposée 5A5; après quoi portant cette même ouverture de A en 1 sur la Ligne A6, on prendra sur cette dernière Ligne la distance B1; avec laquelle des Points F, f, on décrira des Arcs qui couperont les premiers en 1, 1, &c. & les Points 1, 1, seront aux hyperboles que l'on demande.

Pour avoir d'autres Points, tels que 2, 2, de ces hyperboles, on prendra sur l'indéfinie A6 une distance A2, avec laquelle des Points f, F, on tracera des Arcs en 2, 2, de l'un & l'autre côté de fF. Puis, prenant sur la même Ligne A6 la longueur B2, des Points, F, f, on tracera d'autres Arcs qui couperont en 2, 2, ceux que l'on vient de tracer avec le rayon A2, pris sur A6; & les nouveaux Points 2, 2, &c. seront encore aux hyperboles 5B5, 5A5.

En sorte que ces Courbes, construites de cette manière; c'est-à-dire, tellement que la différence des Lignes, Lf, LF, (menées d'un Point quelconque 1, 2, &c. du Périmètre de ces Courbes aux Points F, f,) soit toujours égale à la Ligne AB, ces Courbes, dis-je, seront nécessairement des Hyperboles, dont les Foyers seront F, f; lesquelles auront AB pour premier Axe, ou Axe transverse, & qui seront telles que Ff. AB :: 3. 2.

DÉM. Ce dernier cas ayant été prouvé art. 1. il s'agit de démontrer que les Courbes 5B5, 5A5, ainsi construites, sont des hyperboles, &c. élevons HK perpendiculairement sur le milieu C de AB; & du Sommet B avec CF ou Cf, décrivons des Arcs qui coupent HK en G, D; afin que GD soit le second Axe de ces Courbes (29), au cas que ce soient des hyperboles.

Soit maintenant CF = Cf = BG = BD = c; AC = CB = a; CD = CG = b; donc (à cause du Triang.

bes 5B5, 5A5, sont des hyperboles telles qu'on les demandoit.

102. Si on proposoit de construire des hyperboles avec les deux Lignes données AB, GD, pour les deux Axes de ces Courbes; après les avoir disposées à Angles droits, l'une sur le milieu de l'autre & réciproquement, on porteroit l'hypothénuse BD, de C aux Points F, f, ce qui en détermineroit les Foyers (93 & 95). après quoi on agiroit, pour la construction de ces Courbes, comme au n°. 101.

103. PROB. Une hyperbole LBT étant donnée, trouver son centre, ses Axes, ses Paramètres, son Foyer, ses Asymptotes. (fig. 83.)

RÉSOL. 1°. Menez à volonté, dans l'hyperbole, deux paires de cordes parallèles; c'est-à-dire, faites LS parallèle à BM, & BT parallèle à ur. par les Points de milieu 1, 2, des cordes BM, LS, tirez une Ligne 21, prolongée indéfiniment du côté de x; il est clair (Art. 2. du n°. 70.) que la Ligne 21 ainsi prolongée, doit nécessairement passer par le centre de la Courbe; & en faisant la même opération sur les deux cordes ur, BT, la Ligne ao, qui passe par le milieu de ces cordes, prolongée du côté y, passera aussi nécessairement par le centre de l'hyperbole; par conséquent le Point C, où se rencontrent les deux Lignes 21, ao, prolongées, est le centre de cette Courbe.

2°. Mettez une des pointes du Compas au centre C, & ouvrez cet instrument de manière qu'il puisse couper la Courbe en deux Points x, y, tracez l'Arc xpy. Alors, si du Point C vous menez, par le milieu p de cet Arc, l'indéfinie CpQ, ce sera l'Axe cherché. Car il est évident qu'en tirant la corde xy, elle seroit Perpendiculaire sur l'indéfinie CQ, & coupée en deux parties égales par cette Ligne. La corde xy seroit donc une double Ordonnée au Diamètre indéterminé CQ (71, & Art. 1. du n°. 70); mais il n'y a que l'Axe qui ait ses Ordonnées Perpendiculaires (73); par conséquent le Diamètre CQ est l'Axe de la Courbe.

3°. Le premier Axe étant trouvé, vous aurez le second par le n°. 28.

Rectangle BCD) $bb = cc - aa$. Soit encore LM = y; CM = x; donc fM = x + c; FM = x - c; AM = a + x; BM = a - x. Donc AM x BM = aa - xx. De plus, si nous appelons 2f la somme des Lignes fL, LF, comme leur différence = AB (const.) = 2a, nous aurons la plus grande fL = f + a, & la plus petite LF = f - a (n°. 103. Alg. Inf. T. 1.). Ceci supposé, remarquons que dans le Triangle-Rectangle fML, $fL = fM + LM$, ou $ff + 2af + aa = xx + 2cx + cc + yy$ (T). Pareillement, dans le Triangle-Rectangle FML, $LF = FM - LM$, ou $ff - 2af + aa = xx - 2cx + cc + yy$ (S). Donc (en retranchant l'équation S de l'équation T; c'est-à-dire, le premier membre du premier membre, & le second du second) nous aurons $4af = 4cx$, ou $f = \frac{cx}{a}$. Ainsi, en substituant cette valeur de f

dans l'équation T, elle deviendra $\frac{c^2x^2}{aa} + 2cx + aa = xx$

+ $2cx + cc + yy$; donc (en ôtant 2cx de part & d'autre, & multip. par aa) $c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$; ainsi (en transposant) $c^2x^2 - a^2x^2 = a^2c^2 + a^2y^2 - a^4$, (M);

ou $cc - aa \times x^2 = cc - aa \times aa + a^2y^2$ (M). Or nous avons vu que $cc - aa = bb$; donc (en substituant dans les deux membres de l'équation M, bb en la place de $cc - aa$) on aura $bbxx = aabb + a^2y^2$. Donc $bbxx - aabb = a^2y^2$; c'est-à-dire $xx - aa \times bb = aa \times yy$; donc $yy \cdot xx - aa :: bb \cdot aa :: 4bb \cdot 4aa$. ou LM. BM x AM :: GD.

AB. Ce qui signifie que le carré de l'Ordonnée LM à la Courbe 5B5 est au Rectangle de l'Abcisse BM par l'Axe intercepté AM, comme le carré du second Axe GD est au carré de l'Axe transverse AB. Or c'est là précisément la propriété de l'hyperbole, établie au n°. 15. Donc les Cour.

R iii

4°. Ces deux Axes déterminés vous feront découvrir les Paramètres suivant le n°. 33. & les Foyers par les n°. 93 & 95.

5°. Enfin vous aurez les Asymptotes de cette Courbe, en faisant la Perpendiculaire bt au Sommet B du premier Axe, égale au second GD, & telle que Bb = Bt; & tirant ensuite du centre C par les extrémités b, t, les indéfinies CN, CK, qui seront les Asymptotes de la Courbe proposée (42 & 47). de sorte que ce Problème se réduit à trouver le centre & le premier Axe de l'hyperbole, moyennant quoi on a tout le reste.

* 104. PROB. Soient les hyperboles opposées HBx, bAy; (fig. 84.) AB, GD, leurs Axes; les Tangentes LBQ, MAN, égales chacune à GD; en tirant LM, QN, l'on aura la figure LMNQ, qui est le Rectangle des Axes circonscrit aux hyperboles. Maintenant par un Point quelconque H de l'une de ces hyperboles, tirons un premier Diamètre HCh; & après avoir mené par les Points L, Q, les Asymptotes CR, CK (42 & 47), tirons Hn parallèle à CK; faisons le prolongement nP = Hn; afin qu'en tirant PC prolongée jusqu'à ce que Cp = PC, nous ayons Pp pour le second Diamètre conjugué au premier Hh (67). Alors par les Points H, h, menons les Tangentes RHS, VbT, lesquelles seront chacune égales au second Diamètre Pp (64); & par conséquent, si nous traçons les Lignes RV, ST, nous aurons la figure RSTV, qu'on appelle le Parallélogramme circonscrit des deux Diamètres conjugués Hh, Pp. Or cette construction étant bien conçue, on demande quel est le rapport du Rectangle circonscrit LMNQ des Axes, au Parallélogramme RSTV des deux Diamètres conjugués Hh, Pp, circonscrit aux hyperboles opposées.

RÉSOL. Tirons BG; ce qui sera que le Triangle BCG sera la huitième partie du Rectangle des Axes, puisque le carré LBCG en est le quart; & comme BG est coupée en O en deux parties égales par l'Asymptote CR (Dém. du n°. 54.), le Triangle BOC est la moitié de BCG; par conséquent BOC est la seizième partie du Rectangle des

R iv

Axes; car nous avons observé que BCG en étoit le huitième.

Parcèlement, le Triangle RST étant la moitié du Parallélogramme circonscrit des Diamètres conjugués, RCS en sera le quart; RCH le huitième, à cause de $RH = HS$ (62); & par conséquent le Triangle CHn en sera la seizième partie, puisque $Rn = Cn$ (61). La question se réduit donc à faire voir, quel est le rapport du Triangle BOC au Triangle CHn.

Mais, BO, Hn, étant (par la const.) parallèles à l'Asymptote CK, il a été démontré (56) que $Hn \times nC = BO \times OC$, donc $nC : OC :: BO : Hn$. Or, en abaissant les Perpendiculaires Hb, Bd sur CR, il est clair que les Triangles BOd, Hnb étant semblables, l'on aura $BO : Hn :: Bd : Hb$; donc nC ,

$$OC :: Bd : Hb; \text{ donc } nC \times Hb = OC \times Bd, \text{ ou } \frac{nC \times Hb}{2} =$$

$$\frac{OC \times Bd}{2}; \text{ c'est donc à dire que le Triangle CHn} = \text{le}$$

Triangle BOC; & par conséquent chacun de ces Triangles étant la seizième partie de leurs Parallélogrammes respectifs, il s'ensuit que le Rectangle des Axes circonscrit aux hyperboles opposées, est toujours égal au Parallélogramme de deux Diamètres conjugués quelconques, circonscrit aux mêmes hyperboles. C. Q. F. T. & D.

* 105. PROB. Trouver la surface de l'hyperbole HAP, ou de la moitié HAL. (fig. 83.).

RÉSOL. Comme on n'a point encore de méthode rigoureuse, pour résoudre ce Problème, on y procédera par approximation. Pour cela, après avoir tiré au Sommet A la Tangente eS, égale au second Axe GD de cette Hyperbole, on mènera l'Asymptote Ch; & l'on cherchera l'Aire du Trapèze Aebi; après quoi, si l'on tire des Lignes b1I, 22, 77 &c. parallèles à la Tangente Ae, & assez proches l'une de l'autre, l'espace Aeb1I se trouvera divisé en plusieurs portions b1I 22, 22 77, &c. lesquelles ne seront pas sensiblement différentes de petits Trapèzes. On évaluera séparé-

ment; Ch, Cd, les Asymptotes; eS la Tangente au Sommet A de cette Courbe, laquelle est toujours égale au second Axe GD (const. du n°. 42.). Imaginons maintenant qu'après avoir divisé l'Axe AI en un très-grand nombre de parties égales, l'on ait tiré par les Points de division des parallèles à la Tangente AS; pour avoir des parallélogrammes circonscrits au Trapèze AldS, ainsi qu'à la demi-hyperbole AIP, comme on l'a exécuté lorsqu'il s'est agi de la solidité du Paraboloïde & de celle de l'Ellipsoïde. Si nous concevons alors que cette figure, ainsi appareillée, fasse une circonvolution au tour de son Axe AI, il est évident que le Trapèze AldS engendrera un cône tronqué, & chacun de ses Parallélogrammes circonscrits, tel que fm, engendrera un Cylindre circonscrit à ce cône tronqué. Parcèlement, la demi-hyperbole AIP engendrera un hyperboloïde, & chacun de ses Parallélogrammes circonscrits, tel que mn, engendrera un Cylindre circonscrit à l'hyperboloïde. Or nous avons démontré plusieurs fois, aux n°. 68 & 69 de la Parabole, & 68 & 77 de l'Ellipse, que la somme des Cylindres circonscrits au cône tronqué n'étoit pas différente de la solidité de ce cône, & que celle des circonscrits à l'hyperboloïde, pouvoit être prise pour l'hyperboloïde même. Donc, si nous pouvons déterminer la différence de la somme des Cylindres circonscrits au cône tronqué, à la somme des Cylindres circonscrits à l'hyperboloïde, nous aurons évidemment la différence de ces deux Solides; & comme on sçait évaluer le cône tronqué, nous aurons par là un moyen de connoître la solidité de l'hyperboloïde.

Soit donc G le Cylindre engendré par la circonvolution du Parallélogramme fm; P le Cylindre engendré par la circonvolution du Parallélogramme mn; le Cercle du rayon mV = S; celui du rayon mg = C; le Cercle de AS = T. Il est clair que le Cylindre G = S x Am, & que le Cylindre P = C x Am; donc G — P = S — C x Am (K). Remarquez maintenant que les rayons mV, mg,

ément chacun de ces Trapèzes, & leur somme donnera, à très-peu près, la surface de l'espace Aeb1I. On ôtera ce dernier espace du Trapèze Aebi, & il restera évidemment l'Aire de la demi-hyperbole HAL; donc, &c.

* 106. LEMME préparatoire à la cubature de l'hyperboloïde (fig. 85.). Si, après avoir tracé deux Cercles concentriques, l'on tire le Diamètre qV; qu'au Point g, où ce Diamètre coupe la circonférence du petit Cercle, l'on élève la Perpendiculaire gS jusqu'à la rencontre de la grande circonférence; je dis que la couronne circulaire, c'est-à-dire, l'espace compris entre les deux circonférences concentriques, sera égale au Cercle décrit avec le rayon gS, qui est évidemment moyen proportionnel entre la somme qg des rayons des Cercles concentriques, & la différence Vg de ces rayons.

DÉM. Soit Vm = R; gm = r; ainsi qg = R + r, & Vg = R — r; soit encore A la circonférence du grand Cercle; a, celle du petit; donc l'Aire du grand sera $\frac{AR}{2}$, & celle du petit = $\frac{ar}{2}$. De plus, si l'on appelle s la circonférence du rayon gS, & y ce rayon, l'on aura $\frac{y^2}{2}$ pour l'Aire de son Cercle. Cela supposé, il est clair que la couronne circulaire est égale au grand Cercle moins le petit; c'est-à-dire que cette couronne = $\frac{AR}{2} - \frac{ar}{2}$. Il faut donc démontrer que $\frac{AR}{2} - \frac{ar}{2} = \frac{y^2}{2}$, ou que AR — ar = y².

Or remarquez 1°. que, par la nature du Cercle, gS = qg x Vg, ou que yy = R + r x R — r = RR — rr.

2°. Les Cercles étant entr'eux comme les carrés de leurs rayons, $\frac{AR}{2} : \frac{ar}{2} :: RR : rr$, ou AR.ar :: RR.rr; donc (en soustrayant) AR — ar :: RR — rr.rr. Mais (art. 1.) RR — rr = yy; donc AR — ar :: yy.rr. Or, les carrés des rayons y, r, étant entr'eux comme les Aires de leurs Cercles, yy.rr :: $\frac{y^2}{2} : \frac{r^2}{2} :: y^2 : r^2$; ainsi yy.rr :: y².ar; & par conséquent AR — ar :: y².ar. Donc, puisque ar = rr, il faut que AR — ar = y². C. Q. F. D.

* 107. PROB. Trouver la solidité de l'hyperboloïde. (fig. 83.).

RÉSOL. Soit HAP l'hyperbole génératrice du Solide pro-

engendrent des Cercles S, C, concentriques; & qu'ainsi la différence S — C de ces Cercles, ou la couronne comprise entre leurs circonférences, est égale au Cercle, dont le rayon est moyen proportionnel entre la somme qg & la différence Vg de leurs rayons (106); mais la Ligne AS est ce rayon moyen proportionnel; car (Art. 1. du n°. 42.)

qg x Vg = AS; donc qg. AS :: AS. Vg. par conséquent le Cercle de AS, c'est-à-dire T = S — C. Ainsi, en mettant dans l'équation K, le Cercle T en la place de S — C, elle deviendra G — P = T x Am = le Cylindre engendré par la circonvolution du Parallélogramme mS; & il en sera ainsi de chacun des Cylindres circonscrits au cône tronqué, comparé à chacun des circonscrits à l'hyperboloïde. Par conséquent la différence de la somme des circonscrits au cône tronqué, à la somme des circonscrits à l'hyperboloïde, c'est-à-dire, la différence du cône tronqué à l'hyperboloïde, est égale à la somme des Cylindres T x Am, engendrés par la circonvolution du Rectangle IS. Or cette dernière somme est égale au Cylindre entier, engendré par la circonvolution du Rectangle IS au tour de l'Axe AI. Ainsi la différence du cône tronqué à l'hyperboloïde est le Cylindre engendré par le Rectangle IS. Donc, pour avoir la solidité de l'hyperboloïde, il faut commencer par déterminer celle du Cône tronqué, engendré par la circonvolution du Trapèze AldS, & en ôter le cylindre engendré par la circonvolution du Rectangle IS autour de l'Axe AI. C. Q. F. T. & D.

Des Hyperboles conjuguées.

* 108. Si l'on prend sur l'hyperbole PBT (fig. 86.) tant de Points P, M, B, &c. que l'on voudra; & que de ces Points l'on tire parallèlement à l'Asymptote CL, les Lignes Pop, Mem, Bfg, &c. qui coupent l'autre Asymptote Cc, de manière que op = Pe, em = Me, fg = Bf, &c.

que l'on fasse une même opération sur l'autre branche BT; par rapport à l'Asymptote CL; & que l'on agisse de même sur l'hyperbole opposée xAd, par rapport aux mêmes Asymptotes, alors en faisant passer une Ligne par les extrémités p, m, g, &c. dans l'Angle oCl, & une semblable Ligne dans son opposé au Sommet LCr, il en naîtra deux hyperboles opposées pgS, HGb, qui seront conjuguées aux deux hyperboles opposées PBT, xAd, dont les Axes sont AB, Gg. Et ces deux nouvelles hyperboles auront les mêmes Asymptotes & les mêmes Axes que les deux premières; excepté que le premier Axe des premières, deviendra le second Axe dans les conjuguées, & réciproquement.

DÉM. 1°. Par la const. $em = Me$; ainsi $em \times eC = Me \times eC = Bf \times fC = Bf$ (54), parce que la Courbe PBT est une hyperbole (supp.); donc $em \times eC = Bf \times fC$; or $Bf = fg$ (const.); ainsi $em \times eC = fg \times fC = f^2g$.

Par la même raison $op \times oC = fg$, &c. Or, quand cela arrive, les Points p, m, g, sont à une hyperbole (55): la Courbe pmgS est donc une hyperbole, ainsi que son opposée HGb, que l'on suppose construite de la même manière dans l'Angle opposé LCr.

2°. Puisque dans l'hyperbole PBT, $Me > Pq$ (45), on aura dans l'hyperbole pmgS, $em > op$: donc cette dernière hyperbole s'approche de plus en plus de la Ligne Co; donc la Ligne Co est une de ses Asymptotes (47), comme elle l'est de PBT. Et l'on prouvera de même que Cl est Asymptote de l'hyperbole pmgS.

3°. La propriété du Sommet d'une hyperbole étant telle (54) qu'une Ligne tirée de ce Point parallèlement à une de ses Asymptotes & terminée par l'autre, est égale à la portion de cette autre Asymptote, comprise entre le Sommet de l'Angle des Asymptotes & le Point de rencontre, il est clair que la Ligne fg ayant cette propriété, son extrémité g est le Sommet de l'hyperbole pmgS; par conséquent GCg en est le premier Axe.

conjuguées pmgS, HGb, de passer par les extrémités de tous les seconds Diamètres des hyperboles PBT, xAd, a fait soupçonner à quelques Géomètres, & il y en a même qui ont dit expressément, que les quatre hyperboles de la fig. 86. n'étoient que quatre quartiers de la même Courbe; c'est-à-dire que ces quatre hyperboles ne composoient ensemble qu'une seule & même Courbe. Et ils se sont confirmés dans cette idée, en se croyant permis de supposer qu'à une très-grande distance de leur Sommet, ces hyperboles se joignent à leurs Asymptotes; quoiqu'il soit rigoureusement démontré que ces Lignes ne pourront jamais absolument se rencontrer (47).

Mais, quand on veut s'assurer que plusieurs Points de portions de Courbes, appartiennent à une seule & même Courbe, il n'y a pas d'autre moyen que de voir, si chacun de ses Points rapportés de la même manière à une même Ligne, présente toujours la même équation. Donc, puisque les Points des conjuguées, rapportés perpendiculairement au premier Axe d'une hyperbole, ne donnent pas aux mêmes Points de cet Axe, la même équation que les Points de l'hyperbole dont elles sont conjuguées, comme cela est évident, il faut nécessairement conclure que les conjuguées d'une hyperbole, ne sont pas des portions ou des quartiers de cette hyperbole.

Ainsi, quand il seroit vrai que les Asymptotes des hyperboles opposées deviendroient enfin Tangentes de ces Courbes, ainsi que de leurs conjuguées (ce dont j'ai fait voir l'impossibilité), on n'auroit pas droit d'en conclure que ce sont quatre quartiers de la même Courbe.

USAGE de l'Hyperbole dans la Dioptrique, soit pour la construction des Verres ardents, soit pour celle des Lunettes.

113. Je suppose ici tous les préliminaires de Dioptrique, expliqués aux n°. 110, 111, 112, 113 de l'Ellipse, où il s'est agi d'appliquer cette Courbe aux mêmes usages, que je me propose en cet endroit-ci.

4°. Élevant au Point g, sur ce premier Axe GCg, une Perpendiculaire bga terminée par les Asymptotes, on voit sans difficulté que dans le Triangle yba, la Ligne ba étant double de BC, elle sera égale à BA. De plus $bg = BC = CA = ga$; donc $bg = ga$; ainsi ba est une Tangente au Sommet (61 & 63). Or la Tangente au Sommet de l'hyperbole & terminée par les Asymptotes, est égale au second Axe de cette Courbe (const. du n°. 42. & 47); donc, puisque $ba = BA$, & que la Ligne BA passe par le Sommet de l'Angle des Asymptotes, où elle est divisée en deux parties égales, & perpendiculaire au premier Axe GCg, il est évident que BA est le second Axe de l'hyperbole pmgS, ainsi que de son opposée HGb. Et c'est tout C. Q. F. D.

109. REMARQ. Les hyperboles pmgS, HGb, sont dites conjuguées aux hyperboles PBT, xAd; parce que ces hyperboles sont des fonctions semblables, les unes par rapport aux autres: vû que les Hyperboles PBT, xAd, engendrent ou peuvent engendrer les hyperboles pmgS, HGb, & réciproquement.

* 110. COR. I. Tirons d'un Point quelconque M de l'hyperbole MBT, un premier Diamètre MCd; & après avoir mené Mem parallèlement à l'Asymptote Ll, tirons du Point m un premier Diamètre mCh à la conjuguée pmgS, & il arrivera que ce premier Diamètre mCh, sera le second Diamètre conjugué au premier Diamètre MCd de l'hyperbole MBT.

Car, (54) pour avoir le Diamètre conjugué au Diamètre MCd, il faut du Point M tirer la Ligne Mem parallèlement à l'Asymptote Ll; faire $Me = em$, & tirer mCh en sorte que $Ch = mC$. Or, c'est précisément tout ce qui se trouve pratiqué dans ce cas, puisque $Me = em$ est parallèle à Ll (const.); & que $mC = Ch$, parce que mh est un des premiers Diamètres des hyperboles opposées pmgS, HGb.

* 111. COR. II. On voit par là que les hyperboles conjuguées pmgS, HGb, passent par les extrémités de tous les seconds Diamètres des hyperboles PBT, xAd; & réciproquement, &c.

* 112. REMARQ. La propriété qu'ont les hyperboles

Soit donc l'hyperbole PBZ (fig. 87.); le Point F son Foyer; f celui de son opposée, & son premier Axe AB, qui soit à la distance des Foyers Ff, dans le rapport de la réfraction du verre dans l'Air, c'est-à-dire, à peu près, comme 2 est à 3; [a] je dis que tous les rayons TM parallèles à l'Axe AB (en passant de l'Air dans le solide de verre, engendré par la circonvolution de l'hyperbole PBZ au tour de son Axe, dont PZ est une double Ordonnée) seront nécessairement, à la sortie de ce verre en M, détournés de leur direction MS dans une Ligne telle que Mf, qui se dirige au Foyer f de son opposée.

DÉM. Elevons au Point M. une Perpendiculaire GL à la Courbe, ou à la Tangente en ce Point; faisons $TM = Mf$; du Point M avec le rayon Mf ou TM, décrivons une portion de Cercle fRTQ; & des Points T, f, abaissons les Perpendiculaires TL, fG, sur GL. Cette construction supposée, il est clair que GML est l'Axe de réfraction, que TL est le Sinus de l'Angle d'inclinaison TML, & que fG est le Sinus de l'Angle GMf. Ainsi, en faisant

[a] Pour avoir des hyperboles opposées qui aient cette condition, & de plus dont le Sommet B de l'une soit à une distance donnée du Foyer f de l'autre, par exemple, à 20 pieds, on augmentera cette longueur de $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire ici de 4 pieds. Donnant donc 24 pieds à la Ligne Ff, on la divisera en 6 parties, dont chacune contiendra 4 pieds. On portera une de ces sixièmes parties, de F en B & de f en A. Ainsi il restera 4 sixièmes pour AB; & alors Ff. AB :: $\frac{2}{3} : \frac{4}{6}$:: 6. 4 :: 3. 2; donc 1°. AB. Ff :: 2. 3. Après quoi construisant ces hyperboles suivant le n°. 101. il est clair que la distance des Foyers Ff, étant de 24 pieds, & BF de 4 (const.), Bf en contiendra précisément 20. Et cette règle est générale; parce qu'en augmentant de $\frac{2}{3}$ la longueur donnée, elle contiendra alors $\frac{2}{3}$ ou $1 + \frac{2}{3}$; en donnant donc ce $\frac{2}{3}$ à FB, on lui aura donné la sixième partie de $\frac{2}{3}$; ainsi il restera toujours $\frac{2}{3}$ ou 1, c'est-à-dire, la longueur donnée pour Bf. C. Q. F. D.

voir que $TL : fG :: 2 : 3$, (qui est le rapport du Sinus de l'Angle d'inclinaison à celui de l'Angle de réfraction, quand un rayon de lumière passe du verre dans l'Air) on aura démontré que fG est le Sinus de l'Angle de réfraction, que GMf est cet Angle de réfraction; & que par conséquent le rayon TM , au sortir du verre en M , doit se détourner dans la Ligne Mf , qui passe par le Foyer f .

Or 1°. le rayon TM , étant parallèle à l'Axe AB & tombant perpendiculairement sur le plan PZ , n'éprouvera aucune réfraction à son passage de l'Air dans le verre; il rencontrera donc en M la concavité de la Courbe, dans une direction parallèle à AB ; mais, au sortir du verre dans l'Air, il quittera sa direction MS , suivant la Loi de la réfraction, pour s'écarter de la Perpendiculaire GML à la Courbe.

2°. Je dis qu'en prenant la route Mf , ce rayon sera plié précisément comme il doit l'être, pour faire que le Sinus TL de l'Angle d'inclinaison TML , soit au Sinus fG de l'Angle de réfraction $GMf :: 2 : 3$. Car (56) $TL : fG :: AB : Ff$; or (const.) $AB : Ff :: 2 : 3$; donc $TL : fG :: 2 : 3$. Ainsi TL étant le Sinus de l'Angle d'inclinaison, il faut que fG soit nécessairement celui de l'Angle de réfraction, & par conséquent que GMf soit cet Angle de réfraction. Donc, en prenant la direction Mf , le rayon TM , ou tout autre semblable, est dévié comme il doit l'être, pour suivre la loi de la réfraction. Par conséquent tous les rayons parallèles à l'Axe AB , après avoir traversé un verre de cette forme, construit suivant les conditions que nous avons supposées, vont tous se réunir au Foyer f . L'on a donc par cet artifice un excellent verre brûlant.

114. Réciproquement, les rayons d'un corps lumineux, placé au Foyer f dans l'Air, seront rendus parallèles à l'Axe AB , après avoir traversé le Solide de verre PBZ . Car le rayon fM rencontrant la convexité du verre PBZ , quittera son prolongement MV & s'approchera de la Perpendiculaire GML ; de manière que l'on aura, suivant la loi de la réfraction du rayon qui passe de l'Air dans le verre, fG .

TL

tion parallèle à l'Axe de ce solide, il divergera à sa sortie dans l'Air, comme s'il rayonnait directement du Foyer f ; & ainsi de tous les autres rayons. C. Q. F. D.

116. COR. II. Par conséquent, si un œil K (fig. 89.) est disposé de manière qu'il aperçoive bien distinctement le Point F , & non pas le Point A plus proche; ainsi qu'il arrive aux vieillards, qui distinguent mieux les objets éloignés à une certaine distance, que ceux qui sont plus proches; pour lui faire voir le Point A comme il faut, il n'y aura qu'à mettre entre lui & le Point A un verre $PBZL$, engendré par deux hyperboles, dont le Foyer de l'hyperbole CDE , opposée à la génératrice PLZ tournée vers l'œil, soit le Point F , & le Foyer de l'hyperbole ONR , opposée à la génératrice PBZ , qui regarde l'objet, soit en A [4].

DEM. Les rayons Ax , Ay , &c. venant du Foyer A rencontrer la convexité de l'hyperbole PBZ , seront, à leur entrée dans le verre, rendus parallèles à la Ligne FK , sur laquelle sont les Axes des hyperboles supposées (114); ainsi leurs réfractés xs , ys , tomberont sur la convexité de l'hyperbole PLZ , parallèlement à son Axe: mais, quand des rayons tombent avec cette disposition, sur la convexité d'un verre hyperbolique, ils deviennent divergens, à leurs sorties s , t , &c. de ce verre dans l'Air, comme s'ils venoient tous du Foyer F de l'hyperbole CDE , opposée à la génératrice PLZ (115); & par conséquent ces rayons trouveront l'œil disposé comme il doit l'être, pour apercevoir avec distinction le Point A : puisqu'alors ce Point affectera l'œil précisément, comme si ce Point étoit en F , qui est la distance où nous supposons que l'œil distingue les objets avec le plus de facilité. C. Q. F. D.

117. COR. III. Au contraire, si l'œil K pouvant voir commodément le Point A plus proche, n'étoit pas en état d'apercevoir avec distinction le Point F plus éloigné, il faudroit que l'hyperbole PLZ , tournée vers l'œil, eût le

$TL :: 3 : 2$, ou $TL : fG :: 2 : 3$; mais (const.) $AB : Ff :: 2 : 3$, donc $TL : fG :: AB : Ff$, mais, quand cela arrive, le rayon réfracté MT est parallèle à l'Axe AB (97).

115. COR. I. Si l'on suppose au contraire, que des rayons viennent du côté de f rencontrer la convexité de l'hyperbole PBZ (fig. 88), parallèlement à son Axe, je dis qu'en tirant OT perpendiculairement, à 2 ou 3 Lignes de distance du Sommet B , & les Lignes OP , TZ , parallèlement à ce même Axe, pour faire tourner ensuite la figure $OPBZT$ au tour de Bf , il en naîtra un Solide qui aura la propriété, s'il est de verre, de faire que tous ces rayons parallèles deviendront divergens, après l'avoir traversé, comme s'ils partoient tous du Foyer f de l'hyperbole opposée à la génératrice PBZ .

DEM. Reprenons la fig. 87, & supposons que SM parallèle à Bf , passe du verre dans l'Air au Point M ; il est certain, suivant la loi de la réfraction, que ce rayon quittera au Point M sa direction MT , & s'écartera de la Perpendiculaire ML , de la même manière qu'il s'en est écarté, en venant du côté de T vers S : or, en venant de T vers S , pour passer dans l'Air au Point M , il a fait l'Angle ou l'écartement SMf ; donc, en revenant du sein du verre du côté de S vers T , il fera en passant dans l'Air, au Point M , l'Angle ou l'écartement TMV égal à l'Angle SMf . Mais $TMf + SMf =$ deux Angles droits; donc $TMf + TMV =$ aussi deux Angles droits. Et par conséquent (n°. 43. *Inst. T. 1.*) MV est dans la même Ligne que Mf , laquelle passe par le Foyer f . Ainsi les rayons SM , qui rencontrent la convexité de ce verre hyperbolique, après l'avoir traversé parallèlement à son Axe, deviendront Divergens, à leur sortie dans l'Air au Point M , comme s'ils partoient du Foyer f ; donc (fig. 88.) le rayon SM , passant de l'Air dans le verre, & rencontrant perpendiculairement, à l'instant de son passage en L , la surface plane OT de ce verre, n'y souffrira aucune réfraction; il conservera donc son même parallélisme depuis L jusqu'en M , où rencontrant la convexité de l'hyperboloïde, dans une direc-

S

Point A pour le Foyer de son opposée; & que le Point F fut le Foyer de l'hyperbole opposée à la génératrice PBZ , tournée du côté de l'objet [4]; & alors le verre $PBZL$ disposeroit les rayons émanés de F , à entrer dans l'œil K , comme s'ils partoient du Point A plus proche, où l'on suppose qu'un objet placé seroit vu très-distinctement par l'œil proposé. Par conséquent, cet œil acquerroit, moyennant un pareil instrument, la capacité de distinguer un objet à une distance beaucoup plus grande, qu'il ne le pourroit naturellement ou sans aucun secours artificiel.

DEM. Raisonnez précisément comme au n°. 116. Puisque les rayons Fx , Fy , envoyés du Foyer F de l'hyperbole opposée à la génératrice PBZ , seront rendus parallèles après avoir rencontré la convexité de cette Courbe (114); ils pénétreront donc la substance de ce verre, dans une direction xs , ys , parallèle à son Axe; ainsi ils tomberont parallèles sur la convexité de l'hyperbole PLZ , & seront par là rendus divergens, à la sortie de ce verre dans l'Air, comme s'ils partoient du Foyer A de l'hyperbole opposée à la génératrice PLZ (115). Par conséquent, ces rayons entrans dans l'œil de la même manière que s'ils venoient de A , trouveront cet organe disposé comme il doit l'être, pour apercevoir avec distinction le Point F . Car alors il n'y aura pour lui, à cet égard, aucune différence entre le Point A & le Point F ; en supposant toujours que la lumière ne soit pas trop affoiblie par l'éloignement. C. Q. F. D.

Observation importante sur la réduction de cette théorie en Pratique.

L'usage de tailler sphériquement les verres de Lunettes a pourtant prévalu dans la pratique. Par la seule raison, sans doute, que l'exécution en est plus aisée; il seroit donc très-désirable, les Artistes de profession ne pouvant guères devenir Sçavans, que les Sçavans travaillassent

[4] On a enseigné à la note du n°. 113, comment ces Hyperboles pouvoient être construites.

[4] Quoique la fig. 89. ne convienne qu'au n°. 116, il est aisé de l'appliquer au n°. 117, en supposant que l'objectif PBZ devienne l'oculaire PLZ , & que l'oculaire PLZ devienne l'objectif PBZ .

quelquefois à devenir Artistes. La perfection des Arts de génie suivroit alors de fort près les Découvertes théoriques, qui en font le flambeau. Que ne doit pas l'Horlogerie au noble Géomètre M. *Huyghens*? Aussi n'y avoit-il pas moins d'industrie dans les mains que d'invention dans la tête. Du tems de M. *Descartes*, c'est-à-dire, vers les années 1627. & 1628. M. *Mydorge* son ami, bon Mathématicien, & qui avoit la main aussi sûre & aussi délicate que l'esprit subtil, après avoir tracé lui-même les figures de Mathématique qui devoient servir de modèle, fit faire des verres Paraboliques, Hyperboliques, Ovale & Elliptiques, qui réussirent merveilleusement.

Encouragé par ce succès, M. *Descartes* devint lui-même en très-peu de tems un grand Maître dans l'art de tailler les verres; & convaincu que l'industrie des Mathématiciens se trouve souvent inutile par la faute des Ouvriers, dont l'adresse ne répond pas toujours à l'esprit des Auteurs qui les font travailler, il s'appliqua particulièrement à former la main de quelques Tourneurs, qu'il trouva les plus experts & les plus disposés à ce travail. . . . Il eut le bonheur de rencontrer singulièrement ce qu'il cherchoit, dans *Ferrier*, faiseur d'instrumens de Mathématiques à Paris. . . . Cet ouvrier n'étoit pas un simple Artisan qui ne sçût remuer que la main; il possédoit encore la théorie de sa profession, & sçavoit l'Optique & la Mécanique aussi sûrement qu'un Professeur du Collège Royal; n'étant pas même ignorant dans le reste des Mathématiques. L'un des instrumens les plus excellens que M. *Descartes* lui fit faire, fut une Lunette nouvelle composée de verres hyperboliques, à laquelle il ne s'étoit encore rien vu de semblable. M. de *Ville-Bresieux* qui l'avoit vue, & qui de plus avoit été présent à sa fabrique, assuroit que par son moyen l'on découvroit distinctement les feuilles des plantes à trois lieues de distance.

Mais, dans ces commencemens où il s'agissoit d'établir un Art tout nouveau, M. *Descartes* croioit la présence absolument nécessaire, pour diriger la main des Ouvriers ou

des Tourneurs, & leur donner de nouvelles instructions, à mesure qu'ils avanceroient ou qu'ils manqueroient. C'est pourquoi il ne put approuver les services, que ses amis lui rendirent en 1637. & 1638 auprès du Cardinal de Richelieu, à l'occasion de ses belles inventions de Dioptrique. On étoit parvenu à faire goûter au Cardinal les propositions qu'on lui avoit faites, de travailler à des Lunettes sur les règles que M. *Descartes* en donne dans sa Dioptrique. Ces nouvelles étant parvenues au Philosophe François, alors en Hollande, il écrivit à ses amis de Paris pour les remercier de leurs bons offices; mais il leur montra de l'éloignement pour l'exécution de ce projet. Il craignoit qu'on ne réussît mal en son absence, & qu'on ne rejetât ensuite sur lui-même la faute des ouvriers [4].

Les choses tournèrent apparemment comme l'avoit prévu M. *Descartes*; car on ne voit point, dans le reste de sa Vie, qu'il revienne à l'art de tailler les verres de Lunette. Il ne paroît pas même que, depuis ce tems jusqu'à nos jours, l'on ait fait de grandes tentatives pour perfectionner cet Art selon ses principes; quoique l'on eût attendu les plus grands succès d'une théorie si rigoureusement démontrée. Effectivement je trouve, dans le *Mercur* de France Septembre 1749. qu'un Anglois vient de réduire très-heureusement en pratique la doctrine des Lunettes par M. *Descartes*. Cela fait partie d'une Lettre écrite à M. *Folkes*, Président de la Société Royale de Londres. Voici quels en sont les termes, « M. *Short*, de la Société Royale de Londres, & placé en 1747. dans le jardin de l'Hôtel de *Malborough*, un grand Télescope de 12 pieds & à réflexion, dont le miroir est de métal. Il produit des effets supérieurs à tout ce que l'on a vu jusqu'à présent en ce genre. Ce qui est dû principalement à l'attention que M. *Short* a toujours eue de donner une figure parabolique au grand miroir, & une Elliptique au petit, toutes les fois qu'il a percé le grand miroir suivant la méthode de *Grégoire*. »

[4] Voy. sur tout ceci *Baillet*, Vie de *Descartes*.

S iiij

La construction des miroirs ou des verres coniques n'est donc pas aussi impraticable que Messieurs *Dechales* & *Wolf* l'insinuent dans leur Dioptrique; & nos grands Artistes François devroient bien, à force de courage & d'industrie, se remettre en possession d'un honneur, que M. *Descartes* acquit autrefois si justement à la France.

* 118. USAGE de l'Hyperboloïde dans la Catoptrique (fig. 90). L'hyperboloïde engendré par la circonvolution d'une hyperbole sur son Axe, peut être convexe & concave à la fois. Or soit que l'on considère la convexité de ce solide, soit qu'on en regarde la concavité, on trouvera qu'il a la propriété de réunir des rayons de lumière, en les faisant jaillir de dessus sa surface.

DÉM. 1°. Soit donc l'hyperbole RR, génératrice d'un hyperboloïde convexo-concave, dont on suppose que des rayons de lumière DR, viennent rencontrer la convexité ou la courbure hyperbolique extérieure, dans une direction au Foyer F de ce conoïde; je dis que tous ces rayons iront se réunir au Foyer f de l'hyperboloïde opposé. Car, en tirant en un Point quelconque R la Tangente MR, & traçant le prolongement RF du rayon DR, rappelons-nous qu'il a été démontré (93) que l'Angle $fRI = RF$; mais $RF = DRM$; donc $fRI = DRM$: le rayon DR se réfléchira donc dans la Ligne Rf, qui va à l'autre Foyer f; & par conséquent tous les rayons DR, qui rencontreront la convexité de cette hyperboloïde, dans une direction à son Foyer F, iront tous se réunir au Foyer f de l'hyperboloïde opposé. Donc, en supprimant ce dernier solide, on aura le Point f en l'Air, où les rayons DR auront la liberté de se rassembler.

2°. Supposons présentement que des rayons PR, dirigés au Foyer f, viennent frapper contre la surface concave ou la courbure intérieure hyperbolique de l'hyperboloïde opposé; il arrivera encore que les rayons PR, réfléchis à la rencontre de cette surface, se rassembleront tous au Foyer F du conoïde RR. Car (en menant comme ci-dessus la Tangente MR, la Ligne RF, & le prolongement Rf du rayon

PR) on remarquera aisément que l'Angle $PRM = fRI = RF$ (93), donc $PRM = RF$; le rayon PR se réfléchira donc au Foyer F, & ainsi des autres. C. Q. F. D.

USAGE de l'Hyperbole pour la Trisection de l'Angle.

* 119. PROB. préparatoire. Deux Lignes BA, BC, étant données pour les Asymptotes d'une hyperbole, avec un de ses Points D, construire cette Courbe (fig. 91.).

RÉSOL. Par le Point donné D, tirez un grand nombre de Lignes droites ADM, FDN, GDC, &c. terminées par les deux côtés de l'Angle ABC. Faites $ML = AD$; $NO = FD$; $CR = GD$, &c. & je dis que les Points L, O, R, &c. ainsi déterminés, seront à une hyperbole, qui aura pour Asymptotes les Lignes BA, BC.

DÉM. 1°. Que la Courbe ainsi engendrée soit une hyperbole, cela est clair par le n°. 59. 2°. Après avoir tiré sur BA la Perpendiculaire DH, on voit que $AD > FD$, & $FD > GD$. Donc, puisque (const.) $ML = AD$, $FD = NO$, & $GD = CR$, l'on aura $ML > NO$, & $NO > CR$, &c. Par conséquent, à mesure que les Points L, O, R, &c. s'éloignent du Sommet B, ils s'approchent continuellement de la droite BC; d'autant plus que les Angles M, N, C, &c. vont toujours en diminuant. Cependant aucun Point de cette Courbe ne coïncidera avec la droite BC; car, quelque inclinée que soit, par exemple, la Ligne GDC, son Point R se trouvera toujours au-dessous de BC (par la const.) Ainsi BC est Asymptote de la branche KLOR (47); & si, à quelque Point L de cette branche, l'on fait la même construction qu'au Point D, on aura l'autre branche KDS de cette Courbe, dont BA sera l'Asymptote. Ce que l'on démontrera de la même manière que l'on s'est conduit par rapport à BC. Donc, &c. C. Q. F. T. & D.

* 120. PROB. Soit maintenant l'Angle COB, (fig. 92.), que l'on propose de diviser en deux parties égales.

RÉSOL. On commencera par décrire un Cercle du centre O, avec le rayon OC ou Ob, pour avoir l'Arc bAC mesure

S iv

de l'Angle proposé, & en même-tems la corde bc de cet Arc, laquelle sera donnée de grandeur; on abaissera le rayon ODA perpendiculairement sur bc ; on prolongera ce rayon du côté de L ; & faisant $OL = \frac{OD}{2}$, on élèvera sur LA la Perpendiculaire $LM = \frac{OD}{2}$ ou $\frac{PD}{2}$. Après quoi traçant, parallèlement à LA , la Ligne MV , laquelle divise DC en deux parties égales au Point G ; parce que $DG = LM$, & que $LM = \frac{OD}{2}$ (const.); on décrira par le Point donné O l'hyperbole OTZ , qui ait pour Asymptotes les droites ML , MV (119); & cette hyperbole coupera nécessairement l'Arc bAC en quelque Point T ; vu que cette Courbe s'étendant à l'infini, est toujours renfermée dans l'Angle LMV des Asymptotes (47). Maintenant, si du Sommet O de l'Angle donné on tire le rayon OT , l'Angle COT fera le tiers de l'Angle proposé COB .

DÉM. Faisons $DI = DS$, & tirez le rayon OIQ ; ce qui donnera évidemment l'Angle $BOQ = COT$: ainsi il reste à démontrer que l'Angle $TOQ = COT$. Or il est évident 1°. qu'en tirant la corde TQ , elle sera parallèle à bc , & par conséquent coupée en deux parties, égales au Point N par la Perpendiculaire ODA sur bc .

2°. Menez présentement, du Point d'intersection T , la Ligne TK parallèlement à l'Asymptote MV , & par le Sommet O le Diamètre HB parallèlement à l'autre Asymptote ML , & vous aurez $OL \times LM = TK \times KM$ (56) $= TP + PK$ ou $TP + OL \times Pd$ (à cause que $PK = OL$, & $KM = Pd$) $= OD \times OL$ (56) $= OP + Pd \times OL$; donc $TP + OL \times Pd = OP + Pd \times OL$. Or $TP + OL \times Pd = TP \times Pd + OL \times Pd$, & $OP + Pd \times OL = OP \times OL + Pd \times OL$. Donc $TP \times Pd = OP \times OL$; ainsi $TP : OP :: OL : Pd$: mais il est évident que les Triangles TPO , ODS , sont semblables; donc $TP : OP :: OD : DS$; par conséquent $OL : Pd :: OD : DS$: mais $OD = 2OL$ (const.); donc $DS = 2Pd$ ou $2rG$; ainsi Dr , qui vaut $DS + Sr$, est $= 2Pd + Sr$; mais $Dr = TN$, & $TQ = 2TN$ (const.); donc TQ

$= 2Dr$; & par conséquent, puisque $Dr = 2Pd + Sr$, TQ est $= 4Pd + 2Sr$.

3°. Maintenant $DG = Dr + rG = Dr + Pd$. Or, on vient de voir que $Dr = 2Pd + Sr$; donc $DG = 3Pd + Sr = CG$ (car $DG = CG$ (art. 1°)); ainsi $CG + rG + Sr$, ou (const.) $DG + Pd + Sr = 4Pd + 2Sr$; c'est-à-dire que $CS = 4Pd + 2Sr$. Mais nous avons vu (art. 2°) que $TQ = 4Pd + 2Sr$; donc $CS = TQ$.

4°. Mais, dans les Triangles semblables OIS , OQT , $OI : OQ :: IS : TQ$, ou $OI : OC :: IS : CS$ (parce que $OC = OQ$, & que $CS = TQ$ (art. 3°)); donc l'Angle COI ou CCQ est coupé en deux parties égales par la Ligne OST (291. *Inst. T. 2.*); ainsi l'Angle $COT = TOQ$; & comme on a déjà vu que l'Angle $COT = COQ$ (art. 1°), il s'ensuit que les trois Angles COT , TOQ , COQ , sont égaux, & qu'ainsi l'Angle COB est divisé en trois parties égales. C. Q. F. T. & D.

* 121 USAGE de l'Hyperbole pour la duplication du Cube (fig. 93.). Soit AB le côté du Cube connu, & BC le double de AB . On sçait que pour avoir le côté du Cube cherché, il faut (398. *Inst. T. 2.*) trouver deux moyennes proportionnelles entre AB & BC ; & la première de ces deux proportionnelles, sera le côté du Cube que l'on demande.

RÉSOL. Faisons un Rectangle BD des deux Lignes AB , BC ; & prenant les côtés BA , BC , indéfiniment prolongés, pour les Asymptotes de l'hyperbole à décrire par le Point D , traçons cette Courbe (119); & circoncrivons un Cercle BSC au Rectangle BD . Je dis 1°. que ce Cercle coupera nécessairement l'hyperbole en un autre Point S .

2°. Qu'en abaissant de ce Point la Perpendiculaire ST sur BC , les deux Lignes BT , TS , seront les deux moyennes proportionnelles cherchées.

DÉM. de la première partie. Rappelons-nous que le Sommet de l'hyperbole, doit se trouver dans la corde BR (qui divise en deux parties égales l'Angle ABC des Asymptotes) & être l'extrémité du premier demi-Axe de cette Courbe (Art. 3. n°. 57.). Or ce premier demi-Axe, qui

doit se trouver sur la corde BR , doit aussi être nécessairement plus court que cette corde.

1°. Pour s'en convaincre, soit ce demi-Axe $= A$; $AB = CD = b$; $BC = AD = 2b$. On sçait (Art. 2. du n°. 57) que $CD \times BC = 2bb$ est la puissance de l'hyperbole, & ainsi $4bb$ est le double de cette puissance; donc le dernier demi-Axe $A = \sqrt{4bb} = 2b$ (art. 3. du n°. 57.); & par conséquent $A^2 = 4bb$.

Cherchons présentement la valeur de BR . L'Angle ABO étant demi-droit (const.), l'Angle AOB le sera aussi; donc $AO = AB = b$; ainsi $OD = AD - AO = 2b - b = b$; & $OD = bb$. Remarquons maintenant que l'Angle BRD étant droit, & l'Angle $ROD = AOB$ demi-droit, l'Angle RDO est aussi demi-droit; donc $RD = OR$. Ainsi

$$\overline{OD} = 2RD, \text{ \& } RD = \frac{\overline{OD}}{2} = \frac{bb}{2}. \text{ Mais } BR = \overline{BD} - RD, \text{ \& } \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 4bb + bb = 5bb. \text{ Donc } BR = 5bb - \frac{bb}{2} = \frac{9bb}{2}.$$

Or nous avons vu (art. 1.) que $A^2 = 4bb$; donc, pour démontrer que A^2 est plus petit que BR , il s'agit de faire voir que $4bb < \frac{9bb}{2}$, ou que $8bb$, double de $4bb$, est plus petit que $9bb$, double de $\frac{9bb}{2}$; mais cela est visible; donc

$A^2 < BR$, ou $A < \sqrt{BR}$. Le premier demi-Axe de cette hyperbole est donc plus petit que la corde BR , sur laquelle il doit être pris. Ainsi le Sommet de cette hyperbole, qui est l'extrémité de ce demi-Axe, est placé au-dedans du Cercle. Or, puisque l'hyperbole qui passe par D , entre dans le Cercle, elle en ressortira par quelque Point S ; & par conséquent elle coupera le Cercle en deux Points. C. Q. F. T. & D.

DÉM. de la seconde partie. Il reste donc à démontrer que $AB : BT :: BT : TS :: TS : BC$.

Pour cela, joignons les deux Points D , S , par la corde DS , que nous prolongerons de part & d'autre, jusqu'à la rencontre des Asymptotes aux Points H , L ; & après avoir tiré la Perpendiculaire SK , ainsi que la corde BS , remarquons que, par la propriété de l'hyperbole, établie n°. 58, $DL = SH$; donc les Triangles DCL , HKS , étant semblables, on aura $HK = DC = AB$, & $CL = KS = BT$; donc $TL = BC$. Ceci supposé, il est clair que l'Angle BSL est droit, ainsi que BSH . Donc le Triangle Rectangle HSB donne $HK : KS :: KB$ ou TS ; c'est-à-dire, $AB : BT :: BT : TS$; & du Triangle Rectangle BSL , on tire $BT : TS :: TS : TL$ ou BC ; par conséquent l'on a enfin $AB : BT :: BT : TS :: TS : BC$. C. Q. F. T. & D.

COR. Puis donc que les deux Lignes BT , TS , sont moyennes proportionnelles entre AB & BC , l'on aura $AB : BT :: AB : BC$ (157. *Inst. T. 2.*); or BC est double de AB (supp.); donc la Cube de BT est double du Cube de AB . Et c'est tout C. Q. F. T. & D.

Dissertation sur les Miroirs d'ARCHIMÈDE & de PROCLUS.

122. J'ai différé jusqu'ici à parler de ces Miroirs, si fameux chez les Anciens & si contestés parmi les Modernes. Les Lecteurs de cet Ouvrage en sont sans doute les juges naturels; mais, pour avoir ce droit sur l'opinion que je vais établir, il ne faut pas moins qu'une connoissance générale de tout ce qui précède. Du tems d'Archimède & de Proclus les Sections Coniques étoient connues. Il a été démontré qu'elles avoient des Foyers soit par réflexion, soit par réfraction. Ces deux célèbres Mathématiciens n'en auroient pas fait usage. Nous avons deux moyens d'en juger, l'Histoire & la Géométrie. Par l'Histoire, nous apprendrons la Tradition, & la Géométrie nous la fera apprécier.

Tzetzes dit formellement [a] qu'Archimède avec un miroir hexagone, & plusieurs autres petits miroirs quadrangulaires, mit le feu à quelques Vaisseaux de la Flotte de Marcellus, Général des Romains qui alliégoient Syracuse en Sicile; quoique ces Vaisseaux fussent éloignés des murs de cette Ville à la Portée de l'Arc; c'est-à-dire, à une distance d'environ 200 pas. Diodore dit que cette Distance étoit de trois stades; & Cluverius assure qu'elle étoit de 3000 Pas. Mais le P. Kircher, passant à Syracuse en 1636, examina cette question avec un très-grand soin, & il trouva que les Auteurs faisoient cet espace beaucoup plus grand qu'il ne l'étoit effectivement.

Indépendamment de cet examen, la chose parle assez de soi-même. Il est constant, par l'histoire, que les Vaisseaux de Marcellus s'approchoient de fort près des murs de la ville, que l'on appelloit anciennement *Acradine* [b]; & que les flots de la Mer en battoient le pied; puisqu'Archimède pouvoit, par le moyen d'une espèce de grue armée de chaînes, enlever en l'Air les Vaisseaux des Romains, & les précipiter tout à coup dans les eaux. Par conséquent la distance des Vaisseaux de Marcellus, à l'endroit où Archimède faisoit jouer ses machines, ne pouvoit pas être fort considérable. Aussi le P. Kircher, après l'avoir bien mesurée, ne la trouva que d'environ 30 pas, ou de 150 pieds en supposant le Pas Géométrique de 5 pieds [c].

Cependant, malgré l'observation du P. Kircher, il reste toujours des doutes sur l'espèce de miroirs caustiques, dont Archimède a pu faire usage dans cette occasion [d]. Auroit-il porté l'incendie dans les Vaisseaux de Marcellus,

[a] Hist. 15. Chiliad. 2. Mais Plutarque, qui décrit avec une sorte de complaisance, les admirables inventions d'Archimède contre les Romains, ne dit pas un mot de ces Miroirs dans la Vie de Marcellus.

[b] C'étoit une des quatre Villes qui composoient Syracuse.

[c] Kircher p. 875. & 876. *Arctis magna lucis & umbra*, in-fol. imprimée à Rome en 1646.

[d] Nous voulons bien supposer ici ce fait; quoique l'on puisse très-raisonnablement le contester.

l'Angle de réflexion $ASG = QSP$, il restera $r = x$; mais $r = u$ son alterne (const.), & $u = 60^\circ$. (const.); donc $x = 60^\circ$. par conséquent l'Angle $CAS =$ aussi 60° . & le Triangle CSA est équilatéral; ainsi le rayon QS se réfléchit dans une Ligne SA , qui va rencontrer l'Axe au Sommet A .

Soit maintenant un autre rayon de lumière LD , parallèle à l'Axe AM ; mais qui en soit plus près que le rayon QS ; il est certain, en tirant DC & la Ligne de réflexion Df , que l'Angle b d'incidence $=$ Angle de réflexion; or $b = fCD$ son alterne (const.); donc l'Angle $fCD = \gamma$; ainsi $Cf = Df$; par conséquent, dans le Triangle CfD , les Angles fCD , γ , n'ayant pas 60° . (const.), l'Angle CfD aura plus de 60° . donc $CD > Cf$ ou Df , mais $CD = CA$; donc $CA > Cf$; c'est-à-dire, que la Ligne de réflexion Df rencontre l'Axe en un Point f au-dessous du Sommet A .

124. COROL. D'où l'on voit déjà que le miroir sphérique concave ne réfléchit pas, en un seul & même Point, les rayons de lumière parallèles à son Axe, & qu'à proprement parler, cette espèce de miroir n'a point de Foyer. Cela n'empêche pas néanmoins qu'il n'ait la vertu de brûler; parce que les rayons réfléchis, tels que Df , occupent ensemble un si petit espace sur l'Axe AM , qu'ils y sont extraordinairement condensés; & qu'ainsi ils y agissent avec assez de force, pour brûler des matières combustibles: mais il faut faire voir que la théorie s'accorde parfaitement avec les effets.

125. Pourvu que le Segment BAS ait moins que 120° . les rayons réfléchis Df rencontreront toujours l'Axe au-dessous du Sommet A ; de manière cependant qu'aucun d'eux ne descendra jusqu'à la moitié O du rayon de ce miroir: car l'on aura toujours $Cf + fD > CD$ ou CA ou $Cf + fA$; donc $fD > fA$. Or on a vu (123) que $fD = Cf$; ainsi $Cf > fA$; le Point f ne descend donc pas jusqu'au milieu O du rayon CA .

126. Cependant plus les rayons de lumière parallèles à l'Axe, seront près de cet Axe, plus les Points de rencontre des réfléchis & de l'Axe seront proches du Point O . Car, si

en y faisant tomber le Foyer d'un miroir parabolique: il auroit fallu pour cela que le Paramètre de la Parabole génératrice eût en quatre fois 150 pieds, ou 600 pieds; puisque la distance du Foyer d'une Parabole au Sommet de cette Courbe, est toujours égale au quart de son Paramètre; ainsi qu'il a été démontré (n°. 78 & 81 de la Parabole). Mais la construction d'une Courbe aussi énorme, est elle réductible en pratique: il ne paroît pas que les Défenseurs de cette opinion y aient beaucoup compté.

C'est pourquoi ils ont imaginé d'autres combinaisons, toujours fondées sur les propriétés de la Parabole, & moyennant lesquelles on pourroit, selon eux, porter l'incendie à une distance incomparablement plus grande, que tout ce que l'on rapporte d'Archimède. Reprenons la fig. 38 du n°. 160 de la Parabole, où l'on a fait voir que l'on pouvoit convertir un Foyer en Ligne brûlante indéfinie, c'est-à-dire, faire régner le Foyer d'une Parabole, tout le long d'une Ligne droite indéfinie. L'étendue d'une pareille Ligne étant illimitée, il semble qu'il n'y a point de distance, où l'on ne puisse, avec des miroirs Paraboliques, mettre en feu des matières combustibles. Mais, comme nous avons répondu à cette objection au n°. cité, on y verra que cette ressource est tout-à-fait impuissante.

Il ne paroît donc pas qu'Archimède ait pu brûler les Vaisseaux de Marcellus avec des miroirs Paraboliques; & l'on concevra aisément que des miroirs Elliptiques & hyperboliques, sont encore moins propres à la production de cet effet.

123. Examinons présentement, si cela a été possible avec des miroirs sphériques concaves. Supposons que l'Arc ou le Segment SAB de 120° . (fig. 94.) ait engendré par sa circonvolution au tour de l'Axe AM , un miroir sphérique concave; & qu'un rayon de lumière QS vienne frapper, parallèlement à l'Axe, l'extrémité S de ce Segment; si l'on tire le rayon CS & la corde SA , on verra clairement, après avoir mené au Point S la Tangente PG , que l'Angle $r = x$; parce que l'Angle CSP étant droit, ainsi que CSG , si l'on ôte du premier l'Angle d'incidence QSP , & du second

l'on trace le rayon de lumière HK parallèlement à l'Axe MA , son réfléchi Ki , & le rayon CK du miroir, on verra, comme ci-dessus, que l'Angle de réflexion CKi étant égal à l'Angle d'incidence $CKH = iCK$ son alterne, on verra, dis-je, que $iC = iK$. On a donc ici deux Triangles isocèles CfD , CiK , dont les bases CD , CK , sont égales; par conséquent le Triangle CfD , dont les Angles sur la base CD sont plus grands que les Angles sur la base CK du Triangle CiK (const.), aura ses côtés Cf , fD , plus grands que les côtés Ci , iK , du Triangle CiK ; & par conséquent $Cf > Ci$. Ainsi le rayon réfléchi Ki rencontre l'Axe en un Point i , plus près de O que le réfléchi Df .

127. Prenons maintenant un Segment de 18° . (fig. 95.), par exemple DAS , dont le centre soit C ; & voyons quelle partie de l'Axe peuvent occuper tous les Points, formés par la rencontre des rayons réfléchis avec cet Axe. Soit donc un rayon de lumière LD parallèle à l'Axe AC , qui divise le Segment DAS en deux parties égales au Point A ; que Df soit le réfléchi; & le Point O le milieu du rayon CA .

Nous venons de faire voir (126), que tous les rayons de lumière, parallèles à l'Axe AC , qui viendroient rencontrer le Segment DAS en des Points situés entre les extrémités D , S , de ce Segment, seroient tels que leurs réfléchis croicroient l'Axe, en des Points plus proches du milieu O que le Point f ; sans cependant pouvoir jamais atteindre à ce milieu (125). Par conséquent tous les rayons réfléchis sur l'Axe, seront compris dans un espace, lequel commençant en f & s'étendant vers C sera plus petit que fO . Il s'agit donc de déterminer quelle partie fO est du rayon CA .

Abbaïsons pour cela la Perpendiculaire fx du Point f sur le rayon CD ; & comme $Cf = fD$ (123), il est clair que fx tombe sur le milieu de CD ; ainsi $Cx = xD$. Maintenant, si dans le Triangle - Rectangle Cfx nous prenons fC pour le Sinus total, en décrivant du Point f par C l'Arc CG , mesure de l'Angle Cfx ou CfG , il est évident que la

Perpendiculaire Cx est le Sinus de l'Angle Cfx . Or l'Angle Cxf étant droit & l'Angle fCx de 9° . (const.) , l'Angle Cfx est de 81° . Donc, en supposant que le Sinus total fC soit divisé en 1000000 de parties, on verra par les Tableaux des Sinus, que le Sinus Cx de l'Angle Cfx de 81° . contient 987688; de ces parties; & que par conséquent CD ou CA , double de Cx , en vaudra 1975376; or $CO = Cx$; donc $fC - CO$, c'est-à-dire, $fO = fC - Cx = 1000000 - 987688 = 123117$. Ce qui signifie que fO contient 123117 des parties, dont le rayon CA en vaut 19753766.

Ainsi, pour connoître le rapport de fO à CA , il n'y a qu'à diviser 19753766 par 123117; & l'on trouvera un peu plus de 160; c'est-à-dire-que l'espace fO est un peu plus petit que la cent soixantième partie du rayon CA . Par conséquent, si l'on suppose que ce rayon ait 3 pieds, ou 36 pouces, ou 12 fois 36 pouces = 432 Lignes, fO sera un peu plus petit que la cent soixantième partie de 432 Lignes, laquelle vaut 2 Lignes & $\frac{7}{10}$ de Ligne.

Donc tous les rayons parallèles à l'Axe d'un Segment de 18° . étant réfléchis sur cet Axe, y occuperont un espace qui n'aura pas 2 lignes & $\frac{7}{10}$ de large; tous ces rayons y seront donc extrêmement condensés, & pourront par conséquent y enflammer des corps combustibles, ainsi que l'expérience le démontre.

128. Cependant il ne me paroît pas possible, qu'*Archimède* ait mis le feu aux Vaisseaux de *Marcellus*, avec des miroirs sphéro-concaves. Il auroit fallu que ses miroirs eussent eu, pour le moins, un rayon de 300 pieds. Car leurs distances aux Vaisseaux des Romains étant supposées de 150 pieds (122); afin que les Foyers de ces miroirs eussent pu s'étendre à une telle distance, leur rayon générateur auroit dû avoir au moins le double de 150 pieds ou 300 pieds; puisque leur Foyer ne s'éloigne pas de leur Sommet, à une distance tout-à-fait égale à la moitié de leur rayon générateur (125). Or, pour peu qu'on se soit appliqué à la construction effective des miroirs, on verra aisément.

« *uttrà urentem* : c'est-à-dire, » construire une machine de » miroirs plans, moyennant laquelle on puisse brûler à la » distance de plus de 100 pieds.

Après avoir fait remarquer qu'à force de faire tomber au même endroit, un grand nombre de rayons réfléchis par des miroirs plans, l'on parviendra enfin à y porter la chaleur à un très-haut degré, il continue en ces termes : *Ego certe hujus rei in quinque speculis experimentum sumpsi & prima quidem lux à luce directâ diversum calorem habebat & duplicata lux notabile caloris augmentum jam suscipiebat; triplata calorem ignis præferbat; quadruplicata calorem utcumque adhuc tolerabilem præstabat; quintuplicata penè intolerabilem. Unde certò & indubitate conclusi, multiplicatis speculis planis, & ad ratione collocatis, ut omnia reflexam solis lucem in unum spatium cogant, futurum ut non tantum majorem usionis effectum, quam qualibet usloria Parabolica, hyperbolica, Elliptica præsent, sed & in multo majus spatium radiosam lucem reflectant; quemadmodum me in quinque speculis ad spatium centum & amplius pedum experientia docuit.* Ce qui signifie, » je proteste que j'en ai fait l'expérience avec cinq miroirs; & » j'ai observé que la lumière réfléchie du premier miroir, » jointe à la lumière directe du Soleil, avoit une chaleur » différente de celle de la simple lumière directe; la chaleur s'accrût considérablement, quand j'y joignis la » lumière réfléchie du second miroir; en y mettant celle » du troisième, la chaleur approchoit de celle que l'on ressent, en se chauffant à un feu modéré; on pouvoit encore » la supporter, lorsqu'elle fut quadruplée; mais à la réunion » de la lumière réfléchie du cinquième miroir, il n'étoit » presque plus possible d'y tenir.

» Je conclus donc, sans aucun doute, qu'en multipliant » des miroirs plans, disposés de manière qu'ils renvoyassent » dans un seul & même espace, la lumière du Soleil qui » tomberoit sur eux, je conclus, dis-je, qu'ils produiroient non-seulement un plus grand effet, que des miroirs » quelconques Paraboliques, Hyperboliques & Elliptiques; » mais encore que les lumières réunies, réfléchies de desur

aisément que celle d'un miroir de 300 pieds de rayon est fort au-dessus de l'art des hommes.

129. Je ne voudrois pas nier pourtant qu'*Archimède* ait pu mettre le feu à la Flotte de *Marcellus* avec des miroirs caustiques, s'il est vrai que *Proclus* ait exécuté un artifice tout-à-fait semblable, sept ou huit cents ans après la mort de cet admirable Mathématicien. Or c'est ce que rapporte en termes très-clairs & très-précis l'Historien *Zonaras* [a] : il dit qu'*Anastase* alliéé dans Constantinople par *Vitalien*, fut redevable de la retraite de ce dernier, principalement au génie de *Proclus*, homme très-célèbre par ses connoissances en Philosophie & en Mécanique. Ce Mathématicien sçut tellement construire & disposer des miroirs d'airain, qu'il porta le feu dans la Flotte de *Vitalien*, dont les Vaisseaux & les Matelots furent brûlés comme par la foudre.

130. REMARQ. Je ne crois pas devoir m'entendre sur les miroirs sphéro-convexes; parce qu'ils dispersent les rayons, au lieu de les réunir. Ainsi, après tout ce que l'on a vu sur l'efficacité des miroirs concaves, il reste à examiner si *Archimède* & *Proclus* ont pu se servir de miroirs plans, pour produire des effets aussi merveilleux, que ceux dont l'histoire fait mention. Le P. *Kircher*, Jésuite, homme de génie, & d'une très-vaste érudition dans les Sciences secrètes, a interrogé l'expérience pour la solution de ce Problème. Ce qu'il dit là-dessus est très-formel, & de peur que l'on ne m'accuse d'exagération, je vais citer ses propres paroles, & en mettre la figure sous les yeux. Je les tire du dixième Livre de son grand Ouvrage, qui a pour titre, *Ars magna lucis & umbra*, imprimé à Rome en 1646 aux dépens d'*Herman-Scheus*, p. 887 & 888. Voici donc comment il propose sa question.

PROBLEMA IV.

131. *Machinam ex speculis planis construere ad centum pedes*

[a], *Historiarum suarum tom. 3.*

T

« ces miroirs plans, occuperoient un plus grand espace; » ainsi que je m'en suis convaincu par le moyen de cinq miroirs, avec lesquels j'ai excité une chaleur considérable » à la distance de plus 100 pieds....

« Si quis igitur mille, V. gr. specula disponeret, ut omnia in unum punctum reflecterent.... non est dubium, quin tanta superficierum lucidarum consipatio idem præstaret, & multo efficacius, quam parabolica consipatio prope focum; ut vel hinc machinamentum PROCLI, quo naves bysantinas combussisse Zonaras refert, hujus modi speculorum dispositione effectum omnino credam... » Si quelqu'un arrangeoit donc un millier de » miroirs, par exemple, enforte qu'ils réfléchissent tous » ensemble les rayons du Soleil en un seul & même Point.... » il n'est pas douteux qu'une aussi grande condensation de surfaces lumineuses ne fit le même effet, & même » avec beaucoup plus d'efficacité, que la réunion des » rayons au Foyer ou près du Foyer d'une Parabole. C'est » pourquoi je ne balance point à croire ce que *Zonaras* » rapporte de *Proclus*, quand il dit que ce Mathématicien » disposa des miroirs d'Airain avec tant d'artifice, qu'il sçut » porter l'incendie dans la flotte de *Vitalien*. Il n'étoit besoin pour cela que d'une disposition semblable à celle que j'ai décrite.

Sint enim specula plana A, B, C, D, E; Sol G; murus F (fig. 96.); qua ita disponantur ut solis radii ex singulis speculis reflecti coeant in Puncto F: certum est, & experientia constat, uti lucem, ita & calorem in F coactum, quintuplo majorem esse & intensiorem, quam lucem & calorem unico speculo illuc reflectum; ita ut in F manus vix, ob intensum calorem, firmari possit: si itaque quinque specula tantum possunt, quid non centum aut mille specula hoc ingenio disposita? Certum est calorem tam intensum fore, ut omnia adurere possit & in cineres redigere; cum Focus hic major sit, & luce consipator, quam in ullis aliis Parabolicis speculis. Rogo hic obnixè catoptricos Mathematicos, ut hujus rei experimentum summâ diligentia suscipiant; & inveniunt id, quod supra quoque insinuavi, nullum aliud machinamentum catoptricum esse, quod & majorem in urendo vim, &

T ij

in majorem distantiam obtineat : « car soient les miroirs Plans A, B, C, D, E; le Soleil G; la muraille F, disposés de manière que les rayons du Soleil, réfléchis par chaque miroir, se réunissent en F; il est certain, & l'expérience le démontre, que la lumière, ainsi que la chaleur rassemblée en F, est cinq fois plus grande ou plus forte, que celle qui seroit réfléchie en ce même endroit par un seul miroir. Elle y est portée à un tel degré, que l'on a de la peine à y tenir la main.

« Puis donc que cinq miroirs ont tant de vertu, que ne seroit-on pas avec cent ou mille de ces machines, disposées dans un ordre convenable ? Il est certain qu'elles produiroient une chaleur si véhémente, qu'elles pourroient enflammer tous les corps combustibles & les réduire en cendres; vû que le Foyer de ces miroirs est plus grand, & sa lumière plus condensée, que dans quelques miroirs paraboliques que ce soit.

« Je prie donc instamment les Mathématiciens, qui s'appliquent à la Catoptrique, d'en faire l'expérience avec le plus d'exactitude & de diligence qu'il leur sera possible; & ils trouveront, ce que j'ai déjà insinué ci-dessus, qu'aucune autre Machine catoptrique n'est capable de brûler les corps avec plus de force, ni de porter le feu à une plus grande distance. »

Il y a quelques années que M. de Buffon, Intendant du Jardin du Roi, & Membre de l'Académie des Sciences, lut publiquement un Mémoire, où cette doctrine me parut discutée très-sçavamment. Je crus y remarquer une suite de vûes si neuves, que je ne balançai point alors à lui attribuer toute la gloire due à une première invention. Mais, comme il n'a point encore rendu publique sa Doctrine des miroirs caustiques, & que je n'oserois m'en rapporter ici à ma mémoire, je supprimerai l'analyse que je m'étois proposé d'en donner. On y auroit vû l'accomplissement de la prédiction du P. Kircher; c'est-à-dire que non-seulement les miroirs d'Archimède & de Proclus sont possibles, mais que l'on peut voir aujourd'hui des effets, pour le moins aussi puissans que tout ce que l'on

raconte de ces fameux Mathématiciens. La machine de M. de Buffon, composée de miroirs plans, pouvant porter l'incendie à plus de 200 pieds, comme l'ont démontré les expériences publiques, que ce célèbre Académicien en a faites plusieurs fois au Jardin du Roi.

De la Cissoïde.

AVERTISSEMENT. Les quatre Courbes suivantes n'ayant été inventées par les Anciens que pour résoudre les fameux Problèmes de la Duplication du Cube, de la Trisection de l'Angle, & de la Quadrature du Cercle, nous ne les considérerons ici que par rapport à ces objets; leur utilité dans les Arts n'ayant rien d'important.

1. Soit AOBA un Cercle quelconque (fig. 97.); AB un de ses Diamètres; BK une de ses Tangentes indéfinie; AO, AO, &c. autant de cordes, que l'on en pourra mener sans confusion, dans le demi-Cercle AOB, prolongées jusqu'à la rencontre de BK. Si l'on prend sur l'une des cordes prolongées quelconques ATK, la corde AO; qu'on la porte sur la même ATK, de K en H, & que l'on fasse la même opération sur toutes les autres Lignes, telles que ALK, il en naîtra une suite de Points AHHCHH, lesquels composeront une Courbe appelée *Cissoïde* [a].

* 2. COROL. Il s'ensuit de cette génération 1°. que l'extrémité C du quart de Cercle AC est à la *Cissoïde*. Car, en tirant le Diamètre CD, il sera évidemment parallèle à BK, & l'on aura AR. RB :: AC. KC. Or RB = AR, donc KC = AC. Par conséquent le Point C est à la *Cissoïde* (1).

2°. BK est *Asymptote* de la Courbe ACH. Prenons, pour le voir, deux Lignes quelconques ALK, ACK, immédiatement voisines; nous aurons (const.) AO = KH, & AC

[a] Cette Courbe, qui a plus de 1400 ans d'ancienneté, est de l'invention de Dioclès, cité par Eutocius, plus ancien que Pappus; aussi l'appelle-t-on communément la *Cissoïde* de Dioclès. Voy. *Vossius de Script. Mathematic.*

T iij

= KC (art. 1.); mais AO > AC; donc KH > KC. Or, si KC & KH étoient également inclinées, KC étant < KH, le Point C de la *Cissoïde* seroit plus près de BK, que son Point H dans la Ligne KLH; donc, à plus forte raison, puisque KCA est plus inclinée que KLA, la *Cissoïde* s'approchera plus près de FK au Point C, qu'au Point H sur la Ligne KLA. Et, en prenant ASK qui suit immédiatement ACK, on prouvera de même que le Point H de la Courbe sur ASK, est plus proche de BK que le Point C; car AO étant = KH (const.), & AC = KC, comme AO est alors < AC; KH sera < KC; donc, par la même raison que ci-dessus, H plus près de FK que le Point C, &c. ainsi, à mesure que la *Cissoïde* s'éloigne de son origine A, elle s'approche continuellement de la Tangente BK. Ces deux Lignes néanmoins ne pourront jamais se rencontrer; vû que les AK devant toujours être inclinées au Diamètre AB (const.), aucun des Points O ne se confondra jamais avec A. Les cordes AO auront donc toujours quelque longueur, & par conséquent les KH aussi; donc H ne coïncidera jamais avec K; ainsi BK est *Asymptote* de la *Cissoïde*.

3°. Les KO sont toujours égaux aux AH correspondans; car, par exemple, KLH étant = ALO (const.), si l'on ôte OH de part & d'autre, il restera KO = AH.

4°. Les HO sont toujours coupées en deux parties égales par CD; c'est-à-dire, par exemple, que HL = OL. Rappelons-nous pour cela que AR étant = RB, AL = RL ou AH + HL = KO + OL; mais AH = KO (art. 3.); donc HL = OL.

* 3. PROP. I. D'un Point quelconque H de la *Cissoïde* menons HM parallèle à BK; & du Point O correspondant tirons, par le centre R du Cercle générateur, le rayon OR, prolongé jusqu'à la rencontre de HM; je dis que le Point M de rencontre sera précisément sur la circonférence du Cercle générateur.

DÉM. HM étant parallèle à CD (const.), OL. HL :: OR. RM; mais OL = HL (art. 4. du n°. 1.); donc OR = RM; ainsi RM est un rayon; le Point M de rencontre est

donc sur la circonférence du Cercle. C. Q. F. D.

* 4. PROP. II. Les quatre Lignes BF, FM, FA, FH, sont en proportion continue; c'est-à-dire que BF. FM :: FM. FA :: FA. FH. Ce qui arrivera toujours, de quelque Point H de la *Cissoïde* que l'on tire la parallèle HM.

DÉM. Après avoir mené BM & AM, remarquons que l'Angle ORB = ARM; donc l'Arc OB = l'Arc AM. Ainsi l'Angle OAB ou HAF = l'Angle ABM, & les Triangles AFH, BFM, sont semblables entr'eux, ainsi qu'au Triangle AFM. Donc BF. FM :: FM. FA :: FA. FH. C. Q. F. D.

* 5. USAGE de la *Cissoïde* pour la Duplication du Cube. Nous avons dit bien des fois que ce Problème seroit résolu, si l'on pouvoit trouver deux moyennes proportionnelles entre deux Lignes données, telles que CR & RT. Or c'est à quoi peut servir la *Cissoïde*. (fig. 97.)

RÉSOL. Avec la plus grande des deux Lignes données CR décrivez un Cercle, dont le Diamètre CD soit coupé perpendiculairement par le Diamètre AB. par le moyen de ce Cercle construisez une *Cissoïde* (1), dont l'origine soit en A. Portez ensuite la plus petite des deux Lignes RT, du centre R en T sur CR. du Point B par T menez BT, jusqu'à ce qu'elle coupe la *Cissoïde* en quelque Point H. Du Point A par H tirez la corde AO; laquelle coupant CR en quelque Point L, donnera RL pour la première des deux moyennes proportionnelles cherchées. Et par conséquent le Problème sera résolu, la première donnant la seconde.

DÉM. Menez HM parallèlement à CD; & vous aurez

BF. FM :: FM. FA :: FA. FH (4). Donc 1°. BF. FM :: BF. FH (2; 7. *Inst. T. 2.*). 2°. BF. FM :: FA. FH. Or (const.) FA. FH :: AR ou CR. RL; ainsi BF. FM :: CR. RL; donc BF. FM :: CR. RL. Par conséquent (art. 1.) CR. RL ::

BF. FH. Mais (const.) BF. FH :: BR ou CR. RT; donc CR. RL :: CR. RT. (A). Ce qui démontre que RL est la première des deux moyennes proportionnelles cherchées. Car appellant la seconde y, & faisant CR. RL :: RL. y :: y.

T iv

RT, (d'où l'on déterminera) on aura $\overline{CR} : \overline{RL} :: \overline{CR} : \overline{RT}$. La proportion A peut donc être déduite d'une proportion continue à quatre termes, dont RL est la première moyenne proportionnelle entre les deux Lignes données CR, RT. C. Q. F. D.

De la Conchoïde.

1. D'UN Point P quelconque (fig. 98.) abaissons, sur l'indéfinie KM, la Perpendiculaire PT. Faisons son prolongement T' d'une longueur arbitraire. Tirons ensuite du même Point P, un nombre indéfini d'obliques PA, PB, &c. PF, PG, &c. de l'un & de l'autre côté de la Perpendiculaire; ensuite que les parties de ces obliques, telles que PC, PB, PA, qui sont au-delà de KM, soient toutes égales à TS; si l'on joint les extrémités D, C, B, A, S, &c. de ces prolongemens, par une Ligne continue, on aura une Courbe que les Anciens ont nommée *Conchoïde* [a]. Le Point fixe P en est le Pôle; S le Sommet; les Lignes TS, PA, PB, &c. les rayons générateurs.

2. Et il est aisé de concevoir que KM en est l'Asymptote. Car PA étant = TS (const.), & TS moins inclinée que PA sur KM, la Point A est nécessairement plus près de KM que le Point S. Par la même raison B en est plus près que A, & ainsi de suite. Donc, à mesure que la *Conchoïde* DSL s'éloigne de part & d'autre de son Sommet S, elle s'approche de KM. Mais elle ne la rencontrera jamais; puisque (const.) ses rayons générateurs sont toujours des prolongemens des obliques au-delà de KM.

[a] En Latin *Conchylis*, ainsi appelée de sa ressemblance avec une certaine coquille de poisson. L'on nomme aussi communément cette Courbe la *Conchoïde de Nicomède*, son inventeur. *Proclus*, Lycien, qui vivoit vers l'an 500 de J. C. fait mention de ce Géomètre. Cette Courbe est donc d'une ancienneté assez reculée. *Vossius de Script. Mathem.*

Perpendiculaire en P. Menez BP, GP, & BK parallèlement à GP. Du Point P abaissez, sur le prolongement de BK, la Perpendiculaire PT; dont vous ferez le prolongement TS = DF ou AF ou BP; ensuite du Pôle P, avec le rayon générateur TS, décrivez une portion SRL de *Conchoïde* (1), dont S soit le Sommet & TK l'Asymptote; cette Courbe coupera nécessairement le prolongement de AB en quelque Point R (3). Alors: si vous tirez RC jusqu'à ce qu'elle coupe AD, prolongée en E, les deux Lignes RB, DE, seront les deux moyennes proportionnelles cherchées; c'est-à-dire que l'on aura BC. RB :: RB. DE :: DE. AB.

DÉM. 1°. $\overline{RH} = \overline{AR} \times \overline{RB} + \overline{HB}$ (4); donc $\overline{RH} + \overline{HP} = \overline{AR} \times \overline{RB} + \overline{HB} + \overline{HP}$ (G). Or, en menant PR, les Triangles - Rectangles PHR, PHB, donnent $\overline{RH} + \overline{HP} = \overline{PR}$, & $\overline{HB} + \overline{HP} = \overline{PB}$; donc l'équation G peut devenir $\overline{PR} = \overline{AR} \times \overline{RB} + \overline{PB}$.

2°. Mais des Triangles semblables EDC, CBR, on tire ED. CB ou DA :: DC ou AB. BR; donc ED. $\frac{DA}{AB}$ ou DF :: 2 AB. BR (M). Or DF étant = AF (const.) & les Triangles DFC, AFG semblables, il est clair que AG = DC = AB, & qu'ainsi 2 AB = BG; donc la proportion M devient ED. DF :: BG. BR :: PM. MR (parce que BM est parallèle à GP); ainsi ED. DF :: PM. MR. Donc ED + DF. DF :: PM + MR. MR, ou EF. DF :: PR. MR. Or, par la nature de la *Conchoïde*, MR = TS (1), & TS = DF (const.); donc MR = DF, & par conséquent PR = EF, ou PR = EF; mais on a yû (art. 1.) que $\overline{PR} = \overline{AR} \times \overline{RB} + \overline{PB}$. Donc $\overline{AR} \times \overline{RB} + \overline{PB} = \overline{EF} = \overline{AE} \times \overline{DE} + \overline{DF}$ ou $\overline{PB}$ (art. 2.

du n°. 4.); ainsi, ôtant $\overline{PB}$ de part & d'autre, $\overline{AR} \times \overline{RB} = \overline{AE} \times \overline{DE}$, ou RB. DE :: AE. AR :: BC. RB (à cause de AE parallèle à BC); donc BC. RB :: RB. DE; mais,

* 3. Par conséquent, quelqu'inclinée que soit sur l'A. l'Asymptote d'une *Conchoïde*, une Ligne droite dirigée à son Pôle, cette droite sera nécessairement coupée ou déterminée à être coupée par la *Conchoïde*. Car, en prolongeant cette inclinée du côté de la Courbe, elle s'éloignera toujours de son Asymptote; mais la *Conchoïde* s'en approche sans cesse; l'inclinée passera donc au-delà de la *Conchoïde*, & par conséquent ces deux Lignes se couperont.

* 4. USAGE de la *Conchoïde* pour la Duplication du Cube. Il s'agit par son moyen de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux Lignes données. Mais, avant d'en venir à la construction, il est bon d'être prévenu de la vérité suivante.

* LEMME. Si une Ligne AR (fig. 99.) est coupée en deux inégalement en B, & l'une de ses parties AB coupée par le milieu en H; je dis que le carré de RH, est égal au Rectangle de AR par RB, joint au carré de HB; c'est-à-dire que $\overline{RH} = \overline{AR} \times \overline{RB} + \overline{HB}$.

DÉM. 1°. Puisque AH = HB (const.); RH = AR - AH est = AR - HB; donc $\overline{RH} = \overline{AR} - 2\overline{HB} \times \overline{AR} + \overline{HB} = \overline{AR} - 2\overline{HB} \times \overline{AR} + \overline{HB} = \overline{RB} \times \overline{AR} + \overline{HB}$; (étant évident que $\overline{AR} - 2\overline{HB} = \overline{AR} - \overline{AB} = \overline{RB}$); donc $\overline{RH} = \overline{AR} \times \overline{RB} + \overline{HB}$.

2°. Si AE est coupée inégalement en D, & la partie AD également en F, on démontrera précisément comme ci-dessus, que $\overline{EF} = \overline{AE} \times \overline{DE} + \overline{DF}$.

* 5. PROB. Trouver, par le moyen de la *Conchoïde*, deux moyennes proportionnelles entre deux Lignes données AB, BC.

RÉSOL. Après avoir mis ces deux Lignes à Angles droits. faites-en le Rectangle BD. Par le milieu F de DA menez CF, jusqu'à ce qu'elle rencontre AB prolongée en G. Sur le milieu de AB élevez la Perpendiculaire indéfinie HP. Du Point B, avec DF ou AF, décrivez un Arc qui coupe cette

les Triangles CBR, EDC, étant semblables, BC. RB :: DE. DC. Par conséquent enfin BC. RB :: RB. DE :: DE. DC ou AB. C. Q. F. T. & D. [4].

De la Quadratrice.

1. SOIT ABH un Angle droit (fig. 100.) accompagné de son quart de Cercle AH, divisé en un très-grand nombre de parties égales AC, CL, &c. ce que l'on exécutera géométriquement par le moyen de la Bisection. Aux Points de division C, L, &c. on mènera les rayons BC, BL, &c. après quoi divisant le rayon AB dans le même nombre de parties égales que l'Arc AH, par les Points de division M, O, &c. on mènera des parallèles Mx, OR, &c. à BH; & les mutuelles intersections de ces parallèles avec les rayons correspondans, c'est-à-dire l'intersection x de la première Mx avec le premier rayon BC, celle de la seconde avec le second; de la troisième avec le troisième, &c. composeront une Courbe AxRF appelée *Quadratrice* [b]; parce qu'elle a la singulière propriété, de faire découvrir tout d'un coup la rectification très-approchée de la circonférence du Cercle, & par conséquent la Quadrature; ainsi qu'on le verra bien-tôt.

2. Telle est donc la propriété de cette Courbe que, si par un de ses Points quelconque R, on tire un rayon BL de l'Arc générateur AH, & du même Point la Perpendiculaire RO sur l'axe AB, on aura toujours AH. LH :: AB. OB; étant évident (const.) que, si l'Arc AH contient huit

[a] On lit, au Liv. 4. fol. 56. des *Collect. Mathem. de Pappus*, que cet Auteur a fait usage de la *Conchoïde*, pour couper un Angle en trois parties égales.

[b] Et plus particulièrement *Quadratrice de Dinostrate*, son Inventeur. Cette Courbe ne peut avoir guères moins que 1500 ans d'ancienneté. *Pappus d'Alexandrie*, qui vivoit il y a environ 1400 ans, en parle dans ses Ouvrages, comme d'une Ligne fort connue de son tems, & que l'on pouvoit déjà mettre au nombre des *quadratures*. *Pappus Collect. Mathem. & Vossius Script. Mathematicum.*

des parties, dont il y en a six dans l'Arc LH, le rayon AB contient pareillement huit des parties, dont il y en a six dans OB.

De même, si l'on tire BK & la Perpendiculaire SQ, l'on aura AH. KH :: AB. QB, par la même raison que ci-dessus.

REMARQ. Cette propriété conduiroit à la rectification absolue de la circonférence du Cercle, si l'on pouvoit déterminer le Point F, qui termine la Base BF de la Quadratrice, aussi géométriquement que les autres Points. Ce que nous démontrerons, quand on sera prévenu des deux Lemmes suivans.

4. LEMME I. Si du Sommet B d'un Angle ABH (fig. 101. Pl. X.), l'on décrit plusieurs arcs concentriques AH, GM, DP, entre ses côtés; & qu'on le coupe par des rayons BL, BK. Je dis 1°. que l'Arc AH est à l'Arc HL, comme l'Arc GM est à l'Arc GR. 2°. Que l'Arc AH est à l'Arc HK comme l'Arc DP est à l'Arc DV.

DÉM. 1°. Les Arcs AH, GM, étant semblables, AH. GM :: BH. BG; & (à cause de la similitude des Arcs HL, GR) BH. BG :: HL. GR (304. *Inst. T. 2.*); donc AH. GM :: HL. GR, ou AH. HL :: GM. GR. C. Q. F. 1°. D.

2°. AH. DP :: BH. BD :: HK. DV; ainsi AH. DP :: HK. DV, ou AH. HK :: DP. DV. C. Q. F. 2°. D.

5°. LEMME II. La Tangente DS (fig. 102.) à l'Arc DV d'un Angle DBS, est plus grande que cet Arc.

DÉM. Faites l'Arc VT = DV, & tirez ST; il est clair que ST = DS. Mais DST visiblement plus grande que DVT; donc DS, moitié de DST, plus grande que l'Arc DV, moitié de DVT.

6. USAGE de la Quadratrice pour la rectification géométrique, très-approchée, de la circonférence du Cercle. Supposant que l'on ait le Point F (fig. 101.), où la Quadratrice rencontre BH, je dis que l'Arc AH est une troisième proportionnelle aux deux Lignes BF, BH. C'est-à-dire que BF. BH :: BH. AH, ou que AH. BH :: BH. BF.

DÉM. Il existe très-évidemment une troisième proportionnelle aux deux Lignes AH, BH; or cette troisième propor-

tionnelle ne peut être plus grande que BF, comme BG; ni plus petite, telle que BD; il faut donc nécessairement conclure qu'elle est BF. Pour en être convaincu, 1°. du Point B décrivez l'Arc GRM; par le Point R, où il coupe la Courbe, tirez BL; abaissez RO perpendiculairement sur AB, & RC sur BH. Cela supposé, je dis qu'il est absurde que AH soit à BH :: BH. BG. Car, alors, BH étant à BG :: AH. GM, on auroit AH. BH :: AH. GM; & par conséquent BH = l'Arc GM. Mais (4) AH. HL :: GM. GR; & par la nature de la Quadratrice, AH. HL :: AB. OB (2), ou :: BH. RC; ainsi GM. GR :: BH. RC; donc, puisque l'Arc GM égaleroit la droite BH, comme on vient de le voir, on auroit l'Arc GR égaleroit la droite RC. Ce qui est absurde; car l'Arc GR étant plus grand que la corde, & cette corde plus grande que RC, il faut que GR soit plus grand que RC. Il n'est donc pas possible, que la troisième proportionnelle aux deux quantités AH, BH, soit plus grande que BF.

2°. Et vous allez voir qu'il ne seroit pas moins absurde d'affirmer qu'elle fût plus petite. Du Point B tracez l'Arc DP; tirez sur BH la Perpendiculaire DS; par le Point S, où elle rencontre la Quadratrice, menez le rayon BK, & SQ perpendiculairement sur AB. Ensuite, raisonnant comme au n°. 1. on démontrera l'impossibilité d'avoir AH. BH :: BH. BD. Car, si cela étoit, BH étant à BD :: AH. DP, on auroit AH. BH :: AH. DP, & par conséquent la droite BH égaleroit l'Arc DP. Or, AH. HK :: DP. DV (4), & AH. HK :: AB. QB (2), ou :: BH. DS; donc DP. DV :: BH. DS. Ainsi, puisque DP égaleroit BH, on auroit l'Arc DV égal à la Tangente DS; ce qui est absurde (5). Il est donc impossible que la troisième proportionnelle aux deux Lignes AH, BH, soit plus petite que BF; & l'on a vu (art. 1.) qu'elle ne pouvoit pas être plus grande que cette même Ligne; par conséquent elle lui est égale; c'est-à-dire que AH. BH :: BH. BF, ou BF. BH :: BH. AH.

3°. Or, on sait déterminer géométriquement une troisième proportionnelle à deux droites BF, BH; donc on

trouveroit la longueur de l'Arc AH, & par conséquent celle de la circonférence, qui en est le quadruple. Ainsi par cet artifice la circonférence du Cercle seroit géométriquement rectifiée. C. Q. F. D.

7. Mais, par la const. de la Quadratrice, il est impossible d'avoir à toute rigueur le Point F (fig. 100. Pl. IX.); puisqu'il devroit être déterminé par l'intersection du rayon BH, avec la parallèle menée du Point B. Or, dans ce cas, ces deux Lignes se confondant, il n'y a plus d'intersection. Néanmoins comme on peut, par la bisection, diviser EB ainsi que l'Arc VH en de très-petites parties; ce qui fera trouver des Points de la Quadratrice, compris entre Y & F, lesquels s'approcheront continuellement de BH, l'on pourra avoir géométriquement une Ligne, qui ne différera pas sensiblement de la Base BF.

8. Maintenant, j'ai démontré de plusieurs manières dans mes Institutions, que l'Aire du Cercle étoit égale à celle d'un Triangle, dont la Base seroit égale à la circonférence de ce Cercle, & la hauteur égale à son rayon. Ainsi, puisque la Quadratrice donne la rectification de cette circonférence à très-peu près (6 & 7), on aura la Base & la hauteur d'un Triangle égal au Cercle, & par conséquent la Quadrature très-approchée.

9. REMARQUE. Cette méthode d'avoir la Quadrature du Cercle excèsivement approchée, est d'autant plus élégante, qu'elle n'exige point la description de la Courbe, qui fait résoudre ce Problème. Car, supposant par exemple, qu'au moyen de la bisection, Br fût la cent vingt-huitième partie de BE, & Hd la cent vingt-huitième partie de l'Arc HV, le rayon Bd & la parallèle rZ se couperoient en un Point Z si proche de BH, que l'on pourroit prendre, sans aucune erreur sensible, rZ pour la Base BF de la Quadratrice. Ainsi l'opération de la Rectification ou de la Quadrature du Cercle, se réduit uniquement ici à porter une très-petite partie du rayon BH de B en r sur AB; de mener rZ parallèlement à BH; de prendre aussi une très-petite partie Hd de l'Arc AH (toujours au moyen de la bisection), & de tirer

le rayon Bd [a]; car le Point d'intersection Z de rZ & de Bd, déterminera une Ligne rZ sensiblement égale à la Base BF de la Quadratrice; d'où l'on déduit (6 & 8), sans construire cette Courbe, la rectification ou la quadrature du Cercle très-approchée.

Cependant cela ne seroit pas connu en nombres, le rapport de la circonférence du Cercle à son Diamètre, quand même on en auroit la Quadrature à toute rigueur par cette méthode. Parce que la circonférence rectifiée & son Diamètre pourroient être incommensurables. C'est pourquoi le travail d'Archimède à cet égard, ou celui de Mélius son seigneur, me paroît beaucoup plus estimable, parce que, dans la pratique des Arts, il est très-commode de pouvoir connoître en nombres très-approchans le Diamètre d'un Cercle par sa circonférence, & réciproquement sa circonférence par son Diamètre.

10. Il y a des modernes [b] qui ont attribué à cette Courbe la propriété de diviser un Angle quelconque en un nombre quelconque de parties égales. Soit proposé, selon eux, de diviser l'Angle ABV (fig. 100) en sept parties égales. On prendra dans le quart de Cercle, accompagné de la Quadratrice, un Angle égal au proposé (si le proposé est trop grand, on le coupera en deux parties égales); du Point Y, où l'un de ses côtés coupe la Quadratrice, on abaissera YE perpendiculairement sur AB; divisant ensuite AE dans le nombre de parties proposé; c'est-à-dire ici en 7, on mènera par les Points de division M, O, &c. des parallèles Mx, OR, &c. lesquelles rencontrant la Quadratrice, détermineront sur cette Courbe les Points x, R, &c. par lesquels si l'on mène les rayons BC, BL, l'Angle ABV se trouvera, suivant ces Auteurs, divisé ainsi qu'on le demande. Car il est clair (const.) que AM est

[a] Bien entendu que la petite partie Hd sera à son Arc AH, comme la petite partie rB est à son rayon AB.

[b] Messieurs Ozanam & Bâillères.

toujours la même partie de AE, que l'Arc AC l'est de l'Arc AV. Or (supp.) AM est la septième partie de AE; donc l'Arc AC est aussi la septième partie de l'Arc AV. Ainsi le Problème paroît résolu.

11. Mais ces Auteurs n'ont pas fait réflexion, que les Points de la *Quadratrice* n'étant déterminés que par la *bissection*, si le côté BV de l'Angle proposé ne tombe pas sur quelqu'un de ces Points ainsi déterminés, & que de plus, après avoir abaissé YE, on soit obligé de faire sur AE d'autres divisions que celles de la construction de la Courbe, les nouvelles parallèles à BH ne rencontreront plus des Points de la *Quadratrice* trouvés géométriquement; & par conséquent les rayons, tirés du Point γ , seront sur l'Arc AV des divisions incertaines.

12. La *Quadratrice* auroit incontestablement la propriété d'être *omni-Sectrice*, si l'on pouvoit assujettir l'extrémité A du rayon BA à parcourir uniformément l'arc AH, dans le même tems précisément que la Ligne Aa seroit portée uniformément sur AB, parallèlement à BH; mais alors ce seroit supposer l'état de la question; c'est-à-dire, que l'on pût diviser l'arc AH en un nombre quelconque de parties égales, comme la Ligne AB; ce qui est précisément ce que l'on cherche. La remarque en est palpable, & il y a même environ 1400 ans que *Pappus d'Alexandrie* l'a faite [4].

[4] Lib. 4. Collect. Mathematic. fol. 57. à Commandino ex Græco in Latinum conversarum.



DE

engendrée par le Point C, qui coule uniformément le long du rayon CA, & le parcourt précisément dans le même tems, que l'extrémité A de ce rayon emploie à décrire uniformément sa circonférence; en sorte que Cr, par exemple, soit toujours la même partie du rayon décrivant CF ou CA, que l'Arc AF l'est de sa circonférence entière; car la génération du n°. 1. donne précisément Cr. CF ou CA :: AF est à la circonférence AHMA.

3. Par conséquent, si l'on pouvoit accorder géométriquement, le mouvement uniforme du Point A sur la circonférence AHMA, avec celui du Point C sur le rayon CA, la Spirale CPxA seroit propre à diviser une circonférence de Cercle en raison donnée. Supposons que l'on demandât un Arc, qui fût à la circonférence entière :: 2. 9. ayant la première Spirale décrite au-dedans de la circonférence proposée, on couperoit son rayon en neuf parties égales; & prenant deux de ses parties, on les porteroit du centre C sur quelque Point γ de la Spirale. Par ce Point γ on tireroit le rayon CrF; & l'on auroit l'Arc AF qui seroit à la circonférence AHMA :: 2. 9. Car Cr est toujours à CF ou CA, comme l'Arc AF est à la circonférence AHMA (1); mais (const.) Cr. CA :: 2. 9. Donc AF. AHMA :: 2. 9. Ainsi le Problème seroit résolu.

4. Mais, comme on ne sçait point diviser géométriquement une circonférence de Cercle en un nombre quelconque de parties égales, cette Courbe a le même défaut que l'on a fait remarquer au n°. 11. de la *Quadratrice*. Il ne faut donc attendre aucune utilité de la *Spirale d'Archimède*, dans les opérations où l'on recherche une précision absolue. Les Arts de goût peuvent en faire usage; parce qu'il ne s'y agit que d'offrir aux sens, des contours ou des circonvolutions qui les touchent agréablement.



De la Spirale.

PRENEZ une Ligne quelconque CB (fig. 103.). Divisez la en plusieurs parties égales, comme ici en deux. Du Point C par les Points de division A, B, faites passer des Cercles. Après quoi, divisez le rayon CA en tel nombre de parties égales que vous voudrez, par exemple en 9 (plus le nombre en sera grand, plus la Courbe à décrire sera parfaite); faites les mêmes divisions sur la circonférence AFMA de ce rayon; par ces nouveaux Points de division, menez les rayons CD, CF, CH, &c. enfin portez une des divisions du rayon CA sur son voisin CD, de C en o; deux sur le suivant CF, de C en r; trois sur CH, de C en p; & ainsi de suite, jusqu'à ce que vous soyez parvenu au rayon de partance CA; joignez les Points o, r, p, &c. par une Ligne continue; & vous aurez une Courbe CoPxA, que l'on appelle *première Spirale* [a].

Recommencez à porter une partie du rayon CA sur CE; de D en b. Deux sur CK, de F en e. Trois sur CL, de H en d, & ainsi de suite, en augmentant toujours de 1, jusqu'à ce que vous soyez de retour au rayon de partance CB. Par les Points b, e, d, &c. ainsi trouvés, faites passer une Ligne AbdfbB, laquelle mise à la suite de la Courbe CoPxA, composera une Ligne CoPxAbdfbB, que l'on nomme *seconde Spirale*. Le Point C est le centre de ces Spirales; CA la Ligne de *première révolution*; CB Ligne de *seconde révolution*. Il me semble que ces Spirales seroient mieux désignées, en appelant la Ligne CoPxA *Spirale à simple révolution*, la Courbe CoPxAbdfbB *Spirale à double révolution*, & ainsi de suite selon le nombre des Cercles. Ces dénominations rappelleroient mieux l'idée de la génération de ces Courbes.

1. Une Spirale, telle que CoPxA, peut donc être conçue

[a] Elle est de l'invention d'Archimède.

V

De la Cycloïde.

CONCEVONS que le Cercle AO (fig. 104.), touchant la droite AC au Point A, roule sur cette droite, jusqu'à ce que tous les Points de sa circonférence se soient exactement appliqués sur AC; de manière que le Point A ne retombe en C, qu'après avoir fait une révolution entière autour de son centre. Il est évident que ce Point décrira une Courbe, telle que AFBC, à laquelle les Modernes ont donné les noms de *Trochoïde*, *Roulette*, ou plus communément de *Cycloïde*. Elle est tout-à-fait semblable à celle que décrit en l'air un des clous de la roue d'une charrette, qui se meut dans un même Plan en roulant sur une droite.

2. COR. I. On voit, par la génération de cette Courbe, que sa Base AC est exactement égale à la circonférence du Cercle générateur AO; que ce Cercle étant arrivé au Point de milieu D, le Point décrivant A a couru la demi-circonférence; & que dans cette position de son Cercle, il est parvenu au Point culminant B, c'est-à-dire, le plus élevé au-dessus de sa Base AC; qu'en redescendant il a décrit la portion BPC parfaitement égale & semblable à la *demi-Cycloïde* AFB.

3. COR. II. Ainsi toutes les doubles Ordonnées, comme FP, menées d'un Point quelconque F de la Courbe parallèlement à sa Base, sont coupées en deux parties égales par la Ligne BD, tirée du milieu de AC au Point culminant B. C'est pourquoi ces doubles Ordonnées, tombant à Angles droits sur BD (const.), cette Ligne BD a été appelée l'*Axe* de la *Cycloïde*.

4. COR. III. Enfin il est encore visible, qu'en élevant une Perpendiculaire BO sur l'Axe, à son Point culminant B, elle sera Tangente à la *Cycloïde* & parallèle à sa Base. Parce que le Point A décrivant se trouvera toujours au-dessous de

V ij

cette parallèle ou perpendiculaire, soit avant d'être arrivé au Point culminant B, soit après l'avoir passé.

5. PROPOS. I. Supposant que le Cercle générateur AO ait roulé sur AC jusqu'en L; que le Point décrivant A ait monté en F; que par conséquent ce Cercle ait pris la position LFM; si on le conçoit encore décrit sur l'Axe BD, je dis que la partie FH d'une Ordonnée quelconque FK à la Cycloïde, comprise entre cette Courbe & la rencontre du Cercle générateur en BD, est toujours égale à l'Arc HB de ce Cercle, compris entre le Point de rencontre H & le Point culminant B.

DEM. Tous les Points de l'arc FL s'étant appliqués sur la partie AL (supp.), on a la droite $AL = \text{arc FL}$. Or l'arc $FL = \text{arc HD}$; ainsi la droite $AL = \text{arc HD}$. Mais (2) $AL + LD =$ la demi-circconférence du Cercle générateur $= HD + HB$; donc, puisque $AL = HD$, il faut que l'arc $HB =$ la droite $LD = GK = GH + HK = FG + GH$ (à cause de $HK = FG$) $= FH$; par conséquent la droite $FH = \text{arc HB}$. C. Q. F. D.

6. Réciproquement, si une Courbe est telle qu'ayant décrit un Cercle sur son Axe BD, toutes les droites tirées comme FH de l'un de ses Points quelconque, soient toujours égales à l'arc correspondant HB; cette Courbe sera nécessairement une *demi-Cycloïde*, dont BHD sera le Cercle générateur.

DÉM. Puisque FH = toujours l'arc HB (supp.), la droite AD, tirée de la même manière que FH, est égale à la demi-circonférence BHD. Donc, en faisant rouler le cercle BD sur AD, le Point B, supposé d'abord en A, aura décrit une *demi-Cycloïde*, quand le cercle sera arrivé en D (1). Ainsi, en tirant d'un Point quelconque H de la demi-circonférence du Cercle BD, une Ligne parallèle à AD jusqu'à la rencontre de la *demi-Cycloïde*, cette parallèle sera toujours égale à l'arc correspondant HB (5); or (supp.) l'arc HB = la droite FH; donc cette parallèle n'est pas différente de FH. Ainsi tous les Points de la *demi-Cycloïde* se confondent avec tous ceux de la Courbe proposée, cette Courbe est nécessairement une *demi-Cycloïde*. Ce qu'il faut bien remarquer.

bbt. Mais on a déjà vu (art. 1.) que l'Angle *thb* seroit plus grand que l'Angle *bbt*. Par conséquent, si la Ligne menée par le Point *f*, du côté de AC parallèlement à *bs*, n'entroit pas dans l'espace cycloïdal, l'Angle *thb* seroit en même-tems plus grand & plus petit que l'Angle *bbt*. Ce qui n'est pas possible. Donc, &c.

8. PROPOS. III. En supposant toujours fh parallèle à AC , & hs Tangente au Point h du Cercle, si l'on conçoit que fm soit Tangente à la *Cycloïde*, il arrivera nécessairement que hs sera coupée en quelque Point S , par le prolongement fs de la Tangente fm ; c'est-à-dire que les deux Tangentes correspondantes fs , hs , de la *Cycloïde* & du Cercle, sont nécessairement déterminées à se rencontrer.

DÉM. Tirez *fl* parallèlement à *hS*; cette parallèle entrera au-dedans de la Cycloïde (7): or *fm* étant supposée Tangente, tombera entièrement au-dehors; ainsi *fm* & *fl* ne formeront pas une seule & même Ligne. Donc, puisque *fm* coupe *fl*, étant prolongée elle coupera aussi *hS* parallèlement à *fl*. Les deux Tangentes correspondantes *fS*, *hS*, de la Cycloïde & de son Cercle générateur, sont donc nécessairement déterminées à se rencontrer.

9. PROPOS. IV. Ayant tiré fh parallèlement à AC , & l'on suppose fs Tangente à la Cycloïde en f , & hs Tangente au Point correspondant b du Cercle générateur, je dis que ces deux Tangentes se rencontreront en un Point S , tel que $fh = hs$.

DEM. 1°. Ces deux Tangentes se rencontreront en quel-
que Point (S).

2°. Pour avoir une démonstration bien simple que $fb \perp bs$, concevez que l'on ait tiré, très-proche de fb , une parallèle ux à cette Ligne. Alors, à cause de l'extrême petitesse des arcs fu , bx , de la Cycloïde & du Cercle, compris entre ces deux parallèles, on pourra les regarder, sans aucune erreur sensible, comme des portions de leurs Tangentes correspondantes; ce qui donnera les Triangles semblables fbS , uxS , d'où l'on tirera cette proportion $fb : ux :: bs : xS$. Donc $fb \perp ux$. $fb : bs :: xS : bs$ (T). Or

7. PROP. II. Ayant mené une Ordonnée quelconque fh à la Cycloïde, jusqu'à la rencontre h du cercle générateur, si après avoir tiré à ce Point h une Tangente hs au cercle, l'on mène par f & du côté de AC , une parallèle ft à cette Tangente, je dis que ft entrera nécessairement au-dedans de l'espace cycloïdal.

DÉM. La parallèle fl à la Tangente hS , entrera au-dedans de la Cycloïde, ou tombera entièrement au-dehors, comme fm : or ce dernier cas est impossible.

1°. Car, en prenant l'arc ht plus petit que l'arc Bh , & tirant du Point t une parallèle tm à fb , jusqu'à ce qu'elle coupât le prolongement de hS en b , la Cycloïde en P , & fm en m , l'on auroit $mP + Pb + bt > Pb + bt$: or (5) $Pb + bt =$ l'arc $Bh +$ l'arc ht ; ainsi $mP + Pb + bt >$ l'arc $Bh +$ l'arc ht . Mais, puisque fm seroit parallèle à hb (supp.), $mP + Pb$ égaleroit $fb =$ l'arc Bh (5); donc l'arc $Bh + bt$ seroit $>$ l'arc $Bh +$ l'arc ht , c'est-à-dire que la droite bt seroit $>$ l'arc ht ; &, à plus forte raison, plus grande que la corde ht . Ainsi dans le Triangle bht , l'Angle tbb seroit plus grand que l'Angle bht . Ce dont je vais démontrer l'absurdité.

2°. Pour vous en convaincre, prolongez *mt* jusqu'en *H* ; & vous reconnoîtrez que l'Angle *hbt* ou *hbH* est mesuré par la moitié de l'arc *hBH*, moins la moitié l'arc *bt* ; c'est-à-dire

que l'Angle $bbH = \frac{\text{l'arc BH}}{2} + \frac{\text{l'arc Bh}}{2} - \frac{\text{l'arc ht}}{2}$ (M).

Mais l'arc $BH =$ l'arc $Bg +$ l'arc $gH =$ l'arc $Bb +$ l'arc

bt. Donc $\frac{\text{l'arc BH}}{2} = \frac{\text{l'arc Bb}}{2} + \frac{\text{l'arc bt}}{2}$. Donc, en met-

tant dans l'équation M cette valeur de $\frac{\text{l'arc BH}}{2}$, on aura

L'Angle hbH = l'arc entier Bh , ou est mesuré par l'arc entier Bh : mais l'Angle thb est mesuré par la moitié de l'arc bt ; donc, puisque (supp.) l'arc ht est plus petit que l'arc Bh , l'Angle thb est nécessairement plus petit que l'Angle hbH ou

$fb \equiv Bb$, & $ax \equiv Bx$ (5); ainsi $fb \equiv ax \equiv Bb \equiv Bx \equiv bx$: de plus $bs \equiv xs \equiv bx$. Donc, (en mettant dans la proport. 1. bx au lieu de $fb \equiv ax$, & bx en la place de $bs \equiv xs$) on aura $bx : fb :: bx : bs$; donc $fb \equiv bs$.
C. Q. F. D.

10. Réciproquement, après avoir tiré d'un Point quelconque f de la Cycloïde, une parallèle fb à AC ; & du Point b , où cette parallèle rencontre le Cercle générateur, mené une Tangente bK à ce Cercle, si l'on fait $bs = fb$, je dis qu'en joignant les Points f , S , la Ligne fs sera Tangente à la Cycloïde.

DÉM. Si elle ne l'étoit pas; on pourroit donc par le Point f , en tirer une autre comme fK , laquelle seroit Tangente, & tomberoit par conséquent au-dessus ou au-dessous de fS . Or cela est impossible. Car, si fK étoit Tangente en f , on vient de voir (9) qu'alors bK égalerait fb ; mais (supp.) $fb = hS$; donc bK égalerait hS . Ce qui est absurde. Et c'est précisément la même démonstration, quand fK tombe au-dessous de fS . Donc, &c.

II. PROP. V. Supposant le Triangle fhs , comme ci-dessus, je dis que la corde hb , tirée du Point de rencontre h au Point culminant B , est parallèle à la Tangente fs .

DÉM. I^o. Prolongez *fb* jusqu'en *g*; afin de reconnoître que l'Angle *Shg* a pour mesure la moitié de l'Arc *bhg* (*n*^o. 100. *Inf. T.* 1.), ou l'Arc entier *bB*; mais l'Angle *ShB* n'a pour mesure que la moitié de ce même Arc (*ibid.*) ainsi l'Angle *Shg* = 2 *ShB*.

2°. Remarquez maintenant que l'Angle Shg étant extérieur au Triangle fhs , vaudra la somme des deux Angles f , S , de ce Triangle (n°. 65. *Inft. T. 1.*) ; or l'Angle $f = S$, parce que $fh = hs$ (9) ; donc l'Angle $Shg = 2S$. Mais on a vu (Art. 1.) que l'Angle $Shg = 2ShB$; ainsi $2S = 2ShB$, ou l'Angle $S =$ l'Angle ShB son alterne. Ce qui démontre que hB est parallèle à fS . (n°. 50. *Inft. T. 1.*)

12. Réciproquement, d'un Point quelconque f de la Cycloïde tirant fb jusqu'à la rencontre b du Cercle générateur, & perpendiculairement à son Axe BD , si l'on mène

la corde hB jusqu'au Point culminant B , & que l'on trace fS parallèlement à hB , cette Ligne fS sera Tangente au Point f de la Cycloïde.

DÉM. Au Point b du Cercle menez la Tangente hS , laquelle rencontrera fS en quelque Point S , puisqu'elle rencontre hB parallèle à fS (supp.). Prolongez encore fh jusqu'en g , alors vous trouverez que l'Angle $Sfb =$ l'Angle $Bhg = Sbb = fSh$ son alterne. Ainsi l'Angle $Sfb = fSh$; donc $hS = fh$; & par conséquent (10) fS est Tangente à la Cycloïde.

13. D'où il suit que la Perpendiculaire AO sur la Base AC de la Cycloïde, au Point A ou C d'origine, est Tangente à cette Courbe. Cette Perpendiculaire ayant toutes les qualités requises pour être Tangente. Car AD rencontre perpendiculairement BD , & la Ligne AO est parallèle à la corde ou au Diamètre BD , tiré du Point de rencontre D au Point B culminant. Ainsi la Perpendiculaire AO est Tangente à la Cycloïde (11).

14. BRON. Trouver la Quadrature ou déterminer la surface de la Cycloïde. (fig. 105.)

RÉSOLUT. Soit AD la Base d'une demi-Cycloïde AMB ; la demi-circonférence BPD de son Cercle générateur $= AD$; & DG le Rectangle de la demi-Base AD & de l'Axe BD . Concevons que BG ou AD soit divisée en un nombre de parties égales, telles que GF , si petites que la somme des Rectangles $FGAS$ circonscrits à l'espace $GBMAG$, diffère de la somme des inscrits $GFML$ à ce même espace, moins que d'une grandeur donnée quelconque, ainsi que nous en avons démontré la possibilité au n°. 68 de la Parabole. Par le Point M , où la Perpendiculaire FS coupe la Courbe, menons $LMPQ$ parallèlement à AD ; & du Point P , où elle coupe le Cercle, soient tirées la Perpendiculaire PH , ainsi que la corde PB , laquelle est parallèle à la Tangente AMT au Point M de la Cycloïde (11). Cette construction supposée.

I. A cause de GF excessivement petite, la Portioncule AM de la Courbe peut être considérée, comme faisant par-

tie de la Tangente AT au Point M . Donc AM est parallèle à BP (11); ainsi les Triangles ASM , BQP , étant sembla-

bles, on en tire $BQ, QP :: MS, AS = \frac{QP \times MS}{BQ} = LM$.

De plus $GL = BQ$. Donc $GL \times LM = BQ \times \frac{QP \times MS}{BQ}$

$= QP \times MS = QP \times PH$ (à cause de $MS = PH$); c'est-à-dire que le petit Rectangle $GL \times LM$, inscrit à l'espace $GBMAG$, est égal au petit Rectangle $QP \times PH$ correspondant, circonscrit au demi-Cercle générateur, & cela arrivera à tous les Points de la Courbe déterminés comme M . Donc la somme des Rectangles inscrits à l'espace $GBMAG$, est égale à la somme des Rectangles circonscrits au demi-Cercle; or (69. Parab.) chacune de ces sommes est égale à son espace respectif. Par conséquent l'espace $GBMAG$, ou la surface comprise entre les Lignes GA , GB , & la Courbe AMB , est égale à l'Aire du demi-Cercle générateur BPD .

II. Maintenant le Rectangle $DG = AD \times BD$, & l'Aire du demi-Cercle générateur $=$ la demi-circonférence BPD ou $AD \times \frac{\pi}{2}$; c'est-à-dire que le demi-Cercle générateur, ou l'espace $GBMAG$, qui est égal à ce demi-Cercle (art. 1.), n'est que le quart du Rectangle DG ; ainsi l'Aire $AMBDA$ de la demi-Cycloïde en est les trois quarts. Ce qui démontre que l'Aire de la demi-Cycloïde est à celle du demi-Cercle générateur, comme 3 est à 1. La surface de la Cycloïde entière est donc triple de l'Aire de son Cercle générateur. $C. Q. F. T.$ & $D.$ [1].

15. COR. Si l'on avoit la Quadrature absolue du Cercle, on auroit donc aussi celle de la Cycloïde & réciproquement.

[1] On voit ici une nouvelle preuve de l'élégance de la Méthode des Limites pour la Quadrature des Courbes. La construction & la démonstration de ce Problème, résolu par le Calcul intégral, ne sont assurément pas plus simples. On a de plus l'avantage de se passer de ce Calcul; & l'on y jouit de toute la clarté de la Méthode Géométrique, sans en suiver les longueurs.

15. PROBLÈME. Décrire une Cycloïde.

La résolution en peut être ou toute Mécanique, ou en partie Mécanique & en partie Géométrique.

RÉSOL. I. Tout-à-fait Mécanique. Préparez deux Plans ou deux Ais bien unis, bien nivelés, qui s'entre-coupent à Angles droits, l'un horizontalement & l'autre verticalement; que l'horizontal porte deux coulisses très-planes & très-lubrifiées, entre lesquelles on puisse retenir, exactement & sans force, un Cylindre, dont les Bases circulaires s'appliquent bien précisément sur les coulisses; que la Base du côté de l'Ais vertical, soit armée d'une Pointe ou d'un crayon perpendiculaire, qui n'ait que la saillie nécessaire, pour effleurer très-légèrement la surface du Plan vertical. Il est évident, suivant cette préparation, qu'en faisant rouler le Cylindre entre les deux coulisses, l'extrémité de la pointe ou du crayon marquera, sur la surface verticale, un trait qui sera une Cycloïde (1).

17. REMARQ. 1°. Il est nécessaire que les coulisses soient exactement en Ligne droite, parallèles, & lubrifiées moyennant quelques matières grasses; afin que les Bases du Cylindre roulans toujours dans un même Plan, n'éprouvent aucuns soubresauts; & qu'ainsi la Cycloïde soit le plus parfaitement continue qu'il est possible.

2°. La pointe décrivant doit être avancée vers le Centre de la Base du Cylindre où elle est arrêtée, autant qu'il en est besoin pour que la saillie des coulisses n'en arrête ou n'en gêne point le mouvement dans la partie inférieure de sa révolution.

3°. Afin qu'on ait bien précisément une révolution entière de la Base Cylindrique, marquée sur le Plan vertical, on fera rouler le Cylindre de manière que l'on ait la fin d'une révolution, une révolution entière & le commencement d'une autre; par là on aura les deux Points, qui termineront la Base de la révolution entière, & par conséquent une Cycloïde complète.

4°. Si l'on veut avoir en Ligne droite, la longueur de la circonférence du Plan décrivant; après avoir enfoncé,

sur la surface convexe du Cylindre, une pointe très-fine laquelle ait fort peu de saillie, on enduira d'une très-légère couche de cire, le Plan horizontal sur lequel doit rouler le Cylindre. Par là l'impression de la pointe fera voir le commencement & la fin d'une révolution; ce qui donnera la circonférence décrivant exactement rectifiée.

18. RÉSOL. II. En partie Mécanique & en partie Géométrique. Nous disons que cette résolution est en partie Mécanique, parce qu'elle est fondée sur la rectification de la circonférence du Cercle; Problème qui n'a pas encore été résolu géométriquement; elle est néanmoins en partie Géométrique, en ce que la rectification du Cercle supposée, on la déduit des propriétés connues de la Courbe à décrire, ainsi qu'on va le voir.

Soit AD (fig. 106.) la demi-Base d'une demi-Cycloïde à décrire, laquelle Base soit égale à la demi-circonférence BMD de son Cercle générateur. (ce que l'on déterminera mécaniquement (art. 4. du n°. 17), ou en enveloppant un Cylindre avec une mesure pliante, que l'on remettra ensuite en Ligne droite, &c.). Elevons le Diamètre BD du Cercle générateur, perpendiculairement sur l'extrémité D de cette demi-Base; & après avoir décrit la moitié de ce Cercle, divisons la demi-circonférence BMD en autant de parties égales que nous voudrions & pareillement paires [1] (plus le nombre en sera grand, plus la description de la Courbe sera exacte); faisons le même nombre de divisions, 6 par exemple, sur la Ligne AD ; par les Points de division O, M, L, K, I , de la demi-circonférence, menons des Lignes parallèlement à AD ; donnons à OP 5 parties de AD ; 4 à MH ; 3 à LG ; 2 à KF ; & 1 à IC . Je dis qu'après cela, si l'on joint par une Courbe continue les Points A, P, H, G, F, C, B , l'on aura une demi-Cycloïde, dont BMD sera le demi-Cercle générateur.

DÉM. Par la const. $AD =$ la demi-circonférence BMD ;

[1] Ce que l'on exécutera par la Bifurcure, répétée autant de fois qu'on le jugera nécessaire.

donc la sixième partie de AD = la sixième partie de BMD ; ainsi OP, qui vaut 5 sixièmes de AD (const.) est égale à l'arc BO, qui vaut aussi 5 sixièmes de BMD ou de AD ; donc le Point P est à une demi-Cycloïde, dont BMD est le demi-Cercle générateur (6). Et faisant un semblable raisonnement, par rapport aux Points H, G, &c. on trouvera qu'ils sont à la même Courbe. De manière que, si l'on répète cette même construction de l'autre côté de BD, on aura une Cycloïde entière. Et c'est C. Q. F. T. Et D. [4]

19. DÉM. Concevons que la demi-Cycloïde, ou une Courbe quelconque BCA, (fig. 107.) toujours concave d'un même côté, soit enveloppée d'un fil ; que ce fil se détache de la Courbe peu à peu, par son extrémité B ; de manière que la partie FC détachée, soit toujours exactement tendue en Ligne droite. Il est clair que dans ce mouvement, le Point B décrira une autre Courbe BFM [b], que l'on nomme *développante*, *ligne d'évolution* ou de *développement* ; & alors la ligne BCA s'appelle *développée* ; les parties du fil, telles que CF, détachées de dessus BCA, se nomment *rayons de la développée*.

20. COR. I. De cette génération de la *développante*, il s'ensuit 1°. que tout rayon FC de la *développée* est toujours égal à la partie BC de cette Courbe de dessus laquelle il s'est détaché. 2°. Que ce rayon est une Tangente à la *développée* au Point C, où il y tient encore ; parce qu'en prolongeant FC vers P, on s'aperçoit que la *développée* se courbant en C, quitte la direction CP, immédiatement après ce Point ; & comme le fil n'entre point dans la Courbe, (supp.), il est évident qu'il ne la touche qu'au Point C.

21. COR. II. En élevant, à l'extrémité F d'un rayon

[4] Il me semble que cette construction de la *Cycloïde* est plus facile, plus courte, & qu'elle comporte une démonstration plus simple, que celles qui se trouvent ordinairement dans les Livres.

[b] Ce qui sera démontré particulièrement au n°. 25. On fera même voir, au n°. 23. qu'elle est toujours concave ou convexe du même côté.

FG est Tangente ; puisqu'il est possible qu'une *sécante* ne rencontre une Courbe qu'en un seul Point ; il faut encore faire voir que FG, prolongée du côté de B ou de M, ne coupe point BFM au Point F.

Si elle étoit Sécante en F, elle passeroit entre la portion FB de cette Courbe, & le rayon FC de la *développée*, & rencontreroit alors la Courbe BCA en quelque Point y, entre B & C ; ou elle passeroit entre l'arc FM & le rayon FC ; & couperoit ainsi quelque rayon HE de la *développée*, en quelque Point u compris entre les extrémités H, E, de ce rayon. Or ces deux cas sont impossibles.

Car d'abord, si FG perpendiculaire sur FC passoit en y, en tirant la corde Cy (que je suppose tirée, ainsi que Fy & Fu, pour éviter la confusion) on auroit $Cy > CF$; mais $CF =$ l'arc CB (20.) ; donc $Cy >$ l'arc CB. Ce qui est absurde.

Si l'on vouloit d'un autre côté que FG passât en u ; alors $uL > FL$; donc $uL + LE > FL + LE$; or $FL + LE >$ la Courbe BE = le rayon HE (20.) ; donc $uL + LE$, c'est-à-dire, uE seroit $> HE$. Autre absurdité.

La Perpendiculaire FG touche donc la *développante* au seul Point F, sans la couper. Et, comme ce raisonnement est applicable à tous les Points de cette Ligne, il s'ensuit que tous les rayons d'une *développée*, toujours concave d'un même côté, sont perpendiculaires à sa *développante* ; parce qu'en parlant d'une perpendiculaire à une Courbe, on entend une perpendiculaire à quelque droite, au Point où cette droite touche la Courbe.

22. COR. III. Ceci démontre que la *développante* BFM est effectivement une Courbe, ainsi que nous l'avons supposé. Puisque BFM étant une droite, la partie FH en seroit une aussi. Ainsi les trois Angles du Triangle LFH vaudroient plus de deux Angles droits ; car (21.) les deux Angles LFH, LHF, vaudroient chacun un Angle droit : or cela est absurde ; donc il est impossible que BFM ne soit pas une Courbe.

23. COR. IV. Une Tangente quelconque FG à la dé-

quelconque FC de la *développée*, une Perpendiculaire FG sur ce rayon, je dis qu'elle sera Tangente à la *développante* BFM ; & qu'ainsi tous les rayons d'une *développée* sont Perpendiculaires à sa *développante*.

DÉM. Si FG touchoit ou étoit déterminée à toucher la Courbe en quelqu'autre Point H [4] pris du côté de M ; 1°. En amenant le rayon de la *développée* à ce Point H, en sorte que devenant EH il coupât FCP en L, on auroit $LH > LF$; (parce que LF étant Perpendiculaire sur FG (supp.), LH lui seroit oblique) ; donc $LH + LE > LF + LE$; or $LF + LE = FC + CL + LE = BC + CL + LE$ (à cause de $FC = BC$ (20.) ; donc $LH + LE$, c'est-à-dire, HE ou la Courbe BCE $> BC + CL + LE$; ainsi la portion CE de cette Courbe seroit plus grande que $CL + LE$. Ce qui est absurde.

2°. En faisant passer le rayon de la *développée* à quelque Point K de la *développante*, pris du côté de B par rapport à F, on démontrera comme ci-dessus, que la Perpendiculaire FG prolongée ne peut pas toucher ou couper la Courbe en ce Point. Car alors le rayon de la *développée* devenant RK, si l'on tire la droite CK & la corde CR, l'on aura $RK = RB$ (20.) ; & l'arc RC $>$ la corde RC ; donc $RB +$ l'arc RC ou l'arc entier BC $> RK +$ la corde RC ; or $RK +$ la corde RC $>$ la droite CK ; & $CK > CF$; (parce que CF étant (supp.) Perpendiculaire sur FG, il faut que CK lui soit oblique ; & par conséquent $CK > CF$) ; donc, à plus forte raison, l'arc BC seroit $> CF$. Ce qui ne peut pas être, puisque (20.) $BC = CF$. La Perpendiculaire FG ne rencontre donc la *développante* qu'au seul Point F.

3°. Mais, comme cela ne suffit pas pour démontrer que

[4] On a pris H assez éloigné du Point F, pour mettre plus de distinction dans la figure. Mais cela ne nuit point à la force de la démonstration ; parce qu'elle s'étend à un Point quelconque.

développante BFM, laisse donc cette Courbe entièrement d'un même côté. Par conséquent la *développante* d'une Courbe, toujours concave du même sens, est pareillement toujours concave du même sens que la *développée* ; puisqu'elle ne pourroit avoir un Point d'inflexion ou de rebroussement, c'est-à-dire se tourner d'un autre sens, sans être coupée par quelque une de ses Tangentes.

24. LEMME. Deux Courbes BA, BM (fig. 107.), toujours concaves du même côté, & qui ont la même origine B, ne peuvent être telles que toutes les perpendiculaires à l'une soient en même-tems perpendiculaires à l'autre.

DÉM. Pour que cela fût, il seroit nécessaire que toutes les Tangentes de l'une, fussent parallèles à toutes les Tangentes correspondantes de l'autre [2] ; or cela est impossible. Et c'est d'abord une chose évidente, si les deux Courbes se croisent ou tendent à se croiser ; parce que les Tangentes au Point d'intersection se croisant aussi, ne pourroient pas être parallèles.

1°. Si elles ne font que se toucher au Point B d'origine, alors les deux Tangentes se confondant en ce Point, pourroient à la vérité être censées parallèles ; mais la Tangente de l'une au Point qui suivra immédiatement celui de contingence ne pourra pas être parallèle à la Tangente correspondante de l'autre ; parce que les Tangentes pouvant être regardées comme des petits côtés de leur Courbe, s'il y en a deux qui se confondent entièrement, les deux petits côtés suivants ou les deux petites Tangentes suivantes, partans de la même extrémité, ne pourront pas être parallèles ; & par conséquent la perpendiculaire à l'une ne pourra pas être perpendiculaire à l'autre. Ce qu'il est très-important de bien remarquer.

[2] Parce qu'une Perpendiculaire à une Courbe, est une Ligne qui fait des Angles droits avec la Tangente, au Point où cette Perpendiculaire rencontre la Courbe. Donc, si une même Ligne étoit perpendiculaire à deux Courbes, en tirant des Tangentes aux Points de rencontre, ces Tangentes seroient perpendiculaires sur une même Ligne, & par conséquent parallèles entr'elles.

25. COR. Donc, si deux Courbes, dont on ignore la nature, sont telles qu'étant toujours concaves d'un même côté avec un même Point d'origine, toutes les Perpendiculaires à l'une soient aussi Perpendiculaires à l'autre, il en faudra conclure que ces deux Lignes sont nécessairement une seule & même Courbe; puisqu'autrement la chose seroit impossible (24).

26. PROB. Une *demi-Cycloïde* BCA étant donnée, déterminer la nature de sa *développante* BFM. (fig. 108.)

RESOL. 1°. Après avoir construit le Rectangle DR, rappellons-nous que tout rayon CF de la *développée* BCA, est une Tangente à cette *développée* (art. 2. du n°. 20.); donc, en tirant du Point de contingence C la parallèle CH à la Base AD, pour avoir la corde HB; cette corde sera parallèle à CF (11). Ainsi l'Angle BLF = HBL son alterne. Donc, si l'on construit un Cercle sur la Perpendiculaire LO égale à l'Axe BD, ce Cercle coupera le rayon CF de la *développée* en un Point F, tel que l'arc FL = l'arc BH [4]; or l'arc BH = la droite CH (5), & CH = BL (à cause du Parallélogramme BLCH) donc l'arc FL = la droite BL.

2°. Maintenant, quand la Courbe BCA sera entièrement *développée*, le fil de cette *développée* ne la touchera plus qu'au Point A, & sera par conséquent Perpendiculaire sur AD (13); donc le rayon de la *développée* prendra alors la position AM. Ainsi, en construisant un Cercle sur RM = AR = BD, & tirant FT parallèle à BR, on aura l'arc TR = l'arc FL = la droite BL (art. 1.); donc la droite LR = l'arc TM; parce que la demi-circonférence MTR = AD = BR (const.).

3°. L'Angle TRL = l'Angle FLB; parce que l'arc TR

[4] Parce que l'Angle BLF est mesuré par la moitié de l'arc FL, & l'Angle HBL a pour mesure la moitié de l'arc BH. Donc les Angles BLF, HBL, étant égaux, leurs mesures seront égales, & par conséquent les doubles de ces mesures, c'est-à-dire, les arcs FL, BH, sont égaux.

27. COR. I. Puisque le rayon d'une *développée* est toujours égal à la partie développée de cette Courbe (20), on a l'Arc CB = CF = CL + LF. Or, (à cause de l'Angle BLF = HBL) LF = HB, & HB = CL; parce que la fig. BHCL est un parallélogramme (art. 1. du n°. 26.); donc LF = CL; ainsi CF double de CL, est aussi double de la corde HB = CL. Par conséquent l'Arc Cycloïdal CB, qui est toujours égal au rayon CF, est toujours double de la corde HB correspondante du Cercle générateur DBH. Ce qu'il faut bien remarquer.

28. II. Par la même raison, MR étant = AR = BD; le rayon AM de la *développée* = 2AR = 2BD. Mais AM = la demi-Cycloïde ACB (13 & 20); donc ACB = 2BD; c'est-à-dire, que la Courbe ACB d'une demi-Cycloïde, est double du Diamètre de son Cercle générateur. La longueur de la Courbe d'une Cycloïde entière est donc quadruple du Diamètre de son Cercle générateur [4].

29. COR. III. Si on renveloppoit la demi-Cycloïde ACB avec le fil AM, qui lui est égal, & en allant de M vers B; de manière que la partie du fil, qui ne seroit pas encore appliquée à la Courbe, fût toujours tendue en Ligne droite; il est évident que son extrémité M, décrirait la même demi-Cycloïde BFM. Parce que le fil, en se renveloppant, prendroit précisément, mais en sens rétrograde, les mêmes Positions qu'en se développant. Ainsi, au lieu de replier le fil sur la demi-Cycloïde ACB du côté de B, il n'y a qu'à l'appliquer, en allant de M vers E, sur la demi-Cycloïde AE; laquelle ayant le même Point d'origine A, est tout-à-fait la même de grandeur & de position que la Courbe ACB; & alors le fil AM, en se développant de-dessus la demi-Cycloïde ACB & se renveloppant sur son associée

[4] Voilà donc une Courbe rectifiée, ou égale à une Ligne droite comme: Prenez garde cependant que cette rectification n'est point absolue; parce qu'elle dépend de la supposition de l'égalité d'une autre Courbe à une Ligne droite, c'est-à-dire de l'égalité de la Base de la Cycloïde à la circonférence de son Cercle générateur; égalité que l'on ne sçait pas déterminer géométriquement.

= l'arc FL; donc la corde TR est parallèle & égale à la corde FL; ainsi LR = FT; donc, puisque LR = l'arc TM (art. 2.), on aura FT = l'arc TM. Et la même chose arrivera à tout Point d'un rayon quelconque de la *développée*, déterminé comme F. Par conséquent (6) tous ces Points composeront une *demi-Cycloïde* BFM, tout-à-fait égale à la Courbe BCA.

4°. Ainsi, en menant FO parallèlement à la corde TM, elle sera Tangente à cette *demi-Cycloïde* (12). Or (à cause de TR parallèle à FL, & de TM parallèle à FO) il est clair que l'Angle OFL = MTR; donc MTR étant droit, l'Angle OFL l'est aussi. Par conséquent le rayon CF de la *développée* est perpendiculaire au Point de contingence de la Tangente OF; il l'est donc aussi à la *demi-Cycloïde* à laquelle le Point de contingence F appartient. Tous les rayons de la *développée* BCA seront donc perpendiculaires à une *demi-Cycloïde*, laquelle prenant son origine au Sommet B de cette *développée*, lui sera entièrement égale & très-évidemment concave du même côté. Mais, quelle que soit la *développante* de la Courbe BCA, tous les rayons de cette *développée* seront aussi perpendiculaires sur sa *développante* (21), laquelle a la même origine & est concave du même côté que BCA (23); donc (25) la *développante* de la *demi-Cycloïde* BCA, est aussi une *demi-Cycloïde* BFM tout-à-fait égale à sa *développée*. C. Q. F. T. & D.

Cette démonstration étant importante pour la suite, il est bon de la résumer en peu de mots.

La *demi-Cycloïde* construite sur la Base BR = AD, avec un Cercle RM égal au générateur BD de la *développée* BCA, a la même origine B & est concave du même côté que la *développante* de BCA. De plus tous les rayons de la *développée* sont perpendiculaires sur la *demi-Cycloïde*, dont la Base est BR; or ils le sont aussi sur la *développante* de BCA (21), donc la *demi-Cycloïde* engendrée sur BR, est la même Courbe que la *développante* de BCA; puisqu'autrement toutes les Perpendiculaires à l'une ne pourroient pas être perpendiculaires à l'autre (25). La *développante* de la Cycloïde est donc aussi une Cycloïde, égale en tout à sa *développée*.

X

AE, décrira par son extrémité M la Cycloïde entière BME, égale à la somme des deux *demi-Cycloïdes* AB, AE.

30. COR. IV. En supposant donc A le Point de suspension d'un fil AM, rendu par un corps pesant à son extrémité M, & les Courbes AB, AE, des Lames Cycloïdales; si l'on fait osciller ce corps dans le plan de ces Courbes, il fera ses oscillations dans une Cycloïde BME.

31. REMARQ. Telles sont les propriétés de la Cycloïde, qui servirent de fondement à l'immortelle découverte de M. Huyghens, lorsqu'il s'appliqua à rechercher les loix du mouvement d'un corps dans cette Courbe. Il trouva qu'un corps mù, en vertu de sa pesanteur, dans une Cycloïde renversée AFK (fig. 109) dont la Base AK est parallèle à l'horizon, arrive toujours dans un même intervalle de temps au Point F le plus bas de cette Courbe; soit qu'il en parcoure un grand Arc, soit qu'il en décrive un petit. La démonstration, que ce grand Géomètre en donna, est très-difficile. M. de la Hire tâcha dans sa Mécanique [4] d'en produire une plus élégante; mais M. Jean Bernoulli ayant remarqué un paralogisme des plus incontestables, celui-ci en découvrit une très-simple, dont il me paroît pourtant nécessaire d'expliquer les fondemens.

32. EXPOSITION des Elémens, sur lesquels est fondée la démonstration de l'Ischronisme dans la Cycloïde.

I. Si un corps commence à tomber des Points B, K, (fig. 109.) le long de la Courbe AFK; les vitesses acquises à des Points quelconques C, H, au-dessous des Points de partance B, K, seront entr'elles comme les racines quadrées des longueurs verticales, MP, LO, qui désignent les hauteurs d'où le corps est tombé; c'est-à-dire que la vitesse, acquise en C depuis le Point B, est à la vitesse en H depuis

le Point K, comme $\sqrt{MP}$ est $\sqrt{LO}$.

Effectivement l'expérience démontre qu'un corps qui

[4] Imprimée à Paris in-12. en 1695. Voyez-en la page 431.

tombe, en vertu de sa pesanteur, le long d'un plan incliné, acquiesse précisément la même vitesse à la fin de ce plan, que s'il tomboit par toute sa hauteur verticale. Or une Courbe peut être regardée comme une suite de Plans, formant à leur rencontre des Angles si obtus, qu'ils équivalent à un seul Plan incliné de même hauteur que la Courbe. Mais on a vu (n°. 101 de la Parabole) que les hauteurs H, h , parcourues par un mobile, en vertu de sa pesanteur, étoient entr'elles comme les quarrés des vitesses VV, vv ; ou que $VV, vv :: H, h$; donc $V, v :: \sqrt{H}, \sqrt{h}$; & par conséquent ici, $:: \sqrt{MP}, \sqrt{LO}$.

II. Une Courbe AFK peut être partagée en parties CD ou HG si petites, que les vitesses d'un mobile, acquieses depuis les Points respectifs B, K, n'augmenteront point sensiblement, en parcourant les petites Lignes CD, HG. Car on peut les concevoir d'une petitesse si excessive, que le tems employé à les parcourir sera moindre qu'une grandeur donnée quelconque; ainsi l'augmentation de vitesse, pendant ce tems, pourra être regardée comme nulle relativement à la vitesse acquise précédente; c'est-à-dire, que cette vitesse acquise peut être censée uniforme, durant le tems que le mobile passera une des petites Lignes CD. En sorte que la vitesse du mobile n'augmente qu'à la fin de chaque Portioncule de la Courbe, & nullement pendant le trajet de cette Portioncule. Ce que l'on concevra très-aisément, en imaginant que la pesanteur ne réitère ses coups sur le mobile qu'à des intervalles très-petits: moyennant quoi la vitesse se conserve uniforme pendant chaque petit intervalle; quoi qu'après chacun d'eux elle reçoive une augmentation par les redoublemens de la pesanteur.

III. Dans le mouvement uniforme, quand les vitesses V, v , sont entr'elles comme les espaces E, e , parcourus, les tems T, t , employés à parcourir ces espaces, sont nécessairement égaux. Car on a la vitesse d'un mobile, en divisant l'espace E parcouru, par le tems T employé à le par-

courir; c'est-à-dire que $V = \frac{E}{T}$, & $v = \frac{e}{t}$: mais (supp.)

$V, v :: E, e$; donc $\frac{E}{T} \cdot \frac{e}{t} :: E, e$; ainsi $\frac{Ee}{Tt} = \frac{Ee}{Tt}$. Donc (en multipliant par Tt , & divisant ensuite par Ee) $t = T$.

33. PROP. VI. Un corps qui se meut, en vertu de sa pesanteur, dans une Cycloïde renversée, (fig. 109), dont la Base AK est parallèle à l'horizon, décrit la demi-Cycloïde KF dans le même tems qu'il en parcourt un Arc quelconque BF plus petit; c'est-à-dire, qu'un mobile mù dans une Cycloïde, arrive toujours dans un même intervalle de tems, au Point F le plus bas de cette Courbe; quoiqu'il commence à tomber de différentes hauteurs. Et c'est ce qu'on entend, quand on dit que les vibrations ou oscillations d'un Pendule dans une Cycloïde sont isochrones ou d'égale durée.

DÉMONSTRATION de l'Ischronisme dans la Cycloïde. I. Concevez que l'on ait divisé l'Arc BF en un très-grand nombre de Portioncules égales CD; & pour aider l'imagination, soit $CD = \frac{1}{100}$ de BF; en sorte que $BF = 100 CD$. Concevez aussi la demi-Cycloïde KF, divisée dans le même nombre de parties égales que l'Arc BF; tellement que HG soit $\frac{1}{100}$ de KF, ou que $KF = 100 HG$. Supposons encore que CD soit la trentième portioncule des parties de BF, en commençant à compter du Point B; & que pareillement HG soit la trentième Portioncule de KF, à compter du Point K. Alors $BC = 29 CD$, & $CF = 71 CD$: De même $KH = 29 HG$, & $HF = 71 HG$. Donc, puisque $100 HG, 100 CD :: 71 HG, 71 CD$, on a $KF, BF :: HF, CF$, ou $KF, HF :: BF, CF$. Pareillement $71 CD, 71 HG$, ou $CF, HF :: CD, HG$.

II. Menons maintenant les Ordonnées CP, HO, BM, & les cordes FS, FR, FT. Après quoi considérons qu'ayant (art. 1.) $KF, HF :: BF, CF$, nous aurons $FL, FT :: FR, FS$, parce que les cordes du Cercle générateur, sont toujours

X iij

les moitiés des Arcs Cycloïdaux correspondans (27). Donc $FL, FT :: FR, FS (A)$; or (n°. 292 Inf. T. 1.) $FT = FL \times FO$; $FR = FL \times FM$; $FS = FL \times FP$; ainsi l'équation A peut devenir $FL, FL \times FO :: FL \times FM, FL \times FP$; ou (en divisant par FL) $FO :: FM, FP$; donc $FL = FO, FO :: FM = FP, FP$, ou $LO, FO :: MP, FP$; donc $FP, FO :: MP, LO$. Ainsi $\sqrt{FP}, \sqrt{FO}, \sqrt{MP}, \sqrt{LO} ::$ (art. 1. du n°. 32) la vitesse acquise en C depuis le Point B, est à la vitesse acquise en H depuis le Point K.

III. Mais (n°. 292. Inf. T. 1.) $FP, FS :: FS, FL$; donc $FP = \frac{FS^2}{FL}$; & par la même raison, $FO = \frac{FT^2}{FL}$. Par conséquent $FP, FO :: FS, FT$, ou $\sqrt{FP}, \sqrt{FO} :: FS, FT :: CF, HF (27) :: CD, HG$ (art. 1.); donc $CD, HG :: \sqrt{FP}, \sqrt{FO} ::$ (art. II.) $\sqrt{MP}, \sqrt{LO} ::$ la vitesse acquise en C est à la vitesse acquise en H. Par conséquent, la vitesse acquise en C depuis B, est à la vitesse acquise en H depuis K, comme CD est HG. Mais (art. II. du n°. 32) ces vitesses acquieses sont uniformes pendant le trajet des espaces CD, HG, excessivement petits; donc (art. III. du n°. 32) les tems employés à parcourir ces Portioncules de la Courbe, sont égaux. Donc la somme des CD, c'est-à-dire, tout l'Arc BF est parcouru en même tems que la somme des HG, ou que la demi-Cycloïde entière KF. C. Q. F. D.

34. USAGE de la Cycloïde dans la construction des Horloges à Pendule. On sçait qu'une Horloge est une machine, dont on se sert pour mesurer le tems. C'est un assemblage de roues qui se communiquent le mouvement imprimé à la première, par un poids suspendu à son Axe ou Tambour. Si ce mouvement n'est pas uniforme, il ne sera pas possible de se régler dessus; & s'il passe trop vite, l'obligation de remonter souvent la machine deviendra incommode. Voilà donc une nécessité de mettre, dans une Horloge,

une pièce qui en arrête ou modère le mouvement à des intervalles réglés.

On parviendroit évidemment à cette fin, en opposant à la dernière roue un obstacle, qui céderoit & résisteroit alternativement à l'impulsion de ses dents. Or un Pendule attaché à la verge, poussée par cette dernière roue, produiroit cet effet. Car les dents de la roue rencontrant celles de la verge, c'est-à-dire, en termes d'Art, les *Palettes*, feront tourner cette verge, & passeront; mais le poids du Pendule ramènera les Palettes, & par conséquent la roue sera repoussée de nouveau, ou tout au moins son mouvement ralenti; & ainsi de suite, pendant toute la durée du mouvement de la machine. Par conséquent le Pendule est utile pour modérer son action.

Mais l'uniformité du mouvement est ce qu'il y a de plus important dans une Horloge. Quelque perfection que l'Ouvrier puisse donner à chacune de ses pièces, l'irrégularité de leur matière & celle des frottemens, feront que les roues ne pousseront pas, à chaque instant, avec une égale force [4]. Moyennant quoi, à chaque impulsion, les oscillations du Pendule seront inégales, & l'expérience a démontré que des oscillations circulaires inégales, se faisoient en des tems inégaux. Le Pendule, mù circulairement, ne ramène donc pas, en tems égaux, les Palettes du balancier contre les dents de la roue de rencontre. Chaque dent passe tantôt plus vite & tantôt plus lentement. Ce qui ne donne pas le mouvement uniforme que l'on se propose.

Toutes ces irrégularités ne subsisteroient plus, si le Pendule, poussé plus ou moins fort, étoit toujours ramené en tems égal. Or nous avons vu (33) qu'en oscillant dans une

[4] Peut être aussi que le poids, premier mobile, accélère son mouvement. Avant consulté là-dessus un homme du métier, il m'a assuré que ma conjecture devoit être vraie; parce qu'il avoit observé constamment qu'une Pendule bien réglée, alloit sensiblement plus vite, lorsque le poids étoit descendu considérablement; & qu'il avoit trouvé cet inconvénient, en raisonant la machine plus souvent qu'à l'ordinaire.

Cycloïde, tous ses retours sont *isochrones* ou d'égale durée ; par conséquent la Cycloïde paroît merveilleusement propre, pour donner au mouvement des Horloges toute l'uniformité, que l'art des hommes peut obtenir.

35. Pour faire comprendre maintenant, à ceux qui ne sont pas du métier, ou qui n'ont jamais examiné le mouvement d'une Horloge, comment le Pendule, adapté au balancier de cette machine, peut se mouvoir dans une Cycloïde, reprenons la fig. 108. Supposons que le Point A soit l'extrémité du Balancier, c'est-à-dire, d'une verge horizontale qui se balance sur son Axe, par l'impulsion des dents de la dernière roue, appelée pour cet effet *roue de rencontre* ; que cette même extrémité soit le Point de suspension du Pendule AM, composé de deux parties, dont l'inférieure SM est inflexible, & la supérieure AS est flexible, comme un fil, une petite chaîne ou une lame de métal très-mince ; qu'à quelques Lignes du Point de suspension A, soit attachée fixement sur le balancier une espèce d'équerre, que l'on nomme *Fourchette*, dont une des branches tombe verticalement, ce qui rend la position de l'autre horizontale ; que cette branche horizontale soit évuidée dans presque toute sa longueur, pour y laisser passer la partie inflexible du Pendule ; & qu'enfin aux deux côtés du Point A, soient deux Lames AE, AB, courbées en Arcs de Cycloïde, dont l'Axe BD ou AR soit la moitié du Pendule AM.

Il est clair, par cette construction, que les dents de la roue de rencontre, venant à pousser les Palettes du balancier, feront tourner cette verge sur son Axe ; la Fourchette entraînée par ce mouvement, emportera avec elle la partie inflexible du Pendule, engagée dans la branche horizontale ; elle fera donc suivre de la partie flexible, laquelle rencontrant une des lames Cycloïdales se pliera, ou s'enveloppera dessus. Mais, à l'instant que la roue de rencontre cessera d'agir contre les Palettes du balancier, le Pendule descendra par son propre poids, & passant au-delà

de la verticale AM, fera renvelopper sa partie flexible sur l'autre Cycloïde AB ; & ainsi de suite pendant toute la durée de ses oscillations. Si l'on se rappelle à présent les n°. 29 & 30, on verra que l'extrémité M d'un pareil Pendule sera forcée de décrire une *Cycloïde* ou une portion de *Cycloïde* ; & que par conséquent ses oscillations, grandes ou petites, seront toutes *isochrones* ou d'égale durée (33).

35. Comme il est fort difficile de plier exactement des lames en Arcs de Cycloïde, & que la partie flexible du Pendule Cycloïdal, est sujette à des variations de la part de l'Air, cette admirable invention, reçue d'abord avec un applaudissement général, a été abandonnée. On en est revenu au Pendule circulaire. Mais une découverte qui ne réussit pas en tout, est toujours bonne en partie. On a observé que de petites oscillations circulaires, qui se faisoient, par exemple, dans des Arcs de 3 ou 4 degrés, se confondoient sensiblement avec celles d'une Cycloïde. Par conséquent, si ces dernières sont d'égale durée, il est nécessaire que les circulaires le soient aussi. Effectivement l'expérience démontre tous les jours qu'avec cette attention, l'on a des Pendules d'une justesse, que l'on ne conçoit guères susceptible d'une plus grande perfection. Et nous en sommes redevables à une Courbe, sur laquelle on ne devoit pas, ce semble, fonder de grandes espérances ; ainsi qu'on en peut juger par cette courte histoire de la *Cycloïde*.

Histoire de la Cycloïde.

La description de cette Courbe est perpétuellement devant nos yeux, & néanmoins on n'en trouve pas le moindre vestige chez les Anciens. Le P. *Mersenne*, l'un des hommes en France qui a le plus contribué aux progrès des hautes Sciences, a remarqué le premier qu'elle existoit dans la nature. En allant par les rues de *Nevers*, en 1615, ses yeux se fixèrent sur un clou de l'une des roues d'une voiture roulante. Il fit réflexion que le mouvement de ce clou

étoit composé de deux mouvemens simultanés, l'un en avant, & l'autre autour de l'assise de la roue ; que par conséquent l'un de ses Points devoit décrire en l'Air une Ligne, qui n'étoit ni droite ni circulaire. Il s'appliqua là-dessus à en rechercher la nature, mais sans aucun succès. Ayant repris ses spéculations sur cette Courbe en 1634, il fit part de ses difficultés à M. de *Roberval*, qui lui en donna la solution. Il s'agissoit d'abord de trouver le rapport de l'espace de la *Cycloïde* à celui de son Cercle générateur. M. de *Roberval* trouva que le premier étoit au second comme 3, est à 1. Mais il fut arrêté au Problème de la Tangente, dont M. *Descartes* donna le premier la Méthode en 1638. Après cela on dut à M. *Wren*, Anglois, la rectification de cette Courbe, par où l'on sçait qu'elle est quadruple de son Axe. Et c'est principalement sur cette propriété, que M. *Huyghens* de *Zuitchem*, Hollandois, fonda sa démonstration de l'*isochronisme* dans la *Cycloïde*. Il en publia la découverte en 1673 dans son *Horologium oscillatorium* ; Ouvrage si plein de génie, que de l'aveu même des plus habiles dans l'Art des Horloges, ce noble Mathématicien a plus contribué à la perfection de ces admirables machines, que tous ses prédécesseurs & ceux qui lui ont succédé jusqu'à notre tems [4].

(4) Voyez *Bailler*, Vie de *Descartes*, & *Paschal Historia Cycloidis*.

F I N.

Conclusion du Tribunal de l'Université de Paris;

Excerptum à Commentariis Universitatis.

Die 7 Novemb. 1750.

DE opere novo, quod vir eruditus Joannes-Baptista de la Chapelle parat in vulgus edere super rebus Mathematicis, quodque die 6 Junii proximè elapsi postulavit, ut sibi liceret Universitati Parisiensi dedicare, Auditâ relatione MM. Mazeas & Fourneau, Philosophiæ in dicta Universitate Professorum, ad expendendum præfatum opus tunc delegatorum, visâque eorum sententiâ, scripto datâ, quæ sic habet: « Nos infra scripti Philosophiæ Professores » in Universitate Parisiensi, deputati ad examen libri, cui » titulus, *Traité des Sections coniques & autres Courbes anciennes, &c.* par M. DE LA CHAPELLE, de la Société Royale » de Londres, quem Autor Almaz studiorum Academix, si » ipsa annueret, dicarum atque ad usum studiosæ Juventutis consecratum veller, Testamur, prædictum opus nobis » visum fuisse & propositionum nexu, & Demonstrationum » perspicuitate, & Methodi elegantia commendandum; » novis non semel atque expeditis Artibus concinnatum: » ex eâ parte, quæ ad usum Juventutis potissimum spectat, » ad ipsius caput feliciter accommodatum; dignum proinde » de quem studiosi Geometriæ & Physicæ Alumni avidè » excipiant; ex alterâ verò parte viam ipsis sternere facilem, » quâ tum ad reconditorem Curvarum Theoriam, tum ad » politiorum Artium usum & proximè deinceps maturiores » facti pervenire possint: Datum Parisiis die 7 Nov. 1750. » Signatum, MAZEAS, FOURNEAU.

Audito M. LE NEVEU, Syndico; re ad deliberandum propositâ, Placuit, oblatam dedicationem admittere. Et ita conclusit amplissimus Rector.

N PIAT,
Univ. Scriba.

& débiter par tout notre Royaume pendant le terme de douze années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes: Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposé, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mil livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposé ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts: A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles: que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beau caractère, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modèle sous le contre-scel des Présentes, que l'impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dixième Avril mil sept cens vingt-cinq; qu'avant de l'exposer en vente le Manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit Ouvrage, sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, es mains de notre très-cher & féal Chevalier, le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en fera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, le tout à peine de nullité des Présentes: Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposé & ses ayans causes, pleinement

APPROBATION.

J'ai lu par l'ordre de Monseigneur le Chancelier un Manuscrit qui a pour titre: *Traité des Sections Coniques & des autres Courbes anciennes, appliquées ou applicables à la pratique des Arts, &c.* par M. DE LA CHAPELLE, Censeur Royal, & Membre de la Société Royale de Londres. Cet Ouvrage m'a paru composé avec beaucoup d'ordre & de clarté, & j'ai jugé que l'application qu'il en a faite aux Arts, en rendroit l'impression utile & agréable au Public. A Paris ce 26 Mai 1750.

CASSINI.

PRIVILEGE DU ROY.

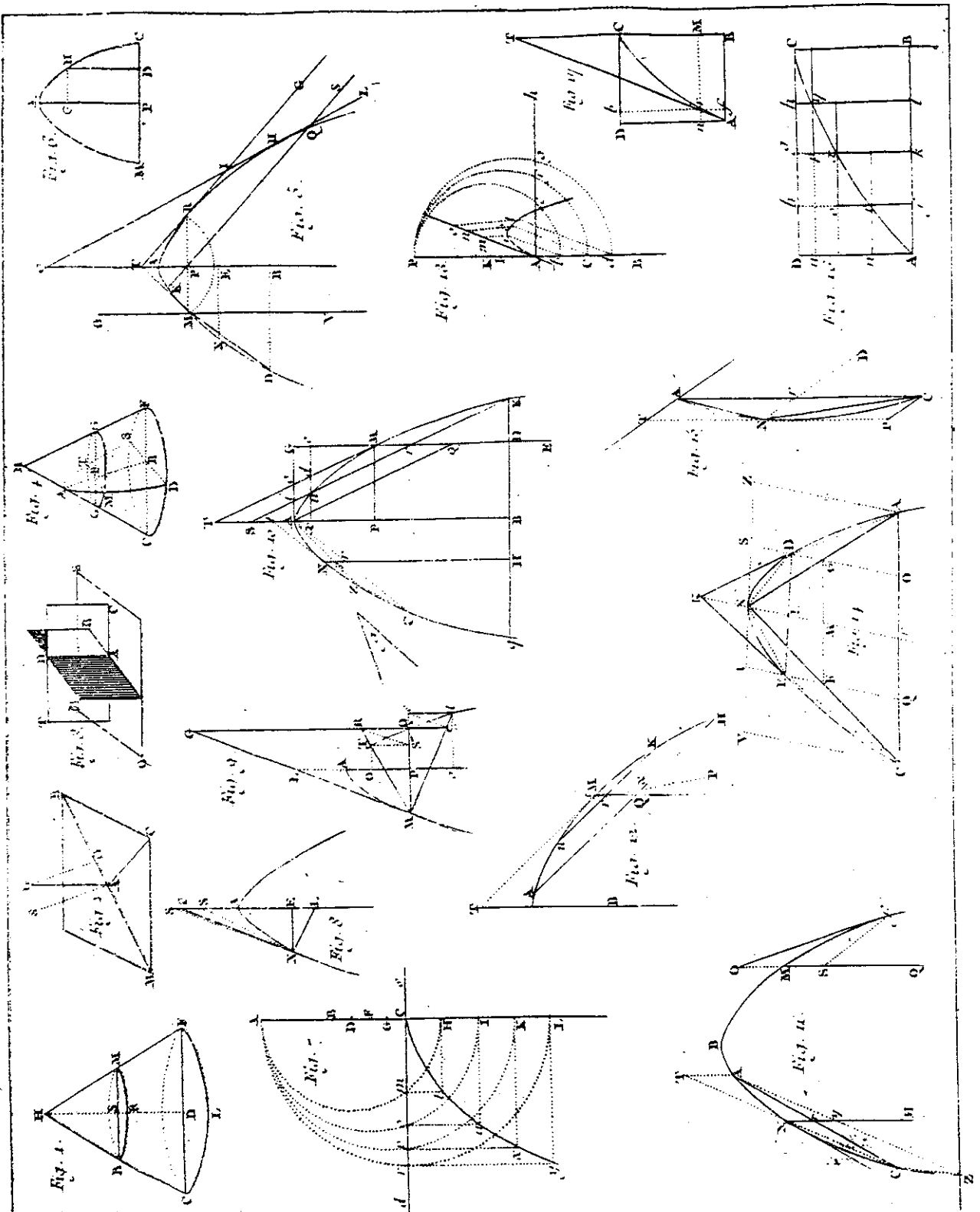
LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlemens, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra: SALUT. Notre amé le Sr DE LA CHAPELLE, de la Société Royale de Londres, & Censeur Royal, Nous ayant fait exposer qu'il désiroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage de sa composition qui a pour titre: *Traité des Sections coniques & autres Courbes anciennes, appliquées ou applicables à la pratique des Arts, &c.* s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilège sur ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer le dit Ouvrage en un ou plusieurs Volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de le faire vendre

& paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la Copie des Présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secrétaires, soit ajoutée comme à l'Original: Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le vingtième jour du mois de Octobre, l'an de grace mil sept cens cinquante; & de notre Règne le trente-cinquième. Par le Roi en son Conseil.

Signé, SAINSON.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n°. 489. fol. 360. conformément au Règlement de 1723. qui fait défense Art. IV. à toutes personnes de quelque qualité qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement, à la charge de fournir à ladite Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris huit exemplaires de chacun, prescrits par l'Art. CVIII. du même Règlement. A Paris, ce 23 Octobre 1750.

LE GRAS, Syndic.



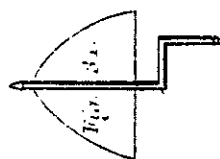
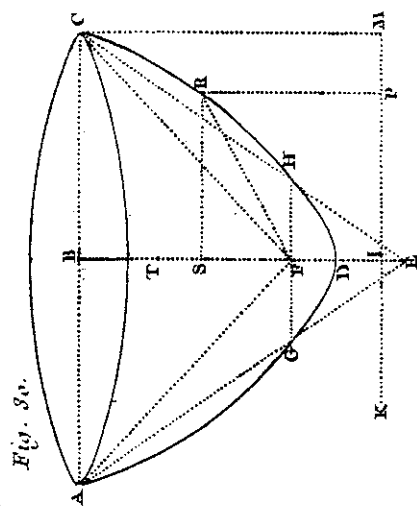


Fig. 33.

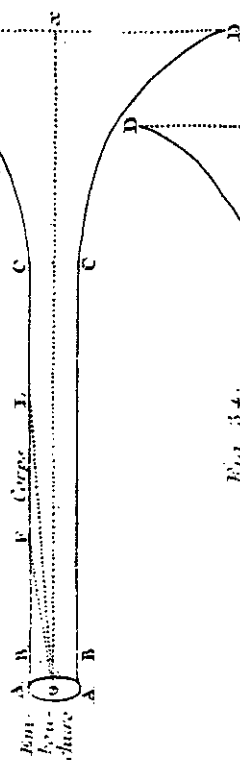


Fig. 34.

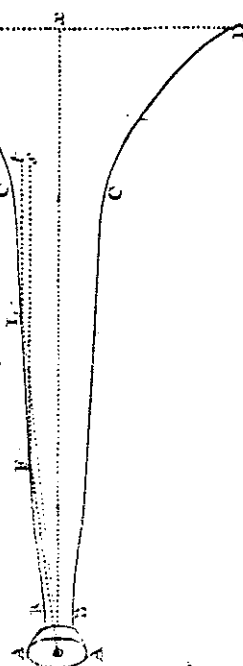


Fig. 35.

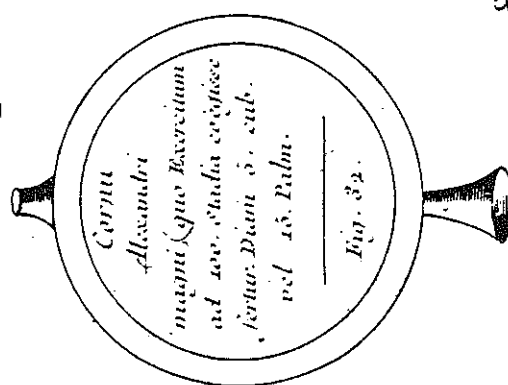
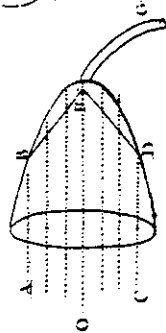


Fig. 32.

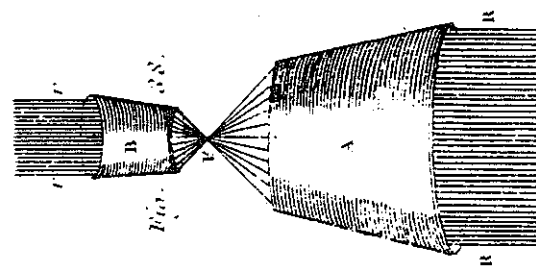
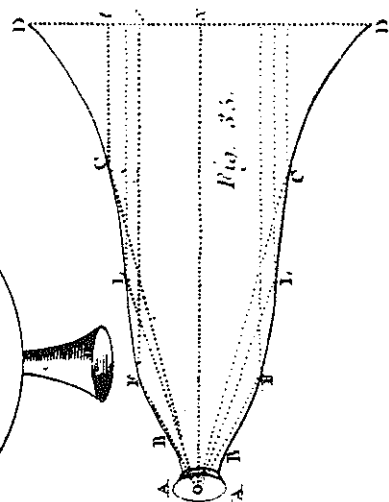


Fig. 37.

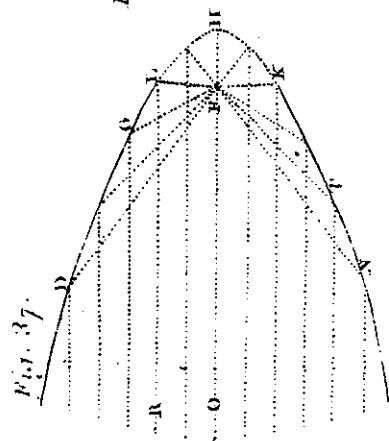
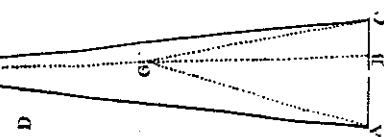
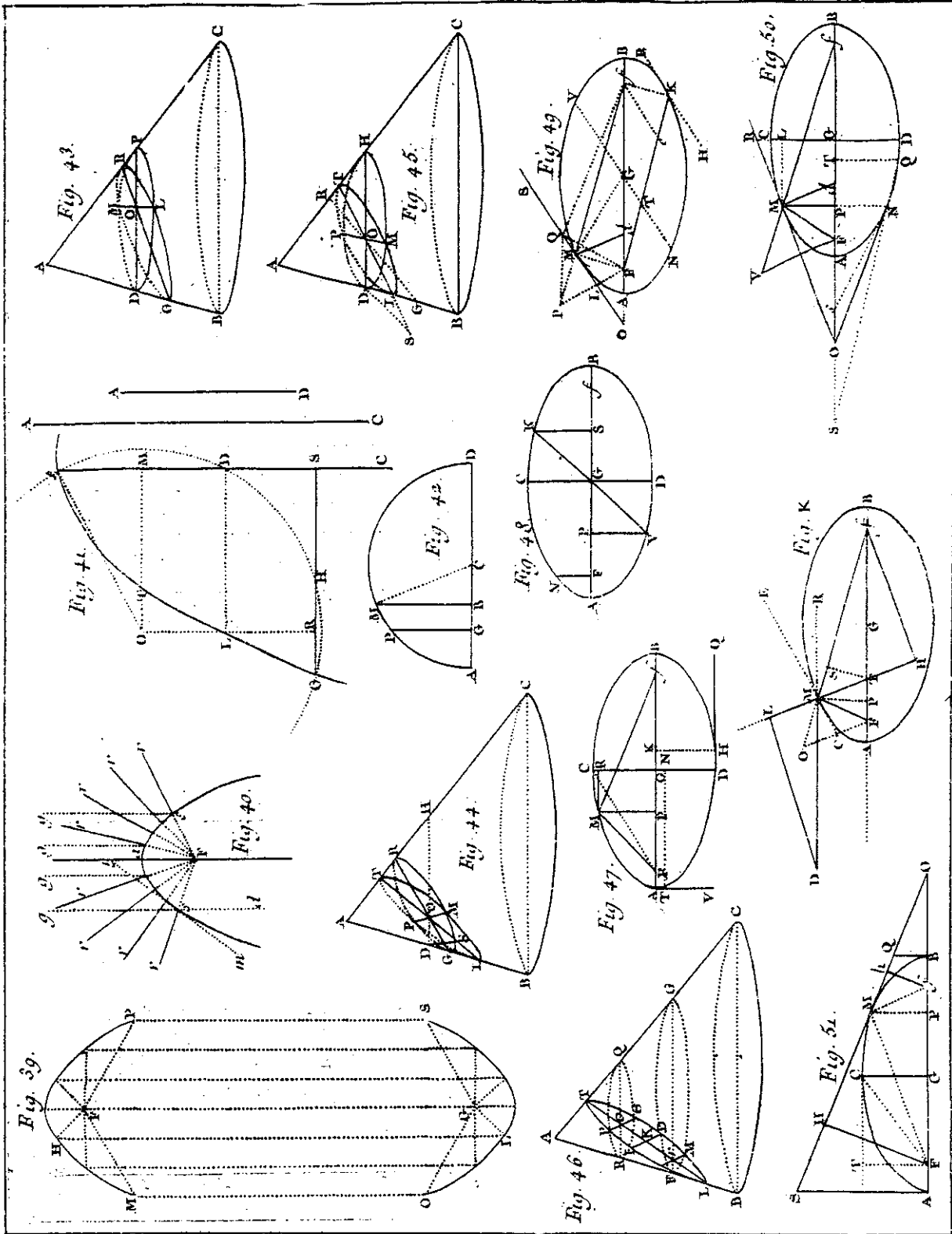
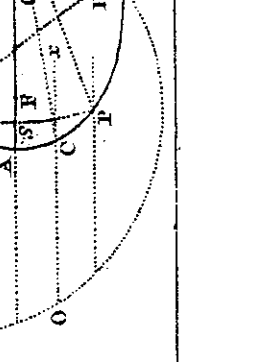
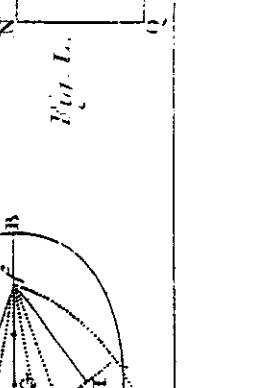
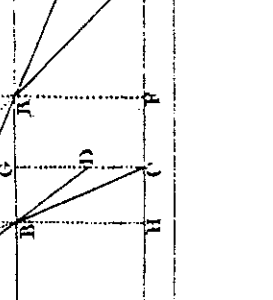
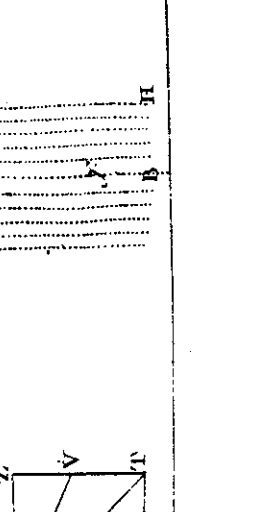
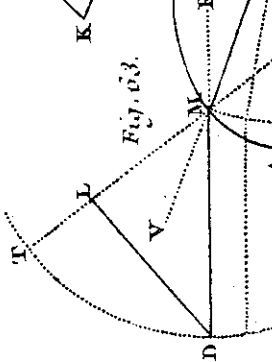
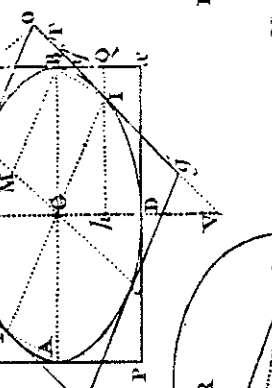
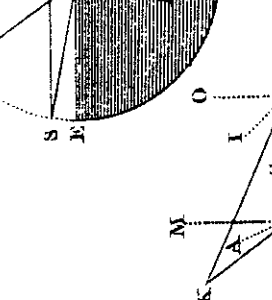
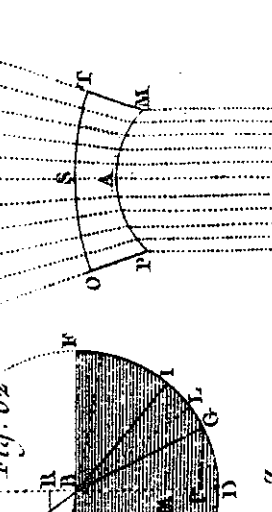
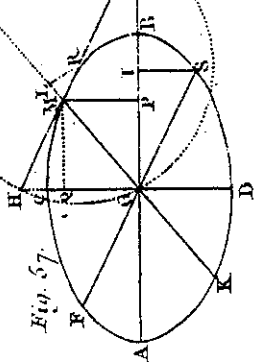
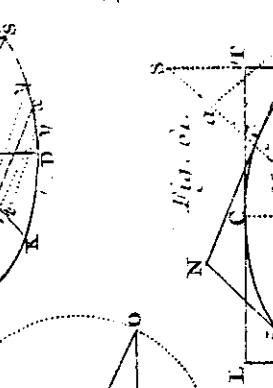
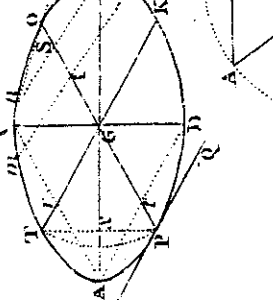
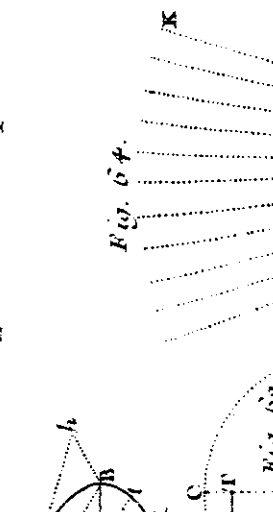
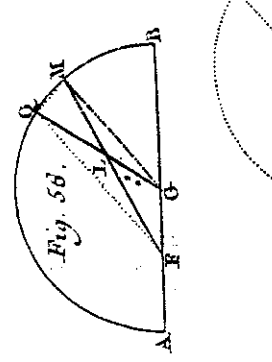
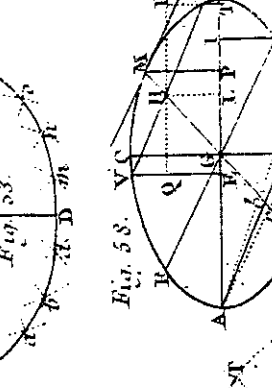
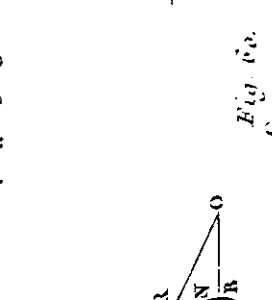
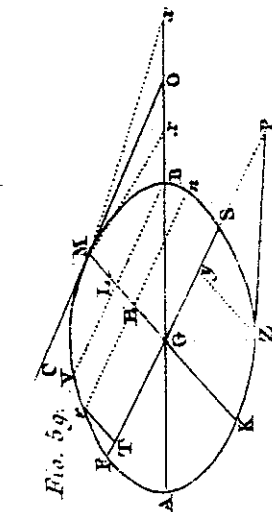
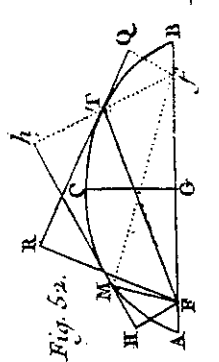
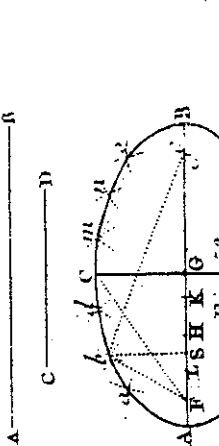
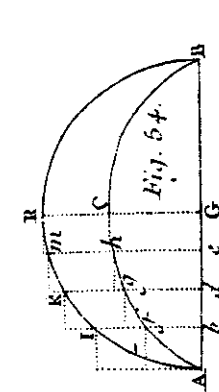
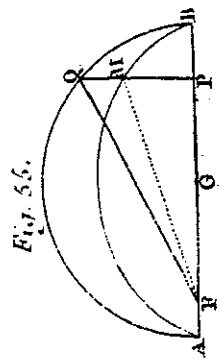


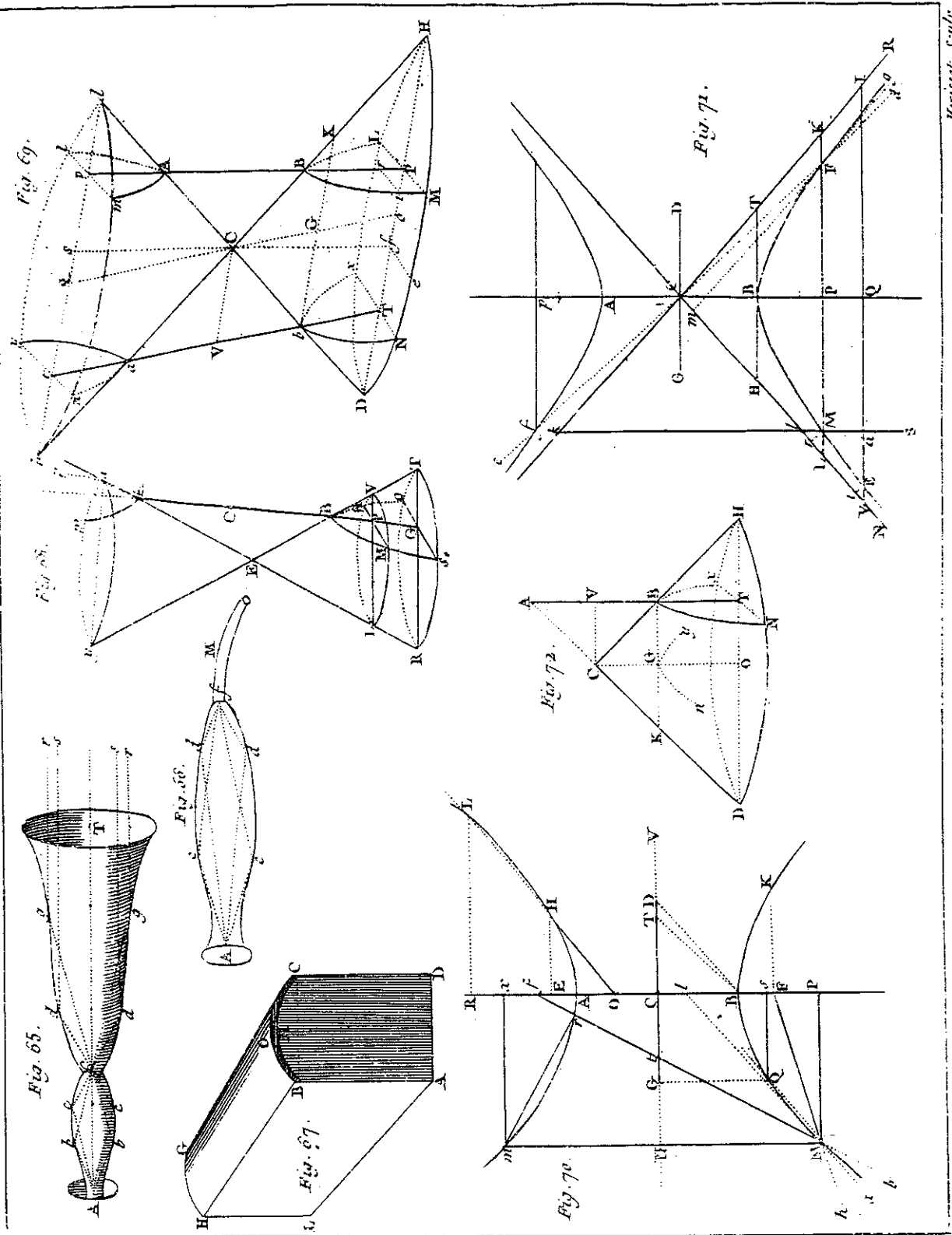
Fig. 36.





A — C — D — B





Archieve Gulp.

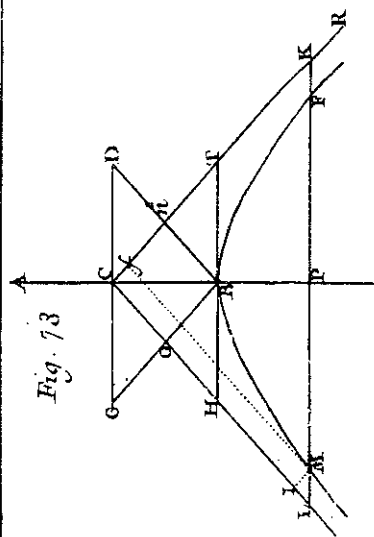


Fig. 75

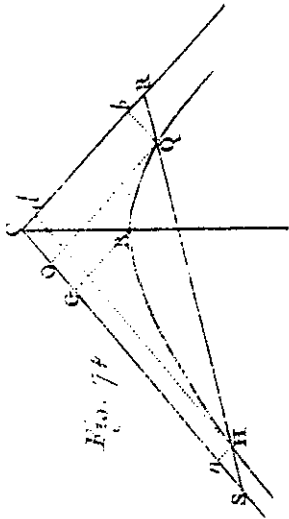
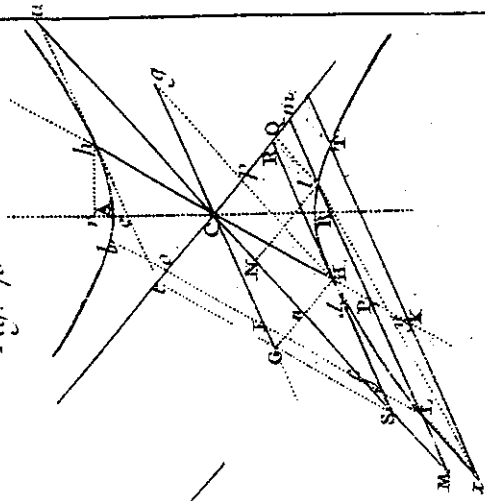


Fig. 74

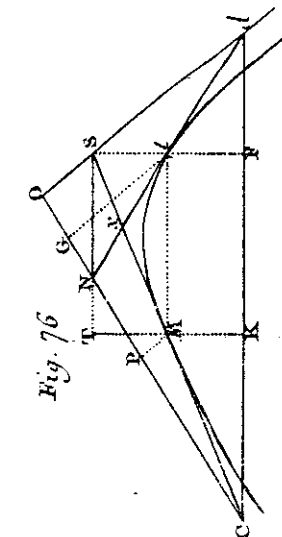


Fig. 76

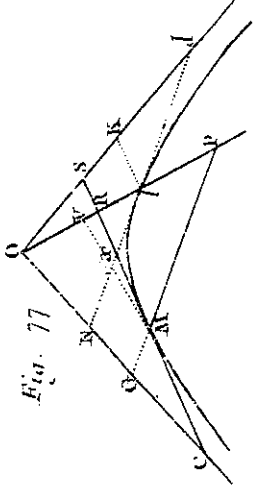


Fig. 77

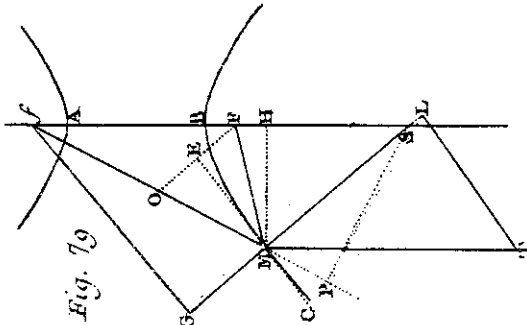


Fig. 79

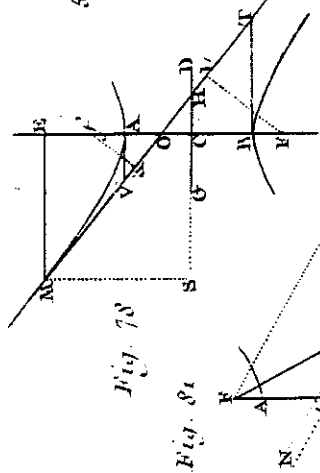


Fig. 78

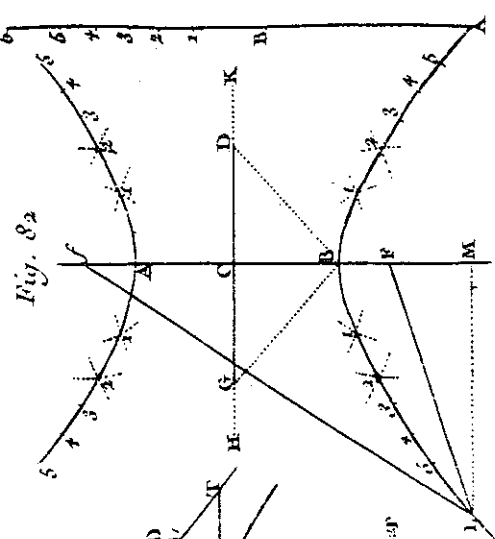


Fig. 82

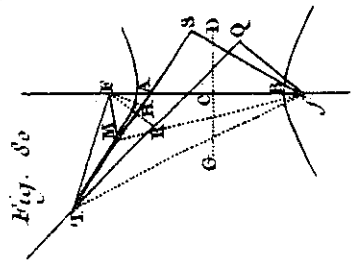
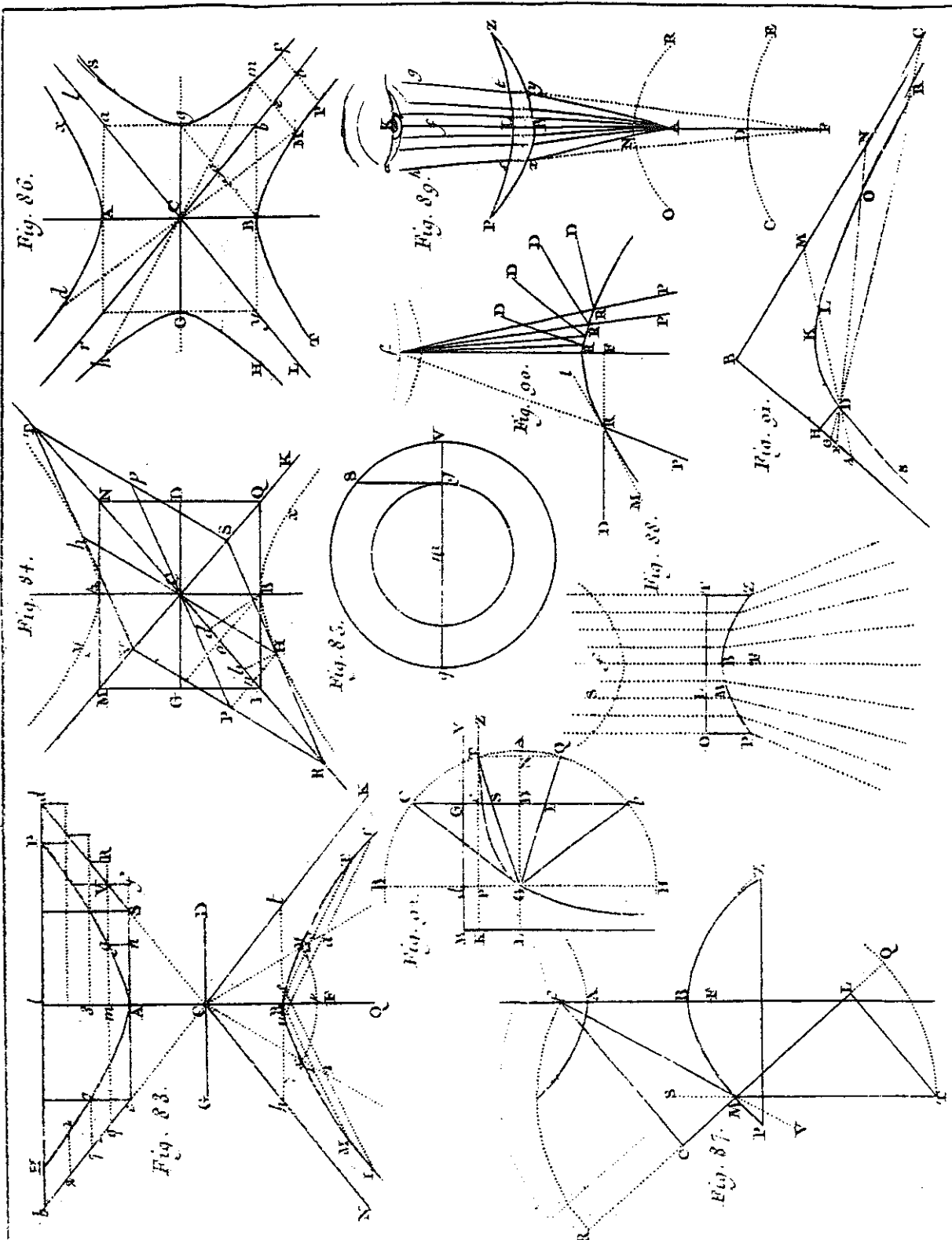


Fig. 80



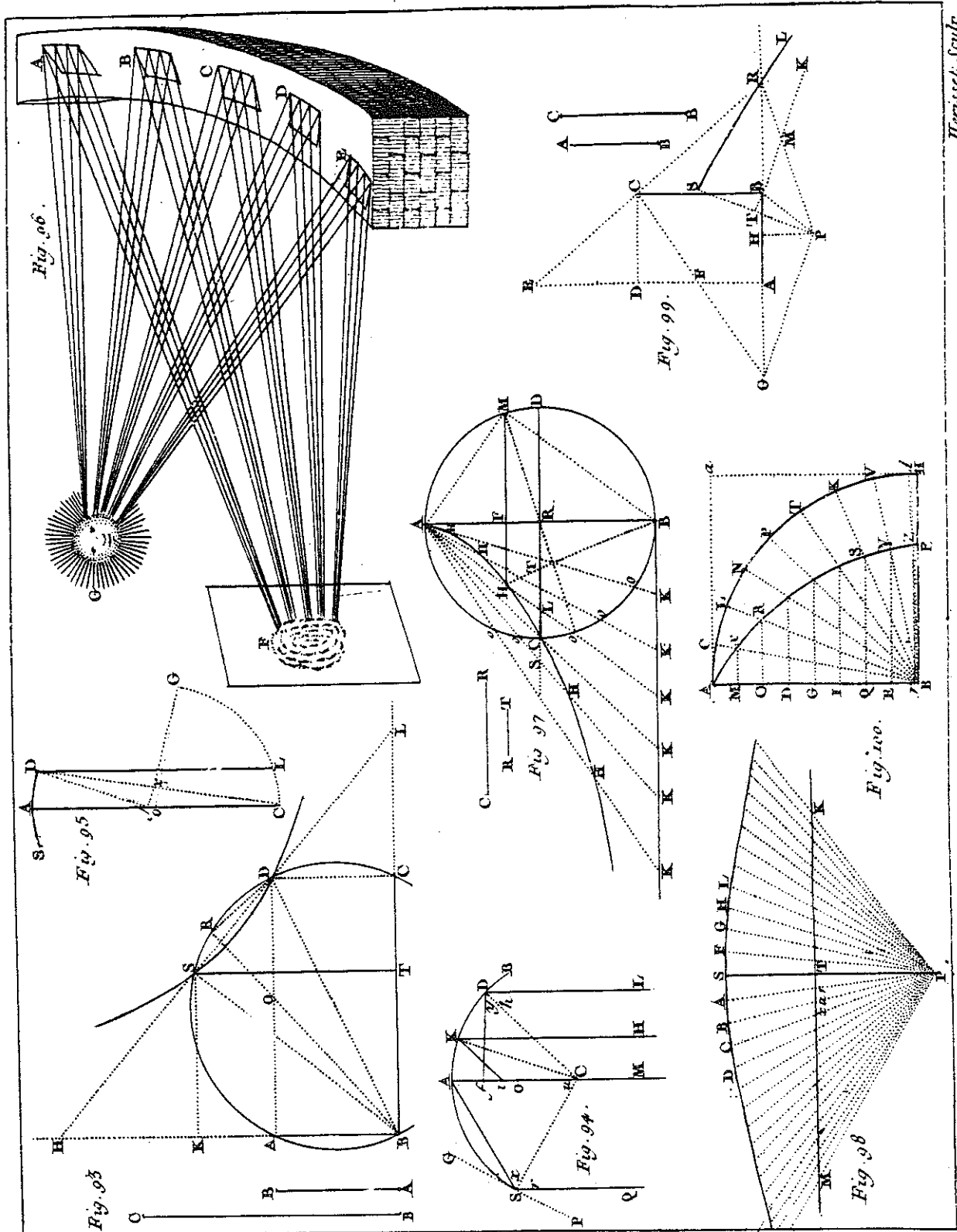


Fig. 103.

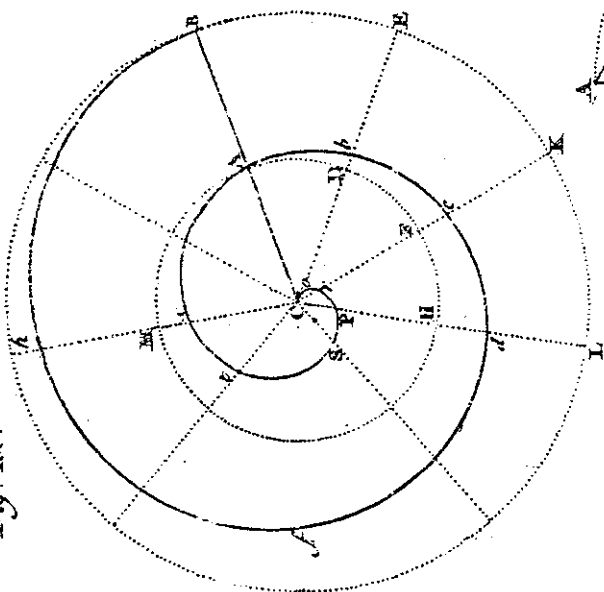


Fig. 104

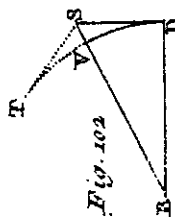
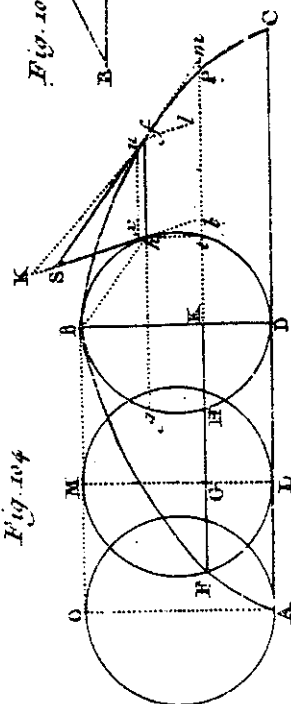


Fig. 105.

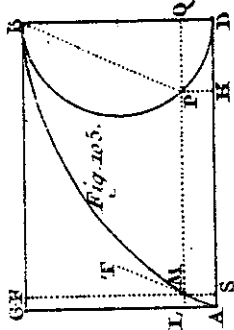


Fig. 106

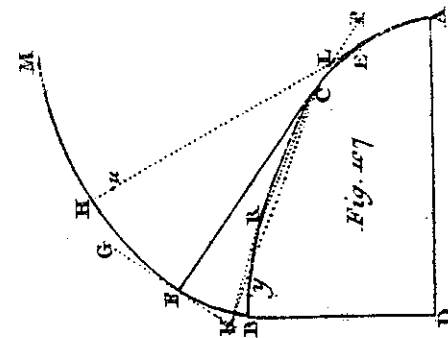
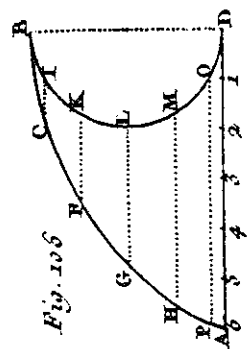


Fig. 107

Fig. 101.

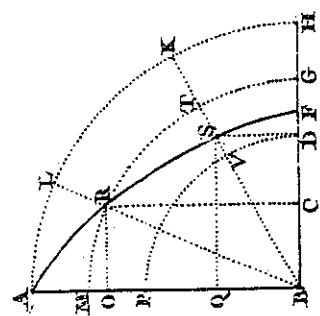


Fig. 102.

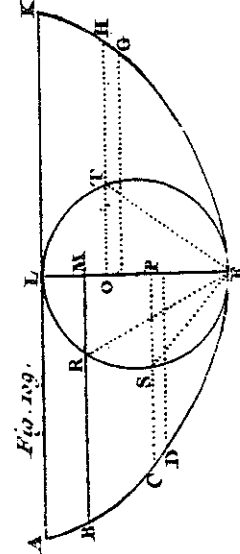
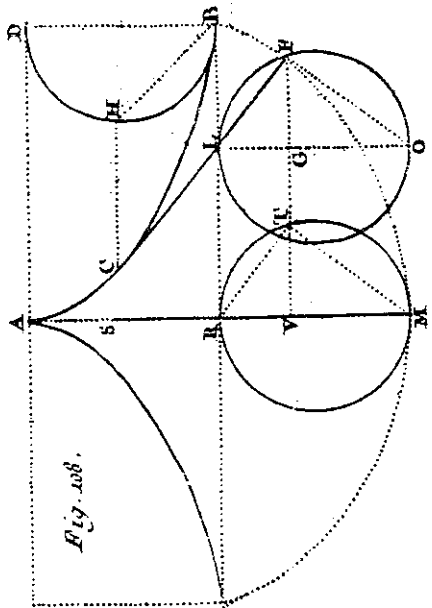


Fig. 108.



Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

<http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html>

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7

Case 7018

2 place Jussieu

75251 Paris cedex 05

