



INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHÉMATIQUES

9
avril 1994

ENSEIGNER LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES AUX FUTURS
PROFESSEURS D'ÉCOLE

PAR D. BUTLEN et M.L. PELTIER

DOCUMENT DE TRAVAIL POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

UNIVERSITE PARIS 7

**ENSEIGNER LA DIDACTIQUE DES
MATHÉMATIQUES AUX FUTURS PROFESSEURS
D'ÉCOLE**

**D. BUTLEN
M.L. PELTIER**

SOMMAIRE

Première partie : L'état de notre réflexion sur l'enseignement de la didactique aux futurs professeurs d'école (D. Butlen)	5
I- INTRODUCTION	5
II- POURQUOI ENSEIGNER LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES EN FORMATION INITIALE	6
1- Quelques questions posées, souvent de façon provocatrice, aux enseignants engagés dans ce type d'enseignement	6
2) Un enseignement de didactique permet de prendre en compte les spécificités du public des futurs professeurs d'école et les spécificités du métier de professeur d'école	6
a) Un enseignement de didactique permet d'optimiser la formation mathématique des futurs professeurs d'école	6
b) Quelques éléments à l'appui de cette première analyse	7
c) Un enseignement de didactique permet de prendre en compte d'autres contraintes	11
d) Un enseignement de didactique permet de repenser les interventions de type pédagogique, de les rationaliser mais aussi de les enrichir	12
3) Un tel enseignement nous paraît a priori efficace	12
III) QUELLES NOTIONS DE DIDACTIQUE DOIT-ON ENSEIGNER ? QUELLES FORMES PEUT PRENDRE CET ENSEIGNEMENT ?	12
1) Les rapports respectifs donnés aux mathématiques, à un enseignement professionnel et de pédagogie générale et enfin à la didactique des mathématiques.	13
2) Degré d'explicitation des notions	14
3) Entrées utilisées pour présenter les différentes notions	14
4) Nature des notions enseignées	15
IV) LES ACTIVITÉS D'OBSERVATION DE CLASSE ET L'ENSEIGNEMENT DE DIDACTIQUE	16
1) Les limites de l'observation directe de classe, en formation des professeurs d'école	16
a) Le poids de la polyvalence du métier de professeur d'école	17
b) L'influence de quelques spécificités du public recruté pour devenir professeur d'école sur les activités faisant intervenir des observations	18
2) Quelques remarques préalables sur l'évolution des pratiques dans la formation des professeurs d'école	18
a) Vers une diversification des activités centrées sur l'observation	18
b) Le statut ambigu de certaines activités	19
3) Les limites de ce dispositif	19

Annexe 1	21
Annexe 2	22
Annexe 3	26

Deuxième partie : Un exemple de situation construite pour la formation en mathématiques et en didactique des professeurs d'école (Marie-Lise Peltier)

27

A- ARGUMENTS POUR UNE ENTRÉE DE TYPE SITUATIONNISTE, ET CONDITION ASSOCIÉES

27

1- Différents niveaux d'intervention de la didactique des mathématiques en formation des professeurs d'école

27

2- Conditions du point de vue mathématique

28

3- Conditions du point de vue didactique

29

4- Quelques caractéristiques de la situation

29

5- La contrainte du temps

30

6- Les questions de reproductibilité

30

B- UN EXEMPLE : SUITE DE SÉQUENCES SUR AIRE ET SYMÉTRIE

31

1- Objectifs

31

2- Déroulement, procédures observées et bilans partiels

32

Première phase

32

Deuxième phase

35

Troisième phase

36

Quatrième phase

37

3- Conclusion

38

Bibliographie

39

L'ÉTAT DE NOTRE RÉFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA DIDACTIQUE AUX FUTURS PROFESSEURS D'ÉCOLE (Denis BUTLEN)

I) INTRODUCTION

Ce texte n'a pas pour objet de présenter des résultats de recherche récente mais il essaie de faire le point sur l'enseignement de la didactique en formation initiale des professeurs d'école. Il reprend certaines idées exposées dans des documents précédents. Ce sera l'occasion de relater les résultats d'un travail de rationalisation de nos propres pratiques enseignantes.

La formation des professeurs d'école, les contenus de cette formation, la place que doit y tenir un enseignement rendant compte de recherches sur l'enseignement des mathématiques est toujours, est à nouveau d'actualité.

Notre but est donc de poser un certain nombre de questions et de soumettre au débat certains éléments de réponse que nous y avons apportés dans notre pratique quotidienne d'enseignant mais aussi dans le cadre de COPIRELEM (Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire).

Ce débat concerne les formateurs de maître du premier degré mais aussi les chercheurs en didactique. En effet, les questions soulevées par un enseignement spécifique de didactique sont non seulement des préoccupations de la noosphère mais aussi des questions adressées au chercheur. Certaines ont fait ou font l'objet de recherches (Monique PEZARD [30], Alain KUZNIAK [27]).

C'est aussi l'occasion de revoir certaines positions avec du recul et de faire le point sur une question conflictuelle.

Nous reprendrons des travaux mais aussi des idées déjà exposées dans d'autres occasions, en particulier dans le cadre d'un exposé au séminaire national de didactique (Paris, avril 1992).

Nous allons préciser deux termes de vocabulaire afin d'éviter toute confusion.

Tout d'abord quand nous employons le terme de didactique des mathématiques, nous pensons évidemment aux notions, aux théories qui sont développées dans la communauté des chercheurs qui s'organise autour de l'École d'été de didactique et de la revue "Recherche en Didactique des Mathématiques". Il est clair que dans le débat actuel, ce n'est d'ailleurs pas nouveau, beaucoup de personnes mettent d'autres notions derrière ce terme.

Une deuxième définition préalable : dans la suite de cet exposé, nous serons amenés à employer le terme de formateur ou d'enseignant formateur, nous précisons tout de suite que nous n'employons ce terme que dans le but de désigner un professeur de mathématiques enseignant à des étudiants en formation. Pour nous, le terme de formateur recouvre le terme d'enseignant. Nous ne l'employons que pour distinguer aisément l'étudiant (futur professeur d'école) du professeur de mathématiques de l'IUFM (PIUFM).¹

¹ PIUFM : professeur enseignant dans un Institut Universitaire de Formation des Maîtres

II) POURQUOI ENSEIGNER LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES EN FORMATION INITIALE ?

1) Quelques questions posées, souvent de façon provocatrice, aux enseignants engagés dans ce type d'enseignement ?

- Est-il possible d'enseigner la didactique des mathématiques en formation initiale ?
- est-ce indispensable ?
- est-ce utile pour les stagiaires ? Est-ce utile pour le formateur ?
- dans quelle mesure est-ce une fuite en avant devant l'impossibilité à enseigner les mathématiques ou du moins une culture mathématique ?
- comment intégrer, concilier enseignement de didactique des mathématiques et formation professionnelle, enseignement de didactique des mathématiques et enseignement des mathématiques ?
- que doit-on enseigner en didactique et quel degré d'explicitation, d'institutionnalisation doit présenter un tel enseignement ?
- Quelle forme doit ou peut prendre cette formation ?
- comment évaluer l'impact d'un tel enseignement sur les conceptions des futurs maîtres ?

2) Un enseignement de didactique permet de prendre en compte les spécificités du public des futurs professeurs d'école et les spécificités du métier de professeurs d'école

Une partie importante de Professeurs d'IUFM¹ du premier degré font intervenir en formation des concepts empruntés à la didactique des mathématiques et ceci, à notre avis, pour plusieurs raisons.

a) Un enseignement de didactique permet d'optimiser la formation mathématique des futurs professeurs d'école

Il n'est pas question ici d'appeler mathématique, tout contenu intervenant dans une formation professionnelle en mathématique. En particulier, nous ne partageons pas du tout l'analyse qui consiste à ne pas séparer mathématique et didactique des mathématiques en formation de professeur d'école. Cette amalgame nous semble dangereux à la fois pour les mathématiques et pour la didactique des mathématiques. Par contre, il est nécessaire de voir comment un enseignement de didactique des mathématiques peut favoriser, redonner du sens à un enseignement de mathématiques. Le formateur doit prendre en compte un premier type de contraintes pour enseigner les mathématiques.

Des contraintes institutionnelles

elles comportent :

Des contraintes horaires : peu d'heures de formation et peu de disponibilité des étudiants

Devant se former dans toutes les matières enseignées à l'école élémentaire, les étudiants n'ont pas la disponibilité horaire suffisante pour faire un réel travail personnel. L'essentiel du travail mathématique se fait pendant les 120-130 heures de formation dont ils disposent.

Des contraintes dues à la place et à la nature des épreuves du concours

Des contraintes dues au rapport au savoir des étudiants

Ce sont en général des étudiants d'origine non scientifique ; ils n'ont, pour beaucoup, pas fait de mathématiques depuis plusieurs années et gardent de cet enseignement un souvenir plutôt négatif. Ils ne sont pas farouchement opposés aux mathématiques mais ils manifestent de grandes difficultés, des lacunes importantes, y compris sur les notions qu'ils vont enseigner. Ainsi, les erreurs faites par ces futurs maîtres sont

¹ Institut Universitaire de Formation des Maîtres

souvent du même type que celles faites par leurs futurs élèves.

Comme beaucoup d'étudiants en difficulté en mathématiques, les futurs professeurs d'école n'ont pas des connaissances très fiables, bien organisées en réseau, prenant du sens dans plusieurs cadres.

Le formateur doit donc :

- combler des lacunes et faire dépasser des obstacles en s'appuyant sur une analyse rationnelle de l'enseignement, par exemple sur des analyses de procédures et d'erreurs montrant des régularités observées dans les recherches didactiques

- réorganiser les connaissances minimales des étudiants en vue d'un enseignement à l'école élémentaire ; cela suppose qu'ils maîtrisent les contenus enseignés mais aussi qu'ils puissent comprendre les articulations existant entre ces différentes notions et leurs prolongements éventuels niveau collège. Cela nécessite donc une mise en réseau de leurs connaissances.

Un premier travail de l'enseignant-formateur consiste donc, dans un minimum de temps, à réorganiser les connaissances de l'étudiant, à combler certaines lacunes, à surmonter des obstacles dus à un passé scolaire mathématique difficile.

Notre expérience professionnelle mais aussi les analyses des pratiques effectives des formateurs (voir BUTLEN D. [13] et KUZNIAK A. [27]) nous amènent à faire l'hypothèse que, dans un premier temps du moins, le PIUFM¹ ne peut enseigner des mathématiques qui ne soient pas ancrées sur l'enseignement élémentaire ou qui ne posent pas des problèmes directement liés à leur enseignement. Le professeur ne peut pas faire trop souvent et trop longtemps des mathématiques pour elles-mêmes.

C'est une contrainte incontournable. En effet, nous avons pu constater que peu de collègues pratiquent un enseignement centré sur l'apprentissage des mathématiques. Les étudiants n'acceptent pas ce type de pratiques en formation. Alain KUZNIAK [27] explique ce rejet de ces stratégies de formation qu'il appelle culturelles de la façon suivante : *"d'une certaine façon, elles ne respectent pas le contrat qui fonde les IUFM et qui suppose*

une spécificité du savoir lié à l'enseignement . En tant que telles, elles apparaissent comme le négatif et aussi comme un point d'opposition aux stratégies qui prennent en compte la professionnalisation"

- intervenir sur les représentations des mathématiques des étudiants

- ancrer son enseignement des mathématiques sur l'enseignement à l'école élémentaire afin de tenir compte de la nature professionnelle de cette formation.

b) Quelques éléments à l'appui de cette première analyse

Cette analyse du rôle épistémologique original joué par la didactique pour faciliter l'enseignement des mathématiques s'appuie sur trois constatations :

- l'évolution constatée des pratiques de certains enseignants d'école normale

- l'analyse des comptes rendus ou propositions d'activités intégrant un cours spécifique de didactique de ces enseignants

- les travaux passés ou en cours : en particulier les thèses de Monique Pezard [30] et de A. Kuzniak [27].

L'évolution de l'enseignement en école normale peut être à ce titre révélatrice.

Il y a un peu plus d'une vingtaine d'années, disons trente ans, les professeurs d'école normale considéraient que leur rôle était essentiellement de faire faire des mathématiques à des personnes qui allaient en enseigner, et de faire le maximum pour élever leur niveau. Cet enseignement de mathématiques (niveau collège) visait à remédier à un enseignement vécu difficilement au collège ou au lycée, à assurer un minimum de connaissances leur permettant de maîtriser les notions mathématiques de l'école élémentaire.

Il est nécessaire de relativiser cette appréciation, en fonction du temps. Le recrutement d'étudiants non scientifiques est particulièrement manifeste depuis le recrutement post DEUG. Auparavant, les étudiants possédaient souvent un bac

¹ Professeur d'IUFM

scientifique, ce n'était pas pour autant des étudiants brillants en mathématiques.

Les enseignants formateurs s'intéressaient certes à la pratique du métier d'instituteurs, mais celle-ci était avant tout du ressort des "maîtres d'application", conseillers pédagogiques auprès desquels les normaliens devaient apprendre les techniques pédagogiques.

Malgré de nombreuses tentatives pour mieux adapter le niveau et le type de mathématiques enseignées, il a fallu modifier cette conception : d'une part les normaliens exprimaient leur désintérêt pour une formation qui leur paraissait trop coupée des aspects professionnels du métier, d'autre part, aucune corrélation évidente ne leur apparaissait entre les connaissances mathématiques acquises et la capacité à organiser efficacement un enseignement de mathématiques dans les classes. Là encore, cette appréciation est fondée sur de nombreux témoignages d'anciens PEN¹. Ces témoignages en particulier mettent l'accent sur la nécessité de construire une formation cohérente liant enseignement de mathématique et observation de pratiques professionnelles.

Les professeurs d'école normale évoluèrent alors vers une conception plus "pédagogue" de leur travail : tout en continuant à essayer d'élever le niveau mathématique des instituteurs, ils s'efforcèrent de mettre davantage l'accent sur le lien effectif avec le terrain. Ils essayèrent d'analyser et de comparer des situations de classe de l'école primaire, de façon à pouvoir présenter aux normaliens les meilleures réalisations en les incitant à les réutiliser, en les encourageant à l'innovation pédagogique. Pour une minorité d'entre eux, la didactique des mathématiques leur servait alors d'idéologie (voir ci-dessous), voire de référence épistémologique.

Nous allons préciser ce que nous entendons par idéologie. Ce sont de grandes idées, des principes, des éléments de théories non formalisés qui permettent à ces formateurs de proposer des innovations même si leur efficacité n'est encore pas démontrée, de construire leur stratégie

d'enseignement et de formation, de prendre des décisions locales, ponctuelles, à brûle pourpoint par exemple quand ils sont amenés à porter un jugement sur leur élèves en stage en situation.

Ce sont des convictions non forcément réfléchies ou formulées explicitement, par exemple :

- première conviction : "les mathématiques servent à résoudre des problèmes"

- deuxième conviction : "il ne faut pas reproduire l'enseignement précédent"

- troisième conviction : "on apprend à partir d'actions"

- quatrième conviction : "il faut travailler en groupe, il faut des situations de communications..."

Ce fonctionnement peut se comprendre à travers l'image du "militant pédagogique".

Sans être nul, l'impact de ce type de formation était cependant limité.

Il apparaissait en effet que plus que les "bonnes" idées qui pouvaient leur être ainsi suggérées, c'étaient les conceptions que se faisaient les normaliens des mathématiques et de leur enseignement qui conditionnaient leurs pratiques d'enseignement.

Ainsi, les formateurs sont unanimes pour constater qu'une personne inexpérimentée, a fortiori non formée, mise dans la situation d'enseigner, a tendance à reproduire l'enseignement qu'elle a vécu en tant qu'élève, même si celui-ci ne lui permettait pas d'apprendre.

De plus, notre expérience professionnelle construite à partir de nombreuses observations (certes non préparées, non "contrôlées" comme dans le cadre d'une recherche) nous fait dire qu'il est très difficile pour un stagiaire de préparer et donc de gérer des activités de type situation-problème, voire même de les envisager, s'il ne peut s'appuyer sur une expérience personnelle vécue en tant qu'élève de l'apprentissage de certains éléments de savoir à partir d'activités de ce type.

Cette difficulté est évidemment aggravée si, de plus, l'étudiant est convaincu, que les mathématiques ne peuvent s'apprendre autrement que par un enseignement de type "j'apprends, j'applique".

Le transfert espéré par les formateurs ne pouvait donc pas ou du moins très peu se faire.

¹ Professeur d'école normale (PEN)

Les professeurs d'école normale s'efforcèrent donc d'intervenir sur les conceptions des futurs enseignants. En leur proposant des situations-problèmes intéressantes, relativement proches des notions enseignées à l'école élémentaire, ils essayèrent de changer leurs rapports aux mathématiques. Cet enseignement débouche sur des institutionnalisations à la fois mathématiques et de type métamathématique (qu'est-ce que les mathématiques, qu'est-ce que prouver ?...). Le transfert à l'enseignement à l'école reste à la charge des normaliens, mais il ne se faisait pas toujours aussi facilement.

Il y a quelques années s'est produite une nouvelle évolution. Des professeurs d'école normale s'aperçoivent donc qu'ils obtiennent ainsi des résultats satisfaisants concernant un relatif changement des conceptions sur les mathématiques, mais que celui-ci ne se traduit pas dans les pratiques. Ils prennent conscience en même temps du développement des recherches en didactique, ces recherches se sont développées dans les universités, sans liens étroits avec les écoles normales. Les IREM assurent toutefois le contact entre ces chercheurs et les formateurs.

Certains PEN vont alors essayer d'intégrer dans leur enseignement les résultats de ces travaux. Un certain nombre d'entre eux vont d'ailleurs s'engager dans des recherches de didactique. Ainsi, un certain nombre de thèses de didactique des mathématiques sont soutenues, à partir de 1984, surtout dans le cadre de l'équipe de didactique de Paris VII. La thèse de troisième cycle de M. Pezard (directeur de recherche : Aline Robert) portant sur la formation des instituteurs, est à ce titre significative de cette nouvelle étape.

Cette évolution est loin d'être achevée mais elle est indéniable et symptomatique des besoins ressentis par les formateurs. Elle est significative d'un effort pour théoriser grâce aux apports de la didactique la nécessaire liaison théorie / pratique.

C'est une des spécificités de la professionnalisation de l'enseignement en école normale.

Cette évolution est très lente, le premier document édité par la COPIRELEM¹ spécifiquement consacré à l'enseignement de la didactique date de l'été 1988 [1].

Il n'existait auparavant que des contributions personnelles à certains actes de colloques des professeurs d'école normale et, à notre connaissance, qu'une seule thèse de didactique traitant de ce sujet : celle de Monique Pezard. Cette dernière ne portant que sur l'enseignement de la proportionnalité à des élèves-instituteurs.

Ainsi la didactique ne sert plus seulement d'idéologie aux professeurs d'école normale, ils ressentent la nécessité de l'enseigner. Il leur apparaît nécessaire d'explicitier leur choix, de présenter les outils qui leur permettent d'une part d'analyser certains phénomènes d'enseignement et d'autre part de fixer les lignes directrices d'une formation qui leur paraît ainsi plus cohérente (même si ces dernières ne sont pas pour autant totalement explicites pour les étudiants)

Cette analyse semble confirmée, du moins dans ces grandes tendances, par les récents travaux d'Alain Kuzniak.

Il reste à vérifier si cette évolution est largement partagée par les formateurs du premier degré.

L'analyse des comptes rendus ou propositions d'activités intégrant un cours spécifique de didactique d'enseignants travaillant avec la COPIRELEM

Comment les professeurs d'IUFM intervenant dans le premier degré intègrent-ils un enseignement de didactique en formation initiale ?

Ne pouvant pas observer directement leurs pratiques, nous devons pour cela regarder leurs productions (témoignages de formation, articles relatant diverses activités, propositions d'activités....), ou bien faire passer des questionnaires portant sur leurs pratiques ou bien encore analyser les plans de formation des IUFM.

¹ COPIRELEM : commission permanente des IREM sur l'enseignement élémentaire

Des travaux de ce type ont été fait ou sont en cours :

- Alain Kuzniak [27] a étudié l'évolution des stratégies de formation au cours des 20/30 dernières années. Il distingue trois grands types de stratégies de formation basées soit sur la monstration, soit sur l'homologie, soit enfin sur la transposition. Il l'hypothèse qu'une formation performante devrait intégrer ces trois modèle de formation.

- Catherine Houdement et Marie-Lise Peltier travaillent sur ce sujet actuellement.

- nous avons, pour ma part, en vue de cet exposé analysé brièvement, les productions portant le qualificatif "didactique des mathématiques" de la COPIRELEM, depuis quelques années, en particulier les actes des colloques des dernières années et les actes des stages de didactique.

Nous avons essayé de regarder, en particulier, pour les actes de Cahors et Pau [8] [9] et pour certains articles des actes des colloques, quels étaient les objectifs poursuivis par les auteurs. Cette classification permet de dégager certaines tendances.

Nous signalons tout de suite que beaucoup d'articles essaient de remplir plusieurs objectifs.

En fait, on peut effectuer plusieurs tris de ces 92 textes ; ces contributions à différents actes de colloques ou stages sont courts (3 à 10 pages).

La didactique enseignée explicitement ou non est essentiellement utilitaire (ce ne sont pas des cours de DEA ayant pour but de former des chercheurs en didactique, 5 textes à peine correspondent à cet objectif (6%) et ils s'adressent aux enseignants-formateurs).

Cette utilité est multiple :

- intervenir prioritairement sur les représentations des étudiants sur les mathématiques ou faciliter un apport d'informations ou des apprentissages mathématiques : 39 sur 92 (42%).
Ainsi, Hervé Péault [8], voir annexe 1, résume l'activité "la vache et le paysan"

par : *"à partir de la résolution d'un problème, inviter les participants à se convaincre mutuellement de la justesse de leurs solutions. L'activité et le débat qui suit permettent d'aborder les thèmes de la résolution de problèmes, de la démonstration, de l'analyse d'erreurs, ainsi éventuellement que celui des situations additives."*

- donner des outils d'analyse et de réflexion sur les pratiques professionnelles : 47 / 92 (51%).

Ainsi, la situation proposée en annexe 2 à pour but, dans le cadre d'une analyse de préparation de séquence, de faire fonctionner certains outils mis au point par la didactique des mathématiques (analyse a priori, variables didactiques, jeu de cadres...).

- donner des informations aux futurs professeurs d'école sur l'enseignement d'une notion à l'école élémentaire : 38/92 (41 %). Ce sont souvent des présentations de résultats de recherche ou des résumés d'ingénieries.

On constate aussi une pratique générale : la double institutionnalisation mathématique et didactique ; la quasi totalité des textes se proposant une introduction de concepts didactiques s'appuient sur l'étude par les étudiants d'une notion mathématique et visent aussi un apport d'informations liées à l'enseignement dans ce domaine.

La part des contributions portant sur l'observation (et / ou l'auto-observation) directe de pratiques professionnelles est relativement faible :

- 33% d'analyse ou de construction de séquences

- 29% d'activités intégrant une observation effective (directe ou différée)

Nous constatons toutefois très peu de descriptions d'activités portant exclusivement sur l'observation directe des classes, souvent réduites à des fiches d'observation, à des témoignages très généraux ou à des approches problématiques théoriques.

ensemble d'activités sur un thème enseigné à l'école élémentaire .
Elles n'ont pas forcément un statut didactique mais relèvent plutôt des sciences de l'éducation...

toutes les disciplines, de ce fait, il leur est
Cela semble conforter l'idée d'une "pratique silencieuse" (Y. Chevallard [14]).

Tableau n°1 : analyse des derniers textes écrits sous la Direction de la COPIRELEM ou de l'IFM de Grenoble

renseignements sur les contributions	entrée didactique privilégiée				Études des outils pédagogiques ou des pratiques professionnelles			mise en situation mathématique : agir sur les représentations
	mise en situation didactique : analyse ou construction de séquences, de situations	exposé de didactique à propos d'un concept de didactique	autre	total	activités d'observation directe	autre	total	
total des textes (actes de colloques, université d'été...)	17	9	18	28	18	28	27	9
pourcentages (sur 33 contributions étudiées)	52%	27%	55%	85%	55%	85%	82%	27%
total des textes (actes de Cahors)	7	4	12	25	6	12	11	13
pourcentages (sur 29 contributions étudiées)	24%	14%	41%	86%	21%	41%	38%	45%
total des textes (actes de Pau)	6	2	6	23	3	7	9	17
pourcentages (sur 30 contributions étudiées)	20%	7%	20%	77%	10%	23%	30%	57%
total de tous les textes (92)	30	15	36	76	27	47	47	39
pourcentages (sur 92 contributions étudiées)	33%	16%	39%	83%	29%	51%	51%	42%

Les travaux passés ou en cours : en particulier les thèses de Monique Pezard, thèse de A. Kuzniak

Nous avons déjà présenté les travaux de A. Kuzniak. La thèse de Monique Pezard met l'accent sur la nécessité d'une double institutionnalisation, ce qui est une façon de ne pas séparer didactique et mathématique tout en distinguant ces deux aspects de la formation.

c) Un enseignement de didactique permet de prendre en compte la polyvalence du métier d'instituteur

Les professeurs des écoles doivent enseigner (pour encore quelques années)

nécessaire d'unifier le plus possible leurs interventions. Ils ressentent et expriment le besoin d'un "ciment culturel ou pédagogique ou épistémologique".

Cette question a reçu, du moins dans le dernier plan de formation étiqueté école normale (Chevenement - 1985), une réponse institutionnelle presque caricaturale : un programme de 250 heures était prévu et assuré par les philosophes qui comprenait toute la philosophie, toute la psychologie, toute la sociologie ...

Un enseignement d'éléments de didactique des mathématiques va pouvoir s'inscrire d'une façon originale dans ce cadre. En effet, si il permet une mise à distance par rapport aux pratiques, il souligne la nécessité d'une entrée disciplinaire et de ce fait relativise les tendances exprimées ci-

dessus et les discours trop généraux éventuellement rencontrés par les étudiants sans pour autant parcelliser davantage la formation.

La formation en E.N, du type mise à niveau disciplinaire et pédagogie de cette discipline + formation générale en psycho-pédagogie n'est pas à notre avis unifiante et n'est pas ressentie comme cela par les élèves-instituteurs, car elle ne s'appuie pas sur une épistémologie des disciplines ou sur les spécificités de leur enseignement. Elle risque vite de se placer au niveau du discours généraliste ou plus exactement d'être ressentie comme telle par les formés.

Le problème reste toutefois presque entier car il n'existe pas actuellement de didactique générale voire de théories générales des apprentissages ; de plus aucun épistémologue interrogé à ce propos n'envisage actuellement une épistémologie unifiante des diverses disciplines pouvant cimenter une pratique enseignante polyvalente.

Néanmoins, un enseignement d'éléments de didactique des mathématiques devrait contribuer à resituer, par une prise en compte de la nature du savoir enseigné, certains apports de la psychologie, philosophie. En effet, les recherches en didactique utilisent souvent ces différentes disciplines qui se situent de ce fait en amont.

d) Un enseignement de didactique permet de repenser les interventions de type pédagogique, de les rationaliser mais aussi de les enrichir

En effet, cet enseignement permet de :

- rationaliser certaines prises de position du formateur quasi militantes jusqu'à présent ; cela est particulièrement sensible lors de l'exposition d'ingénieries, le formateur peut alors justifier certains choix, expliciter certains éléments de théories ayant conduit à la construction de certaines situations. Ainsi, cela lui permet de dépasser la seule présentation d'innovations
- donner des outils pour expliciter certains choix pédagogiques à court terme mais aussi à moyen terme par l'explicitation de

phénomènes de transposition didactique et de régularités (voir annexe 2)

- intervenir de façon raisonnée sur les représentations du métier

- mettre en lumière des régularités dans la formation elle-même, certains témoignages de PIUFM figurant dans les textes étudiés précédemment illustrent bien cet aspect. C'est aussi le cas de la contribution de Pascale Masselot intitulée "*Exemple d'utilisation de documents*" ("Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques", tome 3, actes du stage national de Colmar, avril 1994, pp 79-84) .

3) Un tel enseignement nous paraît a priori efficace

L'analyse ci-dessus montre un certain nombre d'avantages a priori de ce type de dispositif de formation.

Il faut rajouter à cela d'autres arguments :

- une écoute bienveillante des étudiants du fait de leur passé conflictuel et de leur regard naïf sur l'enseignement
- une neutralité (plutôt bienveillante) institutionnelle : manuels, textes officiels, impact sur les IEN...

III) QUELLES NOTIONS DE DIDACTIQUE DOIT-ON ENSEIGNER ? QUELLES FORMES PEUT PRENDRE CET ENSEIGNEMENT ?

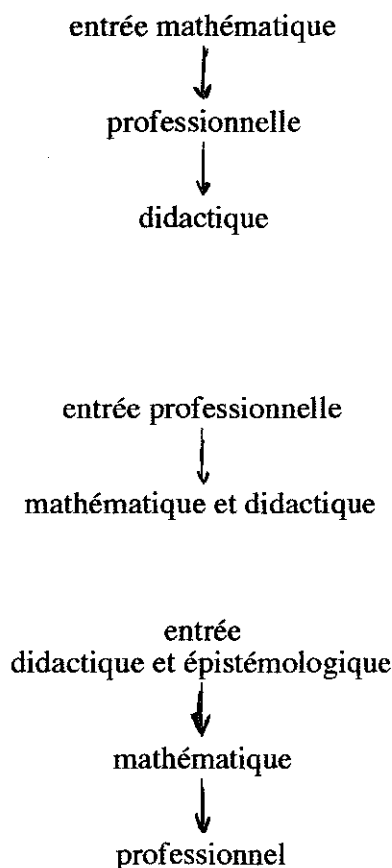
Les divers enseignements intégrant des notions didactiques se distinguent par plusieurs critères :

- les rapports respectifs donnés aux mathématiques, à un enseignement professionnel et de pédagogie générale et enfin à la didactique des mathématiques
- le degré d'explicitation des notions
- les entrées utilisées pour présenter les différentes notions

- la nature des notions enseignées

1) Les rapports respectifs donnés aux mathématiques, à un enseignement professionnel et de pédagogie générale et enfin à la didactique des mathématiques.

On peut ainsi distinguer plusieurs stratégies d'enseignement se regroupant autour de trois pôles, présentés ici de façon caricaturale à l'aide de trois schémas :



Essayons d'explicitier ces pôles à partir de l'exemple de l'enseignement des décimaux. Prenons le premier schéma. Certains collègues (voir Marianne Frémin, compte rendu d'activités avec des élèves-professeurs des écoles de première année, actes du stage de Pau [9]) commencent par proposer aux élèves-instituteurs un certain nombre de problèmes, de situations mathématiques qui vont permettre de rappeler des notions mathématiques sur les nombres et sur les décimaux en particulier, qui vont aussi permettre de réorganiser les connaissances des étudiants et d'analyser

certaines conceptions erronées de ces derniers sur les nombres. Dans un second temps, des questions à propos de l'enseignement des décimaux sont soulevées à partir d'une approche "naïve" (observations non préparées en stage, témoignages de tentatives d'enseignement de stagiaires voire même d'instituteurs chevronnés). Enfin dans un troisième temps, le formateur essaie de faire prendre du recul par rapport à ces questions, présente des résultats de recherche en didactique (faux modèles, ingénieries...) et éventuellement développe certains éléments plus généraux de théories didactiques (par exemple dialectique outil-objet et jeu de cadres ou bien situations fondamentales...)

Ces différents temps peuvent permuter, toutefois cela peut changer la nature de certaines institutionnalisations, en particulier de type didactique.

Ainsi l'entrée "professionnelle" (deuxième schéma) peut amener le formateur à montrer comment des connaissances mathématiques peuvent éclairer certaines questions professionnelles et comment certaines études didactiques apportent, elles aussi, des éléments de réponses. Cette démarche est souvent utilisée lors des activités débutant par une analyse comparée de manuels (voir [9] page 161, la contribution de J. Bolon, M. Frémin et N. Labrunie).

On peut aborder le sujet d'une tout autre façon. Par exemple, il peut se concevoir que l'on a développé dans un cours de didactique des notions générales sur la théories des situations et la notion d'obstacle par exemple (notions présentées à partir d'exemples) et que l'on va s'appuyer sur cette initialisation pour construire un enseignement de didactique portant sur les décimaux qui va s'intégrer dans ce cadre (troisième schéma, voir à ce propos [9] la contribution de J. Briand et G. Vinrich, enseignement des rationnels et des décimaux).

Il est clair que les institutionnalisations des notions didactiques peuvent changer. Si dans le dernier schéma, elles font l'objet d'institutionnalisations fortes et de feedback, dans les deux premiers, les mêmes notions peuvent ne faire l'objet que

d'institutionnalisations locales (dans le cas contexte des décimaux) voire ne fonctionner que comme outils plus ou moins explicites.

De plus la didactique des mathématiques fonctionne de façon plus ou moins implicite dans le cas des deux premiers schémas pour les aspects mathématiques. Cette intervention "cachée" (outils de quelques ingénieries ou bien référence idéologique) a eu tendance au cours des années, pour moi, à devenir de plus en plus explicite.

Cette classification en trois schémas est très caricaturale car on peut osciller, hésiter ou plutôt choisir telle ou telle entrée selon la notion mathématique visée (enseignée à l'école primaire). Il existe quand même une différence importante entre les deux premiers schémas qui visent à présenter certaines notions didactiques comme des outils pour essayer de répondre à des questions professionnelles et le dernier qui commencent par présenter certaines notions didactiques et ensuite qui montrent comment et où on peut les utiliser.

2) Degré d'explicitation des notions

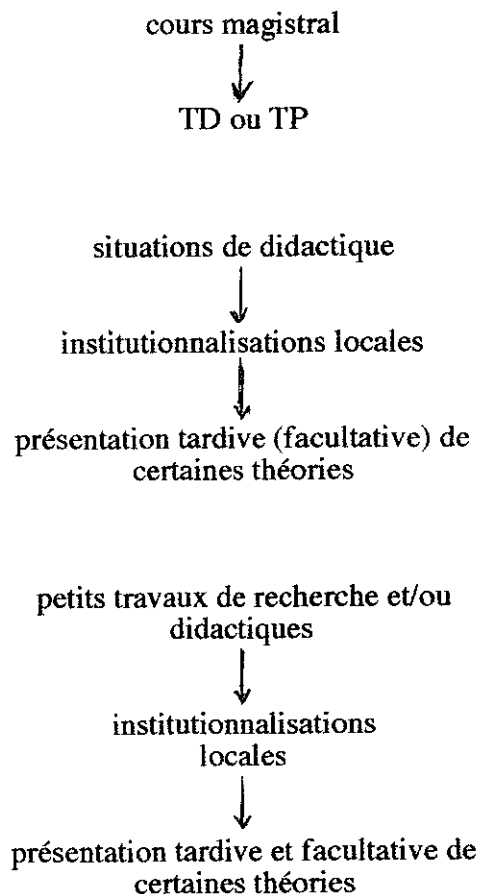
On peut classer, là encore de façon un peu caricaturale, les enseignements de didactique, en fonction du degré d'explicitation des notions utilisées. On peut ainsi distinguer :

- un enseignement où la didactique fonctionne comme outil implicite ou très rarement explicité, et se réduisant à l'exposé dans un langage simple de régularités, d'exemples d'ingénieries.
- un enseignement où la didactique fonctionne comme un ensemble d'outils explicités occasionnellement (petites institutionnalisations)
- un enseignement où la didactique fonctionne comme un ensemble d'outils davantage explicités s'appuyant sur des situations construites en vue de leur introduction et faisant intervenir plusieurs type d'institutionnalisations (locales suivies le plus souvent d'exposés plus complets)
- un enseignement intégrant une présentation de concepts didactiques en

tant qu'objets d'enseignement destinés à fonctionner comme outils d'analyse et de construction d'ingénierie

3) Entrées utilisées pour présenter les différentes notions

On peut constater trois entrées différentes dans un cours spécifique de didactique qui correspondent aux trois schémas ci-dessous :



Pour notre part, nous adoptons le plus souvent le second schéma. Marie-Lise Peltier détaillera sur un exemple les raisons de ce choix, dans la seconde partie. Ce choix n'est pas toujours partagé, ainsi J. Portugais, dans sa thèse sur l'enseignement de la notion d'erreur en formation initiale [32], s'appuie plutôt sur un schéma proche du premier, il en va de même pour les collègues de Bordeaux.

Nous avons été conduits à abandonner le troisième schéma, correspondant à une lecture "recherche" d'un enseignement de didactique, mieux adapté à un public

d'enseignants expérimentés, particulièrement de collèges ou lycées, ayant décidé volontairement de faire un pas de côté par rapport à leurs pratiques professionnelles.

Signalons que cet abandon s'appuie d'une part sur la constatation d'un antagonisme entre l'attitude de l'enseignant devant prendre des décisions rapides à partir de paris et celle du chercheur qui adopte une attitude plus objective et plus détachée par rapport à l'acte d'enseigner et d'autre part sur l'échec relatif de l'expérience des mémoires professionnels en formation de professeurs d'école.

4) Nature des notions enseignées

Il nous semble nécessaire d'étudier cette question à partir du type d'activités de formation envisagée.

On peut distinguer plusieurs types d'activités, citons entre autres :

(1) les réorganisations de connaissances mathématiques, éventuellement les apprentissages de nouveaux savoirs, les réflexions épistémologiques sur ces connaissances et sur leur fonctionnement.

(2) les comparaisons de cursus d'enseignement de l'école élémentaire, les études ou présentations d'ingénieries, les explicitations des obstacles ou difficultés rencontrées lors de l'enseignement d'un champ conceptuel, les exposés de régularités concernant les apprentissages (procédures, erreurs...)

(3) les analyses de documents pédagogiques, de matériels mis à la disposition des enseignants

(4) les analyses plus ponctuelles de séquences d'enseignement limitées dans le temps, les études a priori de situations

(5) les analyses de pratiques professionnelles basées sur des observations directes de classes

(6) les constructions, conduites de séquences de classes dans le cadre de stage tutelle ou en responsabilité et les "auto

observations" ou "auto analyses" de l'étudiant en situation.

Ces activités ne sont pas du même ordre, elles peuvent faire intervenir des éléments de didactique des mathématiques mais cette intervention est différente selon les cas.

En fait, nous faisons l'hypothèse que le degré d'explicitation des outils didactiques mobilisés à ces occasions dépend de leur pertinence, de leur domaine de validité, de leur degré de généralisation (contrat didactique, typologie des situations...), de leur fréquentation par les étudiants en tant qu'outil implicite...

Ainsi, des activités de réorganisation des connaissances mathématiques des étudiants peuvent s'accompagner de la présentation des notions de concept outil, ou concept objet, de cadres (voir la seconde partie de cet ouvrage).

Les activités décrites ci-dessus en (4) et (5) peuvent donner lieu à des institutionnalisations locales d'éléments de théorie des situations (voir annexe 2).

Par contre, il n'est pas forcément utile, dans le cas d'activités de type (3), de présenter dans le détail des éléments de transposition didactique, un fonctionnement implicite peut suffire.

Notons enfin, que dans les documents analysés en II-2-b (pp 9 à 11) :

- la typologie des situations est souvent présentée à partir d'analyse d'observations, de montage, de comptes rendus de séquences de classe mais aussi à partir de situations de didactique (Hervé Péault, "Division en formation initiale" colloque de la COPIRELEM de Rouen [5])

- il en est de même pour les notions de situations didactiques et a-didactiques

- le contrat didactique fait surtout l'objet d'exposé illustré par des morceaux d'analyse de comptes rendus de séquences ou par des exemples

- les notions de variables didactiques et analyse a priori se prêtent à tous les types d'entrées

- l'analyse en terme d'outil et d'objet du fonctionnement des concepts

mathématiques ainsi que la notion de cadre sont présentées soit sous la forme d'un exposé illustré d'exemples (cela provient sans doute du caractère général de ces notions), soit développées à partir d'analyse de manuels, d'analyse d'exercices (quels sont ceux où le concept fonctionne comme outil, comme ? Dans quel(s) cadre(s) chaque exercice se place-t-il ? Y a-t-il changement de cadres... ?) ou de situations (voir seconde partie)

- les notions de dévolution ou d'institutionnalisation peuvent se construire à partir d'exposés et de "situations de didactique" (voir annexe 1).

Il est encore difficile d'harmoniser les contenus à enseigner. Un grand pas a toutefois été franchi grâce au travail de coopération, de dépersonnalisation, de "décontextualisation géographique" effectué dans le cadre de la COPIRELEM.

Un accord semble s'être dégagé au sein des formateurs influencés par la COPIRELEM pour la première année de formation. Il est important que les étudiants puissent :

- dégager une classification de procédures d'élèves

- dégager une classification et une hiérarchie d'erreurs d'élèves, en y intégrant la notion d'obstacle (voir à ce propos l'annexe 3, extrait de "les devoirs de didactique en vue de la préparation au concours des professeurs d'école, J. Briand & D. Butlen, actes de Pau [9])

- reconnaître les variables d'une situation et parmi celles-ci les variables didactiques (voir annexe 2)

- amorcer une analyse a priori (voir annexe 2)

- identifier des cadres de résolution (voir annexe 2).

Les notions de situation d'action, de formulation..., de situation didactique ou a-didactique, de contrat, de dialectique outil-objet ou de jeu de cadres si elles paraissent pour certains acceptables comme notions à institutionnaliser, ne paraissent pas à l'ensemble des formateurs devoir faire

l'objet d'une évaluation en fin de première année.

IV) QUELQUES REMARQUES À PROPOS DES ACTIVITÉS D'OBSERVATION DE CLASSE ET L'ENSEIGNEMENT DE DIDACTIQUE

Il est très difficile de ne pas aborder les activités faisant intervenir des observations de classes, d'enseignants ou d'élèves quand on traite de problèmes de formation professionnelle, en particulier quand il s'agit d'un enseignement de didactique.

L'observation est un sujet difficile, conflictuel mais incontournable en formation qu'il devient indispensable de travailler d'un point de vue didactique. Nous parlons ici de l'observation en formation et non de l'observation dans le cadre de la recherche.

1) Les limites de l'observation directe de classe, en formation des professeurs d'école

L'observation simple présente certaines limites qui sont générales pour tous les futurs professeurs, Aline Robert et Régine Douady dans un texte publié dans les actes de Pau [9] en énoncent quelques unes, que nous ne ferons que citer ici :

- "ce que l'on perçoit dépend (en partie) de ce que l'on sait et de ce que l'on est"

- "toute observation a un écho très personnel chez tout observateur, écho partiellement conscient, et on doit en prévenir les étudiants"

- "ce que l'on perçoit n'est pas toujours le plus significatif, ce que l'on voit sans effort est nécessairement superficiel, c'est ce qui est souvent à la surface de la classe..."

- "on ne peut pas tout voir, il y a des éléments importants qui échappent à l'observation directe"...

Les auteurs précisent les limites dues au temps et la complexité de ce que l'on observe ...

Nous renvoyons le lecteur à ce texte pour plus de détail.

Nous allons essayer maintenant de montrer comment certaines de ces limites sont marquées par plusieurs caractéristiques du métier de professeur d'école et du passé scolaire de l'étudiant.

Nous ne traiterons pas cette question de façon exhaustive, nous allons juste pointer certains aspects. En particulier, nous devons prendre en compte :

- la polyvalence du métier d'instituteur
- les différents aspects du rapport au savoir du stagiaire et en particulier : son regard naïf de non spécialiste, son regard partiellement incompetent.

a) Le poids de la polyvalence du métier de professeur d'école

Une des premières difficultés à surmonter pour un professeur d'école débutant réside dans la gestion du temps dans le cadre d'un enseignement polyvalent et de façon plus générale, dans les problèmes liés à l'organisation générale d'un tel enseignement.

Un élément essentiel de réponse apportée par la formation actuelle à ces questions consiste à se référer au "terrain", aux pratiques professionnelles des enseignants confirmés et donc à leur observation lors de stages. Le stagiaire va être incité à regarder par exemple :

- la répartition des différentes activités dans la journée, dans la semaine
- la gestion des phases de transition entre des enseignements de disciplines différentes et de la fatigue due à ces changements
- le respect par l'enseignant de certaines contraintes fixées par l'institution
- la mise en place de points de repères pour les élèves...

Ce regard est évidemment nécessaire. Toutefois le traitement de ces problèmes uniquement par une observation spontanée peut devenir dangereuse pour au moins trois raisons :

- il peut laisser croire que ce problème relève de l'acquisition d'un savoir-faire professionnel qui ne s'acquiert que par osmose
- il peut amener les étudiants à rechercher superficiellement des phénomènes communs, des régularités entre différents apprentissages scolaires et donc à gommer l'influence de la nature du savoir enseigné. Ceci d'autant plus que, superficiellement là encore, l'enseignant expérimenté peut sembler mettre en oeuvre tout au long de la journée les mêmes techniques, les mêmes savoirs professionnels, faire les mêmes adaptations locales...
- enfin il risque de réduire l'apprentissage du métier d'instituteur à la reproduction par imitation de "gestes professionnels", nous reprenons ici une expression utilisée par Y. Chevillard dans une conférence qu'il a faite au colloque annuel des professeurs d'école normale qui se déroulait à Bordeaux [6] . Nous précisons que ce risque n'est pas spécifique à la formation des professeurs d'école mais la polyvalence du métier risque de l'augmenter.

Il n'est pas question de nier une certaine unité dans les pratiques d'un même instituteur, toutefois il est indispensable de noter les adaptations dans le temps et en fonction des disciplines enseignées.

De même, il est indispensable que le stagiaire analyse ces "gestes professionnels" de l'enseignant confirmé pour essayer d'en comprendre le rôle et la fonction et éventuellement pour se les approprier.

L'observation de tous ces phénomènes doit s'appuyer sur un dialogue du futur maître avec le conseiller pédagogique. Cela donnera à l'étudiant en formation des exemples pratiques sur lesquels il pourra revenir en formation, les soumettant par exemple à un questionnement d'ordre psychologique ou didactique.

b) L'influence de quelques spécificités du public recruté pour devenir professeur d'école sur les activités faisant intervenir des observations

Afin d'optimiser les apports de l'observation en formation, il est nécessaire de prendre en compte les spécificités du public recruté pour devenir professeur d'école, en particulier les rapports qu'il entretient avec les mathématiques. Nous avons déjà décrit dans le paragraphe précédent certaines caractéristiques de ce rapport au savoir (rapport négatif, erreurs...)

Ces aspects spécifiques du rapport au savoir des futurs professeurs d'école vont intervenir d'une part sur les capacités d'observation des étudiants et sur le statut de l'observation dans la formation d'autre part.

La préparation de l'activité et donc de l'observation est d'autant plus importante que pour certains, la résolution mathématique du problème est difficile. De ce fait, l'analyse et la prise en charge des comportements des élèves par le maître, l'observation et l'interprétation des erreurs peuvent être impossibles dans certains cas si l'observation n'est pas précédée d'une analyse, même rapide, du problème posé d'un point de vue mathématique.

Les professeurs d'école, du fait de leur passé conflictuel avec les mathématiques, acceptent peut être plus facilement de remettre en question leurs conceptions initiales sur l'enseignement de cette matière (qui comme chez la plupart des enseignants débutants revient souvent à reproduire l'enseignement suivi comme élève). Nous avons déjà pu constater une attitude paradoxale qui consiste d'une part, à être incapable d'envisager un autre enseignement et d'autre part, à être à l'affût de tout ce qui peut rendre l'enseignement des mathématiques motivant, vivant etc.... Cette attitude peut aussi bien être source d'innovation que de reproduction des schémas anciens selon les contacts avec le terrain que le professeur d'école stagiaire va pouvoir nouer. Elle peut amener l'étudiant à regarder superficiellement une situation et à porter

des jugements excessifs sur l'interprétation de certains comportements. Il peut ainsi décider que les élèves participent sans analyser le contenu de leur participation ou bien analyser comme autonome et créatif une activité ne comportant que des résolutions mécaniques et individuelles d'exercices dont les réponses sont induites par l'énoncé (utilisation de fiches de travail par exemple).

Ces caractéristiques, si elles restent valables pour tous les enseignants débutants, sont particulièrement marquées chez les professeurs d'école.

Enfin l'observation peut jouer un rôle dans la prise de conscience par l'étudiant de la nécessité de réorganiser ses connaissances, voire de les compléter en vue de l'enseignement. En effet ce travail de réorganisation peut être mieux accepté par le stagiaire s'il s'appuie sur une analyse rationnelle de l'enseignement, par exemple sur des analyses de procédures et d'erreurs se basant sur des régularités observées dans les recherches didactiques et pouvant être pointées, par exemple, lors d'observations en classe.

2) Quelques remarques préalables sur l'évolution des pratiques dans la formation des professeurs d'école

a) Vers une diversification des activités centrées sur l'observation

Durant ces vingt dernières années, en écoles normales, les activités d'observation évoluent dans le sens suivant : moins de monstration, plus de préparation des observations dans le cadre d'activités intégrées aux cours mais aussi lors des stages (tutelle en particulier), davantage d'utilisation de certains concepts de la didactique pour analyser ce que l'on voit, une diversité plus grande des contenus observés et des préparations.

Cette diversité se manifeste en effet :

- d'une part par une série d'activités dont l'objectif est de simuler, par étapes les différentes phases de l'observation du chercheur (TP d'observation)

- et d'autre part, par une plus grande variété des supports de cette observation (compte rendu écrit, document audiovisuel, observation en temps réel, simulation de classe, micro-enseignement...).

Nous assistons aussi à une diversité du degré de préparation lors de l'observation en fonction des objectifs, de la nature ou du contexte de celles-ci.

Un TP d'observation intégré au cours sera plus préparé (précédé d'une analyse a priori de la situation), plus ciblé (qui observe, comment et qu'observe-t-on ?), fera l'objet d'un dispositif plus proche de celui mis en place par le chercheur qu'une observation plus spontanée ayant lieu lors d'un stage de pratique accompagnée et ayant pour but une sensibilisation à des pratiques professionnelles plus globales.

Ce sont donc des tentatives de mise en place un dispositif visant à enrichir les observations des étudiants lors des stages. Ce dispositif est loin d'être performant, il s'agit souvent de tentatives désordonnées, partant un peu dans toutes les directions, n'utilisant pas tous les outils didactiques, méthodologiques nécessaires.

Enfin, jusqu'à la création des IUFM, les ex-professeurs d'école normale allaient voir davantage leurs étudiants en stage en responsabilité mais aussi en stage en tutelle. Auparavant, ce travail était davantage laissé aux conseillers pédagogiques. La principale raison invoquée est celle de faire le lien entre les cours et l'étude des pratiques professionnelles. Pour des raisons financières, le nombre de ces visites semble diminuer depuis la création des IUFM.

Nous allons d'ailleurs ici aborder le statut ambigu de certaines activités d'observation à partir de l'exemple des "visites" dont nous venons de parler

b) Les "visites" des stagiaires par le PIUFM lors des stages : un statut ambigu

Ces visites remplissent diverses fonctions qu'il est nécessaire de séparer explicitement.

On peut les analyser, par exemple, comme

- une mise en situation du stagiaire et un premier contact avec les problèmes de gestion effective de classe, problèmes souvent rendus difficiles par la faible durée du stage

- une évaluation de certaines prestations par le formateur (ou par l'équipe de formateurs). A cette occasion, il est amené à observer et évaluer, "à chaud", une séquence d'enseignement. Ce jugement est souvent basé sur un mélange d'analyse a priori et a posteriori de situations portant sur le même sujet et sur la connaissance que le formateur peut avoir de régularités observées en didactique

- une auto-observation et une auto-évaluation du stagiaire ; en effet, lors de l'entretien qui suit la leçon, il doit analyser sa prestation. Pour cela, il essaie de comparer l'ébauche d'analyse a priori qu'il a pu faire lors de la préparation de l'activité et les impressions qu'il a pu éprouver lors de son déroulement. Cela nécessite un pas de côté qui, pour un chercheur, serait jugé impensable d'un point de vue méthodologique.

- un prolongement, une régulation, voire des travaux pratiques accompagnant le cours suivi à l'IUFM

Les paragraphes montrent donc la construction d'un dispositif visant à optimiser les activités d'observation, à favoriser un réinvestissement dans les pratiques, d'éléments d'un enseignement intégrant des notions didactiques.

Analysons maintenant les limites de ce dispositif.

3) Les limites de ce dispositif

Enfin nous terminerons par une remarque faite "à chaud" lors du colloque annuel de des formateurs de mathématiques intervenant dans le premier degré (mai 1993) à propos des effets de la première année d'enseignement en IUFM. Rappelons que cette année est sanctionnée par un concours d'entrée comportant une épreuve professionnelle.

Nous précisons que cette constatation n'est qu'indicative ; elle n'est pas le résultat d'une évaluation sérieuse de la formation dispensée. Elle doit être confirmée lors des années suivantes.

Les participants au groupe de travail concerné par cette question semblent unanimes pour constater une réelle capacité des étudiants de seconde année, quand ils ont affaire à des documents (écrits ou audiovisuels), pour analyser, classer des erreurs ou des procédures, mener une analyse de la tâche des élèves, distinguer ce qui relève de l'élève de ce qui relève de l'enseignant. Par contre, cela ne se retrouve pas automatiquement dans leurs pratiques professionnelles, lors du stage en responsabilité. On semble même constater une plus grande difficulté à gérer une classe. Les interprétations proposées par les enseignants-formateurs sont diverses et sont à l'état de questions :

- est-ce le résultat de la disparition ou de la diminution des stages en tutelle précédant le stage en responsabilité, lieu où le stagiaire peut observer et s'approprier, si les précautions que nous avons signalées sont prises, un certain nombre de pratiques concernant la gestion globale de la classe ? Le temps joue sans doute un rôle important. Il faut sûrement un "temps d'imprégnation", il est réduit dans la deuxième année de la nouvelle formation

- est-ce le résultat d'une prise de conscience trop précoce des difficultés de l'enseignement ayant pour résultat, dans un premier temps, une plus grande prudence, une plus grande modestie, voire une certaine timidité ?

- est-ce le résultat d'une formation plus courte et devant mener en parallèle une réorganisation des connaissances mathématiques et une sensibilisation aux problèmes d'enseignement ?

- est-ce le résultat d'une formation pas encore rodée ?

Dans tous les cas, cela nous interroge sur les dispositifs possibles à mettre en place ayant pour but de favoriser un réinvestissement dans les pratiques d'un enseignement de didactique s'appuyant ou non sur des activités d'observation et se

déroulant en deux temps : observation en première année, prise en charge limitée d'une classe en seconde année ?

Ces questions sont très difficiles et doivent faire l'objet de recherche.

Annexe 1 : "la vache et le paysan", Hervé Pénult, extrait des actes du stage national de Cahors organisé par la COPIRELEM pp 101-103 - "Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques" - IREM de Paris VII (8)



LA VACHE ET LE PAYSAN

Contexte

J'ai utilisé 5 ou 6 fois cette activité, en formation initiale et en formation continue, sur une durée de 2 h ou 3 h.

Elle me semble être une bonne activité introductive dans le cadre d'une formation. Elle permet de soulever divers points de didactique, notamment les problèmes de formulation d'une argumentation, de validation par la démonstration, d'analyse et de compréhension des erreurs... Ce peut en outre être un support intéressant pour l'étude d'une typologie des situations additives.

Particularité

Le problème de départ a ceci de particulier qu'il paraît très simple mais qu'il est fréquent que les gens trouvent des solutions erronées sans qu'il soit pour autant toujours facile d'en montrer la fausseté.

Le Problème

"Un paysan se rend au marché. Il achète une vache 5000 F. Il la revend 6000 F. Se ravisant, il la rachète 7000 F. Il la revend à nouveau 8000 F.
A-t-il gagné de l'argent, et dans ce cas combien ? A-t-il perdu de l'argent, et dans ce cas combien ?
Ou n'a-t-il rien gagné ni perdu ?"

Déroulement

Les lignes générales de ce déroulement sont annoncées avant l'énoncé du problème

- 1) Chacun cherche seul pendant 5 à 10 minutes.
- 2) Chacun, tour à tour, indique sa conclusion. Les différentes solutions sont notées au tableau, sans commentaires, avec le nombre de personnes les ayant retenues.
- 3) Un représentant de chacune des solutions expose son argumentation (plusieurs si d'autres estiment avoir procédé différemment), de préférence en notant sur le tableau. Les autres peuvent poser des questions, mais uniquement pour chercher à comprendre l'argumentation, en évitant d'opposer des objections.
- 4) Sondage : pour chacune des solutions, on demande combien sont convaincus de sa justesse.
- 5) Pour chacune des solutions qui ont été proposées, la parole est à ceux qui veulent contre-argumenter.
- 6) Nouveau sondage sur les convictions quant aux solutions proposées.
- 7) Les échanges continuent, jusqu'à ce que tous s'estiment convaincus de la justesse de l'une des solutions mais aussi de la fausseté des autres (ou jusqu'à une heure fixée si cette condition n'est pas remplie...)
- 8) Débat didactique sur l'activité elle-même.

Remarques

a) l'annonce dès le départ que je n'interviendrais à aucun moment sur la validité des argumentations, que ce n'est pas moi mais les autres qu'il faut convaincre et que je ne fais que diriger le débat pour permettre à chacun de s'exprimer.

L'engouement des participants est en général assez fort et il est quelquefois difficile de canaliser le flot des argumentations et contre-argumentations.

b) L'activité "tombe" si tout le monde trouve d'emblée la solution correcte. Cela ne m'est jamais arrivé (j'avais prévu, dans cette éventualité, de semer le doute en présentant moi-même une solution erronée) mais ce n'est sans doute pas à exclure

(Pour n participants dans un groupe, le nombre de solutions correctes trouvées du premier coup a varié entre $n/4$ et $n-1$; dans ce dernier cas, la personne isolée s'est défendue avec acharnement...)

Exemple de propositions

Le tableau ci-dessous donne, à titre d'exemple, l'évolution des convictions (le plus élevé étant que j'ai obtenu) à l'intérieur d'un groupe de 17 instituteurs, particulièrement animé.

colonne A : propositions après recherche individuelle
colonne B : convictions après exposé des premières argumentations
colonne C : convictions après exposé des premières contre-argumentations.

	A	B	C
Ni gain ni perte	5	3	1
Gain de 1000 F	6	1	1
Gain de 2000 F	5	5	11
Gain de 3000 F	1	0	0
Ne sait pas	0	8	4

Dans un autre groupe est apparue aussi au départ l'affirmation "ça dépend de la somme initiale dans son portefeuille". Cette affirmation revient d'ailleurs souvent dans les autres groupes, au cours des argumentations.

Exemples d'argumentations

Voici un résumé simplifié des argumentations les plus fréquemment apparues :

"Ni gain ni perte"

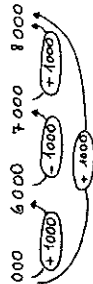
- "gain de 1000 F entre premier achat et première vente, gain de 1000 F entre deuxième achat et deuxième vente, perte de 2000 F entre le premier et le second achat, donc solde nul. Les bénéfices de 1000 F sont annulés par l'augmentation de 2000 F d'un achat à l'autre."

- "8000 F - 6000 F = 2000 F - 5000 F. Même différence entre les prix d'achat et de vente, donc ni gain ni perte."

"gain de 1000 F"

- "entre premier achat et première vente, gain de 1000 F ; entre première vente et second achat, perte de 1000 F ; entre second achat et second vente, gain de 1000 F ; bilan : gain de 1000 F."

- même raisonnement s'appuyant sur un schéma du type :



"gain de 3000 F"

- Il y a un état initial et un état final comparables (il arrive sans vache, il repart sans vache). Peu important donc les étapes intermédiaires. Il achète 5000 F au départ et vend 8000 F à la fin. D'où un bénéfice de 8000 F - 5000 F = 3000 F.

"perte de 3000 F"

- "Argent engagé : 5000 F. Première transaction : gain de 1000 F. Deuxième transaction : gain de 1000 F. Solde : 1000 + 1000 - 5000 = -3000"

"gain de 2000 F"

- gain de 1000 F à la première vente, gain de 1000 F à la deuxième vente, donc gain total de 2000 F
- il a dépensé 5000 F + 7000 F = 12000 F ; il a encaissé 6000 F + 8000 F = 14000 F ; gain de 2000 F
- supposons qu'il ait 7000 F en poche. Il achète 5000 F, il lui reste 2000 F ; il vend 6000 F, il a donc 8000 F ; etc..

- comme la précédente avec présentation sous forme d'un cahier de comptabilité avec les rubriques "report caisse", "recettes", "dépenses", "caisse"

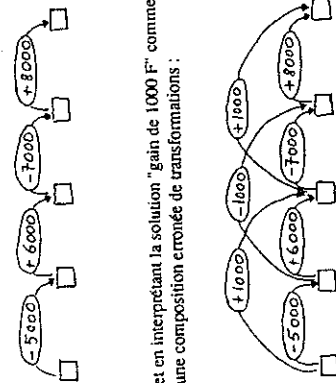
Remarques sur les argumentations

Les suppositions sur l'argent initial en poche ont entraîné une discussion sur la légitimité d'une telle supposition. C'est souvent à l'occasion de ce débat que des participants proposent de simuler la situation (il y en a toujours un prêt à jouer le rôle de la vache...) avec de la monnaie de papier ou aussi avec un carnet de chèques pour montrer l'indépendance par rapport à l'avoir initial. Jusqu'à ce que quelqu'un propose d'ap- peler "x" cet avoir initial et effectue un calcul littéral.

Le plus souvent, les participants sont assez vite persuadés que la solution "gain de 2000 F" est la bonne, mais en avançant qu'ils ne voient pas ce qui cloche dans l'exposé de la solution "gain de 1000 F" ; et l'essentiel du débat d'argumentation vise à montrer que les argu- mentations voulant prouver un gain de 1000 F sont fausses. Ceux qui pensent l'avoir compris essaient de convaincre les autres mais en revenant le plus souvent à une autre argumentation montrant la justesse de la solution "gain de 2000 F" et la question est sans cesse posée : "Ça, on voit bien, mais on ne voit toujours pas ce qui ne va pas dans l'argumentation pour le gain de 1000 F".

Une contre-argumentation a eu un effet sur une partie du public, mais sans convaincre tout le monde : "il suffit de considérer que la première fois il a acheté une première vache, et que la seconde fois c'est une autre vache ; ça ne change rien au problème, mais ça montre qu'il n'est pas légitime de prendre en compte une perte de 1000 F entre la première vente et le second achat".

Les difficultés à rejeter la solution "gain de 1000 F" viennent essentiellement d'une confusion entre "états" et "transformations". Une seule fois quel- qu'un a emporté la conviction de tous en proposant un schéma du type



et en interprétant la solution "gain de 1000 F" comme une composition erronée de transformations :

Prolongement didactique

- Lorsque l'on décide d'arrêter pour ne pas pas- ser l'heure fixée (je prévois en général 1 heure avec une tolérance d'une petite demi-heure supplémentaire, "jusqu'à la pause" pour les séances de 3 h) et que des participants doutent encore, ils me demandent toujours de prendre position. J'ai choisi dans ce cas de présenter la classification des situations additives de G. VER- GNAUD, à charge pour eux, s'ils le jugent utile, de reprendre le problème en le resituant dans cette typologie.

Il me semble que ce problème pourrait être un bon support pour une étude plus détaillée des situations additives.

- J'essaie de mener un débat à partir des ques- tions "que pensez-vous de cette activité ?" "comment analysez-vous l'évolution de vos convictions ?" "établi- il nécessaire que je ne prenne pas position sur le fond ?" "plus généralement comment concevez-vous l'activité de résolution de problème dans la classe ?" ... et de celles qui sont posées par les participants, comme celle-ci qui arrive chaque fois : "que doit-on exiger comme rédaction de la part des enfants ?" ...

C'est l'occasion d'exprimer voire de dévelop- per des idées telles que

- faire des mathématiques c'est d'abord résoudre des problèmes
- le rôle du conflit socio-cognitif
- la non linéarité de l'apprentissage et l'existence de phases de régression
- la démonstration est au cœur de l'activité mathé- matique
- dire à quelqu'un qu'il se trompe et lui indiquer une bonne solution est inopérant si on ne l'aide pas à prendre conscience de ses erreurs

Ce dernier point, avec les instituteurs en FC, fait en général surgir des exemples et des questions : "J'ai tel élève, j'ai beau lui expliquer, il ne comprend pas telle chose et fait toujours les mêmes erreurs...". Nous n'apportons pas en général de réponses simples à ces questions, mais le lien avec l'expérience vécue sur le problème précédent aide à accrédi- ter l'idée que les erreurs ne sont pas forcément des marques de paresse ou d'initialement et que leur traitement passe par leur analyse et leur compréhension.

Il serait intéressant de disposer, sur cette idée, d'exemples significatifs à faire étudier.

Annexe 2 : "analyse de préparation sur les écritures multiplicatives", D. Butlen et M. Pezard, extraits des actes du stage national de Cahors organisé par la COPRELEM - pp 115-121 - "Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques" - IREM de Paris VII, 191

Analyse de préparation sur les écritures multiplicatives au CEI

I- INTRODUCTION DES ÉCRITURES MULTIPLICATIVES AU CEI

Cette séquence s'inspire d'une situation élaborée par l'I.R.E.M. de Bordeaux, et a été rédigée par Denis Butlen. Elle constitue la première leçon sur la notion d'écriture multiplicative.

Objectifs de la séquence

- Introduire la notion d'écriture multiplicative d'un nombre entier naturel ;
- donner un sens à cette écriture ;
- renforcer la notion de nombre naturel.

Notre choix :

L'analyse mathématique de la notion, l'analyse des pratiques enseignantes et des manuels sco- laires montrent qu'il y a deux grandes manières d'introduire ce concept.

- On peut introduire cette écriture à partir de l'ad- dition réitérée :

$$7 \times 12 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

$$12 \times 7 = 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12$$

Cette méthode, si elle présente l'avantage de s'ap- puyer sur les connaissances acquises par les élèves sur l'addition, présente par ailleurs beaucoup d'inconvé-

nients : les facteurs a et b ne jouent pas le même rôle (12 paquets de sept éléments, ce n'est pas la même chose que 7 paquets de 12 éléments). Cela peut amener certains maîtres à introduire dans un premier temps une multiplication non commutative ! Elle oblige d'autre part à introduire un vocabulaire et des notations peu commodes.

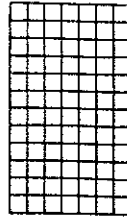
- On peut présenter l'écriture $a \times b$ comme une désignation du nombre d'éléments d'une collection organisée sous forme de grille rectangulaire :

a lignes et b colonnes ou b colonnes et a lignes

Cette présentation, si elle élimine les défauts de la première, a l'inconvénient d'être très liée à la disposi- tion spatiale de la collection à décrire.

Nous avons adopté le principe d'une présentation dialectique de l'écriture multiplicative $a \times b$ s'ap- puyant sur deux cadres :

- un cadre géo- métrique : $a \times b$ dé- signera le nombre d'objets d'une col- lection organisée ou pouvant s'orga- niser sous forme de grille rectangulaire ;



- un cadre numérique : $a \times b$ sera une écriture plus courte de l'écriture additive réitérée.

Cette séquence a pour but de présenter aux élèves une situation évolutive permettant de faire le lien entre ces cadres.

PRÉSENTATION DE LA SITUATION

Il s'agit d'une situation de communication entre les élèves.

La classe est divisée en groupes de deux types (groupes de 3, 4 élèves) : des groupes émetteurs et des groupes récepteurs. Chaque groupe joue alternativement le rôle d'émetteur et de récepteur.

Le groupe émetteur possède une grille rectangulaire (dessinée sur une feuille polycopiée) dont les dimensions peuvent être par exemple de 7 et 12 ou bien de 9 et 14.

Le groupe récepteur possède un lot de grilles parmi lesquelles se trouve la grille du groupe émetteur.

La consigne est la suivante :

"Le groupe émetteur doit envoyer au groupe récepteur un message désignant le nombre de carreaux de la grille et lui permettant de retrouver le plus rapidement et le plus facilement possible la grille correspondante dans son lot. Ce message doit être le plus court possible."

LES VARIABLES DE LA SITUATION

a) Les variables numériques.

Il est nécessaire de prévoir une grille faisant intervenir des nombres assez grands, par exemple $a > 6$ et $b > 11$ afin de placer les élèves dans une situation :

- où les "techniques primitives de dénombrement" (un à un ou paquets) sont plus laborieuses ;
- où l'écriture $a \times b$ devient plus commode car plus rapide, plus économique pour décrire (spatialement) le nombre d'éléments de la collection ;
- où la perception globale de ce nombre devient très difficile de visu.

b) Le choix des grilles du groupe récepteur.

Il faut que soient présentes :

- des grilles différentes de celles du groupe émetteur, dont les dimensions restent assez proches de celles-ci. Par exemple : dans le cas de la grille de dimensions 7 et 12, on peut choisir des grilles de dimensions 6, 8 pour l'une, 10, 11, 13, 14 pour l'autre.
- des grilles ayant le même nombre d'éléments que la grille initiale mais dont les dimensions sont différentes, ainsi :
 - * dans le cas d'une grille 7 x 12, il faut prévoir les grilles 42 x 2, 14 x 6, 3 x 28 ;
 - * dans le cas 9 x 14, des grilles de dimensions 18 x 7, 3 x 42...

ceci, afin d'éliminer certains messages (84 par exemple) qui ne permettent plus de trouver à coup sûr la bonne grille.

c) Les contraintes de la situation.

La consigne comprend certaines contraintes, indissociables du bon déroulement de la séquence ; ainsi le groupe émetteur doit envoyer un message :

- court et essentiellement numérique, afin d'éliminer des messages écrits "en français", avec des phrases trop longues et souvent incompréhensibles. Cela permettra également l'élaboration éventuelle d'une écriture permettant de désigner le cardinal de la collection.
- qui doit permettre au groupe récepteur de retrouver rapidement et facilement la grille en question.

ANALYSE DE LA TÂCHE DE L'ÉLÈVE

Pour élaborer son message, l'émetteur doit :

- soit dénombrer un à un le nombre de carreaux de la grille et donner une écriture "canonique",
- soit dénombrer "paquets par paquets" ce nombre et traduire cette activité par une écriture additive ou canonique. Le dénombrement peut alors prendre en compte, ou non, la disposition spatiale de la collection (nombre d'éléments d'une ligne ou d'une colonne, nombre de lignes ou colonnes),
- soit dénombrer le nombre d'éléments d'une ligne et d'une colonne et traduire cette activité par une écriture multiplicative proche de cette forme.

ANALYSE DES MESSAGES DES ÉLÈVES

Nous avons constaté une grande diversité des messages produits par les élèves. Nous pouvons les classer ainsi :

- des écritures canoniques : "84" pour la grille 7 x 12 par exemple,
- des écritures additives faisant intervenir la symétrie de la figure ou le partage en deux de celle-ci comme "42 + 42",
- des écritures additives répétées basées :
 - * soit sur le nombre d'éléments d'une ligne ou d'une colonne : "12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12"
 - * soit sur une technique de dénombrement paquets à paquets : "10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4" etc...
- des écritures rendant compte de la disposition spatiale de la collection : "12C 7L" ou "12".

S'il n'existe que des messages du type "12C 7L", il devra alors introduire les écritures 12 x 7 et 7 x 12 comme une autre façon d'écrire cela et comme une autre écriture du nombre d'éléments de la grille.

Il fera de même pour des messages du type : "12 fois 7" ou "7 fois 12".

S'il apparaît des messages sous forme d'écritures multiplicatives, le maître utilisera ces élèves pour donner un sens à ce type d'écriture.

Dans tous les cas, il s'attachera à montrer que ce type d'écriture est le plus adéquat pour répondre au problème posé.

5) Donner les deux sens de l'écriture multiplicative : l'explication précédente, à partir des contraintes de la situation, ne permet de souligner qu'un seul sens de l'écriture, celui lié à la configuration de la collection.

Nous pensons qu'il est nécessaire dès cette étape de dégager le caractère numérique de cette écriture, et, pour cela, de prouver que cette écriture désigne bien un nombre entier naturel.

Quand on pose la question suivante à des élèves : "cette écriture désigne-t-elle un nombre ?", ils répondent souvent : "non, car on ne sait pas combien il y en a".

Un moyen de résoudre partiellement ce problème est de faire le lien entre cette écriture et les techniques de dénombrement mises en œuvre par certains élèves, celles qui se réfèrent à la fois à l'addition et à la disposition spatiale de la collection : les additions répétées.

Le maître pourra alors faire comparer ces deux types d'écritures, faire dégager le fait qu'elles désignent la même grille et, par là, le même nombre, et que l'écriture multiplicative est une façon plus rapide de traduire une écriture additive répétée.

Il est évidemment nécessaire de prévoir des activités renforçant cette notion. La compréhension de ce concept prend du temps.

PROLONGEMENTS

Travail individuel rapide

1) A partir d'une grille représentée sur une feuille polycopiée, l'élève doit en un temps très court (60 secondes) désigner par l'écriture de son choix le nombre d'éléments de la grille. On pourra prendre comme dimensions 17 x 21 par exemple.

2) Voici une écriture multiplicative : 7 x 9 ; construire une collection (sur papier quadrillé) ayant ce nombre d'éléments, ou entourer une collection ayant ce nombre d'éléments.

VALIDATION DE L'ACTIVITÉ :

La situation étant une situation de communication, la validation pourra se faire dans un premier temps sur le fait que le groupe récepteur a pu ou non déterminer la grille du groupe émetteur.

Un autre élément de validation portera, lors de la comparaison des messages, sur la longueur de ceux-ci d'une part, sur la rapidité avec laquelle le groupe récepteur a retrouvé la grille d'autre part. Cela implique que le maître ait le souci constant, dans cette phase, de faire respecter les contraintes énoncées dans la consigne.

DÉROULEMENT DE L'ACTIVITÉ :

- 1) Énoncé de la consigne
- 2) Phase de recherche et élaboration des messages de la part de l'émetteur.
- 3) Phase de recherche de la part du récepteur pour déterminer la grille correspondante. Il pourra demander par écrit (à l'aide de phrases courtes) des explications supplémentaires s'il ne peut, compte-tenu du message, remplir sa tâche. L'émetteur devra alors envoyer un nouveau message.

4) Phase de comparaison des productions : cette phase a pour but, à partir de la comparaison des messages produits par les émetteurs et des difficultés rencontrées par les récepteurs, de dégager ou d'introduire (si aucun message de ce type n'apparaît) les avantages d'un codage à l'aide d'une écriture multiplicative.

- Les écritures canoniques ne seront pas retenues comme efficaces car elles ne permettent pas de reconnaître à coup sûr la grille.

- Les écritures traduisant un découpage en deux (ou trois...) non plus car soit elles demandent un travail important de la part du groupe récepteur, soit elles ne permettent pas de conclure de façon certaine.

- Les autres écritures additives ne satisfont pas aux contraintes de la situation : messages trop longs, demandant un temps de recherche trop important pour le groupe récepteur...

Le maître devra introduire l'écriture multiplicative à partir des messages décrivant la disposition spatiale de la collection.

II - EXEMPLE D'UTILISATION EN FORMATION

ANALYSE D'EXTRAITS D'UNE PRÉPARATION DE SÉQUENCE INTRODUISANT LES ÉCRITURES MULTIPLICATIVES AU COURS ÉLÉMENTAIRE.

Il s'agit d'analyser des extraits d'une préparation de la séquence d'introduction des écritures multiplicatives au cours élémentaire (réédition de Denis BUT-LEN). Voir en annexe le support de travail donné aux normaliens

Une série de sept questions permet de conduire cette analyse :

C'est la première leçon sur la notion d'écriture multiplicative. Répondre aux questions suivantes :

- 1) Déterminer les objectifs.
- 2) Justifier le choix didactique.
- 3) Y a-t-il plusieurs cadres ? Lesquels ?
- 4) Déterminer les variables de la situation.
- 5) Faire une analyse de la tâche de l'élève (connaissances mobilisables - décisions de l'élève - procédures envisageables).
- 6) Commenter les différentes phases du déroulement.
- 7) Prolongement : quels exercices de renforcement ?

Voici le déroulement de l'analyse :

- a) Recherche, par groupes de trois, des réponses aux questions 1, 2 et 3.

Il s'agit de la première leçon sur la notion d'écriture multiplicative. La forme adoptée est une situation de communication par groupe, cette forme étant justifiée par le fait que l'objectif est la production d'une écriture, d'un langage.

Les choix didactiques et les objectifs sont exposés dans le texte complet de la préparation, nous invitons le lecteur à s'y reporter.

A propos de la question 3, nous avons été amenés à préciser la notion de cadres et à replacer cette notion dans le contexte de la théorie d'apprentissage de Régine DOUADY.

Quels sont les cadres qui interviennent ?

On fait ici référence à la théorie des jeux de cadres de R. DOUADY.

Idée centrale :

Les connaissances ayant trait au concept à acquérir ne sont pas maîtrisées de la même manière dans chacun des cadres.

Les connaissances plus grandes dans un des cadres devraient amener les élèves à faire des conjectures dans les autres cadres et à leur donner des idées de procédures à tester.

Exemples de cadres :

- réel, physique,
- graphique,
- numérique,
- géométrique, informatique ...

Une situation d'apprentissage doit faire intervenir la notion dans des cadres différents.

Ici, on s'appuie sur deux cadres :

- un cadre géométrique, $a \times b$ désignant le nombre d'éléments d'une collection organisée ou pouvant s'organiser sous forme de grille rectangulaire,
- un cadre numérique, $a \times b$ étant une écriture plus courte de l'écriture additive répétée.

Il s'agit ici de faire le lien entre ces deux cadres.

Remarques

1) Un aller-retour entre ces deux cadres sera utilisé tout au long de la construction de la technique opératoire.

2) Autres exemples d'interventions de jeux de cadres

Réel, physique/Numérique : manipulations de collections pour obtenir différentes décompositions additives d'un nombre (écritures additives)

3) Découpage de rectangles, de grilles rectangulaires lors de la construction de la technique opératoire (liaison cadre physique géométrique/numérique)...

b) Etude des questions 4 et 5

Elle permet de revenir sur les variables d'une situation et sur l'analyse de la tâche de l'élève.

Une variable didactique est une "variable de la situation sur laquelle l'enseignant peut agir et dont un changement de valeur peut entraîner un changement de procédures".

Autrement dit : "Élément de la situation sur lequel l'enseignant peut jouer et qui va modifier les rapports des élèves avec les notions en jeu dans la situation".

Selon la situation, les variables didactiques peuvent être :

- le matériel utilisé (ex : papier quadrillé, papier blanc en géométrie),
- le type de tâche (ex : tâche de constat ou de fabrication dans la comparaison de collections au CP),
- la répartition des tâches des enfants, et la répartition des tâches dans le temps,
- les contraintes de la tâche (ce qui est autorisé ...).

- la forme du travail (individuel, par groupes, ...),
- la gestion du temps (temps laissé aux élèves pour résoudre un problème, éliminer des procédures trop coûteuses en temps),
- la taille des nombres,

- mais l'enseignant ne peut pas fixer :
- l'origine socio-professionnelle des élèves,
- le sexe des élèves,
- les connaissances acquises à un moment donné.

Dans le cas de cette séquence nous agissons sur les variables didactiques de la façon suivante :

Les variables numériques :

Prévoir une grille faisant intervenir des nombres assez grands ($a > 6$ et $b > 11$) afin de placer les élèves dans une situation :

- où les techniques primitives de dénombrement ("un à un" ou paquets par paquets) sont plus laborieuses
- où la perception globale, de visu, de ce nombre devient très difficile.

- où l'écriture $a \times b$ devient plus commode car plus rapide, plus économique pour décrire spatialement le nombre d'éléments de la collection.

Le choix des grilles du groupe récepteur :

Doivent être présentes :

- des grilles différentes de celles du groupe émetteur mais dont les dimensions restent assez proches
- ex : pour une grille 7×12 , prendre : 8×12 , 6×10 , 11×9 et 7×11 , 6×12 car les enfants évitent souvent de compter deux fois le "carré du coin".

- des grilles ayant même nombre d'éléments que la grille de l'émetteur mais de dimensions différentes.

Exemples :

- * pour 7×12 , prévoir des grilles 2×42 , 1×84 , 14×6 , 28×3 , 42×2 etc...
 - * pour 9×14 : 18×7 , 3×42 , ...
- (ceci pour éliminer les messages de type "84" pour 7×12)

Les contraintes de la situation :

Le message doit :

- être court et essentiellement numérique pour éliminer les messages écrits "en français", trop longs et souvent incompréhensibles afin d'élaborer une nouvelle écriture du type $a \times b$,
- permettre au groupe récepteur de retrouver rapidement et facilement la grille.

Les formes de travail

Le travail par groupes est ici justifié par la volonté d'obtenir des productions plus riches et d'éliminer

certaines erreurs par un premier filure (effectué par les élèves du groupe).

Le temps est une variable déterminante dans cette situation : les logiciels mis au point par D. BUTLEN (voir bibliographie) en sont une confirmation (les auteurs décrivent ici brièvement les activités correspondantes).

Nous renvoyons le lecteur à la lecture du texte de la préparation pour l'analyse de la tâche de l'élève. Notons que cette partie de l'activité peut être l'occasion de parler de l'analyse a priori et de situer celle-ci par rapport au contrat didactique.

Ainsi l'analyse a priori permet à l'enseignant d'accroître ses marges de manoeuvre et de prendre conscience de ses prises de décisions lors du déroulement de la séquence (interventions de l'enseignant face à un déroulement prévu ou non) et du décalage entre prévisions et réalisations effectives.

Nous renvoyons le lecteur sur ce point à l'article de A. MERCIER et M-H SALIN intitulé "L'analyse a priori, outil pour l'observation" Olivet 1988.

Notons que cette partie : analyse de la tâche de l'élève nous a semblé la plus difficile à obtenir : la part des instituteurs (tant confirmés que débutants) : cela s'explique sans doute par un manque d'habitude de cette "tâche" et par le fait que cette activité vise justement le contrat didactique.

Nous laissons au lecteur le soin de répondre aux questions 6 et 7, en notant qu'un accent particulier a été mis sur la nécessité de jouer sur une double définition des écritures multiplicatives.

BIBLIOGRAPHIE

- "Jeux de cadres et dialectique outil-objet" - R. DOUADY - Cahier de didactique des mathématiques n° 19 - IREM Paris 7
- "L'apport de l'informatique à l'apprentissage des écritures multiplicatives au CE" (thèse 3^{ème} cycle de didactique de mathématiques) D. BUTLEN Paris 7
- "Utilisation de l'ordinateur pour l'apprentissage de l'algorithme de calcul d'un produit" (Denis BUT-LEN et Claire LETHIELLEUX) - Cahiers 25-1 et 25-2 des "Cahiers de didactique de mathématiques" IREM Paris 7
- "La multiplication", Groupe de recherche sur l'enseignement à l'école élémentaire, IREM de Bordeaux.
- "Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire - C.E." - ERMEL, Hatier

ANNEXE

(document destiné aux normaux ; cf. p. 116-117)

INTRODUCTION DES ÉCRITURES MULTIPLICATIVES AU CE1

PRÉSENTATION DE LA SITUATION

Il s'agit d'une situation de communication entre les élèves.

La classe est divisée en groupes de deux types (groupes de 3, 4 élèves) :

- des groupes émetteurs,
- des groupes récepteurs.

Chaque groupe joue alternativement le rôle d'émetteur et de récepteur.

Le groupe émetteur possède une grille rectangulaire (dessinée sur une feuille photocopiée) dont les dimensions peuvent être par exemple de 7 et 12 ou bien de 9 et 14.

Le groupe récepteur possède un lot de grilles parmi lesquelles se trouve la grille du groupe émetteur.

La consigne est la suivante :

"Le groupe émetteur doit envoyer au groupe récepteur un message désignant le nombre de carreaux de la grille et lui permettant de retrouver le plus rapidement et le plus facilement possible la grille correspondante dans son lot. Ce message doit être le plus court possible."

VALIDATION DE L'ACTIVITÉ :

La situation étant une situation de communication, la validation pourra se faire dans un premier temps sur le fait que le groupe récepteur a pu ou non déterminer la grille du groupe émetteur.

Un autre élément de validation portera, lors de la comparaison des messages, sur la longueur de ceux-ci d'une part, sur la rapidité avec laquelle le groupe récepteur a retrouvé la grille d'autre part. Cela implique que le maître ait le souci constant, dans cette phase, de faire respecter les contraintes énoncées dans la consigne.

DÉROULEMENT DE L'ACTIVITÉ :

1) Énoncé de la consigne

2) Phase de recherche et élaboration des messages de la part de l'émetteur.

3) Phase de recherche de la part du récepteur pour déterminer la grille correspondante. Il pourra demander par écrit (à l'aide de phrases courtes) des explications supplémentaires s'il ne peut, compte-tenu du message, remplir sa tâche. L'émetteur devra alors envoyer un nouveau message.

4) Phase de comparaison des productions : cette phase a pour but, à partir de la comparaison des messages produits par les émetteurs et des difficultés rencontrées par les récepteurs, de dégager ou d'introduire (si aucun message de ce type n'apparaît) les avantages d'un codage à l'aide d'une écriture multiplicative.

- Les écritures canoniques ne seront pas retenues comme efficaces car elles ne permettent pas de reconnaître à coup sûr la grille.

- Les écritures traduisant un découpage en deux (ou trois...) non plus car elles demandent soit un travail important de la part du groupe récepteur, soit elles ne permettent pas de conclure de façon certaine.

- Les autres écritures additives ne satisfont pas aux contraintes de la situation : messages trop longs, demandant un temps de recherche trop important pour le groupe récepteur...

Le maître devra introduire l'écriture multiplicative à partir des messages décrivant la disposition spatiale de la collection.

S'il n'existe que des messages du type "12C, 7L", il devra alors introduire les écritures 12 x 7 et 7 x 12 comme une autre façon d'écrire cela et comme une autre écriture du nombre d'éléments de la grille.

Il fera de même pour des messages du type "12 fois 7" ou "7 fois 12".

Analyse de préparation : écritures multiplicatives au CE1

S'il apparaît des messages sous forme d'écritures multiplicatives, le maître utilisera ces élèves pour donner un sens à ce type d'écriture.

Dans tous les cas, il s'attachera à montrer que ce type d'écriture est le plus adéquat pour répondre au problème posé.

5) Donner les deux sens de l'écriture multiplicative : l'explication précédente, à partir des contraintes de la situation, ne permet de souligner qu'un seul sens de l'écriture, celui lié à la configuration de la collection.

Nous pensons qu'il est nécessaire dès cette étape de dégager le caractère numérique de cette écriture, et, pour cela, de prouver que cette écriture désigne bien un nombre entier naturel.

Quand on pose la question suivante à des élèves : "cette écriture désigne-t-elle un nombre ?", ils répondent souvent : "non, car on ne sait pas combien il y en a".

Un moyen de résoudre partiellement ce problème est de faire le lien entre cette écriture et les techniques de dénombrement mises en œuvre par certains élèves, celles qui se réfèrent à la fois à l'addition et à la disposition spatiale de la collection : les additions répétées.

Le maître pourra alors faire comparer ces deux types d'écritures, faire dégager le fait qu'elles désignent la même grille et, par là, le même nombre, et que l'écriture multiplicative est une façon plus rapide de traduire une écriture additive répétée.

Il est évidemment nécessaire de prévoir des activités renforçant cette notion. La compréhension de ce concept prend du temps.

PROLONGEMENTS

Travail individuel rapide

1) À partir d'une grille représentée sur une feuille photocopiée, l'élève doit en un temps très court (60 secondes) désigner par l'écriture de son choix le nombre d'éléments de la grille. On pourra prendre comme dimensions 17 x 21 par exemple.

2) Voici une écriture multiplicative : 7×9 ; construire une collection (sur papier quadrillé) ayant ce nombre d'éléments, ou entourer une collection ayant ce nombre d'éléments.

Annexe 3 : extraits de "les devoirs de didactique en vue de la préparation au concours des professeurs d'école" J. Hérault & D. Butlen, actes de Pau [9]

Devoirs de didactique

III-LES DEVOIRS : PRINCIPES GÉNÉRAUX

Dans un devoir de didactique, on cherche à évaluer si l'étudiant sait caractériser une activité mathématique et reconnaître les moyens qui permettent ou non, dans un champ de connaissances données, de mettre en place cette activité.

En tout état de cause, tout doit être argumenté.

Puisque cette activité s'adresse en général à des groupes d'enfants, l'étudiant doit être en mesure de faire des hypothèses sur ce qui va influencer le déroulement de la séquence, d'analyser les productions d'enfants et en particulier de faire des hypothèses sur des types d'erreurs.

Une entrée possible et souhaitable dans un devoir de didactique serait de fournir des typologies recensées d'erreurs et de procédures

(issus de travaux en didactique), pour analyser des travaux d'enfants. Cette typologie peut avoir été vue en cours ou bien être un document joint au devoir. (Voir EXTRAIT 2).

Nous nous sommes accordés sur les points suivants :

- Nous cherchons à évaluer prioritairement si un étudiant :
 - est capable de dégager une classification de procédures d'élèves.
 - est capable de dégager une classification et une hiérarchie d'erreurs d'élèves, en y intégrant la notion d'obstacle.
 - est capable de dégager les principales variables d'une situation et parmi celles-ci les variables didactiques.
 - peut amorcer une analyse a priori.
 - peut identifier des cadres.

On peut se poser la question de l'utilité de l'institutionnalisation de notions de didactique des lors qu'elles n'ont pas été ressenties d'une façon ou d'une autre comme outil d'analyse.

Devoirs de didactique

EXTRAIT 2

(en italiques, figure un exemple de réponse).

I - D'après un travail de l'IREM de Grenoble, les élèves de Quatrième rangent les nombres décimaux selon quatre règles principales erronées

Voici les règles :

R0 : On ne tient pas compte de la virgule, les nombres décimaux sont considérés comme des entiers sur lesquels est placée la virgule.

R1 : La règle de comparaison des entiers est appliquée aux parties décimales considérées seules.

R2 : A partie entière égale, le plus grand est celui qui a le plus de chiffres après la virgule.

R3 : A partie entière égale, le plus petit des deux nombres est celui qui a le plus de chiffres après la virgule.

Donnez, pour chacune de ces 4 règles, une liste de 3 nombres décimaux tels que l'application de la règle réalise un rangement exact, un rangement faux.

exemples :

R0 :	2,15	4,01	6,12	non R0	21,5	4,01	1,612
R1 :	3,15	4,21	5,22	non R1	4,15	3,21	2,22
R2 :	3,14	3,141	3,1415	non R2	3,14	3,104	3,1145
R3 :	3,014	3,14	3,4	non R3	4,321	4,32	4,3

II - Le processus qui consiste à appliquer ses connaissances antérieures dans tout nouveau domaine constitue parfois des obstacles. L'enfant utilise ce que l'on appellera un "théorème en acte".

Exemple, dans $N = \{0, 1\}$: quel que soit x et y , $(x, y > x)$ et $(x, y > y)$ est un théorème vrai.

II-1 Ce théorème appliqué dans D reste-t-il vrai ?

Il existe 0,2 et 0,3 tels que $(0,2x0,3) < 0,2$ et $(0,2x0,3) < 0,3$ donc le théorème est faux dans D.

II-2 Parmi les erreurs suivantes, quelle(s) est (sont) celle(s) que l'on peut attribuer à l'application de ce théorème ?

- (1) $0,8+0,3=0,11$
- (2) $12,4 \times 0,4=49,6$
- (3) $0 \times 9,1=9,1$

• Pour (1) on peut raisonnablement faire l'hypothèse que l'enfant considère le décimal comme un couple d'entiers naturels et qu'il additionne donc séparément les deux parties : $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$

• Pour (2), l'enfant effectue le produit des deux nombres en tant qu'entiers puis place la virgule en se donnant comme règle d'avoir un résultat plus grand.

• Pour (3), l'élément neutre de l'addition est considéré comme neutre dans la multiplication.

II-3 : Un enfant écrit :

11,4	
x 5,3	
604,2	

Quelle théorème en acte probable vient d'être utilisé ?

$a \text{ } 10^m \times b \text{ } 10^n = axb \text{ } 10^m$ ce qui est bien sûr faux.

II-4 : Un enfant place sur la droite numérique croissante 0,2 à gauche de 0,20. Quelle analyse faites-vous ?

L'enfant considère donc que $2 \cdot 20$ implique $0,2 < 0,20$

(voir la règle R2 ci-dessus).

NB : L'IREM de BORDEAUX publie les annales de l'épreuve de mathématiques du concours de recrutement des professeurs d'école.

UN EXEMPLE DE SITUATION CONSTRUITE POUR LA FORMATION EN MATHÉMATIQUES ET EN DIDACTIQUE DES PROFESSEURS D'ÉCOLE

(Marie-Lise PELTIER)

A- ARGUMENTS POUR UNE ENTRÉE DE TYPE SITUATIONNISTE, ET CONDITIONS ASSOCIÉES

1- Différents niveaux d'intervention de la didactique des mathématiques en formation des professeurs d'écoles

La didactique des mathématiques peut intervenir pour nous, enseignants formateurs de maîtres du premier degré, à la fois en tant qu'outil pour construire des situations de formation et en tant qu'objet d'enseignement pour les futurs professeurs d'école.

Il s'agit, en effet, comme nous l'avons déjà précisé précédemment, de compléter et de réorganiser les connaissances des étudiants sur les thèmes mathématiques en liaison avec ceux enseignés à l'école élémentaire, tout en "réconciliant" avec les mathématiques ceux, parmi eux, qui, de par leur passé scolaire, entretiennent des relations conflictuelles avec notre discipline.

Nos étudiants sont également de futurs enseignants du premier degré, et à ce titre ils doivent être "polyvalents", les mathématiques ne représentant qu'une fraction de ce qu'ils devront enseigner dans leur classe. Il est donc indispensable de leur donner une formation de type professionnel, c'est-à-dire, en particulier, de leur donner les moyens de construire et d'organiser un enseignement des mathématiques à l'école, efficace et de qualité, dans un temps très limité et bien qu'ils ne soient pas, la plupart du temps,

des spécialistes de notre discipline.

Les situations de formation que nous construisons sont donc spécifiques en ce sens qu'il ne s'agit pas seulement de faire faire des maths aux étudiants, il s'agit également d'initialiser avec eux une réflexion didactique en les conviant à prendre du recul ou plutôt faire "un pas de côté" pour prendre conscience des ressorts de l'apprentissage et analyser, en partant de la situation vécue, un certain nombre de conditions que doit vérifier, a priori, une situation pour provoquer effectivement un apprentissage.

La didactique des mathématiques intervient également en tant qu'objet d'enseignement pour les Professeurs d'École (PE) afin qu'ils puissent eux-mêmes s'en servir d'outil à la fois dans le cadre de la préparation, en première année, de l'épreuve de mathématiques du concours, puis surtout, ultérieurement, dans leur pratique professionnelle pour analyser des documents pédagogiques, des situations de classe, pour construire et mettre en oeuvre des situations d'enseignement.

Il s'agit donc de donner aux étudiants des éléments leur permettant de mener des analyses les plus objectives possible de phénomènes d'enseignement et d'effectuer un certain nombre de tâches qui recouvrent les différents aspects du travail de l'enseignant, et qui, en outre, peuvent faire l'objet de questions au concours.

L'étude peut porter par exemple sur la recherche, dans des documents pédagogiques, des objectifs, des connaissances en jeu, des compétences pouvant être mises en oeuvre, sur l'analyse des tâches proposées, et des modes de validation possibles, ceci de manière à permettre aux étudiants de faire des choix

argumentés parmi ces documents. Les étudiants sont ici confrontés au travail de préparation de progressions ou de séquences d'enseignement.

Le travail peut également consister en l'analyse de travaux d'enfants pour tenter d'identifier les procédures mises en oeuvre, repérer les erreurs, voire les interpréter. Il s'agit là de la prise en compte du travail des enfants dans la conduite des séquences. Un certain nombre d'outils mis au point en didactique permettent également de tirer profit de l'observation de séquences dans des classes, ou du moins de mieux "lire" des comptes rendus de séquences, cela afin d'y repérer par exemple la manière dont le maître a effectué la dévolution du problème à ses élèves, ou les savoirs qu'il a choisis d'institutionnaliser, ou bien encore d'étudier le rôle des différentes phases de la situation, ceci dans le but de donner aux étudiants les moyens de construire des séquences dont le protocole leur est fourni et de prendre des décisions lors de leur mises en oeuvre.

Enfin dans le cadre de la formation à leur futur métier, et moins directement dans celui de la préparation du concours, il s'agit d'apprendre aux étudiants à utiliser des outils didactiques pour concevoir des séquences (cerner les objectifs à atteindre, travailler les consignes, faire une analyse a priori, prévoir la gestion du temps, de l'espace, de l'hétérogénéité, prévoir les modes de validation, prévoir la synthèse, envisager entraînements, prolongements, évaluation...).

L'enjeu est donc pour nous, dans le cadre d'une telle entrée de type situationniste, de construire des situations de formation qui permettent de développer simultanément ces deux aspects, approfondissement en mathématiques et formation de type professionnel, ceci dans un temps très court, ce qui nous conduit à préciser un ensemble de conditions tant du point de vue mathématique que didactique que nous semblent devoir vérifier a priori les situations pour atteindre au mieux les objectifs que nous leur fixons.

Rappelons que dans la conjoncture actuelle, la formation en première année est sanctionnée par une épreuve de concours comportant deux volets, l'un disciplinaire, l'autre pédagogique et se

déroule dans un temps extrêmement court (entre 60 et 100 heures suivant les académies).

La seconde année les modalités de formation (horaires, contenus, évaluations) diffèrent beaucoup suivant les académies, le temps d'enseignement varie entre une trentaine et une centaine d'heures).

2- Quelques conditions mathématiques sur les situations

Pour répondre aux contraintes de formation dans la discipline, la situation nous semble devoir, dans un premier temps, permettre aux étudiants d'engager des connaissances mathématiques acquises dans leur passé scolaire, qu'elles soient du domaine des savoirs ou de celui des savoir-faire, tout en les amenant à reconstruire des connaissances oubliées ou mal construites ou éventuellement, à construire de nouvelles connaissances.

Elle doit, dans un deuxième temps, du moins c'est notre objectif, permettre une réorganisation de ces connaissances, c'est-à-dire qu'il nous paraît souhaitable que la situation conduise l'étudiant à replacer certaines connaissances dans un réseau d'autres connaissances, afin qu'il prenne conscience des liaisons existantes entre différents savoirs d'une même branche ou entre les savoirs de branches différentes.

Les thèmes mathématiques choisis doivent ainsi permettre aux étudiants non seulement de maîtriser les savoirs mathématiques sous-jacents aux contenus enseignés à l'école élémentaire, mais encore de comprendre les articulations entre ces différents contenus, et d'envisager les prolongements qui seront enseignés au collège ou au lycée.

La situation choisie doit donc permettre au professeur de faire une synthèse sur les savoirs mathématiques visés, en apportant si nécessaire des compléments.

Si les contenus mathématiques de la situation s'y prêtent, le professeur peut également donner à ce moment-là un apport d'information de nature épistémologique ou historique.

3- Quelques conditions didactiques sur les situations

Comme nous l'avons dit, la situation doit permettre en principe aux étudiants de faire un "pas de côté" par rapport à leurs pratiques mathématiques habituelles. Ceci participe à l'amorce d'une réflexion, développée par ailleurs, qui amènera les étudiants à s'intéresser aux processus de construction et d'acquisition des connaissances à propos d'un thème particulier.

Pour initialiser cette réflexion, les étudiants sont amenés à essayer de décrire leur cheminement heuristique et à analyser le rôle des différentes phases de la situation proposée pour identifier ce qui leur a permis de progresser dans leur recherche. Ils doivent également chercher à préciser le rôle des débats qu'ils ont pu mener avec les autres. Ces échanges peuvent aussi bien relever d'un apport de connaissances qu'avoir une incidence sur leur démarche du point de vue méthodologique et sur leur adhésion à une procédure ou à une solution. En particulier, il est tout à fait intéressant que les étudiants essaient de pointer les arguments qui ont provoqué leur conviction pour réfléchir à la notion de preuve.

La situation doit d'autre part permettre au professeur de pointer les éléments qui sont du ressort du "maître" dans la construction et la mise en oeuvre d'une situation d'apprentissage. Ainsi, une fois le problème choisi en fonction d'objectifs mathématiques précis, le "maître" doit-il, lors de sa préparation, préparer la dévolution, mener une analyse a priori, repérer les variables didactiques, choisir les valeurs à leur donner à la fois pour provoquer la mise en oeuvre de certaines procédures ou en bloquer d'autres, et pour gérer l'hétérogénéité de sa classe; il doit également préparer la synthèse et choisir les savoirs à institutionnaliser.

Au cours de la mise en oeuvre, il doit gérer le temps, prendre un certain nombre de décisions "à chaud", provoquer les débats, animer les mises en commun des procédures et des solutions, assurer la phase d'institutionnalisation. Puis après le déroulement il doit s'interroger sur les effets de la transposition qu'il a opérée sur les savoirs en construisant sa situation pour

s'assurer qu'il a effectivement provoqué l'apprentissage qu'il souhaitait et non pas autre chose.

Dans cette phase de la réflexion qui suit la recherche proprement dite, le professeur invite donc les étudiants à analyser la situation non seulement d'un point de vue d'élève, mais aussi du point de vue du maître, en prévision de leur future situation d'enseignants.

4- Quelques caractéristiques de la situation

Dans la situation, les étudiants doivent donc se trouver confrontés à un **problème** mathématique.

En reprenant en partie les caractéristiques que Régine Douady¹ assigne à un problème pour les élèves, nous appelons problème, une question dont la réponse n'est pas évidente pour les étudiants, mais dans laquelle ils peuvent s'engager, et pour laquelle il existe plusieurs procédures de résolution permettant un débat entre pairs. Il est souhaitable que les étudiants puissent aussi avoir le moyen de valider par eux-mêmes leurs propositions ou du moins certaines d'entre elles.

Le problème posé doit, bien sûr, être consistant du point de vue mathématique pour répondre à la première fonction de la situation, à savoir compléter les connaissances mathématiques des étudiants mais aussi pour éviter une confusion fréquente chez les étudiants entre situation d'apprentissage et situation motivante où l'élève manipule sans finalités précises!

Le problème doit enfin offrir la possibilité d'une part de proposer, par la suite, des exercices d'entraînement et de familiarisation sur le contenu mathématique, d'autre part d'étudier des documents pédagogiques sur le thème.

Ces situations peuvent être parfois assez proches de situations qui pourraient être proposées à des élèves de l'école élémentaire, afin de provoquer une meilleure adhésion de la part des étudiants, mais ce degré de proximité ne

¹Régine DOUADY. Thèse de Doctorat d'État. 1984. page 19.

doit cependant pas être trop élevé car il serait tout à fait regrettable que les étudiants considèrent ces situations comme des "situations modèles", transférables telles quelles à l'école élémentaire. Une trop grande proximité pourrait facilement engendrer cette dérive. En effet, comme nous l'avons dit, ces situations ont été construites non seulement à des fins d'apprentissage mathématique, mais aussi dans un but de formation professionnelle, pour un public d'étudiants. Même si certains ressorts de l'apprentissage en mathématiques peuvent être de même nature pour des étudiants et pour des élèves de l'école élémentaire, même si les connaissances mobilisables par les uns sont voisines de celles que peuvent mettre en oeuvre les autres, un "transfert" à l'école élémentaire du problème mathématique posé ne peut être que très partiel et nécessite une reconstruction de la situation pour l'adapter aux objectifs de l'école.

5- La contrainte du temps

Comme nous l'avons précédemment souligné, le nombre d'heures de formation en mathématiques est relativement peu important, cette contrainte temps pèse très lourdement sur la mise en oeuvre des situations et ceci pour au moins deux raisons.

En effet, si nous différons l'analyse didactique de la situation proposée, les étudiants ne peuvent pas, plusieurs jours après avoir vécu la situation, se souvenir des différents ressorts qui leur avaient permis d'avancer dans la résolution, du rôle des discussions avec leur pairs, des arguments qui avaient emporté leur adhésion, en résumé de tout un ensemble de "petits faits" qui, tout en ayant joué un rôle de catalyseur, ne sont pas de première importance à leur yeux.

Par ailleurs, si nous différons la synthèse mathématique, nous risquons de conforter les étudiants dans l'idée que les connaissances investies au cours de la résolution d'un problème, n'ont pas besoin de faire l'objet d'une institutionnalisation, que le seul fait de les avoir fait fonctionner

suffit à les retenir, et à les considérer comme acquises.

Pour optimiser l'efficacité d'une telle approche "situationniste", il nous faut donc être très stricts dans la mise en oeuvre et la conduite de la situation.

Nous sommes amenés à distinguer deux cas liés au contenu mathématique que nous nous proposons d'étudier.

Lorsque la situation cible un savoir "pointu" et doit, d'après nous, faire l'objet d'une seule séance, alors toutes les phases, présentation de la situation, temps de recherche, mise en commun, synthèse mathématique sur le savoir ciblé, analyse didactique de la situation, doivent "tenir" dans le temps prévu, et le professeur doit faire preuve de ses qualités de gestion du temps et prendre au cours de la séance un certain nombre de décisions pour éviter les dérapages.

Lorsque la situation proposée nécessite une progression sur plusieurs séances, alors cette progression doit être découpée en phases pouvant tenir chacune dans une séance. A la fin de chaque séance une synthèse mathématique et une analyse didactique sur quelques points précis conduiront à des institutionnalisations locales, et ce sera seulement à la fin de la progression que sera menée la synthèse mathématique complète avec éventuels apports d'informations, en situant les savoirs étudiés dans "l'édifice des savoirs mathématiques" concernant le thème, ainsi que l'analyse didactique de la progression, en s'appuyant sur les institutionnalisations locales, et en choisissant de dégager les concepts de didactique qui nous paraissent les plus pertinents à pointer dans cette situation.

6- Les questions de reproductibilité

Nous avons construit sur ce modèle un certain nombre de situations, plusieurs d'entre elles sont rédigées dans les actes des stages de Cahors et de Pau, ou dans des brochures IREM.

Se pose maintenant le problème de la reproductibilité de ces situations.

Cette question, qui a d'ailleurs fait l'objet de la réflexion d'un groupe de travail lors

du stage national de Colmar en mars 1993, est une question difficile sur laquelle il convient de continuer à travailler.

Il est encore difficile de répertorier précisément les conditions de reproductibilité. Nous pouvons cependant identifier assez facilement des régularités dans les procédures mises en oeuvre par les étudiants ainsi que dans les erreurs qu'ils produisent, ce qui permet de reproduire assez facilement une partie des synthèses d'ordre didactique.

En revanche, les phases de synthèses mathématiques s'appuyant largement sur les connaissances investies par les étudiants au cours de la résolution, sont beaucoup plus difficilement reproductibles. En effet, un apport d'informations ne peut prendre son sens que dans le cas où le degré de compétence en mathématique des étudiants le permet. Si les étudiants sont trop éloignés de ce degré, le professeur est obligé de "négocier à la baisse" l'institutionnalisation mathématique et en ce sens la situation a perdu une grande partie de sa pertinence.

Nous pouvons également faire l'hypothèse que le rôle du professeur dans la conduite de telles situations est tout à fait primordial. Or les comptes rendus rédigés ne soulignent pas toujours assez clairement ce rôle et lorsque celui-ci est peu explicite, l'interprétation par le collègue du protocole écrit entraîne parfois des effets mal maîtrisables lors de la mise en oeuvre.

En conclusion, il nous semble que la mise en oeuvre de situations de ce type optimise le double rôle que nous assignons à la formation.

Parallèlement, il nous paraît nécessaire de consacrer un certain nombre de séances à des activités soit d'entraînement sur les contenus mathématiques abordés au cours des situations, soit d'analyse de documents et de productions d'élèves sur ces thèmes, et de concevoir des synthèses plus globales sur certains concepts de didactique ainsi que des apports d'informations sur d'autres qui d'après nous ne peuvent être abordés par ce type de travail.

B- UN EXEMPLE: SUITE DE SÉQUENCES SUR AIRE ET SYMÉTRIE

Nous allons maintenant présenter une situation construite pour la formation afin de réorganiser et de compléter les connaissances des étudiants dans deux domaines : la symétrie centrale et l'aire des figures planes, et d'illustrer les aspects outil et objet des connaissances.

La situation est construite de telle sorte que la symétrie centrale intervient comme outil le plus souvent implicite de résolution du problème posé, tandis que l'aire des figures planes est à introduire en tant qu'objet. Cependant l'institutionnalisation concernera non seulement l'aire mais aussi la symétrie centrale. Des prolongements permettront de consolider la notion d'aire tout en replaçant la symétrie centrale dans la famille des rotations du plan.

Nous allons tout d'abord donner les objectifs que nous assignons à cette situation, puis nous présenterons succinctement les différentes phases de la situation dans un ordre chronologique, en adjoignant à la description du scénario, les procédures observées chez les étudiants lors des différentes consignes, ceci en raison de la régularité de leur apparition au cours des multiples ¹ mises en oeuvre de cette situation, ainsi que des bilans partiels permettant de confronter objectifs et résultats. En conclusion nous donnerons quelques éléments permettant d'envisager des pistes d'évaluation d'un tel travail.

1- Objectifs

Du point de vue mathématique, l'enseignant a tout d'abord l'intention d'amener les étudiants à dégager un certain concept d'aire d'une surface plane, en distinguant les idées de grandeur et de mesure, ainsi que les notions d'aire, de périmètre et de forme, à préciser la notion de mesure et à mettre en évidence et en

¹Cette situation a été proposée plus d'une vingtaine de fois en formation

oeuvre certaines de ses propriétés telles que l'additivité.

D'autre part, l'enseignant souhaite proposer une situation dans laquelle les transformations ponctuelles et en particulier la symétrie centrale et la rotation, interviennent d'un point de vue dynamique, comme outil de résolution du problème, et permettre aux étudiants de travailler sur les propriétés de ces isométries.

Enfin les étudiants seront conduits à utiliser des fractions pour désigner des mesures d'aire (une unité ayant été choisie), et à revoir ainsi un certain nombre de propriétés relatives à la comparaison et à quelques opérations sur les fractions.

D'un point de vue didactique, la situation proposée peut permettre d'illustrer plusieurs aspects de la résolution d'un problème. L'enseignant choisit a priori de pointer les différents statuts que peuvent avoir les connaissances au cours de la résolution, statut d'outil implicite ou explicite, statut d'objet dans les phases de synthèse, dialectique qui s'établit entre ces différents statuts. Il s'intéresse aussi au rôle de l'erreur dans la recherche et par suite dans la construction des connaissances, et plus généralement aux modes de validation.

2- Déroulement, procédures observées, et bilans partiels

Première phase

Lors de la première phase, les étudiants disposent de feuilles d'annuaires téléphoniques (format A4) en grand nombre, de ciseaux et des instruments usuels de géométrie, et travaillent individuellement (l'effectif d'un groupe est environ de 28 étudiants).

Le professeur donne la consigne suivante: "Vous devez partager chaque feuille en deux parties exactement superposables, sans perte de papier et sans recollage (c'est-à-dire qu'avec les deux parties il sera possible de reconstituer la feuille initiale), vous devez chercher un maximum de

partages différents répondant à cette consigne de partage que nous désignerons par (P)".

Les procédures observées lors de la recherche de partages répondant à la consigne ainsi donnée sont très stables:

- les étudiants commencent par plier la feuille en deux suivant les médianes, puis suivant les diagonales du rectangle. En général, à ce moment, certains pensent qu'ils ont trouvé tous les partages possibles, il est alors nécessaire de relancer la recherche en leur demandant d'en trouver d'autres.

- la procédure qui apparaît souvent ensuite, consiste à plier la feuille de telle sorte que deux sommets opposés se superposent. Ce partage déclenche la prise de conscience de l'existence d'une infinité de solutions.

- puis apparaissent les procédures suivantes:

- les pliages en 8 ou en 16, suivis de dépliages et de découpages en suivant certaines lignes de pliage plus ou moins bien choisies (d'où des réussites et des échecs)

- la construction de segments de même longueur en partant de deux sommets opposés

- la construction d'une ligne de partage symétrique par rapport à une médiane ou une diagonale, puis, en raison de l'échec, évolution de cette procédure vers la construction d'une ligne de partage symétrique par rapport au centre du rectangle.

De très nombreux essais n'aboutissent pas, mais ces essais permettent à leurs auteurs de faire de nouvelles hypothèses sur les propriétés de la ligne de partage.

Après un certain temps de recherche (environ 15 minutes), mais avant toute mise en commun des procédures de partages, le professeur donne aux étudiants une seconde consigne les incitant à préciser leur réflexion, et à tenter de formuler des conditions que doit vérifier la ligne de partage pour que le partage réalisé réponde à la consigne.

Le professeur laisse les étudiants reprendre leur recherche (environ 15 à 20 min), puis

les invitent à mettre en commun leurs propositions.

La première condition proposée par les étudiants est en général que cette ligne de partage doit être symétrique par rapport soit à une médiane, soit à une diagonale. Cette hypothèse est immédiatement rejetée par les étudiants qui, ayant déjà essayé, exhibent le résultat de tels partages.

Certains proposent alors une symétrie par rapport "aux deux médianes". On peut penser que ces étudiants envisagent en fait la composée des deux symétries axiales, mais la plupart du temps, ils n'arrivent pas au bout de leur proposition.

Généralement les étudiants ne parviennent pas à désigner la condition cherchée, mais nombreux sont ceux qui parviennent à construire une ligne de partage polygonale symétrique par rapport au centre du rectangle, et sont capables d'expliquer comment ils "font" pour la construire: "il faut partir d'un point du bord de la feuille, et placer le point correspondant de l'autre côté, puis faire des trajets en sens contraire par exemple si, d'un côté, on fait un trait horizontal de 2 cm vers la droite, de l'autre côté, il faut faire un trait de 2 cm, horizontal vers la gauche, jusqu'à ce que les deux trajets se rejoignent au centre de la feuille."

Il est à noter que les étudiants partent très rarement du centre de la feuille, ils utilisent plus fréquemment les "bords" de la feuille pour effectuer leurs repérages.

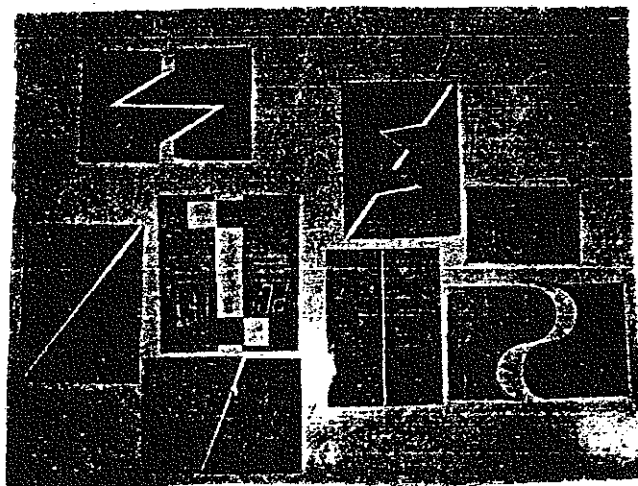
On voit clairement ici que la symétrie centrale intervient de façon totalement implicite, essentiellement par ses propriétés de conservation des distances et des angles (du parallélisme et de l'orthogonalité), et très rarement par sa définition classique faisant appel au centre comme milieu du segment joignant deux points homologues.

Il est alors intéressant de demander aux étudiants quel mouvement faire subir à l'une des deux parties d'un partage (P), pour la superposer à l'autre.

Presque tous les étudiants proposent de retourner une des deux parties, et font effectivement la manipulation. Ils sont très surpris que cette manipulation n'aboutisse que dans de rares cas.

Ils tentent ensuite, après avoir reconstitué la feuille initiale, de faire glisser une partie sur l'autre, en pivotant, mais généralement, ils ne cherchent ni autour de quel point s'effectue le pivotement, ni de combien on pivote, ils se bornent à une réponse du type "il faut faire tourner une partie sur l'autre"; il est donc nécessaire de repréciser la consigne, afin d'obtenir des réponses plus complètes qui permettent aux étudiants de prendre réellement conscience qu'il ne s'agit pas d'un cas de symétrie axiale, mais d'une transformation qui "s'apparente" aux rotations.

On constate que l'idée de symétrie axiale est très résistante, et que c'est cette consigne qui permet une identification de la symétrie centrale comme rotation d'un demi-tour.



Les étudiants viennent alors afficher un certain nombre de partages réalisés. Ils vérifient à chaque fois la superposition exacte des deux parties et la reconstitution possible de la feuille initiale avec les deux parties, ils expliquent également le procédé utilisé pour construire la ligne de partage. Si aucun étudiant ne parvient à formuler la condition en terme de symétrie par rapport au centre du rectangle, c'est le professeur qui caractérise ainsi les lignes de partage répondant à la consigne proposée.

Une dernière consigne est alors proposée aux étudiants : "est-il possible de découper une demi-feuille issue d'un partage pour reconstituer une demi-feuille d'un autre partage ?"

Après un temps de recherche généralement court, les étudiants sont convaincus qu'il est toujours possible de reconstituer une demi-feuille issue de n'importe quel partage (P), ce qui les conduit naturellement à penser qu'il est donc possible de transformer par découpage et recollement sans chevauchement une demi-feuille d'un partage en une demi-feuille d'un autre partage.

Les étudiants prennent alors conscience de l'indépendance de l'aire et de la forme.

Il s'agit donc pour les étudiants, dans cette première phase, de construire des surfaces de même aire mais de formes différentes, en utilisant implicitement la symétrie centrale puis d'essayer de rendre explicite cet outil de résolution du problème posé. Pour le professeur il s'agit d'une part de présenter la notion d'aire d'une surface plane hors contexte numérique, d'autre part d'exhiber le rôle de la symétrie centrale dans cette situation de partage, enfin de pointer la possibilité pour les étudiants de valider eux-mêmes leur proposition, le rôle positif de l'erreur dans cette recherche, ainsi que les divers statuts des connaissances mathématiques investies au cours de la résolution.

Comme nous l'avons déjà signalé, les procédures mises en oeuvre par les étudiants sont très stables, de même que le temps mis pour obtenir des partages non triviaux et pour formuler des conditions sur la ligne de partage, ce qui permet au professeur de prévoir avec précision ses interventions ainsi que le contenu de la synthèse et de l'apport d'informations.

Cette première institutionnalisation va porter essentiellement sur le concept d'aire et sur la symétrie centrale.

Nous pouvons la résumer ainsi :

Sur l'aire :

- Les deux parties issues d'un partage (P) sont superposables, elles ont donc même forme et même périmètre.
- Deux parties issues de deux partages (P) différents ne sont pas superposables, pourtant elles vérifient toutes les deux la propriété: "avec deux parties analogues à chacune d'elles, on peut reconstituer la feuille entière": elles sont donc aussi étendues l'une que l'autre, elles contiennent la même quantité de papier, elles correspondent toutes les deux à une demi-feuille, on dit qu'elles ont même aire.

Quelques propriétés de ce concept, dégagées par les étudiants, sont également données, sans démonstration:

- Deux surfaces de même aire n'ont pas nécessairement la même forme.
- Deux surfaces de même aire n'ont pas nécessairement le même périmètre.
- Deux surfaces superposables ont même aire, même forme, même périmètre.
- A partir d'une partie quelconque issue d'un partage (P), on peut, par découpage et recollement, sans chevauchement, et sans perte de papier, construire n'importe quelle autre partie issue d'un autre partage (P).

Sur la symétrie centrale:

- La ligne de partage est symétrique par rapport au centre I du rectangle, on peut encore dire qu'elle est invariante dans la symétrie de centre I, ce qui signifie que si l'on fait subir à cette ligne la symétrie centrale de centre I, elle se transforme en elle-même.
- La symétrie centrale est une transformation ponctuelle qui conserve les distances, on dit que c'est une isométrie, elle conserve donc aussi les angles, le parallélisme, l'orthogonalité, elle conserve également l'orientation.
- Un point M et son symétrique M' sont alignés avec le centre de symétrie I, et I est le milieu du segment MM'.
- La symétrie centrale de centre I est une rotation de centre I et d'angle 180° , cela correspond à un demi-tour autour du point I, ou encore à un pivotement de 180° autour de I.

- La symétrie centrale conserve l'aire des figures planes.

Le professeur dégage enfin quelques éléments d'ordre didactique:

- La notion d'aire d'une figure plane apparaît ici sous son aspect objet, elle est présentée par l'enseignant comme propriété caractérisant une classe de figures de formes variées.

- La notion de symétrie centrale apparaît ici comme outil *implicite* de résolution du problème posé. Elle est ensuite pointée dans la synthèse et identifiée comme objet mathématique, dont un certain nombre de propriétés ont été utilisées implicitement par les étudiants.

La dernière consigne de cette phase permet aux étudiants de constituer un stock de surfaces d'aires différentes mais facilement comparables, tout en réinvestissant ce qu'ils ont fait ou vu faire par d'autres au cours de la phase précédente. Il s'agit en effet de partager cette fois des demi-feuilles ou des quarts de feuilles rectangulaires en respectant toujours la consigne (P).

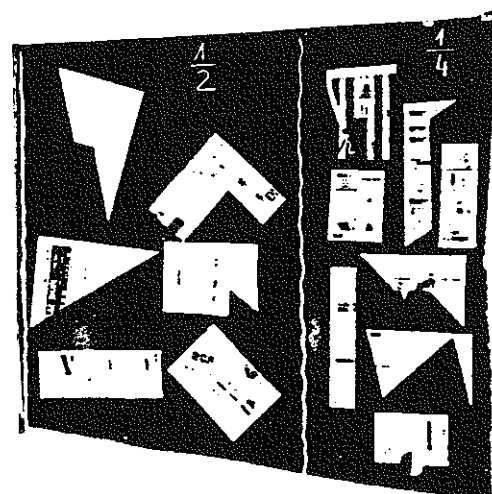
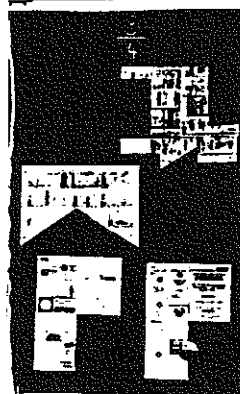
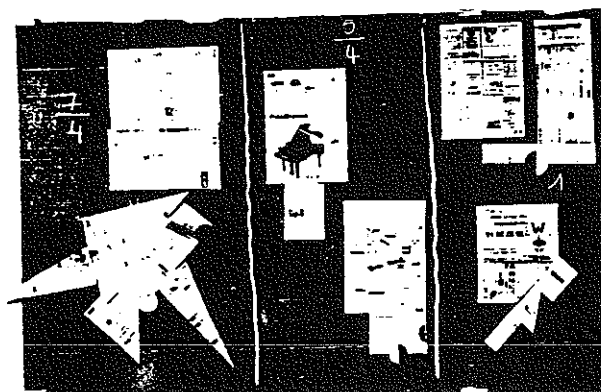
L'objectif spécifique de cette dernière partie de la phase 1 est le réinvestissement direct des notions d'aire et de symétrie dans un contexte en tout point analogue à celui qui les avait fait émerger.

A ce stade les étudiants, tout en prenant plaisir à laisser libre cours à leur imagination, prennent conscience que l'on peut augmenter à loisir le périmètre de la surface sans en augmenter l'aire, et utilisent sans difficulté les propriétés de la symétrie centrale pour construire des lignes de partage de plus en plus sophistiquées.

Deuxième phase

Les étudiants sont invités à construire diverses classes de surfaces ayant la même aire, à les désigner par des fractions après avoir choisi pour unité d'aire la classe constituée des surfaces ayant même aire que la feuille d'annuaire. Ils doivent ensuite mettre en ordre les différentes classes et produire des égalités et des

inégalités entre diverses écritures fractionnaires pour traduire l'appartenance à la même classe de plusieurs surfaces constituées différemment, ou l'appartenance à des classes différentes mais ordonnées en fonction de l'aire des surfaces qui les constituent.¹



¹ Nous ne développerons pas beaucoup cette partie qui est à la fois une phase d'appropriation de la notion d'aire et de révision sur les fractions, mais qui ne donne pas lieu à des procédures variées.

Cette phase se conclut par une synthèse au cours de laquelle le professeur récapitule les différentes étapes qui ont permis de:

- construire la grandeur aire
- définition d'une relation d'équivalence sur un ensemble de "bonnes" surfaces
- construction de l'ensemble quotient
- mise en place d'une relation d'ordre sur l'ensemble quotient
- construire un codage numérique qui est une mesure: construction d'une application de l'ensemble quotient dans l'ensemble des réels
- positive
- additive
- monotone
- parfaitement déterminée par le choix d'une unité, ici la classe du rectangle A4
- vérifiant les propriétés suivantes
- l'inégalité triangulaire
- les surfaces vides ont une aire nulle
- il existe des surfaces non vides d'aire nulle.

Sur le plan didactique le professeur pointe ici le fait que la symétrie centrale apparaît dans cette phase en temps qu'outil *explicite* de résolution des problèmes de partages posés; il note l'alternance des statuts d'outil et d'objet de la symétrie centrale au cours de la situation et l'aspect dialectique de ces deux statuts.

L'objectif de cette partie de la situation est l'introduction d'un codage fractionnaire des classes de surfaces de même aire permettant de "construire" une mesure en distinguant de façon naturelle objet géométrique, grandeur mesurable et mesure.

Il ne s'agit pas ici d'une réelle phase de recherche, mais plutôt d'une organisation des différentes figures construites par découpage de rectangles ou par assemblage sans chevauchement de figures déjà construites, renforçant la prise de conscience de l'absence de

lien entre forme, périmètre et aire.

Les étudiants, lors de la synthèse, ont besoin d'allers retours permanents entre la situation vécue et les propriétés qui sont apportées par le professeur, mais nous notons que malgré la difficulté que peut représenter cette synthèse pour un public majoritairement non scientifique, la quasi totalité des étudiants manifeste un intérêt soutenu pour cette "théorisation" et cherche à savoir si cette méthode de "construction" de l'aire et de la mesure qui lui est associée convient également pour les longueurs ou les masses.

Troisième phase

Les étudiants sont conviés à résoudre deux exercices extraits du manuel Objectif calcul CM1 (Hatier 1987).

Il s'agit de partager un carré en quatre parties "exactement" superposables, puis un hexagone régulier en six parties "exactement" superposables.

Les énoncés du manuel sont légèrement modifiés dans un premier temps pour bloquer des procédures liées au dénombrement (les figures à partager seront données sur papier uni et non sur réseau carré ou triangulaire comme dans le manuel).

Pour le partage du carré en quatre parties superposables, en dehors des solutions classiques à l'aide des diagonales ou des médianes, certains étudiants commencent à partager le carré en deux rectangles superposables, puis partagent chacun des rectangles ainsi obtenus en construisant des lignes de partage symétriques par rapport à leur centre; d'autres cherchent des lignes de partage à partir du centre I du carré, se déduisant les uns des autres par rotation de 90°, d'autres encore partagent le carré en deux en construisant une ligne symétrique par rapport au centre puis font subir à cette ligne une rotation de centre I et d'angle 90°.

L'hexagone est proposé pour bloquer les procédures "d'évitement" rencontrées dans

le cas du partage du carré, consistant à se ramener à des partages de rectangles. De nombreux étudiants proposent d'emblée le partage en 6 triangles équilatéraux. D'autres construisent une ligne de partage partant du centre et rejoignant un des côtés de l'hexagone, puis la font "tourner" autour du centre I, cinq fois de suite, (rotations de centre I, d'angle 60°). D'autres enfin construisent une ligne de partage symétrique par rapport au centre I de l'hexagone, puis après plusieurs essais infructueux, la font pivoter autour de I, deux fois de suite, par rotation de centre I et d'angle 60° .

Après un certain temps de recherche (15 à 20 min), les étudiants mettent en commun leurs procédures de partage et leurs résultats.

Nous constatons que les procédures mises en oeuvre par les étudiants s'appuient essentiellement sur les connaissances acquises sur la symétrie centrale, mais aussi que le type de figure à partager (carré et hexagone) a une incidence sur ces procédures. Il est intéressant de vérifier que seule la donnée de l'hexagone permet de mettre en échec la procédure s'appuyant sur le partage de rectangles.

Le professeur fait un apport d'informations sur les propriétés des rotations, afin d'identifier la symétrie centrale comme rotation d'angle 180° .

La synthèse didactique de cette phase porte sur l'aspect outil des rotations pour résoudre ces problèmes.

Cette phase a en effet pour but de provoquer chez les étudiants une reconnaissance de la symétrie centrale comme une rotation d'angle 180° , ainsi qu'un transfert des connaissances sur la symétrie centrale aux rotations, tout en réinvestissant la notion d'aire. Comme nous l'avons vu, de nombreux étudiants ne cherchent pas dans un premier temps à adapter leurs connaissances à ces nouveaux problèmes mais préfèrent appliquer directement, tant que cela leur est possible, le savoir-faire qu'ils commencent à

maîtriser. Il est donc indispensable à nos yeux de proposer ces prolongements à la situation initiale qui provoquent une mise en cause de l'outil mathématique jusqu'alors adapté.

Quatrième phase

L'étude proposée aux étudiants (par groupe de 3 ou 4) porte sur plusieurs documents extraits de divers manuels scolaires dont celui du manuel Objectif calcul CM1, qui a servi de support lors de la troisième phase.

Dans ces documents portant soit sur l'aire des figures planes soit sur les isométries, les étudiants doivent tout d'abord repérer les connaissances visées explicitement et préciser sous quels aspects ces connaissances sont envisagées. Ils ont ensuite à mener une petite analyse a priori en répertoriant les compétences pouvant être mises en oeuvre lors de la résolution. La troisième tâche consiste à repérer les connaissances qui sont ou devraient être institutionnalisées. Enfin, après avoir apprécié la cohérence de l'ensemble du document, le professeur leur demande d'étudier si les connaissances sont présentées indépendamment les unes des autres ou si elles sont mises en réseau.

Les diverses analyses sont mises en commun et discutées.

L'objectif spécifique de cette phase est d'étudier des documents pédagogiques en centrant l'analyse sur le caractère outil ou objet des connaissances en **jeu**, tout en sensibilisant les étudiants à d'autres aspects de l'analyse de documents.

Une phase d'institutionnalisation conclut la situation.

Sur le plan mathématique, il s'agit d'un rappel des différents points qui ont été étudiés au cours de cette situation: aire, mesure, fractions, symétrie centrale, rotation.

Sur le plan didactique, nous choisissons de reprendre l'analyse de la situation en termes de fonctionnement des connaissances, puis nous apportons un complément d'informations en replaçant "la dialectique outil, objet " dans la théorie élaborée par R. Douady.

3- Conclusion

Comme nous l'avons déjà indiqué, cette situation a été proposée de nombreuses fois par plusieurs formateurs, non seulement à des groupes d'étudiants de première année, mais aussi à des stagiaires de deuxième année, à des normaliens et à des maîtres en formation continue.

Nous constatons une très forte reproductibilité des procédures mises en oeuvre par les divers publics à de nombreuses consignes, mais des différences sensibles au niveau des phases d'institutionnalisation qui, comme nous l'avons dit, directement s'appuient sur les connaissances mobilisées par les participants.

Certaines phases de la situation ont fait l'objet d'une expérimentation, dans le cadre de travaux d'IREM, avec des élèves de CM1 et CM2, avec comme objectif principal et déclaré l'introduction des fractions dans un contexte de partage de surfaces.

Le professeur peut ainsi donner aux étudiants en formation un certain nombre d'éléments sur les précautions à prendre pour "transférer" une situation de formation en situation de classe, sur des modalités de déroulement possible, sur les résultats que l'on est en droit d'attendre. La "caution" du terrain est ici un élément non négligeable pour que la discussion aboutisse.

Certains étudiants ont présenté, lors de visites d'évaluation en stage, certaines phases de ce travail soit pour introduire la notion d'aire soit pour travailler la notion de fraction. Mais aucun n'a retenu cette situation pour travailler sur la symétrie centrale, ce qui se justifie puisque cette transformation est à peine abordée à l'école élémentaire.

Subjectivement, il semble qu'après une formation s'articulant autour d'un certain nombre de situations phares comme celle

présentée précédemment, les étudiants n'hésitent pas à proposer à leurs élèves des situations de recherche effective. Nous notons également que les stagiaires choisissent assez souvent certains éléments des situations qu'ils ont eux-mêmes vécues, en les adaptant à leur classe et à leur progression en privilégiant parfois, comme nous venons de le voir, certains des objectifs de l'activité.

Ceci conforte la réflexion sur le degré de proximité des situations de formation avec des situations de classe: l'écart, nous semble-t-il, doit être suffisant pour que l'étudiant soit amené à rebâtir la situation et à la structurer différemment.

Cependant l'évaluation des pratiques des étudiants en stage n'est pas encore suffisamment théorisée pour qu'il soit possible de cerner, objectivement, l'impact d'une formation de cette nature sur le choix et la conduite des séquences de classe présentées par les stagiaires.

Ces recherches restent à faire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Actes de la première Université d'Été des P.E.N. - Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire - Olivet - juillet 1988 - IREM de Bordeaux
- [2] Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Bombannes - 1979 - IREM de Bordeaux 1
- [3] Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Qimper - 1986 - IREM de Rennes
- [4] Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) d'Angers - 1987 - IREM de Nantes
- [5] Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Rouen - 1988 - IREM de Rouen
- [6] Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Bordeaux - 1987 - IREM de Bordeaux
- [7] Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Paris - 1990 - IREM de Paris VII
- [8] Actes du stage national de Cahors organisé par la COPIRELEM - 1991 - "Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques" - tome 1 - IREM de Paris VII.
- [9] Actes du stage national de Pau organisé par la COPIRELEM - 1993 - "Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques" - tome 2 - IREM de Bordeaux.
- [10] Actes du stage national de Colmar organisé par la COPIRELEM - 1994 - "Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques" - tome 3 - IREM de Paris VII.
- [11] BUTLEN D. Actes de la 6ème université d'été de didactique des mathématiques - Saint-Sauves d'Auvergne - août 1993 - Quelques remarques sur les activités d'observation dans la formation des professeurs d'école - contribution au thème 7 : l'observation de classes : outil de recherche, outil de formation
- [12] BUTLEN D. et PEZARD M. Document de travail pour la formation des maîtres n°4 de l'IREM de Paris VII, "Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs Instituteurs-Maîtres-Formateurs"
- [13] BUTLEN D. et BOLON J. "Quelle didactique en formation des maîtres : quelques questions posées par des expériences d'enseignement en formation initiale et continue d'instituteurs, de professeurs de collèges et de lycées, document de travail n°8 pour la formation des enseignants, IREM de Paris VII, université de Paris VII
- [14] CHEVALLARD Y. (1992) L'observation didactique, intervention à l'université d'automne de Fréjus des formateurs IUFM sud-est
- [15] COLOMB J. Contribution à la formation des maîtres - 1992 - INRP - Paris
- [16] DE KETELE J.M. et POSTIC M. - 1988 - Observer les situations éducatives - P.U.F - Paris
- [17] Document de travail pour la formation des maîtres n°3 de l'IREM de Paris VII, "Formation professionnelle initiale des enseignants du second degré en mathématiques, actes de la journée de réflexion organisée le 06/04/91 à Paris par la Commission Inter-IREM Université et l'équipe DIDIREM"

- [18] Document de travail pour la formation des maîtres n°5 de l'IREM de Paris VII, "Formation à l'enseignement des mathématiques..."
- [19] DOUADY R. "jeux de cadres et dialectique outil-objet" - Recherche en didactique des mathématiques n° 7 - 2 - La Pensée Sauvage.
- [20] DOUADY R. "De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle" - cahier n°6 de didactique des mathématiques.
- [21] ERMEL/INRP - Apprentissages mathématiques - GS de maternelle
- [22] ERMEL CM - Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire INRP - éditions HATIER
- [23] ERMEL CE - apprentissages mathématiques à l'école élémentaire - INRP - HATIER
- [24] "Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques (DEUG premier degré" - Publications de l'IFM de Grenoble - numéro 19 - avril 1987
- [25] GAIRIN-CALVO S. Contribution aux actes du colloque des P.E.N. (Inter-IREM) de Angers - 1987 -
- [26] HENRY M. 1991, Didactique des mathématiques, en vue de la formation des enseignants, IREM de Besançon
- [27] KUZNIAK Alain, 1994, Études des stratégies de formation utilisées par les formateurs des maîtres du premier degré. Thèse de doctorat, Université de Paris VII, IREM de Paris VII.
- [28] PEAULT H. Contribution aux Actes du colloque des P.E.N. (Inter-IREM) de Rouen - 1988 - IREM de Haute Normandie
- [29] PEZARD M. "A propos de l'enseignement de la proportionnalité" - Cahier de didactique des mathématiques n°20 - IREM Paris VII
- [30] PEZARD M. , Thèse de 3ème cycle de didactique des mathématiques : une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs - IREM de Paris VII.
- [31] PORTUGAIS J, BRUN J - 1994 - De futurs instituteurs formés à la didactique des mathématiques, étude de cas - Vingt de Didactique des mathématiques en France- actes du colloque - La Pensée Sauvage
- [32] PORTUGAIS J. Didactique des mathématiques et formation des enseignants, le cas des erreurs de calcul, thèse de doctorat n°195, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université de Genève, 11 novembre 1992
- [33] ROBERT A. "Une intervention en didactique des mathématiques à des élèves-instituteurs en 3ème année d'école normale (FP3)" - cahier n°17 de didactique des mathématiques - IREM de Paris VII
- [34] ROBERT A. "Une introduction à la didactique des mathématiques" - cahier n°50 de didactique des mathématiques - IREM de Paris VII
- [35] ROBERT A. Document de travail pour la formation des maîtres n°1 de l'IREM de Paris VII, "formation en didactique des mathématiques, une expérience en CPR interne"
- [36] ROBERT A. cahier n°51 de didactique des mathématiques de l'IREM de Paris VII, "réflexions sur l'analyse de textes d'exercices des manuels" - IREM de Paris VII

Notre site WEB

<http://iremp7.math.jussieu.fr>

**IREM Université Paris7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05**

TITRE :

ENSEIGNER LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES AUX FUTURS PROFESSEURS
D'ÉCOLE

AUTEUR :

BUTLEN Denis
PELTIER Marie-Lise

RESUME :

Dans la première partie, nous exposons l'état de notre réflexion sur l'enseignement de la didactique aux futurs professeurs d'école. La seconde donne un exemple de situation construite pour la formation en mathématiques et en didactique des professeurs d'école

MOTS CLES :

Didactique des Mathématiques

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05
Dépôt légal : 1994
ISBN : 2-86612-190-2