Isaac NEWTON: Détermination de tangentes à des courbes à l'aide de la méthode des fluxions.

Philippe BRIN d'après une conférence de Jean-Luc VERLEY

En 1740, paraît la traduction en français d'un ouvrage de Newton intitulé: **"La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies"**. D'après Buffon, traducteur de cet ouvrage, le manuscrit a été rédigé en latin entre 1664 et 1671, mais seule une traduction anglaise en a été publiée en 1736, augmentée des commentaires de Colson[1], traducteur du manuscrit.

Dans cet ouvrage, Newton expose la "Méthode des Fluxions" et son application à la recherche de tangentes à des courbes. Cette méthode repose sur des considérations de type infinitésimal et, d'une certaine façon, fait apparaître un algorithme pour la détermination de tangentes s'appliquant à n'importe quel type de courbe. Elle est sensiblement différente des méthodes utilisées par des mathématiciens comme Descartes ou Fermat. En effet, au début du 17° siècle, Descartes et Fermat utilisent des méthodes algébriques pour déterminer les tangentes aux courbes étudiées, ainsi que les propriétés géométriques particulières de ces courbes. Ces méthodes vont faire apparaître ce qui est aujourd'hui appelé polynôme dérivé formel, et qui sera utilisé par l'école cartésienne. Cette école, représentée par Van Schooten, Florimont de Beaune, se situe à contre-courant de ce qui va être le calcul infinitésimal.

Né en 1642 à Woolsthorpe (Lincolnshire), Newton entre en 1661 au Trinity College où il est élève de Barrow[2], dont il prendra la succession à la chaire de mathématiques en 1669. Durant la grande peste de Londres (1665-1666), il retourne dans le Lincolnshire et y continue ses travaux. Ainsi qu'il l'écrira plus tard, c'est à cette période qu'il fera ses plus importantes découvertes, notamment, celles concernant le calcul des fluxions. On peut lire, dans son traité **De Quadratura Curvarum**: *"[...] je suis tombé, dans les années 1665-1666, sur la méthode des fluxions dont je ferai usage dans la quadrature des courbes."*

Les ouvrages de Newton concernant le calcul infinitésimal seront, pour la plupart, publiés bien après leur rédaction:

De Analysi per Aequation Numero Terminorum Infinitas est écrit en 1669 mais ne sera publié qu'en 1711. C'est dans cet ouvrage que la méthode des fluxions apparait pour la première fois.

Vers 1671, et sur les conseils de Barrow, Newton va développer cette méthode dans son manuscrit **Methodus Fluxionum et Seriarum Infinitorum**.

Dans le **De Quadratura Curvarum** qui est écrit en 1676, Newton utilise largement le calcul des fluxions. Cet ouvrage, publié en 1704 en appendice à l'**Opticks**, est donc le premier à diffuser ce "nouveau calcul".

---

[1]John Colson (?-1760), professeur de mathématiques à Cambridge, a traduit plusieurs ouvrages de Newton.
[2]Isaac Barrow (1630-1677), mathématicien anglais, est auteur d'un ouvrage sur la détermination de tangentes et le calcul dérivé (Lectiones Geometricae, 1669)

La plus célèbre œuvre de Newton, **Philosophae Naturalis Principia Mathematica,** sera publiée aussitôt terminée, en 1687. Elle n'utilise pas le calcul infinitésimal, ni la méthode des fluxions, mais certains passages permettent de mieux comprendre les conceptions infinitésimales de Newton. Dans le chapitre intitulé *"Du Mouvement des Corps"*, est développée *"la méthode des premières et dernières raisons"* qui fait apparaître une notion intuitive de limite. Pour justifier ses calculs, Newton emploie ce que François De Gandt[3] appelle "la méthode des témoins finis" qui est, ainsi que nous le verrons, un principe que l'on retrouve dans le calcul des fluxions. Newton essaiera d'écrire les **Principia** à l'aide des notations du calcul des fluxions, mais il semble que l'ouvrage se prêtait mal à cette écriture, ainsi que l'attestent quelques pages publiées dans le volume VI des **Mathematical papers**.[4]

Regardons à présent la façon dont Newton va mettre en place son calcul infinitésimal. Pour présenter les méthodes employées par Newton dans la détermination des tangentes à des courbes, je ne suivrai pas l'ordre chronologique des parutions et m'intéresserai, essentiellement, à la méthode des fluxions. Je citerai les autres œuvres pour apporter quelques éclaircissements.

Dans **La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies,** après avoir développé et montré l'utilité de calculs sous forme de séries dans les propositions I à LIV, Newton propose de résoudre quelques problèmes *"pour mettre l'Art Analitique dans un plus grand jour"*. Il observe alors (prop. LV) que ces problèmes peuvent se ramener à deux problèmes seulement, problèmes que je qualifierai de "mécaniques".

Voici les deux problèmes proposés par Newton:

"[...] *sur un espace décrit par un mouvement local retardé ou accéléré d'une façon quelconque.*

Prop LVI: 1. *La longueur de l'Espace décrit étant continuellement donnée, trouver la vitesse du Mouvement à un tems donné quelconque.*

Prop. LVII: 2.*La vitesse du Mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'Espace décrit à un tems donné quelconque."* [5]

Dans ces deux problèmes, Newton considère deux quantités clairement définies, le temps et l'espace décrit par un mouvement. On remarquera que ces deux quantités serviront de support à l'élaboration de méthodes générales.

Avant de présenter les notions qui permettront d'étudier ces deux problèmes, Newton propose un exemple:

[3]François De Gandt. ***Le style mathématique des Principia de Newton.*** (Revue d'Histoire des Sciences.1986.XXXIX-3)
[4]***Le style mathématique des Principia de Newton,*** op.cit.
[5]Newton, **La méthode des fluxions et des suites infinies**, traduction Buffon, Paris, Debure 1740, réédition Blanchard.1966, p20

"LVIII. *Ainsi dans l'équation xx=y, si y représente la longueur de l'Espace décrit à un tems quelconque, lequel tems un autre Espace x en augmentant d'une vitesse uniforme* $\dot{x}$ *mesure et représente comme décrit, alors* $2x\dot{x}$ *représentera la vitesse avec laquelle dans le même instant l'Espace y viendra à être décrit & vice versa; et c'est de là que j'ai dans ce qui suit considéré les Quantités comme produites par une augmentation continuelle à la manière de l'Espace que décrit un corps en mouvement."* [6]

On peut voir dans cet exemple la manière dont Newton va mettre en place un référentiel: **le temps**. En effet, il considère ici le temps comme représenté par une quantité décrivant un espace avec une vitesse uniforme; ainsi, toute quantité possédant cette même propriété pourra être considérée comme représentant le temps. De plus, toute quantité exprimée à l'aide d'une quantité assimilée au temps, pourra être considérée comme décrivant un espace. Ainsi, tout problème concernant le rapport entre deux quantités quelconques pourra être étudié de la même façon qu'un problème "mécanique".

Newton précise ensuite sa conception du temps: *"Comme nous n'aurons pas besoin de considérer le tems autrement que comme exprimé & mesuré par un mouvement local uniforme [..], je n'aurai dans ce qui suit aucun égard au tems considéré proprement comme tel; mais je supposerai que l'une des quantités proposées de même genre doit augmenter par une Fluxion uniforme, à laquelle quantité je rapporterai tout le reste comme si c'étoit au tems; donc par* ***Analogie*** *cette quantité peut avec raison recevoir le nom de tems; ainsi quand dans la suite je me servirai du mot* ***Tems****, je n'entends jamais le tems proprement pris comme tel, mais seulement une autre Quantité par l'augmentation ou Fluxion de laquelle le tems peut être exprimé & mesuré."*[7]

On voit ainsi apparaître ce qu'on peut appeler "temps absolu".

Newton définit ensuite les termes Fluentes (Quantités considérées comme augmentées graduellement et indéfiniment, notées v, x, y & z) et Fluxions (vitesses dont sont augmentées les fluentes, notées $\dot{v},\dot{x},\dot{y}$ & $\dot{z}$).

Il est important de noter que, par analogie à l'exemple LVIII, la référence à un temps absolu va permettre d'établir une relation entre les fluxions de deux quantités fluentes dont on connaît une relation.

Un autre avantage, sans doute fondamental, est que la notion de temps induit une notion de continuité, c'est à dire que tout instant est atteint et même dépassé, ce qui, d'une certaine façon, permet d'évacuer le problème de l'existence de la limite: à un instant donné, il doit "se passer" quelque chose.

C'est ainsi que l'on peut certainement justifier la proposition XIII du PROBLEME I: *"Les moments des Quantités Fluentes (c'est-à-dire leur parties indéfiniment petites, par l'accélération desquelles, dans des parties indéfiniment petites de temps, elles sont continuellement augmentées) sont comme les vitesses de leurs Fluxions ou Accroissements."*[8]

En effet, pour justifier cette proposition non démontrée, Newton considère que *o* étant une quantité indéfiniment petite, le moment d'une quantité quelconque x est le produit de sa fluxion $\dot{x}$ par *o*, soit $\dot{x}o$. Ainsi, les moments $\dot{v}o,\dot{x}o,\dot{y}o,\dot{z}o$ des quantités v,x y et z seront comme les fluxions $\dot{v},\dot{x},\dot{y}\,et\,\dot{z}$ de ces mêmes quantités.

---

[6]**La méthode des fluxions**, op.cit. p20-21
[7]**La méthode des fluxions**, op.cit. p21
[8]**La méthode des fluxions**, op.cit.p25

La définition du moment fournie par Newton pourrait correspondre à la variation infinitésimale de la quantité fluente pendant un temps infiniment petit, mais cette définition ne permet pas de justifier la proposition. Pour cela, il est nécessaire de se rapporter à un autre ouvrage.

Dans les **Principia**, Newton fournit des exemples de sa conception du rapport de quantités infinitésimales sans, toutefois, utiliser de notation propre au calcul infinitésimal. Cette conception est illustrée par les lemmes placés au début du chapitre des **Principia** intitulé "*Du Mouvement des Corps*" (Annexe 2).

Observons, notamment, le lemme suivant:

LEMME VII: *Les mêmes choses étant posées, (si un arc ACB donné de position est soutenu par la corde AB, & qu'au point A placé dans le milieu de la courbure continue, il soit touché par une droite AD, & que les points A& B s'approchent l'un de l'autre jusqu'à ce qu'ils coïncident) la dernière raison qu'ont entr'elles l'arc, la corde & la tangente, est la raison d'égalité.*[9]

En d'autres termes, les quantités infinitésimales AB, AD et l'arc ACB sont des "infiniment petits équivalents". Newton ne parle pas ici, d'infiniment petit, cependant, la méthode[10] qu'il emploie pour démontrer ce lemme s'apparente à celle employée dans la **Méthode des Fluxions** en ce qu'elle consiste à comparer des rapports de quantités infinitésimales à des rapports de quantités finies qui servent alors de "témoins" ainsi que le remarque François De Gandt[11].

LA METHODE DES FLUXIONS: PROBLEME I

Etant donné la Relation des Quantités Fluentes, trouver la Relation de leurs Fluxions. (Annexe 1)

Afin de résoudre ce problème (généralisation de l'exemple LVIII), Newton fournit une règle sans donner de justification.

Règle I. Disposez l'équation par laquelle la relation donnée est exprimée suivant les dimensions de l'une de ses quantités fluentes x par exemple, et multipliez ses termes par une progression arithmétique quelconque et ensuite par $\frac{\dot{x}}{x}$. *Faites cette opération séparément pour chacune des quantités fluentes; après quoi égalez à zéro la somme de tous les produits et vous avez l'équation cherchée.*[12]

Voici un exemple explicite fourni par Newton:

Exemple I. Si la relation des Quantités Fluentes x & y est $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, *disposez d'abord les Termes suivant x, & ensuite suivant y, & multipliez-les comme vous voyez.*

$$\begin{array}{lcccc|ccc}
\text{Multipliez} & x^3 & -ax^2 & +axy & -y^3 & -y^3 & +axy & \begin{array}{c}-ax^2\\+x^3\end{array} \\
\text{par} & \frac{3\dot{x}}{x} . & \frac{2\dot{x}}{x} . & \frac{\dot{x}}{x} . & 0 & \frac{3\dot{y}}{y} . & \frac{\dot{y}}{y} . & 0 \\
\hline
\text{Vous aurez} & 3\dot{x}x^2 & -2a\dot{x}x & +a\dot{x}y & * & -3\dot{y}y^2 & +a\dot{y}x & *
\end{array}$$

---

[9] Newton, **Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle**, Traduction Madame la Marquise du Chastellet, Paris, 1759, Réédition Blanchard.

[10] Voir François De Gandt op.cit.

[11] Voir François De Gandt op.cit

[12] **La méthode des fluxions**, op.cit. p25

La somme des produits est $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x$, *qui étant égalée à zéro, donne la relation des Fluxions* $\dot{x}\,\&\,\dot{y}$; *car si vous donnez à volonté une valeur à x, l'Equation* $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ *donnera la valeur de y; ce qui étant déterminé, l'on aura* $\dot{x}:\dot{y}::3y^2 - ax:3x^2 - 2ax + ay$.

On peut constater que la suite arithmétique qui intervient a 0 pour premier terme. Le terme "quelconque" qualifie en fait la raison de la suite arithmétique utilisée. Par la suite, dans l'exemple II, il utilise une suite arithmétique ne commençant pas par 0, mais le résultat obtenu est incorrect. Le calcul est d'ailleurs inachevé. Dans les exemples suivants, quelques exemples sont développés, notamment un exemple utilisant une quantité fluente auxiliaire z pour exprimer la relation entre les fluxions de deux quantités x et y.

On peut voir dans cette règle une similitude avec les règles de Hudde qui sont publiées en 1659 par Van Schooten[13] et qui ont été utilisées par de nombreux mathématiciens de l'école cartésienne. Ces règles sont algébriques, mais on peut actuellement les interpréter comme propriétés du polynôme dérivé formel.

Règles de Hudde:

1) Si r est racine double de l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ et $b_0, b_1, \ldots\ldots, b_{n-1}, b_n$ une suite arithmétique quelconque, alors r est solution de l'équation $b_0a_0x^n + b_1a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + b_{n-1}a_{n-1}x + b_na_n = 0$.

2) Si $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n$ admet un extremum en a, alors a est racine de l'équation $na_0x^n + (n-1)a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x = 0$.

La première règle peut s'interpréter actuellement de la façon suivante: si r est racine double du polynôme P, alors r est racine de son polynôme dérivé P'. Quant à la seconde, c'est, à un facteur x près, le théorème suivant: Si P(x) admet un extremum en a, alors P'(a)=0. On peut voir aussi dans cette seconde règle, une version légèrement modifiée, et plus rapidement utilisable, de la "méthode des minima et maxima" de Fermat.

Newton connaissait sans doute ces règles, puisqu'il cite la "méthode de Hudde" pour la détermination des minima et maxima dans le PROBLEME III. Là se trouve peut-être la raison pour laquelle il parle de suite arithmétique **quelconque** dans la détermination des fluxions, puisqu'il énonce la seconde règle de Hudde et y introduit une suite arithmétique quelconque, ce que ne fait pas Hudde. Il est à noter, cependant, que Newton ne semble pas entièrement convaincu par sa règle I puisqu'il éprouve le besoin d'en donner une "démonstration" dans les propositions XV et XVI du PROBLEME I (annexe 3).

Il propose de remplacer les quantités fluentes x et y par ces mêmes quantités augmentées de parties infiniment petites, par l'accession desquelles elles sont continuellement augmentées dans des parties indéfiniment petites de temps, soit $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$. Ceci étant énoncé, il reprend la relation de l'exemple I précédemment cité et montre qu'il obtient le même résultat qu'en utilisant la règle I.

[13]Geometria, à Renato Des Cartes. Louis et Daniel Elzevir, Amsterdam 1659. **Le Reductione Aequationum** de Hudde p401 à 516.

XVI. Soit donc l'Equation donnée quelconque $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ *je substitue* $x + \dot{x}o$ *pour x, &* $y + \dot{y}o$ *pour y, & j'ai*

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2 oox + \dot{x}^3 o^3 - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2 oo + axy \\ +a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2 ooy - \dot{y}^3 o^3 \end{array}\right\} = 0$$

XVII. Maintenant j'ai par la supposition $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, *j'efface donc ces Termes dans l'Equation précédente, & ayant divisé par o tous les termes qui restent, j'aurai*

$$3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2 ox + \dot{x}^3 o^2 - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2 o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2 oy - \dot{y}^3 o^2 = 0.$$

Mais comme o a dû être supposé infiniment petit, pour pouvoir représenter le momens des Quantités, les Termes qu'il multiplie sont nuls en comparaison des autres, je les rejette donc, & il me reste $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$, *comme ci-dessus dans l'Exemple premier.*

Une seconde raison d'insatisfaction de la part de Newton envers les règles de Hudde, est l'impossibilité de les employer pour des *"Equations affectées de Quantités sourdes"*, c'est à dire non rationnelles.

Le PROBLEME II est l'inverse du PROBLEME I:" *Etant donné la Relation des Fluxions, trouver celle des Quantités Fluentes"*, et Newton le traite en inversant simplement les opérations effectuées pour résoudre le PROBLEME I. Il est important de noter qu'il se servira de ce type de résolution dans le PROBLEME IX pour *"Trouver l'aire d'une courbe proposée quelconque"*, et c'est sans doute la première fois que ce problème est proposé comme inverse de celui de la "dérivation", bien que Barrow, dans ses **Lectiones Geometricae de 1670** en donne une formulation géométrique..

Le PROBLEME III, qui concerne la recherche des minima et des maxima, est traité rapidement. Une fois posée la règle qui consiste à annuler le "polynôme dérivé", et ayant indiqué son insuffisance pour des équations "plus délicates", Newton fournit un exemple puis une série de problèmes équivalents à la recherche d'extrema.

PROBLEME IV

Tirer les Tangentes à des Courbes.

Dans cette partie, Newton propose neuf méthodes différentes pour tirer des tangentes à des courbes. Ces méthodes sont classées dans un ordre "croissant" de difficulté. La première concerne le cas d'une courbe dont les points sont définis par une relation entre l'abscisse et l'ordonnée, et la dernière est une courbe "mécanique" dont les points sont "attachés" à une courbes donnée quelconque.

Je souhaiterais présenter ces méthodes et mettre en évidence leur aspect algorithmique, les différences étant, pour l'essentiel, dues à des considérations géométriques.

Avant d'étudier ces méthodes, je souhaite préciser la manière dont Newton définit les "grandeurs mathématiques" dans son introduction au **Tractatus de Quadratura Curvarum:** *"Je ne considère pas les grandeurs mathématiques comme formées de parties, si petites soient-elles, mais comme décrites par un* *mouvement continu. Les lignes sont décrites et engendrées , non par la juxtaposition de leurs parties, mais par le mouvement de points, les surfaces par le mouvement des lignes, les solides par le mouvement des surfaces, les angles par la rotation des côtés et les temps par un flux continu".*

Cette conception des grandeurs mathématiques lui permettra ainsi d'appliquer sa méthode des fluxions aux courbes algébriques aussi bien que transcendantes ou mécaniques.

Tirer les Tangentes des Courbes

PREMIERE MANIERE

On se place ici dans le cas d'une courbe dont les points sont définis par une relation entre abscisse et ordonnée. Le point D est donc défini par son abscisse AB et son ordonnée BD. Faisons subir au point D un déplacement indéfiniment petit jusqu'en *d*. Soit A*b* l'abscisse de *d* et *c* le point de *bd* placé sur la parallèle à AB passant par D. Traçons de plus la droite D*d* qui coupe AB au point T.(voir figure 1.1)

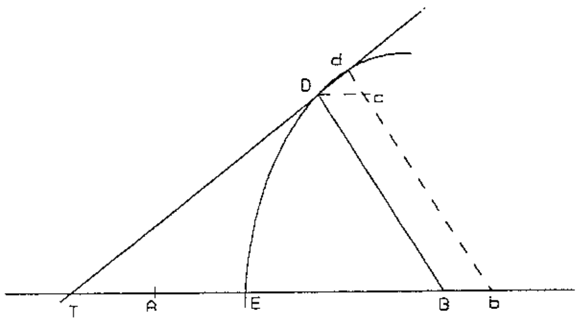


fig 1.1

Les deux triangles DBT et *dc*D sont semblables (homothétiques), donc on en déduit l'égalité des rapports: $\frac{TB}{BD}=\frac{Dc}{cd}=\frac{Bb}{cd}$.

Or BD est l'ordonnée du point D et B*b* et *cd* sont respectivement les "moments" des quantités AB et BD. D'après la proposition XIII du PROBLEME I, le rapport des moments est comme le rapport des fluxions, donc, si on note x et y les quantités AB et BD, on obtient: $\frac{TB}{y}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$, soit TB $=\frac{\dot{x}y}{\dot{y}}$, et la tangente est ainsi définie par la sous-tangente comme dans tous les ouvragesdu 17°.

Newton fournit ensuite deux exemples concernant des courbes définies à l'aide de relations algébriques[14], puis l'exemple 3 de la conchoïde de Nicomède.

Rappelons tout d'abord ce qu'est la Conchoïde de Nicomède. Dans ses commentaires sur le traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède. Eutocius expose la génération de cette courbe. Une autre définition est

[14] On peut remarquer que Newton effectue une erreur dans le premier exemple où il inverse le rapport $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$

donnée par Pappus dans la Proposition XXV du livre IV de *La Collection Mathématique*. Voici donc comment cette courbe est engendrée:

Une droite AB (appelée règle) et un point G (appelé pôle) étant donnés, on considère tous les segments d'extrémité G tels que AB intersecte ses segments en découpant sur ceux-ci un segment PQ de longueur constante (voir figure 1.2)

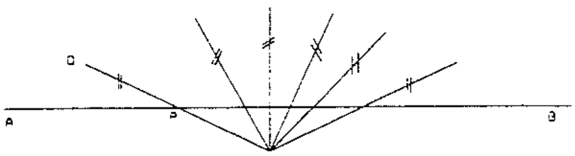


figure 1.2

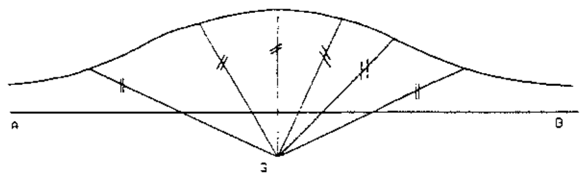


figure 1.2 bis

Les extrémités des segments opposées au point G forment alors la Conchoïde "supérieure "de Nicomède.(voir figure 1.2 bis)

Une autre courbe appelée conchoïde inférieure peut être construite en considérant des segments de longueurs égales, situés dans le demi plan contenant G, dont l'une des extrémités se trouve sur la droite AB et dont le support passe par G (voir figure 1.3 et 1.3 bis).

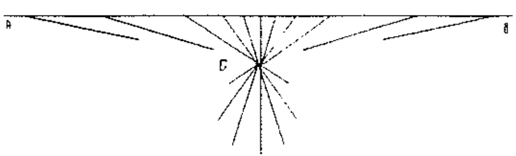


figure 1.3

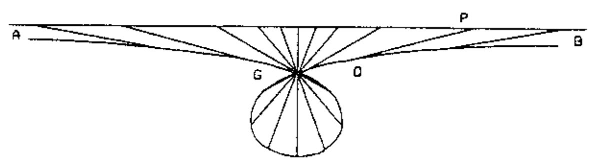


figure 1.3 bis

Regardons à présent l'exemple 3 traité par Newton.

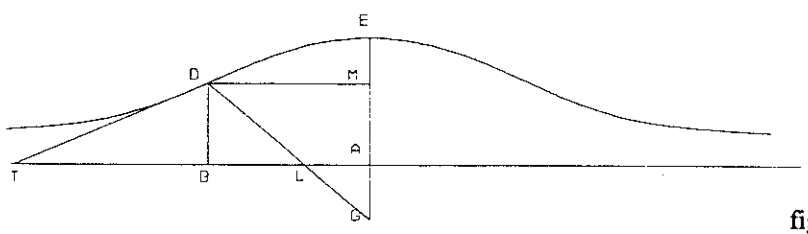


fig 1.4

Un point D étant donné sur la conchoïde, il pose AB = x son abscisse, BD=y son ordonnée, LD=c la distance "fixe" associée à la conchoïde et GA=b la distance du pôle G à la droite AB.

Les triangles DBL et GMD sont semblables (égalité des angles) donc: $\dfrac{LB}{BD} = \dfrac{DM}{MG}$ c'est à dire

$\dfrac{\sqrt{c^2 - y^2}}{y} = \dfrac{x}{b+y}$ que l'on peut écrire sous la forme $(b + y)\sqrt{c^2 - y^2} = xy$.

En posant $z = \sqrt{c^2 - y^2}$, on obtient les deux équations suivantes:

$(b+y)z = xy$ et $z^2 = c^2 - y^2$

La méthode des fluxions fournit alors les deux relations suivantes:

$\dot{b}z+\dot{y}z+\dot{z}y=\dot{x}y+\dot{y}x$ et $2z\dot{z}=-2y\dot{y}$ d'où, en éliminant le terme $\dot{z}$, on obtient: $-\frac{b\dot{y}y}{z}-\frac{\dot{y}y^2}{z}+\dot{y}z=\dot{x}y+\dot{y}x$ ce qui peut s'écrire sous forme d'égalité de rapports: $\dfrac{y}{z-\frac{by}{z}-\frac{y^2}{z}-x}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{BD}{BT}$.

Ce dernier rapport est l'application de la première manière, et puisque BD=y, on en déduit que $BT = z - x - \frac{by+y^2}{z} = -(x-z) - \frac{y(b+y)}{z}$.

Puisque x-z=AB-BL= AL et b+y = GA + AM = GM, on peut écrire:

$$-BT = AL + \frac{BD.GM}{BL}$$

Newton précise que le signe - devant BT signifie que le point T est pris du côté opposé au point A. Il montre ensuite, dans un Scholie, comment on peut déterminer le point d'inflexion, et utilise pour cela la méthode des minima et maxima décrite dans le PROBLEME III.

SECONDE MANIERE

Une courbe DE étant donnée, considérons un point G et une droite AB des abscisses. Le point D ayant pour abscisse AB, GD est la sous-tendante de D associée au point G.

A partir d'une relation entre les deux quantités "fluentes", x=AB (abscisse de D) et y=GD, cette méthode consiste à obtenir une relation entre leur fluxions.

D ayant effectué un déplacement infiniment petit en d, on considère le point k de GD tel que Gk= Gd. Le moment de GD est alors égal à GD - Gd, soit GD - Gk = Dk. Soit b le point de AB tel que Ab soit l'abscisse de d, et c le point de BD tel que dc soit parallèle à AB, dc est alors égal à bB, c'est à dire au moment de AB. Soit enfin T, l'intersection de Dd avec la droite AB, et F le projeté orthogonal de T sur GD.(voir figure 2.1)

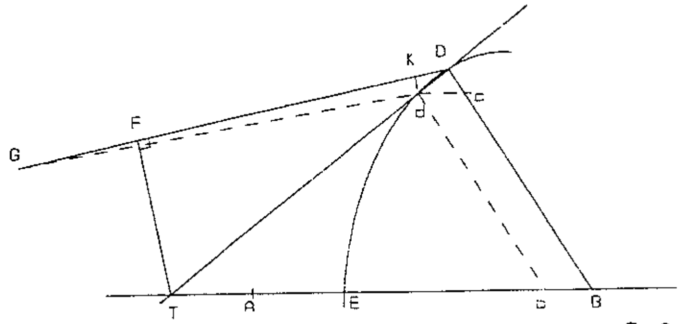


fig 2.1

Ceci étant posé, Newton affirme que "*les trapèzes Dcdk et DBTF sont semblables*". Il faut ici entendre le mot trapèze au sens d'Euclide, c'est à dire quadrilatère puisque les côtés FT et DB n'ont aucune raison d'être parallèles. De plus, il est à noter que le quadrilatère Dcdk ici représenté, n'est pas le quadrilatère considéré par Newton, puisque Dd est supposé "infiniment petit". Cette notion est indispensable pour pouvoir affirmer la similitude des "trapèzes", car alors, dk est aussi infiniment petit, et la droite dk peut être considérée comme tangente au cercle de centre G et de rayon Gk et à ce titre perpendiculaire au rayon Gk. Ce faisant, Dcdk est bien l'image de DBTF par une homothétie de centre D, et les deux "trapèzes" sont donc semblables.

On en déduit l'égalité des rapports: $\frac{DB}{DF}=\frac{Dc}{Dk}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$

<u>Application à la conchoïde:</u>

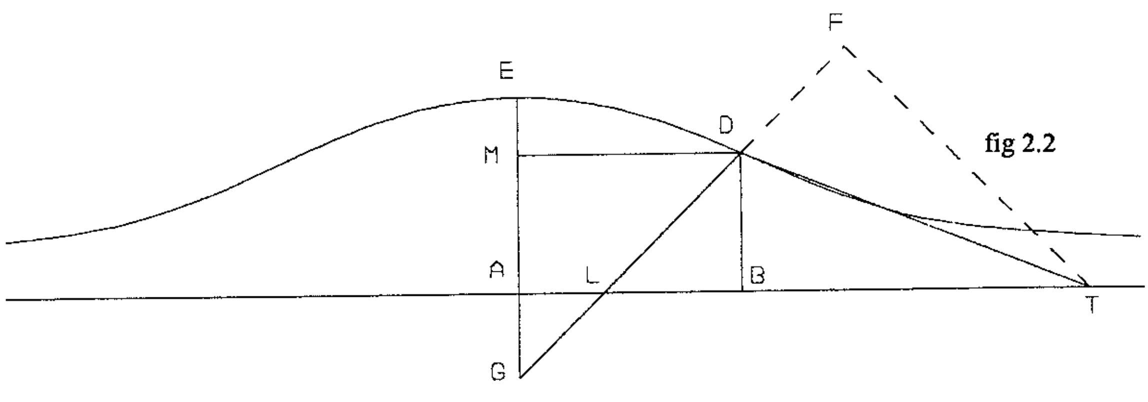


fig 2.2

Il est à souligner que cette "seconde manière" est beaucoup mieux adaptée que la précédente pour la recherche des tangentes à la conchoïde puisque celle-ci est définie à partir d'une droite et d'un point. Reprenant les notations de la figure précédente, posons x=GD et y=BD. Les deux triangles BDL et LAG sont semblables, donc $\frac{BD}{DL}=\frac{AG}{LG}$ d'où $\frac{y}{c}=\frac{b}{c-x}$ et on en déduit la relation suivante: $cy-xy-bc=0$. Appliquant alors la règle pour la détermination de la relation des fluxions, on obtient: $c\dot{y}-\dot{x}y-\dot{y}x=0$ ce qui entraîne $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=\frac{x-c}{y}$. D'après le résultat de la seconde manière, $\frac{DF}{DB}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=\frac{x-c}{y}$ or DB= y ce qui entraîne l'égalité suivante: DF=x-c=GL.

Le tracé de la tangente à la conchoïde est alors possible géométriquement. Un point D de la courbe étant donné, prolongeons le segment GD d'une longueur égale à GL jusqu'au point F. La perpendiculaire à GF au point F coupe la "règle" en un point T qui appartient à la tangente et celle-ci est donc la droite (DT).(voir figure 2.2)

TROISIEME MANIERE

Deux points A et B étant donnés ainsi qu'un point D d'une courbe, AD et BD sont les sous-tendantes associées au point D. Faisons effectuer au point D un déplacement infiniment petit jusqu'en d. On considère le point k de AD tel que Ak=Ad et le point c de BD tel que Bc=Bd: on a alors

kD=AD-Ak=AD-Ad et cD=BD-Bc=BD-Bd. C'est à dire que les moments contemporains des fluentes AD et BD sont respectivement kD et cD.

Soit F, le point de AD tel que $\frac{DF}{DB}=\frac{Dk}{Dc}$: construisons les perpendiculaires à AD en F et à BD en B et soit T leur point d'intersection. Ainsi que dans la "seconde manière", la quantité dc est infiniment petite et la droite (dk) peut être considérée comme tangente au cercle de centre A et de rayon Ak, donc perpendiculaire au rayon Ak. De même, la droite (dc) peut être considérée perpendiculaire au rayon Bc. Ceci permet d'affirmer l'homothétie des quadrilatères DBTF et Dcdk (du fait de l'égalité des rapports $\frac{DF}{DB}=\frac{Dk}{Dc}$) et donc l'alignement des points D,d et T. Le point T appartient donc à la tangente ("touchante") à la courbe au point D.(voir figure).

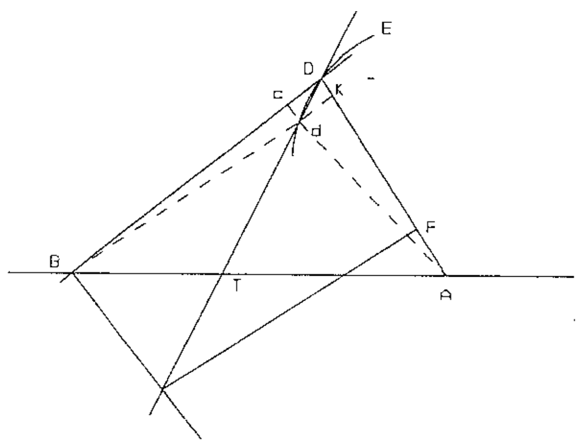
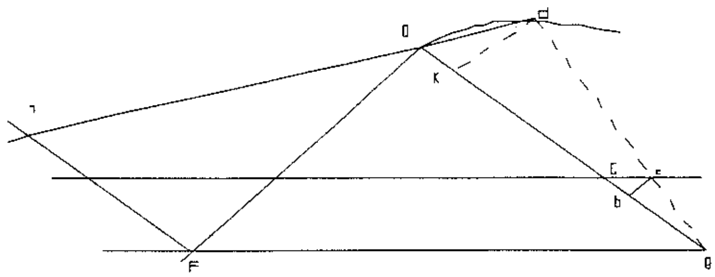


fig 3.1

On peut ainsi étudier certaines courbes définies par rapport à deux points A et B. D étant un point d'une telle courbe et posant x=AD et y=BD, on aura $\dot{x}=kD$ et $\dot{y}=cD$, donc $\frac{FD}{BD}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$. Cette méthode peut s'appliquer à la conchoïde, mais de façon malaisée. Newton en propose l'utilisation pour des courbes que Descartes nomme "ellipses du second ordre", et définies par une relation de la forme $a+\frac{ex}{d}-y=0$ (ou $a-\frac{ex}{d}-y=0$).

QUATRIEME MANIERE

Cette quatrième manière est fournie par Newton sans justification, mais s'adapte parfaitement à la conchoïde.



Etant donné un point B, une droite (AC) et une courbe, on trace, en un point D de la courbe, la perpendiculaire à la droite (BD). Celle-ci coupe la parallèle à (AC) passant par B au point F. On trace en F la perpendiculaire (FT) à la droite (DF). Pour chaque point D de la courbe, on considère les quantités fluentes BD et BC où C est l'intersection de la droite (BD) avec la droite (AC). D ayant effectué un déplacement infiniment petit en d, on pose deux points b et k de (BD) tels que Bb=Bc et Bk=Bd. Selon le même raisonnement que précédemment, on peut convenir que les droites (cb) et (dk) sont perpendiculaires à la droite (BD). Les triangles TFD et Dkd sont donc semblables ainsi que les triangles BDF et Cbc, et les triangles Bbc et Bkd. De ces similitudes, on peut déduire les égalités de rapports suivantes: $\frac{FT}{FD} = \frac{kD}{kd}$, $\frac{FD}{BD} = \frac{bc}{bC}$ et $\frac{Bd}{Bc} = \frac{kd}{bc}$. Ce dernier rapport est aussi égal à $\frac{BD}{BC}$ car Dd et Cc sont infiniment petits. On obtient donc les trois égalités suivantes: $\frac{FT}{FD} = \frac{kD}{kd}$, $\frac{FD}{BD} = \frac{bc}{bC}$, $\frac{BD}{BC} = \frac{kd}{bc}$ et leur produit conduit à l'égalité énoncée par Newton: $\frac{FT}{BC} = \frac{kD}{bC}$, les quantités kD et bC étant les moments contemporains des fluentes BD=x et BC=y. Les moments de quantités fluentes étant dans le rapport de leurs fluxions, on obtient:

$$\frac{FT}{BC} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$$

Application à la conchoïde: Soit DE la conchoïde: posons GD=x *et* GL=y. On a la relation $x=y+c$ d'où $\dot{x} = \dot{y}$. D'après le résultat précédent, on doit avoir: $\frac{FT}{GL} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ d'où l'on tire FT=GL. Construisons alors la droite (✂) parallèle à (AB) passant par G. La perpendiculaire à GD au point D coupe (✂) au point F et la perpendiculaire à DF au point F coupe (AB) au point T puisqu'alors on a bien FT=GL et la droite (TD) est tangente en D à la conchoïde.(voir figure 4.2)

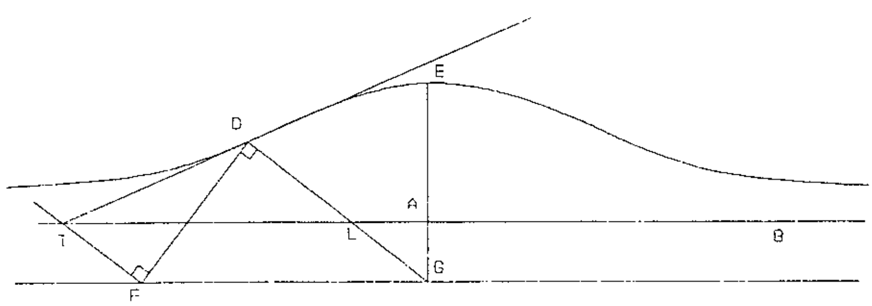


fig 4.2

Les cinquième et sixième manières sont des variantes des précédentes proposées de façon succincte. Regardons simplement quelles sont les similitudes mises en jeu.

CINQUIEME MANIERE

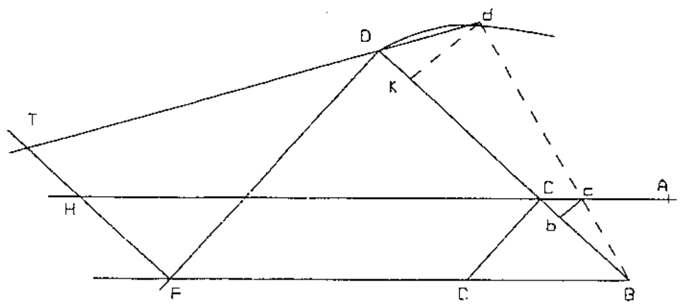


fig 5.1

Les triangles GCB et cbC sont "semblables", on peut donc en déduire l'égalité de rapport: $\frac{BC}{BG}=\frac{Cb}{Cc}$. D'après la quatrième manière, on avait $\frac{FT}{BC}=\frac{kD}{bC}$, d'où l'on peut conclure $\frac{FT}{BG}=\frac{kD}{Cc}$. C'est à dire, si on a posé x=BD et y=AC, $\frac{FT}{BG}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$, puisque kD et Cc sont les moments des fluentes BD et AC.

SIXIEME MANIERE

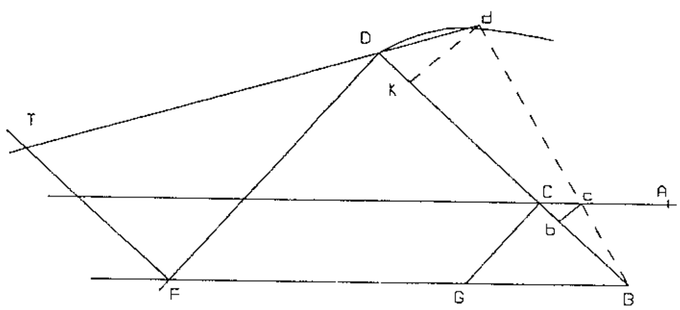


fig 6.1

La quatrième manière nous avait fourni l'égalité $\frac{FT}{BC}=\frac{kD}{bC}$ d'où l'on peut déduire $\frac{FT}{BC}-1=\frac{kD}{bC}-1$ c'est à dire $\frac{FT-BC}{BC}=\frac{kD-bC}{bC}$, or FT-BC = FT-FH = HT et kD-bC est la différence des moments contemporains de BD et BC c'est à dire le moment de CD que je noterai $\dot{\overline{CD}}$. On a donc l'égalité $\frac{HT}{BC}=\frac{\dot{\overline{CD}}}{bC}$ et, puisque d'après la similitude des triangles BCG et Ccb on a $\frac{BC}{BG}=\frac{Cb}{Cc}$, on peut conclure: $\frac{HT}{BG}=\frac{\dot{\overline{CD}}}{cC}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ en ayant posé x=CD et y=AC.

Il est à noter que pour ces trois dernières méthodes, Newton ne fournit aucun exemple.

Dans les deux méthodes suivantes, Il s'intéresse à des courbes dont les points ne sont pas rapportés à des droites mais à d'autres courbes. Il considère notamment deux courbes particulières: la spirale d'Archimède et la quadratrice. Rappelons la génération de ces deux courbes.

La spirale: une droite AB étant donnée, considérons le mouvement d'un point M tel que la distance AM reste toujours proportionnelle à l'angle (AB,AM). La trajectoire du point M est alors une spirale d'Archimède.

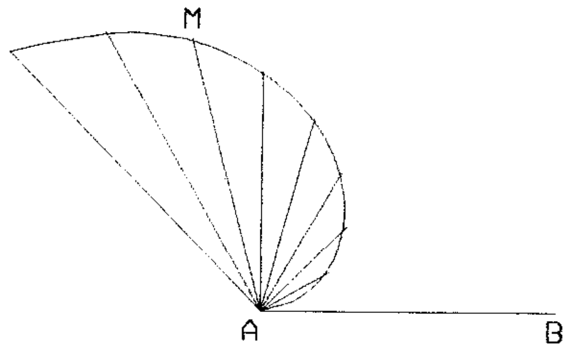


fig 7.1

La quadratrice: un segment AB étant donné ainsi qu'une droite AC perpendiculaire à AB en B, considérons le mouvement d'un point M tel que la distance du point M à la droite BC reste proportionnelle à l'angle (AB,AM). Lorsque la distance BM' est à AB comme l'angle (AB,AM) est à un angle droit, la courbe obtenue est la quadratrice dont Pappus donne la définition à la proposition XXX du livre IV de *La Collection Mathématique*.

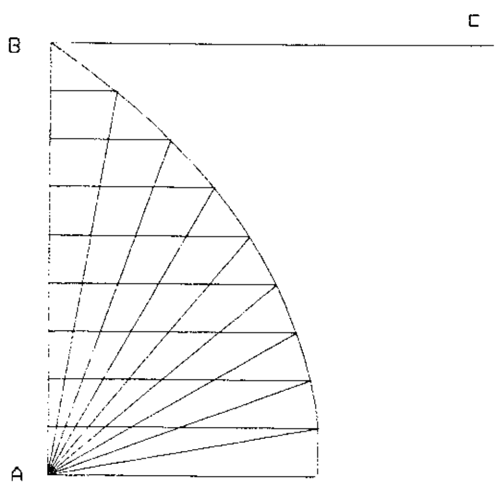


fig 8.1

SEPTIEME MANIERE

ADE étant une spirale, traçons la droite AD qui coupe en G le cercle de centre A et de rayon AB. Faisons effectuer au point D un déplacement infiniment petit en d, le point G se meut en g. Soit c le point de AD tel que Ac=Ad. Considérant les fluentes x=segment AD et y=arc de cercle BG, leurs moments contemporains sont égaux à Dc et Gg. At étant parallèle à dc, T est l'intersection de Dd et At. Les triangles ADT et Dcd sont semblables et on a $\frac{cD}{cd} = \frac{AD}{AT}$.

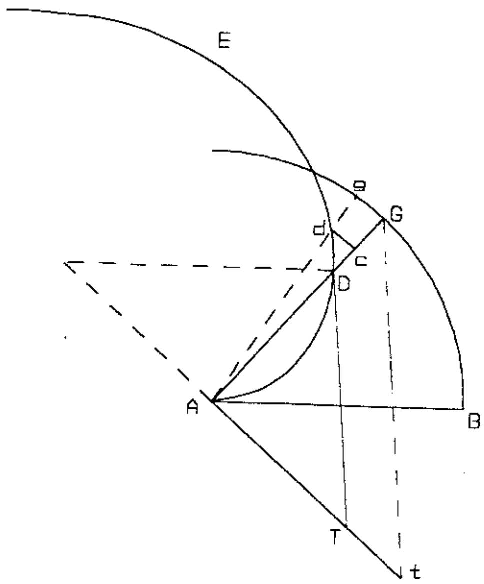


fig 7.2

Par ailleurs, cd et Gg sont des arcs de cercles concentriques, d'où $\frac{cd}{Gg} = \frac{Ad}{AG} = \frac{AD}{AG}$, soit, ayant tracé (At) parallèle à (AT), $\frac{cd}{Gg} = \frac{AT}{At}$. Après multiplication des deux égalités $\frac{cD}{cd} = \frac{AD}{AT}$ et $\frac{cd}{Gg} = \frac{AT}{At}$, on obtient $\frac{cD}{Gg} = \frac{AD}{At}$.

Newton écrit alors: *Ainsi, l'Equation qui exprime la Relation de BG à AD étant donnée; cherchez la Relation de leur Fluxions, & prenez At à AD dans le même rapport, Gt sera parallèle à la tangente.*

Dans le cas de la spirale d'Archimède, la relation des fluentes s'écrit: $\frac{ax}{b} = y$, on obtient donc $\frac{a\dot{x}}{b} = \dot{y}$, c'est à dire $\frac{a}{b} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{AD}{At}$. Soit alors P le point de At tel que BDT soit rectangle en D, AD est sa hauteur donc $AD^2 = At.AP$. Ce qui permet d'obtenir: $\frac{a}{b} = \frac{AD}{At} = \frac{AD^2}{At.AD} = \frac{At.AP}{At.AD} = \frac{AP}{AD}$. Donc, en plaçant le point P sur At de sorte que $\frac{AP}{AD} = \frac{a}{b}$[15], PD est perpendiculaire à la tangente en D à la courbe.

[15]Newton (ou Buffon) semble avoir fait une erreur en écrivant $\frac{AP}{AB} = \frac{a}{b}$.

HUITIEME MANIERE

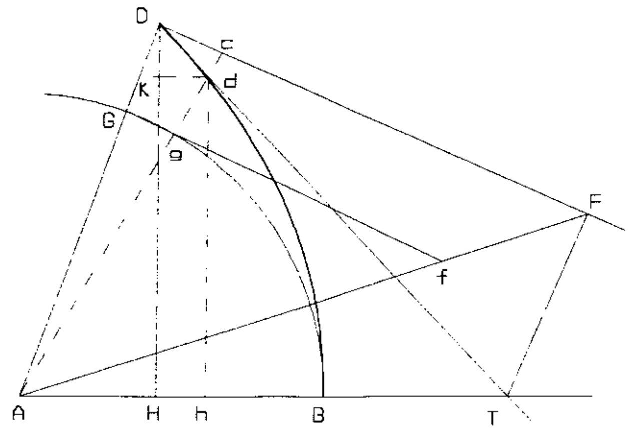


fig 8.2

Etant donné la courbe quadratrice BD, on a fait subir un déplacement infiniment petit au point D, puis prolongé la droite Ad en c de sorte que Ac=AD. Ayant tracé la droite Dd qui coupe AB en T, on a tracé la droite TF, perpendiculaire à Cc en F. dhHk est un rectangle et la droite (Gg) coupe AF en f.

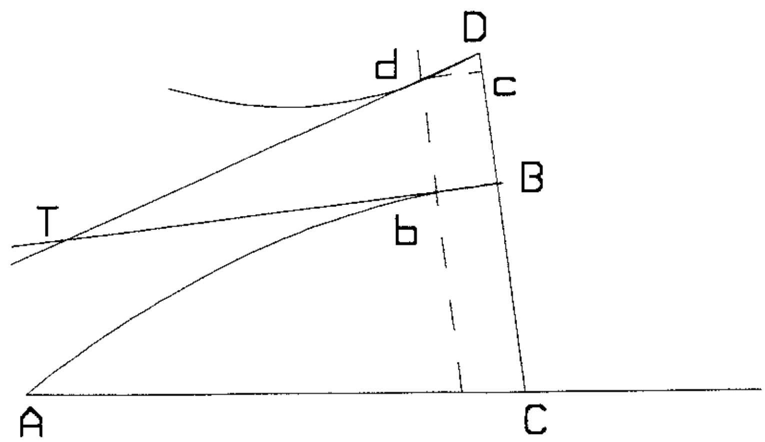
Considérons les deux quantités fluentes DH=x et BG=y dont les moments contemporains sont respectivement Dk et Gg. Cherchons donc à établir le rapport de ces moments comme égal au rapport de deux quantités "finis". D et c appartiennent au cercle de centre A et de rayon AD, la droite (Dc) peut donc être considérée comme tangente à ce cercle donc perpendiculaire au rayon Ac de même (gf) est perpendiculaire à (Ac).

Les quadrilatères DATF et Dkdc sont donc "semblables" et l'on a: $\frac{Dk}{Dc} = \frac{DH}{DF}$. De plus, le parallélisme des droites (Gg) et (Dc) permet d'obtenir $\frac{Dc}{Gg} = \frac{DF}{Gf}$ puis, composé avec le rapport précédent, $\frac{Dk}{Gg} = \frac{DH}{Gf}$, soit $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{DH}{Gf}$. On peut ainsi tracer la tangente au point D en suivant la méthode décrite par Newton en ces termes:

Ainsi par l'équation qui exprime la Relation de BG & de DH, trouvez la Relation des Fluxions, & dans ce même rapport prenez la tangente Gf du cercle BG, & la ligne DH; tirez DF parallèle à Gf, qui rencontre Af prolongée en F; à ce Point F élevez la perpendiculaire FT, qui rencontre AB en T; & enfin tirez la Ligne droite DT elle sera tangente à la quadratrice.

NEUVIEME MANIERE

Etant donné une courbe ABF et une tangente à cette courbe (Bt), le point B ayant pour abscisse AB et pour ordonnée CB (voir figure). On considère une autre courbe DE dont les points D sont définis par une relation entre l'arc AB (ou un autre arc mesuré sur la courbe ABF) et la différence des ordonnées deB et D (soit BD).



Newton nous dit que la tangente à la courbe DE en D sera la droite (DT) telle que, T étant sur (Bt), $\frac{BT}{BD} = \frac{fluxion(AB)}{fluxion(BD)}$[16].

Ce résultat s'obtient en considérant un déplacement infiniment petit du point D en d. Le point B se déplace alors en b, et si on considère le point c de BD tel que (bdc) est parallèle à (Bb), et le point T intersection des droites (Bb) et Dd), alors les triangles dcD et BTD sont semblables, d'où il s'en suit l'égalité des rapports $\frac{BT}{BD} = \frac{dc}{cD}$.

Or dc et Db sont les moments contemporains des quantités fluentes AB (cd=bB) et cD (cD=BD-bd) ce qu'il fallait démontrer.

Ce dernier exemple est, me semble-t-il, l'illustration parfaite du caractère algorithmique de la méthode employée par Newton pour tracer des tangentes. En effet, pour chacune des "manières" exposées, il est bien sûr nécessaire d'adapter à la figure les "témoins finis" qui serviront à la détermination de la tangente. Mais, cette adaptation effectuée, le procédé consistera toujours à calculer le rapport des fluxions à partir de la relation des fluentes qui, elles, sont imposée par la définition de la courbe même. Ainsi, Newton, pour conclure le chapitre concernant le tracé des tangentes, s'exprime en ces termes:

LXII. On peut avec la même facilité tirer les Tangentes lorsque la Relation de BD à AC, ou à BC, est donnée par une équation quelconque, ou lorsque les Courbes sont rapportées à des Lignes droites ou à d'autres Courbes d'une façon quelconque.

LXIII. On peut tirer des mêmes Principes la Solution de plusieurs autres problèmes, comme ceux qui suivent.

---

[16]Une erreur apparaît dans le texte où il est noté $\frac{BT}{AB} = \frac{fluxion(AB)}{fluxion(BD)}$. Cette erreur est d'ailleurs rectifiée dans les exemples.

Suivent alors sept problèmes faisant intervenir des courbes, des angles et même des surfaces. et voici la dernière phrase montrant que pour Newton, il ne reste plus aucune difficulté à obtenir quelque tangente que ce soit. Newton écrit ainsi:

La résolution de ces Problèmes & de tous les autres de même nature ne sera pas fort difficile, il n'y aura guère que l'ennui du calcul; je n'ai donc pas crû qu'il fût nécessaire d'en donner ici les Solutions, & je m'imagine que les Géomètres me sauront gré de ne les avoir qu'énoncés.

Ainsi, Newton semble avoir développé une méthode générale pour la détermination des tangentes à une courbe, mais qu'en est-il du caractère infinitésimal de cette méthode?

Si on se réfère aux méthodes développées par Fermat et Descartes, Newton ne prend pas en compte les propriétés géométriques des courbes étudiées, mais distingue différents cas suivant la façon dont elles sont définies (relation entre abscisse et ordonnée, angle et distance à un point ou une droite, relation entre les distances à un point et à une droite ou une courbe). Ce sont ces distinctions qui vont l'amener à décrire diverses manières pour *"tirer les tangentes aux courbes"*, mais elles n'attenuent en rien le caractère général de la méthode.

On attribue généralement la naissance du calcul infinitésimal à Newton et à Leibniz. Il y a cependant une controverse concernant d'une part la priorité de l'un ou de l'autre, et d'autre part le caractère infinitésimal de la méthode des fluxions.

Dans son texte **"Le style mathématique des Principia"**, François De Gandt parle, comme on l'a déjà dit, de méthode des témoins finis, et on peut noter une ressemblance entre cette méthode et celles qui sont utilisées dans **La Méthode des Fluxions**. En effet, pour définir la tangente en un point, Newton utilise la similitude entre une figure "finie" et une figure "infinitésimale", c'est à dire dont les côtés sont les moments de quantités fluentes. Ainsi, à la lecture de la "première manière", on peut noter que le triangle Ddc privilégié par Newton est ce qu'on appelle "le triangle caractéristique" dans la méthode de Leibniz.[17] Seulement Newton semble refuser l'utilisation des infiniment petits sauf à de rares occasions. Aussi, alors que Leibniz écrit $\frac{BD}{BT} = \frac{dy}{dx}$, dy et dx étant des infiniment petits, Newton considère le rapport $\frac{BD}{BT} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ où $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont les fluxions des quantités fluentes x=AB et y=BD.

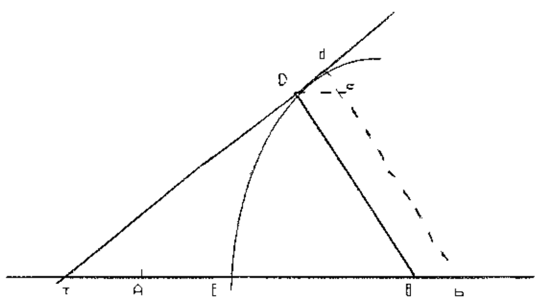


fig 1.1

[17]Voir l'article de Marie-Françoise Jozeau, Leibniz et l'école continentale, Mnémosyne N°6

Si l'on écrit: $dx = \dot{x}o$ et $dy = \dot{y}o$, o étant un intervalle de temps infiniment petit, il y a bien sûr équivalence entre les deux méthodes: il faut alors considérer que le moment d'une quantité x, utilisé par Newton, est égal à la différentielle de cette même quantité qu'utilise Leibniz. Mais, alors que Leibniz utilise les infiniment petits en tant que tels, Newton ne considère que leur rapport. Le calcul infinitésimal n'apparaît donc plus dans la résolution des problèmes concernant la recherche de tangentes à une courbe. Il n'a servi qu'à justifier (en partie) la règle concernant la détermination d'une relation entre les fluxions et surtout, à donner un fondement pour l'utilisation du rapport de deux fluxions.

En 1813[18], Lazare Carnot publie la seconde édition des **Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal,** dans lesquels il écrit un commentaire **De la Méthode des Fluxions** (annexe 3). Il signale par exemple que *"la méthode des fluxions n'admet,[...] que des quantités finies."*(§138). Par ailleurs, il effectue le rapprochement entre la méthode des fluxions et la méthode des premières et dernières raisons (§140). Cependant, Carnot fait une "lecture moderne" de **la Méthode des Fluxions"** puisqu'il écrit, en parlant de rapport de fluxions: *"[..], ces fluxions auront elles-mêmes entre elles une raison, qui n'est autre chose que la limite du rapport des différentielles [..]."* (§142). On peut donc constater que, bien que conscient des différences entre les méthodes employées par Newton et celles de Leibniz, Carnot tient pourtant à les assimiler. Ainsi, dans le dernier paragraphe (§143), il écrit: "Les procédés de la méthode des fluxions ne diffèrent de ceux de l'analyse infinitésimale que par la notation". C'est, me semble-t-il, nier le saut épistémologique que représente l'écriture différentielle. Newton n'utilise pas les infiniment petits aussi "naturellement" que Leibniz. Cependant, on peut considérer que Newton est, par rapport à ses prédécesseurs, le premier à avoir utilisé la notion d'infiniment petit pour justifier ses calculs, ce qui, d'une certaine façon, justifie le rôle prépondérant qu'on lui attribue dans l'invention du calcul infinitésimal.

Je ne prétend pas régler la querelle de priorité qui a opposé newtoniens et leibniziens. Je dirai pourtant qu'à la lecture de **La Méthode des Fluxions et des Suites infinies**, on voit apparaître clairement les notions de calcul infinitésimal et d'infiniment petit qui seront formalisées par Leibniz.

---

[18]Voir Mnémosyne n°7 pour la première édition des **Réflexions sur la Métaphysiques du Calcul Infinitésimal**, Paris, Duprat 1797.

ANNEXE 1

LA METHODE DES FLUXIONS, ET DES SUITES INFINIES.

Par M. le Chevalier NEWTON.

LV. En voilà tout autant qu'il en faut de dit ſur ces Methodes de calcul, dont je ferai un frequent uſage dans la ſuite. Reſte maintenant à donner quelques eſſais de Problêmes, ſur-tout de ceux que nous préſente la nature des Courbes, & cela pour mettre l'Art Analitique dans un plus grand jour. Et d'abord j'obſerverai que toutes leurs difficultés peuvent ſe reduire à ces deux Problêmes ſeulement que je vais propoſer ſur un eſpace décrit par un mouvement local retardé ou acceleré d'une façon quelconque.

LVI. 1. *La longueur de l'Eſpace décrit étant continuellement donnée, trouver la viteſſe du Mouvement à un tems donné quelconque.*

LVII. 2. *La viteſſe du Mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'Eſpace décrit à un tems donné quelconque.*

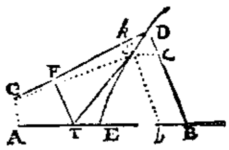
LVIII. Ainſi dans l'Equation $xx = y$, ſi y repréſente la longueur de l'Eſpace décrit à un tems quelconque, lequel tems un autre Eſpace x en augmentant d'une viteſſe uniforme $\dot{x}$ méſure & repréſente comme décrit, alors $2x\dot{x}$ repréſentera la viteſſe avec laquelle dans le même inſtant l'Eſpace y viendra à être décrit *& vice verſa*; & c'eſt de-là que j'ai dans ce qui ſuit conſideré les Quantités comme produites par une augmentation continuelle à la maniere de l'Eſpace que décrit un corps en mouvement.

LIX. Mais comme nous n'avons pas beſoin de conſiderer ici le tems autrement que comme exprimé & méſuré par un mouvement local uniforme, & qu'outre cela nous ne pouvons jamais comparer enſemble que des Quantités de même genre, non-plus que leurs viteſſes d'accroiſſement & de diminution; je n'aurai dans ce qui ſuit aucun égard au tems conſideré proprement comme tel; mais je ſuppoſerai que l'une des Quantités propoſées de même genre doit augmenter par une Fluxion uniforme, à laquelle Quantité je rapporterai tout le reſte comme ſi c'étoit au tems; donc par Analogie cette quantité peut avec raiſon recevoir le nom de tems; ainſi quand dans la ſuite pour donner des idées plus claires & plus diſtinctes, je me ſervirai du mot *Tems*, je n'entends jamais le tems proprement pris comme tel, mais ſeulement une autre Quantité par l'augmentation ou Fluxion de laquelle le tems peut être expprimé & méſuré.

LX. J'appellerai *Quantités Fluentes*, ou ſimplement *Fluentes* ces Quantités que je conſidere comme augmentées graduellement & indefiniment, je les repréſenterai par les dernieres Lettres de l'Alphabet v, x, y & z pour les diſtinguer des autres quantites qui dans les Equations ſont conſiderées comme connuës & déterminées qu'on repréſente par les Lettres initiales a, b, c, &c. & je repréſenterai par les mêmes dernieres Lettres ſurmontées d'un point $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$ les viteſſes dont les Fluentes ſont augmentées par le mouvement qui les produit, & que par conſéquent on peut appeller *Fluxions*. Ainſi pour la Viteſſe ou Fluxion de v je mettrai $\dot{v}$, & pour les viteſſes de x, y, z je mettrai $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ reſpectivement.

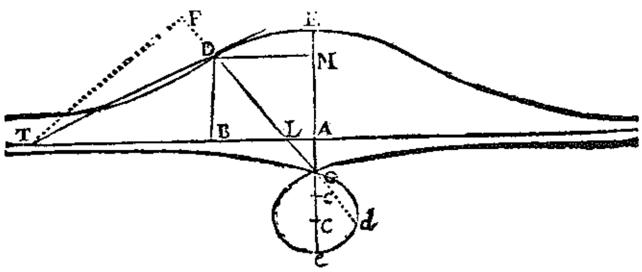
LXI. Ces choſes étant ainſi prépoſées, je vais entrer en matiere & donner d'abord la ſolution des deux Problêmes que je viens de propoſer.

XXX. Soit un Point donné G, duquel on tire la Soutendente DG à un Point D de la Courbe, soit DB l'Ordonnée sous un Angle quelconque à l'Abcisse AB; faites parcourir au Point un Espace infiniment petit dD sur la Courbe, sur GD prenez $Gk = Gd$, achevez le Parallelogramme $dcBb$, Dk & Dc feront les Moments contemporains de GD & de BD, dont ils diminuent tandis que D est porté en d. Prolongez la Ligne droite Dd jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en T; & de ce Point T abaissez sur la Soutendente GD la perpendiculaire TF, les Trapezes $Dcdk$ & DBTF feront semblables; ainsi DB : DF :: Dc : Dk.



XXXI. Comme la Relation de BD à GD est donnée par l'Equation à la Courbe, cherchez la Relation des Fluxions, & faites FD à DB comme la Fluxion de GD à la Fluxion de BD; du Point F élevez la perpendiculaire FT qui rencontre AB en T, tirez DT elle touchera la Courbe en D; si DT est positive il faut la prendre du côté de G, & si elle est négative du côté opposé.

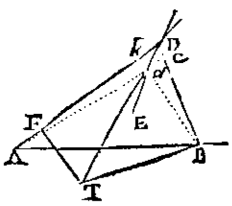
XXXVI. Ainsi dans la Conchoïde, ou tout ceci se fera plus



promptement que ci-dessus, faisant GA $= b$, LD $= c$, GD $= x$, & BD $= y$, on aura BD, y : DL, c :: GA, b : GL; $x - c$. Ainsi $xy - cy = cb$, ou $xy - cy - cb = o$. Cette Equation suivant la Régle donne $\frac{xy - cy}{y}$, ou $x - c =$ DF, prolongez donc GD vers F, de sorte que DF = LG, & au Point F élevez la perpendiculaire FT qui rencontre l'Asymptote AB en T, tirez DT elle touchera la Conchoïde.

Troisiéme Maniere.

XXXIX. Si l'on rapporte la Courbe à deux Soutendentes AD & BD, qui tirées de deux Points donnés A & B se rencontrent sur la Courbe; imaginez que le Point D parcourt l'Espace infiniment petit Dd, & sur AD & BD prenez $Ak = Ad$, & $Bc = Bd$; kD & cD feront les Moments contemporains des Lignes AD & BD, prenez donc DF à BD comme le Moment Dk au Moment Dc, (c'est-à-dire, dans le Raport de la Fluxion de la Ligne AD à la Fluxion de la Ligne BD) élevez sur BD & AD les perpendiculaires BT & FT qui se rencontreront au Point T; les Trapezes DFTB & $Dkdc$ feront semblables, & par conséquent la Diagonale DT touchera la Courbe.



XL. Au moyen donc de l'Equation qui exprime la Relation de AD à BD, trouvez la Relation des Fluxions & prenez FD à BD dans le même Raport.

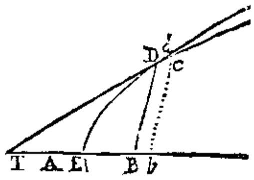
XLI. Exemple Supposons AD $= x$, & BD $= y$, & leur Relation $a + \frac{ex}{d} - y = o$. Cette Equation est aux Ellipses du second Ordre, dont *Descartes* dans le second Livre de sa Géometrie a démontré les propriétés pour rompre la Lumiere; la Relation des Fluxions sera $\frac{e\dot{x}}{d} - \dot{y} = o$. D'où $e : d :: \dot{y} : \dot{x}$ :: BD : DF.

PROBLEME IV.

Tirer les Tangentes des Courbes.

PREMIERE MANIERE.

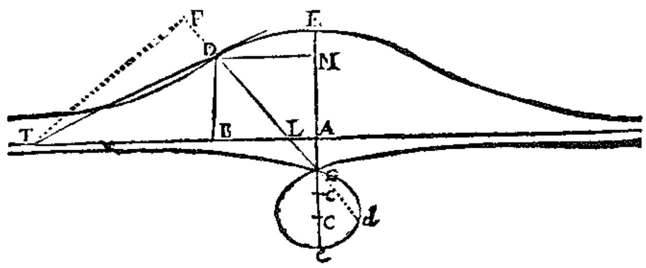
I. On peut tirer les Tangentes différemment, selon les différentes Relations des Courbes aux Lignes droites, & premierement soit BD une Ligne droite Ordonnée sous un Angle donné à une autre Ligne droite AB, prise pour Base ou Abscisse, & soit BD terminée à une Courbe ED. Faites mouvoir cette Ordonnée & faites-lui parcourir un Espace indéfiniment petit & parvenir à *bd*. Elle aura augmenté du Moment *cd*, tandis que AB aura augmenté du Moment B*b*, auquel D*c* est égal & parallele. Prolongés D*d* jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en T, cette Ligne touchera la Courbe en D ou *d*, & les Triangles *dc*D, DBT seront semblables ; ce qui donne TB : BD :: D*c* ou B*b* : *cd*.



II. La Relation de BD à AB est donnée par l'Equation à la Courbe ; cherchez par le Prob. 1. la Relation des Fluxions, & prenez TB à BD dans le Raport de la Fluxion de AB à la Fluxion de BD ; la Ligne TD touchera la Courbe au Point D.

III. Exemple. 1. Nommant AB, x & BD, y, soit leur Raport $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Celui des Fluxions sera $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$. Ainsi $\dot{x} : \dot{y} :: 3xx - 2ax + ay : 3y^2 - ax ::$ BD (y) : BT. Donc BT $= \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$. Et le PointD & de la lesLignesDB & AB ou x &y étant données,la longueur BT sera donnée, ce qui détermine la Tangente TD.

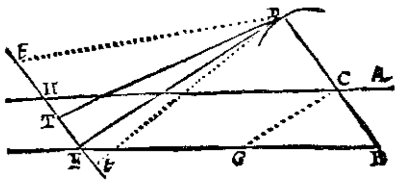
II. Exemple 3. Soit ED la Conchoïde de *Nicodeme*, décrite du Pôle G, soit AT l'Asymptote & LD la Distance ou Ligne interceptée. Soit GA $= b$, LD $= c$, AB $= x$, & BD $= y$. A cause des Triangles semblables DBL & DMG, on aura LB :



BD :: DM : MG ; c'est-à-dire, $\sqrt{cc - yy} : y :: x : b + y$, ou $\overline{b + y}\sqrt{cc - yy} = yx$. Dans cette Equation je suppose $\sqrt{cc - yy} = z$, & par là j'ai deux autres Equations $bz + yz = xy$, & $zz = cc - yy$, par le moyen desquelles je trouve les Fluxions de x, y & z, car la premiere donne $b\dot{z} + \dot{y}z + \dot{z}y = \dot{x}y + \dot{y}x$, & la seconde $2\dot{z}z = -2\dot{y}y$, ou $\dot{z}z + \dot{y}y = 0$. En exterminant z, on aura $-\frac{b\dot{y}y}{z} - \frac{\dot{y}y^2}{z} + \dot{y}z = \dot{x}y + \dot{y}x$, qui étant réduite en proportion donne $y : z - \frac{by}{z} - \frac{yy}{z} - x :: \dot{y} : \dot{x} ::$ BD : BT. Mais comme BD est y, BT sera par conséquent $= z - x \frac{-by - yy}{z}$. C'est-à-dire, $-$ BT $=$ AL $+ \frac{BD \times GM}{BL}$; ou le Signe $-$ devant BT, désigne que le Point T doit être pris du côté opposé au Point A.

XII. Scholie. De là on voit comment on peut trouver le Point de la Conchoïde qui sépare la partie concave de la partie convexe ou le Point d'Inflexion ; car c'est au Point ou AT est un moindre.

XLVI. Comme si la Ligne droite BCD tournoit autour du Point donné B, & que l'un de ses Points D décrivît une Courbe, & qu'un autre de ses Points C coupât la Ligne droite AC donnée de position. La Relation de BD & BC étant exprimée par une Equation quelconque ; tirez BF parallele à AC, de sorte qu'elle rencontre en F la Ligne DF perpendiculaire à BD ; élevez FT perpendiculaire à DF, & prenez FT à BC comme la Fluxion de BD à la Fluxion de BC ; tirez la Ligne DT elle sera Tangente à la Courbe.



Cinquième Maniere.

XLVII. Mais si le Point A étant donné, l'Equation exprimoit la Relation de AC à BD ; tirez CG parallele à DF, & prenez FT à BG comme la Fluxion de BD à la Fluxion de AC.

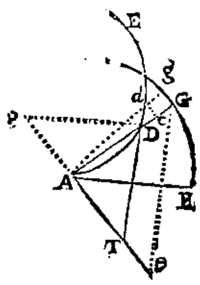
Sixième Maniere.

XLVIII. Ou si l'Equation exprime la Relation entre AC & CD ; faites rencontrer AC & FT au Point H, & prenez HT à BG, comme la Fluxion de CD à la Fluxion de AC. Et ainsi des autres.

Septième maniere.

POUR LES SPIRALES.

XLIX. Le Problême est le même lorsqu'on ne rapporte pas les Courbes à des Lignes droites, mais à d'autres Courbes, comme cela arrive dans les Courbes Mécaniques. Soit BG la Circonférence d'un Cercle dont le demi Diametre est AG ; tandis qu'il tourne autour du Centre A, faites mouvoir le Point D d'une façon quelconque, de sorte qu'il décrive la Spirale ADE ; faites parcourir au Point D l'Espace infiniment petit D*d*, & sur AD prenez A*c* = A*d* ; C*d* & G*g* seront les Moments contemporains de la Ligne droite AD & de la Circonférence BG. Tirez A*t* parallele à *cd*, c'est-à-dire perpendiculaire à AD, & qui rencontre la Tangente DT au Point T. Vous aurez *c*D : *cd* : : AD : AT ; soit aussi G*t* parallele à la Tangente DT, & vous aurez *cd* : G*g* : : A*d* ou AD : AG : : AT : A*t*.



L. Ainsi l'Equation qui exprime la Relation de BG à AD étant donnée ; cherchez la Relation de leur Fluxions, & prenez A*t* à AD dans le même Raport, G*t* sera parallele à la Tangente.

LI. EXEMPLE 1. Nommant BG, x & AD, y ; soit leur Relation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, on aura $3x^2 - 2ax + ay : 3y^2 - ax : : \dot{y} : \dot{x} : :$ AD : A*t* ; le Point *t* étant donc trouvé, tirez G*t* & sa parallele DT qui touchera la Courbe.

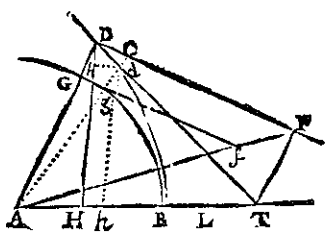
LII. EXEMPLE 2. Si l'on a $\frac{ax}{b} = y$, ce qui est l'Equation à la Spirale d'*Archimedes*, on aura $\frac{a\dot{x}}{b} = \dot{y}$, & par conséquent $a : b : : \dot{y} : \dot{x} : :$ AD : A*t* ; c'est pourquoi si l'on prolonge TA en P, de sorte que AP : AB : : $a : b$, PD sera perpendiculaire á la Courbe.

LIII. EXEMPLE 3. Si $xx = by$, $2xx$ sera $= b\dot{y}$, & $2x : b : :$ AD : A*t*. Et de la même façon on pourra toujours aisément tirer des Tangentes à toutes les Spirales.

Huitième Maniere.

POUR LES QUADRATRICES.

LIV. Si la Courbe est telle qu'une Ligne quelconque AGD, tirée du Centre A, rencontre l'Arc de Cercle en G, & la Courbe en D; & si la Relation de l'Arc BG & de la Ligne droite DH, qui est une Ordonnée à la Base ou Abcisse AH sous un Angle donné, est déterminée par une Equation quelconque; concevez que le Point D parcourt sur la Courbe un Espace infiniment petit Dd; achevez le Parallelogramme dhHk & prolongez Ad en c, de sorte que Ac = AD, Gg & Dk seront les Moments contemporains de l'Arc BG & de l'Ordonnée DH; prolongez Dd directement en T, ou elle rencontre AB, & de ce Point abaissez la perpendiculaire TF sur DcF; les Trapezes Dkdc & DHTF seront semblables; ainsi Dk : Dc : : DH : DF; de plus si vous élevez Gf perpendiculaire à AG, & qui rencontre AF en f, les paralleles DF & Gf donneront Dc : Gg : : DF : Gf, & de même Dk : Gg :: DH : Gf, c'est-à-dire, comme les Moments ou les Fluxions des Lignes DH & BG.

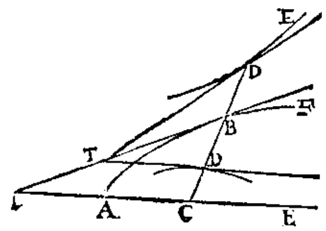


LV. Ainsi par l'Equation qui exprime la Relation de BG & de DH, trouvez la Relation des Fluxions, & dans ce même Raport prenez la Tangente Gf du Cercle BG, & la Ligne DH; tirez DF parallele à Gf, qui rencontre Af prolongée en F; à ce Point F élevez la perpendiculaire FT, qui rencontre AB en T; & enfin tirez la Ligne droite DT elle sera Tangente à la Quadratrice.

LVI. EXEMPLE 1. Nommant BG, x & DH, y soit $xx = yy$, on aura $2x\dot{x} = b\dot{y}$; d'où $2x : b : : \dot{y} : \dot{x}$: : DH : Gf, le Point f étant trouvé on déterminera le reste comme ci-dessus.

Neuvième Maniere.

LIX. Enfin si ABF est une Courbe quelconque touchée par la droite BT; & si une partie BD (de la Ligne droite BC, Ordonnée sous un Angle quelconque à l'Abcisse AC,) interceptée entre cette Courbe & une autre Courbe DE a une Relation à une partie de la Courbe AB exprimée par une Equation, vous pourrez tirer la Tangente DT à l'autre Courbe, en prenant sur la Tangente de la premiere, BT en même raison avec AD, comme la Fluxion de la Courbe AB avec la Fluxion de la Ligne droite BD.



LX. EXEMPLE 1. Nommant AB, x; BD, y; soit $ax = yy$, donc $a\dot{x} = 2y\dot{y}$; ainsi $a : 2y : : \dot{y} : \dot{x}$: : BD : BT.

LXI. EXEMPLE 2. Soit $\frac{a}{b} x = y$, Equation à la Trocoïde si ABF est un Cercle; on aura $\frac{a}{b}\dot{x} = \dot{y}$, & $a : b$: : BD : BT.

ANNEXE 2

PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feue Madame la Marquise DU CHASTELLET.

TOME PREMIER.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

LIVRE PREMIER.

SECTION PREMIERE.

De la méthode des premieres & dernieres raisons employée dans tout cet Ouvrage.

LEMME PREMIER.

Les quantités & les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

Si on le nie, qu'on suppose qu'elles soient à la fin inégales, & que leur derniere différence soit D, puisqu'elles ne peuvent pas approcher plus près de l'égalité que de cette différence donnée D, leur différence ne sera donc pas plus petite que toute différence donnée, ce qui est contre l'hypothèse. Du Mouvement des Corps.

LEMME II.

Du Mouvement des Corps.

Si dans une figure quelconque AacE, *comprise entre les droites* Aa, AE, *& la courbe* acE, *on inscrit un nombre quelconque de Parallélogrammes* Ab, Bc, Cd, &c. *compris sous les bases égales* AB, BC, CD, *&c. & sous les côtés* Bb, Cc, Dd, *&c. parallèles au côté* Aa *de la figure ; & qu'on achève les parallélogrammes* akbl, bLcm, cMdn, *&c. qu'on diminue ensuite la largeur de ces parallélogrammes, & qu'on augmente leur nombre à l'infini : les dernieres raisons qu'auront entr'elles la figure inscrite* AKbLcMdD, *la circonscrite* AalbmcndoE, *& la curviligne* AabcdE, *seront des raisons d'égalité.*

Car la différence de la figure inscrite & de la figure circonscrite, est la somme des parallélogrammes *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, c'est-à-dire (à cause de l'égalité de toutes les bases) que cette différence est égale au rectangle *ABla* fait sur l'une des bases *Kb* & sur la somme *Aa*, de toutes les hauteurs; mais ce rectangle, à cause que sa largeur diminue à l'infini, deviendra plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc (par le Lemme premier) la figure inscrite, la figure circonscrite, & à plus forte raison la figure curviligne intermédiaire seront à la fin égales. *C. Q. F. D.*

LEMME III.

Les dernieres raisons de ces mêmes figures seront encore des raisons d'égalité, quoique les bases AB, BC, CD, *&c. des parallélogrammes soient inégales, pourvû qu'elles diminuent toutes à l'infini.*

Soit AF la plus large de ces bases, & soit achevé le parallélogramme *FAaf*. Ce parallélogramme sera plus grand que la différence de la figure inscrite & de la figure circonscrite; mais sa largeur AF diminuant à l'infini, il sera plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc &c. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. D'où il suit que la derniere somme de tous les parallélogrammes qui s'évanouissent coïncidera dans toutes ses parties avec la figure curviligne.

Cor. 2. Et à plus forte raison la figure rectiligne, comprise sous les cordes des arcs évanouissans *ab*, *bc*, *cd*, &c. coïncidera à la fin avec la figure curviligne.

Cor. 3. Il en sera de même de la figure rectiligne circonscrite qui est comprise sous les tangentes de ces mêmes arcs.

Cor. 4. Et par conséquent ces dernieres figures (quant à leurs périmétres *acE*) ne sont pas rectilignes, mais les limites curvilignes des figures rectilignes.

LEMME IV.

Si dans deux figures AacE, PprT, *on inscrit, comme ci-dessus, deux suites de parallélogrammes, dont le nombre soit le même, & que lorsque leurs largeurs diminuent à l'infini, les dernieres raisons des parallélogrammes de l'une des figures aux parallélogrammes de l'autre, chacun à chacun, soient les mêmes; ces deux figures* AacE, PprT *seront entr'elles dans cette même raison.*

Car la proportion qu'un des parallélogrammes de la premiere figure a avec celui qui lui répond dans la seconde, est la même que celle de la somme de tous les parallélogrammes de la premiere figure, à la somme de tous les parallélogrammes de la seconde, & par conséquent la même que celle qui est entre les deux figures, en supposant toutefois, que, selon le Lemme 3. la raison de la premiere figure à la somme de tous les parallélogrammes qu'elle renferme, soit une raison d'égalité, aussi-bien que celle de la seconde figure à la somme de tous les Parallélogrammes qui y sont renfermés. *C. Q. F. D.*

Cor. D'où il suit, que si deux quantités d'un genre quelconque sont partagées dans un même nombre de parties quelconques, & que ces parties, lorsque leur nombre augmente & que leur grandeur diminue à l'infini, soient entr'elles en raison donnée, la premiere à la premiere, la seconde à la seconde, & ainsi de suite: les touts seront entr'eux dans cette même raison donnée; car si on représente les parties de ces touts par les parallélogrammes des figures de ce Lemme, les sommes de ces parties seront comme

les sommes des parallélogrammes; & par conséquent, lorsque le nombre de ces parties & des Parallélogrammes augmente, & que leur grandeur diminue à l'infini, les touts seront dans la derniere raison d'un Parallélogramme à l'autre; c'est-à-dire, par l'hypothèse, dans la derniere raison d'une partie à l'autre.

LEMME V.

Tous les côtés homologues des figures semblables sont proportionnels, tant dans les figures curvilignes que dans les rectilignes, & leurs aires sont en raison doublée de ces côtés.

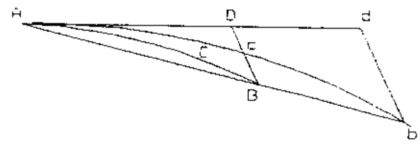
LEMME VI.

Si un arc ~~[illegible]~~ quelconque ACB *donné de position, est soutenu par la corde* AB, *& qu'au point* A *placé dans le milieu de sa courbure continue, il soit touché par une droite* AD *prolongée des deux côtés, & que les points* A *&* B *s'approchent l'un de l'autre jusqu'à ce qu'ils coïncident; l'angle* BAD, *compris sous la tangente & la corde diminuera à l'infini, & s'évanouira à la fin.*

Car si cet angle ne s'évanouissoit pas, l'arc *ACB* & la tangente *AD* contiendroient un angle rectiligne, & par conséquent la courbure au point *A* ne seroit point continue, ce qui est contre l'hypothése.

LEMME VII.

Les mêmes choses étant posées, la derniere raison qu'ont entr'elles l'arc, la corde & la tangente, est la raison d'égalité.



Car pendant que le point *B* s'approche du point *A*, supposons que les lignes *AB*, *AD* soient prolongées jusqu'aux points éloignés *b* & *d*, & qu'on méne la ligne *bd* parallele à la sécante *BD*, & qu'on prenne de plus *Acb* toujours semblable à l'arc *ACB*. Lorsque les points *A* & *B* coïncideront, l'angle *dAb* s'évanouira par le Lemme précédent; donc les droites *Ab*, *Ad*, qui restent toujours de grandeur finie, & l'arc intermédiaire *Acb* coïncideront & seront par conséquent égales. Donc les droites *AB*, *AD*, & l'arc intermédiaire *ACB*, qui leur sont toujours proportionnels, s'évanouiront, & auront pour derniere raison la raison d'égalité. *C. Q. F. D.* LIVRE PREMIER.

Cor. 1. Ainsi, si par *B* on méne une droite *BF* parallele à la tangente *AD*, laquelle *BF* coupe toujours en *F* une ligne quelconque *AF* qui passe par *A*, la raison de cette droite *BF* à l'arc évanouissant *ACB*, sera à la fin la raison d'égalité, puis qu'achevant le parallélogramme *AFBD*, cette raison est la même que celle qu'à la droite *AD* avec le même arc *ACB*. Fig. 10.

Cor. 2. Et si par *B* & par *A* on tire plusieurs droites *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, qui coupent la tangente *AD* & sa parallele *BF*, la derniere raison de l'arc *AB* de la corde & de toutes les parties coupées *AD*, *AE*, *BF*, *BG* entr'elles sera la raison d'égalité.

Cor. 3. Et par conséquent toutes ces lignes pourront être prises l'une pour l'autre dans tous les cas où l'on se servira de la méthode des premieres & dernieres raisons.

LEMME VIII.

Si les droites données AR, BR, *l'arc* ACB, *la corde* AB, *& la tangente* AD, *forment trois triangles* RAB, RACB, RAD, *& que les points* A *&* B *s'approchent l'un de l'autre: ces triangles, qui s'évanouiront, seront à la fin semblables, & leur derniere raison sera la raison d'égalité.*

Pendant que *B* s'approche de *A*, imaginons qu'on prolonge *AB*, *AD*, *AR*, en *b*, *d*, *r*, qu'on méne *rbd* parallele à *RD*, & qu'on prenne l'arc *Acb* toujours semblable à l'arc *ACB*, lorsque les points *A* & *B* coïncideront, l'angle *bAd* s'évanouira, & les trois triangles *rAb*, *rAcb*, *rAd*, qui restent toujours de grandeur finie coïncideront, & seront par conséquent égaux & semblables. Donc les triangles *RAB*, *RACB*, *RAD*, qui leur sont toujours semblables & proportionnels, seront à la fin égaux & semblables entr'eux. *C. Q. F. D.* Fig. 9.

Cor. Donc ces triangles pourront être pris l'un pour l'autre dans tous les cas où l'on employera la méthode des premieres & dernieres raisons.

ANNEXE 3

RÉFLEXIONS

SUR

LA MÉTAPHYSIQUE

CARNOT

DU

2ª édition - 1813

CALCUL INFINITÉSIMAL,

DE LA MÉTHODE DES FLUXIONS.

136. Newton considère une courbe comme engendrée par le mouvement uniforme d'un point; il décompose à chaque instant la vitesse constante de ce point en deux autres, l'une parallèle à l'axe des abscisses et l'autre parallèle à l'axe des ordonnées. Ces vitesses sont ce qu'il appelle fluxions de ces coordonnées, tandis que la vitesse arbitraire du point qui décrit la courbe est la fluxion de l'arc décrit.

Réciproquement cet arc décrit est appelé la fluente de la vitesse avec laquelle il est décrit par le point mobile, l'abscisse correspondante est appelée fluente de la vitesse de ce point estimée dans le sens de cette abscisse, et l'ordonnée est appelée fluente de la vitesse de ce même point estimée dans le sens de cette ordonnée.

Puisque la fluxion de l'arc est supposée constante, il est évident qu'à moins que le chemin du point décrivant ne se fasse en ligne droite, les fluxions de l'abscisse et de l'ordonnée seront variables, et que leur rapport à chaque instant dépendra de la nature de la courbe, c'est-à-dire, de la relation même de ces coordonnées.

Réciproquement la relation des coordonnées dépend nécessairement de celle qui existe à chaque instant entre les fluxions de ces coordonnées. On peut donc demander quel est le moyen de découvrir la relation qui existe entre les fluxions, lorsque l'on connaît celle qui existe entre les coordonnées; et réciproquement quel est celui de découvrir la relation qui existe entre les coordonnées, lorsque l'on connaît celle qui existe entre les fluxions seules, ou combinées avec les coordonnées elles-mêmes. La première partie de ce problème est ce qu'on nomme méthode des fluxions, et la seconde méthode inverse des fluxions.

137. Mais ces premières notions peuvent être généralisées; car à mesure que le point décrivant parcourt la courbe, non-seulement l'abscisse et l'ordonnée changent, mais encore la sous-tangente, la normale, le rayon de courbure, etc. c'est-à-dire, que ces quantités croissent ou décroissent plus ou moins rapidement ainsi que les coordonnées elles-mêmes. Toutes ces quantités ont donc des fluxions dont les rapports sont également déterminés par le mouvement du point que décrit uniformément la courbe; ainsi ces quantités sont elles-mêmes des fluentes. Or c'est l'art de déterminer les relations de toutes ces fluentes par l'entremise de leurs fluxions employées comme auxiliaires, que l'on nomme méthode directe et inverse des fluxions, ou méthode des fluxions et fluentes.

Cette méthode s'applique non-seulement aux lignes courbes, mais par analogie on l'étend aux aires que renferment ces courbes, aux surfaces courbes et aux volumes qu'elles terminent, aux forces qui mettent les corps en mouvement et aux effets qu'elles produisent; on en applique en un mot la théorie à tout ce qui fait l'objet des mathématiques et des sciences physico-mathématiques, aussi bien que la méthode d'exhaustion elle-même et tous les modes de calcul qui en dérivent.

138. La méthode des fluxions n'admet, comme on le voit dans le calcul, que des quantités finies: puisque ces fluxions ne sont autre chose que des vitesses qui sont des quantités finies. On peut même prendre ces vitesses respectives avec lesquelles les coordonnées croissent, pour coordonnées d'une nouvelle courbe, lesquelles auront aussi leurs fluxions, qui seront pareillement des quantités finies; et celles-ci pourront encore être prises pour coordonnées d'une troisième courbe, ainsi de suite, sans que jamais il entre dans le calcul autre chose que des quantités finies.

139. Il y a une fluxion principale qui est choisie à volonté, mais qui étant une fois adoptée règle toutes les autres : on peut choisir celle que l'on veut; nous avons supposé que c'était la vitesse absolue du point décrivant, que nous avons regardée comme uniforme : mais on peut supposer également que c'est la vitesse dans le sens de l'abscisse, ou toute autre qui soit uniforme et qui serve de terme de comparaison.

140. La méthode des fluxions et fluentes dérive naturellement de celle des premières et dernières raisons ; car la vitesse variable d'un point, n'est pas le chemin décrit par ce point dans un temps donné, divisé par ce temps ; mais la première ou dernière raison de ce rapport, c'est-à-dire, la quantité dont ce rapport approche de plus en plus, à mesure que ce temps est supposé plus court.

141. Cette observation a été le prétexte d'une objection élevée contre la méthode des fluxions ; car, a-t-on dit, c'est introduire dans la Géométrie qui appartient aux Mathématiques pures, la notion des vitesses qui n'appartient qu'aux Mathématiques mixtes, et définir une idée qui doit être simple, par une autre qui est complexe.

Mais cette objection est assez frivole : car la véritable chose à considérer, est de savoir si la théorie est plus facile à saisir de cette manière que d'une autre. Le classement que nous faisons des sciences est assez arbitraire. Nous plaçons la Géométrie avant la Mécanique dans l'ordre de la simplicité ; mais les parties transcendantes de la première sont bien plus abstraites que les parties élémentaires de la seconde ; et comme le dit Lagrange, « chacun a ou croit avoir une idée nette de la vitesse, » ce n'est donc pas prendre une marche contraire à l'esprit des Mathématiques, que de définir les fluxions par les vitesses.

142. Nous venons de voir que les vitesses qu'on nomme *fluxions*, sont les dernières raisons des espaces parcourus et des temps employés à les parcourir ; mais si l'on compare ensemble deux de ces vitesses ou fluxions, par exemple la fluxion de l'abscisse avec celle de l'ordonnée, ces fluxions auront elles-mêmes entre elles une raison, qui n'est autre chose que la limite du rapport des différentielles de ces coordonnées. Ainsi la Méthode des fluxions n'est encore, comme on le voit, que la méthode infinitésimale, et par conséquent la méthode d'exhaustion envisagée sous un nouveau point de vue, et l'on aperçoit facilement le lien qui unit toutes ces méthodes les unes aux autres.

143. Les procédés de la méthode des fluxions ne diffèrent de ceux de l'analyse infinitésimale, que par la notation. Au lieu de la caractéristique d, dont on se sert dans celle-ci, on pointe les lettres dans la méthode des fluxions; c'est-à-dire, que la fluxion de la variable ou fluente x, par exemple, est représentée par $\dot{x}$, mais avec cette distinction, que $\dot{x}$ représente une quantité finie qui est la vitesse du point décrivant dans le sens des abscisses, tandis que dx, dans le calcul différentiel, représente une quantité infiniment petite, qui est l'accroissement instantané de cette même abscisse.