COPIRELEM

(Commission permanente des I.R.E.M. pour l'enseignement élémentaire)

DOCUMENTS POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ÉCOLE

EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Tome III

Ouvrage collectif, à l'initiative de la **COPIRELEM**
issu du stage de COLMAR, 24-28 mars 1993
(Stage de formation FCAH02CE de la Direction des Écoles)

Mise en page : JL Oyallon, antenne de PAU de l'IUFM d'Aquitaine
Imprimé par l'IREM de Paris VII - Mars 1994

TABLE DES MATIÈRES

Partie 3 : Analyse critique de la brochure de Cahors

Partie 4 : Références pour une aide au travail personnel des P.E.

Partie 5 : Conférences

INTRODUCTION

Le stage de Colmar (1993) est le troisième stage que la COPIRELEM (Commission permanente des IREM pour l'enseignement élémentaire) organise sur le thème *« Elaboration de documents pour la formation des maîtres en didactique des mathématiques »*, après ceux de Cahors en 1991 et de Pau en 1992.

Retenu dans le plan national de formation de la Direction des Ecoles pour 1992-1993, ce stage s'est déroulé à l'IUFM de COLMAR du 24 au 28 mars 1993.

En continuité avec le contenu des actes des deux précédents stages, vous trouverez dans ce recueil un complément de propositions et de comptes-rendus d'activités pour la formation des maîtres et de nombreuses références bibliographiques.

Pour mieux cerner et améliorer l'utilisation qui peut être faite de la didactique en formation des maîtres, la COPIRELEM souhaite analyser ce que les enseignants font avec les situations déjà publiées, et réfléchir sur la forme et le contenu des documents qui les présentent.

Ce recueil contient quelques exemples et analyses des utilisations – en formation – des actes du stage de Cahors, deux ans après leur parution.

C'est le début d'un vaste travail, que la COPIRELEM compte continuer à plus grande échelle.

Parallèlement aux stages de production, les colloques nationaux de formateurs en mathématiques que la COPIRELEM organise depuis 1974 sont des lieux d'échanges et de réflexions sur les pratiques professionnelles. On trouve dans les actes de ces colloques de nombreux comptes-rendus d'ateliers et textes de communications concernant la formation des maîtres.

La COPIRELEM a donc proposé à la Direction des Ecoles l'organisation d'un quatrième stage pour la production de documents pour la formation, ayant comme axe principal de réflexion les utilisations que les formateurs font des actes des colloques et des stages de Cahors, Pau et Colmar. Ce stage pourrait se dérouler à ANGERS en mars 1995.

Nous invitons les collègues formateurs en mathématiques à nous faire part de leur expérience, de leurs propositions et de leurs remarques, à l'adresse suivante :

COPIRELEM
IREM Paris VII
2 place Jussieu
75251 Paris Cedex 05

Partie 1

Élaboration de formations initiales courtes

Titre : Les paramètres de prises de décision des formateurs dans l'élaboration des formations initiales courtes.
Date : Avril 1993
Résumé : Des formateurs réunis à Colmar ont tenté de préciser et d'illustrer le titre. Ce qui a donné lieu à une introduction (C.Houdement -PIUFM Rouen) et à trois contributions de F.Huguet (PIUFM Quimper), M.Pauvert et M.Fénichel (PIUFM Livry-Gargan).

LES PARAMÈTRES DE PRISES DE DÉCISION DES FORMATEURS

dans l'élaboration des formations initiales courtes

TROIS MOTS : formation, courte, initiale.

- Formation :

Par différence avec **information**, la **formation** essaie d'agir sur les représentations des formés. L'**information** met à disposition des savoirs et résultats divers, renvoie à des éléments bibliographiques,...

- Courte :

Définir les caractéristiques d'une formation **courte** a été notre premier problème. Immédiatement nous nous sommes rassurés : prendre la décision de traiter de ce thème ne signifie pas cautionner les formations courtes.

Ont été finalement envisagés les critères suivants, très souvent liés entre eux :

- le temps effectif de formation (nombre d'heures) ;
- la répartition de ces heures dans le temps absolu (sur un mois, sur deux jours,...) ;
- l'état de connaissances initiales théoriques des formés ;
- la connaissance du terrain (un an sur le terrain, aucune expérience, instituteurs chevronnés,...).

- Initiale :

Le titre annoncé préalablement ne comportait pas le mot "initial", une première discussion a fait émerger l'importance de la connaissance du terrain et donc l'impossibilité de traiter des deux types de formation (initiale et continue) dans le temps imparti : nous avons restreint au champ "formation initiale".

Le PLAN D'ETUDE suivi dans le groupe de travail fut le suivant :

1 - communiquer des exemples de pratique inaugurale (première séquence) de formations jugées personnellement courtes,

2 - construire les critères de construction d'un plan de formation pour un public relativement fixé et un temps de formation imposé,

3 - remplir individuellement (ou à l'échelle de l'équipe de formateurs d'un IUFM) ce plan pour en illustrer les différents aspects.

Des exemples de pratiques inaugurales.

Au travers des différentes évocations de premières séquences, nous avons choisi, pour ces séquences, les objectifs suivants et les moyens de les atteindre :

● *pour faire prendre conscience aux étudiants de leurs capacités à faire des mathématiques, de la multiplicité des procédures produites,...*

☞ les mettre immédiatement en face d'un problème mathématique à résoudre ;

● *pour les amener à tenir compte des capacités et possibilités de chacun et à mesurer la richesse d'un travail partagé,*

☞ leur donner une tâche collective à résoudre (de type construction d'un objet géométrique par exemple) ;

● *pour leur montrer l'imbrication des notions mathématiques les unes dans les autres,*

☞ choisir un thème disciplinaire (par exemple la numération) et un travail d'étude d'erreurs d'élèves sur ce thème ou un voisin (par exemple les opérations) ;

● *pour leur donner des pistes pour leur classe ;*

☞ les mettre en contact avec des manuels scolaires pour des premières analyses sur la rigueur des contenus, le caractère fonctionnel ou non des définitions proposées, les types de tâches-élèves demandées, les façons dont il est possible d'enrichir, de poursuivre le travail proposé,...

● *pour leur apporter un complément d'information théorique, par opposition à des pratiques de mises en situation,*

☞ leur présenter un ensemble de connaissances de type professionnel (par exemple des ingénieries de classe sur la division, ou un cours théorique sur la notion de nombre).

Ces divers échanges nous ont amenés à définir les rubriques suivantes pour ces plans de formations courtes.

Élements d'étude possibles pour la constitution de plans de formation.

1 - Les entrées :

- un savoir disciplinaire envisagé sous ses aspects mathématiques ou épistémologiques ;

- un savoir didactique plutôt du côté du maître : étude comparée de documents pour la classe, présentation d'ingénieries de classe,...

- un savoir didactique plutôt du côté élève : étude des erreurs des élèves, analyse de productions d'élèves,...

- une réflexion introspective sur son propre mode d'apprentissage, la structuration de ses connaissances,...

2 - Les démarches de formation :

- un exposé magistral,
- une mise en situation-élève résolvant un problème de mathématiques ;
- une mise en situation-enseignant, analysant ivers documents ou travaux pour sa pratique,
- etc...

3 - Les types de prise en compte du public :

- public homogène, ou non,
- son niveau de connaissances mathématiques,
- sa connaissance du terrain,
- ses attentes,
- ses représentations des mathématiques, de l'enseignement,
- etc...

4 - Les éléments d'évaluation des formations courtes.

5 - Les entrées importantes qu'on regrette de négliger.

Il s'agissait alors de faire fonctionner ces éléments d'étude sur des plans de formations courtes.

Pour définir celles-ci, nous n'avons finalement retenu qu'un **temps limité** : la fourchette décidée a été entre 9 et 24 heures, les caractéristiques du public des formés devant être précisées.

Des exemples de plan de formation.

Les contributions qui suivent ont été réalisées à leur retour dans leurs IUFM respectifs par trois collègues, pour illustrer ce qui leur paraissait être une formation initiale courte.

Remarques et conclusion.

La tâche dans laquelle nous nous sommes engagés lors de ce stage dépassait le simple cadre d'une semaine de travail. Nous sommes tout à fait conscients de ne pas avoir épuisé le sujet, mais espérons, par nos échanges et nos contributions, avoir fourni des premiers éléments de réflexion sur ce thème.

Titre : Première séance d'un module de formation de 18 heures (FPS).
Auteur : François Huguet (PIUFM Quimper).
Date : Avril 1993.
Origine : Exploitation de la Brochure de Cahors (page 62).
Type : Compte-rendu d'activités.
Thèmes mathématiques : Géométrie (le carré).

PREMIÈRE SÉANCE D'UN MODULE DE FORMATION DE 18 HEURES (FPS).

Cette séquence de 3h donne l'exemple d'une entrée "pédagogique ou professionnelle".

L'étude collective et comparative d'une notion simple vue à travers plusieurs manuels va permettre de lancer le débat et de faire émerger certaines représentations.

Le but recherché est bien sûr, l'éveil de l'esprit critique, mais surtout l'idée d'aborder les problèmes d'apprentissage de façon plus "fonctionnelle" en tenant compte de ce que produisent les enfants.

Contexte

Cette année 92-93, nous avions un petit groupe de 16 étudiants pré-recrutés c'est-à-dire en poste sur le terrain. Il a été organisé une première rencontre d'une journée pour mettre en place la première session de formation d'une durée de 6 semaines à l'IUFM. Durant cette période, à deux collègues, nous avons disposé de 12 heures. Nous avons pu suivre quelques étudiants dans leurs classes tout au long de l'année. Une seconde session de 2 semaines ayant pour but de faire le point et de les préparer à leur examen nous a permis de travailler avec eux 6 heures !

En dehors de l'aspect scandaleux d'une telle formation, nous avons dû tenter de répondre à certaines attentes. Celles-ci ont révélé le besoin affirmé d'une "trousse de première urgence" dans des domaines très divers.

J'ai choisi comme première activité l'étude comparative d'une notion simple, celle de carré, à travers des extraits de plusieurs manuels (Idée d'Hervé Péault *Documents pour la formation des professeurs d'école*, Stage de Cahors 1992, IREM de Paris 7 page 62).

Intentions pédagogiques

- Etablir une sorte de contrat avec les étudiants en leur faisant prendre conscience de l'importance de la réflexion personnelle et de l'observation : il est bon de soumettre tout livre ou tout écrit à critique, de centrer l'apprentissage sur l'élève, de partir de ses savoir-faire et de ses besoins.

- Montrer que les mathématiques ne sont pas des activités isolées, mais qu'elles font partie d'un réseau de connaissances et qu'elles prennent du sens à travers les problèmes qu'elles permettent de résoudre.

Déroulement

1) Analyse individuelle ou en petit groupe de 4 extraits de manuels de CE1 concernant la notion de carré.

- "Mathématique contemporaine CE1" Thirioux (Magnard 1975) Livre du Maître et livre de l'élève p 136-137.
- "Autour du carré à partir du cube" Séquence Radio Télévision Scolaire CE1 juin 1975.
- "Objectif Calcul CE1" Clavier...(Hatier 1988) Livre du maître période IV étape 3 et livre de l'élève p 113.
- "L'Univers mathématique CE1" Goergler... (L'Ecole 1979) Livre du maître p 140.

Ces extraits sont fournis en annexe 1.

Voir aussi « Guide pour l'observation d'une séquence de mathématique », *Documents pour la formation des professeurs d'école*, Stage de Cahors 1992, IREM de Paris 7 p 81).

Un questionnaire pour guider la réflexion :

- Quelles sont les connaissances et compétences auxquelles il est fait référence ?
- L'auteur prévoit-il que l'apprentissage s'effectue à partir de problèmes que les enfants doivent résoudre ?
- Si oui, quels problèmes et quelles procédures peut-on attendre des enfants de cet âge ?
- Comment peut être envisagée la validation du travail des enfants ?
- Quel sera le savoir institutionnalisé ?
- A travers cette vision parcellaire, peut-on identifier des différences dans les conceptions de l'apprentissage ?

2) Débat collectif

permettant d'échanger des points de vue et d'aborder quelques notions simples de didactique.

Durant cette phase, j'essaie de bien faire mettre en évidence le travail réservé à l'enfant, de prévoir ce qu'il est censé savoir et de confronter à ce sujet les quelques expériences personnelles de l'auditoire.

3) Mise au clair

dans un grand tableau que l'on remplit ensemble et comportant les rubriques correspondant aux questions posées pour les 4 documents, d'une grille de réponses permettant de tirer quelques premières conclusions.

Dans cette phase, j'aborde un nouveau questionnement :

- Y a-t-il recherche de motivation de l'activité proposée aux enfants ?
- Part-on de ce qu'ils connaissent ou savent faire, autrement dit : est-ce une activité adaptée ?
- Y a-t-il réellement pour eux une situation-problème visant un apprentissage et quelles difficultés peuvent-ils rencontrer ?

4) Synthèse des quelques remarques

que j'ai été amené à faire à propos des extraits de manuels.

• Il me semble important de leur faire découvrir ce que j'entends par **apprentissage "fonctionnel"**.

Pour cela je choisis par exemple l'extrait du Magnard dans lequel Thirioux écrit :

« La surface limitée par la frontière A B C D a :
- ses quatre côtés isométriques
- ses deux diagonales isométriques.
C'est un carré. »

Passons sur le vocabulaire contestable (isométrique)...Cette "définition", que permet-elle à l'enfant de faire ?

Il pourra bien sûr discriminer un carré parmi d'autres quadrilatères mais en aucun cas il ne sera en mesure de le construire !

Or c'est pourtant là un point important de l'enseignement à l'école élémentaire. L'enfant doit pouvoir accumuler des expériences dans le domaine géométrique et nous devons lui donner l'occasion de réinvestir ses connaissances !

Ce n'est pas pour rien que les I.O. parlent d'activités géométriques !

A la rigueur, la définition de Thirioux pourrait être fonctionnelle pour le vitrier qui doit changer une vitre et dispose d'un petit appareil en forme de croisillon qui lui permet par retournement de vérifier si les diagonales ont même longueur !

• Concernant le **problème de la motivation**, il me semble aisé de montrer que, pour une fois, les auteurs d'Objectif Calcul ont manqué singulièrement d'imagination en proposant d'emblée une activité de tri assez gratuite et qui suppose des connaissances loin d'être acquises à cet âge concernant les quadrilatères.

En revanche, le problème de réinvestissement qu'ils proposent escamote les difficultés posées par les angles droits !

• Concernant l'**inadaptation d'une activité** à un niveau donné, l'exemple donné dans le quatrième extrait avec sa perspective cavalière est un modèle du genre et se passe de commentaires !

• Pour tenter d'illustrer ce qu'est une **situation construite à des fins d'apprentissage**, il reste les idées remarquables des séquences proposées par R.T.S et que j'ai pu expérimenter.

5) Phase de reconstruction et prospective

Je présente alors un compte-rendu de la séquence réalisée à plusieurs reprises dans l'esprit des activités proposées par R.T.S avec l'évolution intéressante des productions des enfants confrontés au problème de la construction du "plus beau carré" dont on a déjà l'un des côtés (non parallèle au bord de la feuille).

Je saisis cette occasion pour aborder la notion de variable didactique (taille du côté donné, disposition par rapport au bord de la feuille...)

Nous analysons ensemble les productions d'enfants qui parlent beaucoup mieux que les discours !

Nous constatons par exemple que

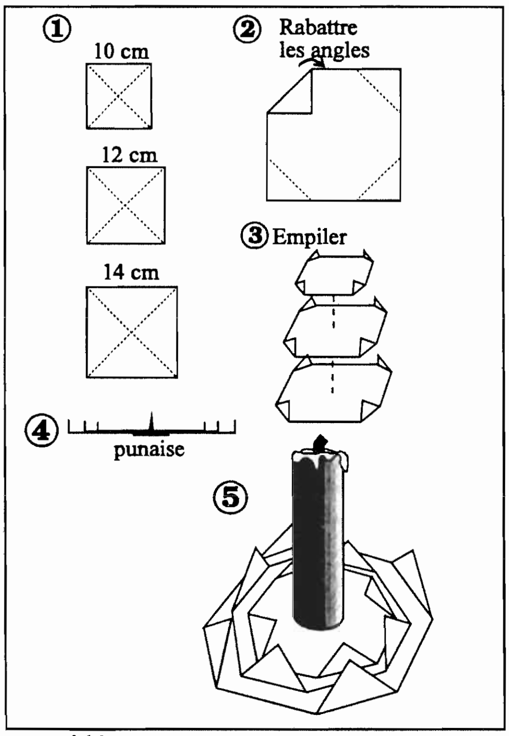
- certains d'entre eux ont de grosses difficultés pour les gestes les plus simples comme le découpage en suivant un trait.
- beaucoup d'entre eux expriment le désir de recommencer, la validation étant la comparaison avec la face du cube et non pas le jugement du maître !

Toutes les observations des étudiants vont déboucher sur de nouvelles questions : « Et maintenant avec de tels enfants que faudrait-il faire ? »

La réflexion porte alors sur la conception d'activités pour
- apprendre à mieux découper,
- apprendre à tracer des traits droits,
- apprendre à construire une équerre en papier,
- savoir se servir d'une équerre,
- reconnaître des angles droits,
- construire des angles droits,
- se servir d'outils pour comparer des longueurs,
- construire d'autres carrés de différentes tailles.

J'apporte alors quelques réponses du groupe de recherche finistérien qui a travaillé durant deux années sur ce niveau du cycle 2.

Par exemple la construction d'un bougeoir avec 3 carrés de papier cartonné de côtés 10, 12 et 14 cm pliés dans les coins, superposés et centrés en un même point, le point de rencontre des diagonales, où seront placés la punaise et la bougie.



Autres idées connues :
- la construction d'un moulinet.
- la fabrication de damiers ou autres jeux sur quadrillages.

Quelques constats

Les étudiants en majorité n'ont pas eu de grosses difficultés à énoncer des connaissances et compétences (Le document officiel sur le Cycle 2 est connu !). Ils sentent également les limites des savoirs formels qui ne sont pas souvent opératoires.

Cependant, ils ont eu plus de difficultés à remettre en cause un type d'apprentissage des mathématiques qu'ils ont pourtant parfois mal vécu.

Ils ont semblé un peu surpris du droit que nous nous sommes accordé de critiquer certains ouvrages portant dans leur esprit un label de qualité et cela les a plutôt réconfortés.

Suite de cette formation courte

A titre d'information je peux préciser les sujets que nous avons abordés à la demande des étudiants lors des autres séances de 3 heures.
- Les situations additives et la soustraction.
- La division euclidienne.
- La géométrie.
- Les fonctions numériques et la proportionnalité.
- Les situations-problèmes.

J'ai essayé de travailler dans le même esprit que précédemment.

Par exemple à propos de la division euclidienne, je suis parti de leurs questions pratiques complétées par celles recueillies auprès d'instituteurs lors de stages de Formation Continue, avant d'apporter un bref éclairage théorique et mettre en place quelques idées importantes dans l'esprit des I.O. pour construire des situations exploitables avec des enfants.

Concernant les fonctions numériques et la proportionnalité, j'ai essayé d'abord de leur faire prendre conscience de certaines difficultés en les mettant en situation.

J'ai utilisé par exemple le document de Claude Rimbault "Dalton City" (annexe 2 - extrait de la brochure COPIRELEM sur la proportionnalité) afin de clarifier les propriétés caractéristiques des fonctions linéaires et aussi pour illustrer ensuite la notion de changement de cadre chère à Régine Douady.

Bien évidemment j'ai largement évoqué la banque de données de l'IREM de Rennes (3614 RENTEL) et les travaux de cette recherche D.E. pour aborder les notions d'aides et de réponses aux difficultés.

Par ailleurs nous avons cherché à exploiter ce que nos étudiants ont fait dans leurs classes entre les deux sessions et à effleurer les activités mathématiques en maternelle à travers les jeux.

Enfin, en vue de l'examen, nous avons utilisé de façon très pragmatique une grille d'analyse de séquence conçue par Régine Douady et Denis Butlen.

Annexe 1 : 4 extraits de manuels du CE1 concernant le carré.

Document 1 : AUTOUR DU CARRÉ À PARTIR D'UN CUBE

Fiche d'accompagnement d'une séquence « télévision scolaire » (juin 1975 dans un CE1)

Séquence 1 : Première définition du carré

Intentions

Faire vérifier que le cube a 6 faces superposables. On s'intéressera donc à une de ces faces qu'on appelle le carré.

➤ Définition : le carré est une face du cube.

Matériel

10 cubes de 10 cm d'arête, 10 cubes de 12 cm, 10 cubes de 15 cm. Les faces opposées sont de même couleur (ici 2 orange, 2 blanches, 2 noires).

Chaque enfant a son cube, mais on peut, si cela n'est pas possible, travailler avec 1 ou 2 cubes par table, les cubes devant être si possible de dimensions variées.

Déroulement

Les enfants ayant remarqué auparavant que le cube avait 6 faces « pareilles », sont amenés à le prouver. Différentes stratégies sont spontanément utilisées (empreinte, décalque, découpage, mesurage...).

La séquence se termine par le dessin de l'empreinte d'une face puis par son découpage.

Chaque enfant a un carré (défini à partir du cube).

Séquence 2 : Propriétés métriques du carré

Intentions

a) Faire découvrir que le carré a 4 côtés de même longueur.

b) Faire découvrir que cette propriété n'est pas suffisante : une tentative de construction avec comme unique consigne le respect des longueurs aboutira à un échec.

Matériel

a) chaque enfant possède son carré découpé lors de la séance précédente.

b) Chaque enfant a une feuille de papier fort sur laquelle est dessiné en biais un trait de 10 cm.

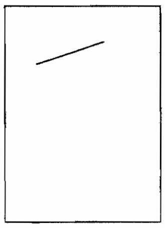


fig. 1

Cette longueur correspond à celle des arêtes d'un des cubes de référence, car après tentative de construction on vérifiera à l'aide du cube si la figure obtenue est bien superposable à une face du cube (et donc est un carré).

Déroulement

a) Les enfants sont invités à observer leur carré. Ils en arrivent rapidement a la comparaison des côtés en utilisant des stratégies diverses (pliage, décalque, mesure à l'aide de bandes de papier par report ou superposition, mesure à l'aide d'instruments..)

Le carré a ses 4 côtés de même longueur.

b) On distribue aux enfants la feuille de papier (fig. 1) et on leur demande de dessiner un carré dont on a déjà tracé un côté.

On ira ensuite vérifier sur un cube (découpage ou empreinte) si on a vraiment réalisé un carré.

Pratiquement aucun enfant n'a réalisé un carré (« ils sont tordus ou n'ont pas les côtés pareils »).

Séquence 3 : Autres propriétés du carré

Intentions

Essayer de comprendre l'échec de construction dans la séquence précédente.

Matériel

Pour chaque équipe (5 élèves) : 10 figures découpées dans du papier fort : 3 carrés, 4 losanges (dont 2 presque carrés), 3 rectangles (dont 2 presque carrés).

Déroulement

a) On donne les figures aux enfants, et on leur demande de les trier. Ils s'intéressent aux côtés et mettent en évidence losanges et carrés.

b) On leur demande ensuite de voir (à l'aide du cube) quelles sont celles de ces figures qui sont des carrés et pourquoi les autrcs n'en sont pas.

➤ les enfants s'intéressent alors aux « coins » (pointus, larges, droits). *Le carré a 4 coins superposables.*

Séq. 4 : 2$^{\text{ème}}$ définition du carré, construction

Intentions

a) Faire analyser la présence de coins droits dans le carré. Faire donner une hypothèse de définition du carré (indépendante du cube).

b) Construire un carré et vérifier que ce qui a été proposé définit bien un carré.

Matériel

a) Carrés en papier; cubes de référence

b) Feuille de papier fort sur laquelle est dessinée en biais un trait de 13 ou 17 cm. Contrairement à la deuxième séquence, les traits ici ne doivent pas avoir la même longueur que les arêtes des cubes de référence (10, 12 ou 15 cm), car le cube doit être utilisé uniquement pour le coin droit et non comme un gabarit complet.

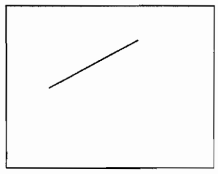


fig. 2

Déroulement

a) On a vu que le carré avait 4 coins superposables. Comment les caractériser ? « Ils sont droits ». Où en trouver ? « Sur le cube ».

Remarque : en raison des impératifs du tournage nous nous sommes arrêtés à cet exemple d'angle droit On pourrait placer ici 1 ou 2 séquences supplémentaires destinées à connaître et à construire des coins droits (par pliage ou avec l'équerre).

➤ Hypothèse : Le carré a 4 côtés de même longueur et 4 coins (ou angles) droits.

b) On donne une feuille de papier (fig. 2), avec comme consigne de dessiner un carré dont on a déjà tracé un côté. Les enfants s'exécutent : le cube est utilisé comme équerre et comme règle.

➤ Pratiquement tous les enfants ont bien (avec ces 2 critères) réalisé un carré (superposable à une face de cube).

Conclusion : Un carré a 4 côtés de même longueur et 4 coins (ou angles) droits.

Le carré est désormais défini et construit indépendamment du cube.

Document 2 : Rectangles et carrés (page 113) Période IV, Etape 3
extrait du livre du maître Objectif Calcul CE1, ed 1988

INTENTIONS PEDAGOGIQUES
Observer des formes planes à 4 côtés (les quadrilatères).
Permettre ainsi l'approche de la notion d'angle droit.
On évitera la notion de parallélisme trop délicate au CE1.
Etudier plus particulièrement le rectangle et le carré. Les comparer. Etre capable de les construire.

MATÉRIEL
- 1 enveloppe par groupe contenant des quadrilatères.
- Le livre de l'élève p 113
- Une équerre par élève.

DÉROULEMENT

ACTIVITÉ PAR GROUPES DE 4 ENFANTS

Distribuer à chaque groupe une enveloppe contenant une série de quadrilatères (parallélogrammes, losanges, carrés, rectangles) de toutes tailles, découpés dans du papier.

* On se limitera à ces quadrilatères particuliers.
Eviter le trapèze et le quadrilatère quelconque.

☐ **Classement de quadrilatères**

Laisser les enfants observer les formes et remarquer que ce sont toutes des quadrilatères (ils diront : « elles ont toutes 4 côtés »).

Consigne : Faites un classement de ces quadrilatères.

Signaler aux enfants qu'il leur est permis de plier les quadrilatères ou de les décalquer si besoin est.

Laisser les enfants faire leur tri.

Il est probable que dans un premier temps le critère de classement sera l'égalité des côtés.

- les quadrilatères qui ont 4 côtés égaux.
- les quadrilatères qui ont 2 côtés égaux*.

* A ce propos expliquer côtés égaux 2 x 2 ou côtés opposés égaux.

Obliger les enfants à prouver ce qu'ils avancent — en superposant, ils peuvent par pliage montrer l'égalité des côtés.

Le pliage fera alors apparaître les axes de symétrie (diagonales, médianes*) pour certaines figures.

* Introduire ce vocabulaire spécifique en faisant le tracé.

☐ Il est possible également de demander cette fois aux enfants de faire un autre classement en s'intéressant aux « coins* » des quadrilatères.

* Bien montrer ce qu'on appelle « coin », les faire toucher, y substituer le mot plus juste d'angle.

Les quadrilatères ont tous quatre « coins » (angles). Sont-ils tous pareils ?

Certains sont en pointe, d'autres très larges.

Il y en a d'autres qui sont « droits ».

Qu'est-ce qu'un coin droit ou un angle droit ?

L'angle droit c'est l'angle de l'équerre*.

* Montrer l'instrument, chercher l'angle droit.

Se servir de l'équerre pour rechercher les angles droits.

Ceci va permettre de faire un autre tri.

Les quadrilatères ayant 4 angles droits.

Les quadrilatères n'ayant pas d'angles droits.

C'est le moment de s'intéresser à ceux ayant 4 angles droits (carrés et rectangles) et de remarquer que lorsqu'un quadrilatère a un angle droit, il en a quatre.

☐ **Comparaison entre carrés et rectangles**

Lors du second tri, les enfants ont isolé carrés et rectangles, les figures qui ont 4 angles droits.

Demander aux enfants d'observer ces quadrilatères. Peuvent-ils refaire un nouveau classement ?

C'est là que les enfants penseront à revenir au 1er tri, en faisant jouer l'égalité des côtés.

- Les quadrilatères ayant 4 côtés égaux et 4 angles droits sont des carrés.
- Les autres ayant 4 angles droits mais les côtés opposés égaux 2 x 2 sont des rectangles.

ACTIVITÉ INDIVIDUELLE

☐ **Livre de l'élève page 113.**

• **Exercice 1**

Reconnaître carrés et rectangles en les coloriant les uns en jaune, les autres en vert.

• **Exercice 2**

La construction de carrés.

Un premier carré a été commencé. Comment le terminer ?

Il faut tracer le 4ème côté. Il suffit de joindre les 2 extrémités puis de vérifier que les 4 angles sont droits avec l'équerre et que le 4ème côté mesure bien 3 cm. Continuer ensuite, voir comment les enfants vont faire. Les observer pendant qu'ils utilisent leurs outils.

Insister sur le soin à apporter à ce travail de construction. Utiliser un crayon à papier de manière à pouvoir effacer.

• Exercice 3 :

Laisser les enfants découvrir la situation (la pose de carreaux au-dessus de l'évier).

Combien mesure la longueur à carreler ?

Quelle est la mesure du côté d'un carreau ?

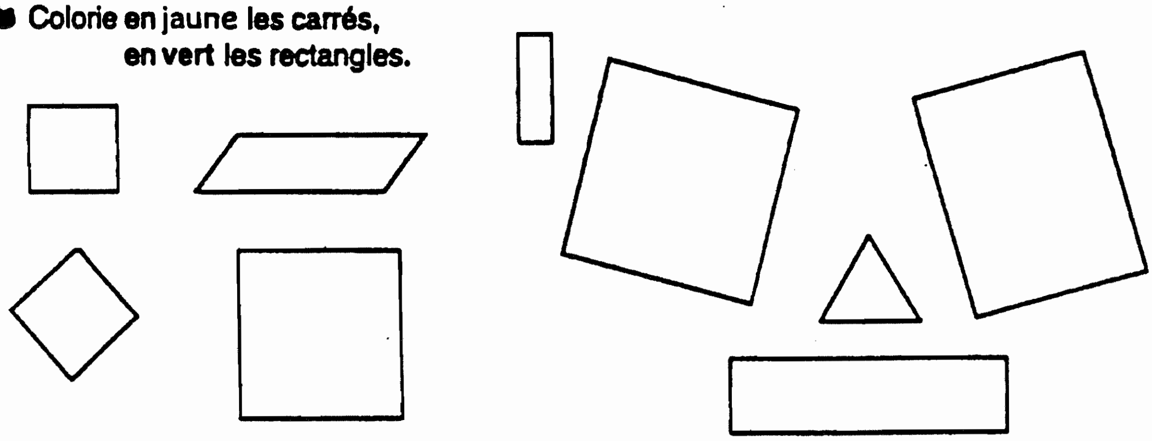
Laisser aux enfants le temps de réaliser que chercher le nombre de carreaux c'est chercher le nombre de fois que l'on peut reporter la mesure d'un côté du carreau.

Document 2 bis : Rectangles et carrés (page 113)
extrait du livre de l'élève Objectif Calcul CE1, ed 1988

RECTANGLES ET CARRÉS

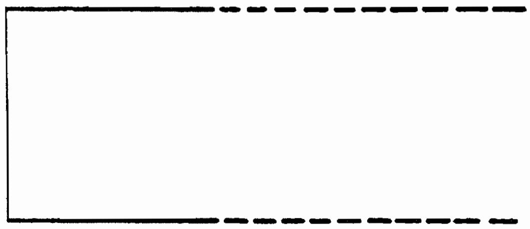
Reconnaître carrés et rectangles

Colorie en jaune les carrés,
en vert les rectangles.

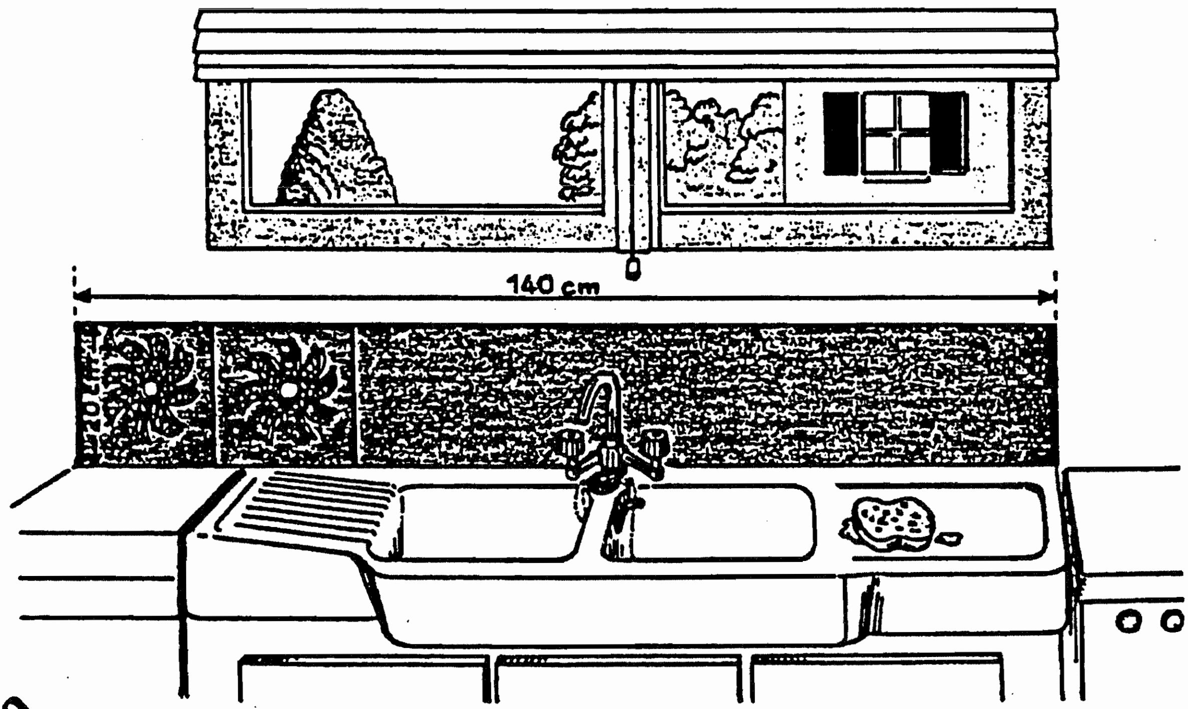


Construire un carré

En prolongeant les traits déjà tracés, construis plusieurs carrés de 3 cm de côté.



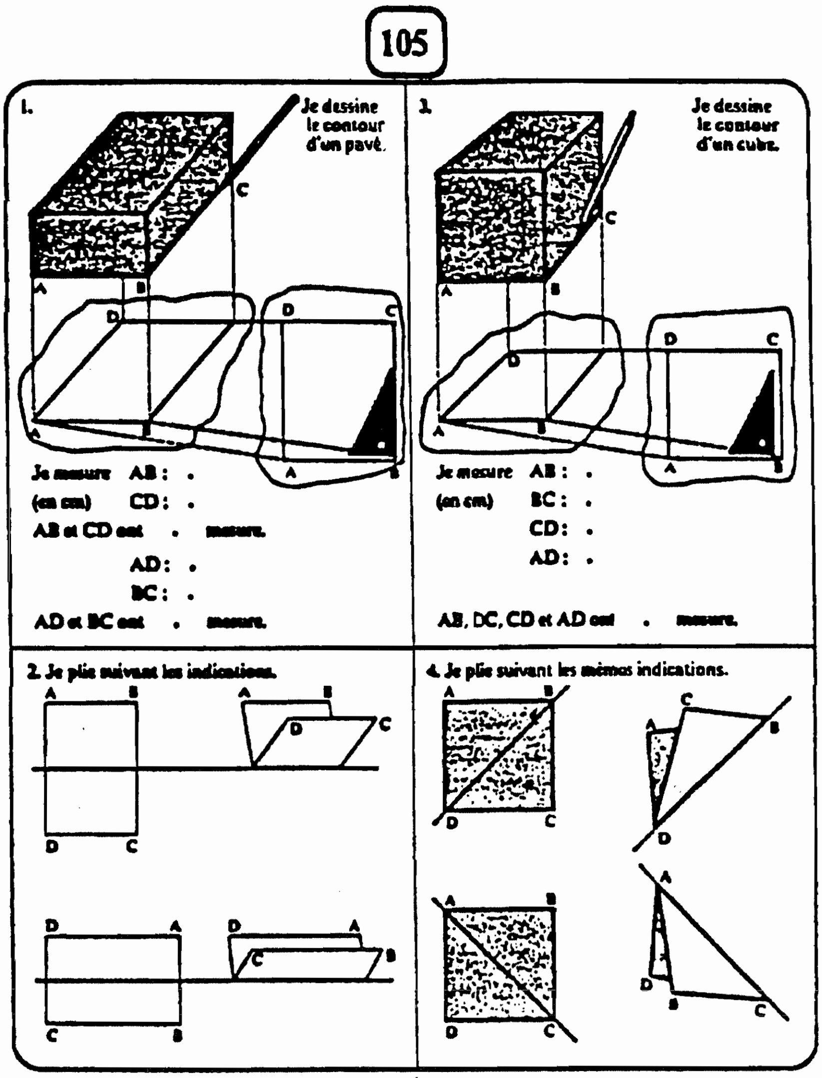
Propriétés du carré



Les carreaux de cette cuisine sont carrés.
Combien de carreaux doit-on encore poser pour finir la rangée ?

Document 3 : Rectangle et carré
extrait de UNI MATH CE1 Livre du maître 2 Goergler, l'ECOLE, ed 1979

E.2.7
Rectangle et carré



Les diverses notions développées dans cette page ayant déjà été découvertes au cours de l'étude du pavé et du cube, le maître insistera sur les points qui lui semblent les plus délicats pour ses élèves.

En particulier, nous lui suggérons de vérifier l'exactitude de la lecture de l'image. Pour si nets que soient les croquis, l'enfant risque d'être dérouté par le passage de la perspective cavalière à la vue de face. Certains s'imaginent – à tort – que l'oeil déforme les objets. Il n'en est rien : l'oeil voit et l'intelligence ne fait que corriger ce que l'éloignement et les positions relatives du sujet par rapport à l'objet peuvent déformer.

1. *Rappel.* Une mesure est un nombre que l'on ne fait pas suivre de l'indication de l'unité. La notion d'angle droit est l'unique nouveauté qui, venant s'ajouter à l'isométrie des côtés, complète la définition du rectangle et celle du carré C'est donc l'occasion d'utiliser l'équerre.

Attention : la définition d'une figure géométrique n'est pas le résumé de toutes ses propriétés; elle n'utilise que le minimum des propriétés indispensables à la construction d'une figure donnée. De plus, son contenu est fonction du niveau de la classe, des connaissances et des nécessités pédagogiques. Par exemple, au CE1, il suffisait de remarquer que le carré est une figure dont les quatre côtés ont même mesure et dont les angles sont droits (un seul angle droit et la mesure du côté suffisent pour le construire) et le rectangle une figure dont les quatre côtés ont deux à deux même mesure et dont un angle est droit.

2. Pliage d'une surface rectangulaire suivant les médianes, axes de symétrie. On vérifie l'égalité des mesures des côtés opposés par superposition. De plus, les angles (ou les secteurs angulaires) se superposent. En conséquence, si l'un d'eux est droit, ils sont tous droits.

3. Pliage d'une surface carrée suivant les diagonales, axes de symétrie (en plus des médianes) pour le carré.

On vérifie l'égalité des mesures de deux côtés consécutifs. De plus, les secteurs angulaires opposés se superposent.

Document 4 : Le carré
extrait de « Mathématique Contemporaine » CE1

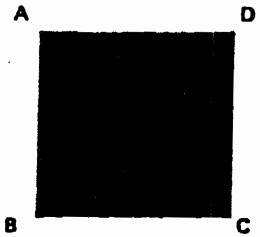
133 - LE CARRÉ

Calcul mental : 34 – 30 ; 47 – 30 ; 68 – 40 ; 86 – 50 ; 95 – 40.
41 – 30 ; 52 – 50 ; 79 – 40 ; 83 – 30 ; 93 – 50.

Déroulement de la leçon

1. Prendre l'empreinte d'un cube. Constater qu'on peut replacer le cube de multiples manières sur son empreinte (4 fois par face).
Donner à chaque enfant un carré se superposant avec cette surface.

2. a) Par combien de segments est formée la frontière de la région rouge ? [AB] ...
La région rouge est limitée par 4 côtés



b) A est un sommet. Quels sont les autres sommets ?

c) Avec une bandelette de papier, pouvez-vous dire si les côtés [AB] et [BC] sont aussi longs l'un que l'autre ?
Ecrivez le signe qui convient AB .... BC.

Avec une bandelette de papier, étudiez les côtés AB] et [CD], [AB] et [AD]

Complétez AB ..... CD ;
AB ..... AD ;
AB ..... BC ..... CD ..... AD.

Les quatres côtés sont isométriques

d) Les deux segments [AC] et [BD] s'appellent diagonales.
Ces segments sont-ils aussi longs l'un que l'autre ?
AC ..... BD.

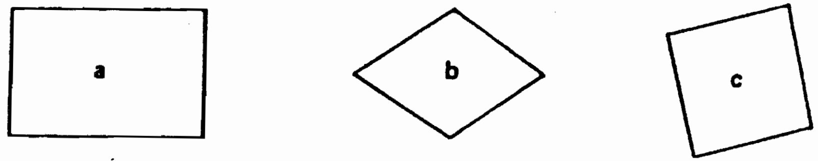
Les deux diagonales sont isométriques.

e) La surface limitée par la frontière ABCD a :
– ses côtés isométriques.
– ses diagonales isométriques.
} c'est un carré . On cherche des carrés.

Remarque : Les enfants diront depuis le début de la leçon que la surface est un carré.
Le maître les laissera faire mais n'utilisera le terme et ne l'écrira qu'en conclusion de la leçon.

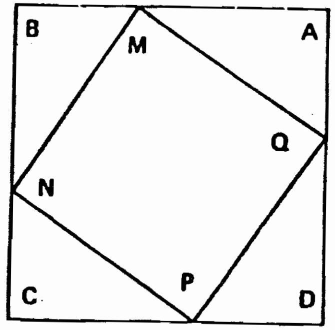
La surface limitée par la frontière A B C D a :
– ses quatre côtés isométriques;
– ses deux diagonales isométriques. C'est un carré.

1.



Laquelle de ces figures est un carré ? Pourquoi ?
Tu utiliseras une bande de papier.

2. Est-ce que A B C D est un carré ?
En cm, quelle est la mesure de la longueur d'un côté ?

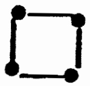


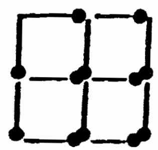
Est-ce que M N P Q est un carré ?
En cm, quelle est la mesure de la longueur d'un côté ?

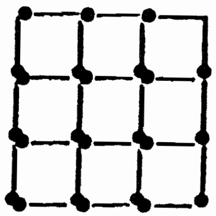
Une mouche parcourt le chemin MAQDP.
Combien mesure la longueur de ce chemin ?

Une autre mouche parcourt le chemin MQP. Ce chemin est-il plus long ?

3. Avec des allumettes, on réalise des carrés formés de petits carrés.







La mesure de la longueur d'une allumette est 1.
Combien faut-il d'allumettes pour réaliser les carrés dont la mesure de la longueur du côté est : 1 ? 2 ? 3 ? 4 ? 5 ?

Annexe 2 *« Dalton City », textes donnés aux élèves.*

DALTON CITY

Les Dalton ont acheté un petit coin pas cher, pour y bâtir sur le terrain, tout contre la falaise, chacun une maison. Joe a construit la plus petite, repasse les traits en rouge. Celle de Jack est deux fois plus grande, repasse-la en vert.

1) Dessine en rose et en bleu, les maisons de William et d'Averell, 3 fois et 4 fois plus grande que la maison de Joe. Dessine encore celle de Jesse James, qui vient de se joindre à la bande. Elle sera orange, et 5 fois plus grande que celle de Joe. Remarque bien que toutes les maisons ont exactement la même forme.

2) Le géant Phil Defer, arrive à son tour. il construit une maison noire, deux fois plus grande que la maison de William. Combien de fois est-elle plus grande que celle de Joe ? Combien de fois est-elle plus grande que celle de Jack ?

3) Ces bandits sont bêtes et méchants. Ils n'ont pas de mémoire. Pour reconnaître leur maison, ils posent leur chapeau sur le sommet du toit qui leur appartient.

Lucky Luke arrive, il sourit. Car il constate qu'en se plaçant à un certain endroit, il peut faire sauter tous les chapeaux d'une seule balle. Vois-tu d'où ? Dessine la trajectoire de la balle.

4) Hier les six bandits ont longtemps chevauché sous la pluie. Pour faire sécher leurs vêtements, Joe et Phil ont tendu un fil à linge entre les coins supérieurs droits de leurs maisons. Que remarques-tu ?

5) Les bandits sont à nouveau à l'ouvrage. pour construire trois nouvelles maisons. En effet les terribles frères Maniak ont accepté de se joindre à la bande à condition d'avoir chacun une maison construite selon sa volonté.

Jo Maniak exige une maison violette ayant un mur de 7,5 carreaux de haut. Dessine-la.

Calamity Maniak exige une maison beige ayant une hauteur totale de 32,5 carreaux. Dessine-la.

6) Si tu as terminé, prends une feuille de papier et explique en phrases simples comment tu as construit la maison de Jo Maniak. Je donnerai ta feuille à un camarade ne trouvant pas de solution.

Refais ce travail pour les maisons des deux autres frères Maniak.

DALTON CITY : L'espion et l'architecte de River town

Les honnêtes gens de River town observent de loin Dalton city. « Ces Dalton sont fort laids, disent-ils, mais leurs maisons sont vraiment très belles. » Dans le but d'en construire de semblables, ils décident d'envoyer un espion à Dalton city.

Celui-ci relève les dimensions de toutes les maisons construites, à l'exception de celles des frères Maniak, aux dimensions vraiment trop bizarres.

L'espion consigne toutes ses mesures dans le tableau ci-dessous. Espionne et complète le tableau. Les trois dernières colonnes serviront plus tard. Utilise les carreaux, pour mesurer les maisons, que tu rangeras de la plus petite à la plus grande.

Couleurs									
Longueurs									
Hauteurs des murs									
Hauteurs totales									

L'architecte est convoqué. Il observe longuement le tableau.

Bravo, dit-il à l'espion, tu as fait du bon travail. Grâce à ce tableau, tous vos bâtiments et toutes vos maisons pourront être construites sur le modèle « Dalton », que vous aimez tant. Donnez moi seulement une dimension, ajoute-t-il et je vous calcule les deux autres ! » Les habitants de River town sont enthousiasmés et lui demandent de résoudre les problèmes suivants :

1) Une maison a une longueur de 42 carreaux, quelle est la hauteur de son mur et sa hauteur totale ?

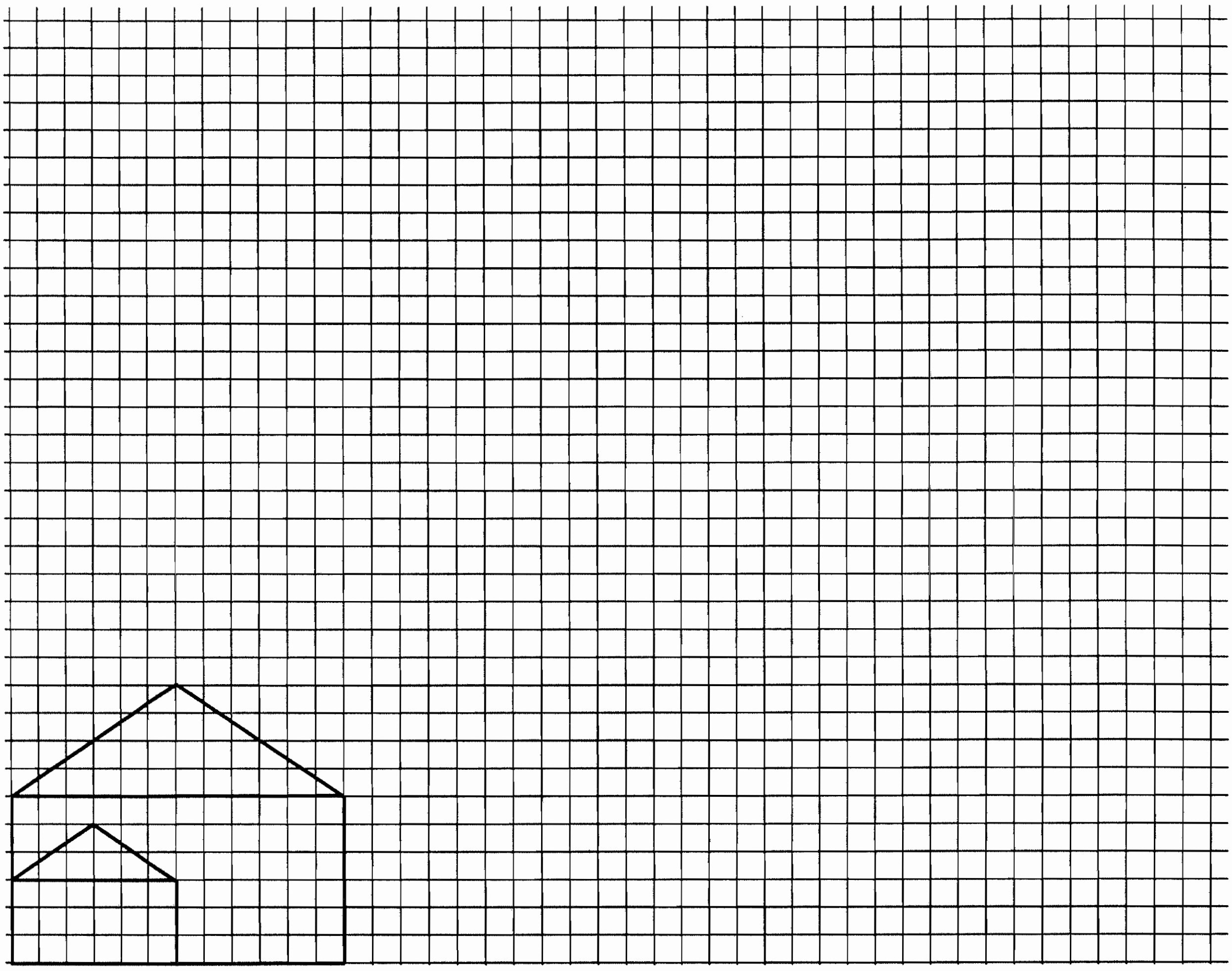
2) La hauteur du mur doit être de 54 carreaux, quelles seront sa longueur et sa hauteur totale ?

3) La hauteur totale doit être de 50 carreaux, quelle sera la longueur ? et la hauteur du mur ?

Pourrais-tu être architecte à River town ?

Tu écriras les résultats dans les trois dernières colonnes du tableau ci-dessus.

Annexe 2 bis *« Dalton City », figure donnée aux élèves.*



Titre : Plan d'un module de formation de 24 heures
Auteur : Marcelle Pauvert (PIUFM Livry Gargan)
Date : Juin 1993
Type : Exercice d'école dans le cadre de l'atelier C du stage de Colmar
Thèmes mathématiques : Constructions géométriques, Nombres décimaux.

PLAN D'UN MODULE DE FORMATION DE 24 HEURES

Contexte

- 24 heures pour un module de formation (8 fois 3 heures)
- Des PE2 ayant passé le concours sans avoir suivi la formation dispensée la première année
- Un stage de pratique accompagnée (2 semaines dans une classe d'IMF-instituteur maître formateur).

Ce module se situe en novembre, décembre avant la première partie du stage en responsabilité qui a lieu en janvier. Un second module de 24 heures se situera entre les deux périodes en responsabilité.

Il se compose de 4 séances sur la géométrie et 4 séances sur le numérique.

Intentions pédagogiques

- Etablir un **contrat** avec les étudiants : chacun a des lacunes ou des compétences, il s'agit de combler les unes, de développer les autres et d'avancer ensemble (contrat de confiance)
- Compléter et **structurer** les connaissances des étudiants dans les domaines géométriques et numériques
- Développer certains aspects didactiques de l'enseignement :
  - apprentissages par résolution de problèmes,
  - méthodologie d'organisation du travail (individu, groupe, ...),
  - rôle des erreurs,
  - élaboration de démarches d'enseignement s'appuyant sur les notions mathématiques et sur l'évolution des représentations des élèves.

Déroulement

Première séance :
accueil, présentation, ...

Les constructions géométriques à la règle et au compas. Les instruments. Repérer ses connaissances, les organiser pour en faciliter la mémorisation et améliorer les capacités de rappel (le rôle des images).

a) Explorer ses propres connaissances : je sais construire, je crois savoir, j'ai oublié, je vois l'image.

A partir d'une liste de constructions simples, chacun coche sa réponse sur sa feuille.

Rappels de construction autour de la **médiatrice d'un segment de droite** avec application aux triangles isocèles, aux losanges, au tracé de la perpendiculaire à une droite, d'un carré, ... (notion d'axe de symétrie).

Rappels autour du **cercle** et des **polygones inscriptibles**.

b) Reproduire une figure

Le dessin est affiché sur les murs de la salle en 6 ou 7 endroits.

Consigne 1 : vous devez reproduire cette figure, vous pouvez vous déplacer une fois avec votre compas, puis une autre fois sans instrument.

Consigne 2 : écrivez une liste d'instructions permettant de reproduire la figure sans l'avoir vue.

A la fin de la séance, je ramasse les productions.

Deuxième séance

a) Retour des productions et mises au point nécessaires :

- mathématique : définitions du segment, de la droite, du cercle, du disque, conventions de langage et d'écriture ;
- méthodologique : algorithme de construction, ...

b) Dictée de figure : choix d'une figure comportant par exemple différents polygones, avec point de départ imposé : droite oblique sur feuille unie.

c) Elaboration plus ou moins approfondie d'un projet de séquence de reproduction de figures dans un CM : étude comparée de plusieurs mises en oeuvre, recherche de moyens de validation (papier calque,...).

De la difficulté pour un élève d'écrire un programme de construction, comment peut-on commencer ce travail ? (activités d'échange, évocation d'activités de pliage).

d) Comment **structurer ses connaissances** ?

Le monde des figures géométriques planes: exploration d'un organigramme (cf. [5]).

A quelle branche peut-on rapporter les figures rencontrées jusqu'ici ? Comment les définir ? (notion de classes emboîtées, précisions nécessaires...)

Exercice à chercher.

Je donne une série d'arcs de cercles de rayons différents et un calque, quels sont les arcs de cercle qui vont ensemble ? Comment trouver le centre et le rayon d'un arc de cercle ?

Troisième séance

a) La **résolution de problèmes** : son impact sur les apprentissages, ses difficultés.

Reprise de l'exercice sur les arcs de cercles, discussion sur la recherche de problèmes, compléments mathématiques.

- Pourquoi trouve-t-on ? Pourquoi sèche-t-on ? Qu'est-ce qui peut mettre sur la voie ? Qu'est-ce qui décourage ?...
- Qu'apprend-on sur le cercle en résolvant ce problème ? L'oubliera-t-on ? Le mémorisera-t-on ?
- Plusieurs manières de définir un cercle (cf. [1]).
- Différents points de vue sur un objet mathématique.

b) Les **connaissances mathématiques, outils pour résoudre des problèmes**.

Les définitions des quadrilatères sont le support de travail de cette activité (cf. [4]) : découper plusieurs disques de rayon R, proposer un pliage qui permette d'obtenir un rectangle (carré ;...) inscrit dans le cercle de rayon R ; quelles propriétés sont utilisées dans ce pliage ?

Etude critique des propositions

Cf. l'activité d'*Objectif Calcul CE2*, Clavier...(ed Hatier, 1989) page 76.

c) Les **connaissances mathématiques, leur organisation dans un champ mathématique donné**.

Retour sur l'organigramme, les définitions proposées correspondent-elles à la logique de l'organigramme ?

Modifications éventuelles ; compléter l'organigramme pour les familles de triangles.

d) Présentation succincte d'un travail au cycle 2 : à partir de figures découpées par les élèves dans des revues ou des magazines, les classer pour construire un livre des formes géométriques.

Quels problèmes le maître et les élèves devront-ils affronter ? (cf. [13]).

Proposition d'un travail écrit.

Par exemple étude d'une fiche pédagogique relative

- à la construction d'un tangram par pliage au CM ;
- à l'obtention d'un carré avec 2, 3, 4 pièces du tangram ;
- à l'étude géométrique des pièces du tangram.

Détermination des objectifs, analyse de la mise en oeuvre proposée, recherche de prolongements.

Quatrième séance

Deux choix possibles selon les demandes du groupe et selon les liaisons possibles avec le travail en UPB (Unité Pédagogique de Base, module de formation animé par un groupe de professeurs et des IMF proposant des travaux sur des sujets transversaux à caractère professionnel).

CHOIX A

Travail de groupe / travail individualisé :

(groupes de 5 avec des consignes différentes relatives à l'organisation du travail, et étudiants travaillant seuls).

Etude des différences d'implication des élèves dans la réalisation de la tâche, pour l'apparition et la prise en compte de conflits sociocognitif, pour les processus méthodologiques, selon l'organisation du travail (en groupe ou individuel).

Conséquences pour le maître : préparation, organisation, gestion de la séquence, bilan.

Le support mathématique de cette activité est un agrandissement ou une réduction de puzzle, le puzzle étant composé de 5 pièces sans angle droit dessinées indépendamment ; la validation est la réalisation d'un rectangle avec toutes les pièces (cf. [7] et [6]).

CHOIX B

Construction de solides : cube, octaèdre, cuboctaèdre.

- Fabriquer un cube par pliage en "tissant" trois bandes ;
- Fabriquer un octaèdre par pliage (cf. *Grand N n°47*) ; on peut utiliser en cas de difficulté le matériel Polydron (matériel plastique représentant des faces de polyèdres, à assembler par cliquage, disponible chez O.D.M.P., 64, rue Rodier, 75009 Paris).
- Etude de l'octaèdre tronqué et du cube tronqué : imaginer les faces que feraient apparaître les coupes, repérer l'organisation des faces du nouveau solide, construire ce nouveau solide avec le matériel Polydron (il s'agit du cuboctaèdre)
- Tracer un patron du cuboctaèdre à la règle et au compas.
- Réunir dans un tableau comparatif les éléments géométriques caractérisant chacun de ces trois solides.

Cinquième séance

Des fractions de surfaces : fractions dans un carré, fractions dans un triangle, fractions dans un parallélogramme (cf. *Petit x* n° spécial).

Les suites de fractions de Nicolas Oresme :

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{4}{16}$; $\frac{5}{32}$; $\frac{6}{64}$;...

Quelle fraction a-t-il écrit ensuite ?

Quelle est l'écriture décimale des sommes suivantes :

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}$

...

L'exercice se prolonge en fonction des réponses du groupe.

Mise au point nécessaire, organisation (réorganisation) des connaissances à propos de nombres décimaux et des nombres rationnels en vue de leur enseignement à l'école élémentaire.

Exercices sur les transformations d'écritures.

Encore des ensembles emboîtés !

Sixième séance

A propos des nombres décimaux et des fractions : que savent les élèves ?

a) Etude de travaux d'enfants (CE2, CM1, CM2)

- Repérer les conceptions des élèves avant apprentissage : ils savent des choses, mais que savent-ils ? Ils ont des habitudes sociales (une demi-heure, trois francs cinquante,...), mais que recouvrent ces mots ?
- Comment évoluent les conceptions en cours d'apprentissage ?

* A la question "qu'est-ce qu'un nombre décimal ?", un élève de CM1 répond "un nombre décimal est un nombre avec une virgule entre deux entiers". Est-ce vrai ou faux ?

* "4,01 c'est pareil que 4,1 parce que le zéro ça ne compte pas" ! !

* Confusion fréquente : 1/7 lu comme 1,7.

* "Le dixième c'est deux chiffres après la virgule parce que la dizaine c'est deux chiffres avant" ! ! !

* etc...

b) Etude des erreurs les plus courantes à partir de documents.

Par exemple :

- Brochure Education et Formation (évaluations, résultats nationaux)
- Documents APMEP (évaluations, aides pédagogiques [17])
- Enquête de Grand N [18]
- Travaux de M.J Perrin [19]
- Documents de l'INRP (enquête ancienne)

Septième séance

Différentes approches des nombres décimaux

Fractions, fractions décimales, nombres décimaux ; activités avec le guide-âne (cf. [9])

Approche par les fonctions numériques ; rôle du calcul mental et du calcul écrit (cela nécessite souvent un développement sur les fonctions numériques à l'école élémentaire)

Les nombres décimaux et le système métrique : écueils à éviter.

Ceci est complété et enrichi par un regard sur les manuels.

Huitième séance

Organisation de la classe en ateliers de calcul

Dans chaque atelier, on trouve une technique de calcul mental ou de calcul écrit exposée sur une feuille, avec d'autres calculs à effectuer avec la technique imposée.

La consigne est de calculer à haute voix, chacun à sa manière.

L'idée est de repérer la diversité des méthodes, leur variabilité en fonction de la taille des nombres mais aussi en fonction de la mémorisation des tables.

Atelier 1 : calcul-lecture (cf. [8])

Atelier 2 : calcul d'écarts avec support d'une droite numérique

Atelier 3 : calcul mental de produits à l'aide de certains résultats

Atelier 4: calcul écrit, soustraction méthode par complément

Atelier 5 : calcul écrit, soustraction méthode par emprunt

Atelier 6 : division, disposition anglo-saxonne.

Retour des travaux écrits avec corrigés écrits.

Bilan.

Remarque

J'essaie de prendre en compte des questions personnelles des étudiants de la façon suivante :

Toute question préoccupante peut être posée par écrit, avec un exemple si nécessaire ; je m'engage à y répondre par écrit sur une page ; cet écrit, question et réponse, est distribué à tous en début de cours par exemple ; on le lit, on s'assure de sa lisibilité.

Exemples de questions posées :

- le rôle du zéro dans la multiplication : comment l'expliquer ?
- exemple d'un manuel : à quoi sert-il ?
- pourquoi apprend-on aux enfants les angles et le vocabulaire qui s'y rapporte ?

Bibliographie

Programmes et instructions

Compléments aux I.O. pour la géométrie

1 - *Conceptions du cercle chez les élèves de l'école élémentaire*, 1986, IREM de Paris7

2 - Affiches de l'IREM de Poitiers

3 - Mini -dictionnaire du *Pythagore classe de 3°*, ed Hatier, 1989

4 - Définition des quadrilatères *Mathématiques 4°* Deledicq, ed Cedic Nathan, 1983

5 - *Se former pour enseigner les mathématiques*, tome 1, Géométrie, C.Dubois, M.Fénichel, M.Pauvert, ed Armand Colin, 1993

6 - *Le développement social de l'intelligence*, Doise et Mugny, InterEditions, 1981

7 - G.Brousseau, *RDM* vol2/1

8 - *Bulletin APMEP* n°375, calcul -lecture

9 - *Grand N n° spécial CM,* progression sur les décimaux à l'aide du guide -âne, IREM de Grenoble

10 - *Le cahier de géométrie*, CDDP de l'Aisne, 1989

11 - *Géométrie, une approche par le dessin géométrique au CM2*, IREM de Rouen, 1986

12 - *Aides pédagogiques pour le CM, Géométrie*, brochure APMEP, 1983

13 - *Jouer avec des formes et des volumes*, Cahiers pédagogiques n°291, 1991

14 - *Découvrir des formes, en fabriquer,* Cahiers pédagogiques n°299, 1992

15 - Pliages et volumes, *Grand N n°47*, IREM de Grenoble

16 - *Petit x, n° spécial*

17 - *Aides pédagogiques pour le CM, Décimaux*, brochure APMEP, 1986

18 - *Grand N n°18*, Enquête sur les décimaux, IREM de Grenoble, 1979

19 - *Petit x n°10*, article de M.J. Perrin, 1986

Manuels

20 - *Objectif Calcul CE2*, 1989, Clavier..., ed Hatier.

21 - *Math -Hebdo CM1 et CM2*, 1984, Charnay..., ed Hachette.

22 - *Calcul et Géométrie*, 1989, coll Chapuis, ed Nathan.

23 - *Vivre les Mathématiques*, 1989, coll Corrieu, ed A.Colin.

24 - *Math en flèche CE2*, Diagonale, 1993, ed Nathan.

25 - *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire CM*, 1981 -82, coll ERMEL, 3 tomes, ed Hatier.

Titre : Formation initiale "24 heures avec les PE2".
Auteur : Muriel Fénichel (PIUFM Livry-Gargan)
Date : Avril 1993
Type : Compte-rendu d'activités en formation initiale.
Thèmes mathématiques : Nombres décimaux, Grandeur et Mesure.

FORMATION INITIALE "24 HEURES AVEC LES PE2".

I - LE TEMPS

La durée du module est de 24 heures réparties sur 8 séances de 3 heures comme suit :

5 séances concernant les nombres décimaux dont une séance réservée à l'évaluation, 2 séances réservées au thème "Grandeur et Mesure". Une dernière séance est prévue plus tard après un stage en responsabilité. Elle servira de bilan et de mise au point.

II - LE PUBLIC

Il s'agit de PE2 ayant tous suivi une formation à l'IUFM en première année, soit environ 80 heures de mathématiques, au cours desquelles ont été traités, dans la mesure du possible, à la fois d'un point de vue mathématique, pédagogique et didactique, la numération, les structures additives, multiplicatives, la proportionnalité et un peu de géométrie plane (seule cette partie n'a pas fait l'objet d'une étude pédagogique par manque de temps : l'optique choisie alors a été la préparation au concours dans son aspect mathématique).

Ces étudiants ont participé à un stage en pratique accompagnée de 15 jours en première année. Ils ont aussi été, régulièrement tout au long de la première année, une demi-journée par semaine dans une classe.

Le module obligatoire a lieu entre les deux stages en responsabilité de quatre semaines chacun.

Tout cela est bien sûr pris en compte dans le déroulement du module.

III - LES CONTENUS DE FORMATION

A - Les nombres décimaux

Temps

5 séances de 3 heures dont une séance d'évaluation

Intentions pédagogiques

- Faire que les étudiants mettent à jour leurs connaissances à propos des nombres rationnels décimaux et non décimaux, des nombres réels.
- Leur faire découvrir ou redécouvrir de nouveaux savoirs concernant ces nombres : découvrir ou se rappeler pourquoi la création d'autres nombres que les entiers a été nécessaire, déterminer si un nombre, donné par une de ses écritures est un nombre décimal, rationnel, entier ou non et connaître les relations qui existent entre les différents ensembles de nombres, organiser les différentes propriétés des nombres décimaux et leur structure et plus généralement celle des nombres rationnels, connaître les règles d'écriture des nombres décimaux dans la numération décimale, comparer des décimaux et des nombres rationnels écrits sous forme fractionnaire, calculer sur des décimaux, opérer sur des nombres rationnels écrits sous forme fractionnaire.

La réorganisation des connaissances se fait avec le groupe tout entier : ce sont les étudiants qui apportent ce qu'ils connaissent, qui posent des questions sur ce qu'ils ont oublié et les réponses peuvent être données par certains. Cette réorganisation des connaissances ne fait pas l'objet d'un cours magistral par l'enseignant. C'est l'interaction entre tous qui facilite la mise en place des connaissances et la mise en évidence des relations qui existent entre elles.

- Faire que les étudiants puissent mettre en évidence les différents aspects du concept de nombre : quantité, application linéaire, rapport et ainsi prendre conscience des interrelations qui existent entre les différents concepts mathématiques.
- Aborder avec les étudiants la notion d'obstacle et ses différents aspects : épistémologiques, didactiques.
- Faire que les étudiants repèrent les éléments importants à prendre en compte dans l'apprentissage des décimaux à l'école élémentaire.

Démarche

- Travail par groupe autour d'une liste d'exercices concernant les nombres décimaux, rationnels et leurs propriétés

Détail de la fiche :

A propos des nombres décimaux

Essayez d'aller le plus loin possible dans le choix des exercices suivants. Rédigez-les. Faites le point sur vos connaissances et/ou vos manques à l'occasion de ce travail.

1) Ordonnez : 121,54 - 0,2 - 13,5248 - 98 - 20,32 - 3,32 - 0,002 - 13,401 - 2,18 - 121,0242 - 2,28 - 121,3419.

Ecrivez les règles de comparaison des nombres décimaux.

2) Citez des nombres décimaux, des nombres non décimaux ? Comment caractérisez-vous ces types de nombres ?

3) Citez, si possible 3 nombres compris entre :

- 1,8 et 2,1
- 1,6 et 1,8
- 1,3 et 1,4
- 1 et 1,1

Quelle(s) conclusions pouvez-vous tirer ?

4) Donnez une approximation de $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{256}$, à 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6} près. Ces nombres sont-ils des décimaux ?

5) La longueur du second côté d'un rectangle d'aire 11 m^2 et de premier côté 5 m mesure-t-elle un nombre entier de mètres ?

6) Nicolas Oresme a étudié en 1377 la suite des fractions suivantes :

1/2, 2/4, 3/8, 4/16, 5/32, 6/64, ...

a) Quelles fractions a-t-il écrit ensuite ?

b) Quelle est l'écriture décimale des sommes suivantes :

- $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$,
- $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}$,
- $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}$,
- ...

c) Oresme a démontré que ces sommes se rapprochent d'un certain nombre. A votre avis, quel est ce nombre ?

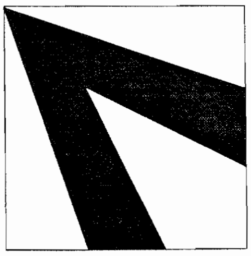
7) Observez ces fractions

- $f_1 = 1+\frac{1}{2}$
- $f_2 = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$
- $f_3 = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$
- $f_4 = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$

a) Ecrivez les quatre fractions suivantes

b) Donnez une écriture décimale de ces huit fractions avec une machine à calculer. Comparez les à 2.

8) Quelle fraction du carré représente la partie colorée ?



- Synthèse collective autour des travaux des étudiants permettant la réorganisation des connaissances autour des différents nombres mis en jeu dans ces exercices et des propriétés des nombres décimaux.

- Analyse en groupe de travaux d'enfants récoltés par des stagiaires en formation continue lors d'une séance de passation concernant les nombres décimaux dans des classes de CE2, CM1, CM2. Cette dernière permet aux étudiants de mettre en évidence les erreurs faites par les enfants et ainsi d'aborder la notion d'obstacle et ses différents aspects mais aussi des représentations des nombres décimaux et des fractions que peuvent avoir les enfants avant tout apprentissage concernant ces notions.

- La synthèse collective permet aux étudiants de mettre en évidence les différents points à prendre en compte lors de la mise en place d'un apprentissage des nombres décimaux à l'école élémentaire.

- Par groupe, analyse critique de différentes introductions des nombres décimaux à l'école élémentaire :

Objectif calcul CM1, Ed Hatier,

Mathématiques CM (A-M et M.Nédélec ; Ed. Nathan),

De l'ordre lexicographique aux nombres à virgule (S.Blochet ; Grand N n°10),

Un exemple d'introduction de nouveaux nombres à partir d'une fonction "diviser par n" (Aides pédagogiques pour le cycle moyen, Nombres décimaux APMEP).

Cette analyse se fait avec la référence des différents points mis en évidence concernant l'apprentissage des nombres décimaux lors de la séance précédente.

La synthèse collective permet de mettre en évidence ce que peut être un obstacle didactique.

- Utilisation d'un guide-âne et mise en évidence du rôle qu'un tel outil peut jouer dans l'apprentissage des nombres décimaux.

- Analyse en groupe d'un début de progression mise en place avec un maître formateur à partir de l'article de Martial Coquand "Décimaux" paru dans la revue *Grand N n°20 et n°21* ainsi que des activités proposées dans le manuel suivant : *Objectif Calcul CM1* (1989). Les étudiants doivent construire une suite à cet ensemble d'activités.

Ce dernier travail doit permettre aux étudiants d'intégrer les activités proposées dans divers manuels ou revues dans une progression dont ils ont le début et qu'ils doivent enrichir et prolonger selon leur pensée avec les éléments dont ils disposent. Comme toutes les activités que nous leur proposons, cette progression est un premier essai, évolutif, adaptable, améliorable.

- Evaluation :

un sujet à traiter parmi deux au choix :

<u>Premier sujet</u>

Le rangement des nombres décimaux

Etude du document 1 (extrait de Math Hebdo CM1)

1) Relevez les erreurs commises par les trois élèves ..

Quelle(s) interprétation(s) pouvez-vous en faire ?

Mettez-vous ces erreurs sur le même plan ?

Cet exercice d'erreur vous semble-t-il intéressant du point de vue didactique ? Expliquez.

Dans une progression, à quel moment peut-il se situer ?

2) Plus loin, le même manuel propose, pour comparer les nombres décimaux, de ramener les parties décimales à la même longueur en plaçant des zéros à droite. Que pensez-vous de ce procédé ?

Un autre manuel suggère de comparer le procédé de rangement des nombres décimaux et de rangement de mots dans un dictionnaire. Expliquez.

Comparez ces deux procédés du point de vue
- de leurs références mathématiques
- de leur utilisation pédagogique

3) Proposez une autre procédure de comparaison des nombres décimaux en précisant sur quelle construction de ces nombres elle s'appuie.

4) Dans le document 1, on peut lire : "Tu as certainement déjà entendu dire : ...."

En supposant que les enfants ne comprennent pas ces expressions, comment les compléteriez-vous ?

A quelle représentation des nombres décimaux font-elles référence ?

Voici le document fourni.

HEBDO 14 **math** HEBDO

situation-problème

Rangement des nombres décimaux

Ranger des nombres décimaux du plus petit au plus grand est un exercice sur lequel beaucoup d'élèves se trompent. C'est d'autant plus grave que, souvent, ils font toujours la même erreur sans s'en rendre compte.

Dans cet hebdo, je vais te montrer les erreurs les plus fréquentes et t'aider à ne pas les faire.

Dans un CM 2, le professeur a demandé de ranger du plus petit au plus grand les dix nombres suivants :

6,4	6,217	5,8	7,41	6,05	50,3	7	5,5	6,30	5,12

Voici les différents résultats trouvés par quatre élèves.

Karim	Simon	Céline	Luce
50,3	5,5	5,12	7
7,41	5,8	5,5	5,5
7	5,12	5,8	5,8
6,4	6,4	6,05	6,4
6,30	6,05	6,217	50,3
6,217	6,30	6,30	5,12
6,05	6,217	6,4	6,05
5,8	7	7	6,30
5,5	7,41	7,41	7,41
5,12	50,3	50,3	6,217

Sur ces quatre élèves, bien sûr, un(e) seul(e) a le bon résultat. Mais les autres n'ont pas rangé leurs nombres n'importe comment ; ils ont respecté une règle. Malheureusement, ce n'est pas la bonne. Essaie de comprendre ce qu'ils ont fait.

Beaucoup d'erreurs proviennent du fait qu'on oublie que l'on a affaire à des nombres décimaux et qu'on les traite comme des nombres entiers.

Tout irait bien mieux si, avant tout travail sur les décimaux, on pensait à se faciliter la tâche grâce aux **écritures équivalentes.**

Tu as certainement déjà entendu dire :

- un mètre cinquante
- un kilo cinq cents
- un kilomètre cinq
- un franc cinquante
- un an et demi.

Toutes ces formules, avec des unités différentes, désignent le même nombre, sous des « habillages », des « déguisements » **différents mais équivalents.**

1,5 ; 1,50 ; 1,500 ; $1\frac{1}{2}$; 1,5000... c'est toujours le même nombre. A nous donc, de choisir au mieux. Pour l'exercice précédent, sur les cahiers il y avait intérêt à écrire 6,400 ; 6,217 ; 5,800...

Deuxième sujet

Tangram et fraction

Compte-rendu d'un travail en CM2

Les enfants avaient à leur disposition un tangram qu'ils pouvaient découper et utiliser pour leurs calculs.

Les questions 1 et 2 ont fait l'objet d'un travail individuel.
Les questions 3 et 4 ont fait l'objet d'une recherche de groupe et d'une "rédaction" individuelle.
La question 4 n'a pas été traitée par tous.

****

1) Quelle fraction du tangram (cf. dessin 1) représente chaque pièce ?

2) Compare $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$.

3) En observant attentivement le tangram, fais les calculs suivants :

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}$

Tu peux découper le tangram et utiliser les pièces.

4) Quelle fraction du tangram représente le bateau suivant (cf. dessin 2) ?

Consigne pour les étudiants

a) Faire une analyse a priori de ce travail en s'aidant des questions qui suivent.

(On précise que c'est un travail proposé au mois de mars en CM2, que les enfants utilisent couramment les décimaux introduits dès le début du CM1 et qu'ils connaissent quelques fractions usuelles.
On a photocopié quelques "constructions" faites par les groupes d'enfants en cours de recherche et dont ils n'ont pas gardé les traces. Elles sont fournies).

a1 - Quels sont les contenus mathématiques précis des activités ?
a2 - Quel est le contexte pour le concept "fraction" dans ce travail ?
a3 - Quels sont les objectifs des activités ?

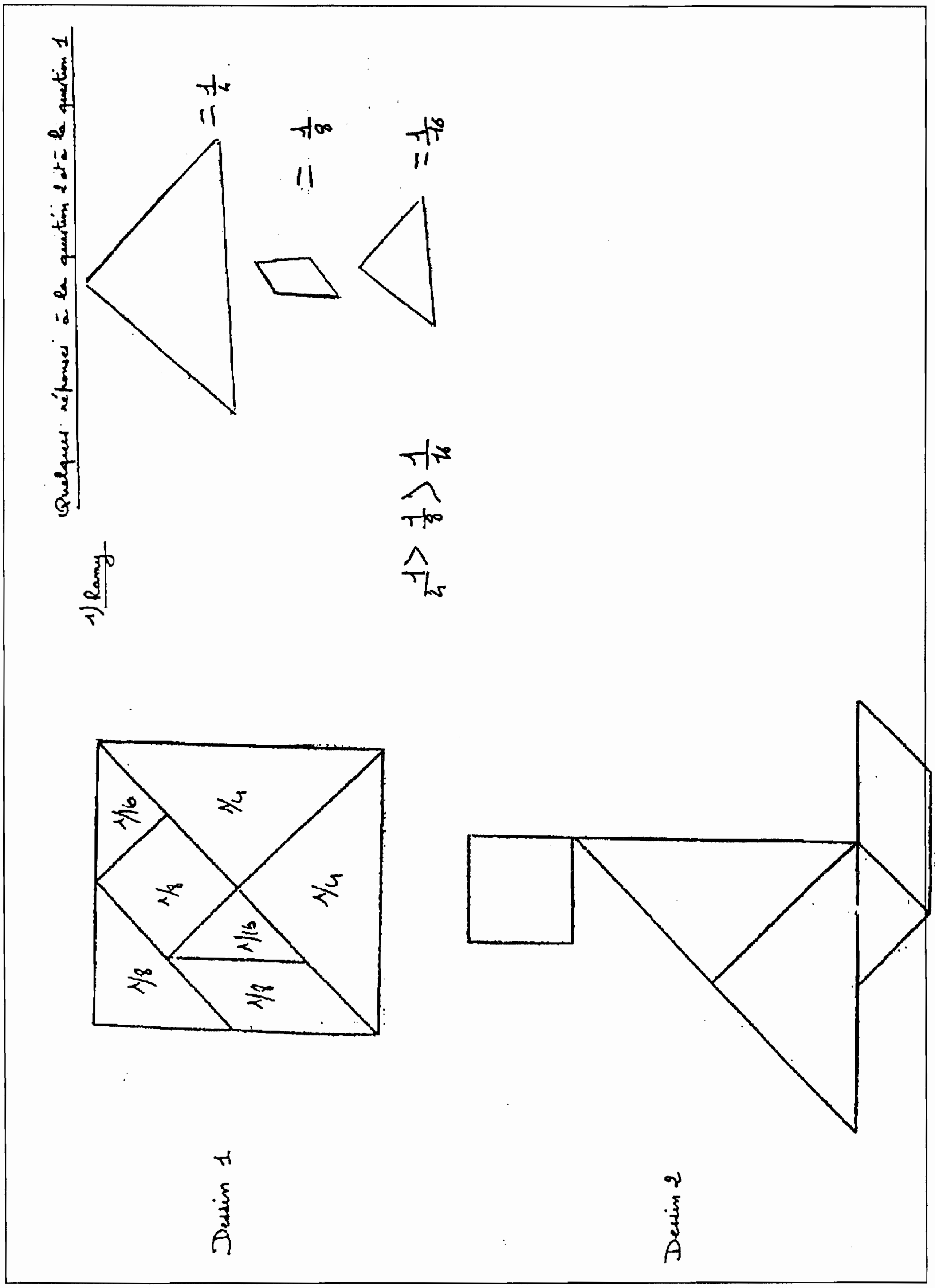
b) Analyser les travaux d'enfants photocopiés

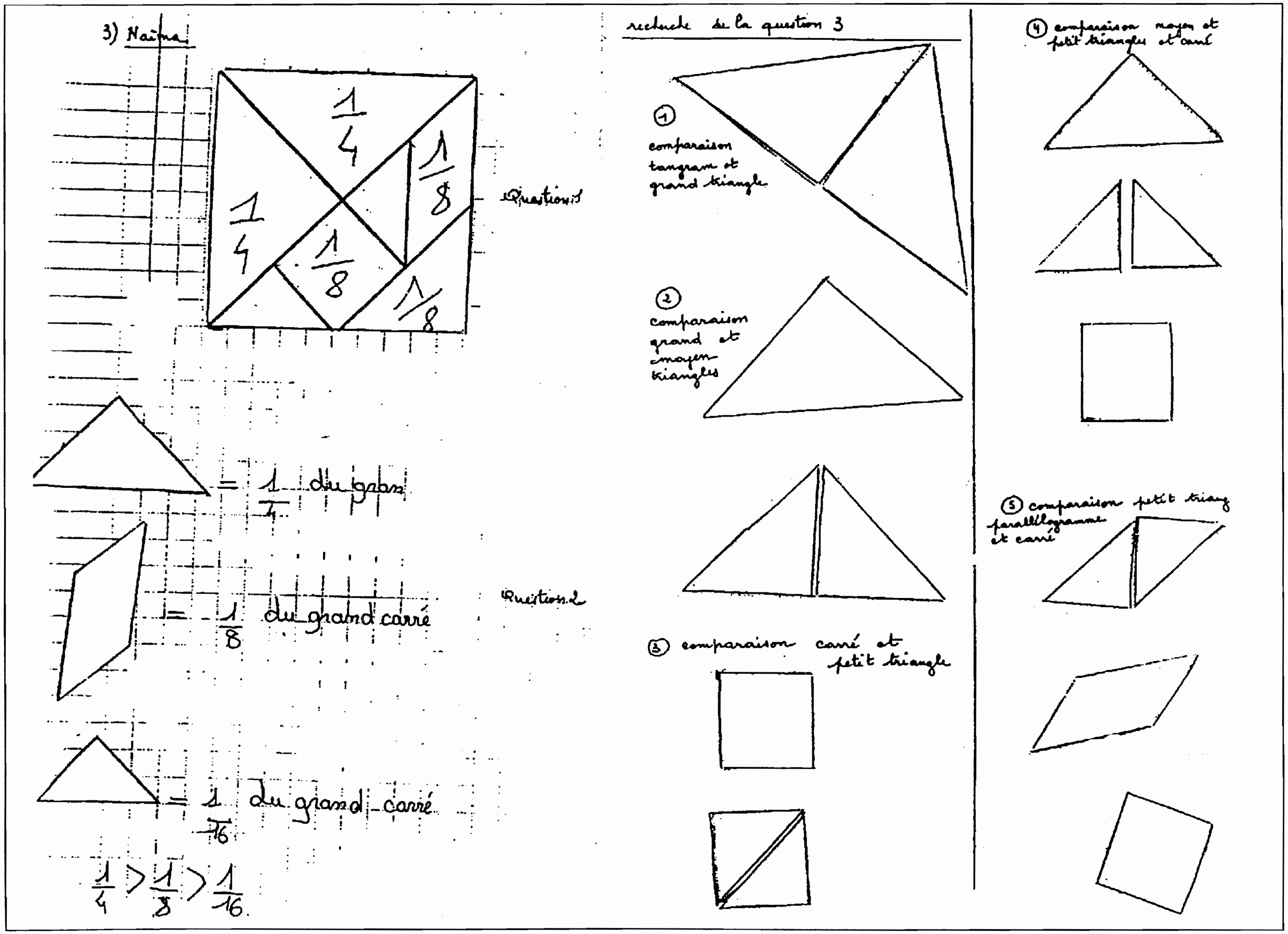
b1 - Repérer les procédures utilisées
b2 - Relever les erreurs éventuelles
b3 - D'après vous, d'où proviennent ces erreurs ?

c) Faire une proposition pour continuer ce travail

(On précise que la recherche a été longue et laborieuse, et qu'un groupe d'enfants n'est pas allé au-delà de :
1/4 + 1/4 = 1/2
Il n'a pas terminé son travail, mais n'a pas écrit d'erreurs).

Annexes liées à cette évaluation : constructions faites par les enfants




3) Naïma
1/4
1/4
1/8
1/8
1/8
Question 1
= 1/4 du gabar
= 1/8 du grand carré
Question 2
= 1/16 du grand carré
1/4 > 1/8 > 1/16
recherche de la question 3
① comparaison tangram et grand triangle
② comparaison grand et moyen triangles
③ comparaison carré et petit triangle
④ comparaison moyen et petit triangles et carré
⑤ comparaison petit triang parallélogramme et carré

1) Samia

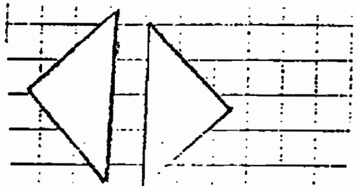
En observant attentivement le tangram complète les égalités :

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1}$

$\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

on a calculé $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} +$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$



$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

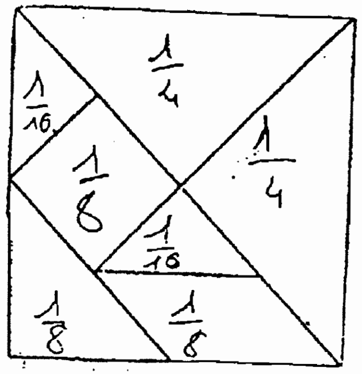
2) Ramy

En observant attentivement le tangram complète les égalité ;

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ On a calculer $\frac{1}{16} + \frac{1}{16}$ ça fait $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

3) Naima



$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

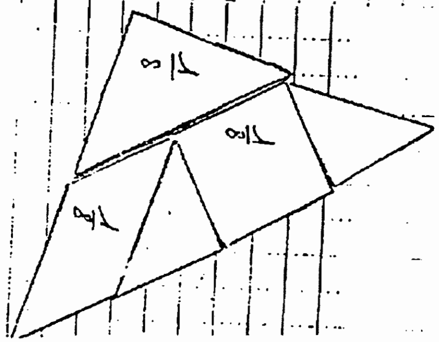
$\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}$

4) Lahisolile

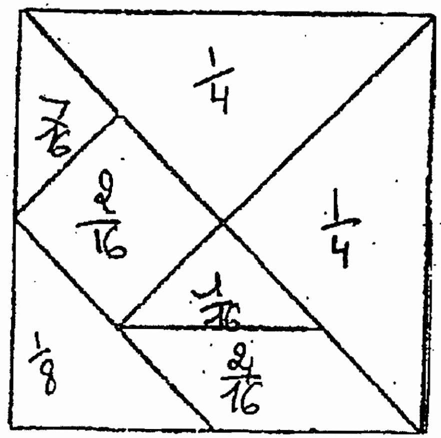
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

J'ai d'abord pris toutes les pièces correspondantes à la fraction. Je les ai placé sur le carré et j'ai trouvé $\frac{1}{2}$.



5) Abdelaziz



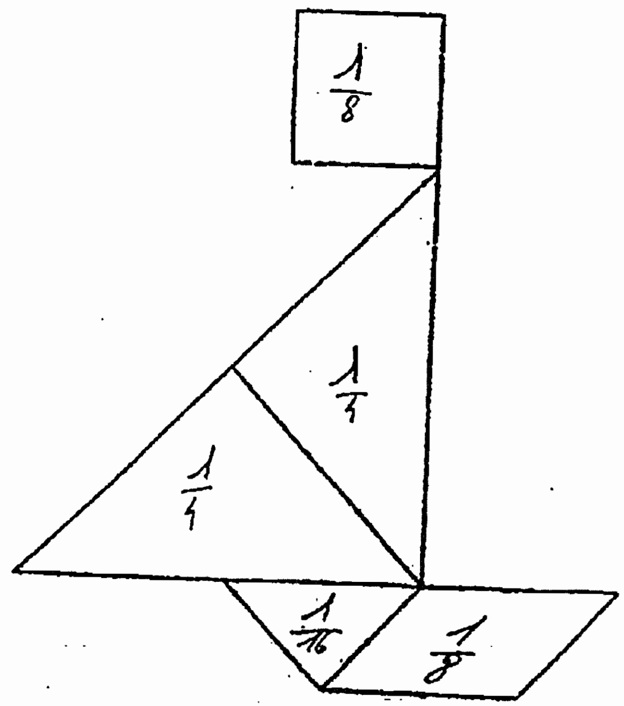
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

Toutes les réponses à la question 4 sont comme :



6) Farida

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

On a calculer $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cancel{\frac{1}{8}}=\frac{1}{4}+\cancel{\frac{1}{4}}+$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

Bibliographie utilisée

Les ouvrages dont les titres sont en gras sont conseillés aux étudiants

- M-J Perrin : "Représentation des fractions et des décimaux chez les élèves de CM2 et du collège" *(Petit x n°10* ou *Cahier de didactique des mathématiques de l'IREM Paris VII n°24)*
- R. Neyret : "Décimaux" *(Grand N n°17)*
- C. Comiti, R. Neyret : "A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de CM" *(Grand N n°18)*
- F. Léonard, C. Grisvard : "Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison des nombres décimaux positifs" *(Bulletin APMEP n°327, 1981)*
- "Comparaison de nombres décimaux" *(Bulletin APMEP n°340,1983)*
- G. Brousseau, *Recherche en didactique des mathématiques* : Problèmes de l'enseignement des décimaux" *vol. 1.1* et "Problèmes de didactique des décimaux" *vol. 2.1* (Ed. La Pensée sauvage, Grenoble) (seuls certains passages sont proposés aux étudiants)
- R. Douady, *Recherche en didactique des mathématiques* : "Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans)" *vol. 1.1* (même remarque)
- APMEP : **Aides pédagogiques pour le cycle moyen**, tome 2. **Nombres décimaux** (même remarque)
- N. et G. Brousseau : **Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire** (IREM de Bordeaux) (même remarque)
- **Liaison école/collège, nombres décimaux**, brochure n°62 (IREM Paris VII) (même remarque)
- ERMEL, **Apprentissages mathématiques CM**, tome 2 (Hatier) (même remarque)
- M. Coquand : Les décimaux *(Grand N spécial CM tome 1* ou *Grand N n° 20 et 21)*
- C.Dubois, M.Fénichel, M.Pauvert : **Se former pour enseigner les mathématiques**, tome 3 (Armand Colin - 1993)

B - Grandeur et Mesure

Temps

Deux séances de trois heures : une séance est consacrée à la mise en évidence des concepts de grandeur et de mesure en prenant comme exemple l'aire. L'autre séance est consacrée à l'analyse d'une suite d'activités proposées à des élèves de l'école élémentaire concernant d'autres grandeurs. Les exemples ont été choisis en fonction de la demande des étudiants avant leur départ en stage en responsabilité.

Intentions pédagogiques

- Définir le concept de grandeur en prenant l'exemple de l'aire
- Définir le concept de mesure
- Différencier ces deux concepts
- Mettre en évidence le rôle de l'intervention de ces concepts dans la connaissances des nombres et ainsi faire prendre conscience du fait qu'un concept mathématique ne prend du sens et ne se construit que par les interactions qu'il entretient avec d'autres
- Prendre en compte les propriétés d'une grandeur produit, faire le lien avec la proportionnalité.
- Prendre conscience qu'aire et périmètre peuvent varier dans des sens différents
- Ebaucher avec les étudiants la construction d'une suite d'activités permettant l'apprentissage de la notion d'aire et de sa mesure.
- Permettre aux étudiants d'élargir leurs connaissances dans le domaine des grandeurs et de la mesure en leur faisant analyser des activités construites pour les enfants de l'école élémentaire. Réinvestir leur connaissances concernant les variables didactiques.

Démarche

Lors de la première séance, les étudiants travaillent en groupe autour d'activités diverses concernant l'aire et sa mesure.

Grandeur et mesure ; un exemple : l'aire

1) Le tangram

a) Construire sur papier blanc des carrés, rectangles, triangles en utilisant des pièces du tangram
b) Rechercher les surfaces identiques parmi les formes construites (même forme et même grandeur)
c) Rechercher des surfaces qui occupent la même place dans le plan parmi les formes construites
d) Comparer les différentes classes obtenues
e) Construire des surfaces appartenant à une classe donnée
f) Dessiner les pièces du tangram sur du "papier pointé"

A l'issue de ce travail, essayer de définir ce qu'est une aire, la mesure d'une aire.
Quels sont les moyens dont on peut disposer pour comparer des aires ?

2) Le papier pointé

Première activité

En utilisant le papier pointé :

a) Construire une surface polygonale S. Soit P(S) son périmètre et A(S) son aire. Modifier l'aire de façon à ce que A(S) diminue et P(S) augmente.

b) Construire un rectangle et le modifier pour obtenir une surface de même aire et de périmètre plus grand. Cette surface peut-elle être un rectangle ?

c) Construire un rectangle et le modifier pour obtenir une surface de même périmètre et d'aire différente. Cette surface peut-elle être un rectangle ?

d) Construire deux rectangles d'aires respectives A1 et A2 telles que A1<A2. Peut-on construire une surface dont l'aire est plus petite que A1 et dont le périmètre est plus grand que celui du rectangle d'aire A2 ? Cette surface peut-elle être un rectangle ?

e) Construire des rectangles dont le périmètre est donné. Comparer leur aire.

Deuxième activité

a) Construire un rectangle ABCD. Déplacer le segment CD sur son support (la parallèle à AB portant CD). Le rectangle initial se transforme en parallélogramme. Comment varient les longueurs des côtés, de chaque diagonale, le périmètre et l'aire du parallélogramme ?

b) Construire un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux bords de la feuille. Déterminer son aire. Déplacer un des sommets autre que l'angle droit sur une ligne de points parallèle à la base. On obtient plusieurs triangles. Déterminer leur aire.

c) Construire un trapèze quelconque. Déterminer son aire. De quoi dépend-elle ? Quelles sont les transformations qu'il faut faire subir au trapèze construit sur la feuille de papier pointé pour mettre en évidence les caractéristiques de son aire ?

Troisième activité

L'unité d'aire est le carré délimité par quatre points voisins.

a) Construire le plus grand nombre de surfaces possibles dont l'aire est égale à une unité.

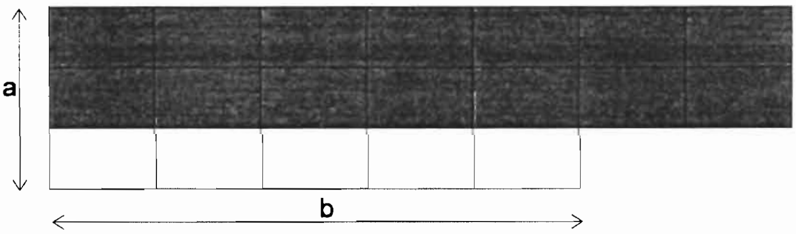
b) Même question avec une aire de deux unités.

c) Peut-on construire une surface ayant pour aire une demi-unité ?

3) Autour de quelques figures usuelles

a) Que devient l'aire d'un parallélogramme quand on multiplie son petit côté par 2 et son grand côté par 3 ?

b) Analysez la méthode suivante permettant de donner du sens au produit de deux rationnels (2/3) x(7/5) =14/15 à partir de l'aire d'un rectangle de dimensions a et b :



4) Les difficultés rencontrées par les élèves

a)On demande aux enfants de dessiner une surface dont l'aire est ½ cm^2. La plupart des enfants dessinent un carré de ½ cm de côté.

b) Le préau de l'école est carrelé. On demande aux enfants de trouver combien de carreaux recouvrent le sol du préau. Ce dernier est rectangulaire et le côté de chaque carreau a pour longueur 10 cm.

Un groupe d'enfants constate qu'il y a 100 carreaux au mètre carré et propose de mesurer les dimensions du préau pour calculer son aire. Peu de temps après, les enfants appellent la maîtresse et lui demandent s'il serait possible d'enlever le piano pour pouvoir compter le nombre de carreaux sur la longueur.

c) On pose aux enfants d'une classe le problème suivant : pour peindre un grand panneau dont la forme est un parallélogramme, j'ai besoin de 3 pots de peinture. De combien de pots aurais-je besoin si je veux peindre un panneau dont les dimensions sont le double de celles du premier panneau. Plus de la moitié de la classe répond 6 pots.

L'activité autour du Tangram a été choisie en relation avec un des sujets proposés pour l'évaluation de ce module (voir le thème Décimaux).

Ce choix a permis d'assurer une certaine cohérence entre les deux thèmes du module et de montrer aux étudiants qu'un même matériel peut non seulement être utilisé à des fins différentes, mais aussi permettre la prise en compte des interrelations entre différents concepts.

- La synthèse collective a permis de donner un sens à la grandeur "aire", aux termes "unité" et "mesure" et à différencier l'aire du périmètre. Elle a permis en outre de faire prendre conscience aux étudiants des deux aspects de l'aire : unidimensionnel et bidimensionnel.

-Lors de la deuxième séance, les étudiants ont analysé en groupe une suite d'activités proposées aux élèves de l'école élémentaire concernant d'une part la longueur (Annexes 1 à 5) et d'autre part le temps (Annexe 6).

Ce travail permet aux étudiants de réfléchir à nouveau à ce que sont des objectifs d'apprentissage, des variables didactiques, d'adapter et d'inventer d'autres activités à partir de celles qui leur sont proposées et enfin d'élargir leurs connaissances concernant les grandeurs introduites à l'école élémentaire.

Bibliographie utilisée

- APMEP, brochure *Mots tome VI*, Grandeur, Mesure (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public)
- ERMEL, *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire :* cycle élémentaire tome 1 et cycle moyen tome 2 (Edition Sermap/Hatier)
- R.Douady et M.J Perrin, *Mesure des longueurs et des aires* -Brochure n°48 de l'IREM Paris-Sud) (certains passages sont conseillés aux étudiants)
- M.J Perrin, *Liaison école-collège :nombres décimaux* (Brochure n°62 de l'IREM Paris-Sud) (même remarque)
- R.Douady et M.J Perrin, *Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane* (-Cahier de didactique des mathématiques n°37) (même remarque)
- N.Brousseau, *La mesure en cours moyen 1-Compte rendu d'activités,* IREM de Bordeaux
- M.Kastenbaum, Les procédés utilisés dans la mesure des surfaces" dans *Revue Grand N n°42,* IREM de Grenoble
- C.Dubois, M.Fénichel, M.Pauvert, *Se former pour enseigner les mathématiques*, tome 2 (Armand Colin - 1993)

IV - ÉVALUATION

Elle a dû se faire en cours de module puisque les appréciations devaient être rendues à l'administration avant la fin des séances. Elle a porté sur le thème "décimaux" avec un sujet au choix parmi deux. L'un d'entre eux permettait de faire le lien entre les deux thèmes du module.

Ce travail d'évaluation a été proposé de manière à compléter le travail de formation du module par les étudiants eux-mêmes, ces derniers devant à la fois utiliser les différents points mis à jour lors des séances précédentes et donner leur point de vue concernant les activités proposées aux enfants.

Une synthèse qui servira de corrigé fut rédigée à partir de leurs travaux.

V - LES GRANDS REGRETS : CE QUI A ÉTÉ NÉGLIGÉ

Concernant le thème des nombres décimaux, toute la partie autour du calcul a été négligée. Un document de synthèse à ce propos a été distribué aux élèves, mais il ne remplace pas les activités qu'il est possible de proposer et plus particulièrement autour du calcul mental et de son rôle dans l'apprentissage des nombres décimaux.

D'autre part une analyse d'activités permettant de mettre en évidence les relations entre la proportionnalité et les nombres rationnels décimaux ou non aurait été adaptée à une formation plus longue ; de même qu'une mise en place de passation à proposer à des élèves avant apprentissage ou en cours d'apprentissage. L'observation des enfants fait aussi partie d'une formation professionnelle.

Concernant le thème "grandeur et mesure", l'analyse des activités proposées dans les annexes 1 à 6 n'a pas pu être approfondie faute de temps, les activités prévues autour du volume, de la masse n'ont pas été traitées.

D'autre part, nous n'avons pas pu analyser des activités permettant de lier le thème "grandeur et mesure" à d'autres notions comme la proportionnalité ou la géométrie. Nous aurions voulu consacrer plus de temps à la liaison entre les deux thèmes du module.

1) Pour chacune des activités :
- déterminer les objectifs d'apprentissage ;
- préciser les contraintes que le maître peut choisir pour préparer le matériel (longueur de la bande A par exemple).

Ces contraintes varient en fonction des possibilités des enfants mais aussi en fonction des objectifs que l'enseignant veut atteindre. Elles induisent des procédures différentes. Déterminer l'incidence de ces contraintes sur les objectifs visés et les procédures mises en oeuvre par les enfants.

2) Certaines des activités présentées peuvent être reprises au cycle des approfondissements en modifiant certaines contraintes. Préciser lesquelles.

Les bandes graduées proposées dans les activités qui suivent n'ont aucune indication numérique. Seuls des traits indiquent les graduations. Les enfants pourront au cours du travail introduire sur leur bande des indications numériques. Ces bandes peuvent être remplacées par une unité représentée par un morceau de bandes que les enfants peuvent reporter.

a) La classe est organisée en groupes. Les groupes sont associés deux par deux. Ils sont d'abord émetteurs puis récepteurs. Chaque groupe dispose d'une seule même bande graduée (voir annexes 2 et 3).

Chaque groupe a une bande A et doit utiliser la bande graduée pour écrire un message afin que le groupe associé puisse construire une bande de même longueur que A.

Les messages sont échangés et les groupes disposent d'une bande B pour construire la bande A d'après le message reçu.

b) L'organisation de la classe est la même que dans l'activité précédente. Cette fois les groupes disposent de bandes graduées différentes (une seule par groupe) et d'une même bande A. Chaque groupe doit écrire un message afin que le groupe associé construise une bande de même longueur que A.

Les bandes obtenues et les messages sont ensuite comparés.

c) La classe est partagée en groupes. Chaque groupe dispose d'un système de bandes graduées, le même pour tous, et d'une bande. Il peut y avoir trois ou quatre types de bandes (voir pages suivantes). Deux groupes peuvent avoir la même bande. Chaque groupe doit se servir du système de bandes graduées pour exprimer la longueur de leur bande. Les messages obtenus sont comparés.

d) Les enfants doivent observer un double-décimètre. Les remarques sont échangées.

e) Les enfants sont groupés par deux. Ils ont un double-décimètre à leur disposition. Chaque enfant dispose d'une feuille sur laquelle est dessiné un segment. Il doit écrire un message pour que son associé puisse dessiner un segment de même longueur. Les messages et les segments obtenus sont comparés.

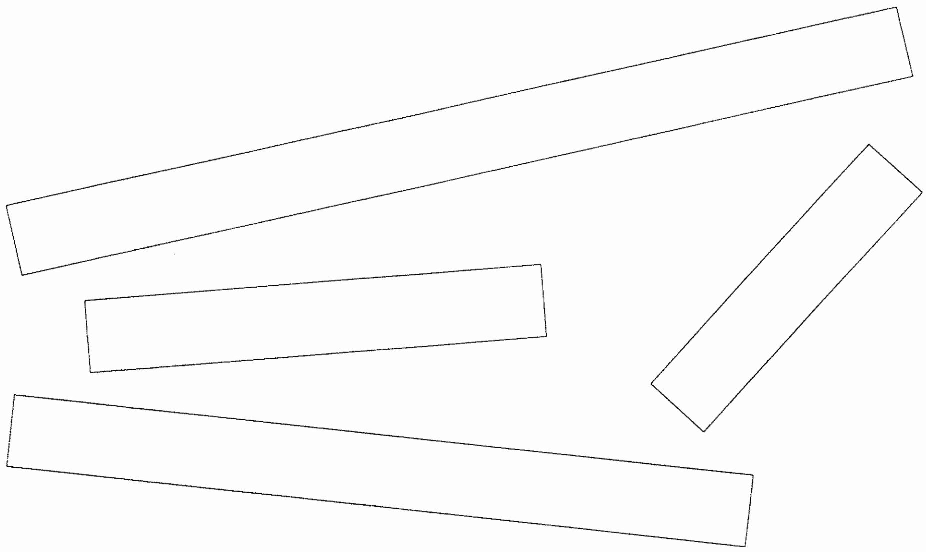
f) Les enfants observent des photocopies de double-décimètres cassés (voir annexe 4). Ils doivent indiquer quelles longueurs il est possible de mesurer avec ces derniers.

g) La classe est partagée en groupes. Les groupes sont associés par deux. Un de ces derniers possède une bande graduée en décimètres et une bande A. Celui qui lui est associé possède une bande graduée en centimètres et la même bande A. Chaque groupe doit écrire un message pour que l'autre groupe puisse construire une bande de même longueur que la bande A. Pour ce faire les groupes disposent d'une bande B. Les messages et les bandes sont comparés.

On peut faire de même à partir d'une bande graduée en mètre et d'une bande graduée en décimètre.

Annexe 2

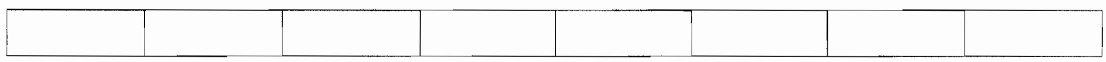
un exemple de matériel proposé aux enfants pour la troisième activité (C).
Les bandes graduées proposées pour cette activité sont les bandes 1, 3 et 4 (annexe 3).
On peut bien sûr donner d'autres bandes à mesurer avec d'autres bandes graduées.



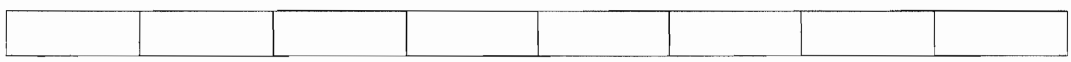
Annexe 3

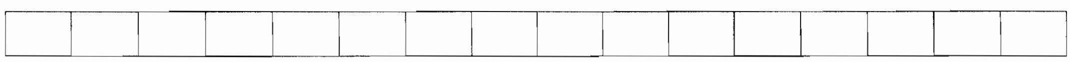
Matériel proposé aux enfants lors des différentes activités.

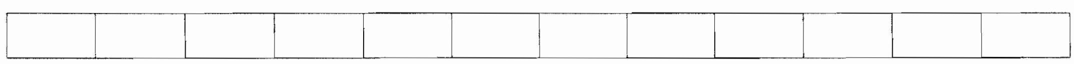
<u>première activité</u> (a)

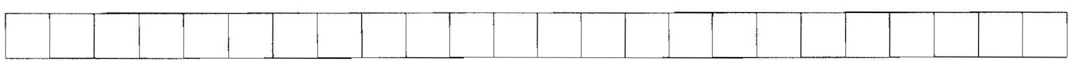


<u>deuxième activité</u> (b)


bande 1

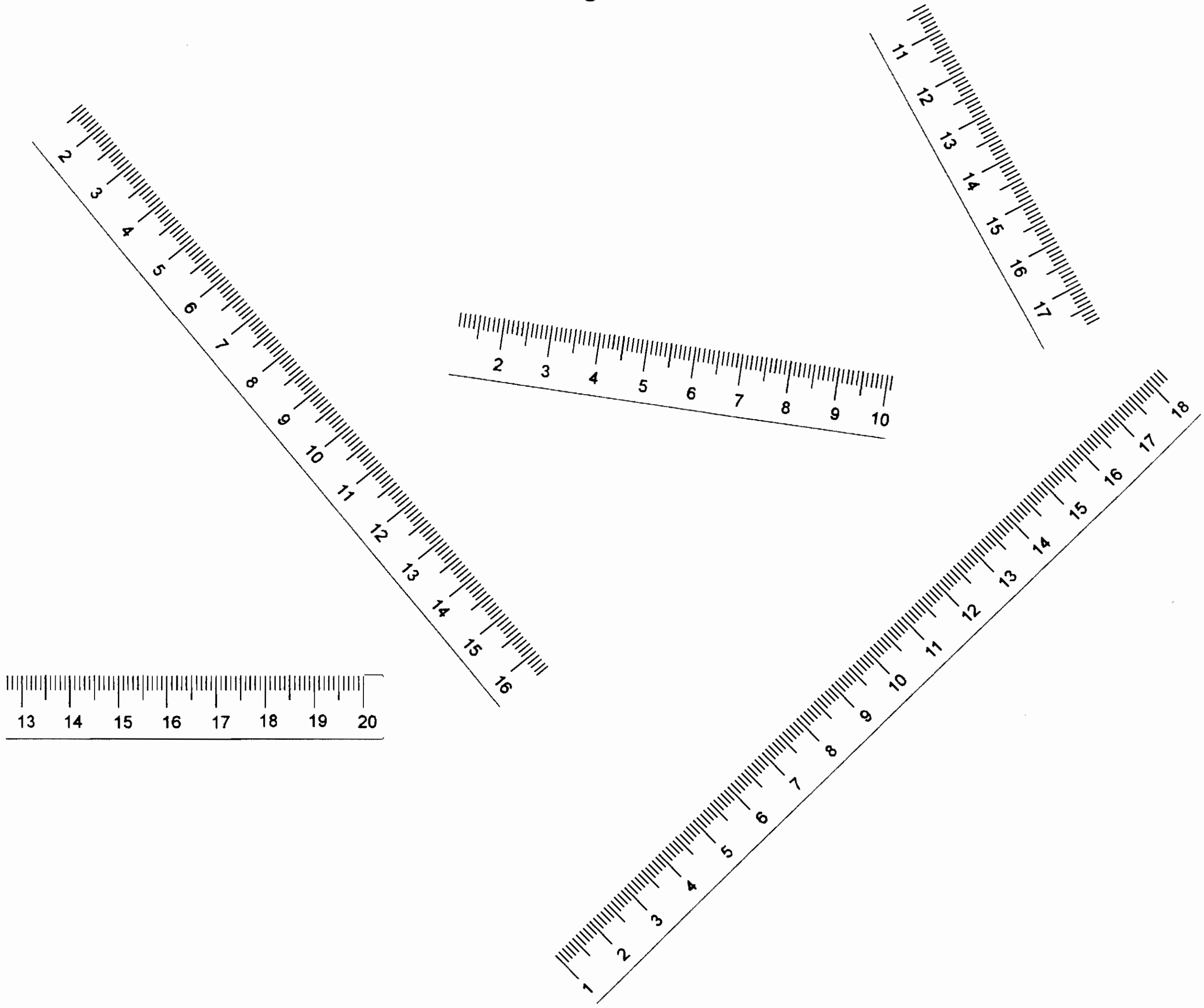

bande 2


bande 3


bande 4

Annexe 4

« Règles cassées »



Annexe 5.

Autour des unités usuelles de longueur

1) Déterminer l'objectif général d'une telle activité. Préciser le rôle de chaque phase dans la mise en place de cet objectif.

2) Selon la période choisie pour cette activité, certains points peuvent être approfondis et même envisagés avec des élèves en fin de cycle des approfondissements.

Essayer de préciser ces points ainsi que la manière dont on pourrait prolonger ces activités dans cette perspective.

3) Dans la troisième phase, certains enfants sont peu adroits et ont du mal à graduer. Quelles sont les aides qu'il serait possible de leur apporter afin qu'ils arrivent à construire leur mètre ?

4) Analyser le rôle des outils disponibles dans la classe. A quels moments peut-on penser qu'ils seront une aide pour les enfants ?

5) Mettre en évidence les moments d'institutionnalisation.

Cette activité a été mise en place dans une classe de CM1. Elle comporte plusieurs phases.

Dans cette classe, les enfants disposent d'outils tels que le dictionnaire et la calculette. Ils peuvent s'en servir quand ils le veulent, sauf dans certaines activités pour lesquelles ils sont prévenus avant de commencer.

Description de l'activité

Première phase

La maîtresse demande aux enfants quelle unité ils choisiraient pour mesurer :

- la longueur de leur règle (certains ont des double-décimètres, d'autres ont des triple-décimètres, il existe un mètre dans la classe)
- la longueur d'un des côtés de leur cahier de mathématiques
- la largeur de la classe
- la distance entre Bondy et Paris (l'école est à Bondy)
- la taille d'une fourmi
- la distance entre Paris et Marseille (ils correspondent avec une classe de Marseille)
- l'épaisseur d'une feuille de papier
- la taille d'un bébé à la naissance
- leur taille

Les propositions des enfants sont analysées et critiquées. Les différentes unités sont écrites en vrac sur le tableau. On complète avec celles qui n'ont pas été évoquées. On écrit les noms de chacune d'elles ainsi que les abréviations correspondantes.

Deuxième phase

Les enfants, par groupe de deux, sont amenés à construire un mètre. Pour cela, ils disposent :

- d'une longue bande de papier sur laquelle sont indiquées l'origine et l'extrémité du mètre
- d'un double décimètre.
- un compas pour reporter des longueur

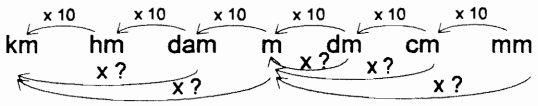
La graduation s'arrêtera dans un premier temps au cm, mais les enfants construiront les millimètres dès qu'ils auront un moment de liberté en classe. Pour cela, ils disposent de papier millimétré.

Troisième phase

Il s'agit de trouver certaines des relations qui existent entre les diverse unités usuelles de longueur. A l'issue de ce travail, le tableau suivant est construit collectivement :

1000 m kilomètre km	100 m hectomètre hm	10 m décamètre dam	...

La maîtresse propose ensuite aux enfants de compléter le tableau suivant :



Une synthèse est organisée autour des résultats proposés par les enfants.

Quatrième phase

Les enfants de cette classe ont déjà travaillé sur les masses. Certaines unités à propos des masses marquées ont déjà été évoquées.

La maîtresse propose aux enfants d'écrire les unités usuelles de masse en se référant à celles de longueurs.

La synthèse est réalisée autour de la construction d'un tableau du même type que celui concernant les unités de longueur ainsi que sur la mise en évidence de certaines relations entre les différentes unités de masse.

Cinquième phase :

La maîtresse demande aux enfants ce qu'ils pourraient peser en utilisant comme unité :

- le kilogramme
- le gramme
- le décigramme
- l'hectogramme
- le milligramme

Dans un deuxième temps, elle demande aux enfants quelle unité ils utiliseraient pour peser :

- un poids-lourd
- un éléphant
- un chat
- une souris
- le chargement de blé d'une remorque de tracteur.

Elle introduit alors la tonne et le quintal ainsi que les relations qu'ils entretiennent avec les autres mesures de masse.

Annexe 6

Quelques activités autour de la mesure du temps

Pour chacune des activités suggérées ci-dessous, déterminer les apprentissages visés.

En s'inspirant de ces activités, imaginer la mise en oeuvre d'un travail concernant la mesure du temps dans une classe dont certains enfants savent déjà lire l'heure et d'autres pas encore.

1) La frise du temps[1]

• Les enfants font une enquête à la maison : ils relèvent les années de naissance de différents membres de la famille.

• On classe les années selon les générations : grands-parents, parents, enfants.

• Les années sont inscrites sur des cartons et on les met en ordre dans chaque génération. Toutes les années ne sont pas représentées. On les remplace par des cartons vierges.

• On constitue une bande verticale ou horizontale sur laquelle sont indiquées toutes les années. C'est une première frise du temps.

• Un travail en histoire permet de repérer certaines dates de la frise précédente. On classe les événements du plus ancien au plus récent.

• On conduit les enfants à construire leur propre frise, comportant des événements qui les ont marqués depuis leur naissance.

• On introduit ensuite une droite numérique où tous les nombres sont indiqués par un trait (entre 1700 et 1991). Elle est affichée dans la classe.

• On résout de nombreux problèmes :

- quel est le plus jeune de la classe, le plus vieux ?

- quels sont les enfants dont les parents sont nés telle année ?

- quels sont les enfants qui ont un petit (grand)frère ou une petite (grande) soeur né(e) en... ?.Quel âge ont-ils ?

- Jules Ferry est né en 1832. Grâce à lui, en 1880, l'école devient gratuite et obligatoire. Quel âge avait-il alors ?

- Voici la date de naissance de Claude Monet (les enfants de cette classe ont fait des recherches sur les impressionnistes en Arts Plastiques) : 1840. Il est mort en 1926. Quel âge avait-il ?

- Renoir est mort en 1919. Il avait 78 ans. En quelle année est-il né ?

-...

2) La vie de tous les jours dans une classe[2]

Dans cette classe deux gros réveils sont présents et bien en vue de tous les enfants. L'un est à affichage "classique", l'autre est à affichage digital. Ces deux réveils ponctuent la vie de la classe :

• Le matin ou l'après-midi, selon les jours, quand on arrive en classe, après s'être installé, on regarde l'heure, on la lit sur les deux réveils. Puis quand les enfants commencent à s'habituer à la lecture, on présente un seul réveil et ils doivent écrire ce qu'afficherait l'autre.

• Pour certains travaux, la maîtresse donne une durée d'exécution : soit elle l'annonce et les enfants doivent prévoir ce que vont indiquer les deux réveils, soit elle donne l'heure à laquelle les enfants doivent terminer et ils doivent déterminer la durée.

• Quand les enfants sont agités, la maîtresse impose le silence pendant une certaine durée : "quand trois minutes se seront écoulées, on passera à l'activité suivante". Les enfants regardent attentivement les réveils pour prévenir la maîtresse qu'ils sont prêts à continuer.

• La maîtresse demande aux enfants de minuter certains exercices d'entraînement qu'elle donne en devoir : trouver le résultat d'un calcul, trouver un mot dans un dictionnaire... Elle demande aux enfants de noter l'heure à laquelle ils ont commencé et l'heure à laquelle ils ont terminé. En classe, on compare les temps mis pour réaliser ces exercices.

• Les exercices de calcul rapides sont réalisés avec un chronomètre. A tour de rôle, deux enfants chronomètrent leurs camarades et lisent le temps qu'ils mettent pour trouver le résultat.

3) Des problèmes

Les enfants disposent d'une calculette.

• Combien de secondes y a-t-il dans une année ?

• En 1987, le record du monde pour courir le 100 m est 9 s et 93/100 pour les hommes et 10 s 7/10 et 6/100 pour les femmes. Trouver la différence entre ces deux records.

• Sur la facture qu'il a remise à ma mère, le réparateur de la machine à laver a écrit ceci :

- heure d'arrivée : 9 h 15

- durée de la réparation : 1,75

A quelle heure a-t-il terminé ?

Grâce à notre magnétoscope, je peux enregistrer mes émissions préférées et les regarder quand bon me semble.

Aujourd'hui, le programme m'intéresse particulièrement : je veux enregistrer une émission sur la drogue qui dure 45 min, un film qui dure 1h 10 min, un clip de mon chanteur préféré qui dure un quart d'heure et une pièce de théâtre qui dure une heure et demie ; il ne me reste plus qu'une cassette de 180 min ; pourrais-je enregistrer tout le programme ?

---

1 Cette activité est inspirée d'un travail mené dans les classes de M.Gazal à Clichy sous Bois (93) et J.Vigour à Rosny sous Bois (93).

2 "La mesure au cours moyen 1"- compte-rendu d'activités (N.Brousseau-IREM de Bordeaux)

Partie 2

Les mathématiques à l'école maternelle

Plan

Vous trouverez ci-après un dossier assez composite, résultant à la fois de l'atelier de Colmar et d'une quête auprès de formateurs en IUFM.

1- Présentation générale (Jeanne Bolon, IUFM, centre de Versailles)

2- Les cahiers d'aide à l'évaluation : intérêt et limites (Jeanne Bolon)

3- Comment analyser un jeu mathématique ? (Jeanne Bolon)

4- Bibliographie pour étudiants, pour formateurs (François Boule, IUFM centre de Dijon)

5- Quelques bandes vidéo disponibles (Liliane Sossa, IUFM centre de Melun)

Titre : Présentation générale
Auteur : Jeanne Bolon
Résumé : Analyse des textes officiels sur le cycle 1 et proposition d'axes d'activités pour la formation initiale
Mots-clés : compétences transversales, cycle 1, jeux logico-mathématiques, petite section de maternelle

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

La plupart des formateurs sont à l'aise pour traiter des apprentissages de grande section en liaison avec le cours préparatoire : en effet, ils disposent de travaux variés, dans le domaine numérique (ERMEL), dans le domaine géométrique (IREM de Bordeaux, à propos de la Tortue de sol), dans le domaine logico-mathématique (IREM de Bordeaux, travaux sur les codages, sur les partitions, etc.). Ce n'est pas la même chose lorsqu'on aborde ce qui est proposable au tout début de l'école maternelle, car l'expérience montre qu'il existe peu d'activités mathématiques qui ne mettent en jeu des savoirs et savoir faire relevant d'autres disciplines. Par exemple, compléter une suite en respectant une règle de régularité décorative peut conduire certains enfants à des erreurs par suite de manque d'aisance dans l'utilisation des instruments d'écriture : trop de contrôles à faire en même temps.

Pour les premières années, les travaux de référence sont ceux qui viennent de la psychologie. Le secteur numérique est bien couvert[1]. Pour ce qui est de l'espace et du temps, Piaget reste la référence principale, à laquelle on peut ajouter les travaux de L. Lurçat[2]. Vygotsky, repris par Bruner, permet de lier l'étude du développement cognitif et celui du langage[3]. Mais l'approche psychologique ne débouche pas directement sur des perspectives pédagogiques : les progressions qui pourraient être proposées à des enseignants sont donc à construire[4] ou plus exactement à structurer, à partir des propositions multiples qui surgissent dans les revues pédagogiques et ailleurs.

Le ministère a proposé une orientation dans ses textes officiels (brochure CNDP-Hachette, *Les cycles à l'école primaire,* 1991).

Parmi les compétences transversales, on peut sélectionner ce qui relève peu ou prou d'une éducation mathématique (donc en continuité avec les programmes de 1977).

> *Attitudes - Désir de connaître et d'apprendre*
> *(...) Il est capable, à l'occasion des activités qui lui sont propres, d'observer, d'interroger, de verbaliser ce qu'il comprend, ou de le traduire par un dessin, une ébauche de schéma ou de report de résultats.*
>
> *(...) Il prend conscience du pouvoir que donne le savoir et il a envie d'entrer dans les processus d'apprentissage correspondants (...)*
>
> *Espace et temps*
> *Au cours d'explorations d'espaces de plus en plus étendus et nombreux, dans des durées diversifiées, l'enfant :*
> *- se situe dans un espace donné (classe, cour, rues, quartier),*
> *- sait parcourir un itinéraire simple,*
> *- se donne des repères et les code,*

---

1 Voir Bidaud et al., 1992, *Les chemins du nombre,* Presses universitaires de Lille

2 L. Lurçat, Espace vécu, espace connu, ou encore 1980, L'activité graphique à l'école maternelle, ESF

3 Vygostky, 1985, Pensée et langage, Messidor *et* Bruner, 1983, Savoir faire, savoir dire, PUF

4 A certains égards, on se trouve pour l'école maternelle face à un dilemme équivalent à celui de l'enseignement géométrique à l'école élémentaire : une foule d'activités intéressantes, mais sans fil conducteur structurant.

- se situe dans le temps proche (le temps présent, la journée, la semaine) et commence à repérer des déroulements chronologiques différents,
- situe les événements de la vie quotidienne les uns par rapport aux autres (...)

Traitement de l'information
(...) l'enfant identifie les informations données par ses sens.
Il discerne des analogies, des différences (formes, couleurs, grandeurs, sons, bruits isolés ou dans un ensemble...)
Il comprend et exécute une consigne.

Langue orale
L'enfant doit pouvoir
- prendre la parole et s'exprimer de manière compréhensible (...) dans des situations diverses : (...) explications, justifications, résumés (...)

Lecture
L'enfant doit pouvoir
- (...) reconnaître l'organisation d'une page, la suite des pages d'un livre (fonction d'un titre, d'une pagination, d'une table des matières),
- reconnaître certains éléments dans un texte pour en découvrir le sens et la fonction : reconnaître le titre, repérer des graphies particulières (signature, sigles...)

Ecriture
L'enfant doit pouvoir (...)
- reproduire des modèles, des formes, des trajectoires proposés par l'enseignant,
- écrire sur une ligne, puis progressivement entre deux lignes (...)

Vocabulaire
L'enfant doit pouvoir :
- nommer, dans des situations de la vie quotidienne, des objets, des actions (...)

Les pages mathématiques sont plus connues, nous ne les citerons pas.

Certaines compétences transversales peuvent être développées, entre autres, dans le cadre mathématique : le respect des règles, par exemple, se fait facilement à partir de jeux, y compris les jeux à caractère logico-mathématiques ; le codage est utile à la fois dans la perspective de l'écriture et des mathématiques ; l'organisation de la feuille de papier relève autant des apprentissages géométriques que de la préparation à la lecture/écriture ; des déplacements sur des files matérialisées par des carreaux peuvent préparer l'utilisation de pistes numérotées tout en éduquant l'enfant au contrôle de ses gestes, etc.

Quelques axes pour un travail en formation initiale

* Donner des repères de type développement de l'enfant : langage, psycho-motricité, espace et temps, domaine logico-mathématique, en liaison avec les formateurs correspondants.

* Mettre en garde contre la pression de l'école primaire et/ou du milieu parental qui souhaite accélérer les apprentissages proprement scolaires. Apprendre à bien découper, disposer d'une motricité fine pour caler une règle ou manœuvrer un compas, repérer des différences visuelles (b /d) ou sonores (b/p).., ne se fait plus à l'école primaire et doit donc se faire à l'école maternelle.

* Fournir quelques activités-phares à chacun des trois niveaux et quelques activités d'entretien.

Titre : Les cahiers d'aide à l'évaluation : intérêts et limites
Date : Janvier 1994
Auteur : Jeanne Bolon
Type : Analyse du cahier d'aide à l'évaluation pour le cycle 1.

LES CAHIERS D'AIDE A L'ÉVALUATION : INTÉRÊTS ET LIMITES

Le ministère a publié en 1992 des cahiers d'aide à l'évaluation des élèves. Même s'ils ne sont pas obligatoires, ils représentent ce que le ministère souhaite encourager : raison pour laquelle il est utile de les examiner en détail.

Le cahier du cycle des apprentissages premiers[1] comporte deux parties, domaine de la langue et mathématiques. Citons le début de l'avant-propos (p. 11) :

> *Les outils d'évaluation présentés dans cette brochure sont destinés au cycle des apprentissages premiers et au début du cycle des apprentissages fondamentaux. En effet la dernière année de scolarité à l'école maternelle est celle qui permet de consolider les compétences du premier cycle et d'aborder, avec certains enfants, les apprentissages du cycle suivant.*
> *L'évaluation proposée - travail sur papier, matériel représenté - ne peut se substituer à l'observation des performances des enfants au cours des activités ordinaires de la classe. Elle a été conçue pour rendre cette observation plus précise dans les cas choisis par le maître.(...)*

En dépit du titre inscrit sur la couverture, le cahier concerne le début du cycle des apprentissages fondamentaux : voilà qui risque de renforcer la pression du milieu parental et/ou institutionnel pour démarrer à l'école maternelle les apprentissages pris jusqu'ici en charge par l'école primaire. Pourquoi ne pas en être resté aux seuls objectifs du cycle 1 ? Ils sont déjà assez nourris.

L'avant-propos indique, à juste titre, que beaucoup d'autres observations sur les enfants sont à faire, mais le cahier lui-même se présente comme un recueil de fiches à exécuter papier-crayon dans les deux seuls domaines du langage et des mathématiques, ce qui suppose donc un apprentissage à l'emploi de l'écrit. Or bien d'autres apprentissages sont indispensables à cet âge, en particulier dans les domaines de la psycho-motricité, ou de la construction des concepts de temps et d'espace : de tels apprentissages commandent la réussite dans les disciplines de l'école élémentaire. Il est fâcheux que le Ministère ait fourni des aides à l'évaluation exclusivement en français et en mathématiques comme si le cycle des apprentissages premiers n'existait officiellement qu'en fonction du lire/écrire/compter cher aux parents...

En reprenant les fiches, une à une, celles du domaine de la langue et celle des mathématiques, on peut nuancer les propos ci-dessus.

Dans la suite, nous n'avons mis que des très courts extraits des cahiers à titre de rappel (dans les pages suivantes, ces extraits, texte ou illustrations, sont les parties encadrées). Nous conseillons au lecteur de prendre la brochure du Ministère pour suivre l'analyse.

---

1 Il est signé Serge Thévenet, inspecteur d'académie, Jacqueline Roche, inspecteur de l'éducation nationale et Claude Recces, professeur des écoles.

Exercice 1

Compétences : Exécuter une consigne simple. Exécuter une consigne complexe. ... *Exemples de consignes :* 1. Donne un livre de cette pile **à chacun** de tes camarades et apporte-moi **le reste**. 2. Efface **tout** ce qui est écrit sur le tableau **sauf** ton prénom. 3. Vide **d'abord** le contenu de cette boîte dans la corbeille **puis** remplis-la de perles rouges. 4. Veux-tu aller me chercher un verre **à moitie plein** d'eau ? 5. Quand tu auras terminé le 3e dessin, tu le placeras **entre** le 1er et le 4e... tu laisseras une place pour le 2e. etc.

Les exemples proposés concernent plusieurs matières, ce qui est heureux. Mais cette fiche semble distinguer compréhension d'une consigne et apprentissage : à la maternelle - plus qu'ailleurs, sans doute - l'enfant apprend, en même temps, à exécuter une tâche et à comprendre les consignes associées.[2]

Exercice 3

Compétences : Demander des objets de manière explicite (sans les désigner, sans se déplacer). *Présentation de l'exercice* : Dans un atelier de marionnettes (ou toute autre fabrication déjà en cours dans la classe) quatre enfants disposent d'outils mais ne disposent pas de matériaux. Ils doivent demander en une seule fois tous les matériaux dont ils auront besoin pour réaliser un objet. Les compétences transversales impliquées dans cet exercice relèvent de la capacité à élaborer un projet personnel : prévoir les tâches, les techniques, les outils, les matériaux. ... *Consignes* : 1. Dire : « J'ai préparé les outils dont vous avez besoin pour fabriquer des marionnettes (ou tout autre objet). Vous allez travailler seuls. Dites moi avec précision tout ce qui manque pour faire une marionnette chacun. » 2. Noter les demandes de manière extensive.

Le travail d'anticipation est intéressant à développer : il n'est pas annoncé dans les compétences inscrites en début de fiche. La présentation augmente notablement la difficulté de l'exercice annoncée dans le paragraphe sur les compétences, puisque tous les matériaux doivent être demandés en une seule fois. Si l'on s'en tenait à la seule compétence explicite, il suffirait d'organiser un magasin où les objets seraient cachés dans des boîtes : les acheteurs seraient obligés de dire le nom des objets.

Parmi les objets à désigner verbalement, il serait intéressant d'ajouter des objets à caractériser par des propriétés géométriques.

[2] Voir Vygotsky

Exercices 5 et 6

Compétence : Décrire un dessin avec précision.

Présentation de l'exercice : l'enfant doit décrire l'un des trois personnages représentés sur la page de droite avec suffisamment de précision pour qu'un autre enfant puisse le reconnaître.

Les types de réponses décrits au bas de la page montrent que l'analyse des réponses est à caractère logique et non purement descriptif. Une mise en scène de type jeu du portrait sur un matériel familier serait bien préférable. Par ailleurs, quel intérêt de montrer deux fiches à peu près identiques ?

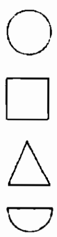
Exercice 13

Compétence : Reconnaître des mots écrits.

Présentation de l'exercice :. Sur un calendrier simplifié, l'enfant doit identifier les noms des jours de la semaine que le maître énonce dans le désordre. Chaque jour sera affecté d'un signe différent. (...)

Consignes :
1. Dire : « Regarde le calendrier de la semaine. Il y a une case pour chaque jour ». Laisser le temps de l'observation.
2. « Tu vas dessiner un rond dans la case du mercredi, deux ronds dans la case du dimanche et un demi-rond dans la case du samedi ».
(...)

Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche



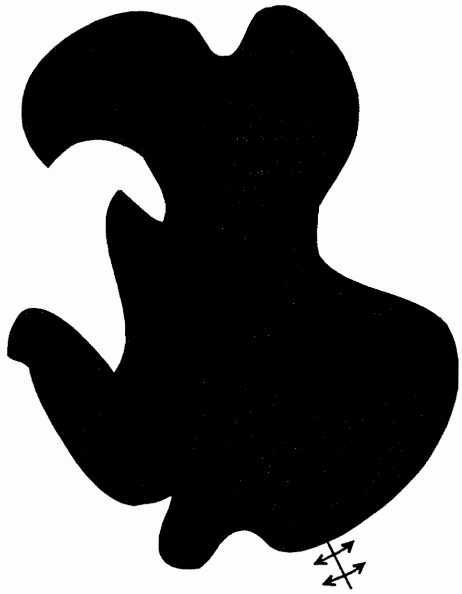
L'analyse qui est proposée ensuite fait l'impasse sur la lecture d'un tableau, comme si cela allait de soi. Rien n'est dit sur la répétition éventuelle de la consigne : si on ne la répète pas, cela permet d'évaluer conjointement aussi la capacité de la mémoire de travail, mais, du coup, seules les réussites sont interprétables...

Exercice 31

Compétence : Produire un tracé continu.

Présentation de l'exercice :
L'enfant doit tracer, d'un trait continu, le contour d'une figure irrégulière. L'opération peut être renouvelée une ou deux fois.
(...)

Consignes :
1. (...) et dire : "Regarde cette forme découpée... En partant d'une flèche, tu vas essayer de tracer un trait tout le tour de la forme, sans t'arrêter et sans déplacer la feuille »
(...)

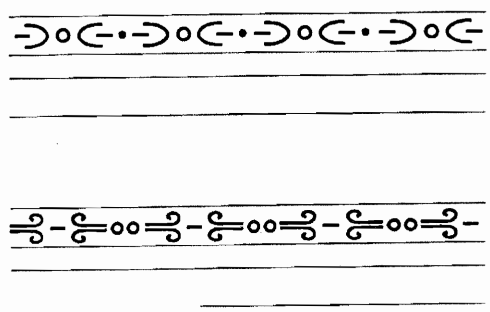


L'exercice de graphisme concerne aussi bien la préparation à l'écriture que l'approche des tracés géométriques.

Exercices 33 et 34

Compétence : Reproduire une série de graphismes diversement orientés.

Présentation de l'exercice :
L'enfant doit reproduire avec exactitude, entre deux lignes, une ou plusieurs chaînes de graphismes dont certains sont diversement orientés
Les compétences transversales sollicitées sont l'attention et la concentration sur la tâche.



Les exercices proposés relèvent autant du thème de l'écriture que celui des régularités décoratives (baptisées abusivement algorithmes à l'école maternelle). Quel intérêt d'en donner autant pour le seul contrôle de l'orientation ? Suggérer des variétés d'exercices est utile, mais les inscrire sur une même page présente le risque, au moins chez des instituteurs débutants, qu'ils présentent l'ensemble des exercices en une seule fois.

On peut se demander s'il ne serait pas aussi utile de faire recopier une seule fois un motif, quitte à faire travailler les régularités décoratives avec un matériel mobile.

Mathématiques

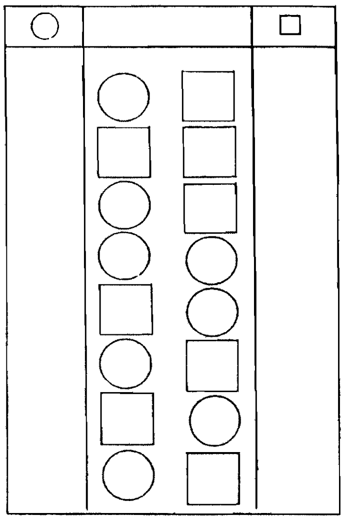
Mettons à part les 21 exercices dont le niveau est double : cycle des apprentissages premiers et cycle des apprentissages fondamentaux. Ils ne devraient pas être inscrits dans ces cahiers ou alors être mis à part en tant qu'évaluations non terminales pour le cycle considéré.

<u>Exercice 2</u>

Compétence : Conserver une quantité.

Présentation de l'exercice :
A partir d'éléments mêlés, l'enfant doit reconstituer deux collections homogènes en conservant le nombre total d'éléments de chaque sorte.

Consignes :
1. Dire : "Tu vois, on a dessiné des ronds et des carrés dans des colonnes, mais ils sont mélangés". Laisser le temps nécessaire à une courte observation.
2 Dire ensuite : "Est-ce que tu pourrais redessiner tous les ronds d'un côté et tous les carrés de l'autre côté ? " Désigner successivement les deux colonnes vides en ajoutant : "Ici tous les ronds, là tous les carrés".



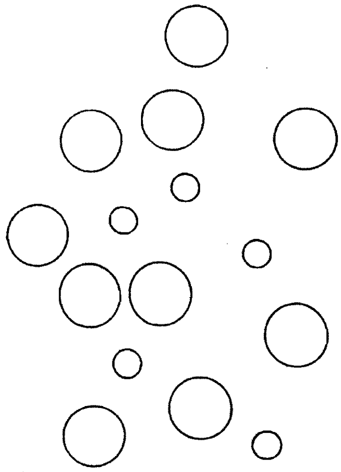
Les objets ne sont pas déplaçables, que ce soit ceux qui sont montrés et ceux qui sont à dessiner : l'activité suppose donc un principe de marquage organisé pour chacune de deux formes ou la mémorisation de deux quantités. L'activité ne comporte en elle-même aucun feed-back : les enfants ne disposent pas de contrôle par eux-mêmes. Ne suffirait-il pas, à ce niveau,de proposer un exercice de conservation de quantité entre une collection d'objets fixes et une collection d'objets mobiles ?
<u>L'exercice 3</u> présente à peu près les mêmes inconvénients.

<u>Exercice 6</u>

Compétence : Compléter une collection.

Présentation de l'exercice : L'enfant doit accroître le nombre des éléments d'une collection (petits ronds) jusqu'à ce qu'il atteigne le nombre des éléments de la collection de référence (grands ronds), soit de 5 à 10.

Consignes :
1. Dire : "Regarde les ronds qui ont été dessinés sur cette feuille. Il y a des grands ronds et des petits ronds". Laisser le temps de l'observation.
2. Ajouter : "Je voudrais qu'il y ait autant de petits ronds que de grands ronds ; est-ce que tu peux dessiner les petits ronds qui manquent."



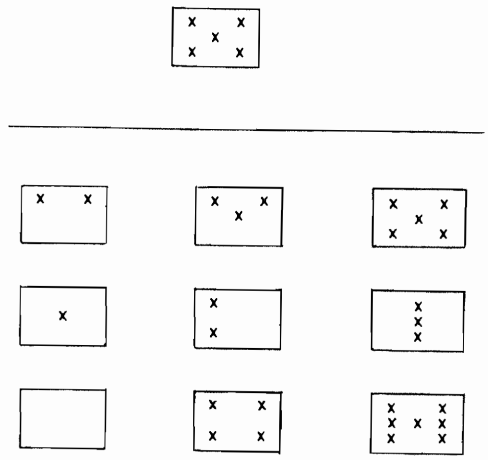
On sait que l'expression "autant que" présente des difficultés : elle est beaucoup moins fréquente que des expressions du genre : il y en a trop, ou il n'y en a pas assez. Elle serait donc à vérifier indépendamment, avec des objets déplaçables.

Les ronds sont dessinés, rien n'est déplaçable. On ajoute inutilement une difficulté.

Exercices 7 et 8

Compétence : réaliser une collection ayant le même nombre d'éléments qu'une autre collection. (...)

Consigne : Montrer à l'enfant la carte de référence. Dire : "Regarde cette carte, on y a dessiné des croix". Laisser quelques instants d'observation. Montrer ensuite les autres cartes et dire: "Je voudrais que toutes les cartes aient autant de croix que la première carte... Tu peux dessiner des croix s'il en manque. Tu peux aussi barrer des croix s'il y en a en trop."



Les deux fiches sont semblables : dans les deux cas, une proposition perturbatrice évite le recours systématique à la copie des dispositions des croix.

Barrer un dessin est clair pour un adulte : mais pour un enfant, la signification de l'objet barré, nié, ne va pas de soi.

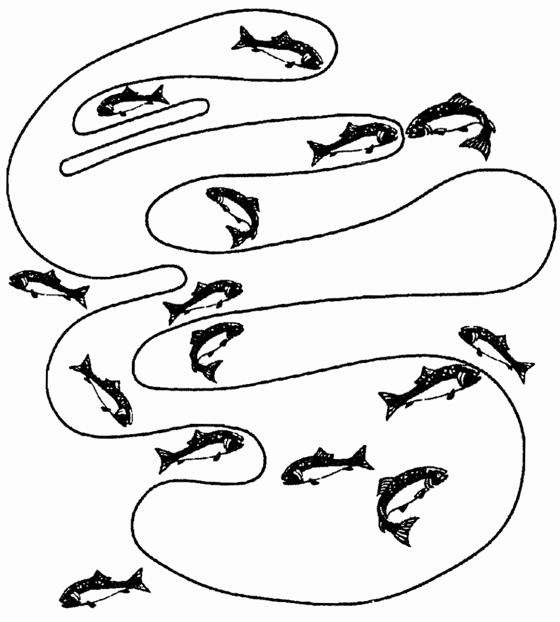
Exercice 14

Compétence : Situer l'intérieur d'une courbe fermée.

Présentation de l'exercice : L'enfant doit repérer des objets qui sont à l'intérieur du domaine limité par une courbe (...).

Consigne :

1. Montrer le dessin. Dire « Regarde, il y a des poissons que l'on a pris dans un filet et d'autres qui n'ont pas été pris ; ils sont en dehors du filet. »
2. Laisser observer pendant une minute environ, puis demander : " Est ce que tu pourrais mette un point rouge sur tous les poissons qui sont **dans** le filet ? "



La courbe qui enserre des poissons et en laisse d'autres libres suppose de l'attention. Mais que fera-t-on, par la suite, en mathématiques, d'une telle compétence ? Il n'y a pas, dans le cahier, de lien explicite avec les exercices de repérage de sortie de labyrinthes proposés (ex. 25 et 26).

Exercice 17

Compétence : Garnir la totalité d'une surface.

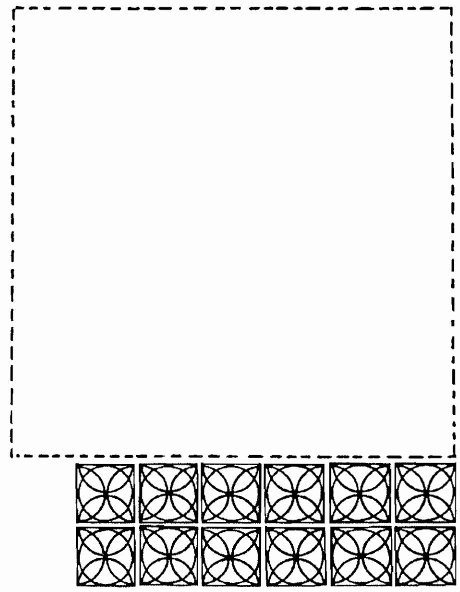
Présentation de l'exercice :

L'enfant est invité à disposer douze motifs identiques à l'intérieur d'un carré (20 cm de côté) pour réaliser une composition qui tienne compte de la nature de la surface.

Consigne :

1. Découper les petites carrés. Dire : "Voilà un grand carré vide et des petits carrés sur lesquels il y a un dessin. Tu vois, ils sont tous pareils. " Les étaler ; laisser observer.
2. " Tu vas essayer de trouver une bonne disposition pour placer les petits carrés dans le grand... comme si tu voulais décorer entièrement le grand carré."

(...)



A lire les commentaires et les types de réponses proposés, pour les auteurs, visiblement l'expression *totalité d'une surface* n'a pas le même sens pour une décoration et pour le calcul d'une aire ! La consigne renvoie à des activités de psycho-motricité où l'on demande aux enfants de "se mettre partout", c'est-à-dire de se répartir à peu près de la même manière partout. Elle est ambiguë dans le contexte des régularités décoratives.

Exercice 18

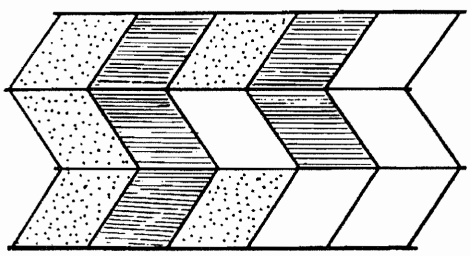
Compétence : Rétablir la continuité dans un pavage.

Présentation de l'exercice :

Il s'agit, pour l'enfant, de remplir des portions de surface (pavés) en tenant compte de la structure d'un ensemble (pavage).

Consigne :

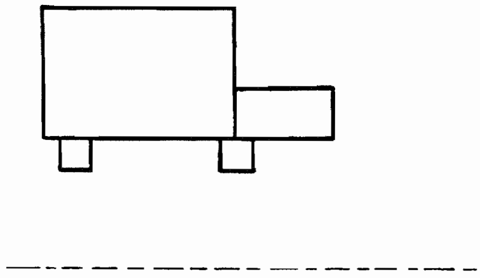
1. Dire : "Voilà un pavage qui n'est pas terminé." Montrer les pavés laissés en blanc. "Regarde bien comment les pavés sont remplis.. les uns avec des points, les autres avec des lignes". Laisser du temps pour une observation active.
2. "Maintenant essaie de remplir les pavés blancs sans modifier le dessin du pavage."



Les consignes sont très délicates à formuler dans le cas des régularités décoratives. Le support proposé manque de pavés : l'enfant qui remplirait la case centrale avec des lignes ne détruirait pas la régularité du dessin. Les commentaires du cahier montrent que sa réponse serait considérée comme fausse, alors qu'il ne troublerait pas la régularité du dessin.

Pourquoi ne pas préférer le jeu du cache sur un dessin régulièrement décoré ? On masque plusieurs cases, contiguës ou non : l'enfant doit dire les caractéristiques des cases cachées.

Exercice 19



Compétence : Reproduire une figure simple.

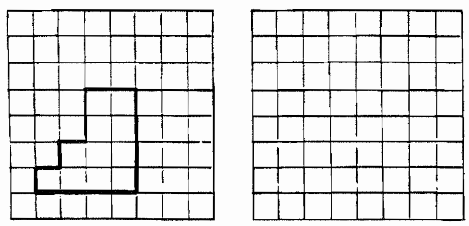
Présentation de l'exercice :
L'enfant doit reproduire une figure sans autres repères que les dimensions identiques de la feuille portant le modèle et de la feuille sur laquelle il dessine.

Consigne :
1. Dire : « Regarde ce dessin. » Laisser le temps de l'observation, puis ajouter : « J'aimerais savoir si tu peux faire le même dessin sur une autre feuille. »
2. Rapprocher les deux feuilles et préciser : « Tu vois, les deux feuilles sont de la même taille, ton dessin ne doit pas être plus grand ni plus petit que le modèle. »

Apparemment, les feuilles proposées sont blanches et opaques, l'enfant ne peut pas agir par transparence. C'est à main levée qu'il doit reproduire un dessin qui soit de la même taille : quelle tolérance va-t-on se fixer pour la correction ? L'exercice est trop mal posé pour qu'on puisse tirer des informations de l'exigence de taille.

On peut toutefois modifier l'énoncé pour contrôler la reproduction perceptive de figures, en proposant du matériel découpé de plusieurs tailles, en demandant aux enfants de reproduire un dessin avec le matériel pré-découpé. On peut aussi donner le dessin initial sur quadrillage : les enfants peuvent alors se guider sur le nombre de carreaux ou de nœuds du quadrillage.

Exercices 20 et 21



Compétence : Reproduire une figure simple.

Présentation de l'exercice :
L'enfant doit reproduire une figure en se servant d'un quadrillage.

Consigne :
1. Dire : « Regarde, sur la première grille on a dessiné un escalier. » Laisser le temps de l'observation.
2. « Tu vas essayer de dessiner le même escalier sur la deuxième grille. L'escalier que tu vas faire doit être exactement comme le premier, ni plus petit, ni plus grand. »

L'exercice 20 (l'escalier) est proposé pour le cycle des apprentissages premiers, l'exercice 21 (la tour) concerne aussi le cycle des apprentissages fondamentaux. Les deux exercices supposant le contrôle du nombre de carreaux, on se demande comment les auteurs ont réussi à discriminer les deux énoncés : a priori, une figure avec un axe de symétrie vertical est plus facile à reproduire qu'une figure sans axe de symétrie...

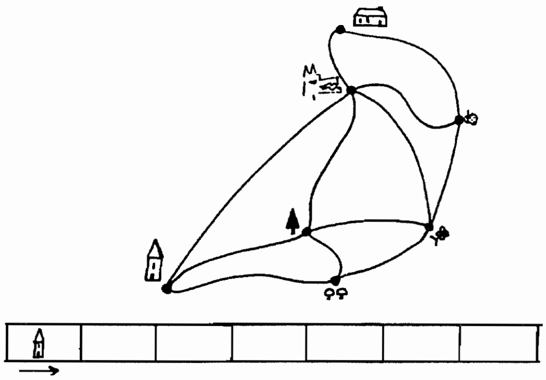
Exercice 22

Compétence : Coder un parcours.

Présentation de l'exercice :
L'enfant doit énoncer la formule codée d'un parcours évitant un obstacle après avoir éliminé les trajets impropres. Il doit ensuite fixer cette formule par le dessin. L'évaluation proposée (papier/crayon) ne peut se substituer à une évaluation de même type faisant suite à des déplacements réels dans la cour de récréation ou en salle de jeu.(...)

Commentaires :
- La compétence qui est en cause exige le concours de la mémoire pour l'élimination définitive des trajets impropres et, aussi, pour le relevé final des points de passage.
- L'exercice peut être compliqué à volonté par le tracé de chemins supplémentaires (partie gauche de la feuille) ou par l'interposition de nouveaux obstacles.

Cependant, l'évaluation porte sur la capacité à coder et non sur l'aptitude à choisir un bon parcours dans un réseau complexe (...)



Les informations ci-dessus sont contradictoires. Trier les trajets impropres fait partie de l'exercice, et est jugé ensuite secondaire. Dans ce dernier cas, il aurait suffi de faire procéder à une dictée de chemin par un jeu de communication : un parcours est proposé sur le sol, un enfant le décrit sur une bande (succession de cases) , la bande est donnée à un autre enfant qui n'a pas vu le parcours antérieur : il doit reconstituer le chemin initial.

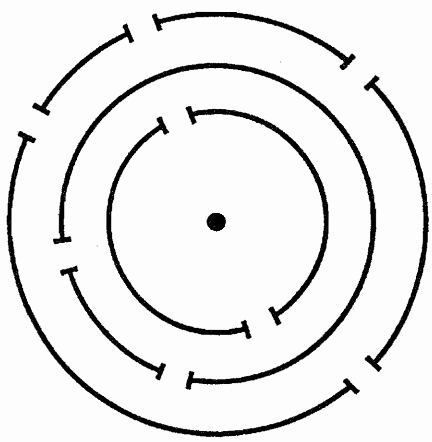
Aucun commentaire sur la recommandation de ne pas s'en tenir à des déplacements réels dans la cour : sans doute les auteurs voulaient-ils souligner l'intérêt d'exercices “gratuits”, sans contextualisation. Mais, ce faisant, ils introduisent une difficulté supplémentaire, qu'ils n'ont pas désignée.

Exercice 25

Compétence : S'orienter sur un plan.

Présentation de l'exercice :
L'enfant doit désigner le parcours le plus court pour aller de l'extérieur d'un labyrinthe circulaire jusqu'au centre. Il peut se servir de crayons de couleur pour matérialiser les différents parcours.

Consigne :
1. Dire : « Voilà un labyrinthe rond. Tu vois, il y a quatre entrées ». Les montrer et laisser le temps de l'observation.
2. « Tu vas chercher le chemin le plus court pour aller de l'extérieur vers le point qui est au milieu... Quand tu l'auras trouvé, tu me le montreras ».
(...)



Quel intérêt y a-t-il à formuler une contrainte sur la longueur des chemins, alors que c'est la seule perception de l'adulte qui permettra d'en décider ?

L'exercice sans cette contrainte pourrait remplacer utilement l'exercice 14.

Exercice 28

Compétence : Comparer des longueurs.

Présentation de l'exercice :
Il s'agit d'utiliser des situations courantes de la vie de la classe pour repérer des procédures de comparaison de longueurs et apprécier le degré de précision que ces procédures atteignent.

Commentaires :
— Les situations décrites ne sont que des situations indicatives ; elles seront adaptées aux réalités de la classe ou remplacées par des situations occasionnelles, reprises et aménagées, permettant de pratiquer une évaluation individuelle.
— On peut choisir des situations donnant lieu à des procédures de comparaison indirecte (utilisation d'un objet intermédiaire). Les premières étant beaucoup plus accessibles que les secondes, l'évaluation sera progressive.
— Les conduites adoptées spontanément par les enfants révèlent l'expérience qu'ils ont pu acquérir dans ce domaine où la mémoire des faits est très active.

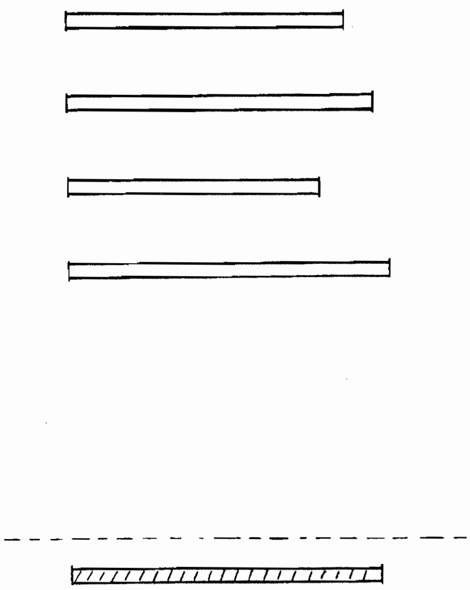
Les exemples proposés sont intéressants.. mais sont de l'ordre de l'apprentissage collectif et non de l'évaluation individuelle.

Exercice 29

Compétence : Comparer des longueurs.

Présentation de l'exercice :
L'enfant doit identifier, parmi quatre segments, un segment d'une longueur égale à la longueur de référence qui lui est donnée.
Les segments sont horizontaux et alignés **à gauche**.
La réglette de référence est découpée par le maître.
Les compétences transversales sollicitées sont la précision des gestes et le souci d'exactitude.

Consigne :
1. Dire : "Regarde ces réglettes dessinées sur une feuille. Tu vois, il y en a quatre et elles ne sont pas de la même longueur." ... Laisser le temps de l'observation.
2. "Maintenant voilà une autre réglette, celle-là je l'ai découpée, tu vois, on y a dessiné des petits traits. Tu dois trouver parmi les quatre réglettes dessinées celle qui a exactement la même longueur. Quand tu l'auras trouvée, tu la rempliras de petits traits, comme celle-ci, pour bien marquer qu'elles ont la même longueur."



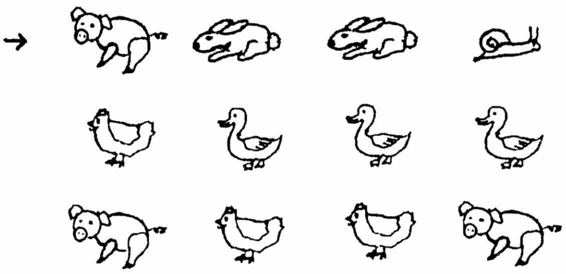
Les bandes dessinées sont ici toutes horizontales et alignées à gauche. Dans le cahier d'évaluation du cycle des apprentissages fondamentaux, les bandes sont dessinées en désordre (exercice 30), ce qui assure effectivement que l'on travailler sur les longueurs de segment. Ici les enfants peuvent apprécier "à l'œil", sans déplacer la réglette de référence, sans se rendre compte effectivement de l'alignement à gauche de toutes les bandes dessinées. Un contrôle sur des objets déplaçables aurait été préférable (avec une tolérance fixée).

Exercice 32

Compétence : Analyser une situation : repérer des répétitions.

Présentation de l'exercice :
L'enfant déduira de la question posée qu'il doit éliminer les éléments redondants dans une suite de dessins avant de les compter pour donner un réponse numérique.

Consigne :
1. Montrer la série de dessins et dire : "Regarde ces animaux... Tu vois, il y a des cochons, des lapins, des poules, des canards,... et un seul escargot." Laisser quelques instants pour l'observation.
2. "Essaie de trouver combien d'animaux il faudrait enlever pour n'en garder qu'un de chaque sorte. Tu peux te servir d'un crayon pour marquer les animaux qu'il faut enlever."
3. Quand le travail d'élimination paraît terminée, renouveler la question : "Combien faut-il supprimer d'animaux pour qu'il en reste **un de chaque sorte ?**" (...)
4. On demandera ensuite : "Dis-moi ce que tu as fait pour trouver la réponse."



Les compétences décrites sont incomplètes. Il ne suffit pas de repérer des répétitions. Il faut encore les marquer et gérer le marquage pour un comptage.

A noter que le comptage des animaux à retirer est gratuit. Quelqu'un qui ne saurait pas compter pourrait très bien répondre correctement à la première question.

Titre : Comment analyser un jeu mathématique ?
Auteur : Jeanne Bolon
Résumé : on trouve ici une liste des questions que l'on peut se poser à propos d'un jeu mathématique, puis les réponses à ces questions concernant un jeu de L. Champdavoine.
Mots-clés : analyse, jeu, but, stratégie, règle, variantes, apprentissages.

COMMENT ANALYSER UN JEU MATHÉMATIQUE ?

1. les questions

De très nombreux jeux sont apparus sur le marché éducatif. Apprendre à les analyser, apprendre à faire des variantes, sont des activités intéressantes en formation initiale ou continue.

Les questions que l'on peut poser à des personnes en formation sont toujours à peu près les mêmes, d'un jeu à un autre. En voici un exemple pour un jeu faisant intervenir le déplacement d'un pion de case en case sur une ou plusieurs pistes.

1- Lire la documentation sur le jeu :
* quel est le but du jeu pour l'enfant ?
* à combien joue-t-on ?
* quel est l'enjeu, pour l'enfant, de telle ou telle case ?
* comment se termine le jeu ?

2- Qu'y a-t-il à savoir (éventuellement apprendre) pour pouvoir respecter les règles du jeu ? Les savoirs peuvent porter sur le codage, l'organisation des déplacements géométriques, le nombre, la circulation du dé entre les enfants, etc.

3- Le jeu est-il un jeu de hasard (l'enfant n'a pas de choix), un jeu de stratégie (l'enfant subit le hasard, mais il a aussi des choix) ?

4- Après avoir appris aux enfants comment jouer, l'enseignant peut leur proposer une disposition des éléments du jeu, comme une sorte de jeu interrompu : dans les jeux de hasard, il fait parler les enfants sur ce qui serait favorable ou défavorable et expliquer en quoi ; dans les jeux de stratégie, il demande ce que l'on aimerait jouer et pourquoi.

Dans chacun de ces cas, quels savoirs mathématiques l'adulte fait-il émerger ?

5- En supposant que les enfants ont bien intégré l'anticipation décrite au paragraphe 4, prévoir une évaluation individuelle des acquis des enfants. Si elle se fait sous forme de papier-crayon, y a-t-il un apprentissage de la lecture/écriture à faire préalablement ?

6- Un support de jeu est coûteux à réaliser. Pour la majorité des jeux, on peut faire quelques modifications mineures, et, du coup, introduire des variantes qui rendent le jeu plus facile ou plus difficile du point de vue des apprentissages mathématiques [1]. Proposer de telles variantes en argumentant.

1 Ceux qui ne le permettent pas sont à éliminer !

2. éléments de réponse pour le “jeu des chemins”, de L. Champdavoine [2].

1- Lire la documentation

* L'enfant souhaite gagner pour pouvoir choisir une image : le dernier qui arrive n'a plus le choix.

* On joue à quatre enfants. Toutefois, on peut se limiter à deux enfants ou trois enfants en neutralisant une ou deux pistes.

* Les cases sont toutes équivalentes, à part la couleur qui servira à faire avancer le pion de chaque enfant.

* Le jeu se termine quand tous les enfants sont arrivés à la case de leur piste qui jouxte la case centrale.

2- Le jeu oblige les enfants à :

- lire la face supérieure du dé,
- mettre en rapport la couleur d'une face et une ou plusieurs cases de la même couleur,
- jouer à leur tour (ce qui est difficile en petite section, puisqu'il faut toujours tourner dans le même sens),
- attendre le tour suivant sans jouer (case blanche du dé),
- respecter le sens de la file, depuis les cases près de soi, vers la case centrale,
- aller à la première case de la bonne couleur en respectant l'ordre de la piste.

3- Le jeu est un jeu de hasard, il n'y a pas de stratégie à mettre en œuvre.

4- Le “jeu interrompu” permet d'introduire le vocabulaire : ton pion est *plus près* des images que celui d'Aurélie, la *première case* verte est celle-là, la *suivante* est celle-là, qui est arrivé le *premier* ? le *deuxième* ? le *troisième* ? le *dernier* ?
Contrairement à l'indication du bas de la page 19, la régularité des couleurs sur chacune des pistes ne joue pas de rôle particulier, sauf à donner à chaque couleur le même poids. On aurait pu imaginer des pistes avec des fréquences de couleurs différentes, d'une piste à l'autre, sans que cela change la nature mathématique des apprentissages en jeu.

5- Ce jeu est un des premiers que l'on puisse proposer en petite section : une évaluation papier-crayon serait hors sujet. Une évaluation individuelle peut se faire à l'occasion d'un atelier : elle peut porter sur les dénominations de couleur, la lecture du dé, le déplacement du pion vers la bonne case...

6- Le support de jeu peut servir pour un jeu de remplissage avec de petites quantités : 1 ou 2. Le dé de couleurs est alors remplacé par un dé qui comporte trois faces 1 et trois faces 2. Les enfants piochent des pions dans une réserve et les alignent du bord extérieur jusqu'à la case centrale. Gagne celui arrive le premier à la case centrale. Le jeu est alors plus difficile.

Pour des enfants qui ne connaîtraient pas bien leurs couleurs, on peut leur demander de remplir les cases avec des pions de la même couleur que la case, ou *seulement* les cases vertes..., ou *toutes les cases rouges de telle piste*, toutes les cases vertes de telle autre etc.

3. annexe : la présentation du jeu des chemins

(extrait de « Les mathématiques par les jeux »).

OBJECTIF

Apprendre	à jouer chacun son tour,
	à déplacer un pion sur un chemin orienté,
	à associer la couleur d'une face du dé à la couleur d'une case.

RÈGLE DU JEU

L'enfant qui arrive le premier dans la case rouge qui est près de l'image peut choisir une des quatre images posées au centre.

L'enfant qui arrive le deuxième choisit à son tour.

Les joueurs lancent le dé chacun à leur tour et posent leur bonhomme sur la première case rencontrée correspondant à la couleur de la face retournée du dé. Si le dé se retourne sur une face blanche, le joueur passe son tour.

2 *Mathématiques par les jeux,* petite et moyenne sections, ed Nathan 1986, p. 18 et 19.

DÉROULEMENT DU JEU

Il se joue avec quatre enfants et la maîtresse comme meneur de jeu.

Le plan de jeu est installé par terre sur un tapis ; chaque enfant s'assoit devant un chemin et choisit un petit bonhomme (il faut quatre bonshommes différents).

La maîtresse indique dans quel sens va passer le dé et montre aux enfants comment avancer leur bonhomme sur le chemin. Elle demande aux enfants de montrer où se trouve le départ du chemin et où est l'arrivée.

Elle explique la règle du jeu et comment on choisira les images (il est préférable que chaque joueur en fin de partie ait une image et que l'enjeu ne porte que sur le choix de l'image).

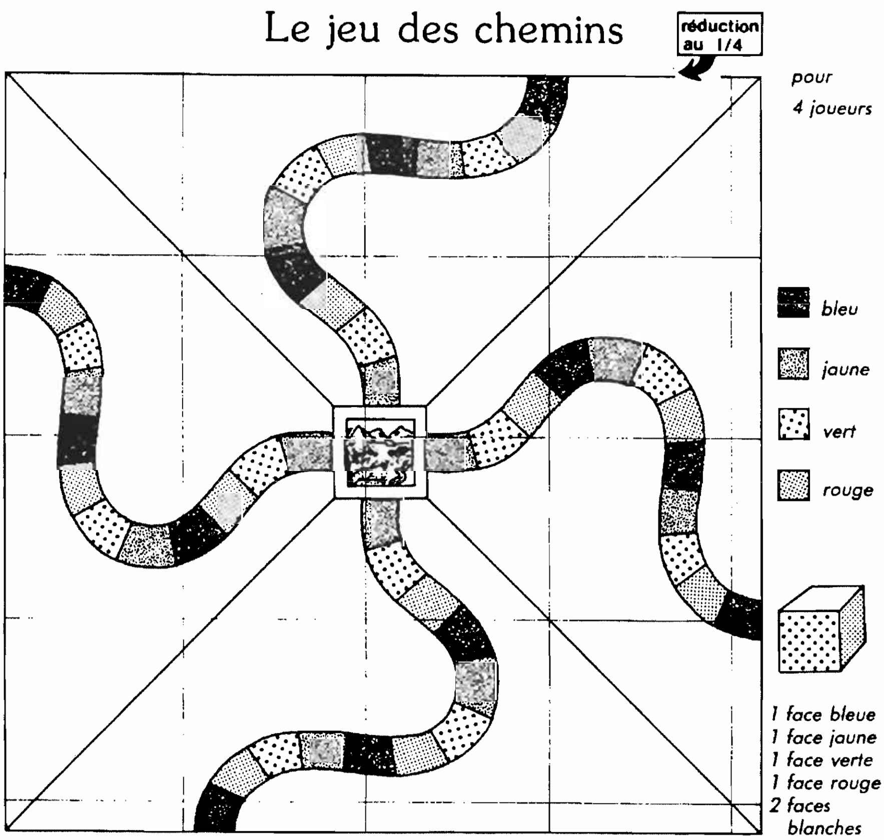
• La maîtresse donne le dé à l'enfant qui va jouer le premier: *« Eric c'est toi qui commence la partie, lance le dé.»*

Le dé se retourne sur « vert » (la maîtresse donne le nom de la couleur). *« Eric, tu prends ton petit bonhomme et tu le fais avancer sur le chemin jusqu'à ce que tu trouves une case de la couleur du dé. Et maintenant tu passes le dé à Isabelle »*.

• Isabelle à son tour lance le dé, qui se retourne sur la face blanche. La maîtresse demande à Isabelle si cette couleur existe sur le chemin. Après avoir constaté qu'il n'y avait pas de case blanche, la maîtresse explique à Isabelle qu'elle ne peut pas faire avancer son petit bonhomme et qu'elle doit passer le dé au suivant.

• Lorsqu'un des joueurs arrive sur la case rouge terminale, la maîtresse lui fait choisir une des quatre images; la partie continue entre trois joueurs, puis entre deux joueurs, le dernier se contentant de l'image restante.

• Au cours de la partie, la maîtresse donne à chaque fois le nom de la couleur qui se trouve sur la face du dé et sur la case correspondante.



MATÉRIEL

Pour 4 joueurs et la maîtresse comme MENEUR de jeu :
— Un plan de jeu carré de 50 cm de côté divisé en quatre parties par les deux diagonales ; sur chaque partie, un chemin de 2,5 cm de large divisé en 12 cases de 3 cm avec une structure cyclique de couleurs : bleu, jaune, vert, rouge.
Ces chemins conduisent à une case centrale sur laquelle on posera quatre images, enjeu de la partie (chaque enfant aura une image, mais le choix se fera par ordre d'arrivée au but).
— Un dé de couleurs avec une face bleue, une face jaune, une verte et une rouge et deux faces blanches (couleur ne figurant pas sur le chemin).
— Quatre petits bonshommes différents (lego ou autre).

Remarque : Pour 2 joueurs, utilisez un rectangle de 5 × 32 cm avec 2 chemins opposés.

NOTIONS MATHÉMATIQUES

Correspondance terme à terme pour quatre couleurs entre cases du jeu et faces du dé (le dé a une valeur, celle des couleurs).

A chaque couleur correspond une face du dé, mais à chaque face du dé ne correspond pas une couleur, puisqu'il y a deux faces qui ne permettent pas de jouer.

De plus, à chaque couleur du dé correspondent plusieurs cases de chaque chemin.

La répétition cyclique des quatre couleurs forme un algorithme (« une suite de signes qu'ils soient gestuels, oraux ou graphiques est dite périodique si elle est construite à partir d'un élément simple répété. Cet élément simple porte le nom d'algorithme » – J.-S. Daniau).

Titre : Bibliographie pour l'école maternelle
Auteur : François BOULE
Date : 1993

BIBLIOGRAPHIE POUR L'ÉCOLE MATERNELLE

La bibliographie ci-après est extraite d'une base de données établie à l'IUFM de Bourgogne, mise à jour régulièrement. Le fichier actualisé (Works Mac Intosh) est disponible sur simple envoi de disquette auprès de François BOULE (6 rue Charles Suisse, 21000 DIJON).

Première partie : Bibliographie étendue

Description d'activités

- Atelier d'Edition d'Auteuil : Situations mathématiques de la P.S. au C.P., IUFM Paris, 1990.
- Ecole Normale de Bar-le-duc : Quand la mathématique passe à la maternelle.
- R.BRISSIAUD : Comment les enfants apprennent à calculer. Ed.Retz 1989.
- F. BOULE : Espace et Géométrie de 3 à 11 ans. CEDIC/NATHAN 1979
- F. BOULE : Manipuler, Organiser, Représenter. A.Colin 1985
- F. BOULE : La construction des nombres. A.Colin 1989
- F. BOULE : 1, 2, 3, Jouez [Jeux en kit], M.D.I.- Nathan 1991.
- L. CHAMPDAVOINE : Les mathématiques par les jeux
    1. Petite section et moyenne section. Nathan 1985
    2. Grande section et C.P. Nathan 1986
- D. CHAUVAT & A. DAVID : Espace et géométrie de 4 à 7 ans. IREM de Nantes
- J.& S.DANIAU : Initiation Mathématique, CEDIC 1975
- G. DERAMECOURT : Mathématique en G. S. C.D.D.P. de Périgueux.
- ERMEL : Apprentissages numériques (GS), Hatier, 1990.
- I.N.R.D.P. Recherches Pédagogiques n°78 : Intuitions et construction de l'espace, 1976
- Equipe I.N.R.P. et al. : « L'acquisition du nombre », Journal des Instituteurs, Juin 1987
- J.& S. SAUVY : L'enfant à la découverte de l 'espace. Casterman-poche, 1972
- J.& S. SAUVY : L'enfant et les géométries. Casterman-poche, 1974
- L. TOURTET : Chemins de la découverte mathématique. 53 Situations-problèmes pour petits, moyens et grands. A.Colin ,1979
- G. ZIMMERMANN : Activités mathématiques
    1. Le développement cognitif de l'enfant. Nathan, 1985
    2. Les apprentissages préscolaires. Nathan, 1986

Etudes. Recherches

- A. BESSOT, C. COMITI, C. PARISELLE : Analyse de comportements d'élèves de CP confrontés à une tâche de construction d'un ensemble équipotent à un ensemble donné. Recherches en didactique des mathématiques, 1980, vol 1/2
- M.P. CHICHIGNOUD : Le développement du concept de nombre chez les jeunes enfants. Revue Grand N, n°35, 1980
- M. FAYOL : Nombre, numération, dénombrement : que sait-on de leur acquisition ? Revue Française de pédagogie, n°70, 1er trim.1985
- M. FAYOL : L'enfant et le nombre, Delachaux & Niestlé, 1990
- J.P. FISCHER : Développement et fonction de comptage chez l'enfant de 3 à 6 ans. Recherches en didactique des mathématiques, vol 2/3 1981
- J.P. FISCHER : La dénomination des nombres par l'enfant, IREM de Strasbourg, 1984
- J.P. FISCHER : Etude complémentaire sur l'appréhension du nombre, IREM de Strasbourg, 1985
- R.GELMAN : Les bébés et le calcul. La Recherche n°149, nov 1983
- J.C. GUILLAUME et al. : Evaluation des comportements en mathématiques des élèves du cours préparatoire. Rapport intermédiaire. I.N.R.P., 1980
- I.N.R.P.: Recherches Pédagogiques n°106 : La représentation de l'espace (5-6 ans), 1980
- L. LURÇAT : L'enfant et l'espace. Le rôle du corps. PUF, 1976
- L. LURÇAT : Etude de l'acte graphique. Mouton, 1974
- L. LURÇAT : L'activité graphique à l'école maternelle. ESF, 1979
- C.MELJAC : Décrire, agir, compter. L'enfant et le dénombrement spontané. PUF, 1979

Historique

- A.OZOULIAS : Une chronologie pour comprendre l'école maternelle. E.N. de Cergy-Pontoise, Ressources 95 n°2 Spécial Maternelle, 1986.
- P.KERGOMARD : L'éducation maternelle dans l'école. Rééd. en 1974 d'un ouvrage de 1886. Hachette.
- Cahiers de pédagogie moderne :
- Les débuts du calcul. A. Colin, 1962
- Les écoles maternelles. A. Colin, 1963
- I.N.R.P. : Recherches Pédagogiques n°45 : L'école maternelle et la mathématique vivante,1971
- I.N.R.P. : Recherches Pédagogiques n°89 : Points de départ Mathématiques au point de départ "Maternelles", 1978
- C.&A.M. GILLIE : Les mathématiques à l'école maternelle. Ecole Maternelle Française n°8, Mai 1978
- L.TOURTET : Conseils aux débutants. Les mathématiques à l'école maternelle. Education enfantine, 1980

Revues

- Grand N, IREM de Grenoble
- Education enfantine, Nathan.
- Ecole Maternelle Française, A.Colin.

Deuxième partie : Bibliographie restreinte

Description d'activités

- R. BRISSIAUD : Comment les enfants apprennent à calculer. Ed.Retz 1989.
- F. BOULE : Manipuler, Organiser, Représenter. A.Colin 1985
- F. BOULE : 1, 2, 3, Jouez [Jeux en kit], M.D.I. Nathan 1991.
- L. CHAMPDAVOINE : Les mathématiques par les jeux
  1. Petite section et moyenne section. Nathan 1985
  2. Grande section et C.P. Nathan 1986
- D.CHAUVAT & A.DAVID : Espace et géométrie de 4 à 7 ans. IREM de Nantes
- ERMEL : Apprentissages numériques (GS), Hatier, 1990.
- Atelier d'Edition d'Auteuil : Situations mathématiques de la P.S. au C.P., IUFM Paris, 1990.
- I.N.R.D.P. Recherches Pédagogiques n°78 : Intuitions et construction de l'espace.1976
- L.TOURTET : Chemins de la découverte mathématique. 53 Situations-problèmes pour petits, moyens et grands. A.Colin 1979
- G.ZIMMERMANN : Activités mathématiques
  1. Le développement cognitif de l'enfant. Nathan 1985
  2. Les apprentissages préscolaires. Nathan 1986

Etudes. Recherches

- L.LURÇAT : L'enfant et l'espace. Le rôle du corps. PUF 1976
- L.LURÇAT : L'activité graphique à l'école maternelle. ESF 1979
- M.FAYOL : Nombre, numération, dénombrement : que sait-on de leur acquisition ? . Revue Française de pédagogie, n°70 1° trim.1985
- M.P.CHICHIGNOUD : Le développement du concept de nombre chez les jeunes enfants. Revue Grand N, n°35.1980
- I.N.R.P.: Recherches Pédagogiques n°106 : La représentation de l'espace (5-6 ans), 1980
- R.GELMAN : Les bébés et le calcul. La Recherche n°149 nov 1983

Historique

- A.OZOULIAS : Une chronologie pour comprendre l'école maternelle. E.N. de Cergy-Pontoise 1986. Ressources 95 n°2 Spécial Maternelle.
- P.KERGOMARD : L'éducation maternelle dans l'école. Rééd. en 1974 d'un ouvrage de 1886. Hachette.
- I.N.R.P. : Recherches Pédagogiques n°45 : L'école maternelle et la mathématique vivante.1971
- I.N.R.P. : Recherches Pédagogiques n°89 : Points de départ Mathématiques au point de départ "Maternelles", 1978

Revues

- Grand N, IREM de Grenoble
- Education enfantine, Nathan.
- Ecole Maternelle Française, A.Colin.

Titre : Quelques bandes vidéo disponibles pour l'école maternelle
Auteur : Liliane SOSSA
Date : 1993

QUELQUES BANDES VIDÉO DISPONIBLES

Avertissement : Les bandes vidéo sont diffusées de manière artisanale, sauf pour le CNDP, le CDDP de Quimper et le centre audio-visuel de Suresnes. Les modalités sont variables : envoi d'une bande vierge, remboursement, etc. S'adresser aux collègues des IUFM concernés pour plus de renseignement.

A propos du nombre

- Les mathœufs, Jacqueline GUEGAN, Martine AVELINE, Dominique VALENTIN et Michelle LEVAIS, INRP et Centre audiovisuel de Suresnes (Hauts de Seine).

- Les carrelages, Anne-Marie CHAPON, Dominique VALENTIN et Michelle LEVAIS, INRP et Centre audiovisuel de Suresnes (Hauts de Seine).

- Les wagons, IUFM de Toulouse (centre d'Albi) et INRP.

- Le château, IUFM de Toulouse (centre d'Albi) et INRP.

- Comptines, comptons et compétences en comptage, Rose PALANQUE, Ecole normale de Toulouse.

- Apprentissages numériques et entretiens individuels, en grande section (fin d'année) et CP (mois de mars), Jeanne BOLON, Yves CLAVIER, Danielle VERGNES et Jean-Michel COFFIN, INRP et Ecole normale de Versailles.

Espace

- Petit pion deviendra grand, le jeu d'échec en maternelle, CDDP de Quimper.

- Espace en fête, CNDP [1] .

- Papiers peints à l'école maternelle, Ecole normale de St-Germain en Laye, CNDP.

- Cordes à jouer, CNDP.

- Utilisation de la tortue de sol en grande section d'école maternelle, Jacques PERES, IREM de Bordeaux.

Quelques questions de codage

- Qu'est-ce qui est caché dans la boîte ? Construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle, IREM de Bordeaux.

- Ordre en grande section, Jacques PERES, IREM de Bordeaux.

1 Sous réserve de discussion en formation, car les repérages proposés sont parfois contestables.

Partie 3

Étude critique de la brochure de Cahors

Comme nous l'avions annoncé dès le premier stage de Cahors (mars 1991), nous essayons dans ce chapitre de réfléchir a posteriori sur les situations rédigées dans les actes des stages précédents.

La COPIRELEM a organisé un atelier sur ce thème pour améliorer la qualité des productions par des compléments jugés indispensables par les "utilisateurs", approfondir notre réflexion sur la rédaction elle-même de documents de didactique utilisables en formation des professeurs d'école, affiner notre analyse des interventions de l'enseignant dans la gestion de ces activités.

De plus, cette étude manifeste notre volonté de ne pas figer la construction et la description des scénarii des situations de formation. Un réflexion permanente, des "feed-back" fréquents sur les conditions de reproductibilité, des analyses a posteriori, sont indispensables pour éviter tout dogmatisme dans l'utilisation de la didactique en formation des maîtres.

Ce chapitre comporte donc l'analyse du sondage réalisé auprès des participants au stage de Colmar (mars 1993) sur l'utilisation de la brochure de Cahors (mars 1991), un article sur l'utilisation de certains documents en vue d'un enseignement spécifique des notions de variable didactique et d'analyse a priori et enfin, une nouvelle rédaction commentée d'une situation de Cahors.

Titre : Sondage sur l'utilisation de documents de la brochure de Cahors
Auteur : Yves Schubnel (IUFM de Besançon)
Date : Mai 1993
Type : Compte-rendu d'un sondage réalisé auprès des participants au stage de Colmar (mars 1993) sur l'utilisation de la brochure de Cahors (mars 1991).
Résumé : Il s'agit ici de l'analyse d'un sondage sur l'utilisation de certains documents rédigés lors du stage de Cahors (mars 1991).

SONDAGE SUR L'UTILISATION DE DOCUMENTS DE LA BROCHURE DE CAHORS

Voici un compte-rendu des conclusions d'un sondage réalisé auprès des participants du stage national de Colmar, concernant l'utilisation, en formation de professeurs des écoles et d'instituteurs, de la brochure éditée suite au stage de Cahors. Ce sondage, qui n'a aucune prétention statistique, a été effectué dans le cadre de l'atelier de travail : "Étude critique des documents de Cahors et de Pau", mais ne fait référence qu'à la brochure de Cahors, celle de Pau venant seulement d'être éditée.

• Le sondage, qui concerne vingt personnes, fait apparaître que la situation la plus utilisées est ***"la vache et le paysan"***, utilisées plusieurs fois par 11 personnes. Elle est jugée satisfaisante (ou très satisfaisante) car elle porte sur le raisonnement et propose une situation aisément reproductible ; en effet, elle peut être utilisée telle qu'elle est écrite et son scénario est crédible.

• La situation : ***"Les quadrilatères particuliers"*** a été exploitée plusieurs fois par 8 personnes. Elle a été retenue pour le thème mathématique et la méthode de travail qu'elle développe. Par ailleurs, elle peut être facilement adaptée en vue d'un enseignement de cette notion à l'école élémentaire. Les personnes qui l'ont choisie précisent qu'elles l'ont utilisée entièrement ou en partie. Elle a été jugée plutôt très satisfaisante parce qu'elle présente une bonne adéquation aux objectifs et que son scénario est précis et adapté au public auquel on s'adresse.

• La ***"Catégorisation de problèmes additifs"*** a été utilisée plusieurs fois par 7 personnes. Elle est jugée comme étant très satisfaisante.

• ***"Assemblages de triangles équilatéraux"*** a été mise en oeuvre plusieurs fois par 6 personnes. Elle a été retenue surtout pour le thème mathématique qu'elle permet d'aborder et pour la méthode qu'elle développe. Elle peut être aisément transférée à l'école élémentaire.

• ***"Interactions espace-plan"*** a été choisie par 6 personnes ; elles reconnaissent avoir été intéressées par le thème mathématique et dans certains cas n'avoir repris que des éléments du scénario. Elle a été jugée satisfaisante.

• ***"La boîte du pâtissier"*** a été exploitée plusieurs fois par 6 personnes. Ses aspects mathématiques et didactiques ont été jugés intéressants.

• ***"Les transvasements"*** est une activité qui a été mise en oeuvre par 5 personnes.

• Les situations : ***"La boîte cadeau"*** **et** ***"Analyse d'une préparation sur les écritures multiplicatives au CE1"*** ont chacune été exploitées par 4 personnes.

11 personnes ont exprimé leur préférence pour des situations plutôt ponctuelles et 3 autres pour des progressions complètes.

Nous pouvons conclure en soulignant que les documents les plus utilisés sont soit des situations courtes, limitées dans le temps et qui présentent un scénario précis, détaillé et fiable, soit des cours assez complets sur un thème mathématique, en particulier lorsquíils contiennent certaines situations aisément transférables à l'école élémentaire.

Plusieurs raisons peuvent être avancées pour expliquer que certaines situations ont été peu retenues ou n'ont pas été exploitées du tout :
- elles s'adressent davantage à un public ciblé,
- elles sont plus difficiles à gérer,
- elles ne sont pas suivies d'éléments de corrigé suffisants,
- le thème développé a déjà été abordé à l'occasion d'une autre activité.

Titre : Quelques remarques à propos de la situation "la boîte du pâtissier"
Auteur : Denis Butlen, Marie-Lise Peltier
Date : mai 1993
Type : reproductibilité d'une situation (document publié dans les actes de Cahors)
Résumé : cette contribution analyse certains écarts constatés dans la mise en oeuvre de la situation intitulée : la *"boîte du pâtissier"*, propose quelques explications possibles et un scénario plus précis de la situation.
Mots-clés : Actes de Cahors, dialectique outil-objet, jeux de cadres, reproductibilité, analyse a priori, analyse a posteriori, algébrisation, fonctions numériques, pliage, jeux de cadres...

QUELQUES REMARQUES À PROPOS DE LA SITUATION "LA BOÎTE DU PÂTISSIER"

Cette situation décrite dans la brochure de Cahors a été souvent utilisée et a donné lieu à des documents vidéos et des productions d'étudiants qui nous ont permis de faire une analyse a postériori et donc à faire des propositions prenant en compte d'autres choix.

Nous avons analysé différentes mises en oeuvre de cette activité et proposé quelques éléments qui peuvent expliquer des écarts constatés dans les productions des étudiants.

Différences constatées dans les mises en oeuvre et les objectifs poursuivis

Nous avons constaté plusieurs utilisations différentes de cette situation en formation, ou plus exactement plusieurs scénarios privilégiant certains objectifs plutôt que d'autres.

Des objectifs différents

Les différences d'objectifs portent plutôt sur la complexité des objets mathématiques étudiés : modélisation algébrique de la situation débouchant sur une introduction de fonctions numériques (deux ou trois variables) ou bien modélisation algébrique débouchant sur une étude de fonctions linéaires (ou de leurs composées).

Dans tous les cas, un des buts visés est de redonner du sens à certaines expressions et outils algébriques.

Rappelons certains objectifs didactiques de la situation : mettre en évidence quelques concepts de didactique (situation didactique, dialectique outil-objet, variable didactique, dévolution...). Dans tous les scénari, ces objectifs sont visés plus ou moins explicitement. L'activité s'appuie sur des changements de cadres, elle permet au formateur de dégager ou de faire dégager , en s'appuyant sur les actions des étudiants, l'aspect outil de certaines notions, mobilisées par certains, pour résoudre le problème. C'est l'occasion ainsi de redonner du sens au calcul algébrique ou à la résolution d'équations. Notons que nous avons là une double institutionnalisation (mathématique : calcul algébrique, équation, inconnue, proportionnalité et didactique : jeux de cadres...).

Des scénarios différents

Deux mises en oeuvre différentes de cette situation ont fait l'objet d'un enregistrement vidéo et de plusieurs enregistrements phonos afin de disposer d'informations importantes sur leur déroulement. L'une d'elle conduit l'enseignant formateur à penser que les objectifs visés n'ont pas été atteints ; elle a donc fait l'objet d'une analyse a postériori. On constate qu'en fait le scénario suivi différe de celui proposé dans la brochure de Cahors sur plusieurs points :

- les questions proposées sont moins précises, en particulier les questions permettant une généralisation des résultats sont énoncées oralement dans chaque groupe, à partir d'une observation des productions :
- les phases de l'activité ne se présentent pas exactement dans le même ordre
- les phases de mise en commun ne sont pas aussi nombreuses
- l'étude de cette situation précède celle de "Format A4" (voir les actes de Pau) et se situe

dans une problématique plus large (algèbre, fonctions numériques et nombres irrationnels).

Ces différences ont évidemment des effets sur le déroulement de l'activité, sur le scénario prévu, sur les prises de décisions et les interventions de l'enseignant-formateur.

Principale différence relevée dans les productions des étudiants

Nous avons constaté de grandes différences entre les productions de certains groupes d'étudiants.

Les étudiants travaillent dans les cadres suivants : cadre physique, cadre géométrique (sans mesure), cadre géométrique (avec mesure), cadre algébrique, cadre numérique...

En particulier, les cadres physiques et géométriques permettent une validation ou une initialisation des calculs effectués soit dans le cadre algébrique, soit dans le cadre numérique.

Toutefois un certain nombre d'étudiants n'arrivent pas à produire d'équations ou d'écritures algébriques et se limitent à vérifier des hypothèses géométriques à l'aide de calculs numériques ou en construisant effectivement la boîte correspondante. En fait ces étudiants ne mobilisent jamais, ou presque, d'outils algébriques ou fonctionnels, tout au plus amorcent-ils des tableaux de nombres.

De ce fait, il n'est pas toujours possible de redonner du sens au calcul algébrique car le nombre des étudiants résistant à l'utilisation d'outils algébriques et de façon générale à toute formalisation mathématique, est parfois assez important pour limiter l'impact de l'institutionnalisation prévue.

En fait une analyse a priori des deux scénari proposés (celui figurant dans la brochure de Cahors et celui adopté par le formateur dans la séquence étudiée) montre que toutes les questions peuvent être résolues en ne mobilisant que des notions géométriques et numériques, le cadre algébrique (résolution d'équations ou formules permettant de décrire les fonctions sous-jacentes) ne s'imposant pas.

Cette analyse nous a amené à repenser le rôle de l'enseignant-formateur dans cette situation et à préciser ces interventions. En particulier, nous pensons qu'il doit prévoir et prendre en charge le fait que des étudiants peuvent résister de façon durable à une algébrisation du problème. La comparaison des différentes procédures mises en oeuvre (même à partir d'un point de vue "économique") et l'institutionnalisation des outils mathématiques mobilisés ne suffisent pas toujours.

Quelques remarques

Deux questions sur ce type d'activité

Cela nous amène à nous poser deux questions à propos des situations de formation construites sur un scénario proche de ceux proposés pour un apprentissage mathématique, à savoir :

- Jusqu'où un étudiant peut-il reconstruire seul et rapidement à l'aide d'une telle situation des connaissances déjà "visitées", voire redonner du sens à certaines notions mathématiques ?

- Comment prendre en compte dans le scénario l'éventuelle résistance de certains étudiants à l'utilisation d'outils algébriques ? Plus précisément, quelles sont les interventions que doit faire l'enseignant pour optimiser certains changements de cadres, notamment ceux qui font intervenir un cadre algébrique ?

Quelques réflexions sur la reproductibilité de certaines situations en formation des PE

On ne peut faire fonctionner strictement le principe de reproductibilité car le rapport aux mathématiques des futurs maîtres et des élèves du primaire n'est pas le même. Mais on peut le faire fonctionner partiellement, en lui associant un enseignement de didactique.

Il faut toutefois souligner une difficulté dans la gestion de situations très proches de celles proposées à des élèves du primaire. Les étudiants peuvent ne mobiliser que des procédures pouvant être mises en oeuvre par des élèves de l'école élémentaire et dans notre cas, à refuser une algébrisation du problème.

Enfin, il nous paraît indispensable de préciser que ces activités basées sur des jeux de cadres et sur le réinvestissement ou la mobilisation de connaissances anciennes, laissent forcément une marge de manoeuvre assez grande à l'enseignant. Il doit en fonction de ses prévisions mais aussi en fonction des procédures apparaissant ou non, prendre des décisions, intervenir dans tel ou tel sens, institutionnaliser localement certaines notions...

Ce sont là des caractéristiques des situations basées sur la dialectique outil-objet déjà maintes fois soulignées par Régine Douady ; elles semblent amplifiées en formation.. Nous renvoyons à ce sujet le lecteur à la lecture de sa conférence, dans cet ouvrage.

Certaines situations semblent plus reproductibles que d'autres (voir l'article précédent). Voici pour conclure ces remarques, quelques facteurs susceptibles de diminuer leur fiabilité, leur "robustesse" :

- nature des notions mathématiques mises en jeu : l'algèbre ou les fonctions numériques du fait de leur caractère unificateur ne se prêtent peut-être pas facilement à une mobilisation en tant qu'outil
- degré de résistance des étudiants à mobiliser certaines notions, en particulier degré de familiarité avec le cadre qui détermine le succès de la recherche du point de vue de l'enseignant
- décalage entre certains outils dont la mobilisation est visée et un scénario si proche de l'école élémentaire que la mobilisation de ces outils n'est pas indispensable
- recours trop aisé aux cadres physique (pliage, par exemple) ou numérique.
- nature des notions didactiques visées : il semble plus facile de traiter et de reproduire des situations portant sur la typologie des situations que sur des notions plus larges comme la dialectique outil-objet ou le contrat didactique.
- amplitude des domaines de variation de certaines variables de la situation.

Nouveau scénario (voir feuilles ci-jointes)

Cela nous a amenés à reprendre certaines questions afin d'accroître le nombre d'étudiants s'engageant dans des calculs algébriques.

Nous sommes toutefois conscients que cela ne résout pas fondamentalement le problème. Ces modifications permettent tout au plus d'optimiser certains passages d'un cadre à l'autre ; elles ne les imposent pas.

Titre : La boîte du pâtissier, nouveau scénario

Résumé : à partir d'une activité de fabrication par pliage d'une boîte parallélépipédique, il est possible de pointer les concepts didactiques de situation, dialectique outil-objet, variable didactique.

Origine : brochure *Aides Pédagogiques CM Situations Problèmes*, page 103 (A.P.M.E.P. 1988).

Temps prévu : une séance de trois heures.

LA BOÎTE DU PÂTISSIER (NOUVEAU SCÉNARIO)

OBJECTIFS

Objectifs didactiques

1 - Mettre en évidence quelques concepts de didactique (situation didactique, dialectique outil-objet, variable didactique, dévolution...)

2 - Analyser des processus de recherche, montrer l'importance
- -- du cheminement personnel
- -- de la confrontation
- -- de la validation interne comme moteur de la recherche (le fait de pouvoir évaluer soi-même son travail permet de continuer si nécessaire la recherche sans nouvelle intervention du maître).

Objectifs mathématiques

1 - Revenir sur le vocabulaire géométrique et sur l'étude d'objets géométriques du plan et de l'espace.

2 - Modéliser une situation.

ACTIVITÉ

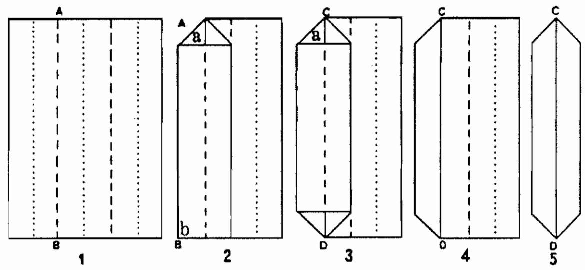
Les étudiants résolvent le problème mathématique, puis visionnent le document vidéo relatant la résolution dans une classe de CM. Cette cassette est disponible à

I.U.F.M. de Haute-Normandie
Département audio-visuel
B.P. 18
76131 Mont-Saint-Aignan Cedex.

La séquence est menée avec des objectifs mathématiques pour que les étudiants vivent la situation côté élève et comparent leurs réactions et leurs procédures de résolution à celles d'élèves de CM.

Phase 0

Apprentissage du mode de construction de la boîte



Consigne

"Construisez une boîte à partir d'une feuille rectangulaire de format A4 en suivant les instructions de pliage (P) suivantes :

1) faites apparaître les cinq plis (équidistants) indiqués;

2) pliez suivant AB et réalisez les pliages du coin (a);

3) réalisez dans le coin (b) les mêmes pliages qu'en (a);

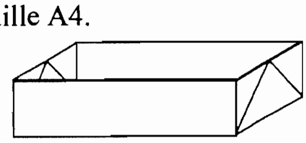
4) pliez selon le pli en creux CD;

5) effectuez les mêmes actions dans la partie droite de la feuille : vous obtenez la figure 5;

6) il reste à ouvrir la boîte et à marquer les plis des arêtes."

Remarque

On obtient deux boîtes de formes différentes suivant que l'on plie sur la longueur ou sur la largeur de la feuille A4.



Phase 1
Les boîtes à fond carré

Organisation

Par groupes de 3 ou 4 après une indispensable recherche individuelle de 5 minutes.

Consigne 1

"Construisez en suivant les instructions (P) une boîte à fond carré, puis rédigez une affiche relatant la recherche, la méthode retenue, les conclusions que vous en tirez en précisant les dimensions de la feuille qui vous sert au pliage. Il est important que vous notiez tous les essais, même ceux qui n'ont pas abouti."

Procédures observées chez les étudiants

- Faire le pliage à partir d'une feuille carrée;
- Mesurer les dimensions de la boîte presque carrée obtenue en phase 0 et enlever la différence sur la longueur, puis sur la largeur.
- Déplier la boîte construite dans la phase 0 et étudier les plis.
- Construire un carré au centre d'une feuille et le compléter par les bandes nécessaires à la construction par pliage.
- Dessiner sur le fond d'une boîte déjà construite un carré, déplier la boîte et construire par translation les bandes nécessaires pour la construction.

Remarques

- Les procédures sont analogues à celles observées chez des enfants de CM2 confrontés à la consigne.
- Une consigne supplémentaire ("construisez la boîte à fond carré la plus grande possible à partir de la feuille A4") peut être proposée aux groupes ayant terminé la première tâche plus tôt **(gestion du temps).**

Mise en commun

Les affiches sont exposées devant la classe entière et commentées par leurs auteurs. Le professeur laisse exposer les groupes, sans prendre position; il n'y a donc pas nécessairement de conclusion générale du type : "pour obtenir une boîte à fond carré de côté x, il faut partir d'une feuille de dimensions 2x, 3x."

Consigne 2

"Construisez une boîte dont le fond est un carré de 6 cm de côté, donnez les dimensions de la feuille servant au pliage en précisant celle suivant laquelle vous pliez. Proposez une généralisation : quelles sont les dimensions de la feuille permettant de construire une boîte dont le fond est un carré de côté x ?"

Remarque

Une consigne supplémentaire pour la **gestion du temps** peut être *"construisez des boîtes à fond carré gigognes"*

Synthèse

Cette synthèse permet de généraliser les procédures permettant une bonne construction et d'institutionnaliser "pour construire une boîte à fond carré de côté x, on peut partir d'une feuille rectangulaire de dimensions $2x$ et $3x$ et plier selon la longueur".

Phase 2
Conditions d'existence des boîtes

Il s'agit ici de relancer la recherche sur la liaison entre les dimensions de la feuille de départ et celles de la boîte obtenue.

Consigne 1

"De quelle feuille peut-on partir pour construire une boîte de fond 6 cm sur 13 cm?"

Consigne 2

"Quelles sont les dimensions de la boîte obtenue en pliant une feuille 15×32 suivant la largeur ?"

Consigne 3

"Élaborez un tableau de valeurs numériques correspondant aux différentes boîtes construites pendant la recherche de la phase 1. Soulignez la dimension selon laquelle vous pliez."

Rectangle de départ	Dimensions du fond de la boîte	

Consigne 4

"Construisez une boîte de fond 8 cm sur 14 cm et de hauteur 5 cm."

Synthèse

- Le tableau ci-dessous se trouve complété avec une nouvelle colonne, la hauteur de la boîte.
- On formule une condition sur la hauteur pour qu'on puisse construire une boîte de fond de dimensions x et y et de hauteur h : "la hauteur de la boîte est toujours la moitié de l'une des dimensions du fond".

Phase 3

Extension du champ numérique, vers une modélisation algébrique

Consigne 1

(travail par groupe)

"Proposez une stratégie pour pouvoir répondre rapidement aux deux types de questions suivantes :

(1) à partir de la donnée des dimensions d'une feuille rectangulaire et de la dimension selon laquelle on plie, dites si l'on peut construire une boîte et donner les dimensions de la boîte obtenue,

(2) à partir des dimensions d'une boîte réalisée, donnez les dimensions de la feuille rectangulaire utilisée et la dimension selon laquelle on plie.

Rédigez un message expliquant (ou présentant) votre méthode."

Nous pouvons envisagez le déroulement suivant :

• Donner une première série de questions, par exemple :

(1) "On dispose d'une feuille de dimension 12 et 17 cm, on plie suivant la largeur, obtient-on une boîte ? Si oui, quelles sont ses dimensions ? On plie suivant la longueur, obtient-on une boîte ? Si oui, quelles sont ses dimensions ?

(2) Trouvez les dimensions de la feuille permettant de construire une boîte de dimensions 12×15 et de hauteur 6 cm"

• Faire échanger les messages groupe à groupe.

• Redonner une nouvelle série de questions des types (1) et (2). Terminer par une question du type : *"à partir d'une feuille f, on obtient une boîte b, on prend une feuille F obtenue en doublant une des dimensions de f, on construit une boîte B ; donnez les dimensions possibles de la boîte B en fonction de celles de la boîte b".*

• Laisser les groupes discuter deux à deux pour mettre au point leur message.

Synthèse

• Afficher les différents messages et les réponses aux questions qui sont posées.

• Comparer les procédures du point de vue de leur pertinence, de leur efficacité, de leur lisibilité, du cadre dans lequel elles sont rédigées (tableaux de nombres, écritures littérales, écritures fonctionnelles, textes en français...).

• Conclure :

1 - Si on connaît les dimensions de la boîte (fond x et y, hauteur x/2), on obtient les dimensions de la feuille par la fonction :

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to (3x, x+y)$$

2 - Si on connaît les dimensions de la feuille x et y que l'on plie suivant x_3:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x , y) \to (\frac{x}{3}, y - \frac{x}{3}, \frac{x}{6})$$

Cette phase peut éventuellement être prolongée par la recherche suivante.

Consigne 2

"Recherchez les conditions sur les dimensions x et y de la feuille pour que l'on puisse obtenir une boîte en la pliant suivant x."

Synthèse

- Si x < y, le pliage est toujours possible.

- Si x > y, le pliage n'est possible que si x < 3y (lien avec l'ensemble de définition de la fonction g).

Phase 4
(facultative) : relance vers des consignes avec contrainte sur le volume.

Exemples de consignes

Quelles feuilles choisir pour construire :

- *une boîte à fond carré contenant exactement 1/2 litre?*
- *une boîte cubique contenant exactement 1 litre?*
- *une boîte ayant un volume de 160 cm³ ?"*

Phase 5
Visionnement du film "la boîte du pâtissier"

Il s'agit dans cette phase d'étudier les procédures des élèves de CM et de mettre en évidence le rôle de l'erreur.

ANALYSE DE L'ACTIVITÉ

Analyse mathématique

Cette situation permet :

- de faire des rappels de géométrie, notamment sur le vocabulaire;
- d'élaborer un codage fonctionnel, utile comme outil de prévision : les fonctions f et g ont permis la généralisation.
- de travailler sur le raisonnement : les étudiants et les élèves de CM émettent des hypothèses, valident ou invalident ces hypothèses, mettent en évidence des erreurs de raisonnement du type : *"si je pars d'un rectangle, j'obtiens une boîte à fond rectangulaire, donc si je pars d'un carré, j'obtiens une boîte à fond carré."*

Analyse didactique

1 - Description de la situation

Il est possible de décrire les différents moments importants de la situation :

- la phase de dévolution,
- le type de consignes : courtes mais prétexte à des recherches poussées,
- la tâche de l'élève : production d'un objet soumis à des contraintes, possibilité de validation interne,
- le rôle de l'erreur : elle apparaît ici très positive car elle permet d'avancer soit en éliminant les hypothèses invalides, soit en les modifiant pour les rendre valides;
- l'institutionnalisation possible à plusieurs moments :
  - sur des points méthodologiques,
  - sur le raisonnement,
  - sur les notions mathématiques.

2 - Quelques concepts de didactique

Conditions pour qu'un problème puisse être source d'apprentissage (mises en avant dans cette situation) :

- l'énoncé a du sens pour les élèves;
- le problème est consistant (la réponse n'est pas évident);
- l'élève comprend ce qu'est une réponse au problème;
- il peut s'engager, dès la fin de la consigne, dans des procédures de résolution;
- il peut en contrôler lui-même les effets.

Phases d'une situation didactique

Il est possible de pointer dans cette situation les phases

- d'action,
- de validation,
- de formulation et de communication,
- d'institutionnalisation,
- de réinvestissement.

Dévolution

La phase 0 permet à l'élève d'apprendre le procédé de construction des boîtes et donc d'être libéré des difficultés matérielles pour la suite.

Dans la phase 1, réaliser effectivement l'objet et vérifier si la contrainte est obtenue motivent sa recherche.

Dialectique outil-objet

Elle fonctionne ici sur le savoir savant "fonction de $R^n \to R^p$".

En effet, ces fonctions interviennent comme outils implicites dans les phases 1 et 2. La phase 3 permet d'expliciter cet outil, de l'utiliser pour prévoir d'autres constructions, pour anticiper l'action. Une phase supplémentaire permettrait d'étudier les fonctions de R^n dans R^p en tant qu'objet, mais ceci est en dehors des objectifs de la formation mathématique des instituteurs.

Le fonctionnement **outil-objet** de la notion de fonction dans cette situation permet d'illustrer l'esprit des mathématiques :

- d'abord une **résolution locale**, suffisante dans un premier temps,
- puis une nécessité de **généralisation**, comme outil de prévision
- enfin la puissance de la **modélisation** pour anticiper, pour résoudre en une seule fois une famille de problèmes isomorphes.

Les changements de cadres : nous avons constaté que certains étudiants ne mobilisaient jamais d'outils algébriques, ils pouvaient rester dans des cadres numérique ou géométriques. la situation n'impose pas forcément ces changements de cadres, ils doivent être sollicités par le professeur.

Les changements de cadres (passage d'un cadre géométrique à un cadre algébrique) peuvent être à la charge du professeur, ce sont les consignes suivantes qui peuvent les provoquer : phase 1 consigne 2 généralisation, phase 3 consigne 1 nécessité de rapidité et de communication.

Variables didactiques

Le professeur explicite les variables qu'il a utilisées et ses choix.

- Le fait d'imposer ou non la hauteur de la boîte à construire (phases 2, consignes 1 et 2) influe sur la manière dont les étudiants prennent en compte les résultats antérieurs.

- Le fait de demander une boîte constructible ou non dans une feuille A4 (phase 3, consigne 1). En effet si la boîte demandée ne peut être effectivement construite, les procédures de constat et de tâtonnement se trouvent bloquées et les étudiants passent à des procédures de prévision, donc cherchent à modéliser la situation.

- Il aurait aussi été possible de ne pas imposer le nombre de lignes de pliage dans le mode de fabrication de la boîte (par exemple, plier en 10 au lieu de plier en 6); ce nombre est donc une variable didactique, non prise en compte dans cette séquence, parce qu'elle peut induire une recherche du type de pliage à faire, au lieu d'une étude des dimensions de la feuille à plier.

Contrat

On fait prendre conscience aux étudiants qu'ils ont fait fonctionner les règles d'un contrat implicite, par exemple :

- un problème posé à l'école a toujours une solution (cf phase 2, consigne 2),
- on ne rédige que "la bonne solution" (cf phase 1, consigne 1).

D'où la nécessité :

- d'être attentif et vigilant aux effets de contrat,
- d'expliciter le plus souvent possible le contrat, notamment par le choix de consignes appropriées.

Titre : Exemple d'utilisation de documents
Auteur : Pascale MASSELOT (IUFM de Créteil, centre départemental de Melun)
Date : Mai 1993
Type : Compte-rendu et analyse d'utilisation de certains documents des actes de Cahors et des actes du colloque de Rouen, résumé d'un mémoire de D.E.A de didactique des mathématiques
Résumé : Il s'agit d'étudier si un cours spécifique de didactique des mathématiques, comportant un enseignement de la notion de variable didactique, permet aux futurs professeurs des écoles de faire une analyse plus précise de documents de type pédagogique (manuels, articles, comptes-rendus ou préparations de séquences...).
Mots-clés : variable didactique, reproductibilité, analyse a priori, écritures multiplicatives, théories des situations, jeux de cadres...

EXEMPLE D'UTILISATION DE DOCUMENTS

1- Introduction

Ce texte relate comment certains documents ont été utilisés dans le cadre d'une recherche sur la formation en didactique des mathématiques de futurs professeurs des écoles. Nous renvoyons le lecteur pour une description complète au mémoire de recherche soutenu dans le cadre du DEA de didactique des disciplines à Paris VII.

Les travaux sur la formation des instituteurs (M. Pézard et D. Butlen [3]) ont montré que la difficulté de cet enseignement tient à une double finalité à la fois mathématique et didactique. Prendre en compte ce double point de vue amène à se poser la question :

« Quels contenus mathématiques enseigner aux futurs professeurs des écoles et comment les enseigner ? »

On ne peut faire fonctionner strictement le principe de reproductibilité car le rapport au contenu des futurs maîtres et des élèves du primaire n'est pas le même. Mais on peut le faire fonctionner partiellement, en lui associant un enseignement de didactique.

Cela amène à la deuxième question :

« Quels contenus didactiques enseigner aux futurs professeurs des écoles ? Comment ? Quel est l'impact d'un tel enseignement sur la formation et quels moyens avons-nous pour l'évaluer ? »

Cet article essaie d'apporter de modestes éléments de réponse à ces questions

2- Hypothèses de travail et dispositif expérimental

Les remarques précédentes nous amènent à penser qu'il ne suffit pas d'utiliser implicitement des résultats, des notions de la didactique des mathématiques à propos de chaque thème mathématique.

Notre hypothèse de travail est donc qu'il faut faire un cours spécifique présentant certains outils construits par des chercheurs.

Cette étude de l'impact d'un cours spécifique de didactique se limite ici à la seule notion de variable didactique, associée à celle d'analyse a priori.

Cet enseignement s'adresse à des étudiants en première année de formation. Il vise deux objectifs :

- mathématique : mobiliser, compléter et réorganiser des connaissances mathématiques des étudiants (arithmétiques et géométriques)
- didactique : présenter différents types de variables didactiques.

Afin d'évaluer l'impact d'un tel enseignement, nous avons proposé un questionnaire à cinq groupes d'étudiants de première année d'IUFM. Seuls deux de ces groupes (n°1 et 2) y répondent après avoir suivi l'enseignement décrit ci-dessous, les autres groupes n'ont pas étudié cette notion de façon particulière ; celle-ci leur a été présentée de façon implicite (groupes n°3 et 5) ou à l'occasion de l'étude d'une notion mathématique (n°4).

3- Choix du cours : "Variables didactiques - Analyse a priori"

a) Objectifs

- Faire comprendre qu'il existe des régularités dans le déroulement d'une séquence et que les productions des élèves découlent de choix pertinents du maître effectués avant et non pendant la réalisation
- Rendre capable de dégager parmi les variables d'une situation, celles qui sont didactiques

b) Plan du cours

- **"Concertum"** (H. Péault [8]) : mise en situation, étude de la situation vécue

- **"La fleur"** (ML. Peltier [9]) : mise en situation, quelques rappels de géométrie, étude de la situation vécue

- **Institutionnalisation - Décontextualisation de la notion de variable didactique** : retour sur les choix faits par l'enseignant dans les deux situations précédentes, exposé construit à partir d'un article de R. Douady [10]

- **"Le jeu de l'autobus"** (D. Butlen - M. Pezard [12]) : analyse mathématique, construction d'un scénario

c) Choix des situations

Ces situations sont toutes inspirées de documents de la COPIRELEM (actes de colloques ou du stage de Cahors).

Pour les deux premières activités, les étudiants sont d'abord mis en situation pour ensuite analyser la situation vécue : regard sur le comportement de l'enseignant et observation a posteriori des productions.

Les scénarios mis en oeuvre sont très proches de ceux proposés par les auteurs.

« Concertum »

Il s'agit d'un jeu proposé aux étudiants dont la règle est la suivante :

"On a n équipes et x joueurs. Chaque joueur dispose de 10 papiers comportant les nombres de 0 à 9. L'enseignant donne un nombre m compris entre 0 et 9x. Chaque joueur de l'équipe lève un nombre et la somme des nombres par équipe doit être la plus proche de m".

Les étudiants doivent trouver une stratégie gagnante.

Il y a deux stratégies gagnantes :

- *procédure n°1* : on divise le nombre m par 9 ($m = 9b + r$) ; les b premiers joueurs lèvent le nombre 9, le joueur suivant lève le nombre r et les autres joueurs lèvent le nombre 0
- *procédure n°2* : on divise le nombre m par le nombre de joueurs ($m = b'x + r'$) ; les r' premiers joueurs rajoutent 1 au nombre b' et les autres joueurs lèvent le nombre b'.

Le déroulement adopté est le suivant :

- *phase 1 :* les étudiants jouent deux fois, par équipes de 4, sans concertation préalable
- *phase 2 :* deux jeux après concertation et rédaction d'une stratégie
- *phase 3* : trois jeux, par équipes de 7, avec concertation préalable et nouvelle rédaction ; et deux jeux après une troisième rédaction
- *phase 4* : jeu par classe entière
- *phase 5* : élaboration collective d'une stratégie pour une équipe dont le nombre de joueurs n'est pas fixé (donné au moment du jeu)

Dans chaque phase, le nombre de joueurs par équipe, le nombre à approcher et les scores par équipe sont inscrits au tableau. Les rédactions de stratégies sont collectées à chaque étape.

Les variables de la situation sont ici des variables numériques. Parmi celles-ci, on dégage celles qui sont didactiques ; notamment le nombre de joueurs de l'équipe : si celui-ci est petit, la procédure n°2 est privilégiée (il est plus facile de diviser par 4, 6, 7 ...) ; si celui-ci est élevé ou est un nombre premier (23, 24...), la procédure n°1 est privilégiée (sauf pour des nombres comme 20, 25, 30 ...).

Les étudiants doivent contrôler la validité et formaliser chacune des stratégies. Il peuvent également s'apercevoir que dans ce jeu le maître, par ses décisions, ses choix, induit la stratégie.

L'activité permet de pratiquer une double institutionnalisation :

- d'une part la notion de variable didactique
- d'autre part certaines notions mathématiques liées à la division (en particulier définition de la division euclidienne)

« La fleur »

Les étudiants sont répartis dans trois salles. Dans chacune des salles, un dessin en grand format est affiché au tableau. Il s'agit du même dessin (la fleur) sur des supports différents (voir actes du colloque de Paris de la COPIRELEM, 1990, p. 91 à 99). Les étudiants doivent reproduire le dessin sur une feuille blanche avec les instruments usuels de géométrie. Ils réalisent chacun leur propre dessin, les déplacements au tableau sont autorisés ; ils doivent ensuite rédiger un message (programme de construction) permettant à un autre groupe de construire le dessin sans l'avoir vu.

On procède ensuite à l'analyse de la situation vécue et au repérage de l'influence éventuelle du support sur les productions écrites (reproduction du dessin et rédaction du programme de construction).

Cette activité a aussi un objectif mathématique : préciser certaines "techniques" de construction et mettre au point le vocabulaire de géométrie.

Les méthodes utilisées pour la construction :

- *méthode n° 1* : construction d'un cercle sur lequel on placera les huit centres des arcs de cercles (division en huit arcs isométriques à l'aide du tracé de deux diamètres perpendiculaires et des bissectrices des secteurs obtenus ...)
- *méthode n° 2* : construction du cercle circonscrit (passant par les extrémités des grands pétales)...
- *méthode n° 3 :* construction de deux carrés concentriques déduits par rotation (construction du cercle circonscrit au premier carré et prolongement des médianes de ce carré ; ou prolongement des médianes du premier carré et report au compas à partir du centre du carré de longueurs égales à la demi-diagonale du premier carré...)

Cette deuxième activité a notamment permis de montrer que les variables didactiques ne sont pas uniquement des variables numériques, mais ici la nature du support de la figure proposée (cf 4 - b)).

« Jeu de l'autobus »

Il s'agit d'une activité de calcul mental conçue à partir de la situation suivante :

« Dans un autobus, il y a n voyageurs ; à un arrêt, il en monte a et il en descend b. Combien y a-t-il de voyageurs quand l'autobus repart ? »

L'analyse a priori du problème met en évidence les deux façons de le résoudre :

- *procédure n°1* : « état - transformation » (classification des problèmes additifs de G. Vergnaud)

n+a = n' et n'- b = n"

- *procédure n°2* : « composition de transformations », calcul de a-b puis de n"=n+(a-b)

Les variables sont ici : le type de calcul (écrit ou mental), la taille des nombres, la donnée ou non de la valeur de l'état initial, la présence de questions intermédiaires (plus, moins, autant, combien ?)

On demande aux étudiants de construire un scénario de séquence à mener avec des enfants (de niveau fin CE2, début CM1) dont l'objectif serait de faire en sorte qu'en un temps limité, une grande partie de la classe utilise la deuxième procédure.

On peut noter trois types de scénario :

- familiarisation avec le problème sur des "petits nombres" - confrontation des procédures - saut qualitatif dans les variables numériques : jeu de l'autobus avec de "grands nombres".
- jeu de l'autobus avec des grands nombres - jeu de l'autobus avec des petits nombres - retour au jeu avec des grands nombres
- jeu de l'autobus avec des données portant uniquement sur le nombre de voyageurs descendant et montant (on n'indique pas l'état initial, ni l'état final dans la consigne) puis jeu de l'autobus avec "petits nombres" puis avec "grands nombres"

Cette troisième activité est une première situation de transfert. Elle a lieu après la phase d'institutionnalisation.

4- Réponses et stratégies des étudiants - Régularités

__a) « Concertum »__

Dans le groupe 1, la procédure n°1 avait été suggérée par deux ou trois personnes qui n'ont pas réussi à se faire entendre, et ce n'est que dans la phase 5 (nombre de joueurs non fourni au départ) qu'elle a pu émerger.

L'analyse des messages rédigés à chaque étape du jeu, ainsi que l'analyse a posteriori des stratégies explicitées par les étudiants montrent trois procédures :

- m divisé par x
- m divisé par (x-1)
- m divisé par 9

Des difficultés apparaissent au niveau de la formalisation (passage de l'exemple au cas général et contrôle de l'éventuelle validité de la procédure).

b) « La fleur »

Il apparaît une régularité dans les trois sous-groupes: chacun commence par dessiner une "rosace à 6 branches" (certains même continuent avec 12 ...) .

Pour la partie « activité de reproduction » :

- dans le premier sous-groupe (dessin présenté sur papier blanc), c'est la méthode n°1 qui est apparue et ceci assez rapidement
- dans le deuxième sous-groupe (dessin présenté avec couleurs sur support blanc), les étudiants ont eu beaucoup de difficultés (méthode n°2 ; dessin de quatre pétales (tracé du carré) et blocage ; un des étudiants pense que l'on dessine d'abord les grands pétales puis les petits ; dessin de la rosace à 6 branches, puis 12 ...) et envisagent de renoncer ; des aides leur sont alors fournies
- dans le troisième sous-groupe (dessin présenté sur papier quadrillé), les carrés non apparents a priori sont apparus (méthode n°3).

L'analyse des messages montre que ce sont surtout les étudiants du troisième sous-groupe qui ont rédigé des programmes de construction en nommant les différents points-repères par des lettres. Les étudiants rédigent un programme de construction correspondant à leur propre façon de construire la figure ; le fait d'avoir reproduit la figure ne modifie pas l'observation.

Cette analyse fait apparaître la nécessité de repréciser certains termes de géométrie (arc de cercle, bissectrice, médiatrice, médiane, rotation...) et la réalisation de petites constructions à la règle et au compas (tracé de la médiatrice d'un segment, de la bissectrice d'un secteur angulaire, du carré obtenu par rotation de 45°...).

5- Choix du questionnaire

Il s'agit de l'analyse d'extraits d'une préparation de séquence de classe portant sur l'introduction au cours élémentaire première année des écritures multiplicatives (Analyse de préparation sur l'introduction des écritures multiplicatives au CE1 - D. Butlen - M. Pezard [11])

Les différents étudiants ont tous répondu au questionnaire après avoir bénéficié d'une remise à jour sur la notion d'écriture multiplicative lors d'un cours dispensé par leurs formateurs respectifs dans les semaines précédentes.

<u>Questionnaire proposé</u> :
1) déterminer les objectifs de la séquence.
2) quelle(s) définition(s) de l'écriture multiplicative l'auteur privilégie-t-il ? pourquoi ?
3) quels sont les éléments de la situation sur lesquels l'enseignant peut agir ? Parmi ceux-ci, quels sont ceux qui peuvent changer les comportements et les performances des élèves ?
4) commenter les différentes étapes de la séquence, pour chacune d'elles, analyser le rôle du maître et les comportements des élèves

Ce questionnaire constitue également une préparation au concours. Dans cette étude, nous n'analysons que les réponses à la troisième question, à savoir les réponses faisant intervenir explicitement ou implicitement la notion de variable didactique.

6- Analyse des réponses au questionnaire

Notons que la réponse à cette question nécessite de la part des étudiants un transfert, ce n'est pas une simple application du cours.

a) Liste des variables de la situation

Nous avons adopté ici une définition assez restreinte de la notion de variable, il s'agit d'éléments de la situation <u>fixés a priori</u> par l'enseignant.

● On peut, d'une part, considérer les <u>variables numériques</u> :

N1 : taille des grilles du groupe émetteur

Il faut prévoir une grille faisant intervenir des nombres assez grands ($a > 6$ et $b > 11$) afin de placer les élèves dans une situation où :

- les techniques primitives de dénombrement ("un à un" ou "paquet par paquet") sont trop laborieuses

- la perception globale, de visu de ce nombre devient très difficile

- l'écriture a x b devient plus commode car plus rapide, plus économique pour décrire spatialement le nombre d'éléments de la collection.

Il faut également éviter les valeurs 5 ou 10 pour a et b ; ou le cas particulier a = b ...

Pour le choix des grilles du groupe récepteur, on distinguera :

N2 : des grilles différentes mais dont les dimensions restent assez proches
Pour une grille 7 x 12, il faut prendre : 8 x 12 ; 7 x 13 ; 7 x 11 ; 6 x 12 ; les deux dernières dimensions servant à signaler l'erreur classique : "oubli du carré du coin".

N3 : des grilles ayant même nombre de cases que la grille de l'émetteur mais de dimensions différentes
Pour une grille 7 x 12, prévoir des grilles : 2 x 42 ; 14 x 6 ; 28 x 3 ; 21 x 4 ; ... ; ceci pour éliminer les messages de type " 84 " ou des messages additifs.

N4 : nombre de grilles du groupe récepteur

● On peut, d'autre part, jouer sur les contraintes de la situation :

C1 : message court et essentiellement numérique, afin d'éliminer les messages écrits en français, trop longs et souvent incompréhensibles et d'élaborer une nouvelle écriture du type a x b.

C2 : permettre au groupe récepteur de retrouver rapidement et facilement la grille, afin d'éliminer les écritures additives.

C3 : désigner le nombre de carreaux, afin de préciser que l'écriture multiplicative désigne un nombre.

C4 : message écrit ou oral

● On peut également citer la variable temps :

T1 : temps laissé au groupe émetteur pour élaborer son message

T2 : temps accordé au groupe récepteur pour découvrir la grille

● Pour ce qui est de l'organisation, on peut choisir :

O1 : travail individuel ou par groupes

O2 : constitution de groupes homogènes ou hétérogènes

O3 : groupe alternativement émetteur puis récepteur (*répartition de la tâche*)

b) Nombre de variables citées par étudiant
(sur 9 variables retenues)

On peut calculer, pour chaque groupe, le nombre moyen de variables citées par étudiant. Le nombre en italiques indique le nombre moyen de variables citées, lorsque les éventuelles conséquences de différents choix sont précisées par l'étudiant.
Le même calcul est ensuite effectué pour chaque type de variable.

Les étudiants des deux premiers groupes (ayant assisté au cours) citent en moyenne deux variables. Pour les autres groupes, les étudiants identifient très rarement les variables de la situation et les conséquences des choix des paramètres ne sont pas évoquées.

Les variables majoritairement citées sont les variables numériques, ce qui peut se concevoir car il s'agit d'une activité numérique, mais un certain nombre d'étudiants des groupes 1 et 2 citent également les variables de la consigne. Celle-ci n'est pratiquement jamais remise en question par les étudiants des autres groupes.

Dans les groupes 1 et 2, la variable N1 est majoritairement citée. Les variables C1, C2 et C3 ne sont mentionnées que par des étudiants des deux premiers groupes. dans les autres groupes, les étudiants qui identifient une variable, citent en général N1, mais le nombre de ces étudiants est trop faible pour être interprété.

Dans les autres groupes, les étudiants confondent très souvent les variables de la situation, fixées a priori, et les prises de décisions de l'enseignant au cours de la séquence.

Groupe	1	2	3	4	5
nombre moyen de variables citées par étudiants	2,4 *1,12*	1,9 *0,5*	0,45 *0,14*	0,25 *0,04*	0,25 *0*
nombre moyen de variables numériques citées par étudiant (sur 4)	1,19 *0,56*	0,88 *0,35*	0,45 *0,13*	0,08 *0,04*	0,25 *0*
nombre moyen de variables relatives la consigne citées par étudiant (sur 3)	0,56	0,31	0	0,04	0,08
nombre moyen de variables relatives au temps citées par étudiant (sur 2)	0,56	0,61	0	0,12	0

7- Conclusion

Une analyse approfondie des réponses des étudiants n'ayant pas bénéficié d'un cours spécifique met en évidence une interprétation totalement différente de la question trois du questionnaire.

Il se dégage une conception majoritaire : le maître fait des choix pendant la réalisation de la séquence et intervient à ce moment-là. Ils ne peuvent envisager une "vraie préparation" comportant notamment une analyse a priori de la situation et un choix des valeurs des variables. Cette confusion est révélatrice de la conception qu'il se font d'une préparation de séquence. Le maître n'a pas de marge de manoeuvre à ce stade, les seuls changements qu'il peut apporter à une situation se situent lors du déroulement de l'activité et concernent alors ses prises de décision.

Les étudiants n'ayant bénéficié que d'institutionnalisations locales de ces notions didactiques (absence de cours spécifique) font des réponses identiques. **Une institutionnalisation forte et un donc un cours spécifique semble donc indispensable pour modifier l'analyse d'un document pédagogique de type "préparation de séquence".**

Il est bien évident que, pour les futurs PE, le fait de savoir faire une analyse formelle de ce type de document n'assure pas une modification de leur pratiques enseignantes effectives. Seule, une étude de ces étudiants en réelle situation d'enseignement permettrait de conclure sur ce point.

Bibliographie

[1] EBERHARD M., Actes du colloque des PEN d'Angers (1987)

[2] Formation à l'enseignement des mathématiques : exemples de pratiques effectives et éléments de réflexion d'un point de vue didactique, document de travail pour la formation des enseignants n°5 (nov. 1991), IREM de Paris VII

[3] BUTLEN D. ET BOLON J. (1992), « Quelle didactique des mathématiques en formation des maîtres, quelques questions posées par des expériences d'enseignement en formation initiale et continue d'instituteurs, de professeurs de collèges et de lycées », document de travail pour la formation des enseignants n°8, IREM de Paris VII

[4] PEZARD M. (1985), "Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs", thèse de troisième cycle de didactique des mathématiques, IREM de Paris VII

[5] ROBERT A. (1988), "Une introduction à la didactique des mathématiques (à l'usage des enseignants), cahier de didactique des mathématiques n°50, IREM de Paris VII

[6] "Quelques concepts, quelques généralités et quelques références", cahier de didactique des mathématiques n°5, IREM de Paris VII

[7] Actes de la première université d'été des PEN : "Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire", Olivet 1988, IREM de Bordeaux

[8] PEAULT H. Actes du colloque des PEN de Rouen (1988)

[9] PELTIER M. L., "Utilisation du document « la fleur » (article APMEP) en FP1" dans « Utilisation de la didactique en formation des maîtres », Actes du XVIIème colloque des PEN et autres formateurs, Paris 1990

[10] DOUADY R., "De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle", cahier de didactique des mathématiques n°6, IREM de Paris VII

[11] BUTLEN D. - PEZARD M. (1991), "Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs instituteurs-maîtres-formateurs", document de travail pour la formation des enseignants n°4

[12] BUTLEN D. - PEZARD M. (1989), "Calcul mental, calcul rapide", brochure n°78

Partie 4

Références pour une aide au travail personnel des P.E.

Titre : Mémoires et dossiers professionnels de mathématique :
Date : mars 1993
Auteurs : Marie-Claude Chevalier, Liliane Dubois, Marianne Frémin, Nicole Labrunie, Gérard Lipp, Danielle Vergnes.
Résumé : entre des analyses de ce que doivent être les mémoires professionnels et du rôle du formateur, sont présentés plusieurs sujets de mémoires possibles et les bibliographies associées.

MÉMOIRES ET DOSSIERS PROFESSIONNELS DE MATHÉMATIQUE : INCITATION, GESTION, SUGGESTION.

Nous présentons un travail sur le mémoire professionnel et non sur le dossier professionnel ; mais il faudra être vigilant et penser à proposer aussi des dossiers professionnels.

Plan :
I - Les textes officiels.
II - Mémoire et formation professionnelle.
III - Cadrage du mémoire : fond et forme (méthodologie de travail)
IV - Mémoire et math. (liste de sujets possibles)
V - Le rôle du tuteur : le suivi des mémoires
VI - Une bibliographie

I - Les textes officiels

- Circ. du 2/7/91 (N°91.202) - B.0. n°27 du 11.07.91
- Circ. du 30/9/91 (N°91.263) - B.O. n°38 du 31.10.91.
- Ar. du 18/10/91 - J.O. du 20.10.91.
- Circ. du 22/10/92(N° 92.303) - B.O. n°41 du 29.10.92.

II - Mémoire et formation professionnelle

La formation initiale doit permettre aux Professeurs des Ecoles d'appréhender les mathématiques avec un regard actuel et de construire des compétences professionnelles pour leur enseignement.

Formation professionnelle et liaison théorie/pratique

Les enseignants du primaire doivent maîtriser les connaissances qu'ils enseignent.

Ces connaissances doivent être disponibles, mobilisables pour dominer les problèmes qu'ils poseront à leurs élèves. Elles doivent leur permettre d'envisager ou d'analyser différentes procédures de résolution.

Ils doivent pouvoir faire des choix, prendre des décisions en ce qui concerne l'organisation globale de leur enseignement tout en respectant les programmes et instructions officielles.

Ils doivent pouvoir être en interaction avec les élèves, réagir à leurs interrogations ou certitudes.

On trouverait encore d'autres obligations renvoyant à l'exercice du métier.

La formation initiale, par ses apports en didactique des mathématiques, contribue à la construction de ces compétences.

De même les travaux avec les maîtres formateurs contribuent à la construction de savoir-faire professionnels.

Mais l'écueil, que nous connaissons, est que deux discours, apparemment incompatibles, soient perçus par les formés : l'un ayant le poids de la théorie, l'autre l'expérience de la pratique.

Il nous paraît tout à fait indispensable d'impliquer le futur enseignant dans une analyse des pratiques professionnelles et que cette analyse puisse être éclairée par des références théoriques.

Lors du stage en responsabilité, l'urgence des problèmes à résoudre ne permet pas de conduire cette réflexion.

La réalisation du mémoire professionnel doit permettre de relever des faits d'enseignement des mathématiques, de les analyser, de les transformer en questions pour la théorie.

On a donc, lors de la réalisation du mémoire, un temps institutionnel tout à fait intéressant pour mettre à l'épreuve la liaison théorie/pratique.

Formation professionnelle et usure du temps

Les décisions prises par certains enseignants, dans la gestion d'une classe de mathématique, semblent parfois dictée par l'habitude plus que par l'analyse des phénomènes.

L'analyse des pratiques permet de voir en quoi l'exercice à long terme, du métier d'enseignant, s'appuie sur une expérience, sur une mémoire collective de la profession.

Développer une attitude de recherche (pointer des faits, formuler des hypothèses, rechercher des éléments de réponse, ...) permet d'éviter certaines "certitudes" sur l'enseignement des mathématiques et sur les difficultés des élèves dans cette matière.

Développer une attitude de recherche contribue à retarder le vieillissement ou la sclérose de la profession.

On a donc, lors de la réalisation du mémoire, un temps institutionnel tout à fait intéressant pour construire des compétences professionnelles durables.

III - Cadrage du mémoire : fond et forme (méthodologie de travail)

Par sa mise en forme, un mémoire professionnel doit permettre de repérer :

a) Le titre

b) Le sommaire et/ou la table de matières : sommaire détaillé avec renvoi aux numéros des pages.

c) Introduction : permettant de prendre rapidement connaissance du mémoire, justification du titre, du sommaire, ce qui sera développé, ce qui n'y sera pas traité.

d) La problématique :
- pourquoi ce sujet : (intérêt personnel, rencontres, ...)
- formulation en termes de questions (naïves)
- restructuration du champ d'étude

e) Références théoriques ou historiques :
- présentation de travaux traitant du thème.

f) Formulation d'hypothèses :
- choix et reformulation des questions à l'éclairage des références théoriques

g) Méthodologie :
- choix des données à recueillir.
- les moyens pour les recueillir.
- analyse et traitement de ces données.

i) Conclusion : Retour sur les hypothèses initiales et nouvelles pistes de réflexions ou d'actions.

j) Bibliographie : à laquelle le texte renvoie.

IV - Mémoire et mathématique

On constate que peu d'étudiants choisissent des sujets ayant trait aux Mathématiques.

On peut trouver plusieurs raisons à cela :
- L'organisation du travail sur les dossiers en première année, en particulier l'intervention massive des psycho-pédagogues dans l'encadrement.
- Le manque d'attirance pour les math. de la part des étudiants.
- La difficulté à imaginer, à cerner ce que peut être un sujet de mémoire en mathématique.

Nous pensons que nous avons un acte de formation en mathématique intéressant à saisir dans cette élaboration du mémoire.

Aussi nous proposons une liste de sujets. Cette liste peut être considérée comme un catalogue dans lequel on peut choisir. Mais nous l'avons essentiellement conçu comme une source d'inspiration en montrant par des exemples ce que peut être un sujet de mémoire à coloration mathématique.

Nous avons retenu cinq grands thèmes :
- Mathématiques et problèmes ;
- Mathématiques et langage ;
- Mathématiques et argumentation ;
- Mathématiques et jeux ;
- Mathématiques et erreurs ;

dans lesquels nous avons distribué les sujets, mais cette distribution est un peu arbitraire dans la mesure où certains sujets avaient leur place dans plusieurs thèmes.

Nous donnons pour tous les sujets des pistes de problématique, pour certains nous pointons les aspects professionnels et donnons des indications d'ordre méthodologique. Suivant les sujets retenus, on peut préférer pour le recueil de données, une expérimentation dans une classe, une conduite d'entretiens auprès de quelques élèves, une enquête auprès d'enseignants...

Chaque thème est accompagné d'une bibliographie générale "encadrée" qui s'adresse aux formateurs. La plupart des ouvrages ou documents cités ne sont pas directement accessibles aux étudiants - tout au moins dans leur intégralité - mais ils devraient permettre de trouver des références théoriques.

Pour certains sujets, nous donnons une bibliographie minimale directement accessible à l'étudiant.

Liste de sujets possibles

1 - Mathématiques et problèmes

1.1 Autour des mots "situation" et "problème"

Des expressions comme "problème", "situation", "situation-problème" sont utilisées dans la presse pédagogique ou chez les enseignants. Voir les différents usages de ces expressions suivant les lieux, les auteurs...

1.2 Manipulation ou action dans les activités mathématiques

Définir les mots "manipulation" et "action".

Situer la place de la manipulation, de l'action dans la construction des connaissances mathématiques.

Choisir une notion et monter une ou des situations de classe pour mettre en évidence le rôle de la manipulation et de l'action.

1.3 L'abstrait et le concret en mathématiques

Ces mots sont utilisés sans qu'un sens bien précis leur soit attribué, bien souvent à la place de difficile ou facile ou dans des expressions comme "problème concret", "nombres concrets"...

Etudier divers usages de ces termes en particulier dans les programmes ou chez les enseignants.

Pointer les représentations des mathématiques sous-jacentes.

Les représentations par l'enseignant du concret et de l'abstrait coïncident-elles avec les mots facile et difficile chez l'élève tant dans l'idée qu'ils se font du problème que dans l'efficacité des procédures de résolution qu'ils mettent en oeuvre ?

1.4 Les problèmes de concours et de rallyes

Sont-ils fondamentalement différents des problèmes "classiques" ?

Il s'agit ici de trouver des caractéristiques des problèmes "classiques" et des problèmes de "concours ou rallye". On étudiera ce qui peut les rapprocher ou les opposer et en particulier:
- la forme (texte, usage des dessins...)
- la présentation (énigmes, rébus...)
- le contexte (emprise avec la réalité ou l'imaginaire)
- les connaissances mathématiques en jeu
- ...

Cette étude vise à définir les genres et porte sur les problèmes en dehors de leur utilisation par les maîtres.

Dans une deuxième partie on étudiera l'usage (ou non usage) des problèmes de "concours ou de rallye" par les enseignants de l'école primaire. On regardera:
- les objectifs qu'ils leur assignent
- la gestion de la classe
- leur place par rapport aux activités classiques
- ...
- les réactions des élèves face à de tels problèmes

Cette étude vise à amorcer une réflexion sur
- les pratiques enseignantes et les représentations sur l'enseignement des mathématiques qui les sous-tendent,
- l'épistémologie spontanée des élèves

1.5 Bibliographie

- I.O. de l'école primaire
- "Problème ouvert, problème pour chercher" - R Charnay - Grand N n°51
- "Comment font-ils" - Rencontres Pédagogiques n°4 - INRP
- "Des problèmes pour apprendre en CM2 et 6°" - R Charnay - IREM de Lyon
- "Vers une pratique collective des mathématiques. Le Rallye de Maine-et-Loire" - H Péault - Grand N n°51
- "Faire des mathématiques différemment : une expérience" - R Prosperini - J Rucka - Grand N n° 50
- "Exemples de comportements d'élèves lors de résolution de problèmes" -C Gautier - Grand N n°39-40
- "Apprendre (par) la résolution de problèmes" - R Charnay - Grand N n°42
- "Apprentissage à la résolution de problèmes au cycle élémentaire" - INRP - CRDP de Grenoble

- Ermel - Apprentissages numériques- G.S./ C.P. - Hatier
- Ermel C.E. /C.M. - Hatier
- Objectif Calcul - Hatier
- Atout Math - Hachette
- "J'apprends les math" - Retz
- Revues Grand N ou Petit x suivant les thèmes mathématiques

- Britt-Mari Barth "L'apprentissage de l'abstraction" Retz
- G Brousseau: "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques" RDM vol 7/2
- Y Chevallard "Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique" RDM vol 12/1
- R Douady "Jeux de cadre et dialectique outil-objet" RDM vol7/2
- P Mérieu "Apprendre... oui, mais comment" éditions ESF
- A Robert : Cahier de didactique - n°50 - IREM de Paris VII

2 - Mathématiques et langage

2.1 Les murs de la classe et les mathématiques

Dans certaines classes, les murs sont utilisés par les enseignants pour afficher des mathématiques.

Quelles sont les mathématiques affichées ? affichables ? Qui décide ? Quand ? Pour quelle durée ? Quel usage en est-il fait ?

Pourquoi dans certaines classes on ne trouve que des affiches qui renvoient au Français ? Pourquoi dans d'autres les murs restent-ils vierges ?

A partir du constat précédent, définir le rôle que l'affichage peut jouer par rapport aux apprentissages mathématiques, les conditions à réaliser pour le rendre efficace...

2.2 Nature et rôle des écrits mathématiques à l'école primaire

Inventorier les différents supports des écrits mathématiques à l'école primaire: ardoise, tableau, affiches, cahier brouillon (ou d'essais), cahier du jour, cahier de mathématiques, fichiers...

Choisir un ou deux de ces supports et les étudier.

Quelle est la nature des écrits : dessins, tableaux, formulaires, phrases... ?

Quelles sont leurs fonctions : pourquoi existent-ils ? Quels sont leurs propriétaires ? A qui sont-ils donnés à voir ? Comment sont-ils perçus par les élèves ?...

Quels sont les contenus mathématiques qu'ils contiennent ?

Quelles sont les règles qui leur sont attachées : place du vrai et du faux, place des essais... ?

Quels rôles jouent-ils au niveau des apprentissages ou de l'enseignement : contrôle, mémoire, institutionnalisation de connaissances, comptes rendus aux parents ou à la hiérarchie... ?

Dégager les représentations des mathématiques liées à leur emploi. L'argumentation sera appuyée par un relevé de données auprès d'enseignants ou d'élèves.

2.3 La lecture des énoncés de problème

Situer l'énoncé de problème dans une des typologies des écrits proposés en Français (texte injonctif, informatif, narratif, ...).

Utilise-t-on des supports à contenus mathématiques pour l'apprentissage actuelle de la lecture ? Quelles sont les caractéristiques des écrits mathématiques ?

Comment peut-on apprendre à lire des énoncés de problème ?

2.4 Utilisation de schémas et résolution de problèmes

Inventorier les différents rôles du schéma dans l'activité de résolution de problème :

- schéma pour chercher,
- schéma pour montrer la solution trouvée,
- schéma pour justifier une démarche,
- schéma pour valider un résultat...

Peut-on apprendre à utiliser des schémas ? Quels sont les avantages et inconvénients d'un tel apprentissage ?

2.5 Le vocabulaire de la géométrie

"Le vocabulaire géométrique sert à la transmission et à la compréhension des informations : il aide aussi à la conceptualisation. Des mots précis, en nombre limité, doivent être acquis en situation fonctionnelle et parfaitement maîtrisés." extrait de "Compléments aux programmes et instructions" du 13 mai 1985.

Quelle est la réalité de cette affirmation à l'école ?

Quels sont les différents niveaux de langue utilisés en géométrie ?

Proposer une situation d'apprentissage pour le vocabulaire géométrique.

Analyser les difficultés rencontrées par les élèves, les difficultés de mise en oeuvre d'une telle situation.

2.6 Bibliographie

- Ermel CE/CM - Hatier
- Jeux 2 - APMEP
- "Invitation à une réflexion sur le rôle du langage dans l'enseignement des mathématiques" - F Conne - L Pauli - Petit x n°20
- "Lecture de textes mathématiques par des élèves (14-15 ans) : une expérimentation" - C Laborde - Petit x n°28
- "Tracés aux instruments et raisonnements géométrique : quelques exemples de consigne" - J F Favrat - Grand N n°49
- "Jeu de communication en géométrie dans l'espace : une expérience en CE_2" - M Polo - Grand N n°45
- "Lecture des énoncés mathématiques" - F Boule - C Vasserer - Grand N n°42
- "La lecture des énoncés de problèmes" - R Brissiaud - Comment font-ils - Rencontres pédagogiques n°4 - INRP
- "L'écolier et le problème de mathématiques" - Collection recherches pratiques n°4 (1984) - INRP
- "Comment font-ils ?" - Rencontre Pédagogiques n°4 - INRP
- "Mathématique, langue, langage" - F Boule (1980)
- "Lecture d'énoncés et progression thématique" - R Neyret - Grand N n°50
- "Fonctions de l'écrit en classe de mathématiques" - J Bolon - Actes des XVIII° et XIX° colloques inter-IREM (IREM de Besançon)
- "Situation d'apprentissage, actions et rétroactions: une expérience en CP" - M-C Chevalier - Grand N n°51
- "Lecture d'énoncés et de consignes" - J-M Zakhartchouk - CRAP cahiers pédagogiques Amiens
- "Apprentissage de l'abstraction" - Britt-Mari Barth - Retz
- G Brousseau : "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques" RDM vol 7/2 1986
- G Brousseau : "Le contrat didactique : le milieu" RDM VOL 9/3
- F Conne: "Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique" RDM vol 5/3
- W Damm :"Compréhension d'un énoncé de problème : le choix de la donnée de référence" Annales de Didactique et de sciences cognitives - IREM de Strasbourg - vol 4 (1991)
- R Duval :"Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes" Annales de Didactique et de sciences cognitives - IREM de Strasbourg - vol 4 (1991)
- Ehrlich : "Sémantique et math"
- J F Richard :"Les activités mentales : comprendre, raisonner, trouver des solutions" Collection U-psychologie - A Colin - 1990
- A Robert :"Une introduction à la didactique des mathématiques (à l'usage des enseignants)" Cahier de didactique des mathématiques n°50 - IREM de Paris VII
- G Vergnaud :"questions de représentation et de formulation dans la résolution de problèmes mathématiques" Annales de Didactique et de sciences cognitives - IREM de Strasbourg - vol 2 (1989)

3 - Mathématiques et argumentation

3.1 L'argumentation

Définir le mot "argumenter" par rapport à d'autres mots utilisés en mathématiques comme "justifier", "expliquer", "prouver", "démontrer"...

Quels sont les mots du langage courant utilisés dans un domaine ou dans l'autre ?

Quand demande-t-on en classe de mathématiques (à l'école) d'argumenter ?

A qui s'adresse une argumentation ? Quel est le rôle de l'interlocuteur ? Quel est le rôle du contrat didactique dans le choix d'une argumentation ?

Y a-t-il des différences entre argumenter à l'écrit et argumenter à l'oral ?

Y a-t-il des différences entre argumenter en mathématiques et argumenter dans d'autres disciplines comme en français ?

Le recueil de données portera sur un des points évoqués ci-dessus.

3.2 Bibliographie

- Jeux 2 - APMEP
- "Argumenter, démontrer, expliquer : une continuité ou rupture cognitive ? R Duval - Petit x n°31
- Pratiques n°28 (à propos d'argumentation)

- G Arsac : "L'origine de la démonstration: essai d'épistémologie didactique" RDM Vol 8/3 1987
- G Arsac : "Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France" RDM vol 9/3
- G Brousseau : "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques" RDM vol 7/2 1986
- G Brousseau : "Le contrat didactique : le milieu" RDM VOL 9/3
- D Coquin - E Patej : "Effets de la situation (scolaire ou non) sur la forme du discours argumentatif"
- Annales de Didactique et de sciences cognitives - IREM de Strasbourg (1991)
- R Duval - M A Egret : "L'organisation déductive du discours : interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration" Annales de Didactique et de sciences cognitives - IREM de Strasbourg - vol 2 (1989)
- R Duval : "Pour une approche cognitive de l'argumentation" Annales de Didactique et de sciences cognitives - IREM de Strasbourg - vol 3 (1990)
- I Lakatos : "Preuves et réfutations" (Hermann 1985)
- C Margolinas : "De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques" (La Pensée Sauvage)
- J F Richard :"Les activités mentales : comprendre, raisonner, trouver des solutions" Collection U-psychologie - A Colin - 1990

4 - Mathématiques et jeux

4.1 Jeux mathématiques dans les pratiques enseignantes

Certaines activités décrites dans des manuels ou documents pédagogiques portent le nom de jeu.

Etudier les caractéristiques de ces activités :
- quelles conditions doivent-elles remplir pour être perçues comme jeux par les élèves ?
- quelle gestion particulière de la classe imposent-elles ?
- ...

Quel est le lien entre ce type d'activités et le jeu dans l'usage social ?

Etudier une ou deux situations appelées "jeux": matériel, enjeu, stratégies, connaissances... et voir si le mot jeu est adapté à la situation décrite.

4.2 Les mathématiques par le jeu en maternelle

Des ateliers "jeux mathématiques" existent en maternelle. Cela veut-il dire que l'on fait des mathématiques en jouant en maternelle ? Si oui quelles mathématiques ? Si non que faudrait-il ajouter pour en faire ?

Appuyer l'argumentation développée par le choix d'un jeu.

4.3 Apprentissages mathématiques et jeux à l'école élémentaire

Peut-on apprendre ou faire des mathématiques en jouant ? Peut-on jouer en apprenant ou faisant des mathématiques ?

Situer les apprentissages mathématiques par rapport aux théories de psychologie cognitive.

Faire un parallèle entre la notion de jeu et celle de situation a-didactique.

Dégager à quelles conditions de mise en oeuvre, d'exploitation... un jeu peut déclencher des apprentissages mathématiques.

Appuyer l'argumentation développée par le choix d'un jeu.

4.4 Elèves en difficulté et jeux mathématiques

Lors de la mise en place de l'évaluation nationale CE2/6°, on a parlé de remédiations, de réponses apportées aux élèves en difficulté.

Quelle est la place des jeux dans les activités mises en place par les maîtres ?

Quels sont les apports et limites des jeux pour des élèves en difficulté ?

4.5 Le rôle du jeu dans l'apprentissage du nombre

Comparer dans les pratiques enseignantes en maternelle et en C.P. la place du jeu à des fins d'apprentissage du nombre.

Proposer un même jeu numérique en G.S. maternelle et en C.P.

4.6 Bibliographie

- Ermel GS, CP apprentissages numériques - Hatier
- Jeux 1, Jeux 2, Jeux 3 - APMEP
- "Les mathématiques par les jeux" : L Champdavoine - F Nathan
- "Activités mathématiques" - G Zimmermann : F Nathan
- "Des jeux de nombre et de logique à la maternelle" - M L Winninger - Retz
- "Des jeux pour additionner et soustraire" - ML Winninger - Retz
- "Cette école où les enfants jouent" - Brochure congrès AGIEM
- "L'enfant et le nombre" - M Fayol Delachaux et Niestlé (1991)
- "Décrire, agir et compter - l'enfant et le dénombrement spontané" - C Meljac - Puf
- "L'évolution psychologique de l'enfant - A. Colin 1968 (Chap.5 : le jeu)

- R Brissiaud "Comment les enfants apprennent à calculer"- Retz 1989
- G Brousseau "Le contrat didactique: le milieu" RDM vol 9/3
- G Brousseau "Fondements et méthode de la didactique des mathématiques" RDM Vol 7/2
- J Brun El Hadi Saada "L'élaboration des formulations dans un jeu en arithmétique" RDM vol 5/1
- R Douady "Jeux de cadres et dialectique outil-objet" RDM vol 7/2
- J Péres "Construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle" - IREM de Bordeaux (1985)
- M-J Perrin : "Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6° Thèse - IREM de Paris VII
- Piaget et Szeminska "La genèse du nombre chez l'enfant - Delachaux et Niestlé (1941)
- J.S. Bruner "Savoir faire, savoir dire" - PUF 1983 (Chap.1 - pages 52 à 60)
- H. Wallon "L'évolution psychologique de l'enfant" - A.Colin 1968 (Chap.5 : le jeu)
- "Le jeu de l'enfant après 3 ans : sa nature, sa discipline, introduction à la pédagogie" VRIN 1973

5 - Mathématiques et erreurs

5.1 Prise en compte des erreurs par les enseignants

Etude des pratiques enseignantes dans la prise en compte et le traitement des erreurs en mathématiques.

5.2 Les erreurs vues par les élèves

Comment les erreurs sont-elles perçues par les élèves ?

Quels sont les moyens de contrôle dont ils disposent ?

5.3 Nombres décimaux et erreurs des élèves

Les erreurs que l'on rencontre dans l'usage des décimaux à l'école ou au collège renvoient, pour la plupart, à des représentations de ces nombres. Rappeler les principales représentations et situer leur origine.

Etudier dans un ou deux manuels en vigueur si les exercices proposés permettent de rencontrer ces erreurs. Dégager les hypothèses d'apprentissage sous-jacentes.

Proposer des activités à conduire avec des élèves du CM.

5.4 Analyse des erreurs dans les problèmes additifs et soustractifs

Rappeler les différents sens de l'addition.

Faire des hypothèses sur les difficultés des élèves et erreurs possibles dans le traitement des problèmes additifs ou soustractifs.

Proposer une batterie de tests permettant de repérer et de classer les erreurs. Justifier le choix des exercices par rapport aux hypothèses précédentes.

Elaborer des exercices de remédiation en fonction des résultats obtenus aux tests.

5.5 Bibliographie

- Grand-N : spécial CM
- Aides pédagogiques pour le cycle moyen - tome 2 - Nombres décimaux - APMEP
- Feuille à problèmes n°31 - IREM de Lyon
- "En mathématiques peut mieux faire" - Rencontres pédagogiques n°12 - INRP
- Documents ministériels à propos de l'évaluation CE2/6°
- "Stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de maths en liaison avec certaines de leurs représentations" - S Rousset-Bert - Petit x n°25

- "Les enseignants de mathématiques et les erreurs de leurs élèves" - R Charnay - Grand N n°45
- "De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes" - R Charnay - M Mante - Grand N n° 48

- G Brousseau : "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques" RDM vol 4/2
- N et G Brousseau : "Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire" IREM de Bordeaux
- J P Fischer : "L'erreur de persévération en arithmétique" Annales de Didactique et de sciences cognitives - IREM de Strasbourg - vol 2 (1989)
- J P Fischer :"Le rôle des erreurs n'est-il pas surfait ?" Annales de Didactique et de sciences cognitives- IREM de Strasbourg - vol 2 (1989)
- N Milhaud : "Le comportement des maîtres face aux erreurs des élèves" - mémoire de DEA (1980) - IREM de Bordeaux
- M H Salin : "Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire" - mémoire de DEA (1976) - IREM Bordeaux
- G Vergnaud : "L'enfant, la mathématique et la réalité" - Peter Lang

V - Le rôle du formateur

1) Susciter des mémoires où sont présentées des mathématiques, en particulier en intervenant dans les réunions ayant trait :

- aux dossiers professionnels en 1ère année
- et aux mémoires professionnels en 2ème année pour y proposer nos thèmes.

2) Suivi des mémoires :

a) Faire émerger les questions.

Après un temps permettant à l'étudiant de déterminer son choix, l'aider à délimiter son sujet d'étude, à faire émerger des questions et formuler une problématique.

Ce travail pourra être proposé individuellement ou en séminaires.

A l'issue de cette étape, les étudiants doivent commencer un travail de recherche documentaire et organiser le recueil de données.

b) Apporter une aide méthodologique.

A partir du premier travail présenté par l'étudiant, il s'agit alors de :

- clarifier et structurer ce que sera son mémoire professionnel, à partir des matériaux recueillis.
- compléter et affiner sa bibliographie.

c) Aider à transformer les notes en écrit communicable.

Ce qui est développé dans "Cadrage du mémoire" (v. ci-dessus) donne à l'étudiant des outils pour ce travail.

VI - Une bibliographie

- "Le mémoire professionnel" - Revue 'Recherche et Formation' - N°12 de l'I.N.R.P. - 1992
- "Comment réussir un mémoire" - J.P. Fragnière - Dunod - 1986
- "Rapports de stage et mémoires" - Bruno Camus : Editions d'organisation - Paris - 1989
- "Rédiger, présenter, composer : l'art du rapport et du mémoire" - Guy Jucquois - De Boeck-Wesmael Bruxelles - 1989
- "Le Premier Congrès, Actualité de la Recherche en Education et Formation" - Paris 25 au 27 mars 93 - AECSE, 28 rue Serpente, 75006 PARIS
- "Expérimentation d'un modèle de perfectionnement basé sur la pédagogie du projet avec un groupe d'enseignants en immersion française primaire" - Charles Deflandre - Université de Montréal
- "Accéder aux savoirs implicites de l'acte pédagogique : l'entretien d'explication avec des enseignants experts" : Nadine Faringold - IUFM Pontoise
- "Les mémoires pour l'obtention du 1er grade didactique et la réflexion sur la pratique professionnelle dans la formation des enseignants" - Stefana-Olga Galatanu - Université de Bucarest (Roumanie)
- "Logiques d'exposition et pratiques de recherche- Sens et enjeux des présentations mises en oeuvre dans des mémoires de 'formation par la recherche'" - Michèle Guigue-Durning - Inst. Nat. de la Jeun. & Educ.Popul. - Paris X : NANTERRE
- "Les histoires de vie : Bilan critique de dix ans de recherche et prospective au regard des filiations théoriques" - Jean-Louis Legrand - Université Paris 8 - IFEF
- "Recherche sur les biographies formatives" - Christian Leray - IUFM - RENNES
- "Etude de cas sur la construction des savoirs professionnels chez des étudiants en situation de stage supervisé" - Daniel Martin - Université du Québec (Canada)
- "Observer, décrire les classes d'un point de vue didactique" - Hélène Romian - INRP Paris

Titre : Bibliographie restreinte pour les étudiants en début de formation
Date : Mars 1993
Auteurs : Collectif
Type : Bibliographie
Mots clés : aides pédagogiques, accès facile, thèmes de réflexion, équipes institutionnelles

PETITE BIBLIOGRAPHIE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE

La présente bibliographie est volontairement très limitée. Son objectif est de présenter quelques documents d'accès relativement facile, issus de travaux d'équipes institutionnelles, permettant de rencontrer l'essentiel des thèmes sur lesquels une réflexion s'impose pour un futur professeur des écoles.

Sans qu'une lecture exhaustive s'impose, ils seront des références utiles pour un bon nombre de problèmes d'apprentissage des mathématiques qui se posent en formation.

Il va de soi qu'on ne pourra pas en général s'en contenter et que d'autres références devront être ajoutées selon les thèmes abordés ou les types de travaux à mettre en oeuvre.

Les documents proposés résultent d'un choix : celui d'un groupe de formateurs d'IUFM à une date donnée (mars 1993).

1) Collection ERMEL

ERMEL est un acronyme pour "Equipe de Recherche en Mathématiques à l'Ecole Elémentaire". Cette équipe est celle de l'INRP (Institut National de la Recherche Pédagogique). Les ouvrages de la collection font suite à ses recherches.

☐ **Apprentissages numériques et résolution de problèmes : Grande section de maternelle / ERMEL . - Paris : Hatier, 1990 . - 228 p.**

☐ **Apprentissages numériques et résolution de problèmes : Cours préparatoire / ERMEL . - Paris : Hatier, 1991 . - 358 p.**

☐ **Apprentissages numériques et résolution de problèmes : CE1 / ERMEL . - Paris : Hatier, 1993 . - 358 p.**

Cette collection récente propose une cohérence pour les apprentissages numériques au cycle 2.

Dans la première partie de ces ouvrages on trouvera des éclairages théoriques permettant de justifier les choix didactiques de la deuxième partie. Cette dernière est riche de situations d'apprentissage dans le domaine numérique. Elles sont classées selon les utilisations des nombres.

Pour la GS les subdivisions sont les suivantes :
- le début d'année en grande section
- des nombres pour comparer
- des nombres pour mémoriser
- des nombres pour partager
- des nombres pour anticiper
- connaître les désignations des nombres.

Pour le CP, 4 thèmes sont proposés :
- thème 1 : les nombres pour mémoriser
- thème 2 : des problèmes pour apprendre à chercher
- thème 3 : les nombres pour anticiper et calculer
- thème 4 : connaître les nombres.

Pour le CE1, 4 thèmes sont proposés :
- thème 1 : des problèmes pour apprendre à chercher
- thème 2 : calculs additifs et soustractifs
- thème 3 : calculs multiplicatifs et de division
- thème 4 : connaître les nombres.

Ces livres n'intègrent pas les autres thèmes mathématiques au programme (notamment le domaine spatial).

☐ **Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle élémentaire, tome 1 : Calcul mental, problèmes, mesure, géométrie / ERMEL . - Paris : OCDL (diffusion Hatier), 1978 . - 192 p.**

☐ **Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle élémentaire, tome 2 : Numération, opérations, fonctions numériques / ERMEL . - Paris : OCDL (diffusion Hatier), 1978 . - 320 p.**

□ **Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen, tome 1 : Calcul mental, problèmes, numération, opérations / ERMEL . - Paris : Hatier, 1981 . - 228 p.**

□ **Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen, tome 2 : Nombres décimaux, mesure / ERMEL . - Paris : Hatier, 1982 . - 240 p.**

□ **Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen, tome 3 : Fonctions numériques, proportionnalité, géométrie / ERMEL . - Paris : Hatier, 1982 . - 276 p.**

Un premier livre plus ancien concerne le CP. Malgré quelques idées utilisables dans les domaines non-numériques, il "date" quelque peu.

Les 5 autres, cités ci-dessus, concernent le CE et le CM et conservent beaucoup d'intérêt. On y trouvera :

- des informations théoriques relatives aux notions du programme. Celles-ci peuvent soit rappeler un minimum de connaissances de base (algorithmes, division,...) soit les développer de façon plus détaillée (fonctions numériques, proportionnalité, mesure,...) avec éventuellement d'utiles repères historiques (numération, décimaux, fractions,...) soit ne développer qu'un aspect particulier (par exemple en géométrie où la partie théorique traite essentiellement des transformations...)
- des objectifs pédagogiques qui ont le mérite de situer les choix auxquels est confronté l'enseignant et de proposer des directions de travail. Dans le tome 1 du CE et celui du CM notamment, on trouvera, dans le chapitre traitant des problèmes, un point de vue global intéressant sur le rôle de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques.

- des propositions d'activités dont certaines sont minutieusement décrites et d'autres sont plutôt des pistes d'exploitation qu'il s'agira d'adapter.

- des comptes-rendus scrupuleux de moments de classe avec des commentaires permettant de pointer certains comportements d'élèves et choix de l'enseignant.

Ces ouvrages se situent dans la perspective d'une construction du savoir par les élèves. Ils font apparaître par exemple que le sens des opérations se construit progressivement à partir d'un travail de réorganisation et d'appropriation dans lequel l'apprentissage de techniques opératoires est loin de constituer l'essentiel.

Ni livres de réflexion théorique ni manuels, ces documents se situent à la fois sur ces deux plans. En ce sens ils peuvent être considérés comme des instruments utiles pour la formation, à condition que puisse s'effectuer un travail de réappropriation personnelle. Plutôt que d'en faire une lecture linéaire, on aura avantage à les prendre comme ressources en fonction des thèmes étudiés.

2) Les aides pédagogiques de l'APMEP

L'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) est une association qui se propose de regrouper tous ceux qui ont à enseigner des mathématiques, y compris les enseignants du premier degré. Elle édite de nombreux documents sur l'enseignement des mathématiques.

Lors des changements de programmes de 1977, en liaison avec les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), elle a commencé à publier des aides pédagogiques destinées aux enseignants de l'école élémentaire. C'est la COPIRELEM (COmmission Permanente des IRem pour l'enseignement ELEMentaire) qui a pris en charge cette rédaction.

Nous ne citerons pas ici les Aides pédagogiques pour le CP, d'ailleurs épuisées, où seules les propositions d'activités dans le domaine spatial seraient encore d'actualité

□ **Aides pédagogiques pour le CE / COPIRELEM . - Paris : APMEP, [1978] . - 192 p. . - Elem-Math V**

Bien que les commentaires portent sur les programmes de 1977, les nombreux exemples d'activités, expérimentées pour beaucoup, restent d'actualité et couvrent bien le programme actuel. Un premier chapitre concerne les problèmes (24 p.), un second les activités numériques (75 p.), le troisième porte sur les activités géométriques (80 p.)

□ **Aides pédagogiques pour le CM : 1. Géométrie / COPIRELEM . - Paris : APMEP, [1983] . - 116 p. . - Elem-Math VII**

Après un chapitre de réflexions générales sur l'enseignement de la géométrie, 15 chapitres proposent autant de thèmes d'activités.

□ **Aides pédagogiques pour le CM : 2. Nombres décimaux / COPIRELEM . - Paris : APMEP, [1986] . - 184 p. . - Elem-Math VIII**

Une première partie propose des éclairages sur l'enseignement des nombres décimaux. Dans une seconde partie on compare différents types de présentation avec une réflexion sur les avantages et les inconvénients de chacune. Une troisième partie enfin donne des exemples de réalisations en classe.

Cette brochure d'accès plus difficile, reflet de la difficulté d'enseigner les décimaux à l'école élémentaire, nécessite un travail de réappropriation.

□ **Aides pédagogiques pour le CM : Situations-problèmes / COPIRELEM. - Paris : APMEP, [1987]. - 184 p.. - Elem-Math IX**

On y trouvera un chapitre d'étude générale sur la place du problème dans l'enseignement des mathématiques. Dans un second chapitre sont proposés 8 exemples pour chacun desquels est présentée une chronique détaillée avec analyse de travaux et comportements d'élèves. Le chapitre 3 est une banque d'idées : 48 problèmes y sont proposés avec, pour certains, quelques indications pédagogiques et commentaires. Un quatrième chapitre donne quelques exemples de problèmes pouvant servir pour une évaluation.

□ **La multiplication des naturels à l'école élémentaire / [J. Lecoq] . - Paris : APMEP, 1976. - 56 p.. - Elem-Math II**

□ **La division à l'école élémentaire . - Paris : APMEP, [1977] . - 96 p. . - Elem-Math III**

Ces 2 brochures qui ont vulgarisé les premières recherches sur ces thèmes restent encore d'actualité.

3) Collection GRAND N de l'IREM de Grenoble

Editée d'abord par le CRDP de Grenoble puis maintenant par l'IREM, GRAND N est une revue destinée aux enseignants des écoles élémentaires et maternelles. Elle propose des activités pour tous les niveaux, des comptes-rendus, des articles de fond... Elle permet de suivre l'évolution de la réflexion concernant l'enseignement des mathématiques à l'école. Elle est essentiellement centrée sur les mathématiques mais s'est élargie à tous les enseignements scientifiques. (En mars 1993, 51 numéros sont déjà parus).

Quatre numéros spéciaux ont été édités de 1977 à 1982 lors de changements de programmes. Ils rassemblent des articles parus antérieurement qui décrivent avec soin des activités expérimentées dans les classes : protocole de passation, déroulement, travaux d'élèves et analyse de ces travaux.

Ils ne prétendent pas aborder de façon exhaustive tous les contenus mathématiques de l'école primaire.

Nous ne citerons pas ici le numéro spécial de 1977 sur le CP dont les propositions datent et qui est par ailleurs épuisé.

□ **Mathématiques pour la maternelle (numéro spécial Grand N). - CRDP de Grenoble, 1987 . - 212 p.**

Les articles sont regroupés sous 3 chapitres : Activités de désignation, Activités numériques, Activités géométriques

Le chapitre concernant les activités numériques ne correspond plus très bien à l'état actuel de la réflexion sur l'approche du nombre.

□ **Mathématiques pour le cycle élémentaire (numéro spécial Grand N). - CRDP de Grenoble, 1979 . - 258 p.**

Les articles ne sont pas regroupés et concernent des suggestions d'activités géométriques (tangram, carrés bicolores,...) et d'activités numériques sur les thèmes du programme.

□ **Mathématiques pour le cycle moyen (numéro spécial Grand N), tome 1 . - CRDP de Grenoble, 1981 . - 204 p.**

□ **Mathématiques pour le cycle moyen (numéro spécial Grand N) tome 2 . - CRDP de Grenoble, 1982 . - 164 p.**

Le tome 1 comprend 2 parties : Décimaux, Activités numériques. Le tome 2 comprend 2 autres parties : Activités géométriques et mesure, Situations-problèmes.

Ces deux fascicules ont été organisés en prenant en compte les objectifs des programmes de 1980. Ils ont gardé tout leur intérêt et répondent bien à la volonté des auteurs : "d'une part apporter une information théorique sur certains thèmes mathématiques, d'autre part suggérer des idées pour l'exploitation pédagogique de ces thèmes".

4) "Rencontres pédagogiques" de l'INRP

Cette collection de l'INRP (Institut National de la Recherche Pédagogique) diffuse divers travaux de recherche. Les deux numéros cités ci-dessous concernent l'enseignement des mathématiques notamment l'apprentissage à la résolution de problèmes, les difficultés des enfants et le rôle de l'erreur dans les apprentissages, la liaison école/collège.

☐ **En mathématiques peut mieux faire : l'élève face à la difficulté en mathématiques . - Rencontres pédagogiques n<198> 12, INRP, 1986 . - 128 p.**

☐ **Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques . - Rencontres pédagogiques n° 4, INRP, 1984 . - 128 p.**

Faciles d'accès, ces fascicules favorisent la réflexion pédagogique. Ils peuvent aider à envisager de manière positive l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques et à mieux cerner le rôle de l'enseignant.

La rédaction permet une utilisation non linéaire. On peut y puiser des éléments d'analyse pour des apprentissages précis (la division par exemple). Ils présentent des outils d'observation ou d'analyse (grille sur le statut de l'erreur, ...), des études de cas, des analyses de travaux d'enfants et des idées d'activités pour aider les élèves du CP à la sixième à mieux "apprendre".

5) Publications de l'IREM de Bordeaux

Comme d'autres IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), l'IREM de Bordeaux publie de nombreux documents concernant la didactique des mathématiques. Si les 3 qui suivent figurent dans la présente bibliographie c'est surtout en raison de leur conception : dans chaque cas, des choix didactiques clairs sont explicités et organisés de façon rigoureuse dans une progression intégrant des situations d'apprentissage adaptées. La rigueur des ces progressions peut constituer une bonne référence pour la formation.

☐ **Math CP . - IREM de Bordeaux, 1984**

La partie concernant l'approche des nombres ayant vieilli, a été repensée dans le document suivant (dont les 2 autres tomes sont à paraître).

☐ **Les Nombres au CP : avec ou sans logiciels, tome 1 / Suzy Gairin-Calvo . - IREM de Bordeaux, 1988 . - 168 p.**

☐ **La multiplication au CE / [René Berthelot] . - IREM de Bordeaux, 1985 . - 128 p.**

☐ **La division à l'école élémentaire : compte-rendu de situations d'enseignement réalisées avec des enfants de CE2, CM1, CM2 / [Joël Briand] . - IREM de Bordeaux, 1985**

Ces documents réussissent à poursuivre deux buts clairement explicités et articulés :

- présenter de manière détaillée des activités, ordonnées chronologiquement, accompagnées de bilans, de travaux d'élèves...

- justifier les choix de ces activités, des modalités d'organisation du travail, en utilisant quelques-uns des concepts actuels de la didactique des mathématiques.

6) Manuels scolaires

L'étude, la comparaison, l'analyse critique de manuels scolaires sont des exercices nécessaires au cours de la formation. Tous ne présentent pas le même intérêt mais il serait imprudent et sans doute illusoire de vouloir imposer une hiérarchie ; ceci d'autant plus que l'évolution est souvent rapide et que de nouvelles collections apparaissent sans cesse sur le marché.

Nous nous contenterons, sans prétendre à l'exhaustivité, de signaler quelques références qui, à cette date, paraissent dignes d'intérêt. Elles sont présentées dans l'ordre alphabétique :

☐ **Atout math . - Hachette**

☐ **Diagonale . - Nathan**

☐ **J'apprends les maths . - Retz**

☐ **Math-Hebdo . - Hachette [non réédité]**

☐ **Objectif calcul . - Hatier**

Il va sans dire que les manuels de l'élève ne peuvent se comprendre qu'à partir des livres du maître.

Partie 5

Les conférences

LA MÉMOIRE DU SYSTÈME ÉDUCATIF ET LA MÉMOIRE DE L'ENSEIGNANT

Conférence de GUY BROUSSEAU à Colmar le 24 Mars 1993

La gestion de l'apprentissage sur le long terme est un des problèmes les plus délicats du système éducatif. Personne ne doute que le résultat doive s'examiner au niveau de la mémoire des "informés", c'est à dire des élèves. Il existe de nombreux travaux sur ce sujet. Mais est-ce bien suffisant ? En apprenant, l'élève modifie son milieu : son langage, son savoir, son professeur, etc., qui garde ainsi des traces de son activité. Ces traces ne lui sont-elles pas nécessaires ou utiles par la suite pour d'autres activités ou d'autres apprentissages, au même titre que sa mémoire interne ?

Le problème de savoir si le système (ou l'enseignant), lui même doit garder ou non la mémoire des faits d'enseignements n'est presque jamais envisagé.

1. Métaphores pour l'interaction didactique

L'échelle à poissons

Comment se manifeste, dans l'acte d'enseigner, le fait que les élèves ont appris ou non précédemment certaines connaissances. Peut-on décider un acte d'enseignement en ignorant ce que les élèves ont fait au préalable et sinon, où se trouve inscrit le souvenir de ce qu'ils ont fait : dans le dossier individuel des élèves ? dans le niveau qu'ils atteignaient ? ou au contraire entièrement dans le cursus et point où ils sont parvenus à un moment donné ? Est-ce que l'on peut l'inscrire dans une structure qui fonctionnerait un peu comme une échelle à poissons ?

Cette échelle permet à certains poissons de remonter les barrages. Il suffit d'adapter les petites dénivellations aux possibilités des poissons de façon que chaque poisson puisse sauter d'un niveau à l'autre et accéder au niveau supérieur. L'échelle ne bouge pas. Elle n'a aucune mémoire des poissons qui sont passés. Elle n'est pas adaptée à chaque poisson, elle est fixe.

Les programmes, les manuels, les activités collectives sont-ils des systèmes sans mémoire, c'est à dire des systèmes où les enfants se présentent, font ce qu'il y a lieu de faire, ce qui leur permet d'aller à l'étape suivante ? Ce ne sont pas tout à fait des poissons, car ils sont changés en passant par l'échelle, ils apprennent, ils s'apprivoisent, ils assimilent des connaissances et effectuent des accommodations, c'est à dire des transformations internes, et puis, au bout de l'échelle, arrivés à la sortie de l'école, ils sont supposés avoir acquis le savoir et se l'être approprié.

Le système, lui, peut avoir une mémoire figée et même en apparence échapper à tout phénomène temporel. Ce sont seulement les élèves qui sont changés par le système d'enseignement.

Un tel modèle est-il possible ?

Représente-t-il assez bien ce qui se passe habituellement ; et qu'est-ce qui fait qu'il peut être conçu dans certains cas comme un système idéal ?

Qui ce modèle arrange-t-il ? et qui dérangerait-il si on le changeait ?

Tout d'abord ce modèle évacue toute nécessité de mémoire de la part du professeur.

Rien n'empêcherait en principe un établissement d'avoir un spécialiste de chaque leçon de mathématiques. Le premier viendrait faire sa leçon, vérifierait que les élèves l'ont comprise et partirait. Arriverait alors un second qui ferait de même avec la deuxième leçon et ainsi de suite.

S'il était obligé d'avoir quelques informations sur l'état des élèves, il lui suffirait de faire une évaluation de leurs connaissances avant le cours. Il demanderait "Que savez-vous ?" *(ou comme moi tout à l'heure "avez-vous lu mon article ?...").* Pourrait il s'organiser en fonction de la réponse ? Il pourrait aussi sans en tenir compte, organiser une activité pour "grands commençants" de la deuxième leçon....

Le poisson Mac GYVER

Pour aborder ce sujet plusieurs voies se présentent.. J'ai choisi aujourd'hui celle de la représentation que se font de l'affaire parents et professeurs, de préférence à celle plus objective de l'analyse des apprentissages successifs et de leurs dépendance, approche sur laquelle vous le savez j'ai pas mal peine avec mes camarades.

Yves CHEVALLARD me faisait remarquer récemment que "actuellement nous nous faisons de l'élève en mathématiques une représentation très différente de ce qu'elle était il y a un certain temps !"

Auparavant, le type "bien", me disait il à peu près, était plutôt un besogneux, quelqu'un qui bossait, qui prenait les exercices les uns après les autres, qui apprenait à les faire et qui les faisait. Aujourd'hui l'élève "idéal" serait plutôt celui qui arrive et qui vit une aventure; il fait ce qu'on attend de lui de façon à la fois simple et merveilleuse, il résout instantanément des problèmes difficiles grâce à des inventions improvisées et des bricolages savants, il est une sorte de Mac Gyver des mathématiques."

Et de fait, l'étude des mathématiques semble être une espèce de visite, de voyage dans des activités qui sont supposées vous fabriquer en tant que personne mais dont la mémoire n'est attestée nulle part. Aucun épisode ne suppose la connaissance ou la mémoire de ce qu'a fait Mac Gyver à l'épisode précédent. L'élève type, réagit à la situation qu'on lui propose, domine le problème et s'en va! Il s'en va parce que tout retour sur l'acte accompli, tout commentaire, toute leçon ou toute morale apparaît comme un commerce lourd, prétentieux, inélégant et ennuyeux.

Mac Gyver est exactement le poisson idéal qui correspond à notre échelle.

Cette représentation de l'enseignement permet de concevoir un professeur qui arriverait en classe en ignorant ou en ayant oublié ce qui a été fait lors de la leçon précédente. Il lui suffit de savoir que sa leçon suit telle autre. Une partie de sa mémoire est inscrite dans le programme qu'il s'est donné et l'agencement qu'il a fait des savoirs à présenter, mais les événements particuliers qui se sont produits dans le passé peuvent être (en grande partie ?) effacés. Le principal doit être traité dans le cadre d'une leçon de 50 minutes : le sujet et les exercices qui conviennent. Les traces conservées seront des traces collectives, stochastiques et dépersonnalisées. Qui peut se rappeler que tel élève parmi les deux cents dont il s'occupe chaque semaine, fait telle erreur pour la troisième fois. Quel dispositif permettrait de retenir cela ? et quelle pédagogie pourrait faire usage de ce renseignement.

Une épuisette pour chaque poisson

A l'opposé de ce modèle présentant une absence totale de mémoire, existe la représentation d'un système que prendrait en compte chaque moment passé de chaque élève en particulier et qui lui ferait par conséquent un parcours spécifique et individuel. C'est le modèle du précepteur. Parfaite épuisette à poissons, il les attrape (les uns après les autres) et les transporte à l'étage supérieur. S'adaptant à son élève, il peut lui proposer les conditions particulières optimales, le faire s'adapter au mieux et au plus vite et ainsi il peut lui enseigner le maximum de connaissances...).

Connaître son élève impliquerait à la limite tenir compte du moindre détail de son passé. A supposer que ce soit possible, de quelle manière tirer parti de ce passé ? Y a-t-il autant de voies d'accès au savoir que d'élèves ? Peut-on modifier instantanément l'organisation du savoir en fonction des connaissances apparentes de l'élève ?

Entre ces deux systèmes, une échelle qui ne sait rien des poissons qui passent et une épuisette qui procure une adaptation individuelle aux élèves, il y a un énorme champ et on ne sait pas très bien, d'un point de vue théorique, de quelle manière on doit tenir compte du passé de l'élève.

Je sens bien que ma présentation ne vous satisfait guère. Le problème de l'enseignement individuel est différent de celui de l'enseignement rigide et rien n'empêche un précepteur d'être lui aussi sans mémoire. J'ai seulement voulu opposer deux représentations du système didactique : celle de l'absence totale d'adaptation instantanée et celle de l'adaptation tous azimuts.

Le poisson est-il ou non markovien ?

Précepteur ou professeur, la question qui se pose maintenant est la suivante :

La meilleure décision d'enseignement peut elle être élaborée en ne connaissant que l'état actuel de l'élève ou faut il prendre en compte son passé ?

Le passé de l'élève, du moins celui qui importe pour déterminer un apprentissage qui lui soit adapté, est-il entièrement contenu dans son état actuel ? dans sa mémoire à lui ?

Ce qu'il va apprendre dépend-il uniquement de l'action d'enseignement en cours et de cet état donné ?

Si oui, le processus d'enseignement est markovien :

Dites-moi ce que sait l'élève aujourd'hui – ce qu'il a fait hier et avant hier pour l'apprendre n'a aucune importance – et cela me suffira pour déterminer ce qu'il peut apprendre à l'aide des méthodes que je connais ou de trouver les circonstances appropriées qui permettent à cet élève d'apprendre le savoir visé.

Dans le cas markovien, les souvenirs du professeur sur le passé de l'élève ne lui servent qu'à déterminer ses connaissances actuelles d'une façon plus économique.

Il en serait autrement si l'apprentissage à un instant donné dépendait non seulement de ce que sait l'élève actuellement mais aussi de ce qu'il a su ou a appris précédemment. Le processus serait alors non markovien : chaque apprentissage serait fonction d'une suite plus ou moins longue d'états antérieurs de l'élève (qu'il s'en souvienne ou qu'il les ait lui même oubliés) et le système didactique serait dans l'obligation d'avoir lui même une mémoire de ces états.

Oublier pour savoir

L'idée que l'enseignement est un processus Markovien ne sert pas qu'à simplifier la vie des professeurs...

Non seulement ce que l'élève a fait pour apprendre son savoir actuel n'est pas important mais en général, il vaut mieux qu'il l'oublie. Cette idée n'est pas très habituelle.

On présente l'acquisition principalement comme une mise en mémoire de faits, or l'acquisition, c'est plutôt l'oubli des faits non pertinents. Il est bien plus important de savoir oublier, de savoir ce qu'il faut oublier, comment on oublie, comment on fait le ménage, comment on organise le passé, comment on le reconstruit, que de se rappeler très exactement ce que l'on a fait.

Au contraire d'une opinion répandue, le savoir, d'un certain point de vue, c'est l'anti-mémoire, c'est l'anti-histoire, c'est ce qui permet de détacher un fait de son contexte, de ses caractères temporels pour pouvoir l'utiliser ailleurs !

Pour pouvoir utiliser ailleurs ce savoir, justement, il faut oublier tout un tas de choses relatives aux conditions dans lesquelles on l'a appris. Heureusement pour vous, pour les choses importantes que vous savez, vous avez oublié pour l'essentiel les conditions dans lesquelles vous les avez apprises et c'est ce qui vous permet de fonctionner.

Se souvenir pour enseigner

Or le professeur doit gérer les conditions d'apprentissage que l'élève devra oublier. Ces conditions sont elles constantes, reproductibles à l'identique ou évoluent elles avec les étapes de l'apprentissage ? Si comme l'affirme le postulat didactique ces conditions sont spécifiques de chaque notion et de chaque apprentissage et si de plus elles ne sont pas indépendantes, alors le professeur et le système d'enseignement doivent est obligé de prendre en compte une certaine épaisseur du passé de l'élève.

Il ne peut pas prendre l'élève comme ça dans l'état où il est et avancer en ignorant ce qui a été fait auparavant. Il ne peut pas optimiser son enseignement, il rencontrera divers désagréments.

"Pour garder en mémoire de telles série d'actes le professeur devrait avoir une mémoire". Quels arguments militent en faveur de cette thèse ?

Quelles sont les composantes de cette mémoire professionnelle, systématique et didactique ?

Ce qu'il faut, ce n'est pas se rappeler des choses qui sont sans rapport avec l'apprentissage, mais ce qui est en rapport avec la construction du savoir en cours d'apprentissage ou d'acquisition.

Comment se répartit la mémoire du système ?

La mémoire n'est pas toute entière chez l'élève. Il faut qu'il y ait des modifications temporaires du système éducatif et en particulier du professeur. Le savoir qu'il manipule évolue, les connaissances qui l'accompagnent, et la manière dont il les exprime et dont il les utilise aussi. Son rapport au savoir ou ses conceptions doivent aussi changer. Ces modifications constituent au fond sa mémoire didactique. Les laisser au hasard ne simplifie pas l'enseignement. Mais dans quelle mesure peuvent elle être systématique ?

Et dans le cas ou cela semblerait utile, comment former les professeurs à cette idée ?

<u>2. Une question de Jeanne BOLON :</u>

Dans l'article, les exemples donnés sont des exemples qui ont été contrôlés du point de vue du fonctionnement de la non-mémoire ! On se crée des situations dans lesquelles l'enseignant ne peut pas savoir ! Il y a des comparaisons possibles avec des situations effectives de type remplacements qui sont le lot de tous les débutants pendant 4 ou 5 ans.

Ma question porte donc sur la résonance qui pourrait exister du côté de la situation d'un remplaçant.

Avez-vous eu des échos de ce qui a été fait dans de telles situations ?

La question est claire, la réponse ne l'est pas moins : non nous ne l'avons pas fait, pas de façon expérimentale ou empirique, et oui nous aurions dû le faire.

La didactique de base est l'exposé le plus simple possible des savoirs que l'on veut enseigner, des moyens de montrer qu'ils sont acquis et la présentation des exercices correspondants. C'est par essence une didactique sans mémoire et c'est celle que je recommanderai à des remplaçants arrivant dans un classe inconnue. C'est par rapport à cette méthode dogmatique, qui a ses vertus, ses défauts et ses conditions optimales d'emploi, que les autres doivent se définir et s'évaluer.

Je crois pourtant que nos observations à l'école Michelet (que vous connaissez bien), nous ont permis par leurs résultats théoriques, méthodologiques et expérimentaux sinon de remplacer, du moins de préparer de telles études. C'est en tout cas ce que je vais essayer de montrer.

Les premières recherches à Michelet

Les maîtres travaillent à trois sur deux classes : nous avons essayé d'étudier systématiquement les difficultés provoquées par le fait qu'un maître doit continuer une leçon commencée ou préparée par un autre (ils étaient trois à les préparer). Quelquefois l'un pouvait observer ce que l'autre avait fait, quelquefois il ne le pouvait pas.

Nous avions entrepris précédemment ce travail à plusieurs reprises mais il s'est révélé longtemps au dessus de nos forces : en 72-73 à Michelet on a explicité la méthodologie ; vers 74 on a mis au point un plan pour observer différents types de successions.

• Un maître se succède à lui-même.

• Deux maîtres se succèdent, l'un observant ce que fait l'autre.

• Deux maîtres se succèdent sans avoir la possibilité de communiquer sur des choses un peu comparables.

Le but était plutôt de voir ce qu'ils étaient obligés de se demander, ce qui leur manquait comme informations et de voir un peu certains mécanismes.

Les moyens nécessaires : enregistrement des séquences et des interactions, transcription puis analyses cliniques et quantitatives des corpus, n'étaient pas matériellement réalisables à une époque où une bande vidéo un pouce d'une heure valait 500 F et où nous ne disposions que d'ordinateurs très lents.

Certains effets de ce dispositif ont pu être connus très vite ! Par exemple, on s'est rendu compte que la pression du professeur baisse terriblement dans cette succession. Il y a quelque chose dans la mémoire du professeur qui est élémentaire : il repère les erreurs faîtes par les élèves, l'élève qui a fait l'erreur et aussi le rang de l'erreur pour cet élève. Cet enregistrement se manifeste par le fait qu'il n'a pas le même comportement la première, la deuxième ou la troisième fois où un élève commet une même erreur (il montre sa désapprobation, propose un exercice d'entraînement etc.).

Si trois maîtres se succèdent auprès du même élève, une baisse de pression va se produire puis qu'un élève pourra faire jusqu'à six fois la même faute avant de recevoir une sanction du type "troisième erreur".

Ce phénomène s'est d'ailleurs manifesté davantage dans l'apprentissage de la lecture qu'en mathématiques, peut-être parce que la mémoire du professeur y est la plus importante pour les élèves.

Le cas des mathématiques

Les mathématiques offrent l'avantage de se prêter à une présentation très structurée. Je ne juge pas les structures elles mêmes ni le fait d'en utiliser une pour organiser la succession des apprentissages, mais cette structuration du savoir par la culture conduit à présenter des questions les unes après les autres et à admettre, à tort ou à raison, qu'on peut les apprendre indépendamment les unes des autres. Cette particularité des mathématiques protège les enseignants de la nécessité de gérer de nombreux apprentissages contemporains qui durent longtemps et qui demandent donc au professeur plus de mémoire. La tendance des professeurs, est alors de chercher des situations qui leur permettent de traiter les questions l'une après l'autre.

De plus ils ont la chance de pouvoir invoquer la structuration mathématique pour justifier une méthode de construction et d'apprentissage. Les théorèmes servent dans les démonstrations futures et dans les problèmes. Si on admet que faire des démonstrations et résoudre des problèmes est l'indice de la connaissance des mathématiques, on peut être tenté d'en inférer qu'apprendre successivement divers théorèmes est LE moyen de se préparer à en apprendre d'autres. Les enseignants de mathématique ne se privent pas d'utiliser cet argument pour exiger que ces apprentissages successifs fonctionnent comme moyens suffisants "d'apprentissage" de ce qui vient après.

D'où une présentation des mathématiques complètement algorithmisée, ordonnée, avec chaque jour la conviction que chaque savoir est nécessaire au suivant, un système ultra construit et une certaine difficulté à demander aux professeurs de gérer des situations plus ouvertes dans lesquelles il y aurait plus de possibilités temporelles pour l'élève d'appréhender la question.

Julia CENTENO a repris le chantier en 1985.

Elle a fait pendant un certain nombre d'années un travail d'observation de ce type de phénomènes, on avait des films, des comptes-rendus d'observations sur le plan d'expériences que nous avions organisées.. Nous avons cru naïvement qu'avec des analyses de contenu, on pourrait montrer assez rapidement les phénomènes que nous avions repérés !

Nous avons étudié ensemble entre autres les changements de statuts didactiques et le passage d'un niveau scolaire à un autre.

Le statut didactique des connaissances.

Vous prenez une notion mathématique quelconque. Au cours de l'apprentissage, cette connaissance va changer de statut didactique. On peut distinguer des statuts en nombres plus ou moins grands.

Au cours d'une phase introductive, un certain savoir peut être présent, visible pour le professeur, mais encore inconnu de l'élève et inaccessible pour lui.

Plus tard ce même savoir, devenu objet d'un premier enseignement, peut être connu et reconnu par l'élève sans pour autant qu'il puisse l'exprimer ou le définir d'une manière "définitive". Dans cette phase transitoire l'élève est bien venu de faire des remarques diverses, même naïves, d'étoffer le problème par son activité propre, de formuler ses idées dans un langage approximatif.

A un autre stade, généralement plus tard, la forme et la signification scolaire du même savoir est mise en place avec les explications d'usage. Les naïvetés et les ambiguïtés ne sont plus acceptées, les explications doivent être fournies par l'élève.

En phase d'apprentissage terminal au contraire, fini les explications. Maintenant il faut appliquer et montrer qu'on apprend.. La même remarque que le professeur aurait reçue de façon très positive dans la troisième phase, va être maintenant rejetée et jugée sans intérêt.

A chaque phase, les exigences, les méthodes, le vocabulaire, les conceptions des élèves et du maître à propos d'un même savoir évoluent. La fonction de ce savoir change, le rapport à ce savoir change aussi.

Je présente ici une esquisse très grossière. Les statuts didactiques d'un savoir ne sont pas déterminés seulement par les intentions du professeurs, il s'agit d'observer ceux qui apparaissent. Et ils apparaissent en grand nombre suivant les méthodes utilisées. Y. CHEVALLARD les classe pertinemment selon leur caractère : rapport personnel, public, officiel etc.

Chacune des trois grandes formes de savoir (modèle d'action, langage, savoir validé, savoir institutionnalisé) peut (plus ou moins bien) peut être associée à un de ces différents statuts didactiques. Il est bien évident qu'il faudrait savoir à quel moment on en est. Il est facile de relever de nombreux et graves malentendus où le professeur croit avoir entièrement traité une question dont il n'a même pas "parlé".

Ces statuts didactiques se manifestent concrètement lors des ruptures de contrat. Un enseignant en remplace un autre et pose aux enfants des exercices qu'ils ne "savent pas faire". Ces derniers vont protester et lui montrer "où l'on en est".

Nous avons essayé de fabriquer des instruments méthodologiques pour étudier ces statuts. Ces instruments sont toujours très lourds et très difficiles à utiliser comme tout ce qui concerne l'organisation temporelle.

3. L'interdépendance des connaissances (interdépendances a-didactique)

la mémoire est elle dans le savoir ?

Le problème

Nous avons étudié à Bordeaux les phénomènes de dépendance entre apprentissages, après et parmi beaucoup d'autres, mais dès 1968.

Les professeurs reconnaissent que les apprentissages dépendent les uns des autres et donc que les enseignements aussi. De même les apprentissages dépendent des enseignements et réciproquement. Or les cours ne font pas souvent appel de façon explicite à l'apprentissage des connaissances antérieures, sauf en cas d'erreur des élèves. Parfois un court rappel a pour mission de réactiver essentiellement de la terminologie.

Ils se trouvent alors confrontés à deux types de modèles d'organisation : l'un suit la logique de l'enseignement de la matière, l'autre celle de l'apprentissage. Et dans chaque type on peut encore distinguer, dans le premier la logique de l'exposition et la logique de l'utilisation (ou des applications), dans le second celle de l'apprentissage local ou de l'assimilation et celle de l'accommodation ou de la genèse du sujet connaissant.

Pour structurer les apprentissages, les enseignants proposent en première approche le savoir savant transmis par la culture : les théories, les théorèmes, les relations logiques servent de canevas comme nous l'indiquions plus haut. Ils ont aussi l'idée que les apprentissages pourraient être organisés par les applications mais elle se concilie mal avec la première idée.

On pense donc que cette dépendance, cette articulation logique des savoirs, est signifiante pour la construction des savoirs chez les élèves. En tout cas, on va faire comme si c'était vrai. On va reporter sur les relations empiriques entre les apprentissages, l'organisation théorique des connaissances et des savoirs.

Certes on ne peut pas établir un théorème avant de l'énoncer parce qu'on a besoin de savoir de quoi on parle, mais est-ce bien ainsi que s'établit et se comprend un théorème ?

Le problème est alors le suivant :

1. existe-t-il des faits contingents et des méthodes qui montrent ce qui dépend de quoi, indépendamment de toutes les rationnalités théoriques ?
2. quelle est la nécessité de ces faits contingents ? dans quelle mesure correspondent-ils à ces modèles théoriques ou à d'autres à construire ?

Approche locale et empirique : méthodologie

Les objets

Imaginez que vous présentiez aux élèves des situations (S_1, S_2, S_3, ...) et que vous leur posiez dans chacune un certain nombre de questions (Q_{11}, Q_{12},...Q_{21}, ...). En première approche nous pouvons confondre S_i et Q_i. Supposons que ces situations aient été construites de façon à ce que l'on soit en mesure d'identifier des connaissances diverses (CG_1, CG_2, CG_3, ...) qu'il faut mettre en oeuvre pour traiter ces situations, pour répondre (correctement ou non) aux questions. Les situations sont le moyen d'observer la présence ou l'absence de certains comportements de réponse (C_a, C_b, C_c,...) définis au préalable (par ex. les comportements de réussite) et de les mettre en correspondance objective dans les situations choisies avec les connaissances dont ils sont l'indice.

"Les connaissances"

L'analyse théorique doit permettre de produire et de justifier un modèle de la connaissance CG_i par un tableau du genre suivant :

Connais. CG_i	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	...
comportement des élèves caractéristique de CG_i	C_a	...	C_b	-	C_a	

Elle consiste à expliquer pourquoi le fait d'adopter le comportement C_j dans la situation S_k est pour un sujet donné l'indice qu'il connaît CG_i, et réciproquement qu'il l'ignore s'il montre un autre comportement. Il faut aussi expliquer dans quelle mesure le fait de connaître CG_i conduit à prévoir le comportement $C_{j'}$ dans une autre situation $S_{k'}$ et enfin prouver que l'ensemble des situations S et des comportements C discrimine CG_i par rapport à d'autres connaissances voisines.

La contingence

Ce dispositif permet alors d'**observer** la présence d'une connaissance chez un élève (en multipliant les questions ou les situations) ou dans une population d'élèves :

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	...
Elève 1	$C_?$	...				
Elève 2						
Elève 3						

Le tableau obtenu représente **la contingence** que l'étude théorique permet d'appréhender : ce que font réellement ces élèves-ci sur ces questions-là.

La connaissance déterminée par S_i, C_j existe dans la population si une proportion "suffisante" d'élèves présentent "à peu près" le patron défini par le premier tableau. Cette condition entraîne en particulier des relations mathématiques entre les variables et entre les sujets : corrélations, agrégations, inertie regroupée selon certains axes, implications statistiques etc. et on peut par ces méthodes attester l'existence ou non de certaines "connaissances".

Méthodes empiriques

On peut aussi de façon empirique regrouper des questions plus ou moins semblables par différents caractères, recueillir les comportements variés qu'elles suscitent et rechercher de façon tout à fait empirique si les agrégats et les relations totalement empiriques qui apparaissent ainsi ne seraient pas explicables entre autres raisons, par des connaissances repérables. Ce procédé est l'inverse du précédent en ce sens qu'il part d'une contingence apparemment définie en dehors de toute contrainte théorique. Notons toutefois que la définition du tableau théorique est finalement indispensable. Elle interviendra à posteriori au lieu d'être dressée à priori dans le premier cas.

Les dépendances entre connaissances

Le dispositif permet aussi de formuler, à priori mais de façon falsifiable, des relations entre diverses connaissances, par exemple d'analyser la dépendances entre deux connaissances d'élèves, ex : (CGA $\Rightarrow$ CGB) ?

Ce sera le cas si "à peu près" aucun élève ne présente les comportements caractéristiques de CGA et les comportements non caractéristiques de CGB.

L'enchevêtrement des connaissances et le nombre des possibilités de relations entre elles est tel que l'entreprise paraît désespérée. Il faut assumer ce fait et bien choisir les objets S, CG, C en fonction du type de relation étudiée.

Les moyens techniques et statistiques pour établir ces dépendances sont très divers, mais certains didacticiens ont contribué et continuent à contribuer à les améliorer pour résoudre ces problèmes. Avec son équipe de Rennes, R. GRAS s'illustre dans ce travail qui devrait être considéré comme plus central en didactique et donc plus répandu.

L'apprentissage, l'enseignement

Remarquons que nous n'avons évoqué qu'une forme frustre des "connaissances des élèves", observées synchroniquement dans des situations a-didactiques. L'étude de l'influence du temps et la définition des "apprentissages contingents" demande quelques développements supplémentaires.

De plus l'analyse des connaissances scolaires, celles qui "circulent" dans la relation didactique requiert d'autres définitions et d'autres moyens.

La dépendance entre les connaissances ou entre les apprentissages ne résout pas complètement le problème didactique : d'abord, même si logiquement A $\Rightarrow$ B, cela n'entraîne pas que tout élève qui constate A en déduit B, ni qu'on observe que CGA $\Rightarrow$ CGB, même si on a enseigné explicitement que "A $\Rightarrow$ B". Et si CGA $\Rightarrow$ CGB, faut il en déduire qu'il suffit d'enseigner A pour que l'élève connaisse B ? ou que l'enseignement préalable de B est utile à l'apprentissage de A ? Les recherches de G. Vinrich (1976) sur ce sujet n'ont guère été prolongées.

Mais le principe reste le même. Il s'agit de définir puis de prévoir et de vérifier des relations complexes entre des conditions et des comportements.

Recherches sur les processus didactiques.

Premier exemple.

Vers 1963-65, on a donné les mêmes les même trente leçons et exercices dans 15 classes de Dordogne et nous avons relevé les dépendances entre les résultats. Les instituteurs refusaient à l'époque de donner les résultats de leurs élèves, Ils ne nous communiquaient que les pourcentages de réussites par classe et par jour ! Imaginez qu'on veuille étudier des résultats de dépendance entre deux stades de connaissances. Il s'agit de savoir si la réussite à l'un des stades a une influence sur la réussite à un autre stade. Par exemple, une connaissance introduite implicitement dans S1 devient un objet d'étude dans S4

Il suffisait de repérer tous les couples de situations réalisant ce profil et de chercher s'ils sont liés ou corrélés plus étroitement que les autres. (problème statistique).

On a trouvé des liaisons ! mais on s'est surtout aperçu qu'il y avait des corrections à apporter dues à la stratégie du professeur. S'il a posé des exercices un peu trop difficiles à une leçon, alors la fois d'après, il pose des questions plus faciles pour récupérer des élèves. Autrement dit, la gestion temporelle des résultats des élèves n'est pas uniquement commandée par le savoir des élèves mais aussi par la stratégie du professeur.

Les résultats dans une classe expriment une négociation entre le professeur et les élèves. Les corrections suivent des lois plus complexe que cette relation empirique que nous supposions.

Deuxième exemple de recherches sur les processus d'enseignement.

Alors quel est le degré de liberté du professeur par rapport à ces relations de nécessité entre les savoirs ? Si tout est déterminé par le savoir lui même, si tout est contenu soit dans l'enfant qui se développe, soit dans les savoirs qui sont articulés, il n'a pas besoin lui, d'avoir une mémoire.

A la suite des travaux de VINRICH, Danièle COQUIN a analysé dans sa thèse un travail d'Yvon TOURNEUR, qui consistait à proposer un enseignement par diagnostic et remédiation. C'était bien avant qu'on parle de cela dans les chaumières ! Il avait publié un gros livre dans lequel il prenait les objectifs du programme, posait des questions aux élèves et selon les erreurs commises, les renvoyait à des informations particulières.

Nous avons posé les questions prévues à des élèves et relevé leurs erreurs. On a vérifié s'ils ignoraient réellement les connaissances dont l'absence était supposée être la cause de l'erreur; et en général ce n'était pas le cas ! Nous savons qu'à l'inverse une réponse juste n'assure pas la connaissance. Nous avons cherché à savoir si, leur apprendre ces connaissances les aidait à résoudre le problème complexe. Ce n'était pas vrai non plus !

Et on ne peut pas non plus nier une certaine validité des hypothèses de Tourneur : nous avions pris deux chapitres distincts et l'un les vérifiait assez bien et l'autre pas du tout (exemple : la résolution d'une équation). Dans certains cas l'élève peut réussir en traitant d'un coup l'ensemble des données, alors les découpages en morceaux ou les explications particulières n'ajoutent rien et ne lui permettent pas de corriger ses erreurs, alors que dans d'autres cas ça marche. (ceux où la chronogenèse dont nous parlerons plus loin s'articule sur la topogenèse).

Evaluation de l'approche locale empirique

Pour l'instant la statistique n'offre pas de bons instruments pour des analyses assez simples de la temporalité didactique.

Les modèles ci dessus sont déjà relativement complexes et n'existent qu'au prix de simplifications que d'aucuns trouvent excessives.

Malgré leurs imperfections permettent-ils quand même d'observer une certaine adéquation de la structuration savante des savoirs à l'organisation de leur apprentissage ? Dans quelle mesure peuvent-ils accompagner des réflexions plus "qualitatives".

Permettent-ils de mettre en évidence des conditions originales d'existence de connaissances qui seraient produites par des connaissances ou des apprentissages antérieurs ?

A eux seuls non, pas vraiment, pas encore. Ils fournissent beaucoup de renseignements intéressants, des résultats locaux, des pistes de recherche mais pas des preuves irréfutables et générales, si tant est qu'il en existe. Ils servent à préciser le discours didactique, à en contrôler la consistance, à tempérer ses prétentions - ce n'est pas si mal - La méthode ne permet pas de se reposer sur un programme purement empirique ou expérimental : il faut reprendre et poursuivre le travail théorique.

Plusieurs voies s'offrent à nous pour cerner les éléments pertinents des dépendances entre les apprentissages en situation scolaire : elles concourent toutes à éclairer les rôles réciproques de diverses mémoires

- celle de l'élève,
- celle de la connaissance
  conceptions et obstacles,
- celle du savoir et de ses structures,
- celle portée par les situations elles même et par le milieu,
- celle du système : statuts scolaires des savoirs induits par les différentes méthodes.

4. Approfondissements Théoriques

Conceptions, obstacles et contradictions.

La correspondance entre les connaissances et les comportements vue par les seules réussites était visiblement trop naïve. Il a fallu distinguer des patrons de réponses (réussites et erreurs) qui correspondent au traitement d'une même notion mathématique dans un ensemble d'exercices suivant une même manière de la concevoir et de l'utiliser. Les connaissances se structurent en conceptions, les connaissances fausses et les connaissances vraies doivent être définies et engendrées de la même manière.

Pour identifier des familles de comportements qui apparaissent dans les analyses de données que nous avons évoquées plus haut, il a fallu se référer à des ***conceptions*** c'est à dire à des ensembles de connaissances et de savoirs qui travaillent dans la solution des situations proposées.

J'ai identifié plusieurs conceptions des rationnels et RATSIMBA-RAJOHN dans sa thèse en a mis deux en évidence : la commensuration et le partage de l'unité.

Il a montré en outre que, si on enseignait d'abord la commensuration (comme définition) et qu'on essayait ensuite de lui substituer l'autre conception on renforçait toujours le modèle initial, et ce malgré l'appui d'expériences démonstratives effectuées par les élèves ! Autrement dit certaines connaissances font obstacle à l'acquisition d'autres et la destruction d'un modèle primitif, est très difficile !

La regroupement des connaissances en conceptions devait être plus facile à mettre en évidence dans le cas où il était associé à un ***obstacle épistémologique*** que dans les cas ordinaires où il fallait recourir à l'instrument méthodologique incroyablement lourd présenté ci dessus.

Le phénomène montré et expliqué, il a fallu refréner les ambitions réformistes : On ne peut pas facilement transformer le savoir des élèves ! Ce qu'ils ont rencontré, ce qu'ils ont utilisé pour fabriquer un savoir donné va devenir un instrument constitutif de la topogénèse.

Plus récemment RATSIMBA-RAJOHN a poursuivi ses travaux, et montré que les élèves acquièrent des conceptions contradictoires et les conservent ou non suivant les méthodes pédagogiques. Nous essayons d'expliquer ce fait bien connu par d'autres raisons que simplement la nature incohérente des élèves, il semblerait que ce soit pour répondre à des exigences implicites de la maïeutique scolaire.

Topogenèse et Chronogenèse

La mémoire est-elle dans l'organisation des savoirs ?

L'organisation des savoirs

Il est commode de reformuler maintenant notre problème en utilisant les termes de CHEVALLARD.

Théoriquement la table de vérité d'une formule permet de savoir tout de suite si elle est vraie ou pas. Il n'y a pas de démonstration mais simplement la preuve "sémantique" qu'elle est valide, que toutes ses réalisations sont vraies. Mais en réalité il est plus économique (et même par fois nécessaire) d'établir d'abord des métathéorèmes et de remplacer la vérification de chaque ligne par des raisonnements.

De la même manière, les articulations des théories mathématiques sont utilisées par l'élève ou par le mathématicien comme moyen de connaître les mathématiques. Ce qu'il savent l'un comme l'autre est articulé. La collection amorphe (sans articulation) des théorèmes d'une théorie serait beaucoup plus difficile à établir, à communiquer à apprendre, à utiliser.

Les sortes de liaisons utilisables sont très nombreuses. Certaines comme les règles syntaxiques ou le raisonnement logique assurent la constitution même ou la validité des connaissances alors que d'autres comme l'analogie, sont plus lâches, plus incertaines, plus arbitraires ou même purement mnémotechniques.

Certaines de ces liaisons du type chronologique : question-réponse, problème-solution, cause-effet... établissent entre les savoirs des relations qui correspondent à une construction temporelle. L'ordre des découvertes relatives à une notion mathématique peut s'expliquer après coup par toutes sortes de raisons et par la être en partie réduit à des relations synchroniques, mais il contient aussi une dimension historique irréductible qui le rend unique.

L'idée qu'une théorie possède des structures et que chaque structure permet de retrouver ou d'engendrer tous les théorèmes, toutes les connaissances d'un champ théorique ou une théorie par des relations de logique conduit à appeler "chronogénèse" les structurations qui font appel à des relations chronologiques, et "topogenèse" ("Topos", la position) les autres. Toutes doivent permettre à un moment donné, d'articuler les savoirs entre eux de manière à les produire, à les retrouver, à les utiliser.

Une chronogenèse produit au moins une topogenèse et d'une certaine façon toute topogenèse pourrait être considérée comme modèle possible ou résultat d'une chronogenèse.

Quels rapports de nécessité et d'adaptation existent entre elles ?

L'épistémologie génétique

On peut penser que l'organisation actuelle du savoir et des connaissances est la meilleure topogenèse organisable en chronogenèse, c'est à dire le meilleur compromis qu'on ait trouvé entre ce qu'il faut vivre pour apprendre et la structure des connaissances qui sont ainsi apprises.

On peut donc faire le choix de prendre "la meilleure" topogenèse comme chronogenèse. L'élève apprendra d'abord ce qui est fondamental, puis les théorèmes etc...L'enseignement axiomatique des mathématiques réalise parfaitement le projet. Il suffit que l'élève consente à apprendre ce qu'on lui démontre vrai et soit capable d'apprendre ainsi à dériver lui même des assertions.

Dans le choix opposé il n'y a pas de raisons de prendre une topogenèse plutôt qu'une autre. Il y en a beaucoup. On peut faire des axiomatiques très diverses et de toute manière, il n'y en a aucune qui soit adaptée au mode habituel de construction des savoirs et des connaissances par un sujet !

Il faudrait au contraire, suivre les lois de la psychologie, les lois de la construction des savoirs et des connaissances que l'on peut observer chez les sujets en dehors des intentions didactiques et on calque là-dessus la rencontre des connaissances que l'on va enseigner.

Prendre l'épistémologie génétique comme modèle d'apprentissage c'est enseigner les connaissances dans l'ordre où elles apparaissent dans les manifestations des sujets. En réalité, si ces savoirs apparaissent naturellement, on se demande pourquoi on veut les enseigner. Est-ce pour avancer, pour arriver plus tôt ?

On peut aussi décider d'enseigner à chaque moment du développement ce qui parait le plus accessible et le plus facile, les connaissances "prochaines", celles qui appartiennent à la zone proximale de développement de VIGOTSKI. Cela ne change ni le principe ni l'ordre d'apparition.

Dans les deux cas il faut espérer que les acquisitions ne seront pas trop éparpillées et qu'il sera possible ensuite de les regrouper en savoirs cohérents. L'usage strict d'une chronogenèse "naturelle" conduit encore à des contradictions.

Quelle liberté le didacticien peut-il prendre par rapport à l'épistémologie génétique ?

Et d'abord, est-il aussi libre que cela ? Est-ce qu'on a vraiment la possibilité d'enseigner suivant une logique qui serait tellement différente de ce qu'on veut obtenir comme connaissances finale ? A-t-on vraiment la possibilité de faire cela ? On apprendrait selon des relations qui n'ont rien à voir avec la structure des savoirs que l'on veut obtenir à la fin de l'enseignement ? Les choses seraient structurées d'une manière complètement différente de ce qu'on voudrait obtenir à la fin comme organisation du savoir ?

Il faut donc trouver les règle d'une combinaison optimale des deux genèses.

Un effet de la dysharmonie des genèses

L'insuffisance des connaissances didactiques à ce sujet laisse le système éducatif dans l'incapacité de gérer raisonnablement ses réformes.

Par exemple, avec raison me semble-t-il on avait beaucoup diversifié les situations d'apprentissage des nombres au cours préparatoire dans les années 70-80 de façon à leur donner un sens plus correct et plus riche. Le comptage devait accompagner l'apprentissage mais non en être le guide et l'essence. On a vu revenir, comme une avalanche, l'apprentissage des nombres par le seul comptage. Il faut apprendre à compter parce que c'est le meilleur moyen finalement d'articuler des nombres entre eux et de les repérer, les identifier. Ce retour fracassant à d'anciennes méthodes s'est appuyé à mon avis sur l'idée qu'apprendre en comptant est le meilleur garant de coïncidence entre les raisons topogénétiques et chronogénétiques de connaître les nombres.

Je regrette que cette contre-réforme, due à des phénomènes d'obsolescences et au rythme trop lent des progrès en didactique, se soit fait sans débat et ait balayé de la culture des enseignants des connaissances utiles et chèrement acquises.

Quoi qu'il en soit **la chronogenèse impose des conditions à la topogenèse et en retour une topogenèse convenable restreint le choix des chronogénèses possibles !**

L'étude du temps didactique a été poursuivie par l'école Marseillaise de didactique dans le cadre de l'étude de la transposition didactique qui est un de ses apports majeurs.

Les interactions situations/connaissances.

(interactions a-didactiques)

Et si la mémoire de l'élève et du système était aussi dans les situations et dans le milieu ?

La théorie des situations

Nous avons évoqué plus haut le problèmes de influences entre les statuts et les relations aux savoirs. A la typologie des situations que vous connaissez correspond une hypothèse sur la dépendance entre les apprentissages.

Par exemple des savoirs ou des connaissances sont tels que, pour pouvoir les formuler proprement, il faut en avoir une conception et donc qu'ils entrent dans un modèle implicite d'action. Certes il est inexact que toujours "ce qui se conçoit bien s'énonce clairement" et réciproquement mais il est parfois presque impossible de dire des choses si on n'en a pas une certaine conception et ce qui ne se conçoit pas, a du mal, bien que vous l'énonciez, à prendre un sens !

Autre exemple, il faut que les choses aient circulé, quelquefois un certain temps, sans être sous le régime d'un savoir organisé, pour pouvoir être discutées, validées, apprises d'une autre manière que comme une simple forme.

Le fait, pour un étudiant, de connaître un théorème est habituellement constaté, vérifié par la capacité qu'il a à en fournir une démonstration. Mais il arrive souvent que des étudiants de mathématiques ne soient pas convaincus par les démonstrations qu'il donnent ! La démonstration du cours est alors pour eux, un savoir, une connaissance qu'il faut produire à la demande mais elle n'a pas de vertu de preuve. Ce savoir-là est resté au niveau de la formulation et de la culture, il n'a pas été converti en un instrument très efficace dans une rhétorique de preuve ou dans la recherche de la solution d'un problème parce qu'il n'est lié à aucune conviction !

Les dialectiques

Il existe par conséquent une certaine dépendance entre les diverses formes de rapport au savoir et les types des situations. Cette typologie est d'ailleurs faite pour mettre en évidence ces dépendances et les dialectiques qu'elles engendrent : dialectiques internes à chaque type de situation et dialectiques entre types de situation.

Les problèmes rencontrés dans l'action conduisent à des adaptations des modèles implicites qui eux même posent des problèmes d'accommodation interne ou d'adaptation nouvelle. De même pour la formulation et la modification des langages et des signifiants, de même encore pour la création des systèmes d'assertions.

La conversion des savoirs en modèles d'action et réciproquement répond à des composées complexes des situations fondamentales

Il faut souligner que l'idée même que le savoir s'insère dans l'interaction d'un sujet avec une situation (qui le détermine par sa fonction) signifie que son apparition est due en partie à la situation elle même.

Conséquences :

- un savoir acquis comprend la connaissance des situations où il opère.
- un savoir en cours d'acquisition apparaît que si les situations proposées (nouvelles) le suscitent et donc suppléent opportunément, c'est à dire "avec mémoire" à son insuffisance.

Arguments historiques

Une situation réelle s'étudie par sa décomposition selon les types fondamentaux de situations (modèles). Chacun vous le savez définit un type de rapport spécifique au savoir (modèle d'action, langage, assertions et théories, savoirs)

L'idée de confronter cette modélisation à la création historique (et d'appliquer ainsi la didactique à l'histoire et non l'inverse) remonte presque à l'origine de la théorie des situations (opérations sur les Naturels, décimaux). Y. CHEVALLARD a proposé de distinguer trois formes de savoirs qui correspondaient exactement aux trois types a-didactiques fondamentaux. En les nommant proto-mathématique, para-mathématique, et mathématique, il permettait de les étudier directement sans trop de raideur et de les confronter ensuite à la théorie.

Vous savez quel usage nous en avons fait à propos des décimaux.

Nous nous intéressons aujourd'hui seulement aux rapports entre ces différentes formes mais il faut les rappeler..

Al Uqlidisi (IX$^{\text{ème}}$-X$^{\text{ème}}$) atteste d'un usage protomathématique des décimaux. Il s'intéresse aux fractions décimales au point de les écrire de façon spéciale, (comme aujourd'hui). Il montre combien les calculs sont faciles dans ce cas. On pense qu'il a pu reconnaître que ces fractions décimales pourraient représenter des mesures et qu'il a bien vu leurs propriétés, mais cet usage aurait demandé un effort culturel impensable il ne les identifie pas comme une structure à part et ne leur donne pas de nom !

Dans le rapport de type proto-mathématique, on manipule des structures mathématiques, mais on n'en est pas nécessairement conscient. On regarde ! Par exemple, du temps de Diophante, on s'occupe bien de questions que nous reconnaissons comme des problèmes fonctionnels mais on ne peut pas dire que Diophante ait même soupçonné la notion de fonction !

Al Kashi (1427) déclare, est conscient d'avoir découvert des nombres nouveaux. Il le proclame et en préconise l'emploi au moins dans le monde restreint des astronomes pour faciliter les calculs et les mesures. Il les décrit, mais il ne les définit pas et ne les étudie pas comme un objet mathématique. (il perdra son pari, les mesures d'arcs échappent encore au système décimal).

Dans le rapport para-mathématique, les concepts sont identifiés, utilisés de façon familière. Ils sont supposés connus et sans mystère.

Et enfin Stevin (1585), lui, les définit comme les valeurs prises par l'ensemble des multinomies au point x = 10. Il appelle "multinomie" un élément de la forme :

$$\sum_{i=-p}^{i=\pm q} a_i x^i \text{ avec p, q, i, a, naturels et } a_i < 10$$

Désormais connus par leurs propriétés d'une manière qui en fait des objets mathématiques. Il n'y a plus rien à dire ! Nous savons que la diffusion de cette connaissance dans le monde est encore en évolution.

Je pense qu'il n'y a pas eu de communication entre eux. Il n'est pas sûr qu'Al Kashi ait connu les travaux d'Al Uqlidisi et rien ne permet de penser que Stevin avait pris connaissance des travaux d'Al Kashi. et en tout cas je ne vois pas de filiation nécessaire. Par contre chacun connaissait bien tous les problèmes résolus par ses prédécesseurs. Il fallait seulement que les conditions changent pour rendre possible et intéressante cette connaissance nouvelle.

Dans ce cas l'articulation des savoirs et des connaissances ne se fait pas par la prise de conscience ou la reprise des pratiques ou des connaissances antérieures. Elle est produite par celle des situations. On voit qu'elle peut emprunter des voies très différentes !

Dans quelle mesure l'enseignement peut-il utiliser ce procédé. Derrière chaque didactique, il y a un traitement de la temporalité à analyser.

5. La mémoire des situations didactiques

La situation didactique : un automate, mais fini ou à pile de mémoire ?

Quand Julita CENTENO a repris l'étude de la mémoire du système elle a fait avancer l'approche théorique. En théorie des situations, les situations a-didactiques et didactiques sont des automates. L'hypothèse de base est que la situation modélise un rapport de l'élève avec un milieu, un environnement, qui met en scène et éventuellement l'oblige à apprendre, à fabriquer, à donner du sens à un savoir ou une connaissance qu'on veut lui faire acquérir. Le professeur est un metteur en scène de cette aventure. (tiens, re-Mac Gyver !). Pour les situations a-didactiques je m'étais satisfait d'automates finis. Suffisaient ils pour les situations didactiques. Après tout, le professeur a devant lui un milieu : les rapports de l'élève avec un milieu favorable à l'apprentissage. Pourquoi ne serait-il pas un simple d'acteur comme l'élève ?

Nous n'avons guère pu pousser très loin cette étude. Non seulement à cause de notre incompétence, mais aussi parce que les didacticiens ne sont pas considérés sur les résultats qu'ils obtiennent dans ce domaine. Nous avons pu néanmoins nous convaincre, sur des arguments théoriques et aussi sur des expériences relatives à l'institutionnalisation, que le modèle minimal pour la situation didactique n'est pas markovien et qu'il comprend au moins un automate à pile de mémoire.

On ne peut pas enfermer l'apprentissage du savoir dans un rapport empirique avec une nature a-didactique, même adéquate.

Un individu tout seul ne peut pas savoir si ce qui lui arrive, ce qu'il fait, ce qu'il invente a des vertus en tant que savoir culturel. Il faut qu'on le lui dise. Il faut qu'on transforme des choses qu'il a faite en savoir culturel ; il faut lui donner l'exemple de rapports culturels qui sont les supports de savoirs qu'il fabrique. Il faut qu'on le rassure au sujet de ce qu'il a rencontré et qu'il en comprenne l'intérêt pour résoudre de nouveaux problèmes, etc...L'enseignant est un transformateur provisoire de rapports au savoir (pour employer le vocabulaire de CHEVALLARD).

Je renvoie les curieux à la lecture de notre article, aux travaux d'A. ROUCHIER, de C. MARGOLINAS et d'A. MERCIER.

De manière générale, les didacticiens traitent encore aujourd'hui ces problèmes de temporalité de façon extrêmement rustique.

Changement de niveau scolaire : connaissance, savoir et mémoire

L'organisation macrodidactique des connaissances et des savoirs pose des problèmes a beaucoup de professeur, bien qu'ils pensent que les programmes devraient les régler. Ils traduisent les instructions et les manuels en actes d'enseignement mais leur aventure c'est chacune des leçons. La manière dont elles s'articulent semble à beaucoup ne pas être de leur responsabilité. A fortiori s'il s'agit de l'articulation entre des niveaux ou des cycles scolaires différents.. Problème lancinant bien connu. Au COREM, cette responsabilité est endossée par l'ensemble des protagonistes.

Julia CENTENO s'est mise à observer leurs pratiques et à recueillir leurs remarques et leurs difficultés. Elle pensait que les changements de niveaux produisent des difficultés en partie à cause de la disparition de certaines informations indispensables, habituellement gérées de façon invisible par la mémoire spontanée du maître.

Les enseignants s'étonnent de voir que certains élèves semblent avoir oublié des savoirs dont l'acquisition était pourtant dûment constatée l'année précédente, ou qu'ils ne reconnaissent pas les occasions de les utiliser : "Oui je connaissais la réponse mais je n'ai pas compris ce qu'on me demandait". Il est bien connu pourtant aussi que replacés dans les conditions anciennes ces mêmes élèves peuvent retrouver leurs possibilités.

L'apprentissage et la mise en oeuvre des ***savoirs*** enseignés institutionnalisés s'accompagne d'un environnement de ***connaissances*** dont l'activation dépend de la présence ou de l'absence de certaines conditions. Les connaissances sont les moyens, souvent implicites, de l'action, du traitement de l'information, ou du raisonnement, par opposition aux savoirs qui sont les objets visibles des transactions didactiques. La meilleur représentation des connaissances pourrait être le souvenir des situations où elles se sont avérées.

Souvent l'interprétation et le bon usage par le professeur des productions de l'élève sont dues à sa connaissance du contexte et du passé cet élève : non pas ce qu'il sait mais ce qu'il connaît. De sorte que les connaissances communes au maître et à l'élève permettent l'émergence de savoirs impossibles - non pas à reproduire ou a réciter - mais à mettre en oeuvre sans cela. Cette "mémoire" du professeur est indispensable à l'activité de l'élève. Seuls les savoirs les mieux "décantés" peuvent se passer de tout appui. Les savoirs les plus nouveaux sont ceux qui dépendent le plus de ce halo de connaissances particulières.

Lors du passage d'une classe à l'autre, si le nouveau professeur veut "récupérer tous les savoirs en cours d'acquisition il doit retrouver ou simuler ce halo de connaissances pour pouvoir les réactiver, le temps de passer à une institutionnalisation plus solide, sinon ces savoirs trop contextualisés sont perdus. Le phénomène n'est pas linéaire et certains enfants sauvent très peu de choses de leur passé pour des insuffisances en apparence minimes.

Les programmes officiels et les évaluations des élèves lui sont d'un piètre secours car ils portent sur des savoirs. Il faut qu'il connaisse d'assez près les connaissances de son collègue, c'est à dire les situations qu'il a utilisées, le sens donné à telle notion.

La culture didactique commune des enseignants se substitue en partie à cette mémoire absente, les ruptures les plus graves se produisent lorsque les changements de niveau correspondent à des changements de culture.

J. CENTENO et moi avons émis l'hypothèse que certaines idéologies pédagogiques en prônant en même temps l'indépendance totale des enseignants, l'innovation généralisée (qu'elle soit réelle ou comme le plus souvent seulement supposée) la différenciation et la parcellisation infinie des contenus, l'individualisation forcenée de la relation d'enseignement tendaient à abolir cette possibilité de stimuler les reconnaissances et aggravaient énormément les difficultés des élèves. Nous ne proposons pas d'ailleurs un retour aux anciennes pratiques, mais une meilleurs connaissance théorique et pratique du répertoire des situations utilisables. Les maîtres peuvent prendre des libertés à proportion du développement des connaissances scientifiques en didactique.

Ce qui l'intéressait surtout, c'était la mémoire du professeur et la transposition didactique dont elle est l'agent. La transposition didactique, est la marque matérielle de toutes les transformations temporelles. Elle est, plus ou moins, l'instrument de la mémoire du système.

Elle a étudié et classé avec beaucoup de minutie les utilisations implicites ou explicites, par les professeurs du passé de l'élève. Quel effet positif ou négatif produisent ces rappels ? Qu'est-ce que le professeur veut faire oublier ou qu'est-ce qu'au contraire il ne veut pas qu'on oublie ? quelle influence ont sur ce paramètre les diverses méthodes didactiques.

6. Statuts du savoir et méthodes didactiques

Le changement de statut scolaire

Imaginez un professeur qui utilise le schéma de DIENES. L'ordre (obligé) de rencontres avec les structures était le suivant :

Jouer avec du naturel qui contient la structure.

- Jouer à plusieurs jeux de même structure, L'élève l'ignore au début, mais découvre bientôt que "c'est pareil".

faire expliciter cet isomorphisme, le schématiser, le formuler, le formaliser, enfin l'axiomatiser...

Ce programme véhicule l'idée que toutes les connaissances proviennent du fait que l'on rencontre des exemples similaires et que l'on passe au quotient. Il a eu beaucoup de succès auprès des maîtres.

Il instaure dans la classe une famille de rapport au savoir

- Celui de décor didactique
- Celui de règle explicite d'action
- Celui de moyen de solution
- Celui d'objet d'enseignement etc.

Le passage d'un statut à l'autre dépend presque exclusivement de l'enseignant. Le statut le pus souvent rencontré est celui de décor didactique.

Les connaissances comme décor didactique

Dans une situation a-didactique, certaines structures sont présentes, certaines assertions sont vérifiées, mais elles ne jouent aucun rôle. Elles ne peuvent pas offrir ou enlever à l'élève des choix pertinents au regard du but avoué, elles ne peuvent pas non plus apparaître comme une connaissance utile au sujet pour réduire son champ de décision ou pour déterminer son action. Elles n'ont donc aucun rôle fonctionnel, elles contribuent seulement à donner un "cadre, un décor à l'action. La réalisation d'une situation effective conduit souvent à faire intervenir dans ce rôle des notions variées, étrangères les unes aux autres et qui se trouvent de ce fait liées par simple coprésence.

Mais il arrive que la présence, gratuite, de ce décor soit le fait d'une intention didactique. Le professeur s'autorise par la suite de la familiarité créée par cette présence répétée pour traiter l'objet ainsi rencontré en objet connu ou qui devrait être connu de l'élève. Nous qualifions d'ostension cette stratégie didactique assez hypocrite. Elle repose sur une hypothèse empirique entièrement fausse mais très répandue. Dans sa forme la plus réduite, la situation a-didactique est absente et l'élève est mis en présence du seul décor, qu'il est supposé lire directement. Cette méthode est pas excellence une didactique sans mémoire.

La précession didactique

L'ostension est le procédé privilégié de l'introduction précoce des notions mathématiques.

Sous le prétexte de familiariser les élèves avec des savoirs avant de les leur enseigner, ou pour les leur enseigner avant de les leur expliquer le savoir est installé comme décor !

Prenons l'exemple de l'algèbre.

- On ne veut pas enseigner l'algèbre aux enfants de six ans mais on écrit des choses qui ressemblent à des équations : $3 + 4 = 7$.

On ne veut pas faire d'algèbre aux enfants de CM2 mais on leur fait écrire des lettres pour calculer à l'aide de formules : $PA + B = PV$.

Lorsqu'un élève écrit "3 + 4 = 7"

les nombres 3, 4, et 7 ont en général joué un rôle dans son travail, soit comme données sur lesquelles il a effectué un calcul, soit comme réponse. Il a dû compter ou dessiner ou calculer avec ce 3, ce 4 et ce 7. Ils sont fonctionnels au niveau a-didactique (CHEVALLARD dit "instrumentaux").

Le signe "+" ne sert sans doute pas à établir le résultat et ne représente pas bien la conception qu'en a l'élève. Au mieux il traduit le "et" qui a été utilisé pendant des millénaires avant l'apparition de l'algèbre. Il sert toutefois à indiquer au professeur suivant le code officiel que le problème appartient à une certaine catégorie culturelle : ce n'est pas un soustraction ni une multiplication...Il a donc une fonctionnalité didactique.

Le signe " = " ne peut avoir aucune fonctionnalité car aucun autre signe ne peut apparaître à sa place et parce qu'il apparaît toujours au même endroit (avant le dernier nombre) : c'est un décor. De ce fait sa signification réelle échappe au contrôle. Les élèves manipulent des termes et donc 3+4=7 n'a pas pour eux le statut d'une proposition mais celui d'une transformation, du passage d'un terme à un autre : "3 et 4 sont 7" et même à la suite d'un quiproquo "3 et 4 font 7". M. BOSCH (*) explique l'intrusion de ce + par un désir de montrer l'assujettissement de cette activité aux mathématiques et lui attribue par là une fonction sémiotique.

Cette tendance à la précession, c'est à dire à l'introduction précoce et sans signification des notions mathématiques, s'observe à tous les niveaux scolaires et dans de nombreux secteurs des mathématiques. Est-elle sans danger ? Il est clair que non. Les "décors" les notions non fonctionnalisées ou mal fonctionnalisées se chargent de significations et d'usages erronés qui font obstacle par la suite à un apprentissage cohérent. D'autre part la familiarité avec l'objet nuit à sa remise en question.

Cet exemple de mauvaise transposition et de mauvaise mise en mémoire montre les difficultés de la gestion des statuts scolaires des savoirs et comment les éléments de la situation et les connaissances afférentes sont modifiés de façon durable par les conditions de l'enseignement ou de l'apprentissage.

L'étude du contrat didactique offre de nombreux autres exemples des statuts qu'il est nécessaire de distinguer, des changement de statuts nécessaires à la structuration du rapport au savoir de l'élève et des phénomènes qui s'y manifestent.

la mémoire du système dans les différentes méthodes didactiques

J. CENTENO a aussi noté le rôle de la mémoire du système dans les différentes stratégies didactiques pour déduire quelques prévisions de son analyse ergonomique.

La ***stratégie dogmatique*** sous sa forme ***axiomatisée*** est la stratégie de base de l'étude. Il est inutile de rappeler ici toutes ses propriétés. Elle est théoriquement la plus "simple". Le savoir s'y présente sans débat sous sa forme culturelle achevée, et dans un ordre qui en permet le contrôle. Elle ne requiert aucune composante a-didactique visible, ni même aucune activité du sujet :

Elle consiste dans sa plus simple expression en l'énonciation de tous les énoncés constituant le texte de la théorie : "Voila ce que je veux que vous sachiez". indépendamment de la façon dont vous pourriez l'apprendre et de l'usage que vous pourriez en faire.

Laissons de côté ici les compléments habituels cette méthode : démonstrations des énoncés, exercices d'entraînement etc.

Elle n'est qu'une fiction. il n'est pas possible d'enseigner tous les énoncés d'une théorie. Il faut faire le pari que la communication d'une partie réduite de la théorie permettra à l'élève de produire lui même le reste. Ce raisonnement conduit à partager la théorie en deux parties :

- les théorèmes enseignés, auxquels on peut se référer ou qu'on peut utiliser sans en rappeler la démonstration
- et les problèmes, énoncés que l'élève doit démontrer ou résultats à établir, mais auxquels il ne pourra pas se référer, et qu'il ne pourra pas utiliser sans démonstration.

Proposer tous les théorèmes d'une théorie comme des problèmes est une autre stratégie.

Toutes ces méthodes ne requièrent aucune mémoire temporaire de la part du professeur.

La méthode maïeutique consiste a faire énoncer par l'apprenant le savoir visé.

La fin de la conférence n'a pas pu être rédigée. La transcription fournit un texte un peu décousu et d'une utilité discutable

Dans le système axiomatique, le passé de l'élève est supposé entièrement décrit par le discours enseigné. C'est une fiction et l'élève après la leçon doit reprendre le cours et le réorganiser avec une temporalité qui sera la sienne : c'est ça étudier (le sait-il) !

A l'école primaire, le procédé est inapplicable. Il y a des moments où le professeur contrôle bien que ce qu'il vient de dire a été entendu. Il ne peut pas recommencer à chaque instant. Il est donc obligé de faire l'hypothèse que les élèves suivent.

Le professeur est le maître de la temporalité mais il doit faire beaucoup d'efforts pour faire en sorte que les enfants sachent bien qu'ils ne peuvent pas se dispenser d'être présents.

Par exemple, le professeur donne une consigne, les élèves savent bien que le professeur après, va vérifier, va passer auprès de chaque enfant pour s'assurer que tous les élèves ont bien compris. Effet immédiat : on n'écoute pas la consigne collective, on attend que le professeur vienne vous chatouiller en privé pour vous expliquer ce qu'il faut faire. Le professeur ne va pas exiger une espèce d'hérédité dans son discours. Il y en a qui évitent cela au prix d'une rigidité dans l'exigence qui est insupportable aussi, qui ne laissent aucune place à l'élève pour se fabriquer une temporalité raisonnable.

Dans le discours dogmatique et organisé, les informations sont dites une seule fois et doivent être immédiatement et définitivement disponibles : Il n'y a pas de temps d'apprentissage.

Alors on peut aménager des temps d'apprentissage en répétant deux ou trois fois, en insistant, en revenant avec deux ou trois exercices. Cela est une transformation pédagogique, même si l'exposé est dogmatique, d'un exposé axiomatique.

Ces transformations permettent de ménager une fausse temporalité de l'élève, une fausse mémoire, et surtout de renvoyer à l'élève la responsabilité de sa mémoire.

"Moi j'ai dit des choses, je veux bien faire quelque chose pour vous aider à comprendre, mais je n'ai pas à tenir compte de ce que vous pourriez me dire, dans l'organisation de mon discours !

Dans le cas de la maïeutique, c'est différent !

Le professeur pose des questions, et choisit parmi les réponses qui lui sont faites, celles qui lui permettent d'aller vers ce qu'il considérera comme l'acquisition ou la communication des savoirs qu'il veut transmettre.

La temporalité de l'élève, dans ce cas entre en scène. Evidemment, s'il y a un professeur et un élève, on peut coller chaque fois au passé, à l'acquisition, à la compréhension de l'élève. D'où l'idée que le précepteur serait la situation didactique idéale !

Dans le cas d'une classe, la relation est beaucoup plus fragile. Bien souvent il ne s'agira que d'une simple mise en scène d'un exposé dogmatique.

N'importe quel exposé dogmatique peut être transformé en maïeutique. Par exemple, je veux avoir une première déclaration, je pose une question qui va rendre assez évidente la déclaration à obtenir. Si je la présente trop fermée, le résultat est ridicule ! Si je commence les mots et vous laisse le soin de les finir, c'est un espèce de test de closure qui permet au professeur de s'assurer que les élèves suivent. C'est une forme de maïeutique tout à fait élémentaire.

Si vous avez affaire à une classe, ça devient très fragile car vous ouvrez, et si vous gérez mal la situation, dès que vous posez une question, il y a un tas de gens qui veulent vous répondre, même si c'est à côté de la question, pour parler, pour que vous vous occupiez d'eux, pour un tas de raisons possibles, pour alimenter ou faire plaisir au professeur. La règle du jeu, c'est de dire des choses intéressantes ou bien de dire la bêtise. On sait que le professeur en a besoin ! On a presque l'impression que l'élève le fait à titre didactique et qu'il a très bien compris le jeu dans lequel il fallait entrer pour que ça marche. Cela va permettre au professeur d'avancer, mais ça devient fragile parce que le professeur va être soumis à toutes formes d'intentionnalités. Il n'est pas dit qu'il obtienne ce qui lui permettrait d'avancer dans la direction qu'il souhaite, et qu'en prenant en compte la réponse obtenue, il serve l'ensemble des élèves pour apprendre. Les autres ne peuvent intervenir que par procuration !

Si la réponse à la question du professeur n'est pas la bonne, elle ne permet pas d'établir les relations temporelles qu'on veut avoir. Alors, le professeur est légitimé à ignorer les réponses idiotes ou celles qui ne lui servent pas. Cela devient une forme de présentation qui assez vite a ses limites. Faire entrer le discours de l'élève dans les décisions du professeur, c'est finalement ça qui va exiger de la part du professeur, un système de mémoire et une organisation didactique de sa mémoire.

Le problème qui va se poser maintenant c'est : quels sont les phénomènes qui vont être liés, chez un professeur donné, à son rapport temporel et comment va-t-il structurer sa mémoire ?

Est-ce que cette mémoire est indépendante de son style pédagogique ou didactique ?

Est-ce qu'il y a des manières d'être qui soulagent le professeur de la nécessité d'avoir une mémoire ?

Quels sont les inconvénients ou les avantages d'en avoir trop ?

Qu'est-ce que le professeur doit être lui aussi en mesure d'oublier ?

Vous savez bien que le professeur doit donner l'impression aux élèves qu'il sait tout et qu'il est prêt à oublier tout ce qui n'est pas important. Les élèves se voient comme ça dans le regard du professeur. Donner aux élèves l'idée que chacun est pris sous le regard du professeur qui comprend ce qu'on est en train de faire.

Eh bien le maître, c'est quelqu'un qui vous accompagne dans les décisions, qui vous transforme en autodidacte d'une certaine manière, avec l'idée que ce que l'élève fait va intervenir dans les décisions du professeur c'est à dire que le professeur a une mémoire !

Avec Julia CENTENO, nous avons essayé de décrire ces faits. Elle a fait des grilles des pour relever les faits de mémoire.

Nous avions commencé à préparer les transcriptions pour en faire l'analyse lexicale.

J'espère que Claire MARGOLINAS, qui va reprendre les travaux de Julia CENTENO, pourra mettre cela à la disposition des chercheurs.

Le travail de la mémoire : rapport entre ce qui s'est passé et ce qu'on dit qui s'est passé; la réorganisation après coup !

Presque toujours, ce qui est important pour apprendre se passe entre deux séquences. Vous avez fait quelque chose, et le lendemain, le professeur dit ce qui s'est passé la veille.

C'est là que l'on voit le travail sur la mémoire à l'oeuvre, grâce à la mémoire didactique du professeur ! Il va raconter des choses que les élèves ne pourront pas nier, bien que ça ne corresponde absolument pas à ce qui s'est passé ou à ce qu'ils ont fait, mais qui va permettre d'organiser la topogenèse en l'appuyant, avec la distance voulue, par rapport à la chronogenèse, l'après coup, la réorganisation après coup de sa propre vie, la lecture de son histoire personnelle.

Quelles sont les règles de ce truc-là ? Jusqu'où peut aller le mensonge, et si on ne veut pas mentir, est-ce que ça marche ? Et si on reprend la leçon exactement là où on en était, est-ce que ça va marcher ? Non !

Alors, qu'est-ce qui a changé dans le rapport qu'il y avait au fonctionnement du savoir. Cela va permettre de comprendre qu'est-ce qu'on attend d'une leçon où on établit un rapport effectif de l'élève avec un problème donné.

Est-ce que c'est vraiment utile de jouer à la marchande pour comprendre ce que fait la marchande, quand on est au CM2 ?

Est-ce bien nécessaire d'aller faire des choses matérielles très longues, avec un rapport très faible avec le savoir qu'on veut aborder ?

Qu'est-ce qu'on récupère des longues leçons, où l'on dit que l'élève est actif, dans l'organisation des savoirs qu'il est en train d'apprendre ?

Vous voyez le genre des questions que l'on peut se poser à partir de ça, et les grilles à chaque fois doivent être différentes. Il y a un travail pour beaucoup de chercheurs là-dedans. Ce qu'on voudrait sortir, ce n'est pas du tout des conclusions, mais c'est plutôt des questions et des modes un peu originaux pour aller interroger ce qui se passe dans les classes, le remettre en perspective, etc...

C'était notre objectif ! Chemin faisant, on a quand même rencontré des problèmes intéressants.

NDLR : un court débat à partir des questions de l'auditoire a suivi cette conférence.

ENSEIGNEMENT DE LA DIALECTIQUE OUTIL-OBJET ET DES JEUX DE CADRES EN FORMATION MATHEMATIQUE DES PROFESSEURS D'ECOLE

Conférence de Régine DOUADY, le 25 mars 1993

1. Introduction

Je ne chercherai pas à décrire la dialectique outil-objet ni les jeux de cadres (notés DOO et JdC dans la suite). On pourra se reporter à (Douady R.1984,1987,1991). Je me situe dans le contexte de la formation des enseignants, qu'ils soient professeurs d'école ou professeurs de mathématiques. Cependant, j'illustrerai mon propos par des exemples pris à l'école primaire.

Les questions qui m'intéressent sont les suivantes :

- quel rôle DOO et JdC peuvent-ils jouer dans l'apprentissage des mathématiques et, par contre coup, dans la formation d'un enseignant en charge de cette discipline ?
- s'ils sont retenus comme contenus de formation, quels problèmes d'enseignement posent-ils?
- peut-on envisager des stratégies de formation favorisant chez les formés la disponibilité opérationnelle de ces connaissances?
- quelles sont les difficultés de mise en oeuvre des stratégies retenues?
- Pour chacune des questions précédentes, la réponse dépend-elle des concepts, des niveaux scolaires ?

Bien sûr, il ne s'agit pas de répondre à toutes ces questions, mais seulement de situer la D.O.O. par rapport à elles.

2. Explication du vocabulaire

L'expression *dialectique outil-objet* comporte trois mots.

* Le mot *objet* fait référence au savoir institué, à un moment donné, à sa représentation formelle, à l'aspect culturel et ce, de différents points de vue. Au niveau de l'ensemble des objets, il y a une idée de cohérence, d'organisation globale du savoir.

Comme objet, un concept est défini sans référence à un contexte particulier, sans référence à un chercheur particulier, conformément aux règles du jeu permises en mathématiques et qui, elles, ont un caractère a-temporel.

* Le mot *outil* fait référence au fonctionnement des notions mathématiques, explicitement ou implicitement, notions constituées en objets ou seulement en voie de l'être. Que permettent-elles de faire à un chercheur ou à une équipe, dans la *dynamique mathématique* ? J'entends par là la prise en compte d'un ensemble de questions, de problèmes, de recherche de stratégies de résolution, des stratégies elles-mêmes,

d'identification des objets impliqués dans le travail de résolution, de reformulation dans des registres ou dans des cadres différents, de recherche de liens entre des questions apparemment étrangères...

Comme outil, un concept est impliqué dans un contexte problématique par quelqu'un (individu ou groupe), à un moment donné. Ceci n'empêche pas qu'un même outil soit adapté à différents contextes, sous l'action de différents chercheurs, à différents moments.

Ainsi les mots outil et objet renvoient à deux significations des notions mathématiques qu'il est important de distinguer de plusieurs points de vue :

-*scientifique* - lorsqu'il s'agit de décrire ou organiser un exposé oral ou écrit de mathématique : s'agit-il d'exposer des définitions, des théorèmes avec ou sans démonstration? S'agit-il d'étudier une question mathématique? S'agit-il de modéliser une question d'un autre champ?...

-*épistémologique* - lorsqu'il s'agit de décrire l'évolution

. à l'échelle historique : qu'est ce qui a provoqué sa naissance et son développement, dans quelle(s) problématique(s) et avec quel statut?

. à l'échelle de la psychogenèse.

-*didactique* - lorsqu'il s'agit de décrire et expliquer les choix et raisons des choix de l'enseignant. A la suite de ces choix, l'enseignant prend des décisions et met ses élèves dans une certaine situation. Il s'agit alors de la décrire, de préciser les attentes de l'enseignant, les moyens d'action et les moyens de contrôle à disposition des élèves pour répondre à la demande. Il s'agit aussi de décrire l'évolution des décisions de l'enseignant eu égard à l'interprétation qu'en font les élèves auxquels il s'adresse et à l'effet qu'elles produisent en termes de connaissances et de sens de ces connaissances pour eux .

-*formation professionnelle* lorsqu'il s'agit de mettre en regard la réalité telle qu'elle peut être observée et ce qu'on voudrait.

* Le mot *dialectique* fait référence aux changements de statut des connaissances et à la façon dont ces changements interviennent dans l'organisation du savoir culturellement reconnu et à la façon dont ce savoir joue dans le progrès scientifique.

On sait bien toutefois que ces changements diffèrent selon les concepts et que l'évolution historique peut être très différente de ce qu'on peut observer ou organiser dans un contexte scolaire.

Si l'on s'intéresse à l'histoire des mathématiques, on se rendra compte que les événements se déroulent de façon ambiguë et plus complexe qu'il n'y parait, que plusieurs sens coexistent pour des mathématiciens contemporains, voire chez un même mathématicien selon l'environnement des questions qu'il traite. Dans l'enseignement, on peut focaliser son attention sur l'aspect fonctionnel, sur l'aspect descriptif, sur l'aspect explicatif, faire interagir ces différentes préoccupations.

J'admets que *tout objet institué est un outil potentiel.*

Ainsi peut s'installer, de façon générale mais non exclusive, une *dialectique* entre les statuts outil et objet d'un concept.

Un problème d'enseignement

Qui prend en charge les transformations de statut des connaissances et comment ? Qui en a le contrôle ?

Les *changements de cadres* (à l'initiative de l'acteur de la situation et sous son contrôle : élève, groupe d'élèves ou enseignant) et jeux de cadres (changements organisés par l'enseignant) interviennent de façon essentielle dans ces transformations.

3. Sens et capitalisation du savoir

Deux facteurs contribuent au *sens* d'un concept :

- l'ensemble des questions où il est engagé
- l'ensemble des relations avec les autres concepts engagés dans ces mêmes questions.

Autrement dit, le <u>sens</u> a plutôt à voir avec le <u>statut outil</u>, la <u>capitalisation du savoir</u> plutôt avec le <u>statut objet</u>. Toutefois, les relations entre concepts sont au coeur de la structuration du savoir et de ce fait, *le sens a aussi à voir* avec le statut objet. Plus, il a à voir *avec les transformations de statut.*

Par ailleurs, il arrive aussi qu'au cours de sa scolarité, un élève ait à *capitaliser des méthodes ou des pratiques qui sont des outils et non encore objets.* C'est le cas des représentations graphiques de certaines fonctions qui restent attachées à des contextes qui leur donnent une certaine signification, même si, par ailleurs, elles sont dépersonnalisées.

Question : *Comment, dans la relation didactique, se construit le sens des connaissances mathématiques? comment se capitalise le savoir? comment s'articulent la construction du sens et la capitalisation du savoir ? comment s'organise la cohérence ou la compatibilité entre différents points de vue sur un même objet mathématique?*

Toutefois, cette question est trop large. Pour pouvoir l'aborder, on a besoin de préciser les caractères de la relation didactique et les contenus mathématiques en jeu. La DOO offre alors des éléments de réponse.

La DOO a une double signification : épistémologique et didactique.

- Dans sa signification *épistémologique*, elle constitue un *modèle* , partiellement seulement certes, *descriptif* *et* *explicatif* de la relation enseignement/apprentissage d'une certaine notion ou d'un réseau de notions. Elle consiste à décrire et expliquer la production et l'évolution de certaines connaissances en termes de relations entre les questions posées et le savoir existant à un moment donné, en termes de changement de statut des notions en jeu. Les changement de statut résultent de l'étude d'une filiation de problèmes, de relais de questions dans des cadres différents.

La DOO permet, dans certains cas, de questionner les contenus et modalités d'un enseignement existant et de les mettre en rapport avec leurs effets du côté des élèves. Elle permet de tester l'étendue et les limites de la diffusion des connaissances produites par les uns et les caractéristiques de la reprise par d'autres. Notons que les impasses où les uns se sont fourvoyés sont autant de repères pour ceux des autres qui continuent à travailler.

Les *changements de cadres* constituent un élément descriptif du modèle, leur existence ou leur absence dans la réalisation analysée a une dimension explicative.

- Dans sa signification *didactique*, la DOO prend appui sur deux points : sa signification épistémologique et l'hypothèse suivante :
(Hyp.) *pour des élèves en situation scolaire, prise de sens et capitalisation du savoir se développent en dialectique.*

Ainsi, pour certains concepts ou méthodes, objets d'enseignement, mais non pour tous, la DOO schématise une organisation possible de la relation enseignement-apprentissage centrée sur la recherche d'un problème répondant à certaines conditions.

Il s'agit pour l'enseignant

* de bâtir un scénario et une mise en scène de ce qu'il veut enseigner incluant une situation a-didactique au sens de G. Brousseau,

* de gérer les rapports entre ce qu'il propose et ce que les élèves font : les initiatives qu'ils prennent, les contrôles qu'ils exercent, les justifications qu'ils donnent,

* d'organiser la diffusion de résultats encore contextualisés et aider à leur dépersonnalisation,

* d'aider, le cas échéant, à une certaine décontextualisation

* d'évaluer les connaissances des élèves.

Cette évaluation peut prendre des formes très différentes suivant que les notions en jeu sont considérées comme des outils ou comme des objets. En particulier, l'étude d'un problème maillon d'un nouveau processus impliquant comme outil adapté ce qui vient de faire l'objet d'un cycle de la D.O.O. peut être une forme d'évaluation des connaissances dans leur statut d'outil. En effet, c'est une occasion pour l'enseignant de prendre de l'information sur la *disponibilité chez tel élève* de telle ou telle connaissance (en situation, à son initiative et sous son contrôle),

* d'entretenir la disponibilité des connaissances.

Il s'agit pour chaque élève

* d'entrer dans la situation a-didactique : chercher le problème proposé

* d'intégrer son propre travail dans l'expression du travail de l'ensemble de la classe et de le situer par rapport au travail des autres élèves, par rapport aux initiatives ultérieures du maître sur le sujet.

En somme, d'adopter une double attitude : travailler et réfléchir sur son travail.

Le *Jeu de cible* (R. Douady 1984) est un exemple d'ingénierie où l'enjeu est l'extension du champ numérique au CP pour des nombres allant de la dizaine à la centaine. Le processus qui s'appuie sur cette ingénierie porte sur quelques semaines.

Un autre exemple d'ingénierie a pour enjeu le *passage des nombres entiers aux nombres décimaux* en transitant par certaines fractions, ingénierie qui met en oeuvre plusieurs problèmes impliquant plusieurs cadres, et dont la durée du déroulement se compte plutôt en années (R. Douady et M.J. Perrin 1986).

Les *JdC* sont des outils pour mettre en oeuvre la DOO dans sa phase *a-didactique* : spécialement pour suggérer des conjectures ou des questions-jalons : pas intermédiaires dans la recherche d'un problème, et ainsi permettre de créer *du nouveau* à partir *d'ancien* . L'intérêt et la force des JdC résident dans la possibilité, pour le maître, de mettre à disposition des élèves au moins un cadre où ce qu'ils cherchent prend une forme chargée de sens pour eux. L'intérêt des JdC c'est aussi, du côté des élèves, de rendre pertinents et disponibles des outils, méthodes, techniques ... non envisageables dans une première approche du problème qu'ils ont à résoudre. C'est particulièrement le cas du cadre algébrique qui sert à modéliser de nombreux problèmes externes aux mathématiques ou internes mais relevant d'une autre branche.

Mais il est aussi possible et fructueux de *mettre en oeuvre des JdC* **hors** *DOO* . Cela veut dire que pour faire fonctionner des jeux de cadres, il n'est pas nécessaire d'avoir à chercher un problème dont l'outil adapté pour le résoudre est justement l'enjeu de l'enseignement. C'est ce qui se passe à certains moments de l'ingénierie sur les aires de surfaces planes (R. Douady et M.J. Perrin 1984).

Le maître, en faisant pression pour que les élèves changent de contexte, changent de registre, modifient le réseau des concepts et des écritures symboliques en relation pertinente pour les questions étudiées, crée une situation favorable à l'évolution de leurs conceptions et à l'élaboration de nouvelles connaissances disponibles sous leur contrôle.

4. La D.O.O. : un contenu de formation

La D.O.O. peut jouer plusieurs rôles.

4.1 Outil pour le formateur

Elle peut être un instrument didactique à disposition du formateur pour organiser son enseignement de mathématiques.

En particulier, elle offre la possibilité soit d'apprendre des sujets nouveaux, soit de revenir, sans lassitude, voire avec un certain suspens sur des questions mathématiques déjà traitées. Ceci est intéressant pour les futurs professeurs d'école en général fâchés avec les mathématiques, pour créer une certaine curiosité et les inciter à renouer avec des connaissances supposées disponibles mais de fait non disponibles et pourtant nécessaires à l'exercice de leur futur métier. Bref, pour créer chez eux un rapport aux mathématiques convivial et non plus conflictuel, même s'il exige de l'effort, de la rigueur et de la vigilance.

La D.O.O. est alors un *outil pour le formateur***.** Elle reste implicite pour les futurs enseignants. Il en est de même des changements de cadres.

4.2 Outil pour le futur enseignant

Elle peut être un instrument didactique à disposition du formateur pour confronter les futurs enseignants à des concepts de didactique *dans leur fonctionnement* . Ceci peut se produire

- si les élèves-enseignants doivent élaborer des scénarios pour enseigner une certaine notion ou pour coordonner des notions déjà présentées indépendamment les unes des autres.

- s'ils ont à analyser des processus d'enseignement décrits par leur chronique. Celle-ci peut leur être fournie par le formateur sous forme d'un texte ou d'une cassette vidéo. Elle peut être le résultat d'un vécu personnel de l'élève-enseignant dans l'une des positions suivantes : étudiant en train de faire des maths sous la conduite d'un formateur, observateur direct en classe d'une leçon (ou une série de leçons) assurée par quelqu'un d'autre que lui, enseignant acteur d'un scénario d'une ou plusieurs leçons.

La D.O.O. est alors un *outil pour le futur enseignant***.** Elle donne lieu, dans le premier cas à une institutionnalisation des mathématiques en jeu, et dans tous les cas à une explicitation, non nécessairement décontextualisée, des outils didactiques mobilisés par le formateur ou les formés.

4.3 Un objet mobilisable par le futur enseignant

Elle peut être un objet d'enseignement aussi décontextualisé et dépersonnalisé que possible. *Un objet mobilisable par le futur enseignant***.**

Ces différents rôles qui mettent en jeu à la fois les pratiques et les représentations métacognitives des enseignants vont appeler des stratégies d'enseignement différentes dont on peut attendre qu'elles se fécondent mutuellement.

Les *jeux de cadres* , au sein d'un processus de type D.O.O. ou indépendants d'un tel processus, sont aussi des outils à disposition du futur enseignant. On peut les lui présenter soit implicitement pour résoudre une question didactique, soit explicitement en décrivant en quoi ils consistent, en donnant des exemples, en expliquant comment l'enseignant entend les provoquer chez les élèves et en exploiter les effets.

5. Stabilité ou dérapage dans une ingénierie

Pour remplir leur fonction, les enseignants ont besoin de disposer d'ingénieries qui leur permettent de prévoir sans trop de risque ce qui peut se passer au cours de la réalisation dans la classe. A défaut, ils doivent pouvoir disposer de repères et de moyens d'analyse qui leur permettent de prendre des décisions rapides dans l'action.

J'entends ici par ingénierie un ensemble de leçons organisées pour réaliser un projet d'enseignement et obtenir des élèves un certain apprentissage.

Ceci amène à distinguer les ingénieries selon qu'elles sont construites à des fins de recherche ou à des fins d'enseignement. Les premières ont pour objectif de répondre à des questions que se posent le chercheur. Elles peuvent être très difficiles à conduire, demander une grande expérience professionnelle d'enseignant pour ne pas s'écarter des conditions imposées à la situation. Ce n'est pas un inconvénient. Si tel est le cas, la classe pourra être celle d'un enseignant expert.

C'est le cas par exemple pour certaines leçons de l'ingénierie sur les nombres décimaux mise au point par G. et N. Brousseau et que celle-ci et d'autres collègues expérimentés ont conduit dans leur classe et dont certains problèmes répondent bien aux conditions de la D.O.O. et nécessitent des jeux de cadres pour être traités.. En revanche, la reproductibilité par des enseignants non avertis peut poser problème. D'autres ingénieries sont au contraire très stables. Cela veut dire que la mise en scène à partir de documents écrits donne lieu à une bonne régularité dans les réalisations. Mieux, l'analyse didactique proposée offre la possibilité de faire d'autres choix pour les variables de situation et d'obtenir des réalisations cohérentes avec les prévisions. C'est le cas de la situation proposée par G. Brousseau et bien connue maintenant "l'agrandissement d'un puzzle".

Dans les risques de dérapage, un élément intervient de façon essentielle c'est la *référence à l'expérience matérielle ou physique*.

Va-t-on prendre en compte, dans l'étude proposée aux élèves, les erreurs expérimentales et le domaine de validité du modèle qu'on cherche à construire ?

Si l'erreur de mesure due à la manipulation ou aux limites de l'instrument est du même ordre que l'objet à étudier, si le domaine de validité est plus petit que le champ des expériences réalisable, il y a tout lieu de penser que l'enseignant travaillera dans le modèle pendant que les élèves travailleront eux dans la réalisation - à moins que sous l'effet du contrat, les élèves travaillent aussi dans le modèle. Enseignant et élèves ont toutes les chances de se situer dans des cadres différents malgré un langage commun. On peut alors prévoir un décalage croissant entre les attentes respectives de l'enseignant et des élèves et ce qui se passe effectivement. On peut prévoir une adaptation de l'enseignant sous forme de maïeutique, effet Jourdain, voire Topaze pour éviter un blocage de la relation didactique, sauver la reproduction externe à défaut du sens didactique de la situation.

Ce peut être le cas de la représentation des fractions comme épaisseur d'une feuille de papier : si une pile de *n feuilles* mesure *3* cm, *p piles* de *n feuilles* superposées ne mesurent pas forcément *3 p* cm mais sans doute moins selon la valeur de *p* . De même, si on représente l'addition de deux fractions comme l'épaisseur d'une feuille obtenue en réunissant deux feuilles distinctes, il faudra s'inquiéter de la façon dont est réalisée cette réunion : s'il s'agit de colle, l'épaisseur de la colle risque d'être plus grande que l'épaisseur de chacune des feuilles. En revanche, dans l'agrandissement de puzzle, les erreurs de modèle peuvent être bien distinctes des erreurs de manipulation. Cela dépend de la forme des pièces et de leur combinatoire.

L'analyse en termes de *cadres et changements de cadres* peut être bien utile pour pointer les difficultés et les expliquer au moins partiellement.

6. Des difficultés de réalisation de la D.O.O.

Le processus s'appuie sur la donnée d'un problème mettant en jeu de façon essentielle ce que l'enseignant veut que les élèves apprennent.

1) en amont de la classe

*trouver de *bons* problèmes.

Cela demande que l'enseignant ait des repères pour savoir s'il peut travailler par DOO ou non. Par exemple, les concepts généralisateurs, unificateurs se prêtent mal à un travail par DOO comme le montrent A. Robert et J. Robinet.

*adapter des énoncés existants à une situation particulière

2) en classe, pour enclencher la D.O.O.

Les mathématiques sont-elles un enjeu pour les élèves?

Si oui, comment assurer la *dévolution* du problème aux élèves

Sinon, comment déplacer l'enjeu vers le problème? (cf. l'exemple du calcul mental, cahier DIDIREM 19.1 ou Repères-IREM n°15).

3) en classe, pour avancer

Que peut faire l'enseignant si un élève sèche et ne sait pas exploiter les changements de cadres prévus pour lui permettre d'avancer ?

4) en classe, choisir ce qui est à institutionnaliser et le moment pour le faire, par delà les diversités cognitives et les différences de familiarité des élèves.

Ces difficultés provoquent des problèmes à l'enseignement de la D.O.O. et des JdC dans la mesure où, en principe, il n'y a pas de réponse générale mais des réponses adaptées aux différents élèves et aussi aux contenus mathématiques.

7. Propositions de stratégies d'enseignement

Le formateur a besoin de prendre en compte la réalité de l'enseignement, *telle qu'elle est,* aussi bien que ce qu'il voudrait qu'elle soit. Il a besoin de s'appuyer sur des pratiques vécues et sur les représentations métacognitives des stagiaires et de leur milieu d'accueil. Les stratégies de formation doivent permettre d'intégrer dans l'habitus des pratiques différentes (P. Perrenoud 1994).

La situation de formation fait intervenir les mathématiques de plusieurs points de vue :

- *comme champ scientifique à mieux connaître*. Cela amène à faire des maths comme un étudiant peut le faire : résoudre des problèmes, vérifier les hypothèses de validité d'un théorème, retrouver le démonstration, chercher des contre exemples à un énoncé...
- *comme domaine à enseigner et en particulier à mettre en scène* . Cela demande un travail de découpage du corpus à enseigner respectant bon nombre d'exigences : cohérence mathématique compatible avec un découpage dans le temps, avec une certaine recevabilité du côté des élèves, une possibilité d'évaluation...

Cela demande "d'opérer une décentration par rapport aux objectifs mathématiques auxquels l'étudiant était habitué ....

Ce n'est plus lui qui est au centre de la scène mais les élèves, ce n'est plus sa réussite qui sert à l'évaluation de ce qu'il fait, mais celle des élèves (A. Robert, 1994 journée de formation).

Cela conduit à proposer de combiner plusieurs stratégies de formation. Citons à titre d'exemples celles qu'A. Kuzniak a dégagées dans sa thèse (1994) : monstration, homologie, transposition.

1) Homologie en position d'étudiant une situation d'action

Le formateur essaie de faire vivre aux stagiaires le type de situation qu'il voudrait que le futur enseignant mette ensuite en place dans sa classe.

- il propose aux stagiaires un problème de mathématique. Il l'a choisi et a organisé l'énoncé en fonction de critères didactiques. Il a prévu ce qu'il voudrait institutionnaliser et qu'il voudrait voir réinvesti.

Se pose alors immédiatement la question du choix du contenu mathématique : en relation directe avec les programmes à enseigner ou bien mettant en jeu des notions nouvelles mais susceptibles d'être abordées à partir de leurs connaissances, dans un temps compatible avec le temps imparti à la formation.

Citons un thème de chaque catégorie :

* *Découper dans une feuille de papier un disque et un rectangle de façon à fabriquer un cylindre, fermé à un bout, de volume maximum.*

* *Comment rendre compte de l'irrégularité d'une côte très découpée ?*

Les notions de variable didactique, saut informationnel, outil objet, registre (système sémiotique de représentation), cadres sont des références essentielles pour la mise en forme des énoncés à proposer et la gestion de la situation dans sa dynamique.

- il fait une *double institutionnalisation* : mathématique et didactique. Autrement dit, un cycle D.O.O. du point de vue mathématique puis une explicitation des raisons qui ont amené au choix d'un énoncé particulier, et aussi dans la mesure du possible des décisions prises au cours du travail.

2) Monstration

Observation en classe d'une réalisation satisfaisant aux hypothèses de la D.O.O. et d'une classe mettant en oeuvre des hypothèses différentes.

Prises de notes et analyse avec le formateur à partir des notes prises. Confrontation des points de vue de différents observateurs d'une même leçon, le cas échéant.

Explicitation éventuelle des notions didactiques ayant servi à l'analyse.

3) Homologie en position d'enseignant

Comment enseigner telle notion mathématique, à tel niveau.

- Bâtir des scénarios et envisager la mise en scène

- adapter des ingénieries existantes pour satisfaire certaines contraintes.

Il revient au formateur de choisir un contenu qui se prête bien à une ingénierie de type D.O.O. et un contenu qui s'y prête mal.

4) Transposition

Adopter une attitude réflexive par rapport à sa propre pratique. Au vue d'une réalisation précise, les choix didactiques étaient-ils bien compatibles avec les intentions? La situation a-t-elle évolué comme il était attendu? sinon qu'est ce qui a provoqué les distorsions? quelles décisions ont été prises dans l'action? de quoi relevaient-elles (représentations métacognitives, contrat, savoir...) ? l'analyse faite remet-elle en cause les prévisions pour la suite? si oui, sur quoi faire porter les changements?...

En combinant des stratégies différentes, on pense agir sur les connaissances mathématiques, sur le sens de ces connaissances pour le futur enseignant, sur ses représentations du savoir, sur la manière d'apprendre en relation avec le public élève qui lui est confié.

La D.O.O. et les jeux de cadres sont des éléments qui contribuent à ce programme de formation.

Bibliographie

ARTIGUE M. (1989) Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 9.3, p 281-308 La Pensée Sauvage, Grenoble

BAUTIER E. et ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de pédagogie* n° 84 p. 13-19, INRP, Paris.

BROUSSEAU G. (1987) Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 7.2, 33- 115 La Pensée Sauvage, Grenoble

BROUSSEAU G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 9.3, 309-336 La Pensée Sauvage, Grenoble

CHARLOT B. et BAUTIER E. (1993) *Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques* Repères IREM n° 10 Topiques Editions, Pont à Mousson

COPIRELEM (1991) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome 1, Actes du stage nainal de Cahors-mars 1991, IREM de Paris VII, Université Denis Diderot

COPIRELEM (1993) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome 2, Actes du stage nainal de Pau-mars 1992, IREM de Bordeaux, université de Bordeaux 1

DOUADY R. (1984) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet , Cahier de Didactique n °3, IREM PARIS 7

DOUADY R. (1987) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 7.2, 5-32 La Pensée Sauvage, Grenoble

DOUADY R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement *Repères - IREM* , n°6 Topiques Editions, Pont à Mousson

DOUADY R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir *Repères - IREM* , n°15 , Topiques Editions, Pont à Mousson

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, *Educational Studies in Mathematics* n°20, 387-424

KUZNIAK A. (1994) Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré, Thèse de doctorat, Université Paris 7

PERRENOUD P. (1994) La formation des enseignants entre théorie et pratique, L'Harmattan.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes "faibles", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 13.1, La Pensée Sauvage, Grenoble

ROBERT A. et ROBINET J. (1989) Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier de DIDIREM* n°1, IREM PARIS 7