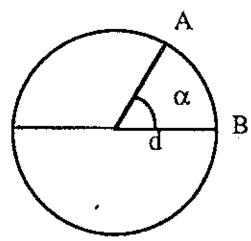
L'Almageste

Martine BÜHLER

Claude Ptolémée d'Alexandrie (IIème siècle après Jésus Christ) est le dernier astronome important de l'astronomie grecque. Il reprend et complète les travaux de ses prédécesseurs, en particulier Hipparque (IIème siècle avant Jésus Christ) que Ptolémée cite dans son ouvrage majeur: La Grande Syntaxe Mathématique (140 ap. J.C.), qui nous est parvenu sous le nom d'Almageste, d'après son titre arabe. Cet ouvrage servira de référence jusqu'à la révolution copernicienne: il présente le système Grec du monde, traite du mouvement du Soleil, de la Lune et des étoiles, et termine sur la théorie des planètes et les tableaux donnant leurs positions.

Dans le chapitre IX du livre I de l'Almageste, Ptolémée se propose d'établir une table des cordes: "*tous les arcs de notre table iront en croissant d'un demi-degré, constamment, et nous donnerons pour chacun de ces arcs la valeur de la sous-tendante, en supposant le diamètre partagé en 120 parties*". La valeur 120 pour le diamètre est commode pour des calculs menés en numération sexagésimale. Les tables de Ptolémée sont l'équivalent de nos tables trigonométriques; en effet:

$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{AB}{d}$ où d est le diamètre du cercle.



Construction de pentagone et décagone

La première étape du travail de Ptolémée consiste à construire simultanément les côtés d'un pentagone et d'un décagone réguliers inscrits dans un même cercle. Il utilise pour cela deux propriétés de ces polygones, qu'on trouve démontrées au livre XIII des Eléments d'Euclide.

Proposition 9: "*Si l'on ajoute ensemble le côté de l' hexagone et le côté du décagone,....., la droite entière sera coupée en moyenne et extrême raison*"[1]...

Proposition 10: "*Si l'on décrit dans un cercle un pentagone équilatéral, le quarré du côté du pentagone sera égal à la somme des carrés du côté de l'hexagone et du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle.*"

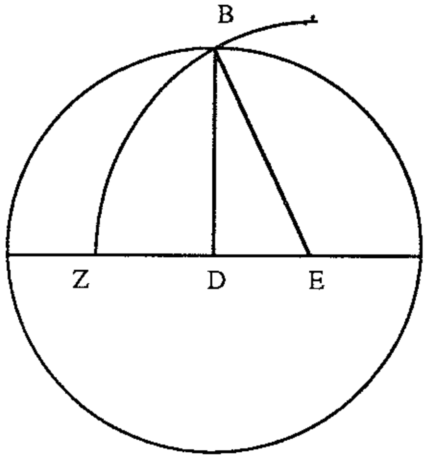
Au début du chapitre IX, après avoir expliqué son propos, Ptolémée donne une construction des côtés du décagone et du pentagone: "*Soit d'abord le demi-cercle ABG décrit sur le diamètre ADG autour du centre D et soit élevé, à angles droits, de D, sur AG, le rayon DB; soit DG coupée en son milieu au*

[1] Rappelons que le segment [AB] est coupé en moyenne et extrême raison en C si $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$. Pour plus de détails sur ce type de partage, lié au nombre d'or, voir Mnémosyne n° 1

point E; joignez EB et prenez EZ égale à EB; enfin joignez ZB; je dis que ZD est le côté d'un décagone, et BZ celui d'un pentagone." Voici une démonstration algébrisée et modernisée de ce résultat.

$GZ \times DZ = (EZ + EG)(EZ - ED) = EZ^2 - ED^2 = EB^2 - ED^2 = DB^2 = DG^2$ donc [GZ] est coupé en moyenne et extrême raison en D et, comme DG est le côté de l'hexagone, ZD est celui du décagone puis $BZ^2 = ZD^2 + DB^2$ démontre (prop. 10 d'Euclide) que BZ est le côté du pentagone. Pour un diamètre égal à 120 parties (nous dirions "120 unités"), Ptolémée obtient donc:

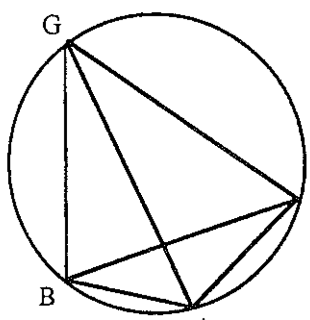
$EZ = EB = 67^p\,4'\,55''$ (que nous écririons $67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2}$) $DZ = 37^p\,4'\,55''$ $BZ = 70^p\,32'\,33''$



Il donne ensuite les côtés du carré et du triangle équilatéral inscrits dans le cercle (dont il connaît les carrés $2R^2$ et $3R^2$). A partir de ces quelques côtés, Ptolémée va pouvoir dresser la table complète des cordes de demi-degré en demi-degré.

Somme et différence d'arcs.

Ptolémée commence par démontrer un lemme (parfois appelé "théorème de Ptolémée" mais qu'on trouve dans des ouvrages antérieurs): "*Soit un quadrilatère quelconque inscrit dans le cercle ABGD; soient menées les diagonales AG , BD; il s'agit de prouver que le rectangle, construit sur AG et BD, est égal aux deux rectangles des côtés opposés ABGD et ADBG*", ce que nous traduirions par : $AB \times GD + AD \times BG = AG \times BD$

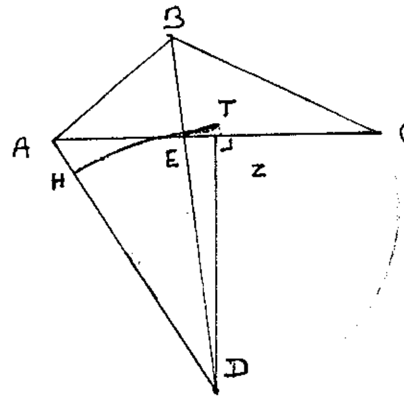


L'application de ce lemme lui permet de connaître la corde soutendant la différence et la somme de deux arcs dont on connaît la soutendante et "de trouver la soutendante de la moitié de l'arc soutendu [par une] droite [donnée]."[1]

---

[1]Le résultat obtenu dans ce dernier cas est d'ailleurs équivalent à notre formule de duplication.

Connaissant les cordes soutendant les arcs de 60° (côté de l'hexagone) et de 72° (côté du pentagone) , on en déduit facilement celle soutendant l'arc de 12 ° (par différence) et celles soutendant les arcs de 6°, 3°, $(1\frac{1}{2})$°, $(\frac{3}{4})$° (division des arcs en 2). Grâce au résultat sur les sommes, on pourrait alors établir une table des cordes pour des arcs multiples de $(1\frac{1}{2})$°. La connaissance de la corde d'un demi-degré, combinée avec les autres par addition et soustraction,permettrait alors de compléter la table (les arcs devant aller de demi-degré en demi-degré.) mais, comme le fait remarquer Ptolémée, même si on connait la corde de l'arc de $(1\frac{1}{2})$°; "*celle qui soutend le tiers de cet arc n'est pas donnée pour cela*", la trisection de l'angle n'étant pas toujours possible.



Encadrement de la corde de l'arc de 1°

Ptolémée détermine ensuite un encadrement de la corde de l'arc de 1°, grâce à un lemme préliminaire:

"*Soit le cercle ABGD et soient menées dans ce cercle deux droites inégales dont la plus grande est BG et la plus petite est AB; je dis que la droite BG est à BA, en moindre raison que l'arc BG à l'arc AB*" $\frac{BG}{BA} < \frac{\widehat{BG}}{\widehat{BA}}$

La démonstration est intéressante: la bissectrice (BD) de ABG coupe [AG] en E tel que GE>EA (car $\frac{EG}{EA} = \frac{BG}{BA} > 1$). Comme AD = DG (cordes soutendant des arcs égaux), D se projette orthogonalement sur [AG] en son milieu Z donc E ∈ [AZ] (car EG > EA). On a donc : AD > ED > ZD. On décrit le cercle de centre D de rayon DE; il coupe (AD) en H intérieur à [AD] (car DA > DE) et (DZ) en T extérieur à [DZ] (car DZ< DE).

Le secteur DET est donc plus grand que le triangle DEZ et le secteur DEH est plus petit que le triangle DEA, donc $\frac{\text{triangle DEZ}}{\text{triangle DEA}} < \frac{\text{secteur DET}}{\text{secteur DEH}}$ mais des triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases donc le rapport des aires des triangles DEZ et DEA est $\frac{EZ}{EA}$ et les secteurs sont proportionnels aux angles donc:

$$\frac{EZ}{EA} < \frac{\widehat{ZDE}}{\widehat{EDA}}$$

$$\frac{EZ + EA}{EA} < \frac{\widehat{ZDE} + \widehat{EDA}}{\widehat{EDA}}$$

$$\frac{AZ}{EA} < \frac{\widehat{ADZ}}{\widehat{EDA}}$$

Or Z est le milieu de [AG] donc (DZ) est la bissectrice de $\widehat{ADG}$ donc $\frac{AG}{EA} < \frac{\widehat{ADZ}}{\widehat{EDA}}$

$$\frac{GA - EA}{EA} < \frac{\widehat{ADG} - \widehat{EDA}}{\widehat{EDA}} \qquad \text{d'où} \quad \frac{EG}{EA} < \frac{\widehat{EDG}}{\widehat{EDA}}$$

Or (BE) est la bissectrice de $\widehat{ABG}$ donc $\frac{EG}{EA} = \frac{BG}{BA}$ et les arcs sont proportionnels aux angles inscrits : $\frac{\widehat{EDG}}{\widehat{EDA}} = \frac{\widehat{BG}}{\widehat{BA}}$

Ce lemme permet un encadrement de la corde de l'arc de 1°.

• Si AB soutend $(\frac{3}{4})°$ (connu) est si AG soutend l'arc de 1° alors AB< AG donc $\frac{AG}{AB} < \frac{\widehat{AG}}{\widehat{AB}}$ donc $AG < \frac{4}{3} AB$ On connait $AB \cong 0^p\ 47'\ 8''$ donc $AB + \frac{1}{3} AB \cong 1^p\ 2'\ 50''$ (résultat donné par Ptolémée au lieu de 1p 2' 50,6") d'où une majoration de la corde de 1°.

• Si maintenant AB soutend l'arc de 1° et AG celui de $(1\frac{1}{2})°$, on obtient $AB > \frac{2}{3} AG$ d'où une minoration de la corde de 1°; le calcul de Ptolémée donne $AB > 1^p\ 2'\ 50''$ Donc, on prend comme approximation de la corde de 1° : $1^p\ 2'\ 50''$; on peut alors calculer la corde de l'arc de $(\frac{1}{2})°$: $0^p\ 31'\ 25''$.

Remarquons la bonne précision des résultats obtenus:

$$\frac{1°\ 2'\ 50''}{120} = \frac{1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2}}{120} \approx 0{,}0087268......$$

$$\sin 0{,}5° \approx 0{,}00872653$$

$$\frac{0^p\ 31'\ 25''}{120} \approx 0{,}0043634$$

$$\sin 0{,}25° \approx 0{,}0043633$$

Le texte intégral du chapitre IX de l'Almageste, accompagné du début des tables de Ptolémée, se trouve dans " Mathématiques et Mathématiciens " de P. Dedron et J. Itard (Ed. Magnard) p. 364 à 370.

Nous n'avons encore jamais utilisé ce texte de Ptolémée avec des élèves. Cependant, il nous paraît approprié pour des activités en classe: la construction des pentagones et décagone réguliers est très simple et peut constituer une activité intéressante, associée ou non à la lecture des propositions d'Euclide en préliminaire. On peut aussi, en classe de première scientifique, sans s'attarder sur Euclide, partir du pentagone et du décagone pour comprendre la construction de la table des cordes, ancêtre de nos tables trigonométriques. L'heure de module peut alors permettre de différencier le travail suivant les élèves, certains pouvant même s'attaquer à l'encadrement (remarquable) de la corde soustendant l'arc de 1°.

Si vous utilisez ce texte en classe, écrivez à "Mnémosyne" pour faire part de votre expérience et nous essayerons ensemble d'écrire une suite "pédagogique" à cet article.