Le problème des partis

Martine Bühler

Rappelons d'abord quel est le "problème des partis" : deux joueurs jouent à un jeu de hasard (du type pile ou face) et le premier qui aura gagné un nombre déterminé de parties sera vainqueur et emportera la mise. Mais ils doivent arrêter le jeu avant qu'aucun des deux joueurs n'ait gagné le nombre nécessaire de parties. Comment doivent-ils alors partager la mise ?

Cette "juste" répartition de la mise a fait l'objet d'une correspondance entre Pascal et Fermat[1], correspondance qui marque le début du calcul des probabilités. Le problème des partis a cependant une histoire plus ancienne, dont on pourra avoir un aperçu en lisant le chapitre qui lui est consacré dans la brochure M.:A.T.H. (I.R.E.M. Paris 7, n° 61). L'étude des tentatives plus anciennes de résolution ainsi que des lettres de Pascal et Fermat a donné lieu à des travaux en classes de terminales D et A_1(voir brochure n° 61).

Le travail proposé ici est plus modeste. Il s'agit d'introduire le cours de probabilité en terminale C en étudiant le problème des partis, puis d'utiliser cet exemple pour illustrer certaines notions, enfin de traiter la généralisation qu'en fait Pascal (à la fin de sa lettre à Fermat du 29 juillet 1654) sous forme de problème à la maison.

Lors d'une première séance en classe, j'ai distribué les exercices suivants (tirés de la brochure n°61):

Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de "pile ou face".

Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne.

Le premier qui aura 3 points gagnera la mise de 64 F.

Mais Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Avant de se séparer, ils veulent se répartir la mise équitablement.

Exercice 1

1)Le vainqueur est celui qui obtient le premier 3 points.

Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 2 points et Bernard 1 point.

Comment Ariane et Bernard peuvent-ils se répartir équitablement la mise de 64 F ?

Indications : Au moment où le jeu s'arrête, il manque donc 1 point à Ariane et 2 points à Bernard pour gagner 64 F. On peut donc examiner les différents scénarios possibles pour les parties qui se joueraient si Ariane et Bernard n'étaient pas obligés de s'arrêter.

---

[1] *Oeuvres complètes* de Pascal SEUIL ou aux éditions de la Pléiade

La présentation de ces scénarios sous forme d'un arbre facilitera la recherche d'une répartition équitable.

On notera A une partie gagnée par Ariane et B une partie gagnée par Bernard.

2) Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 2 points et Bernard 0 point.

Proposer une répartition équitable de la mise.

3) Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 1 point et Bernard 0 point.

Proposer une répartition équitable de la mise.

Exercice 2.

Le vainqueur est celui qui obtient le premier 3 points.

Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 1 point et Bernard 0 point.

1) Quel est le nombre maximal de parties qu'il resteraient à jouer ? Soit n ce nombre.

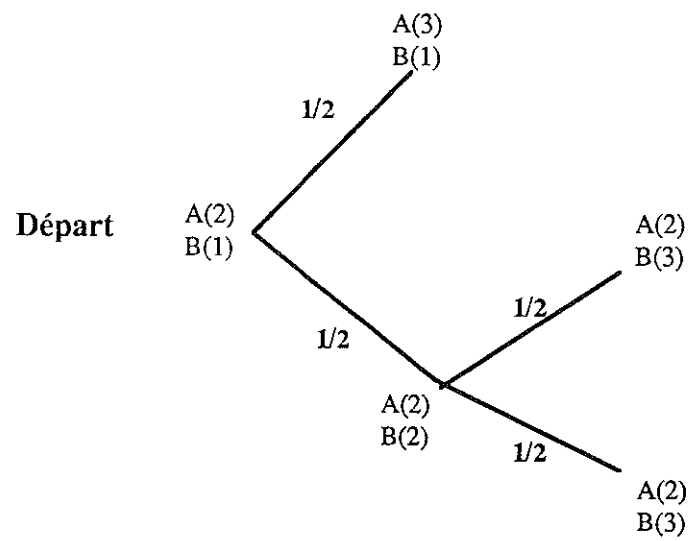
2) En notant A une partie gagnée par Ariane et B une partie gagnée par Bernard, dresser le tableau des résultats que pourraient donner ces n parties, si elles étaient toutes jouées.

3) En déduire une répartition équitable de la mise de 64 F.

Indication : Si le nombre maximum de parties était 3, l'écriture "ABA" signifierait:

- n = 3;
- Ariane gagne la première et la troisième partie, Bernard la deuxième.

Les élèves étaient groupés par quatre; certains étaient redoublants, et, parmi les élèves venant de première S, certains n'avaient pas traité les probabilités l'année précédente. Ces différences de cursus n'ont apparemment pas joué dans la compréhension des exercices. La plupart des groupes ont bien maîtrisé l'exercice 1, établissant un arbre des scénarios possibles et affectant des "chances" à chaque branche de l'arbre, ce qui donne par exemple pour la première question :



Certains cependant (et pas obligatoirement ceux n'ayant jamais fait de probabilités) n'ont pas "pondéré" les branches et ont considéré qu'il y avait trois possibilités équivalentes[1], ce qui leur donnait comme résultat : Bernard a une chance sur trois de gagner et Ariane deux chances sur trois. Cela a été l'occasion d'une discussion sur l'"équiprobabilité" de ces trois possibilités. Et nous avons lu ensemble un extrait de la lettre de Pascal à Fermat du 29 juillet 1654 (voir annexe 1).

L'exercice 2 a soulevé plus de difficultés, l'objection de "Roberval" étant faite spontanément par les élèves : pourquoi considérer que les quatre parties sont effectivement jouées puisque, si Ariane gagne les deux premières parties, le jeu s'arrête ? J'ai alors distribué un extrait de la lettre de Pascal à Fermat du 24 août 1654 (voir annexe 2) où Pascal répond fort clairement à M. de Roberval qui "fit cette objection : que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en quatre parties...". La réponse de Pascal a convaincu les élèves mieux que je n'aurais su le faire (du moins ceux qui ont accepté de lire le texte avec l'attention nécessaire).

Lors d'une deuxième séance, nous avons fait une synthèse et une correction collective, et nous avons cherché un début de généralisation : comment répartir la mise si le gagnant est celui qui obtient le premier 4 points (les conditions étant les mêmes : au moment de l'arrêt du jeu, Ariane a 1 point et Bernard 0 point)? Nous sommes convenus d'employer la méthode de Fermat, l'arbre de l'exercice 1 risquant de devenir trop touffu. La nécessité de raisonner pour dénombrer plutôt que d'écrire tous les cas est alors apparue: en effet, le nombre maximum de parties à jouer est alors 6 et il devient fastidieux d'énoncer les 64 résultats possibles; mais comment connaître les résultats favorables à Ariane, c'est-à-dire ceux tels qu'Ariane gagne 3 ou 4 ou 5 ou 6 parties parmi celles qu'il reste à jouer ? S'il est assez simple de constater qu'il n'y a qu'un résultat tel qu'Ariane gagne 6 parties et 6 résultats tels qu'Ariane gagne 5 parties, les cas de 3 ou 4 parties sont plus délicats. Les élèves sont alors revenus à l'écriture systématique (sauf deux doublants) et ont remarqué qu'il s'agissait, parmi les 6 parties jouées, de "placer" 4 (ou 3) parties gagnées par Ariane : par exemple, A . A A . A est un résultat tel qu'Ariane gagne exactement 4 parties. Ils ont donc énoncé les 15 résultats correspondant à cet "événement", en remarquant qu'il était équivalent de choisir les 4 parties gagnées par Ariane ou les 2 parties gagnées par Bernard. J'ai alors annoncé le cours sur les dénombrements dont un des buts est de calculer le nombre de choix de p objets parmi n(C_n^p) et nous avons constaté que nous avions déjà déterminé $C_6^4 = 15$ et justifié $C_6^4 = C_6^2$. J'ai également à cette occasion prononcé les mots "variable aléatoire" pour désigner le nombre de parties gagnées par Ariane parmi les 6 parties jouées.

Durant le cours sur les dénombrements, il m'est arrivé de faire appel à ce travail préliminaire à titre d'exemple (n-listes[2] ou calcul des C_n^p).

Après le cours de probabilité, les élèves ont eu à traiter la généralisation à m parties de ce problème en devoir à la maison. Le problème est accompagné d'une lettre de Pascal à Fermat, dans

---

[1] erreur spontanée du débutant, même chevronné
[2] terme officiel du B.O. pour n-uplets

laquelle Pascal généralise le problème et donne une répartition de la mise lorsqu'il manque m parties à un joueur et m+1 parties à l'autre joueur(voir en annexe). Dans le Traité du triangle arithmétique, Pascal propose la solution générale dans le cas où il manque n parties à A et p parties à B. Remarquons que Pascal est le seul de ses contemporains à proposer ce type de généralisation.

On pourrait bien sûr introduire une variable aléatoire dans le texte du problème. Certains élèves l'ont fait d'eux-mêmes, appelant X le nombre de parties gagnées par Ariane et s'intéressant à p(X=k) (k=m, m+1, etc.). Peu d'élèves ont traité le 6°) du III, n'arrivant pas à faire les simplifications nécessaires.

Le lien avec le nombre π a séduit et étonné la classe. La plupart ont montré un vif intérêt tout au long de ces activités qui ont facilité la mise en place de certaines notions.

DEVOIR A LA MAISON: **le problème des partis**

Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de "pile ou face". Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne. Le premier qui aura 5 points gagne le jeu. Mais Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Quand le jeu s'arrête, Ariane a 1 point et Bernard 0 point.

1°) Quel est le nombre maximum de parties qui resteraient à jouer ?
Quel est le nombre total de résultats que pourraient donner ces parties si elles étaient toutes jouées ?

2°) Parmi ces résultats, quel est le nombre de ceux tels que :

a) Ariane gagne au moins 4 parties (i.e. Ariane gagne le jeu) ?

b) Ariane gagne au plus 3 parties (répondre indépendamment du a)) ?

En déduire (sans calculs) la valeur de:

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8$$

puis la valeur de : $C_8^4 + 2(C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8)$

3°) Quelle est la probabilité p_A qu'Ariane gagne le jeu ?

La solution de Pascal

A l'origine, le problème est un problème de répartition équitable de mise. Les joueurs A et B ont misé chacun une somme s; on a donc une mise totale S = 2s à partager équitablement après l'arrêt du jeu.

1°)Si la probabilité que A gagne est p_A, que proposez-vous comme répartition ?

Voici ce que propose PASCAL (extrait d'une lettre à FERMAT, 29 juillet 1654). Pascal considère le cas où le jeu s'arrête après la première partie, gagnée par le joueur A (A a donc 1 point et B 0 point).

Il faut dire auparavant : si on a une partie de 5, par exemple, et qu'ainsi il en manque 4, le jeu sera infailliblement décidé en 8, qui est double de 4.

La valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre est la fraction qui a pour numérateur la moitié de la combinaison de 4 sur 8 (je prends 4 parce qu'il est égal au nombre des parties qui manque, et 8 parce qu'il est double de 4) et pour dénominateur ce même numérateur plus toutes les combinaisons supérieures.

"si on a une partie de 5" signifie : "le premier qui a 5 points a gagné le jeu"

A a 1 point et B 0 point. Donc A emporte sa propre mise s plus une fraction de la mise de B, donc A emporte $s + \alpha s$ $(0 < \alpha < 1)$. Cela vous paraît-il logique et pourquoi ?

Dans le texte, "la valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre" désigne α.

2°)Ecrire la valeur de α donnée par Pascal à l'aide de coefficients binômiaux.

Quelle est donc, d'après Pascal, la probabilité p_A que A gagne ? Comparez à votre résultat .

3°)Pascal écrit : "pour une partie de 5, par exemple", sa formule étant valable "pour une partie de (m+1)" $(m \geq 1)$ (le premier qui a (m+1) points gagne le jeu).

Ecrire la formule suggérée par Pascal donnant α_m pour m quelconque $(m \geq 1)$, puis la probabilité p_m que A gagne dans ce cas.

4°)Revenons au cas m = 4.

Ainsi, si j'ai une partie de 5, il m'appartient, sur l'argent de mon joueur, $\frac{35}{128}$ c'est-à-dire que, s'il a mis 128 pistoles, j'en prends 35 et lui laisse le reste, 93.

Or, cette fraction $\frac{35}{128}$ est la même que celle-là : $\frac{105}{384}$ laquelle est faite par la multiplication des pairs pour le dénominateur et la multiplication des impairs pour le numérateur.

Vérifiez les calculs de Pascal.

Donnez la nouvelle formule que suggère le texte pour α_m.

Généralisation

Quand le jeu s'arrête, il manque m points à Ariane et (m+1) points à Bernard $(m \geq 1)$.

1°) Quel est le nombre maximum de parties qui resteraient à jouer ?

2°) Quel serait le nombre total de résultats que pourraient donner ces parties si elles étaient toutes jouées ?

3°)a) Parmi ces résultats, quel est le nombre de ceux tels qu'Ariane gagne exactement m parties ?

b) Quel est le nombre des résultats tels qu'Ariane gagne au moins m parties (i.e. gagne le jeu) ?

4°) Quel est le nombre de résultats tels que Bernard gagne au moins (m+1) parties (i.e. Bernard gagne le jeu) ? (Répondre sans utiliser 3°)).

5°) Déduire des questions précédentes :

$$\frac{1}{2}C_{2m}^{m} + C_{2m}^{m+1} + C_{2m}^{m+2} + C_{2m}^{m+3} + \ldots\ldots + C_{2m}^{2m} = 2^{2m-1}$$

6°)Soit p_m la probabilité que A gagne le jeu.

Montrer :

$$p_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha_m \quad \text{où} \quad \alpha_m = \frac{1x3x5x\ldots(2m-1)}{2x4x6x\ldots\ldots x2m}$$

Y-aurait-il un lien avec l'intégration ?

Exercice:

On pose : $I_n = \int_{n=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ (intégrale de Wallis).

1°) Montrer pour $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)\, I_{n-2}$

2°)a) Calculer I_0 et I_1.

b) Exprimer I_2, I_4, I_6 à l'aide de I_0 et α_1, α_2, α_3.

c) Exprimer I_3, I_5, I_7 à l'aide de I_1 et α_2, α_3.

3°)Démontrer par récurrence sur n :

$$I_{2m} = \alpha_m \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m-1} = \frac{1}{\alpha_m} x \frac{1}{2m}$$

4°)a) Déterminer le sens de variation de (I_n) $n \in N$ et en déduire une inégalité portant sur I_{2m+1}, I_{2m}, I_{2m-1}, puis un encadrement de $\frac{I_{2m}}{I_{2m-1}}$.

b) Déterminer $\lim \frac{I_{2m}}{I_{2m-1}}$. quand m tend vers $+\infty$.

5°)a) Montrer $\lim 2m(\alpha_m)^2 = \frac{2}{\pi}$ quand m tend vers $+\infty$.

b) En déduire $\lim \alpha_m$ puis $\lim p_m$ quand m tend vers $+\infty$.

ANNEXE 1

LETTRE DE PASCAL À FERMAT

Le 29 juillet 1654.

MONSIEUR,

L'IMPATIENCE me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse; j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des partis que celle des dés; j'avais vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le Chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avait jamais pu trouver la juste valeur des partis ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvais seul qui eusse connu cette proportion.

Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche; mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots : car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez; le hasard est égal; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi. » Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'*une* partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : « Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12, et moi 12, qui, avec 32, font 44. »

Or, par ce moyen, vous voyez, par les simples soustractions, que, pour la première partie, il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles; pour la seconde, autres 12; et pour la dernière, 8.

Or, pour ne plus faire de mystère, puisque vous voyez aussi bien tout à découvert et que je n'en faisais que pour voir si je ne me trompais pas, la valeur (j'entends la valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de deux est double de la dernière partie de trois et quadruple de la dernière partie de quatre et octuple de la dernière partie de cinq, etc.

Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver : elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser, et voici le problème dont je faisais tant de cas, comme en effet il me plaît fort :

Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première.

Soit le nombre des parties donné, par exemple, 8. Prenez les huit premiers nombres pairs et les huit premiers nombres impairs, savoir : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, et 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Multipliez les nombres pairs en cette sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, le produit par le quatrième, le produit par le cinquième, etc.; multipliez les nombres impairs de la même sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, etc.

Le dernier produit des pairs est le dénominateur et le dernier produit des impairs est le numérateur de la fraction qui exprime la valeur de la première partie de *huit :* c'est-à-dire que, si on joue chacun le nombre des pistoles exprimé par le produit des pairs, il en appartiendra sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par le produit des impairs.

Ce qui se démontre, mais avec beaucoup de peine, par les combinaisons telles que vous les avez imaginées, et je n'ai pu le démontrer par cette autre voie que je viens de vous dire, mais seulement par celle des combinaisons.

\- - - - - -

Voilà la première proposition, qui est purement arithmétique; l'autre regarde la doctrine des partis et est telle :

Il faut dire auparavant : si on a une partie de 5, par exemple, et qu'ainsi il en manque 4, le jeu sera infailliblement décidé en 8, qui est double de 4.

La valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre est la fraction qui a pour numérateur la moitié de la combinaison de 4 sur 8 (je prends 4 parce qu'il est égal au nombre des parties qui manque, et 8 parce qu'il est double de 4) et pour dénominateur ce même numérateur plus toutes les combinaisons supérieures.

Ainsi, si j'ai une partie de 5, il m'appartient, sur l'argent de mon joueur, $\frac{35}{128}$ c'est-à-dire que, s'il a mis 128 pistoles, j'en prends 35 et lui laisse le reste, 93.

Or, cette fraction $\frac{35}{128}$ est la même que celle-là : $\frac{105}{384}$ laquelle est faite par la multiplication des pairs pour le dénominateur et la multiplication des impairs pour le numérateur.

Vous verrez bien sans doute tout cela, si vous vous en donnez tant soit peu la peine : c'est pourquoi je trouve inutile de vous en entretenir davantage. Je vous envoie néanmoins une de mes vieilles tables; je n'ai pas le loisir de la copier. Je la referai. Vous y verrez comme toujours que la valeur de la première partie est égale à celle de la seconde, ce qui se trouve aisément par les combinaisons.

\- - - - - - -

ANNEXE 2

LETTRE DE PASCAL À FERMAT

Du 24 août 1654.

MONSIEUR,

JE ne pus vous ouvrir ma pensée entière touchant les parties de plusieurs joueurs par l'ordinaire passé, et même j'ai quelque répugnance à le faire, de peur qu'en ceci cette admirable convenance, qui était entre nous et qui m'était si chère, ne commence à se démentir, car je crains que nous ne soyons de différents avis sur ce sujet. Je vous veux ouvrir toutes mes raisons, et vous me ferez la grâce de me redresser, si j'erre, ou de m'affermir, si j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon et sincèrement, car je ne me tiendrai pour certain que quand vous serez de mon côté.

Quand il n'y a que deux joueurs, votre méthode, qui procède par les combinaisons, est très sûre, mais quand il y en a trois, je crois avoir démonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procédiez de quelque autre manière que je n'entends pas. Mais la méthode que je vous ai ouverte et dont je me sers partout est commune à toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulières où elle est plus courte que la générale) n'est bonne qu'en ces seules occasions et non pas aux autres.

a a a a	1
a a a b	1
a a b a	1
a a b b	1
a b a a	1
a b a b	1
a b b a	1
a b b b	2
b a a a	1
b a a b	1
b a b a	1
b a b b	2
b b a a	1
b b a b	2
b b b a	2
b b b b	2

Je suis sûr que je me donnerai à entendre, mais il me faudra un peu de discours, et à vous un peu de patience.

Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti, il faut (dites-vous), voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours-là, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties); et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : ils peuvent en avoir seize, qui est le second degré de quatre, c'est-à-dire le carré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes : aaaa... bbbb.

Et parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux a le font gagner : donc il y en a 11 pour lui; et parce qu'il manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois b le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a deux joueurs; sur quoi vous dites que, s'il y en a davantage, il ne sera pas difficile de faire les partis par la même méthode.

Sur cela, Monsieur, j'ai à vous dire que ce parti pour deux joueurs, fondé sur les combinaisons, est très juste et très bon; mais que, s'il y a plus de deux joueurs, il ne sera pas toujours juste et je vous dirai la raison de cette différence.

Je communiquai votre méthode à nos messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection :

Que c'eſt à tort que l'on prend l'art de faire le parti ſur la ſuppoſition qu'on joue en quatre parties, vu que, quand il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, il n'eſt pas de néceſſité que l'on joue quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou trois, ou, à la vérité peut-être quatre :

Et ainſi qu'il ne voyait pas pourquoi on prétendait de faire le parti juſte ſur une condition feinte qu'on jouera quatre parties, vu que la condition naturelle du jeu, eſt qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, ſi cela n'était faux, cela n'était pas démontré, de ſorte qu'il avait quelque ſoupçon que nous avions fait un paralogiſme.

Je lui répondis que je ne me fondais pas tant ſur cette méthode des combinaiſons, laquelle véritablement n'eſt pas en ſon lieu en cette occaſion, comme ſur mon autre méthode univerſelle, à qui rien n'échappe et qui porte ſa démonſtration avec ſoi, qui trouve le même parti préciſément que celle des combinaiſons; et de plus je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaiſons en cette ſorte :

N'eſt-il pas vrai que, ſi deux joueurs, ſe trouvant en cet état de l'hypothèſe qu'il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue quatre parties complètes, c'eſt-à-dire qu'on jette les quatre dés à deux faces tous à la fois, n'eſt-il pas vrai, dis-je, que s'ils ont délibéré de jouer les quatre parties, le parti doit être tel que nous avons dit, ſuivant la multitude des aſſiettes favorables à chacun?

Il en demeure d'accord et cela en effet eſt démonſtratif; mais il niait que la même choſe ſubſiſtât, en ne s'aſtreignant pas à jouer les quatre parties. Je lui dis donc ainſi :

N'eſt-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas aſtreints à jouer les quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un aurait atteint ſon nombre, peuvent, ſans dommage ni avantage, s'aſtreindre à jouer les quatre parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition? Car, ſi le premier gagne les deux premières parties de quatre et qu'ainſi il ait gagné, refuſera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné, car ces deux que l'autre a gagnées ne lui ſuffiſent pas, puiſqu'il lui en faut trois, et ainſi il n'y a pas aſſez de quatre parties pour faire qu'ils puiſſent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il eſt aiſé de conſidérer qu'il eſt abſolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui eſt de finir dès qu'un aura ſon compte, ou de jouer les quatre parties entières; donc, puiſque ces deux conditions ſont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il eſt juſte quand ils ſont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré : donc il eſt juſte auſſi en l'autre cas.

Voilà comment je le démontrai et, ſi vous y prenez garde, cette démonſtration eſt fondée ſur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, ſi l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.

Suivons la même pointe pour trois joueurs et poſons qu'il manque une partie au premier, qu'il en manque deux au ſecond et deux au troiſième. Pour faire le parti, ſuivant la même méthode des combinaiſons, il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu ſera décidé, comme nous avons fait quand il y avait deux joueurs : ce ſera en trois, car ils ne ſauraient jouer trois parties ſans que la déciſion ſoit arrivée néceſſairement.

Il faut voir maintenant combien 3 parties ſe combinent entre trois joueurs et combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre et combien au dernier et, ſuivant cette proportion, diſtribuer l'argent de même qu'on a fait en l'hypothèſe de deux joueurs.

Pour voir combien il y a de combinaiſons en tout, cela eſt aiſé : c'eſt la troiſième puiſſance de 3, c'eſt-à-dire ſon cube 27. Car ſi on jette trois dés à la fois (puiſqu'il faut jouer trois parties) qui aient chacun trois faces (puiſqu'il y a trois joueurs) l'une marquée a favorable au premier, l'autre b pour le ſecond, l'autre c pour le troiſième, il eſt manifeſte que ces trois dés jetés enſemble peuvent s'aſſeoir ſur 27 aſſiettes différentes, ſavoir :

Ou, il ne manque qu'une partie au premier : donc toutes les aſſiettes où il y a un a ſont pour lui : donc il y en a 19.

Fig. 15.

(D'après une gravure du XVII^e^ siècle, tirée du cabinet de M. Guerrier de Bezance, alors maître des Requêtes.)

Fig. 16.

Portrait de FERMAT, d'après la gravure placée en tête de ses *Œuvres*, Toulouse, 1679.