

Probabilités et imprévus chez de Morgan

Michel SERFATI¹

“ La théorie des probabilités est le Mont-Blanc de l'Analyse Mathématique ”
A. de Morgan²

Nous présentons ci-après - à titre exceptionnel en anglais³ - quelques extraits de l'*Essai sur les probabilités, et leurs applications aux contingences de la vie et aux Compagnies d'assurances*, ouvrage d'Augustus de Morgan paru à Londres en 1838 (cf. le frontispice de l'ouvrage en figure 1). Le texte est d'un genre assez particulier: écrit par un mathématicien et logicien professionnel, cet étonnant manuel à l'usage d'un large public cultivé mais aussi des techniciens comme ceux des assurances, ne contient à peu près aucune écriture symbolique, ni formule de style mathématique. Dans la présente étude, nous nous proposons d'examiner brièvement dans l'ouvrage quelques techniques mathématiques effectivement à l'oeuvre, en même temps que certains des aspects épistémologiques et philosophiques du calcul des probabilités sous-jacents dans le texte. Le titre original en est :

AN ESSAY ON PROBABILITIES
and on their application to
LIFE CONTINGENCIES
and INSURANCE OFFICES

par Augustus de Morgan
Trinity Collège

Augustus de Morgan .

Né à Madras en 1806, de Morgan a trente deux ans quand il écrit l'*Essay*.... Sa mère était la fille de John Dodson, élève et ami d'Abraham de Moivre. Il eut parmi ses élèves Todhunter⁴, Roth et Sylvester. Homme méticuleux et précis, témoignant d'un constant souci de pédagogie, il était d'une puissante foi religieuse, et en même temps ennemi de toute orthodoxie établie. Préoccupé de questions morales (en témoigne son refus des jeux de hasard), on trouve chez lui des accents utopistes, parfois lyriques, quant à l'élaboration d'un monde meilleur qui serait fondé sur un système universel d'assurances. A côté de ses traités scientifiques, il se plaisait par ailleurs à écrire sur des sujets divers, parfois futiles. Il publia par exemple huit cent cinquante

¹ Ce texte est le bref résumé d'un exposé présenté par l'auteur au séminaire : *Nécessité, Causalité, Hasard* à l'Université Paris I .

² *Dublin Review* ,1836- 1837 ,Volume I I , page 347 .

³ Les traductions sont de M. Serfati .

⁴ Ian Todhunter , historien du calcul des probabilités . Son ouvrage :

A History of The Mathematical Theory Of Probability From the time of Pascal to that of Laplace .
(1865 . Réédition . Chelsea Publishing Company . New-York . 1949 .) est indispensable à qui veut aborder historiquement la question des commencements en calcul des probabilités .

articles (un sixième du total) dans une revue populaire, la *Penny Cyclopaedia*

Il est surtout connu comme mathématicien⁵ et logicien: c'est lui qui inventa en 1838 le terme d' " induction mathématique " (récurrence), pour décrire un procédé qui avait été jusqu'alors utilisé - sans beaucoup de clarté ni de formalisme - par les mathématiciens. En logique, outre les lois qui portent son nom⁶, on doit à de Morgan la quantification du prédicat⁷, ainsi que l'algèbre des relations (binaires) qu'il fut le premier à introduire.

Occupant une place relativement mineure dans son oeuvre, les textes de de Morgan relatifs aux probabilités sont au nombre de trois : *L'Essay* (ci-dessous analysé), un véritable traité, la *Theory of Probabilities*, publié dans l' *Encyclopaedia Metropolitana*⁸, un article critique enfin dans la *Dublin Review*⁹, pour faire écho à la Théorie Analytique des Probabilités, l'ouvrage-monument de Laplace, paru quelque temps auparavant (1812) .

L'Essay on Probabilities.

Dans un long préambule, de Morgan expose ses intentions: il se propose de présenter à des profanes, sans aucun appareillage mathématique, deux éléments importants, nouveaux pour l'époque, et relativement peu simples de la théorie mathématique des probabilités. Ils font suite aux travaux de Bayes et de Laplace (Théorie Analytique des Probabilités) : il s'agit, d'une part, de l'application à des exemples effectifs du théorème tout nouveau à l'époque, et qu'on appelle aujourd'hui le théorème de de Moivre- Laplace (analysé ci -dessous au paragraphe : " Probabilités directes chez de Morgan"); d'autre part, à la suite du théorème de Bayes (brièvement analysé ci-dessous dans la note 29, au paragraphe " Probabilités inverses chez de Morgan "), l'emploi des probabilités "inverses", ou " des causes ", ou encore " des hypothèses ". Qu'avec ses objectifs et ses moyens volontairement limités, de Morgan parvienne à être compris est à porter à son crédit et à des soucis de pédagogie dont il ne s'est jamais départi. Et sur ce plan de la pédagogie en effet, l' *Essay* ne manque pas d'intérêt pour le lecteur moderne. De surcroît, et en ce qui concerne les aspects interprétatifs de la théorie des probabilités, de Morgan ne manque jamais d'accompagner ses règles d'abondants commentaires, comme il convient particulièrement, pense-t-il, quand on s'adresse à des profanes. Il nous fournit ainsi, avec le fond de sa pensée, le modèle presque idéal de ce qu'on appelle aujourd'hui une interprétation purement subjectiviste des

⁵ En analyse, il publia entre autres : *The Differential and Integral Calculus* (Londres 1842) .

⁶ Comme on sait, elles fournissent le complémentaire d'une réunion et d'une intersection, et sont interprétables soit en logique, soit en théorie des ensembles .

⁷ Que nous opérons aujourd'hui par " quel que soit ", ou " il existe " .

⁸ Ou l' *Universal Dictionary of Knowledge*, Volume II (Pure Sciences) . Londres 1845 . *Theory of Probabilities* (399 - 490) . Contrairement à l' *Essay*, la *Theory of Probabilities* est un véritable traité de probabilités, contenant mathématiques et calculs probabilistes raffinés pour l'époque . Par exemple, (page 429), de Morgan démontre la formule de Stirling pour les intégrales eulériennes :

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx = s^s e^{-s} \sqrt{\pi} \left\{ \sqrt{2s} + \frac{3}{2} \frac{1}{9\sqrt{2s}} + \&c..... \right\}$$

Le même volume contient (p 305) un *Calculus of functions*, toujours par de Morgan.

⁹. Volume II, publié en Décembre 1836 et Avril 1837 . Londres . 1837 , p338 - 354 . Art IV . Théorie Analytique des Probabilités par M. le Marquis de Laplace (...) .3° édition . Paris 1820 . Commentaire de A. de Morgan .

probabilités, position où il se montre parfois plus laplacien que Laplace.¹⁰

De Morgan constate d'abord à regret que la théorie des probabilités est née dans le terreau bien ambigu des jeux de hasard et d'argent (le *gambling*), mais qu'ayant surmonté d'aussi douteuses origines, elle est devenue une discipline mathématique de première importance (le " Mont- Blanc "...) et aussi un indispensable outil dans la pratique, en particulier qu' elle est " consultée comme le guide de nos sens trompés et le correcteur de nos impressions trompeuses ".

Sur le fond d'autre part, de Morgan expose l'intérêt de la publication de l'*Essay* par la double nouveauté apportée par son livre par rapport aux traités du XVIII^e siècle: d'une part la simplification (*abbreviations*) des calculs et leur caractère rendu opératoire par l'emploi de la toute neuve méthode de Laplace, d'autre part la prise en compte de questions impliquant la probabilité des hypothèses: " Ces deux obstacles, cependant, la difficulté mathématique et le désir d'une méthode inverse, ont empêché la science d'élargir ses vues au delà de ces problèmes de nature simple qui se présentent dans les questions de jeu. "¹¹

Pour ce qui est de la question de la simplification des calculs numériques effectifs, de Morgan constate qu' avec un nombre d'épreuves répétées de l'ordre de mille par exemple, les calculs binomiaux deviennent impraticables en fait, sinon en droit. A quoi peut donc bien servir une théorie bien maîtrisée, si le meilleur mathématicien est embarrassé dès qu'il tâche de la mettre effectivement en oeuvre? Voici de Morgan: " Un jeté de dés ou même un seul paquet de cartes peut voir ses combinaisons épuisées par un degré modéré d'industrie: mais quand une question met en jeu un dé à mille faces, ou un millier de jets avec un dé, quoique le principe correct de sa solution aurait pu sembler aussi clair à un mathématicien du seizième siècle que si on avait jeté une demi douzaine de lancers; cependant l'étendue des nombres et en conséquence la longueur et le caractère fastidieux des opérations nécessaires aurait formé devant l'obtention du résultat une barrière aussi effective qu'une difficulté de principe, ou la recherche d'une claire perception¹². " Pour résoudre ce type de questions qui sont du registre des probabilités directes (en termes modernes: des épreuves répétées de type discret, problèmes combinatoires - binomiaux), de Morgan emploiera - au moyen de tables de la loi de Laplace-Gauss fournies à la fin de l'ouvrage - la méthode de de Moivre-Laplace. Rappelons qu'elle fournit des résultats asymptotiques: la méthode permet donc, en dernière analyse, de régler commodément des questions de fait.¹³

La seconde question, une problématique relativement neuve à l'époque où de Morgan écrit l'*Essay*, est relative aux probabilités inverses, particulièrement à l'acceptation et l'emploi des probabilités " des causes ". Elle est davantage à notre sens une question de droit: un événement étant arrivé, peut-on dégager des conclusions (probabilistes) quant aux hypothèses qui ont pu concourir à sa réalisation? Dans le contexte de l'époque, il était sans doute indispensable à de Morgan d'argumenter sur la légitimité de ce type de recherche inverse. Voici de Morgan en un très clair exposé des motifs: " Il y avait aussi une autre circonstance qui s'était mise en travers du chemin des premiers explorateurs, c'est de ne pas avoir pris en considération, ou au moins de ne pas avoir découvert la méthode de raisonner, à partir de la venue d'un événement, jusqu'à la probabilité d'une ou plusieurs de ses causes. Les questions traitées dans le troisième chapitre de ce volume ne pouvaient en conséquence être saisies par eux. Etant donnée une hypothèse

¹⁰ Le lecteur intéressé par une description moderne et pertinente des trois principales écoles philosophiques en la matière (subjectiviste - fréquentiste - logiciste) pourra consulter avec intérêt: *L'épistémologie des probabilités*, de Benjamin Matalon, in *Logique et connaissance Scientifique*. Editions de la Pléiade. Gallimard. Paris. 1967. La position de Laplace lui même est consignée dans sa préface à la *Théorie Analytique*, publiée séparément sous le nom d' *Essai philosophique sur les Probabilités*. Courcier. Paris 1819. (Réédition Hermann. Paris.)

¹¹ Préface de l' *Essay*.

¹² Préface de l'*Essay*, page 10.

¹³ Sur tous les aspects proprement mathématiques du calcul des Probabilités, l'un des meilleurs ouvrages demeure celui de William Feller (en particulier le Tome 1): *An Introduction to the Probability Theory and Its Applications*. Wiley and Sons. New York. Edition de 1968. (2 volumes)

qui entraînait la nécessité de l'une ou l'autre des conséquences parmi un certain nombre déterminé et pas très important d'entre elles, ils pouvaient déterminer la chance pour que se produise l'une ou l'autre, donnée à l'avance, de ces conséquences; mais se donnant un événement comme étant arrivé, et qui aurait pu être la conséquence de l'une de plusieurs causes différentes ou explicable par l'une de plusieurs différentes hypothèses, ils ne pouvaient déduire la probabilité avec laquelle l'arrivée de l'événement pouvait causer les différentes hypothèses envisagées. Mais, de même qu'en philosophie naturelle, le choix d'une hypothèse par le moyen des faits observés est toujours préalable à tout essai de découverte déductive; de même dans l'application de la notion de probabilité aux véritables affaires de la vie, le processus de raisonnement depuis les faits observés jusqu'à leurs plus probables antécédents doit précéder l'usage direct de tels antécédents, cause, hypothèse, ou quoi que ce soit qui soit appelé de la sorte . “

La définition de la probabilité chez de Morgan.

Jusqu'aux années 1930 et à l'axiomatisation par Kolmogorov de la théorie des probabilités, la partie la plus redoutable pour l'auteur de tout traité mathématique de calcul des probabilités n'avait sans doute pas manqué d'être celle de l'exposé de la *définition* même des probabilités. Et, comme à l'ordinaire, l'avènement de la théorie axiomatique eut pour conséquence d'évacuer tous préambules métaphysiques ou intuitifs qui remplissaient ordinairement les premières pages du moindre traité. S'agissant de de Morgan cependant, la présente étude épistémologique se propose d'exposer quelques points clés de sa définition des probabilités, facilement repérables dans les premiers chapitres de l'ouvrage. Nous exposerons brièvement cette suite de cinq arguments soutenus par l'auteur de l'*Essay* :

a) Il y a des sentiments de certitude ou encore des sensations d'assentiment qui sont de nature très dissemblables.

De Morgan : “ Quelqu' improbable qu'il soit, par exemple, que les barbares n'aient pas renversé l'empire romain, c'est là une *certitude sensible*, et nous n'en reconnaissons pas la même espèce dans notre *certitude morale* de ce fait dont nous disposons dans notre savoir, qui est que le feu brûle ou que deux lignes droites n'enferment pas une portion d'espace. Et nous percevons une différence dans la qualité de notre savoir, quand une modification quelconque prend place dans nos circonstances relativement aux objets extérieurs. Que le feu *brûle* effectivement est plus certain que le récit de la chute de Rome : que le feu devant être allumé *brûlera* peut ou non être plus certain que le fait historique, cela dépend du tempérament et du savoir de l'individu. Et de la sorte nous reconnaissons des différences même entre nos (soi - disant) *certitudes* . ¹⁴ “

b) Toute comparaison implique, au moins en droit, la possibilité d'une mesure du degré de comparaison.

C'est à dire, que dès que nous pouvons ressentir une différence de degré, nous pourrions être amenés à dire qu'il existe une mesure de cette différence. C'est une position fondamentale chez de Morgan, qui sera critiquée par Keynes ¹⁵.

¹⁴ cf. sur ce point Poisson : *Recherches sur la Probabilité des Jugements en Matière Criminelle et en Matière Civile précédées des Règles générales du Calcul des probabilités* : § 4 page 55: “ La *certitude* est considérée, dans la théorie des chances, comme un cas particulier de la probabilité : c'est le cas où un événement n' a aucune chance contraire ; elle est représentée dans le calcul par l'unité tandis qu'une probabilité quelconque est exprimée par une fraction moindre que 1, la parfaite perplexité de notre esprit entre deux choses contraires par 1/2, et l'impossibilité par zéro . “

¹⁵ A *Treatise on Probability* . John Maynard Keynes . Mac Millan and Co Limited . London 1921 . Keynes, qui s'inscrit dans une perspective logiciste (il se place en continuateur de Leibniz), y développe une vigoureuse critique des thèses subjectivistes, en particulier de celles de de Morgan.

c) Il est possible d'étalonner les " forces d'assentiment " ainsi ressenties.

L'assignation à tout sentiment de certitude d'un degré qui soit un nombre compris entre 0 et 1 - idée dont l'origine revient sans doute à Leibniz¹⁶, à partir d'exemples tous rationnels (les proportions de boules dans une urne) - pouvait à l'époque paraître demander une argumentation soutenue. De Morgan opère par comparaison avec la situation standard du tirage d'une lettre dans une loterie: il s'efforce de prouver qu'il est possible, au moins en droit, de graduer complètement et par paliers les situations.

"Un marchand a frété un bateau, qu'il attend de voir arriver au port (il n'en est pas certain). Maintenant, on suppose une loterie, dans laquelle il est tout à fait certain que chaque ticket est marqué d'une lettre. Si je lui demande ce qui est le plus probable, de ce que son bateau va arriver au port ou de ce qu'il ne tirera aucune lettre s'il tire, il répondra sans conteste le premier, car le second ne se produira certainement pas. Si je lui demande à nouveau, ce qui est le plus probable, que le bateau arrive, ou que, s'il tire, il tirera ou un a, ou un b,...ou un x ou y, ou un z, il répondra le second, car il est tout à fait certain. Maintenant supposons que j'écrive la série suivante d'assertions:

Il ne tirera aucune lettre

Il tirera a

Il tirera a ou b

Il tirera a ou b ou y

Il tirera a ou b ou y ou z

et lui faisant observer qu'elles sont, par nature, des propositions de tous les degrés de probabilités, depuis celles qui ne peuvent être, jusqu'à celles qui doivent être, je lui demande de mettre l'assertion que le bateau arrive à sa juste place parmi elles. Ce qu'il ne sera peut-être pas capable de faire (. . .) mais il trouvera peut-être de la difficulté à assigner, à un cas ou deux près où il doit se trouver. Tout ce temps là, il essaye de comparer la grandeur de deux espèces très différentes d'assentiment ou de désaccord (comme les sources dont elles proviennent)¹⁷ "

d) La probabilité est un sentiment dans la tête de l'observateur, et non dans la chose.

" Nous devons à nouveau avertir le lecteur que la probabilité est dans sa tête, et pas dans l'urne .¹⁸ " Ce très surprenant point de doctrine chez de Morgan est cependant central pour lui : la probabilité d'être tirée n'est en aucun cas une qualité ou un attribut de la boule, comme sa couleur ou son poids (toutes choses qui seraient fondées dans une interprétation objectiviste de la probabilité), pas davantage une disposition qu'elle pourrait présenter mais, avec une référence explicite à la terminologie mécaniste, la mesure de la force d'assentiment que nous donnons au fait qu'elle sera tirée. Il est rare de trouver une conception subjective aussi explicitement et péremptoirement affirmée, les auteurs du temps, tels Laplace ou Poisson, se réfugiant prudemment derrière une définition de la probabilité associée à un modèle de schéma des urnes: cas favorables / cas possibles. Ce dernier archétype, pourtant parfois dénué d'ancrage dans la réalité - en particulier dans le cas de variables continues - n'en est pas moins longtemps demeuré un modèle conceptuel commode, peut-être parce qu'opportunément ambigu sur le point du statut de la probabilité: subjective ou

¹⁶ Par exemple dans le *De incerti aestimatione*, de 1678 .

¹⁷ *Essay*, page 7 :

¹⁸ *Metropolitana*, page 414 : *We must warn again the reader that the probability is in his mind, not in the urn from which he draws !*

objective ¹⁹ ?

De Morgan cependant, nous expose ici une pièce maîtresse de sa pensée scientifique . Voici un extrait typique: " Les quantités que nous nous proposons de comparer diffèrent par les forces d'impression. La phraséologie de la mécanique est ici étendue: par force , nous entendons simplement la cause de l'action, considérée avec référence à son intensité , de sorte qu'elle est plus ou moins grande selon qu'elle produit des effets plus ou moins grands ... La probabilité est ce qui est ressenti par l'esprit, et non la propriété inhérente à un ensemble de circonstances. ²⁰ "

e) Axiomes de la probabilité.

Il y en a ici deux seulement ²¹: d'abord, c'est un nombre (que nous faisons aujourd'hui réel), avec une possibilité de gradation continue. Elle est d'autre part soumise à l'axiome d'additivité:

Axiome 1: Qu'on accorde que l'impression de probabilité est une de celles qui admet des gradations perceptibles de plus ou moins , selon les circonstances sous lesquelles un événement est susceptible de se produire .

Axiome 2: Qu'il soit accordé que quand l'un de certains événements doit se produire, et quand ces événements sont entièrement indépendants les uns des autres ²², la probabilité de l'un ou l'autre d'un certain nombre d'événements qui surviennent doit être constituée de la probabilité de plusieurs événements qui se produisent. Par exemple, dans une loterie de 26 lettres ...

En une nouvelle étape ultérieure, la nécessité d'une *même* échelle commune, de 0 à 1, pour toutes les diverses situations de probabilité est ensuite mise en avant par de Morgan.

Probabilités directes chez de Morgan.

Les premiers chapitres de l'ouvrage proposent au lecteur, supposé non averti, des exercices simples de calculs de probabilités directes discrètes par dénombrement, de type combinatoire donc, comme cet exemple: Exemple 1: Je dispose de deux dés. Par le jet d'un premier dé, je gagne autant de livres que la somme indiquée sur la face, sauf à perdre autant de livres qu'il y a de numéros sur les deux dés dans le cas où il y a un "double". Que devrais je donner pour cette chance ²³ ?

¹⁹ Le modèle du schéma des urnes avec son hypothèse d'équiprobabilité des cas élémentaires peut en effet s'interpréter soit subjectivement ,soit objectivement .

Pour les subjectivistes , si les cas élémentaires sont équiprobables ,c'est que nous n'avons aucune raison de supposer que l'un soit plus vraisemblable que l'autre . Il s'agit donc d'une équiprobabilité épistémique ,à la mesure de notre ignorance , ceci étant le fondement du *principe de raison insuffisante* .(cf. Hacking et Keynes ,op.cit) .

Pour les objectivistes au contraire ,c'est l'uniformité , la symétrie ou encore l'égalité des qualités physiques de l'urne et de la boule qui nous conduisent à postuler l'équiprobabilité élémentaire .

Sur ce point crucial de la dualité dans la théorie ,cf. Ian Hacking . *The emergence of probability . A philosophical study of early ideas about probability induction and statistical inference* . Cambridge University Press . 1975 .

²⁰ Essay , page 7 .

²¹ Il s'agit ici d'axiomes simples , à l'usage d'un texte pédagogique . Dans la *Metropolitana* , de Morgan en donnera neuf , sous forme mathématique .

²² A prendre ici dans le sens d'exhaustifs et disjoints .

²³ page 94 , chapitre 5 .

(Réponse de de Morgan : 1 livre 3/4 .)²⁴

Conformément au plan de l'ouvrage, les chapitres ultérieurs, tel le chapitre IV, vont reprendre le même type d'exercices - toujours des probabilités directes -, mais cette fois dans le cas d'un grand nombre d'épreuves répétées. D'où l'emploi des tables en fin de volume. De Morgan, qui en fait grand cas, en a préalablement et longuement commenté l'emploi. Elles mettent en application effective le résultat asymptotique essentiel de de Moivre - Laplace²⁵, qui sera le fondement des futures et diverses versions du théorème central-limite²⁶, et qui est le suivant : étant donnée une épreuve élémentaire à deux éventualités (probabilités p et $q = 1 - p$), et un schéma d'épreuves répétées indépendantes, la probabilité pour que la variable aléatoire S_n égale au nombre de succès en n épreuves, une fois réduite²⁷, appartienne à un intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, converge (n tendant vers l'infini) vers la probabilité pour que la variable gaussienne (elle aussi réduite) appartienne au même intervalle, et cette dernière probabilité se calcule par des tables. En termes modernes :

$$\lim_n P \left\{ a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b \right\} = N(b) - N(a)$$

où $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$

Voici un exemple typique d'un exercice dans lequel le calcul effectif des coefficients binomiaux, pour être possible, serait fort long (le texte original est fourni en figure 3, exemple 2. Chapitre : *Use of Tables*).

"En 200 jets quelle est la chance pour que le nombre des piles tombe entre 97 et 103 inclusivement?" Utilisant ses tables, de Morgan trouve qu'il y a donc 621 chances contre 379, ou environ 31 contre 19²⁸.

Comme toutes celles de ce volume, la solution de de Morgan se fait sous forme de l'emploi d'une règle mécanique que le lecteur, supposé naïf, doit apprendre à reproduire (cf. par exemple en figure 3, la règle en haut de la page 77).

²⁴ Il s'agit donc, en termes plus modernes, de calculer l'espérance de gain du joueur, quantité qui est en sens inverse le prix pour lui du "ticket d'entrée" dans le jeu.

Le joueur gagne 1 livre, s'il tire 1 et s'il n'y a pas double 1, donc avec la probabilité $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

Son espérance de gain est donc $\frac{5}{36} (1 + 2 + \dots + 6) = \frac{35}{12}$. Il perd par exemple deux livres s'il tire

deux fois 1, avec la probabilité $\frac{1}{36}$. Son espérance de perte est ainsi : $\frac{1}{36} \cdot 2 \cdot (1 + \dots + 6) = \frac{7}{6}$.

Son espérance mathématique est donc : $\frac{35}{12} - \frac{7}{6} = \frac{21}{12}$.

²⁵ Bien avant Laplace, de Moivre avait établi le résultat dans le cas du jeu de pile ou face : $p = q = 1/2$. (Doctrines des Chances, pages 243-254) Cf. sur ce point Todhunter, op.cité, § 335.

²⁶ cf. Feller, op. cité, Tome 1, p. 152 et 202.

²⁷ Rappelons que si X désigne une variable aléatoire pourvue d'une moyenne μ et d'un écart-type σ , on appelle variable réduite associée à X , la variable aléatoire $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

²⁸ Chapitre IV (emploi des tables), page 77. Comme chez les bookmakers, les résultats terminaux sont toujours donnés chez de Morgan en chances (*odds*) pour ou contre la réalisation d'un événement, et non en pourcentage.

Nous donnerons ici cet exemple simple et fondamental par lequel de Morgan introduit dans l' *Essay* le Chapitre III sur les Probabilités inverses (le texte original est en figure 2, Chapitre : *On inverse probabilities* , pages 53 - 54).

Quatre urnes contiennent chacune trois boules qui peuvent être noires ou blanches : la première A1 contient trois noires, la seconde A2, deux noires et une blanche, etc... Un observateur choisit une urne au hasard (c'est à dire que les quatre tirages sont équiprobables), puis choisit dans celle-ci une boule à nouveau au hasard: celle-ci est blanche: événement E. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne A2 (ceci est l' hypothèse H2). Un simple dénombrement de toutes les éventualités (il est effectué par de Morgan en figure 2: elle évite l'emploi explicite du théorème de Bayes ²⁹) montre que cette probabilité (en termes modernes $P (H_2 | E)$: probabilité de H2 , sachant que E) est égale à 1/6. De même , de Morgan détermine les $P (H_3 | E) = 1/3$, ainsi que $P (H_4 | E) = 1/2$. (il est clair que $P (H_1 | E) = 0$)

De Morgan peut alors remplacer son énoncé initial par le suivant, qu'il postule être logiquement équivalent : une urne contient trois boules dont certaines sont blanches, d'autres noires, mais en proportion inconnue : une boule est tirée. Elle est blanche . Quelle est la probabilité pour que l'urne ait contenu une blanche et deux noires, ou encore quelle est la probabilité pour que la proportion de blanches ait été un tiers (réponse donc : 1/6)? De même, sachant qu'on a tiré une blanche, quelle est la probabilité pour que la proportion de blanches ait été égale à deux tiers (1/3) , ou à un (1/2)? Ou encore en dernière analyse pour que la probabilité de tirage d'une blanche ait été 1/3 , ou 2/3 , ou 1 ?

Ecartant alors l'artifice pédagogique initial , on voit que la technique de de Morgan a consisté à remplacer l'hypothèse bayésienne d'équiprobabilité des causes dans un tirage dans une seule urne, par un tirage fictif entre urnes équiprobables, et dont l'ensemble présente toutes les distributions possibles équiprobables. Cette substitution aux vertus pédagogiques, qui lui paraît assurer en toutes circonstances l'emploi du théorème de Bayes , de Morgan l'érigera en méthode: " En déterminant la chance qui existe (dans des circonstances connues) pour la survenue d'un événement un certain nombre de fois qui tombe entre certaines limites, nous sommes entraînés dans une considération d'une certaine difficulté, c'est à dire la probabilité de la probabilité, ou comme nous l'avons appelée, la présomption de la probabilité. Pour rendre cette idée plus claire, rappelons nous que n'importe quel état de probabilité peut être immédiatement considéré comme

²⁹ Voici en termes modernes ,un bref rappel sur le **théorème de Bayes** :

A et B étant deux événements quelconques d'un espace de probabilité tels que $P (A) \neq 0$,on définit $P (B | A)$, *probabilité conditionnelle* de B lié par A (ou de B sachant que A) par la relation :

$$P (A \cap B) = P (B | A) . P (A)$$

On introduit alors le schéma suivant ,qui conduit à la formule de Bayes :

On dispose de n événements $H_1, H_2, \dots, H_n$, exhaustifs et disjoints (les "causes " , ou les "hypothèses ").

Donc , dans une épreuve quelconque , l'un et l'un seulement des événements H_i se réalise .Soit par ailleurs E un autre événement . On suppose connues :

* les probabilités *a priori* des H_i : $P (H_i)$

* les probabilités $P (E | H_i)$,probabilités conditionnelles de réalisation de E sachant que

H_i s'est réalisé .

La situation est alors la suivante : E s'est réalisé .Quelle est la probabilité conditionnelle de H_i , liée par E ? (c' est à dire $P (H_i | E)$). Le résultat de Bayes est alors :

$$P (H_i | E) = \frac{P (H_i \cap E)}{P (E)} = \frac{P (H_i) P (E | H_i)}{\sum_{k=1}^n P (H_k) P (E | H_k)}$$

l'expression du résultat d'un ensemble de circonstances, qui, si elles étaient introduites dans la question, la difficulté disparaîtrait. Le mot présomption se réfère distinctement à un acte de l'esprit, ou un état de l'esprit, alors que, dans le mot probabilité, nous nous sentons disposés plutôt à penser aux arrangements externes du savoir dont devrait dépendre la force de notre présomption, plutôt que la présomption elle-même.³⁰ Une position à laquelle Keynes objectera³¹.

Quoiqu'il en soit, la méthode de de Morgan a consisté à examiner, dans le cas de trois boules, les quatre distributions de probabilité préalablement possibles. Dans ces conditions donc, ces quatre probabilités *a priori* sur la composition de l'urne étant ainsi fixées par le fait qu'on a tiré une blanche, il est possible de mesurer la probabilité pour qu'on tire à nouveau une blanche au coup suivant. On trouve : $7/9$ ³² : c'est donc la probabilité pour tirer une blanche au second coup, sachant qu'on a tiré une blanche au premier, dans une expérimentation où la composition de l'urne est inconnue. On peut évidemment étendre le procédé à une collection de $(N+1)$ urnes, chacune contenant N boules, puis faire tendre N vers l'infini : ce qui est alors probabilisé, c'est donc l'éventail continu des distributions préalables. Le modèle conduit alors à ce qu'on appelle la "loi de succession" de Laplace³³, qui fit couler beaucoup d'encre³⁴.

De façon presque inévitable dans ce contexte, on a donc vu ici apparaître chez de Morgan ce concept bien hasardeux de probabilité d'une probabilité, dont de Morgan s'est cependant suffisamment méfié pour lui préférer l'expression de "présomption" de la probabilité (Laplace parle à ce propos des "chances").

Contingences de la vie et assurances...

Après ces premiers chapitres "théoriques" (au sens de de Morgan), la seconde partie de l'*Essay* est consacrée à des applications, c'est à dire ici l'étude d'un grand nombre de "contingences" de la vie, avec des aspects divers, parfois anecdotiques.

On notera d'abord que ces contingences sont toutes à support financier; aussi qu'elles se répartissent en quatre rubriques: tables de mortalité et questions subséquentes d'assurance vie d'une part, questions monétaires et annuités d'autre part, réunion ensuite de ces deux questions dans ce qu'on peut appeler l'"algèbre du viager", enfin considérations très diverses sur la gestion des compagnies d'assurance³⁵. Par cette seconde partie, l'*Essay* est encore aujourd'hui considéré comme une référence dans les milieux de l'actuariat. De cette partie de l'ouvrage, consacrée à l'algèbre du viager, nous donnerons d'abord deux exemples de définitions (texte original en figure 4, Chapitre : *On Annuities*, page 201) :

$|A : B$ est la valeur actuelle d'une annuité qui doit être payée aussi longtemps que A ou

³⁰ *Essay*, page 87.

³¹ Keynes, op. cit. page 408, à propos de ce procédé de substitution chez de Morgan "La clé de l'explication tient la supposition que "n'importe quel état de probabilité peut être immédiatement considéré comme l'expression du résultat d'un ensemble de circonstances". On ne peut accorder que ceci soit vrai en général; et même dans les cas où c'est vrai nous sommes renvoyés sur les probabilités *a priori* des divers ensembles de circonstances qui n'ont pas besoin, comme le suppose de Morgan, d'être des alternatives égales ou exhaustives."

³² $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2}$

³³ Sur le modèle mathématique de la loi de succession, cf. Feller, op. cit. Chapitre V. *Conditional probability. Stochastic Independence. §2 Probability defined by conditional probabilities. Urn Models.*

³⁴ Sur la critique philosophique de la loi de succession, cf. en particulier la discussion de Keynes, op. cit., page 408.

³⁵ "Le reste de l'ouvrage est consacré à la plus commune application de la théorie, la considération des contingences de la vie et des intérêts financiers qui en dépendent, en même temps que les principes essentiels de la gestion d'un bureau d'assurance." (Préface à l'*Essay*)

B est vivant.

De même, $A : B : C | D : E$ est la valeur actuelle d'une annuité qui ne doit pas être payée aussi longtemps que A et B sont tous deux vivants, ou que C est vivant, mais qui commence dès lors que l'existence de l'un des deux A, B est terminée, ainsi que celle de C, et continue aussi longtemps que D ou E est vivant.

Réunissant ses deux études précédentes, de Morgan se livre alors à des équations algébriques viagères, comme le problème logico - financier suivant :

Trouver $|A : B$, la valeur actuelle d'une annuité qui doit être payée aussi longtemps que A ou B vivra. Il trouve évidemment ³⁶ :

$$|A : B = |A + |B - |A B$$

Nous terminerons ici sur la question de la gestion des Compagnies d'assurance, par la célèbre et très édifiante histoire de la Société l' *Equitable* ³⁷. Elle raconte ceci : dans le contexte, tout nouveau pour l'époque, des sociétés d'assurances - vie, le Directeur de la Compagnie l' *Equitable*, un certain Morgan, (homonyme de notre auteur), obsédé par des questions de sécurité financière pour son entreprise, commença par proposer aux candidats à l'assurance celles des tables de mortalité qui étaient les plus désavantageuses pour eux (cf. la figure 5 pour un usage comparé des tables); d'autre part, après s'être astreint à de savants calculs censés asseoir le montant de la prime sur des réalités substantielles, telle la loi des grands nombres, Morgan appliquait ensuite aux résultats obtenus des coefficients de sécurité tels qu'au bout de quelques années d'exercice, la société dégagea des profits si considérables qu'ils en devinrent embarrassants... La règle de l' *Equitable* était en fait de " toujours réviser les calculs mathématiques par ceux de la prudence ", selon les mots du prospectus en français. Augustus de Morgan était très favorable au principe même des sociétés d'assurances - vie, où il croyait trouver une certaine forme de solidarité, et qu'il décrit dans l' *Essay* sous un jour que nous dirions aujourd'hui mutualiste. Il ne se priva cependant pas de critiques à l'encontre de l' *Equitable*, pour sa gestion par trop défavorable à l'égard de l'assuré, mais exonéra néanmoins d'intention de fraude sa direction, accusée seulement d'une prudence exagérée. Il écrivit : " Nous devrions écrire sur la porte de chaque société d'assurance mutuelle d'être *wary* (prudent); mais sur cette porte-ci, on devrait écrire de n'être pas trop *wary*, et au-dessus *Equitable Society* . "

La figure 5 (Chapitre : *On life contingencies*, pages 166 - 167) fournit sept tables de mortalité comparées, nécessaires au calcul des primes d'assurance-vie. Elles se lisent ainsi : pour chaque âge de l'existence, elle fournit (en principe ...) l'espérance de vie restante pour un sujet donné, selon la table considérée : à un sujet de 35 ans d'âge par exemple, il reste en moyenne à vivre 25,5 années selon l'hypothèse de de Moivre; 25,7 années selon les tables de Northampton, etc...

³⁶ *Essay*, page 207.

³⁷ On lira avec intérêt sur ce point l'ouvrage de Lorraine Daston : *Classical Probability in the Enlightenment*, Princeton University Press. 1988. Chapitre III. Théorie et pratique du risque.

CHAPTER III.

ON INVERSE PROBABILITIES.

IN the preceding chapter, we have calculated the chances of an event, knowing the circumstances under which it is to happen or fail. We are now to place ourselves in an inverted position: we know the event, and ask what is the probability which results from the event in favour of any set of circumstances under which the same might have happened. This problem is frequently enunciated as follows:—An event has happened, such as might have arisen from different causes: what is the probability that any one specified cause did produce the event, to the exclusion of the other causes? By a *cause*, is to be understood simply a state of things antecedent to the happening of an event, without the introduction of any notion of agency, physical or moral.

In order that we may secure a problem of sufficient simplicity, we must limit the number of possible antecedent states. Let us suppose that there is an urn, of which we know that it contains balls, three in number, and either white or black, all cases being equally probable: that is, before any drawing takes place, all we can say is, that we are going to draw out of one of the following, having no reason for supposing one in preference to another.

A BC DEF

I. (. . .) II. (o . .) III. (o o .) IV. (o o o)

A drawing takes place, and a white ball is produced, consequently I. is immediately excluded; for from it the observed event could not have been produced. This much is certain; but we are also tempted to say that

x 3

II. is rendered unlikely, because, from such an antecedent state of things, a black ball would have been more likely than a white one. On the same principle III. is more likely than II., and IV. the most likely of all. We have then to decide the relative probabilities of II., III., and IV.

Before the drawing took place, the probability of each set of circumstances was $\frac{1}{4}$; and, the lottery being given, the probability of any one ball in it was $\frac{1}{4}$. Thus the chance of III. being the lottery, and the second white ball being drawn from it, was $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$, or $\frac{1}{8}$. The same of other balls: so that, in fact, our primitive position was that of having to draw from 12 balls, 6 white and 6 black, all equally probable. But the observed event changed that position; a white ball was drawn: was it a given ball (namely, the white ball in II.), or was it one of two given balls (those in III.), or was it one of three (those in IV.)? There are *six* cases in question, namely, A, B, C, D, E, F, and one of them happened,—we do not know which. We have used all the knowledge we have (namely, that a white ball was drawn,) in excluding the black balls.

Hence the chance that A was drawn, or that

II. was the lottery is $\frac{1}{6}$:

That either B or C was drawn, or that III. was the lottery is $\frac{1}{3}$:

That either D, E, or F was drawn, or that IV. was the lottery is $\frac{1}{4}$.

In the preceding instance, owing to the number of balls being the same in every lottery, the antecedent probability of each ball was the same. Previous to deducing a rule, I take an instance in which this is not the case.

PROBLEM. A white ball has been drawn, and from one or other of the two following urns:

(2 white, 5 black) (3 white, 1 black).

What are the probabilities in favour of each urn?

The case is not now that of a lottery of 5 white and 6 black balls; for the chance of our going to the first urn (which is $\frac{1}{2}$), and thence drawing a given white

Fig 2
Les Probabilités Inverses

RULE. Divide one more than twice l by the square root already mentioned, and the quotient being made t , the value of H in Table I. is the probability required.

EXAMPLE I. In 6000 throws with a die, what is the chance that the number of aces shall not differ from 1000 by more than 50; that is, shall lie between 950 and 1050, both inclusive. Here $a = 1$, $b = 5$, $n = 1000$, $l = 50$, and the square root as before is 81.65. Divide $2l + 1$, or 101, by 81.65, which gives 1.237, which being t , H is .91977. Hence it is 920 to 80 in favour of the proposed event, or about 11½ to 1.

EXAMPLE II. In 200 tosses, what is the chance that the number of heads shall lie between 97 and 103, both inclusive? Here $a = 1$, $b = 1$, $n = 100$, $l = 3$, and the square root, as before, is 20. And $2l + 1$, or 7, divided by 20, gives .35, which being t , H is .379. Hence it is 621 to 379, or about 31 to 19, against the proposed event.

EXAMPLE III. In 12 tosses, what is the chance of the heads being either 5, 6, or 7 in number? Here $a = 1$, $b = 1$, $n = 6$, $l = 1$, and the square root, as before, is 4.9. And $2l + 1$, or 3, divided by 4.9, gives .61, which being t , H is .6117. Hence it is about 612 to 388, or 153 to 97, in favour of the proposed event. In page 47 the chance of this event is

$$\frac{792 + 924 + 792}{4096} \text{ or } \frac{2508}{4096} \text{ or } .612$$

PROBLEM IV. The odds for A against B being a to b , and n times $a + b$ trials being to be made, for what number is there a given probability H that the As shall not differ from the probable mean by more than that number?

RULE. Find in Table I. the value of t answering to that of H (page 71), multiply it by the square root already described, subtract 1, and divide by 2: the

Fig. 4

"L'algèbre des viagers" —————>

Fig 3

← Usage des tables

ON ANNUITIES.

201

I now proceed to some further instances:

$|n$ means the present value of an annuity of 1*l.* to last n years.

$m-|n$ the present value of an annuity of 1*l.*, which is to commence payment at the end of m years, and then to last $n - 1$ years, or $n - 1$ more payments.

$n|$ the present value of a perpetuity of 1*l.*, commencing at the end of n years, or first paid at the end of $n + 1$ years.

$n-|$ the present value of a perpetuity, first paid at the end of n years.

$|A$ the present value of an annuity on the life of A.

$|AB$ the present value of an annuity on the joint lives of A and B, to cease with either.

$t|A$ the present value of an annuity on the life of A, to begin in t years; that is, the first payment to be made at the end of $t + 1$ years, if A should then be alive.

$|At$ the present value of an annuity on A's life, or t years, whichever drops first.

$A|$ the present value of 1*l.* for ever, to be first received at the end of the year in which A dies.

$AB|$ the present value of 1*l.* for ever, to be first received at the end of the first year in which A or B dies.

$A|t$ the value of an annuity for t years, payment to begin at the end of the year in which A dies.

$AB|C$ the present value of an annuity which begins payment at the end of the year in which either A or B dies (the first), provided C be then alive, and which continues during the life of C.

$|A : B$ signifies the present value of an annuity which is to be paid as long as either A or B is alive.

$AB : C|D : E$ the present value of an annuity which is not to be paid as long as A and B are both alive, nor as long as C is alive, but which begins when the joint existence of A and B, and that of C, are both terminated; and continues as long as either D or E are alive.

middle classes, that from the age of 15 to that of 65, the average may be represented as follows:—of 100 persons aged 15, one dies every year till the age of 65. But the mean duration of life will serve to give a more precise idea, and a simple rule may be given, which will, for rough purposes, represent the Carlisle table between the ages of 10 and 60. Of persons aged 10 years, the average remaining life is 49 years, with a diminution of 7 years for every 10 years elapsed; thus of persons aged 20 years, the average remaining life is 49-7 or 42 years; at 30 years of age, 35 years. The following list of tables will be followed by some notice of each.

Years of age.	De Moivre's hypothesis.	Northampton.	Amicable.	Carlisle.	Equitable.	Government, male.	Government, female.	Years of age.
0	43	25.3	-	38.7	-	-	-	0
5	40.5	40.8	-	51.3	-	48.9	54.2	5
10	38	39.8	-	48.8	48.3	45.6	51.1	10
15	35.5	36.5	-	45.0	45.0	41.8	47.2	15
20	33	33.4	36.6	41.5	41.7	38.4	44.0	20
25	30.5	30.9	34.1	37.9	38.1	35.9	40.8	25
30	28	28.3	31.1	34.3	34.5	33.2	37.6	30
35	25.5	25.7	27.7	31.0	30.9	30.2	34.3	35
40	23	23.1	24.4	27.6	27.4	27.0	31.1	40
45	20.5	20.5	21.1	24.5	23.9	23.8	27.8	45
50	18	18.0	17.9	21.1	20.4	20.3	24.4	50
55	15.5	15.6	15.1	17.6	17.0	17.2	20.8	55
60	13	13.2	12.5	14.3	13.9	14.4	17.3	60
65	10.5	10.9	9.9	11.8	11.1	11.6	14.0	65
70	8	8.6	7.8	9.2	8.7	9.2	11.0	70
75	5.5	6.5	6.2	7.0	6.6	7.1	8.5	75
80	3	4.8	5.0	5.5	4.8	4.9	6.5	80
85	0.5	3.4	4.0	4.1	3.4	3.1	4.8	85
90	-	2.4	2.9	3.3	2.6	2.0	3.8	90
95	-	0.8	1.4	3.5	1.1	1.2	1.6	95
100	-	-	-	2.3	-	-	-	100

1. *De Moivre's hypothesis* was suggested by Halley's Breslau tables, made from observations of the mortality of that town in the years 1687—1691. It confessedly errs considerably at the beginning and end of life.

2. The *Northampton* tables were constructed by Dr. Price from the mortality of that town, in the years 1741—1780, the numbers of male and female deaths being very nearly equal. These tables were, and are, almost universally used by the assurance offices, and are those by which legacy duties are estimated in the act of parliament, 36 Geo. III. cap. 52.

3. The *Amicable Society's* table was formed some years ago by Mr. Finlaison, at the suggestion of that gentleman and myself to the directors, and as a means of furnishing information upon points * as to which they had consulted us. The Amicable society was founded in 1705, and the table is formed from the experience of more than half the subsequent period ending in 1831.

4. The *Carlisle* table, formed by Mr. Milne from the observations of Dr. Heysham upon the mortality of that town, in the years 1779—1787. They are to be considered the best existing tables of healthy life which have been constructed in England. The relative proportions of the sexes are 9 females to 8 males.

5. The *Equitable* table (published by the Equitable society in 1834) gives the results of the experience of that society from 1762 to 1829. The total number of deaths recorded is upwards of 5000.

6. The *Government* tables (male and female life separately). These tables were constructed by Mr. Finlaison, actuary of the national debt office, from various tontines, &c., of which the records are in the possession of the government. Each table contains about 5000

* In mentioning this subject, I may be allowed to state my full approval of the plan subsequently adopted by the society, and my conviction that the errors of their ancient system have entirely disappeared. The mean durations above given were computed by myself, from the tables of decrements circulated by the directors among the members.

Fig. 5
Tables de Mortalité