2) Equations du quatrième degré chez Descartes .

Michel Serfati.

Le début du Livre III de la *Géométrie*, de Descartes (Leyde, 1637) [1], est tout entier consacré à l'étude des équations algébriques et de leurs racines. Un certain nombre de propriétés neuves pour l'époque sont ici annoncées; comme la factorisation de P par X- a, si a est une racine de P, ou bien la célèbre règle de variations de signes de Descartes [2]. Descartes cependant n'était guère intéressé par les problèmes algébriques en soi. Mais l'étude des racines des équations algébriques lui était devenue impérative depuis les deux premiers livres de la *Géométrie*, où il avait exposé, à partir de l'exemplaire problème de Pappus, la méthode de mise en équation de certains problèmes de géométrie. En fait, selon Descartes, tout doit se réduire à la construction géométrique des racines des équations algébriques : pour les racines des équations du second degré (équations" communes"), la règle et le compas suffisent évidemment. Descartes est alors naturellement amené à s'intéresser aux équations de degré supérieur (il vient tout juste de définir ce qu'est le degré)[3] .

Or, pour le troisième et le quatrième degré, les méthodes de résolution *explicites* étaient disponibles depuis 1545 (*Ars Magna* : Cardan pour le 3° degré; Ferrari pour le 4° degré[4]) et 1571 (*Algebra* , de Bombelli). Cependant, si les démonstrations avaient été données sous forme géométrique par l'école Italienne, les solutions effectives demeuraient nécessairement sous la forme algorithmique d'une règle-comptine. Pour donner les solutions sous forme algébrique, c'est à dire explicitées en fonction des constantes, il fallait évidemment que ces mêmes constantes fussent dénommées dans le calcul, ce qui n'avait pas été le cas avant Viète .

Nous nous référerons dans la suite , sous la forme (A.T , VI) , au Tome VI de l'Edition Adam - Tannery des *Oeuvres* de Descartes, qui contient la *Géométrie* .

[2] (AT , VI ,446) Cf. sur ce point :
J. BOROWCZYCK, *Sur l'histoire des démonstrations de la règle des variations de signe chez Descartes* . in : La démonstration Mathématique dans l' Histoire ,pp 275-312. Actes du Colloque d'Epistémologie et Histoire des Mathématiques .Besançon 12 et A3 Mai 1989 . Publication de IREM de Lyon . (43, Boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex) .

[3] Sur ces questions de constructibilité chez Descartes, on pourra consulter : M.SERFATI , *Les Compas Cartésiens* , Archives de Philosophie, **56** , (1993) .

[4] CARDAN ,J *Ars Magna ,sive de regulis algebraicis liber unus* . L'édition la plus utilisée est celle du Tome IV de la réédition posthume des Oeuvres de Cardan (Lyon . 1663) .L' *Ars Magna* contient un inventaire des équations du quatrième degré .

Pour le troisième degré, Descartes rappelle d'abord sans démonstration les formules de Cardan, et ce, sous une forme impeccable [5], donnant ainsi, pour la première fois dans l'histoire des Mathématiques, les formules de Cardan écrites sous forme moderne, " lisible" .

Pour le quatrième degré, Descartes fournit ici une méthode de résolution tout à fait neuve, différente de celle de Ferrari [6], mais utilisant également une résolvante une troisième degré. L'ensemble occupe une dizaine de pages du livre III [7]. Fidèle cependant à une stratégie du secret , constante chez lui, Descartes fournit d'abord, sans aucune espèce d'explication[8], les résultats, c'est à dire à la fois la résolvante et la factorisation du polynôme du quatrième degré. "

A) Le texte de Descartes .

D'abord écrit Descartes [9] , " au lieu de :

$$x^4 \ * . \ pxx \ . \ qx \ . \ r \gg 0 \qquad (1)$$ [10]

Il faut écrire

$$y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0 \qquad (2)$$ "

En guise d' explication, il reprend cependant plus loin la même équation [11] : " au lieu de :

$$x^4 \ * . \ pxx \ . \ qx \ . \ r \gg 0$$

Il faut écrire ces deux autres :

$$+xx - yx + \frac{1}{2}yy \ . \ \frac{1}{2}p \ . \ \frac{q}{2y} = 0 \qquad (3)$$

$$+xx + yx + \frac{1}{2}yy \ . \ \frac{1}{2}p \ . \ \frac{q}{2y} = 0 \qquad (4)$$ "

Descartes donne ensuite deux exemples numériques :

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0 \qquad (5)$$ [12]

et

$$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0 \qquad (6)$$ [13]

---

[5] (A.T , VI , 472)

[6] Sur toutes les questions d'Histoire des équations du premier au quatrième degré inclus, on pourra consulter la suite de quatre excellentes brochures de l' I REM de Toulouse .

[7] pages 454- 463 de l'édition A.T

[8] .Sur laquelle néanmoins il s'explique à l 'occasion : " Au reste ,j'ai omis icy les démonstrations de la plupart de ce que j'ai dit, à cause qu'elles m'ont semblé si faciles que, pourvu que vous preniez la peine d'examiner méthodiquement si j'ai failly, elles se présenteront à vous d'elles-même : & il sera plus utile de les apprendre en cette façon qu'en les lisant . " *Géométrie* , livre III (A.T , VI , 464)

[9] (page 457)

[10] (A.T , VI , 457) . L' étoile * marque la place d'un terme manquant (en x^3) . Les points indiquent que le signe peut être + plus ou moins, devant des coefficients p , q , r ,qui sont, pour Descartes, nécessairement positifs. Le signe d'égalité est une des notations spécifiques que Descartes introduit dans sa *Géométrie* . Dans la suite du texte, nous reviendrons à des notations modernes .

[11] (.Géométrie, livre II 459 , 9)

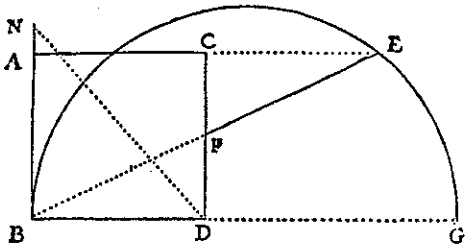
[12] page 458

[13] idem

et un exemple littéral [14] :

$$z^4 + \left(\frac{1}{2}aa - cc\right) zz - (a^3 + acc) z + \frac{5}{16} a^4 - \frac{1}{4} aacc = 0 \qquad (7)$$

eux-mêmes suivis d'une application géométrique encore empruntée à Pappus [15] .



Mais affin qu'on puiſſe mieux connoiſtre l'vtilité de cete reigle il faut que ie l'applique a quelq; Probleſme. Exemple de l'vſage de ces reductions.

Si le quarré A D, & la ligne B N eſtant donnés, il faut prolonger le coſté A C iuſques a E, en ſorte qu'E F, tirée d'E vers B, ſoit eſgale a N B. On apprent de Pappus, qu'ayant premierement prolongé B D iuſques à G , en ſorte que D G ſoit eſgale à D N, & ayant deſcrit vn cercle dont le diametre ſoit B G, ſi on prolonge la ligne droite A C, elle rencontrera la circonference de ce cercle au point E, qu'on demandoit. Mais pour ceux qui ne ſçauroiet point cete cóſtruction elle ſeroit aſſés difficile à rencõtrer, & en la cherchãt par la methode icy propoſée, ils ne s'auiſeroiẽt iamais de prẽdre D G pour la quãtité inconnuë, mais plutoſt C F, ou F D, a cauſe que ce

Ccc 2 ſont

Fig 1.

Le problème est le suivant :

ABCD est un carré donné, dont la longueur du coté est $\| AB \| = a$.

c est une autre constante donnée, figurée par $\| BN \| = c$.

Une droite variable pivote autour de B, rencontrant AC au point E, et CD au point F .

Déterminer la position de cette droite telle que $\| EF \| = \| BN \| = c$.

B) Etude de la méthode de Descartes .

Observons d'abord que toutes les équations du quatrième degré proposées le sont ici sans terme du troisième. Descartes montrera plus loin comment faire disparaître ce terme par changement de variable (translation) .

La méthode de résolution de Descartes consiste à rechercher une factorisation du polynôme du quatrième degré comme produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels, ce qui est toujours

[14] idem

[15] page 462

possible. Il cherche donc à écrire le premier membre de (1), soit :

$x^4 + p x^2 + q x + r = 0$

sous la forme : $(x^2 - x y + \alpha)(x^2 + x y + \beta) = 0$. Développant et identifiant, ceci est équivalent à la recherche de $(y, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$, tels que:

$$\alpha + \beta - y^2 = p \qquad (8)$$
$$(\alpha - \beta) y = q \qquad (9)$$
$$\alpha . \beta = r \qquad (10)$$

(8) et (9) fournissent α et β par somme et différence , soit :

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(p + y^2 + \frac{q}{y}\right) \quad (11) \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{1}{2}\left(p + y^2 - \frac{q}{y}\right) \quad (12)$$

Injectant dans (10) ces deux valeurs, il vient :

$$r = \frac{1}{4}\left[[p + y^2]^2 - \frac{q^2}{y^2}\right] \text{ , soit :}$$

$$y^6 + 2 p y^4 + (p^2 - 4 r) y^2 - q^2 = 0 \text{ «} \qquad (2)$$

Dans cette équation du sixième degré , Descartes fait le changement $y^2 = T$,

$$T^3 + 2 p T^2 + (p^2 - 4 r) T - q^2 = 0 \qquad (13)$$

pour aboutir donc à une équation du troisième degré (*résolvante de Descartes*), qui admet toujours au moins une racine réelle, qu'il peut par exemple calculer par les formules de Cardan - del Ferro. Il y a donc deux racines opposées en y : faisant choix de l'une d'elles, Descartes l'introduit dans (11) et (12) pour obtenir d'abord α et β, puis la factorisation $(x^2 - x y + \alpha)(x^2 + x y + \beta) = 0$, qui n'est autre que celle qu'il avait proposée sans explication sous la forme des relations (3) et (4), équations du second degré qu'il lui faut donc terminalement résoudre.

Préoccupé par les seules racines terminales réelles positives (des longueurs, qu'il s'agit pour lui de construire géométriquement), Descartes, ne s'interessant qu'à ses exemples numériques, ne s'est nullement soucié de connaître en général le nombre de racines réelles positives de l'équation (13), non plus que le nombre de racines réelles distinctes de l'équation (1), potentiellement engendrées par le procédé .

C) Applications numériques .

a) Exemple (6) : $x^4 - 17 x^2 - 20 x - 6 = 0$

Avec $p = -17$; $q = -20$; $r = -6$, Descartes obtient

$y^6 - 34 y^4 + 313\ y y - 400 = 0$ [16] et on " trouve que y y est 16 . "

Faisant choix de $y = 4$, Descartes obtient $\alpha = -3$ et $\beta = 2$

d'où les deux équations :

[16] page 458

$x^2 - 4x - 3 = 0$ et $x^2 + 4x + 2 = 0$ [17]

Descartes trouve alors les quatre racines :

$$\sqrt{7}+2 \ ; \ 2-\sqrt{7} \ ; \ -2-\sqrt{2} \ ; \ -2+\sqrt{2}$$

Il déclare cependant ne retenir que la première ($\sqrt{7}+2$), la seule" vraie " (positive), déclarant que les trois autres sont " fausses " (négatives) , pour lesquelles il donne l'*opposé pour valeur* . Son texte sur ce point est curieusement ambigu [18] .

b) Exemple (7) :

$$z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right) z^2 - (a^3 + ac^2)z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0$$

L'équation transformée est :

$$y^6 + (a^2 - 2c^2)y^4 + (-a^4 + c^4)y^2 - a^2(c^2 + a^2)^2 = 0$$

Descartes constate - sans explications - que $y^2 = a^2 + c^2$ convient, et trouve donc les deux équations du second degré suivantes[19] :

$$z^2 - \sqrt{a^2+c^2}\, z + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2} = 0 \qquad (14) \qquad \text{et}$$

$$z^2 + \sqrt{a^2+c^2}\, z + \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2} = 0 \qquad (15)$$

Ignorant l'équation (15), Descartes nous livre les deux solutions de la seule équation (14) :

" D'où l'on connait " , dit Descartes que la valeur de z est :

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}} \qquad (16) \quad \text{, ou bien}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}} \qquad (17)$$

c) Exemple (5) : $x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$ (5)

Avec $p = -4$; $q = -8$; $r = 35$, Descartes obtient :
$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$ [20] , qui admet également pour racine $yy = 16$.
Faisant à nouveau choix de $y = 4$, Descartes obtient $\alpha = 5$ et $\beta = 7$, d'où les deux équations : $x^2 - 4x + 5 = 0$ et $x^2 + 4x + 7 = 0$, dont aucune n'admet de racines réelles :

" Et pour ce qu'on ne trouve aucune racine, ni vraye ni fausse en ces deux dernières Equations, on connait de là que les quatre de l'Equation dont elles procèdent sont imaginaires; & que le problème, pour lequel on l'a trouvée,

[17] page 460

[18] " à savoir on en trouve une vraye ,qui, est $\sqrt{7}+2$,& trois fausses qui sont : $\sqrt{7}-2$, $2+\sqrt{2}$, & $2-\sqrt{2}$. " (A.T. ,VI , 460)

[19] page 461

[20] page 461

est plan de sa nature[21], mais qu'il ne saurait en aucune façon être construit, à cause que les quantités données ne peuvent se joindre."[22]

D) Application géométrique.

Prenant $x = \| DF \|$, il vient $\| CF \| = a - x$.

La similitude des triangles FCE et FDB implique :

$$\frac{\| FC \|}{\| FE \|} = \frac{\| FD \|}{\| FB \|} \text{ ,soit } \quad \frac{a - x}{c} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Elevant au carré et ordonnant, on trouve :

$x^4 - 2\,a\,x^3 + (2\,a^2 - c^2)\,x^2 - 2\,a^3\,x + a^4 = 0$[23]

Cette équation du quatrième degré étant complète, il faut donc en éliminer le terme en x^3, et pour cela poser $z = x - (a/2)$. L'équation transformée en z n'est alors autre que (7) :

$$z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right) z^2 - (a^3 + a\,c^2)\,z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0$$

Les solutions z_1 et z_2 étant donc fournies par (16) et (17), on aura donc $x_i = (a/2) + z_i$. La solution (16), cependant, vérifie $z > (a/2)$, donc $x > a$, et Descartes, ne retenant - sans explications - que la solution correspondant à F situé entre C et D (soit $0 < x < a$), fournit comme unique solution celle donnée par (17) :

$$x = \| DF \| = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Cette formule qui ne contient que des superpositions de radicaux carrés, est donc constructible à la règle et au compas.

Pour Descartes cependant, ces exemples ne sont pas concluants de façon générale, car les méthodes de résolution explicites contiennent en général des radicaux cubiques, et ne sont donc pas constructibles à la règle et au compas. Utilisant alors des intersections de coniques (par exemple cercle et parabole) Descartes s'emploiera alors, dans toute la fin du texte de la *Géométrie*, à fournir des constructions géométriques des solutions (réelles positives) des équations du troisième et du quatrième degré, conformément au titre du Livre III de la *Géométrie* : *De La Construction des Problèmes qui sont Solides ou plus que Solides*.

---

[21] justiciable d'une équation du second degré.

[22] page 461

[23] page 462