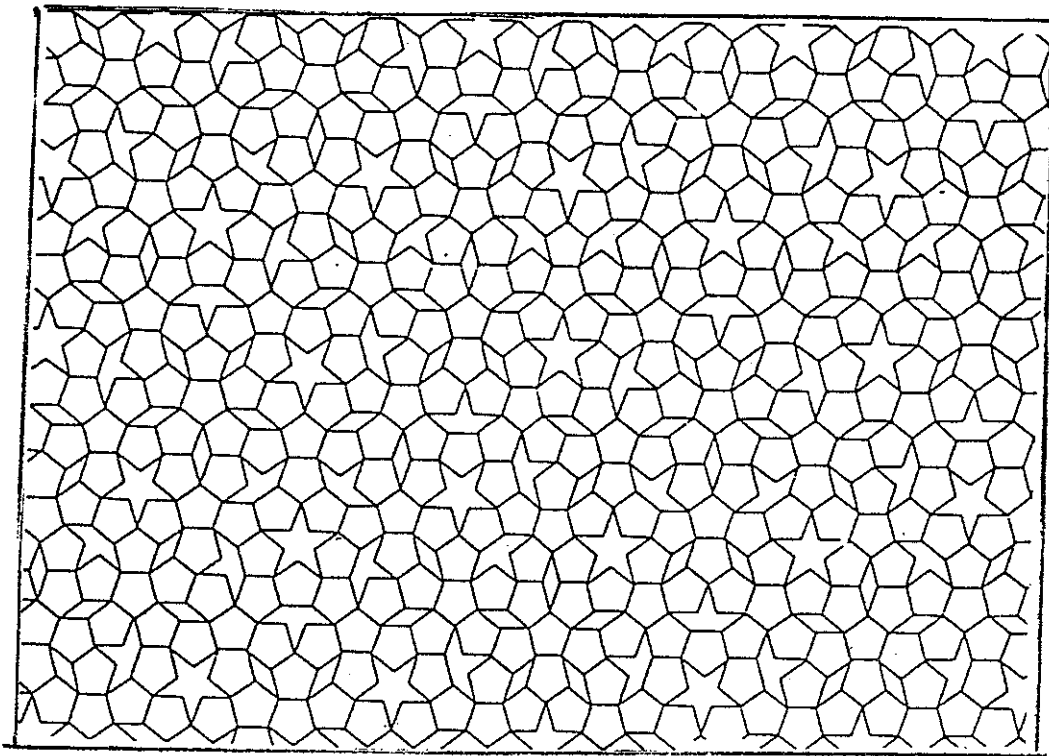
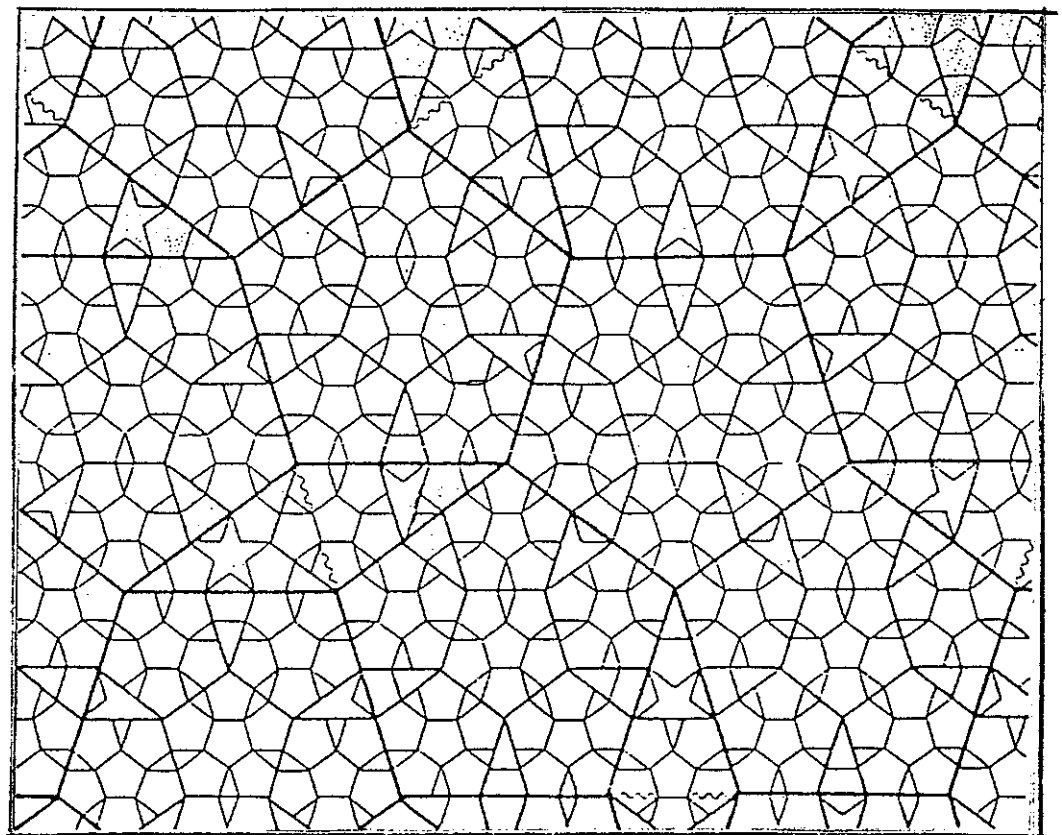




Penrose : deux exemples de pavages du plan



CONTES DU LUNDI

1) Pavages presque-périodiques

Marianne Guillemot

Quasi-cristaux et pavages.

L'histoire des pavages presque-périodiques est très récente. L'idée, plus ou moins ludique, d'un pavage non périodique du plan au moyen d'un nombre fini de formes fixes, date d'une vingtaine d'années; la découverte expérimentale des quasi-cristaux puis la théorie générale expliquant ces pavages et donnant moyen de les construire, datent de moins de dix ans.

Nous ne pouvons exposer ici les éléments de la cristallographie. Disons seulement qu'un système cristallin décrit, à l'échelle macroscopique, certaines symétries des minéraux qui reflètent des symétries existant dans la structure des molécules. Ces symétries doivent être compatibles avec les translations qui permettent de paver l'espace, sans empiètement ni lacune, avec des cristaux identiques. Cela implique que les axes de symétrie (appelés aussi axes de rotation) de ces cristaux ne peuvent être que d'ordre 2, 3, 4 ou 6. Les autres symétries autour d'un axe sont interdites, en particulier celle d'ordre 5.

C'est pourquoi grande fût la surprise provoquée, en 1984, par quatre spécialistes de la chimie métallurgique: D. Sheartman et I. Blech (Haïfa, Israël) J. W. Cahn (Gaithersburg, Etats Unis), D. Gratias (Centre d'Etudes de chimie métallurgique du CNRS à Vitry-sur-Seine). Ces chercheurs firent couler un mélange en fusion d'aluminium et de manganèse sur un tambour tournant à grande vitesse: l'alliage qui s'étalait sur le tambour, très brusquement refroidi, se détacha sous forme d'un ruban de quelques dizaines de microns d'épaisseur. En observant au microscope électronique ce ruban on obtint, avec une certaine orientation, une figure présentant une évidente symétrie d'ordre 5. En faisant tourner le ruban on trouva, à leur place exacte, les autres axes de symétrie de l'icosaèdre régulier.

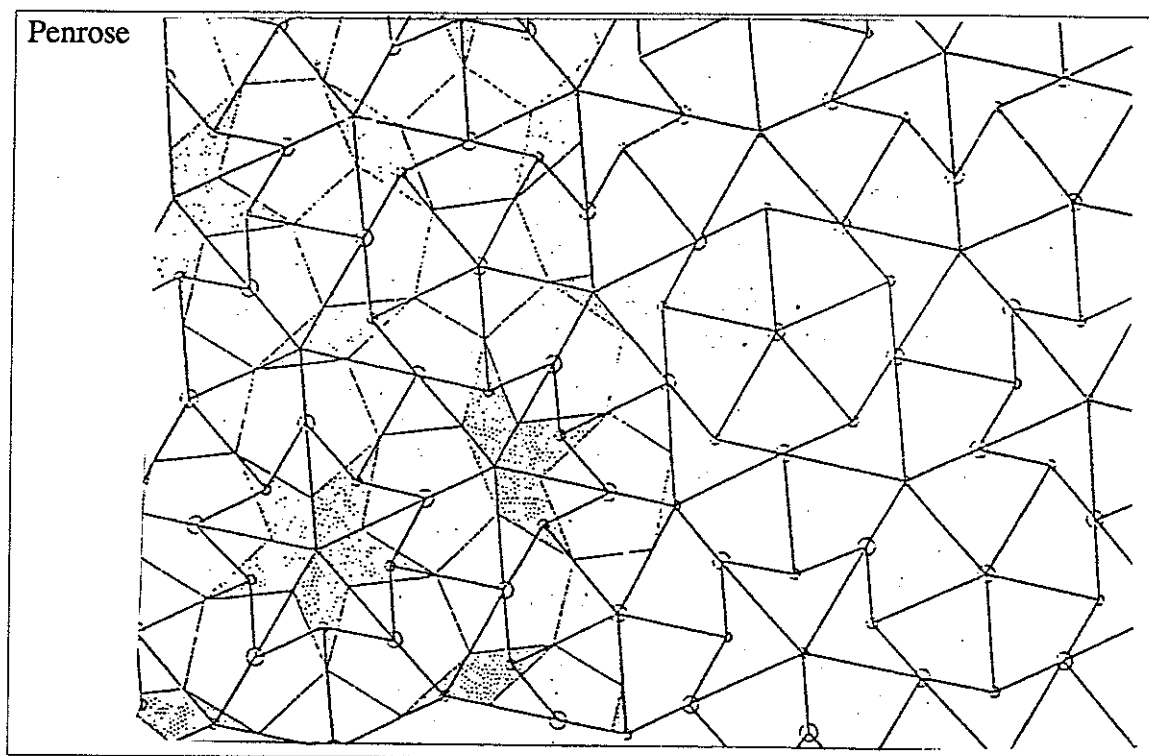
Rappelons que les symétries d'un système cristallin sont le mieux mises en évidence lorsqu'on fait diffracter un faisceau de rayons X ou d'électrons à travers les cristaux. L'image obtenue est formée de taches plus ou moins brillantes, disposées sur les noeuds du réseau conjugué du réseau de l'espace définissant le système cristallin présentant les mêmes symétries (chaque axe du réseau conjugué est orthogonal à un plan du réseau cristallin). La figure obtenue correspond à la transformée de Fourier de la densité électronique du système cristallin.

L'alliage créé par les quatre chimistes présentait donc une structure cristalline avec symétrie icosaédrique, ce qui est impossible. Comment expliquer cette situation paradoxale?

La réponse fut donnée par les mathématiques.

Des pavages non périodiques.

Les premiers travaux mathématiques dans ce domaine sont ceux du physicien et mathématicien anglais Roger Penrose qui, vers 1972, construisit des pavages non périodiques du plan de plusieurs façons différentes, dont l'une par deux types de losanges, l'un d'angles $\pi/5$, $4\pi/5$, l'autre d'angles $2\pi/5$, $3\pi/5$.. Ces pavages amenèrent Penrose à faire breveter un jeu, et ne donnèrent lieu à une publication scientifique que quelques années plus tard [1]. D'autres auteurs s'intéressèrent à ces structures, et c'est en 1986 que Michel Duneau et André Katz (Laboratoire de Physique Théorique de l' Ecole Polytechnique) réussirent à généraliser ces travaux en inventant une méthode permettant d'obtenir des pavages non périodiques d'espaces de dimension quelconque par projection de structures périodiques d'espaces de dimension supérieure.



Par exemple, un pavage du type de celui de Penrose peut être obtenu par projection d'une partie d'un réseau cubique de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^2$.

Une projection d'une partie d'un réseau cubique de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^3$ a permis à Duneau et Katz de répondre à la question des chimistes, en construisant un pavage de $\mathbb{R}^3$ par des rhomboèdres. Ce pavage, ainsi que celui de Penrose, a une structure presque périodique⁽¹⁾ - comme nous le verrons plus loin - qui permet d'expliquer l'apparition de cette symétrie d'ordre 5 [2, 3, 4].

(1) Voir le dernier paragraphe.

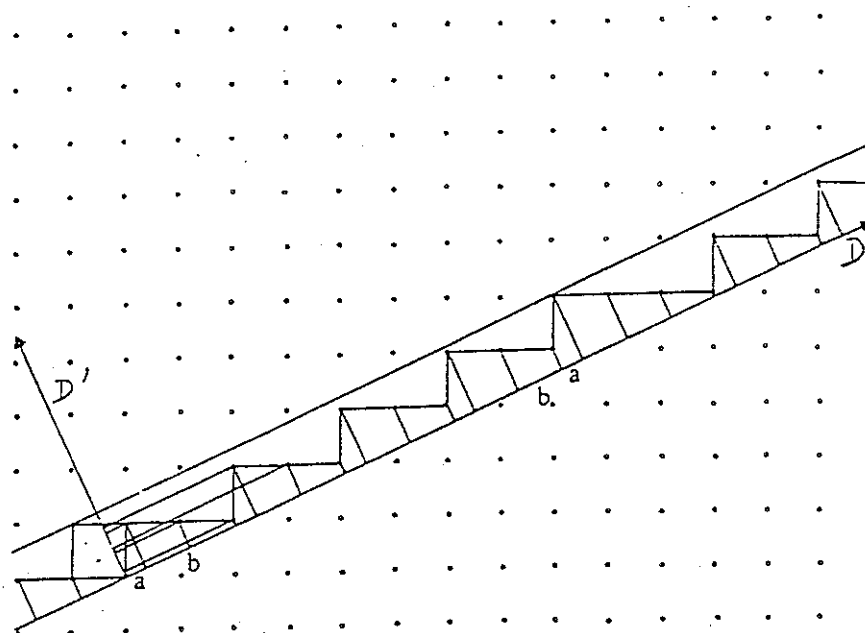
La méthode de la bande: pavage de la droite.

Pour présenter la "méthode de la bande" dont ils sont les auteurs, Duneau et Katz ont d'abord envisagé le cas de la dimension 1; idée ingénieuse, qui permet de mieux comprendre, par la suite, les constructions plus complexes faites dans des dimensions plus élevées.

On considère le plan $\mathbb{R}^2$ (figure 1), rapporté à un système d'axes rectangulaires, et le réseau $\mathbb{Z}^2$ des points à coordonnées entières. Soit K un carré de côté 1, ayant ses sommets dans le réseau $\mathbb{Z}^2$, et D une droite quelconque non parallèle aux axes du réseau. On construit la bande B du plan balayée par le carré K translaté parallèlement à la direction D ; on suppose cette bande semi-ouverte, c'est-à-dire ne contenant qu'une de ses droites frontières.

Il existe alors une ligne brisée unique L passant par tous les points de $\mathbb{Z}^2$ contenus dans la bande B et formée d'arêtes du réseau. La projection orthogonale sur D de cette ligne brisée détermine le pavage de D au moyen de deux sortes de "pavés", de longueurs respectives $|\cos \alpha|$ et $|\sin \alpha|$ ($\tan \alpha$ étant la pente de la droite D).

Figure 1: Le pavage de la droite par la méthode de la bande.



Le choix de la pente de la droite D par rapport au réseau détermine les propriétés de périodicité du pavage. Il est facile de voir que si $\tan \alpha$ est rationnel, le pavage est périodique. Si $\tan \alpha$ est irrationnel - ce que nous supposons par la suite - le pavage de D n'est pas périodique, mais possède de remarquables propriétés liées à sa presque périodicité. En particulier, toute partie finie du pavage se répète une infinité de fois dans le pavage.

En effet, toute partie finie du pavage est la projection dans D d'un morceau L_1 de la ligne brisée L . Si D' est la perpendiculaire à D dans le plan $\mathbb{R}^2$, la projection orthogonale de $\mathbb{Z}^2 \cap B$ dans l'intervalle semi ouvert $I = D' \cap B$ est injective et dense; il en résulte l'existence d'une infinité de translations de $\mathbb{R}^2$ qui conservent $\mathbb{Z}^2$ et qui chacune transforme le morceau L_1 en une copie de lui-même contenue dans B ; par unicité, cette copie de L_1 est contenue dans L , et sa projection dans D appartient donc au pavage; d'où le résultat annoncé.

La méthode de la bande:

pavage du plan à quasi-symétrie octogonale.

Envisageons le plus simple des pavages presque-périodiques présentant des éléments de symétrie interdits par la cristallographie classique: la quasi-symétrie octogonale. Ce pavage est construit en généralisant la méthode de la bande vue plus haut, en remplaçant le plan $\mathbb{R}^2$ par l'espace $\mathbb{R}^4$ et la droite D par un sous espace P de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$, appelé plan par commodité et que nous identifierons au plan que nous voulons paver. De plus, si ce plan est conservé par certaines symétries du réseau $\mathbb{Z}^4$, ces symétries se retrouvent "presque" dans le pavage, comme nous allons le voir. On vérifie facilement que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rapportée aux axes de $\mathbb{R}^4$, définit une transformation qui conserve $\mathbb{Z}^4$ et qui est une symétrie d'ordre 8.

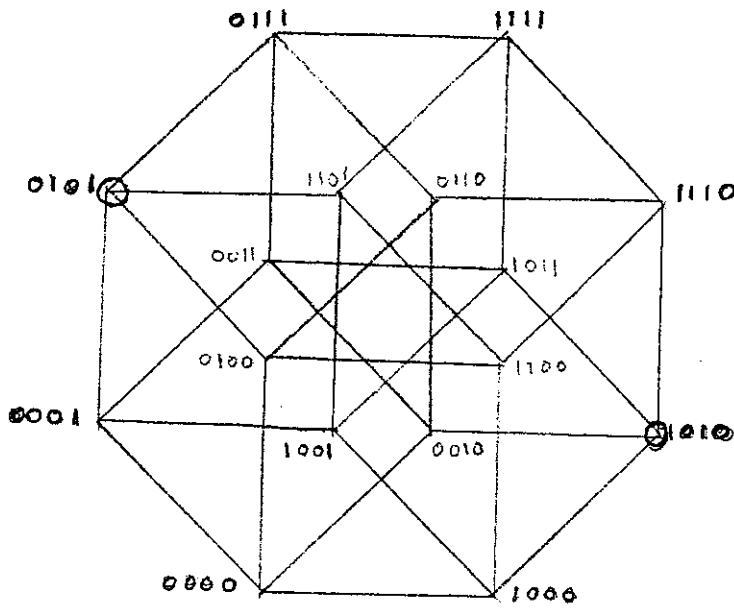
On peut construire deux plans P et P', conservés par A, orthogonaux entre eux, et une nouvelle base orthogonale de $\mathbb{R}^4$ dont les deux premiers vecteurs sont dans P, les deux autres dans P', et à laquelle est associée le changement de coordonnées suivant (x,y,z,t et X,Y,Z,T, désignant respectivement les anciennes et les nouvelles coordonnées.):

$$I \begin{cases} X = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{z-t}{2} \\ Y = \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z+t}{2} \\ Z = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z-t}{2} \\ T = \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z-t}{2} \end{cases}$$

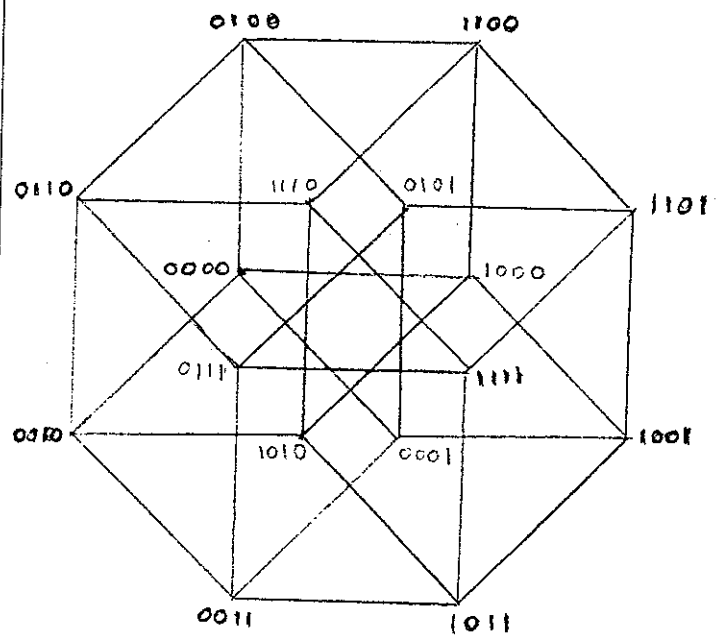
Rappelons que C^4 , cube unité de $\mathbb{R}^4$, possède 16 sommets, 32 arêtes, 24 "facettes" de dimension 2, 8 "faces" de dimension 3. On remarque que la transformation A, restreinte à P, est une rotation d'angle $-3\pi/4$; cela explique que la projection sur P du cube C^4 possède la symétrie d'ordre 8; les 16 sommets de C^4 se projettent sur les sommets de deux octogones réguliers concentriques (figure 2). Les projections des arêtes de C^4 ont les directions des axes des (X,Y) de P et de leurs bissectrices, et ont toutes même longueur. Les facettes se projettent suivant des carrés et des losanges d'angles $\pi/4$ et $3\pi/4$; il y a deux orientations différentes pour les carrés et quatre pour les losanges, se déduisant les uns des autres par symétrie d'ordre 8.

La transformation A, restreinte à P', est une rotation d'angle $\pi/4$. Les projections sur le plan P' des sommets du cube C^4 forment également deux octogones concentriques, de mêmes dimensions que ceux de P; mais les sommets de C^4 qui se projettent dans P sur l'octogone "extérieur" se projettent dans le plan P' sur l'octogone "intérieur" et vice-versa. Rapportées respectivement aux axes des (X,Y) et des (Z,T), les projections des axes des x et des y de $\mathbb{R}^4$ ont mêmes directions (les bissectrices des axes) et mêmes sens; tandis que les projections des axes des z et des t ont mêmes directions (les bissectrices des axes) et sens contraires.

Figure 2



Projection dans P' du cube unité C^4
(les points notés 0101 et 1010 et la partie de la frontière située au dessus de ces points ne font pas partie de P').



Projection dans P du cube unité C^4

Appelons K' la projection dans P' de l'ensemble des points du cube C^4 , privée d'une partie de sa frontière (voir la figure 2). La bande B est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^4$ dont la projection dans P' est contenue dans K' . C'est l'ensemble des points (X, Y, Z, T) qui vérifient :

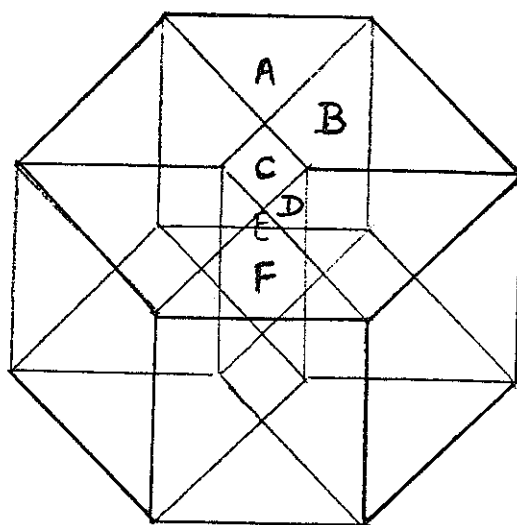
$$\text{II} \left\{ \begin{array}{lll} -\frac{1}{2} \leq Z = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z-t}{2} & < \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \leq T = \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z+t}{2} & < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \leq T+Z = \frac{x+y}{\sqrt{2}} + z & < 1 + \sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq T-Z = \frac{y-x}{\sqrt{2}} + t & < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

Le pavage est constitué par les projections dans P des facettes du réseau $\mathbb{Z}^4$ qui sont entièrement contenues dans B , c'est à dire dont les projections dans P' sont entièrement contenues dans K' , côtés et sommets compris. Il est donc formé de carrés et de losanges, répliques des projections des facettes de C^4 .

Les sommets de ce pavage sont donc les points (X,Y) donnés par les deux premières relations (I), où (x,y,z,t) sont des entiers vérifiant les inégalités (II). Il est facile de construire ce pavage de proche en proche par le calcul, à la main ou à la machine. Si on dispose d'un ordinateur, on pourra sans difficulté fabriquer un programme approprié. Mais si on veut construire à la main un début de pavage, la méthode géométrique met mieux en évidence ses propriétés.

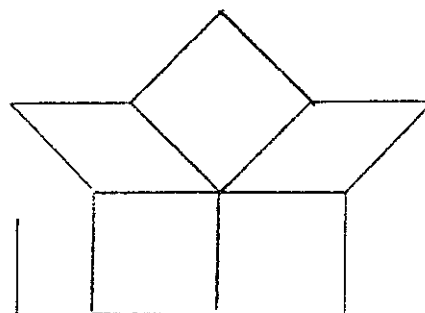
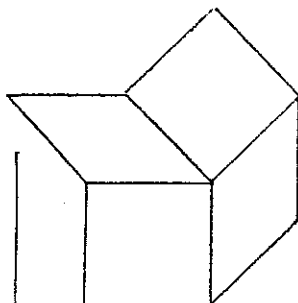
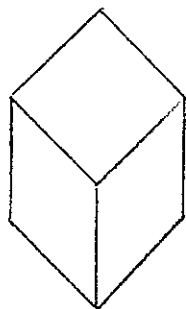
Utilisant la correspondance bijective entre m et m' , projections dans P et P' d'un même point M de $\mathbb{Z}^2 \cap B$, on voit ainsi comment le nombre et la position des facettes entourant un sommet m du pavage dépendent de la situation de m' dans K' . L'octogone K' peut être divisé en 6 zones (figure 3) limitées par les projections des arêtes de C^4 ; chacune de ces zones, sauf la zone centrale F , est formée de 8 morceaux se correspondant dans la symétrie d'ordre 8. On vérifie que si m' appartient à la zone A (resp. B, C, D, E, F), m est entouré de 3 facettes (resp. 4, 5, 6, 7, 8). Chaque répartition de facettes autour d'un sommet du pavage est donc nécessairement une des six représentées sur la figure 3— aux symétries d'ordre 8 près. les points de K' situés à la frontière de deux ou trois zones appartiennent à l'une de ces zones; le fait que K' soit privé d'une partie de sa frontière introduit dans ce problème une dissymétrie.

Figure 3

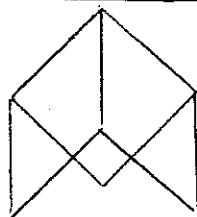


Projections

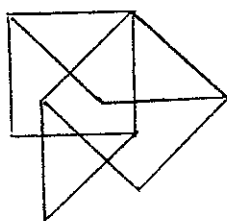
dans P



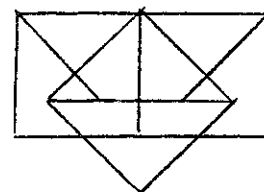
dans P'



Zone A

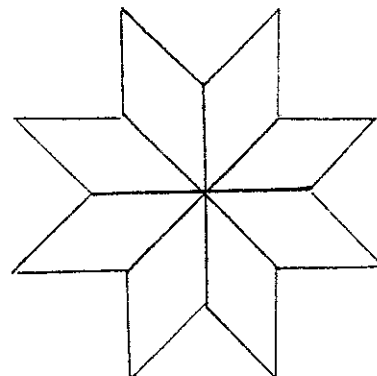
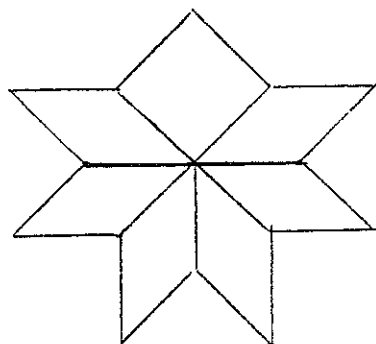
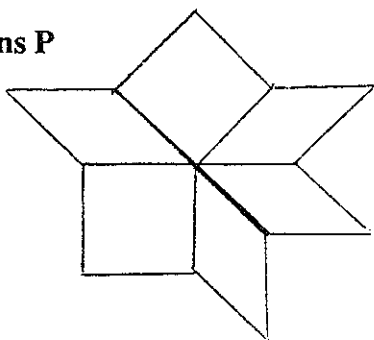


Zone B

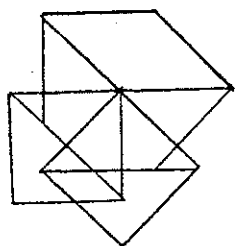


Zone C

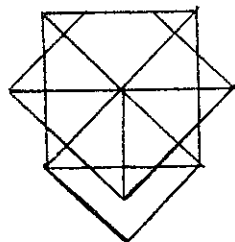
dans P



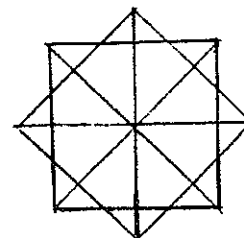
dans P'



Zone D



Zone E



Zone F

Propriétés du pavage liées à la presque périodicité.

Certaines régularités peuvent être observées dans ce pavage non périodique. Par exemple, les fréquences respectives des configurations A, B, C, D, E, F sont proportionnelles aux aires des zones de même nom dans K'; une fréquence dans le pavage étant la limite, quand n tend vers l'infini, de la fréquence de cette même configuration dans la restriction du pavage à un carré de côté n.

Cette propriété est due au fait que la projection de $\mathbb{Z}^4 \cap B$ dans K' est dense et homogène. On peut de même étudier les fréquences d'éléments particuliers du pavage, carrés ou losanges ayant une certaine orientation par exemple; ces fréquences sont proportionnelles aux aires de certains sous-ensembles de K' qu'on peut retrouver par la géométrie ou le calcul.

Le fait, examiné dans le cas de la droite, que toute partie finie du pavage se retrouve une infinité de fois dans le pavage, est vrai aussi pour notre pavage du plan et d'autres pavages du même type. De même, si la bande B est déplacée dans $\mathbb{R}^4$ par une translation, autrement dit si K' est déplacé dans P' par une translation, la même méthode donne un autre pavage de P tel que toute partie finie du premier pavage se retrouve une infinité de fois dans le second, et réciproquement; mais aucune translation, n'applique le premier pavage sur le second.

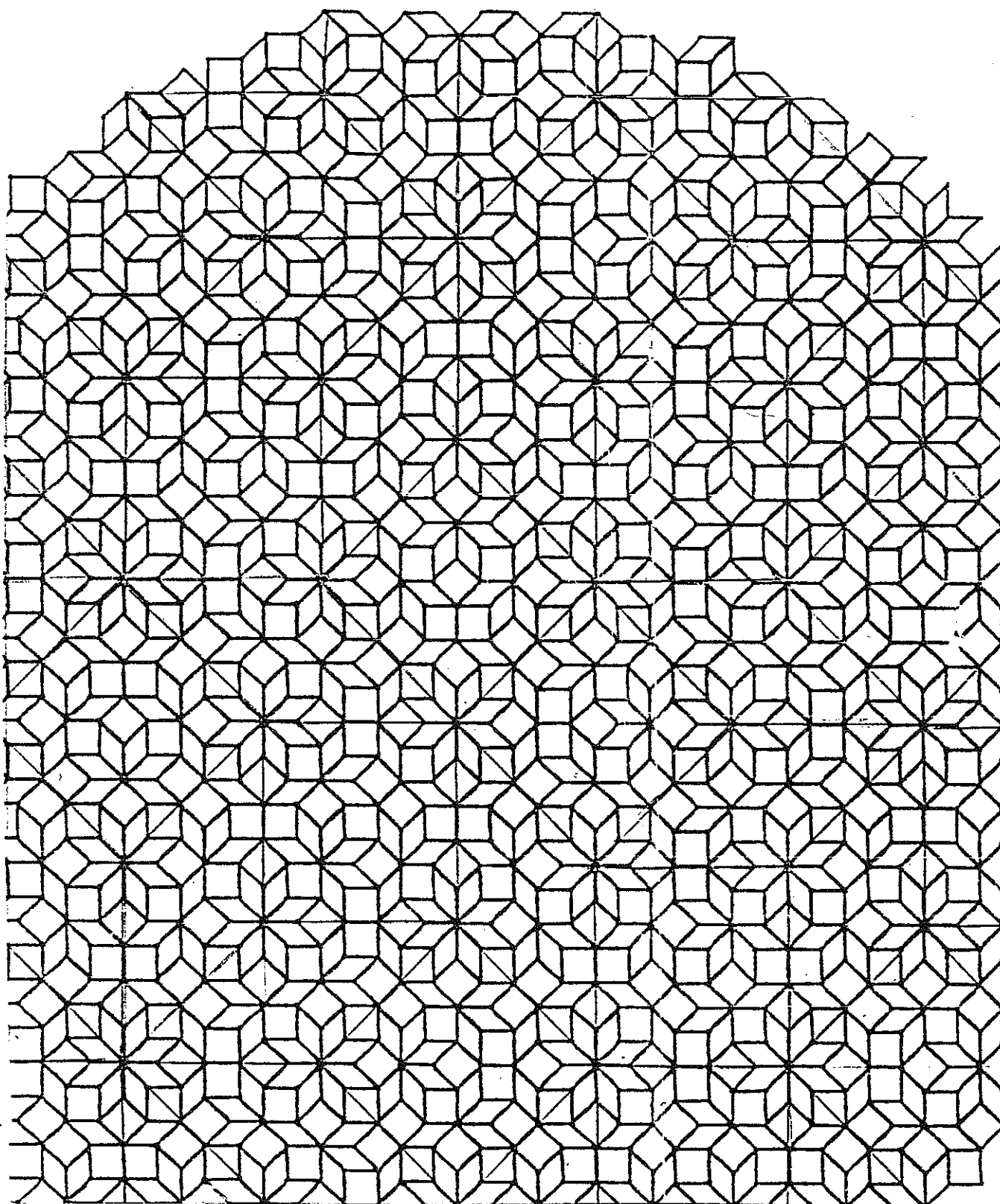
Une autre propriété remarquable du pavage est son autosimilarité. Si on "rétrécit" la bande B, celle ci contient un moins grand nombre de points de $\mathbb{Z}^4$, qui, par projection, donnent un pavage plus "grand". On peut décrire cette opération – contraction dans P', dilatation dans P – au moyen d'une matrice, rapportée aux axes (X, Y, Z, T) de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda' \end{pmatrix}$$

Nous voulons que cet opérateur conserve $\mathbb{Z}^4$; rapporté aux axes (x, y, z, t) par transposition, il doit donner une matrice à coefficients entiers. On vérifie que cela a bien lieu avec $\lambda = -(1 + \sqrt{2})$ et $\lambda' = \sqrt{2} - 1$. Cet opérateur S peut être itéré; S^2 donne une bande B_2 dont la section K'_2 est homothétique de K' dans le rapport $3 - 2\sqrt{2}$. La bande B_2 peut-être translatée de façon que K'_2 s'applique sur l'octogone central de K', c'est à dire sur la zone F. Il en résulte que l'ensemble des centres d'étoiles à huit branches du pavage forme un réseau semblable (en fait, "localement semblable") à celui du pavage dans le rapport $3 + 2\sqrt{2}$. (figure 4 voir page suivante)

Figure 4:

Pavage du plan à quasi-symétrie octogonale et pavage semblable des centres d'étoiles à huit branches.



Quelques mots sur la presque- périodicité.

Pourquoi ces pavages sont-ils qualifiés de presque- périodiques? Cette notion vient des fonctions presque périodiques, étudiées depuis les années 1930 [6,7]. Le modèle le plus simple en est la somme de deux fonctions périodiques dont le rapport des périodes est irrationnel, par exemple $\sin x + \sin \sqrt{2}x$. Les fonctions presque périodiques sont caractérisées par leurs séries de Fourier qui (s'il s'agit de fonctions d'une variable) sont de la forme

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n x}$$

où les c_n sont des constantes et les λ_n des nombres réels quelconques. Les conditions de convergence, pour ces séries, sont analogues à celles qui concernent les fonctions périodiques.

La théorie des distributions associe aux distributions périodiques des séries de Fourier de la même forme que celles des fonctions périodiques, mais convergeant au sens des distributions. Par généralisation, une série de la forme ci-dessus, où les λ_n sont des réels quelconques et qui converge au sens des distributions, définit une distribution presque-périodique.

Nous avons construit le pavage de la droite D par restriction de $\mathbb{Z}^2$ à la bande B, suivie d'une projection de $\mathbb{Z}^2 \cap B$ dans D. $\mathbb{Z}^2$ étant considéré comme une somme de mesures de Dirac situées aux sommets du réseau, nous pouvons appliquer la transformation de Fourier à chaque étape de cette construction; nous obtenons une expression de la forme

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} c_{m,n} \delta_{a^*m + b^*n}$$

$$\text{qui est la transformée de Fourier de } H = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} c_{m,n} e^{i(am + bn)x}$$

H est la série de Fourier de la distribution presque périodique définie par le pavage de la droite.

On peut étudier de cette façon tous les pavages construits à l'aide de la méthode de la bande. Notons que si une symétrie conserve le réseau de dimension supérieure et le plan (l'espace) du pavage, cette symétrie se retrouve dans la transformée de Fourier. Cela explique les symétries, interdites par la cristallographie, que les chimistes avaient observées au microscope électronique (car, comme il a été dit au début de l'article, ce qu'on observe correspond à une transformée de Fourier).

Figure 5:

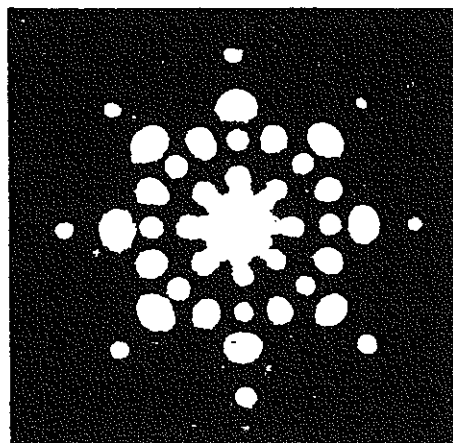


Diagramme de diffraction
à symétrie d'ordre 8
(Alliage Chrome, Nickel, Silicium)

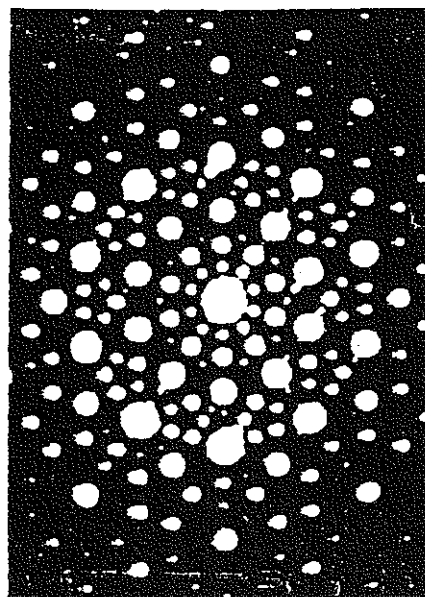


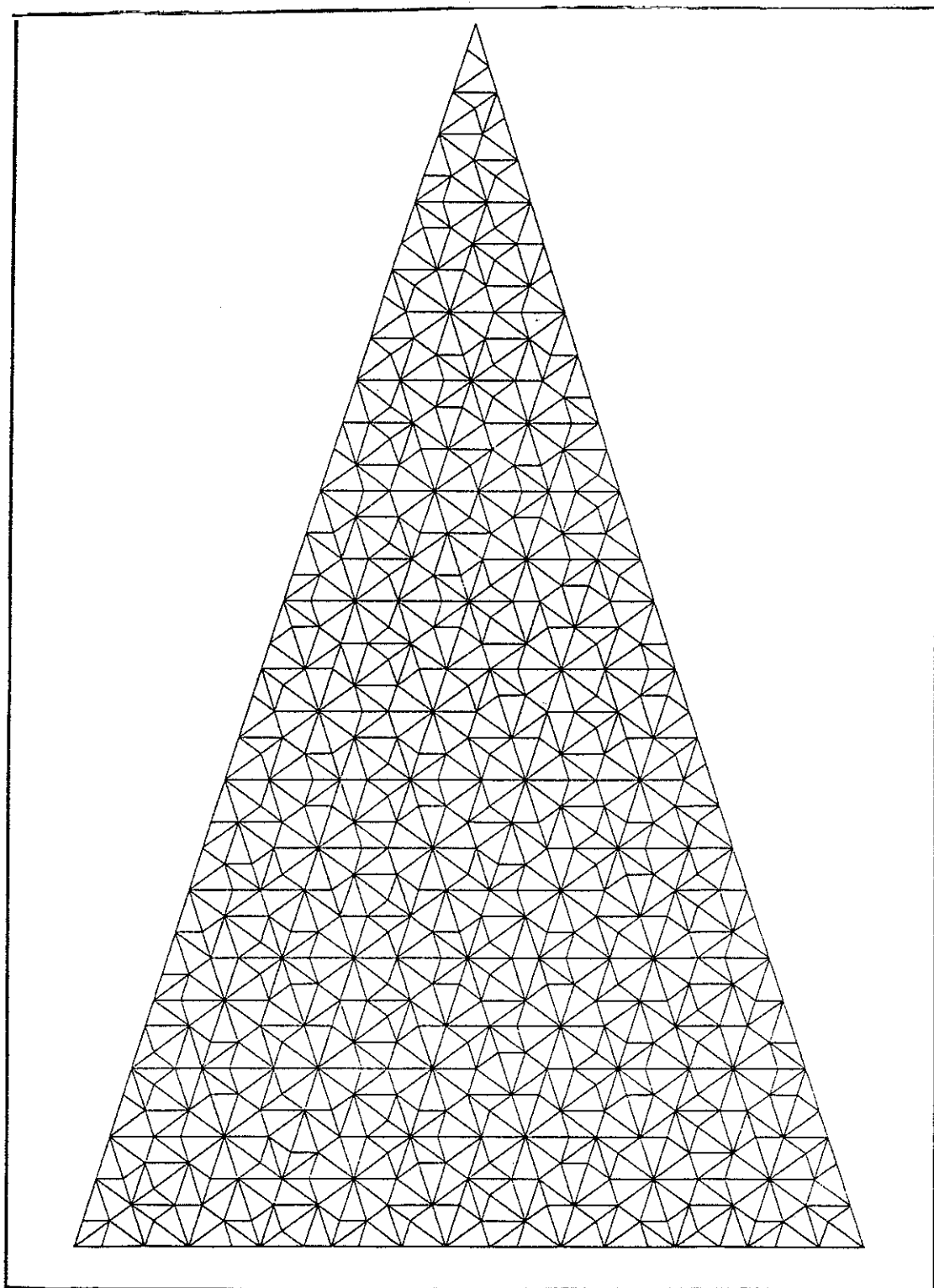
Diagramme de diffraction
à symétrie d'ordre 5
(Alliage Aluminium, Manganèse)

Bibliographie:

- | | | |
|-----|---------------------|---|
| 1- | R. Penrose, | Math. Intelligencer, 2, 32-37 (1979) |
| 2- | A. Katz, M. Duneau | Jour. de Phys. 47 (1986) 181-196 |
| 3- | A. Katz, M. Duneau | Phys. Review letters, 54 n° 25 (1985) 2688-2691 |
| 4- | A. Katz, M. Duneau, | Images de la Physique (1986) Courrier du CNRS, 7-11 |
| 5- | D. Gratias | Cours à l'école d'été de Physique, édition interne, centre d'étu
des de chimie métallurgique du CNRS de Vitry sur Seine. |
| 6- | A.S. Besicovitch | Almost Periodic Functions, Cambridge Univ. Press,
Dover publ. 1954 |
| 7- | H. Bohr | Almost Periodic Functions, Chelsea Publi. Company, 1947. |
| 8- | D. Gratias | Les quasi-cristaux in La Recherche n°178 (juin 1986) |
| 9- | | Revue du Palais de la Découverte n° spécial 40 (mai 1991) |
| 10- | | Revue du Palais de la Découverte. n° 181 (octobre 1990) |

Pavage équivalent au pavage de Penrose .

Robinson généralise le procédé de Penrose en utilisant ici des triangles. (se reporter aux articles de la revue de Palais de la Découverte [9] et [10])



Problèmes ouverts:

Il existe des pavages ni périodiques ni quasi-périodiques.

C'est le cas de la figure ci-dessous. Il est actuellement fait l'étude du spectre de Fourier pour ce pavage qui pose beaucoup de questions; en particulier la description précise de son spectre est encore inconnue. [9]

