DANS NOS CLASSES

Une méthode de quadrature et sa légitimation par Isaac Newton.

Maryvonne Hallez

Cette activité menée en classe de Terminale A , comprend deux parties:
- un devoir à faire à la maison intitulé "Une quadrature de parabole"
- une lecture d'un texte de Newton avec des questions.

L'ensemble fut conçu comme travail préparatoire à la leçon sur l'intégration.[1]

Le but du devoir était de démontrer que, pour x_0 fixé, l'aire $\mathcal{A}(x_0)$ limitée par la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'axe (x'x) et la droite passant par le point $(x_0, 0)$, x_0 positif, vérifie l'encadrement

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\, x_0^3 < \mathcal{A}(x_0) < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\, x_0^3$$

La correction du devoir faite en classe se termina par le passage à la limite de l'encadrement ci-dessus pour obtenir l'égalité

$$\mathcal{A}(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\, x_0^3 = \frac{x_0^3}{3}$$

Que l'aire curviligne limitée par la parabole d'équation $y = x^2$ soit donnée exactement par $\frac{x_0^3}{3}$ pour x_0 fixé et que la dérivée de la fonction $(x \longrightarrow \frac{x^3}{3})$ donnant l'aire $\mathcal{A}(x)$ soit $(x \longrightarrow x^2)$ relève presque de la magie pour les élèves bien qu'ils aient suivi apparemment sans difficultés la démonstration.

La deuxième partie du travail consista en la lecture des lemmes I et II du premier livre des "Principia" (Principes mathématiques de la philosophie naturelle) d'Isaac Newton en vue de généraliser un aspect de la démarche suivie dans la quadrature précédente et de lui donner une plus grande force de conviction dans l'esprit des élèves; Isaac Newton (1642 - 1727) est un des inventeurs du calcul infinitésimal, calcul de

[1] Les élèves avaient eu auparavant à démontrer de trois manières différentes l'égalité $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

dérivation et d'intégration; il écrit trois articles sur ce "nouveau calcul" qu'il élabore à partir de 1665. Son chef-d'oeuvre, les "Principia", paraît en latin en 1686 ; il est précédé d'une Ode à Newton écrite par le grand astronome Edmund Halley à qui Newton rend hommage dans sa préface pour l'aide précieuse qu'il lui a apportée; Halley conclut son ode par ces mots:"Aucun mortel, ne peut approcher les dieux de plus près."

Les "Principia" se divisent en deux livres dont les titres explicitent bien le but poursuivi par Newton

Livre I Le mouvement des corps.

Livre II Le système du monde et son traitement mathématique.

Il commence, à la manière d'Euclide, par donner les définitions, les lois et les axiomes sur le mouvement qui seront utilisés dans les deux livres des "Principia".

Le livre I débute par la donnée des lemmes I et II que nous allons lire qui sont l'exposé de la méthode qu'il a inventée. Comme dans tous les écrits fondateurs du calcul infinitésimal, le modéle des démonstrations pour calculer une aire est celui d'Archimède (3 ème siècle av. J.C.).

Dans une scholie du lemme XI, il écrit: *"J'ai commencé par ces Lemmes, pour éviter de déduire de longues démonstrations ad absurdum, selon la méthode des anciens Géomètres."*

Il se propose donc de simplifier les démonstrations par l'absurde tout en continuant à formuler géométriquement les preuves pour les rendre aussi "rigoureuses" que celle des anciens ;

Dans le scholie déjà cité il développe les principes de sa méthode:

"j'ai mieux aimé employer celle des premières et dernières raisons des quantités qui naissent et s'évanouissent; et j'ai commencé à faire voir, le plus brièvement que j'ai pu, ce que deviennent les quantités, lorsqu'elles atteignent leurs limites."

S'il nous faut attendre Augustin-Louis Cauchy (1798-1857) pour une définition du concept de limite faisant autorité dans la communauté mathématique, l'idée de limite est sous-jacente aux deux lemmes lus avec les élèves et explicitée par Newton lui-même comme nous venons de le lire.

Il ajoute:" *On peut dire, contre ce principe des premières et dernières raisons , que les quantités qui s"évanouissent n'ont point de proportion entre elles; parcequ'avant de s'évanouir, la proportion qu'elles ont n'est pas la dernière, et que lorsqu'elles sont évanouies, elles n'en ont plus aucune; Mais on pourrait soutenir par le même raisonnement qu'un corps qui parvient d'un mouvement uniformément retardé à un certain lieu où son mouvement s'éteint, n'a point de dernière vitesse...*" Il justifie ainsi sa méthode par cette analogie: la "dernière raison" des quantités étudiées est celle qu'elles ont au moment même où elles s'évanouissent ; avant l'"évanouissement", aussi près que l'on soit du terme du processus, aucune"proportion comme aucune vitesse ne peut être dite la dernière. Le mot "raison" est ici assez proche de l'idée de relation.

Après avoir établi ce principe, Newton encadre, suivant en cela le raisonnement d' Archimède, la surface s dont il cherche l'aire entre deux surfaces qu'il sait mesurer, l'une plus petite inscrite que l'on peut noter A' , l'autre plus grande circonscrite que l'on peut noter A". Les quantités A' et A" sont telles que, comme le dit Newton, *"elles tendent continuellement à devenir égales"* ou ce qui a le même sens *"tendent à être en raison d'égalité"*.

De la "raison" d'inégalité A' < A" , l'augmentation du nombre de "cotés" des figures inscrite et circonscrite fait une raison d'égalité avec l'aire à calculer.

I- Problème: UNE QUADRATURE DE "LA" PARABOLE

A) Soient A et C les points de la parabole P d'équation $y = x^2$ d'abscisses respectives 1 et 1/2, a et c leurs projections orthogonales sur (x'x); Soit $\mathcal{A}$ l'aire comprise entre la parabole , l'axe (x'x) et la droite (Aa).

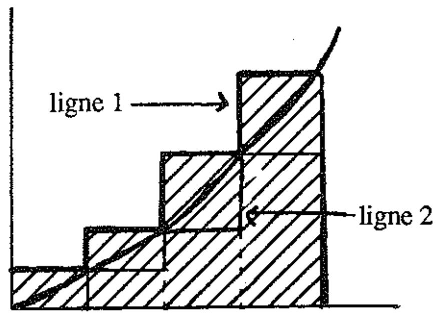
1.Comparer $\mathcal{A}$ et l'aire du triangle OAa. Déduisez-en une valeur approchée par excès de $\mathcal{A}$.

2.Comparer $\mathcal{A}$ et l'aire limitée par la ligne brisée OCA, l'axe (x'x) et la droite (Aa). Déduisez-en une autre valeur approchée par excès de $\mathcal{A}$.

B) Soient A_i les points d'abscisses respectives $\frac{i}{5}$, i entier compris entre 1 et 5 de la même parabole.

1. Tracez en noir la courbe représentative de f avec les points A_i dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 50$ mm et $\|\vec{j}\| = 50$ mm.

2. Appelons ligne 1 la ligne brisée "circonscrite" au "segment de parabole " correspondant à la surface hachurée sur la figure et ligne 2 la ligne brisée "inscrite". Tracez en vert la ligne 1 et en rouge la ligne 2.



Calculez l'aire limitée par la ligne 1,
l'axe (x'x) et la droite d'équation x =1.
même question pour la ligne 2.

N.B. ces aires sont la somme de l'aire des rectangles,
vous pourrez donc utiliser $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Déduisez-en un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ limitée par la parabole, l'axe (x'x) et la droite d'équation x =1.

4. Reprenez les questions 1, 2 et 3 avec les points A_i d'abscisses respectives $\frac{i}{10}$, i entier compris entre 1 et 10.

5. Donnez les encadrements successifs que l'on peut ainsi obtenir de l'aire $\mathcal{A}$ avec les points A_i , i allant de 1 à n pour n =10, n = 25, n =100, n =1000.

C) Soient A_i les points d'abscisses respectives $\frac{i}{n} x_0$ pour i entier allant de 1 à n.

1. Soient h_i la projection orthogonale de A_i sur (x'x), quelle est l'aire du rectangle R'_i dont trois sommets sont A_i , h_i et h_{i+1} ?
Quelle est celle du rectangle R_i dont trois sommets sont A_i , h_i et h_{i-1} ?

2. Quelle est la somme des rectangles R'_i, puis celle des rectangles R_i ?

(vous pourrez utiliser $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.)

3.Quel encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ pouvez vous en déduire?

D) Calculez $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$

II LECTURE DES LEMMES DE NEWTON.

A) Lemme II

(voir le texte ci-dessous)

Après une lecture individuelle du texte les élèves eurent à répondre par écrit aux questions suivantes :

1. Qu'est-ce qu'un lemme?
2. Comment comprenez vous le mot "raison" de la ligne 7?
3. Le mot raison ligne 18 a-t-il le même sens?
4. Pouvez-vous donner une formulation d'un lemme justifiant les trois dernières lignes?

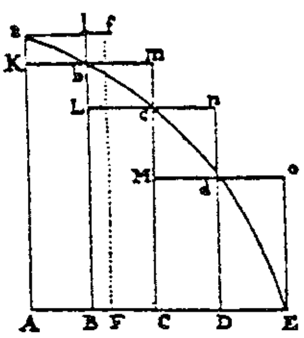
Ce travail fut fait en classe, ne fut pas évalué mais conduisit à une mise en commun des réponses.

LEMME II.

Du Mouvement des Corps.

Si dans une figure quelconque A a c E, *compriſe entre les droites* A a, A E, *& la courbe* a c E, *on inſcrit un nombre quelconque de Parallélogrammes* A b, B c, C d, &c. *compris ſous les baſes égales* A B, B C, C D, *&c. & ſous les côtés* B b, C c, D d, *&c. parallèles au côté* A a *de la figure ; & qu'on acheve les parallélogrammes* a k b l, b L c m, c M d n, *&c. qu'on diminue enſuite la largeur de ces parallélogrammes, & qu'on augmente leur nombre à l'infini : les dernieres raiſons qu'auront entr'elles la figure inſcrite* A K b L c M d D, *la circonſcrite* A a l b m c n d o E, *& la curviligne* A a b c d E, *ſeront des raiſons d'égalité.*

Car la différence de la figure inſcrite & de la figure circonſcrite, eſt la ſomme des parallélogrammes *K l*, *L m*, *M n*, *D o*; c'eſt-à-dire (à cauſe de l'égalité de toutes les baſes) que cette différence eſt égale au rectangle *A B l a* fait ſur l'une des baſes *K b* & ſur la ſomme *A a*, de toutes les hauteurs ; mais ce rectangle, à cauſe que ſa largeur diminue à l'infini, deviendra plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc (par le Lemme premier) la figure inſcrite, la figure circonſcrite, & à plus forte raiſon la figure curviligne intermédiaire ſeront à la fin égales. *C. Q. F. D.*



(Principes mathématiques de la Philosophie naturelle. Par Madame la Marquise du Chastellet Paris 1759)

Commentaires

Question 1 :

Les élèves n'avaient jamais rencontré le mot "lemme". La règle du jeu, donnée oralement, était d'essayer d'inventer une définition cohérente avec le contenu du texte.

Tous répondirent à la question, par exemple :

"D'après ce texte, un lemme est une sorte de théorème, une démonstration sur un principe de mathématique précis".

"D'après les trois dernières lignes, on sait qu'un lemme cherche à aboutir à un théorème, à un cas général de solution."

Question 2

Tous répondirent en utilisant des équivalents au mot "raison" : "rapport", "relation entre les figures" ...

Question 3

La réponse là encore fut unanime : le sens est différent ; "à plus forte raison" signifie "d'autant plus" ; "le mot raison a, ligne 18, un sens plus courant qui est de l'ordre de la logique et de l'argumentation permettant de dire que quelque chose est vrai".

Question 4

Une moitié de la classe seulement donna des réponses que nous lûmes à haute voix en classe:

"Si la différence entre les aires devient de plus en plus petite, elles tendent vers un rapport d'égalité".

"Si on augmente à l'infini, le nombre de rectangles, la limite de l'aire de ces rectangles est égale à l'aire sous la courbe"... .

Cette question avait pour but de permettre aux élèves de suivre la pensée de Newton en donnant eux-mêmes une formulation du lemme I avant de le lire. Il est à noter que le langage de Newton ne leur a pas paru obscur et que certains se l'approprièrent même remarquablement vite.

B.) Lemme I

(voir le texte page suivante)

Après la lecture individuelle du texte, les questions suivantes furent données aux élèves:

1. Quelle sorte de raisonnement utilise Newton dans ce lemme !
2. Quelle notion est utilisée par Newton et n'est pas apparue explicitement dans vos réponses ?
3. Etes-vous convaincu(e) par le raisonnement de Newton?

SECTION PREMIERE.

De la méthode des premieres & dernieres raisons employée dans tout cet Ouvrage.

LEMME PREMIER.

Les quantités & les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

Du Mouvement des Corps.

Si on le nie, qu'on suppose qu'elles soient à la fin inégales, & que leur derniere différence soit D, puisqu'elles ne peuvent pas approcher plus près de l'égalité que de cette différence donnée D, leur différence ne sera donc pas plus petite que toute différence donnée, ce qui est contre l'hypothése.

(Principes mathématiques de la Philosophie naturelle. Par Madame la Marquise du Chastellet Paris 1759)

Commentaires

Les réponses données oralement furent l'occasion d'un débat. La lecture de ce lemme leur parut fort facile. Les élèves étaient déjà familiarisés avec le raisonnement par l'absurde et eurent pour la plupart la satisfaction de le reconnaître. Pour certains le lemme était l'expression d'une évidence, la démonstration leur semblait superflue. D'autres, peut-être impressionnés par la notoriété de Newton, justifièrent au contraire l'établissement du lemme; la discussion se poursuivit en répondant à la question 2 qui donna l'occasion de signaler l'importance du temps et du mouvement dans la pensée mathématique de Newton. A la question 3, la réponse affirmative fut unanime et ne donna lieu à aucun commentaire.

CONCLUSION

Une relecture des deux lemmes se fit à partir de la question suivante:
Par rapport à la quadrature de la parabole réalisée dans le travail précédent quel est l'élément nouveau qu'apporte la lecture de ces deux lemmes?
Le but était de montrer la différence entre une démonstration utilisant le calcul numérique avec un passage à la limite réalisé pour la quadrature de parabole et la démonstration géométrique de Newton utilisant une grandeur géométrique l'aire d'un rectangle dont "la largeur diminue à l'infini" et de convaincre les élèves qu'ainsi Newton avait permis la généralisation du calcul de l'aire sous une courbe représentative d'une fonction monotone positive quelconque.