

BONNES VIEILLES PAGES

Nicolas Chuquet (1445? - 1500) est l'auteur du manuscrit, daté de 1484, intitulé *Le Triparty en la science des nombres* qui ne sera publié qu'en 1880.

Nous vous proposons un extrait dans lequel Chuquet expose une méthode d'extraction des racines carrées incommensurables. Cette méthode repose sur la propriété suivante:

deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ formant un encadrement de la racine cherchée,
le nombre $\frac{a+c}{b+d}$ permettra de définir un meilleur encadrement.

Le procédé est assez fastidieux, mais la qualité des approximations fournies par Nicolas Chuquet n'en est que plus remarquable.

A ce propos, Tannery écrit un commentaire concernant cet extrait du texte de Chuquet. Nous vous proposons donc l'intégralité de cet article paru dans la "Bibliotheca Mathematica, n° 1 de 1887", dans lequel il montre que la méthode fournit les réduites successives de la fraction continue qui représente la racine cherchée, ainsi que les "fractions convergentes intermédiaires". Tout en signalant que Chuquet ne pouvait démontrer la convergence de sa méthode, il souligne que celui-ci n'interrompt son calcul qu'en possession d'une réduite (1).

La suite de son article concerne l'influence qu'aurait pu exercer le procédé de Nicolas Chuquet dans l'invention des fractions continues ainsi que l'existence de méthodes équivalentes, antérieure au *Triparty*.

Philippe Brin

(1) La théorisation des fractions continues est due à Euler et Lagrange.
voir – l'Encyclopédie Universalis : approximations diophantiennes, nombres réels.
– l'article de François Jaboeuf dans les n° 1- 2- 3 de Quadrature.

LE TRIPARTY

EN LA SCIENCE DES NOMBRES

PAR MAISTRE NICOLAS CHUQUET PARISIEN

PUBLIÉ D'APRÈS LE MANUSCRIT FONDS FRANÇAIS N° 1346

DE LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE DE PARIS

ET PRÉCÉDÉ D'UNE NOTICE

PAR M. ARISTIDE MARRE

1881

¶ La rigle des nombres moyens.

Este rigle sert a trouuer tant de nombres moyens entre deux nombres prochains que lon veult. Par le moyen dicelle se peult trouuer plusieurs nombres et faire mains calcules que par la rigle de troys ne par vne posicion ne par deux posicions ne se peuvent trouuer. Et pour ceste rigle entendre et scauoir pratiquer lon doit sauoir que $\frac{1}{2}$. est le premier et le comancement entre les nombres routz et dicellui sourdent et saillent deux progressions naturelles dont lune progredist en augmentant comme $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{8}$. $\frac{7}{16}$. ec. et lautre progredist en diminuant comme $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. ec. Lesquelles choses entendues sens la Regle.

¶ Numerateur avec numerateur se adioustent et denoiateur avec denoiateur. Cest a entendre que quant entre deux nombres entiers prochains lon veult trouuer le premier moyen. Au moindre entier lon doit adioster $\frac{1}{2}$. et ainsi lon aura vng nombre moyen plus grant que le moindre extreme et mineur du maieur extreme. Côme entre 3. et 4. Le nombre moyen et le premier si est $3\frac{1}{2}$. Et qui plusieurs moyens voudroit trouuer entre 3. et $3\frac{1}{2}$. lon doit a 3. adioster $\frac{1}{4}$. ou $\frac{1}{8}$. ou $\frac{1}{16}$. ec. côme 3. $\frac{1}{4}$. $3\frac{1}{4}$. $3\frac{1}{8}$. ec. Et tant plus lon progredist par ceste progression tant plus lon saproche du mineur extreme qui est 3. ¶ Et qui plusieurs moyens entre $3\frac{1}{2}$. et 4. voudroit auoir Il conuiendroit adioster a 3. $\frac{3}{4}$. ou $\frac{5}{8}$. ou $\frac{7}{16}$. ec. et ainsi tant plus lon progrediroit tant plus lon sapprocheroit du maieur extreme qui est 4. Et par ainsi entre deux nombres entiers prochains Innumables moyens se peuvent trouuer les vngs declinans au mineur extreme et les aults tendens au maieur. Et encôres entre deux moyens prochains Innumables moyens se peult trouuer tendens pareillemt a tel extreme que lon veult En adioustant numerateur avec numerateur et denoiateur avec denoiateur côme dit la rigle Sicôme qui entre $3\frac{1}{2}$. et $3\frac{3}{4}$. voudroit trouuer vng moyen Il conuient adioster 1. avec 1. qui sont les deux numerateurs et montent 2. pour numerateur et puis 3. avec 3. qui sont les deux denoiateurs montent 6. pour denoiateur. Ainsi Jay $3\frac{2}{3}$. pour moyen entre $3\frac{1}{2}$. et $3\frac{3}{4}$. Car $3\frac{2}{3}$. est plus de $\frac{1}{4}$. et moins de $\frac{1}{8}$. Enco-

res qui entre $.3. \frac{1}{2}$. et $.3. \frac{1}{3}$. voudroit trouuer vng moyen conuient faire come dit la rigle et lon aura $.3. \frac{1}{4}$. Et qui entre $.3. \frac{1}{4}$. et $.3. \frac{1}{5}$. voudroit trouuer vng moyen Il conuient negocier come dit la rigle et lon aura $.3. \frac{1}{7}$. Et par ceste maniere lon peult continuer a linquision des moyens Jusques a ce que lon ayt trouue cellui que lon serche.

¶ L'extraction des racines Imparfaictes.

¶ Comme deuant a este dit tous nombres ne sont pas vraz quarrez en tant que deulx lon ne peult auoir racine secõde precise. Car leurs racines multipliees en elles montent tousiours plus ou moins que leurs nombres dont elles

sont racines Et pourtant sont elles dictes Racines Imparfaictes dont l'extraction dicelles nest que labeur sans vtilite. Neantmoins pour la perfection de ce liure est mise vne maniere de les s̃cher tant prochaines de perfection quil est possible. Et pour entrer en la pratique Il conuient premier scauoir que pour s̃uir a ce cas Ilz sont deux manieres de progressions cestas̃ pgression en augmẽta^õ come $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. etc. et pgression en diminucion cõe. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. etc.

¶ Ores pour extraire toutes racines Imparfaictes lon peult faire en ceste maniẽ. Comme par exẽple qui voudroit extraire la racine. seconde Imparfaicte de $.5.$ Conuient besongner p̃mierẽment en la forme et maniẽ deuant dicte es nombres quarrez en diuisant les figures du nũbre ppose de deux en deux se tant en ya et negocier ne plus ne moins que deuant est dit. ¶ Doncques la racine de $.5.$ est $.2.$ car $.2.$ foiz $.2.$ font $.4.$ et restent encores $.1.$ Puis que ainsi est que $.2.$ pour racine ne souffisent pas pour appcher souffisamment de $.5.$ Et aussi qui prendroit $.3.$ po^r racine Il prendroit trop. Et pour tant la 3^e . de $.5.$ est vng c̃tain nombre moyen entre $.2.$ et $.3.$ Et pour icellui trouuer lon doit vser de la rigle des nombres moyens mise a la fin de la p̃miere partie de ce liure et prendre pour le premier moyen. $.2 \frac{1}{2}$. qui multipliez en soy montent. $5 \frac{1}{4}$. qui sont $\frac{1}{4}$. plus de $.5.$ Et pourtant prendrons moins en pcedant par la pgression de diminucion et essayerons si $.2 \frac{1}{3}$. multipliez en soy montent plus ou moins de $.5.$ Or est Il ainsi quilz montent $.5.$ moins $\frac{2}{9}$. Maintenant que nũ auons trouue deux racines dont lune fait plus et lautre moins Il nous conuient trouuer vng nombre moyen entre $.2 \frac{1}{3}$. et $2 \frac{1}{2}$. en adioustant numẽrateur avec numẽrateur et denofate^r. avec denofateur et en vient $.2 \frac{2}{5}$. Ores essaye ta racine en multipliant $.2 \frac{2}{5}$. en soy et trouueras $.5.$ moins $\frac{4}{25}$. Conuient donc trouuer vng aut^r nombre moyen entre $2 \frac{1}{3}$. et $2 \frac{1}{2}$. en adioustant cõme dessus et lon aura $2 \frac{1}{7}$. qui multipliez en soy montent $.5.$ moins $\frac{1}{7}$. Et par ceste maniere peulx pceder en adioustant le moins avec le plus. ou le plus avec le moins Jusques a ce que lon sappche bien pres de $.5.$ vng petit plus ou vng petit moins et tant quil souffise. ¶ Et doit on scauoir que tant plus lon continueroit par ceste maniẽ tant plus pres de $.5.$ lon sappcheroit.

¶ Mais Jamais on ne lattaindroit p̃cisemẽt | ¶ Et de tout ce sensuyt la pratique en laquelle est trouue que la racine de $.5.$ bonne et souffisante est $.2 \frac{11}{121}$. laquelle racine multipliee en soy produyt $.5.$ plus $\frac{1}{1331}$.

Par. 2.	$\frac{1}{2}$.	plus	$\frac{1}{4}$.
Par. 2.	$\frac{1}{3}$.	moins.	$\frac{1}{9}$.
Par. 2.	$\frac{2}{3}$.	m̃.	$\frac{4}{9}$.
Par. 2.	$\frac{1}{4}$.	m̃.	$\frac{1}{16}$.
Par. 2.	$\frac{3}{4}$.	m̃.	$\frac{9}{16}$.
Par. 2.	$\frac{1}{5}$.	m̃.	$\frac{1}{25}$.
Par. 2.	$\frac{4}{5}$.	pl'	$\frac{16}{25}$.

Par. 2. $\frac{13}{19}$.	m. $\frac{3}{141}$.	¶ Et qui voudroit sercher plus auant Il trouueroit par .2. $\frac{131}{1900}$ pl ² $\frac{1}{1311000}$.
Par. 2. $\frac{13}{19}$.	m. $\frac{6}{1401}$.	
Par. 2. $\frac{13}{19}$.	m. $\frac{5}{1761}$.	
Par. 2. $\frac{16}{19}$.	m. $\frac{2}{1931}$.	
Par. 2. $\frac{19}{19}$.	pl ² . $\frac{9}{11441}$.	
Par. 2. $\frac{19}{19}$.	pl ² . $\frac{1}{19301}$.	

¶ Encores cy apres sont mises les racines Imparfaictes de plusieurs nombres Lesquelles par la rigle des moyens ont este trouuees come la dessus d^o la premiere est la racine de 2. qui est $.1. \frac{169}{199}$. qui multipliee en soy monte 2. plus $\frac{1}{1311000}$.

x^2 de .3. est $.1. \frac{321}{1900}$ plus $\frac{1}{1311000}$.
 x^2 de .3. est $.1. \frac{161}{882}$ plus $\frac{1}{131124}$.
 x^2 de 7. est $.2. \frac{7278}{131192}$ plus $\frac{1}{131044404}$.
 x^2 de .3. est $.2. \frac{943}{1129}$ plus $\frac{1}{1311731}$.
 x^2 de .10. est $.3. \frac{1105}{8634}$ plus $\frac{1}{71960964}$.
 Vel sic x^2 de .10 est $.3. \frac{224}{1105}$ moins $\frac{1}{1971933}$.
 x^2 de .11. est $.3. \frac{179}{1107}$ plus $\frac{1}{1311508}$.
 x^2 de .12. est $.3. \frac{131}{990}$ plus $\frac{1}{1311000}$.
 x^2 de .13. est $.3. \frac{109}{110}$ plus $\frac{1}{311000}$.
 x^2 de .14. est $.3. \frac{267}{1104}$ plus $\frac{1}{1291112}$.

¶ Des nombres routz aucuns sont quarrez de la partie du numerateur tant. 3. seulement come $\frac{14}{19}$. Aucuns de la partie du denomiateur come $\frac{17}{19}$. Et daultres sont qui ne sont quarrez ne dune part ne daultre come $\frac{3}{7}$. Et daultres sont qui sont quarrez de l'une partie et de laultre come $\frac{1}{2}$ donc si x^2 est $\frac{3}{7}$ come cy dessus a este dit.

¶ La maniere dextraire les racines Imparfaictes de ceux qui ne sont quarrez ne d'ung costé ne daultre si est que lon doit extraire la racine Imparfaicte du numerateur et celle du denoiateur par la forme et maniere que dessus est dit en l'extraction de la racine de .6. Puis reduire l'une contre laultre si elles sont distemblans et de la racine du numerateur faire numerateur et de celle du denoiateur faire denomiateur et sera fait.

¶ Pour euitter la peine et lennuoy que lon peult auoir pcher les racines de telz nombres qui ne sont quarrez ne d'ung ne daultre lon peult faire quarre l'ung ou laultre lequel que lon veut en ceste maniere comme de $\frac{3}{7}$. qui voudroit le faire quarre de la partie du numerateur fault multiplier 3. en soy monte .25. pour le numerateur qui est nombre quarre puis .3. fois .7. font .21. pour le denoiateur Et qui le voudroit faire quarre de la partie du denoiateur.

L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet.

Par PAUL TANNERY à Paris.

Dans son *Triparty*,¹ daté de 1484, et copié par ESTIENNE DE LA ROCHE dans son *Arithmétique* imprimée en 1520, NICOLAS CHUQUET a donné, pour le calcul des valeurs approchées en général, pour celui des racines carrées incommensurables en particulier, un procédé que l'on peut expliquer comme suit :

Soient $\frac{p_0}{q_0}$, $\frac{p_1}{q_1}$, deux valeurs approchées, l'une par excès, l'autre par défaut, on forme

$$p' = p_0 + p_1, \quad q' = q_0 + q_1,$$

et par l'élévation au carré, s'il s'agit de l'extraction d'une racine, ou par une substitution, dans le cas général, on vérifie si la nouvelle approximation $\frac{p'}{q'}$, qui est intermédiaire entre les deux précédentes, se trouve par excès ou par défaut. En la combinant ensuite par le même procédé avec celle des deux valeurs précédentes qui se trouve approchée en sens contraire, on forme de même une nouvelle valeur $\frac{p''}{q''}$, et ainsi de suite.

Supposons maintenant que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ soient deux réduites successives de la fraction continue qui représente le nombre incommensurable à calculer. Soit d'ailleurs $\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_0 + sp_1}{q_0 + sq_1}$, la réduite suivante; il est aisé de voir que le procédé donnera successivement les *fractions convergentes intermédiaires* entre $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$, fractions qui seront toutes approchées en sens contraire de $\frac{p_1}{q_1}$ et dans le même sens que $\frac{p_0}{q_0}$, jusqu'à ce que l'on arrive à $\frac{p_2}{q_2}$. Toutes ces fractions, y compris la réduite $\frac{p_2}{q_2}$,

seront donc successivement combinées avec $\frac{p_1}{q_1}$ et l'on arrivera ainsi, à la fin de ces combinaisons, à la valeur

$$\frac{p_0 + (s+1)p_1}{q_0 + (s+1)q_1} = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2},$$

c'est à dire à la première des fractions convergentes intermédiaires entre $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$. Cette première devra être combinée

avec $\frac{p_2}{q_2}$, et dès lors on aura de même toutes les convergentes suivantes, et ainsi de suite indéfiniment.

Or l'hypothèse que nous avons introduite, que l'on parte de deux réduites successives, s'applique au procédé de NICOLAS CHUQUET, celui-ci partant systématiquement des deux nombres entiers qui comprennent le nombre incommensurable à calculer. Ce procédé donne donc régulièrement *la suite complète des fractions convergentes intermédiaires et les réduites du développement de ce nombre en fraction continue.*

Si, en particulier, il s'agit de poursuivre l'approximation de la racine carrée d'un nombre entier A , jusqu'à l'obtention d'une solution de l'équation de Pell :

$$p^2 - Aq^2 = 1,$$

le procédé de NICOLAS CHUQUET conduira nécessairement à cette solution.

Il est clair que l'arithméticien qui nous a enseigné ce procédé, devait être incapable de démontrer la propriété que nous venons d'énoncer; mais il n'en est pas moins certain que le problème était posé pour lui, car, dans les exemples assez nombreux qu'il donne d'extractions de racines carrées, il s'arrête toujours à un reste ayant pour numérateur l'unité; d'un autre côté, comme il calculait effectivement tous les restes, il lui était facile de reconnaître empiriquement la périodicité des numérateurs.

Le procédé de NICOLAS CHUQUET a donc théoriquement une importance considérable, comme l'ont déjà reconnu M. SIEGMUND GÜNTHER¹ et M. LÉON RODET.² Toutefois en pratique, il est tellement fastidieux que, malgré sa publication par ESTIENNE DE LA ROCHE, il était permis de croire qu'il n'a jamais exercé une influence réelle.*

* Il convient de signaler que la méthode de CHUQUET a été men-

J'ai cependant trouvé un indice qui semble prouver le contraire et qui me conduit dès lors à modifier assez profondément certaines conclusions de mon essai: *Questions héroniennes*, inséré dans le Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 8., 1884, p. 329—344, 359—376.

J'y ai montré (pages 364—365), sur douze solutions d'équations de PELL signalées par M. PEROTT⁴ dans l'édition de 1534 du *Tratado subtilissimo de Arismetica y de Geometria* du dominicain JUAN DE ORTEGA, qu'elles pouvaient avoir été obtenues par l'application du procédé proposé par M. RADICKE.⁵ J'en ai conclu que l'existence de pareilles approximations ne pouvait suffire pour faire admettre l'emploi, par leurs auteurs, d'un autre procédé que celui-là, qui se déduit si simplement de la méthode que l'on est conduit à supposer comme connue des anciens, d'après les approximations héroniennes.

En dehors des douze approximations en question, j'ai fait quelques remarques sur une valeur fautive de $\sqrt{2000}$, indiquée par M. PEROTT comme se trouvant dans le même Traité d'ORTEGA.

Comme je le disais, la correction de cette valeur fautive, $44\frac{2079}{2582}$, ne pouvait être qu'aventureuse. En dehors de la valeur que je supposais pouvoir être la véritable, il en était une autre, $44\frac{2079}{2882}$, qui m'apparaissait comme étant *a priori* certainement plus probable.

Au moment où je communiquais cette seconde hypothèse à M. PEROTT, il constatait que c'était bien effectivement la valeur imprimée dans l'édition de 1534, tandis qu'il avait emprunté la fautive à l'édition de 1542.

Or cette valeur, $44\frac{2079}{2882}$, comme approximation de $\sqrt{2000}$, est en fait très satisfaisante, sans qu'elle puisse être obtenue par le procédé RADICKE, pas plus que par aucun autre que je connaisse.

Elle est aussi par le géomètre français BUTÉON, dans l'ouvrage: *Logistica quæ et Arithmetica vulgo dicitur, in libros quinque digesta*. Lugduni, apud Gulielmum Rovillium M.D.L.IX., p. 76—77. BUTÉON applique la méthode à l'invention de $\sqrt{13}$; il trouve successivement

$$3\frac{1}{2} < \sqrt{13} < 3\frac{1}{2}$$

$$3\frac{1}{2} < \sqrt{13} < 3\frac{1}{2}$$

$$3\frac{1}{2} < \sqrt{13} < 3\frac{1}{2}.$$

Sous sa forme ci-dessus, elle ne paraît susceptible d'être obtenue directement que par des combinaisons assez improbables, qui supposent en tous cas la connaissance du procédé de NICOLAS CHUQUET;* mais ce même procédé permet de l'obtenir régulièrement sous la forme équivalente $44 \frac{189}{262}$.

Il y a donc là un indice plus ou moins grave de l'emploi par ORTEGA du procédé de NICOLAS CHUQUET; et cet indice se trouve d'autre part, corroboré par ce fait que, d'après son essence, le même procédé a pu servir au calcul des douze racines formant solution d'équations de PELL; qu'il donne enfin également les deux autres racines qui se rencontrent dans le même chapitre d'ORTEGA, et semblent, à première vue, calculées par la formule:

$$\sqrt{a^2 + r} \sim a + \frac{r}{2a}.$$

Ces deux racines sont:

$$\sqrt{9600} \sim 97 \frac{191}{194}, \quad \text{et} \quad \sqrt{4100} \sim 64 \frac{1}{32}.$$

La recherche de documents analogues, postérieurs à 1563, (date de la dernière édition d'ORTEGA), me paraît donc offrir un certain intérêt pour déterminer dans quelle mesure le procédé de NICOLAS CHUQUET aura pu continuer à être appliqué et dès lors servir à l'invention des fractions continues, invention à laquelle conduit immédiatement sa simplification.

Quant à l'origine de ce procédé, on peut aussi se demander si NICOLAS CHUQUET en est bien l'inventeur, comme il le dit. L'arithméticien du XV^e siècle a certainement eu assez d'originalité pour réduire au moins en règles systématiques une pratique d'essence en réalité très simple. Mais nous ne possédons, pour ainsi dire, aucune trace antérieure de l'emploi de telles pratiques. Si le procédé de NICOLAS CHUQUET permet d'obtenir, sauf trois,** toutes les racines héroniennes à faire entrer

* En appliquant ce procédé à l'extraction de $\sqrt{242000}$, on arrive à $484 \frac{2079}{262}$, et en divisant par 11, on retrouve la valeur d'ORTEGA.

** $\sqrt{43 \frac{11}{24}} \sim 6 \frac{111}{21326}, \quad \sqrt{356 \frac{1}{18}} \sim 18 \frac{111}{249},$
 $\sqrt{886 \frac{1}{16}} \sim 29 \frac{111}{2468}.$

en ligne de compte, si l'on pourrait l'appliquer aussi aux approximations d'ARCHIMÈDE, il ne m'en semble pas moins trop primitif d'une part, et de l'autre, trop opposé au principe de l'expression des fractions par des suites de quantités, pour que l'on doive croire qu'il ait été couramment pratiqué par les Grecs.

Comme fractions convergentes intermédiaires qui ne peuvent être fournies par des méthodes plus probables, on ne connaît guère que les approximations suivantes indiquées par M. SIEGMUND GÜNTHER.*

$\sqrt{2} \sim \frac{10}{7}$, supposée par M. CANTOR chez les Hindous, d'après une relation donnée dans les *Çulvasûtras*; (la déduction de cette valeur reste passablement douteuse).

$\sqrt{3} \sim \frac{12}{7}$, chez GERBERT.

Enfin la réduite $\sqrt{3} \sim \frac{7}{4}$, chez les Rabbins, d'ailleurs très rare, peut être assimilée aux approximations précédentes.

Ces indices sont insuffisants pour établir l'existence effective, avant NICOLAS CHUQUET, de pratiques ayant pu donner naissance à son procédé.

* *Le triparty en la science des nombres par maistre Nicolas Chuquet parisien* [publié par A. MARRE]. Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 13, 1880, p. 696—699.

* GÜNTHER, Analyse de l'ouvrage de TREUTLEIN, *Die deutsche Rechenkunst im XVI. Jahrhundert*. Zeitschr. f. d. Realschulwesen 2, 1877, p. 430.

* RODÉ, *Sur les méthodes d'approximation chez les Arabes*. Bullet. de la soc. mathém. de France 7, 1879, p. 162.

* PEROTT, *Sur une arithmétique espagnole du 16^{ème} siècle*. Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1882, p. 163—170.

* Voir GÜNTHER, *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden*. Abhandl. zur Geschichte der Mathematik 4 (Leipzig 1882, 8°).

* GÜNTHER, *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten*, p. 50.