

HOMMAGE A JEAN DIEUDONNÉ

Jean Dieudonné (1906 - 1992)

Jean Dieudonné, un géant des mathématiques, a incarné, pendant plus de 50 ans l'"Esprit Bourbaki". Membre cofondateur du groupe en 1934, travailleur acharné, il a été le principal rédacteur des fameux "Eléments", monumental ouvrage dont le titre - référence à Euclide - marque l'ambition : établir les fondements des mathématiques contemporaines. (Une cinquantaine de fascicules sont parus.)

Donc l'oeuvre mathématique de Jean Dieudonné est très variée: à une thèse d'analyse classique succédèrent des travaux de topologie (On lui doit les notions de partitions de l'unité et d'espaces para-compacts et il a dégagé l'importance de la Topologie faible.); en algèbre il a généralisé la Théorie de Galois et celle des groupes classiques et a collaboré avec A. Grothendieck à l'élaboration de la théorie des schémas, comme fondement de la Géométrie algébrique.

Bien qu'il se dise peu doué pour l'enseignement, il a joué un rôle important dans la réforme de 1969 de l'enseignement des mathématiques dans les collèges et les lycées et on lui doit de remarquables ouvrages d'initiation aux mathématiques contemporaines, précieux pour les étudiants : Algèbre linéaire, Calcul infinitésimal et, bien sûr, les 9 volumes des Eléments d'Analyse (toujours la référence à Euclide!)

L'érudition et l'immense culture (pas seulement limitée aux mathématiques) de Dieudonné le conduisaient naturellement à l'histoire des mathématiques et leur diffusion. Il a rédigé la quasi-totalité des notices historiques de Bourbaki et publié de nombreux ouvrages d'histoire qui sont une mine de renseignements tant pour le mathématicien que pour l'historien des sciences. Dans le domaine de la diffusion des mathématiques, il a participé activement à la conception et à l'élaboration de la partie mathématique de l'Encyclopédie Universalis, dont la qualité est universellement reconnue. Pendant des années, il a co-dirigé avec M. Loi et R. Thom le séminaire d'Histoire et Epistémologie des mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure.

Jean Dieudonné avec une oeuvre écrite considérable, est sans doute, après H. Poincaré, le dernier homme à avoir pu embrasser la totalité des mathématiques dites pures, ce qui a pu le conduire à sous estimer l'importance de certaines disciplines fondamentales comme les mathématiques appliquées ou la logique mathématique.

Jean Luc Verley

Formation

En fait, j'aimais l'école et j'apprenais aisément, récoltant les prix sans me donner beaucoup de mal. Mon père me mettait en garde contre ma facilité : il avait bien raison, comme je m'en aperçus à mon entrée à l'École Normale Supérieure. On a beaucoup médité des grandes Écoles, et je ne m'en suis pas privé moi-même. Mais en quel autre lieu, dans notre système éducatif français, un jeune homme peut-il avoir la chance de vivre en contact journalier pendant 3 ou 4 ans avec des esprits qui seront parmi les plus distingués de sa génération, et nouer des amitiés qui enrichissent toute une vie ? Et puis, l'esprit de l'École Normale fournit à qui s'en imprègne le meilleur antidote contre le poison qui guette tout intellectuel, la tendance à s'enorgueillir de son savoir au lieu de penser à tout ce qu'il ignore ; la féroce ironie des Normaliens, qui, pour reprendre la phrase de Talleyrand, ont coutume de « parler sérieusement des choses légères et légèrement des choses sérieuses » est là pour le remettre aussitôt à sa place et le rappeler à l'honnêteté intellectuelle.

Je compris donc vite que si je voulais rester dans le sillage des camarades brillants qui m'entouraient et des aînés qui déjà se faisaient un nom dans la recherche, il me faudrait travailler ferme. Cela ne m'était pas pénible, car ma passion pour les mathématiques, qui s'était éveillée vers ma 14^e année, avec la découverte de l'algèbre, n'avait fait depuis lors que croître. A Paris, j'avais tous les jours la possibilité de l'assouvir, en écoutant les leçons des maîtres éminents qui se nommaient Picard, Hadamard, Cartan, Lebesgue, Montel, Denjoy, Julia. A vrai dire, beaucoup de ce que nous apprenions ainsi, mes camarades et moi-même, passait bien au-dessus de nos têtes ; nous n'en mesurons que mieux la distance qui nous séparait de nos professeurs, et s'il nous arrivait de chaussonner les petits travers de tel ou tel d'entre eux, nous aurions eu l'impression de nous couvrir de ridicule si notre ignorance avait « contesté » leur savoir. Je dirais même que, personnellement, cette distance me paraissait presque infranchissable ; et il me fallut pas mal d'années pour que j'acquière un peu de confiance en moi et me persuade que je pouvais, moi aussi, avancer un peu dans la recherche mathématique.

Allocution prononcée à Nice le 20 novembre 1969

Le Groupe Bourbaki

L'autre événement majeur fut la création du groupe Bourbaki. Depuis la mort de H. Poincaré, l'école française de mathématiques (à l'exception de E. Cartan et de M. Fréchet) avait tendance à se spécialiser dans l'Analyse classique des fonctions de variables réelles ou complexes. Les mathématiciens de ma génération, au cours de nos premiers contacts avec l'étranger, avions eu l'occasion de constater combien nous étions ignorants des développements féconds qui, à cette époque, renouvelaient l'Algèbre, la Topologie et l'Analyse fonctionnelle en Allemagne, en Pologne ou en Russie, et nous souhaitions redonner aux mathématiques françaises leur traditionnelle universalité. Nous fûmes heureusement aidés dans cet effort par plusieurs de nos maîtres, notamment par le Séminaire organisé par M. Julia.

Ma participation aux travaux de l'équipe Bourbaki m'a apporté beaucoup plus que je n'en attendais. Dès mon enfance, j'avais toujours éprouvé un irrésistible attrait pour la compilation : les dictionnaires, encyclopédies, histoires universelles étaient ma pâture favorite et je passais des heures à en extraire pour ma délectation des listes arrangées suivant d'autres systèmes de classification. Bizarre passion, mais qui seule peut expliquer l'ardeur avec laquelle je me mis à rédiger les multiples états par lesquels doit passer tout chapitre du Traité avant d'être définitivement approuvé par la confrérie. Mais j'étais loin d'escompter l'effet qui en résulta sur mon développement intellectuel. L'entreprise exigeait que chaque membre de l'équipe se chargeât de mettre en forme des théories sur lesquelles il ne savait souvent à peu près rien. Pour moi, ce fut une gymnastique intellectuelle d'une extraordinaire efficacité. Livré à moi-même, je serais sans doute resté toute ma vie cantonné dans un étroit secteur de l'Analyse; obligé d'apprendre sans cesse du nouveau et d'essayer de le repenser avec un esprit vierge, je fus amené, presque sans le vouloir, et tout en assouvissant à plaisir ma manie classificatrice, à travailler moi-même dans des parties de plus en plus étendues des mathématiques. En outre, je ne cessais de bénéficier, au cours des multiples réunions de notre groupe, des idées souvent extrêmement originales et pénétrantes de mes coéquipiers, et ce n'est pas une exagération de dire qu'ils sont certainement de moitié dans tout ce que j'ai pu faire.

Allocution prononcée à Nice le 20 novembre 1969

Conception des mathématiques

Par « mathématiques bourbakiennes » j'entends, à très peu de choses près, l'ensemble des questions qui ont été exposées dans les séances du Séminaire Bourbaki. Les collaborateurs de N. Bourbaki ont eu, dès le début de leur travail collectif, une certaine conception des mathématiques, se rattachant à la tradition de H. Poincaré et E. Cartan en France, de Dedekind et Hilbert en Allemagne. Les « *Eléments de Mathématique* » ont été écrits pour donner à ce type de recherches des fondements solides et d'accès commode, sous une forme assez générale pour être utilisables dans le plus grand nombre possible de contextes.

A partir de 1948, le groupe Bourbaki a organisé un Séminaire, comportant en principe 18 séances annuelles, destiné à exposer les résultats récents dans les questions qui leur semblaient les plus intéressantes ; ces exposés, qui ont presque tous été publiés, sont actuellement au nombre de 500 environ, et constituent donc une véritable Encyclopédie de ces théories.

*
* *

Aucun texte publié sous le nom de N. Bourbaki n'a jamais précisé la façon dont les questions exposées dans le Séminaire ont été choisies. On peut donc seulement, en examinant de l'extérieur ces choix et la façon dont ils s'insèrent dans l'ensemble de toutes les publications mathématiques de notre époque, essayer d'en dégager des traits communs. Je tiens à préciser que les conclusions que je tire de cet examen me sont uniquement personnelles, et ne prétendent représenter en aucune manière des opinions partagées par les collaborateurs de N. Bourbaki.

Lorsqu'on étudie l'histoire des mathématiques, on voit presque invariablement qu'une théorie commence par des efforts pour résoudre un problème très particulier (exemple : la duplication du cube dans les mathématiques grecques). Il se peut que ces efforts restent vains, autrement dit on a une première classe :

I) Les problèmes mort-nés (exemples : la détermination des nombres premiers de Fermat, ou l'irrationalité de la constante d'Euler).

En second lieu, il se peut que le problème considéré soit résolu, mais qu'il n'en résulte aucun progrès pour aucun autre problème ; d'où une seconde classe :

II) Les problèmes sans postérité (c'est le cas de beaucoup de problèmes ressortissant à ce qu'on appelle la « Combinatoire »).

Une situation plus favorable est celle où, en approfondissant les techniques utilisées pour résoudre le problème de départ, on arrive (au besoin en les compliquant considérablement) à les utiliser dans d'autres problèmes similaires ou plus difficiles, sans toutefois qu'on ait le sentiment de comprendre véritablement la raison de ces succès ; on peut dire que ce sont :

III) Les problèmes qui engendrent une *méthode* (la théorie analytique des nombres et la théorie des groupes finis sont fertiles en exemples).

Dans quelques cas assez rares, l'étude du problème finit, parfois au bout d'un temps assez long, par révéler l'existence de structures sous-jacentes insoupçonnées, qui, non seulement illuminent la question posée, mais fournissent des outils généraux et puissants permettant d'en élucider une foule d'autres dans des domaines variés ; on obtient ainsi :

IV) Les problèmes qui s'ordonnent autour d'une *théorie* générale, féconde et vivante (la théorie des groupes de Lie et la Topologie algébrique sont des exemples typiques à l'heure actuelle).

Mais, comme l'a souligné Hilbert, une théorie ne prospère que par l'apport ininterrompu de problèmes nouveaux. Fréquemment, une fois résolus les problèmes les plus importants par leurs conséquences et leurs liens avec les autres branches des mathématiques, la théorie a tendance à se concentrer sur des questions de plus en plus spéciales et isolées (pouvant d'ailleurs être très difficiles) ; on a alors :

V) Les théories en voie d'*étiollement* (au moins momentané : la théorie des invariants, par exemple, est déjà plusieurs fois passée par ce stade).

Enfin, si dans une théorie un choix heureux des axiomes, motivé par des problèmes précis, a permis de développer des techniques ayant une grande efficacité dans beaucoup de parties des mathématiques, il arrive aussi qu'on cherche, sans motif apparent, à modifier assez arbitrairement ces axiomes. L'espoir de renouveler ainsi les succès de la théorie initiale s'avère le plus souvent trompeur, et l'on a, suivant l'expression de Pólya et Szegő

(*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin (Springer), 1925, Einleitung) :

VI) Les théories en voie de *délayage* (« Verdünnung ») (conformément à l'exemple de ces auteurs, nous n'en citerons pas).

Ceci dit, il m'apparaît qu'on peut caractériser la plupart des sujets exposés dans le Séminaire Bourbaki comme appartenant à la catégorie IV) et (dans une moindre mesure) à la catégorie III) dans le classement précédent. C'est là, je crois, une constatation aussi objective que possible, que je m'abstiendrai de commenter plus longuement.

Préface de J. Dieudonné

**Panorama des mathématiques pures, le choix bourbachique.
Gauthier-Villars Paris 1977**

L'Enseignement

J'ai parlé jusqu'ici de mon activité de mathématicien, et je n'ai rien dit de ma carrière de professeur. Je dois vous faire un aveu : je n'ai jamais eu la moindre vocation pour l'enseignement. Si je suis entré dans l'Enseignement supérieur, c'est parce que c'était le seul moyen de gagner ma vie tout en conservant assez de temps disponible pour poursuivre mes recherches mathématiques. Bien entendu, j'ai toujours essayé de faire mon métier de professeur aussi consciencieusement que possible, et j'y ai consacré de

longues heures de préparation, mais je n'y ai jamais apporté d'enthousiasme; et même après 40 ans de métier, je me sens toujours plus à l'aise devant une feuille de papier que devant un auditoire. Je m'embrouille très facilement au tableau et j'ai sans cesse besoin de notes pour éviter les catastrophes. C'est la nécessité de prévoir ainsi dans le détail tous mes exposés qui m'a finalement poussé à écrire dans mon âge mûr quelques ouvrages d'enseignement, dans l'espoir qu'ils éviteront peut-être à mes jeunes collègues les erreurs où je suis maintes fois tombé.

C'est sans doute aussi en raison de mon manque d'aptitudes à l'enseignement que je n'ai guidé dans la recherche que très peu d'élèves: J'ai toujours beaucoup de mal à m'intéresser à un étudiant jusqu'au jour où il arrive à un niveau où je me sens de plain pied avec lui et où nos relations sont plus celles de collaborateurs que celles de maître à élève.

Il ressort bien de tout ceci que je suis un exemple typique du savant «enfermé dans sa tour d'ivoire». Je ne m'en défends pas, et même, malgré la réprobation dont s'accompagne aujourd'hui ce terme, je crois qu'il vaut la peine de prendre le contrepied des idées reçues et de faire l'éloge de la «tour d'ivoire». Lorsqu'on demandait à H. Poincaré comment il était arrivé à ses éblouissantes découvertes, il répondait «en y pensant souvent». Nous savons que Kummer a mis 8 ans pour inventer la théorie des nombres idéaux, et Gauss lui-même, le prince des mathématiciens, a reconnu avoir cherché en vain le signe d'une expression algébrique pendant plusieurs années. Si de tels géants de la pensée estiment nécessaire une concentration aussi soutenue de leur esprit, comment imaginer que les chercheurs moins doués puissent jamais accomplir un travail fructueux sans y consacrer tout le temps dont ils peuvent disposer? Et de fait, je ne connais guère d'exemple de mathématicien qui ait mené de front des recherches difficiles et une activité extérieure exigeant du temps et de la réflexion. Du reste, pour pouvoir sortir de sa spécialité et réussir dans d'autres domaines, il faut avoir des dons naturels que je ne me targue pas de posséder; la nature m'a gratifié de l'aptitude aux mathématiques, qu'elle ne prodigue guère; j'aurais mauvaise grâce à en vouloir davantage.

Allocution prononcée à Nice le 20 novembre 1969

Spécificité des mathématiques

Préface de l'Algèbre Linéaire

Les mathématiciens du siècle passé, et plus encore les philosophes ou essayistes qui ont voulu parler de mathématiques, ont donné au public cultivé l'image d'une science immuable et figée qui ignore les tâtonnements et les incertitudes des pauvres sciences dites expérimentales. Il y a plus de cent ans que les mathématiciens professionnels sont revenus d'une si naïve assurance. La source du malentendu réside dans le fait que s'il est bien exact que les théorèmes démontrés il y a 2 000 ans sont tous aussi vrais maintenant qu'alors, les « vérités expérimentales » par contre n'apparaissent jamais que comme des approximations que l'on perfectionne sans cesse. En

mathématique comme dans toutes les autres sciences, ce qui change, c'est le point de vue d'où l'on considère les résultats déjà acquis. Et comme dans toutes les autres sciences aussi ces changements se font à l'heure actuelle avec une vitesse qui va croissant.

Sauf sur un point tout à fait accessoire, le schéma du *progrès* en mathématique n'est pas différent de ce qu'il est dans les autres disciplines. En effet les acquisitions nouvelles et les réflexions que ces disciplines suscitent amènent à *repenser* les théorèmes anciens, à examiner à la lumière des théories plus récentes leurs rapports mutuels et à les insérer de façon plus rationnelle dans un contexte renouvelé. Contrairement à ce qui se passe pour les « faits » les mieux établis de la Physique ou de la Biologie, les théorèmes des mathématiques, malgré les bouleversements périodiques que connaît cette science, demeurent intacts. Seulement il leur arrive souvent de passer du statut de « théorèmes fondamentaux » à celui de simples « corollaires » qui finiront par servir d'exercices aux apprentis mathématiciens. Pour peu que les mathématiciens professionnels en aient conscience, un tel processus ne peut que rendre plus modeste la conception qu'ils se font de leur rôle.

L'enseignement des Universités n'a pas ignoré longtemps ces remises en ordre. Mais jusqu'à une époque récente il n'y a pas eu de refonte qui touchât vraiment aux notions de base laissées traditionnellement à l'enseignement secondaire. L'étude des mathématiques dans Euclide n'était d'ailleurs pas une mauvaise préparation aux mathématiques dites « supérieures » pour un contemporain de Viète ou même de Cauchy. Pendant les deux siècles qui séparent ces mathématiciens, les méthodes nouvelles qui avaient été développées n'exigeaient cependant pas d'autres idées fondamentales que celles d'espace et de nombre, telles que les avaient conçues les géomètres grecs. La tendance des mathématiques modernes est tout autre aujourd'hui. On a cherché à *décomposer* en quelque sorte ces « idées fondamentales », un peu comme les physiciens ont analysé l'atome « insécable » des anciens. On a ainsi pu découvrir dans les produits de cette « dissociation » des outils nouveaux d'une puissance jusqu'alors insoupçonnée.

Pendant ce temps l'Enseignement secondaire en était resté, à peu de chose près, à ce qu'il était avant Grassmann et Cantor. On y étudiait la géométrie d'Euclide, l'algèbre de Viète et de Descartes et un peu de Calcul infinitésimal dans les classes terminales. Le fossé existant entre cet enseignement et celui que l'on dispense dès l'entrée à l'université ne pouvait que s'élargir. Il n'est d'ailleurs pour s'en rendre compte que de considérer les sujets suivants dont la place est encore très grande dans l'enseignement des mathématiques au lycée :

1) les constructions « par la règle et le compas » ;

2) les propriétés des « figures » traditionnelles, telles que le triangle, les « quadrilatères » variés, les cercles et « systèmes de cercles », les coniques, avec tous les raffinements accumulés par des générations de « géomètres » spécialisés et des professeurs en quête de problèmes d'examen ;

3) la kyrielle des « formules trigonométriques » et de leurs transformations kaléidoscopiques permettant de superbes « résolutions » de « problèmes » relatifs aux triangles par le moyen de « calculs logarithmiques » !

De tout ceci il n'est *jamais* même fait allusion à l'Université. S'il faut étudier une conique, on l'étudie comme toute autre courbe par les procédés généraux du calcul infinitésimal. Quand aux autres « figures » chères aux géomètres de jadis, elles ont totalement disparu.

On pourra objecter que ce qui s'enseigne au lycée est moins abstrait et plus utile aux futurs ingénieurs que ce que l'on apprend à l'université. Vaut-il mieux pourtant pour fabriquer les poutrelles d'une construction métallique, savoir que les hauteurs d'un triangle sont concourantes ou avoir acquis quelques principes fondamentaux de résistance des matériaux ? Il est bien vrai que les formules trigonométriques sont tout à fait indispensables à trois professions :

- 1) les astronomes
- 2) les arpenteurs
- 3) les auteurs de manuels de trigonométrie.

Quelques notions de trigonométrie suffisent cependant à des centaines d'autres professions, de sorte qu'il est inutile d'en faire une étude approfondie dans le secondaire.

Un des effets du progrès mathématique est de nous rendre capable de démontrer souvent en quelques lignes ce à quoi on est parvenu par des cheminement très tortueux, un siècle ou un demi siècle auparavant. L'invention du Calcul infinitésimal en est un exemple universellement connu. Des problèmes qui avaient exercé la sagacité d'un Eudoxe ou d'un Archimède ont été d'un seul coup ramenés à des calculs presque automatiques. Ce qui est moins connu (et ce pourquoi est écrit ce livre), c'est que depuis les travaux de Grassmann et Cayley entre autres, il y a plus de cent ans, on dispose en « Géométrie élémentaire », comme l'a si bien dit Choquet, d'une « route royale » par laquelle, à partir d'axiomes extrêmement simples à énoncer (au contraire de ceux d'Euclide-Hilbert) tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux. Auparavant il fallait d'abord ériger tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de revenir vaille que vaille aux sacrosaints « cas d'égalité » ou « cas de similitude » des triangles, points d'appui de toute la technique traditionnelle.

Si surprenant que cela puisse paraître au non-initié, les mathématiciens professionnels sont depuis longtemps familiers avec de tels phénomènes, où le remplacement d'un système d'axiomes par un système *équivalent*, mais mieux choisi, amène parfois des simplifications considérables. Ainsi, au lieu d'enseigner aux élèves des techniques inadéquates qu'il leur faudra oublier plus tard, il convient plutôt de leur présenter une théorie où tout s'ordonne naturellement autour de quelques idées clefs très simples.

Préface du Calcul Infinitésimal

On reproche souvent aux étudiants de ne plus savoir calculer. Pour les physiciens et les ingénieurs, la responsabilité en incombe à l'enseignement actuel des mathématiques. Certes, il est regrettable de voir en Faculté des Sciences un étudiant de seconde ou troisième année peiner pour faire un changement de variables ou une intégration par parties.

Pourtant, on ne doit pas opposer les « mathématiques modernes » aux « mathématiques classiques » ; en effet la mathématique actuelle, sans rupture profonde avec la tradition, a simplement développé en assez grand nombre des notions abstraites nouvelles, qui ont souvent permis de concentrer la recherche sur l'essentiel. Ainsi a-t-on pu progresser très sensiblement dans des domaines considérés encore comme inaccessibles il n'y a pas si longtemps (quant à faire de l'abstraction pour l'abstraction, c'est là un exercice tout à fait vain).

Grâce à cela l'enseignement des bases des mathématiques (en particulier en algèbre et en géométrie) a été débarrassé de notions devenues inutiles, voire nuisibles, et notamment simplifié. Cependant, le fondement de l'Analyse moderne reste le Calcul infinitésimal, merveilleux outil forgé au cours des trois derniers siècles, sans lequel il serait illusoire d'aborder l'Analyse fonctionnelle la plus récente.

Mais jusqu'à cette année, entre un enseignement secondaire par trop sclérosé, et celui de l'Analyse moderne que dispensent les Facultés (en liaison étroite avec la recherche, pour assurer à celle-ci une préparation efficace), l'étudiant disposait d'une seule année d'initiation au Calcul infinitésimal classique et à ses techniques. - - - - -

- - - - - Etalés sur deux ans, les nouveaux programmes devraient fournir désormais une solide base technique, et permettre ensuite d'assimiler vraiment les notions plus abstraites. Y sont inclus, notamment

en seconde année, des éléments essentiels et assez accessibles de l'Analyse classique, comme la théorie des fonctions analytiques et des équations différentielles. C'est d'abord à ces techniques fondamentales que l'ouvrage est consacré (les bases du Calcul différentiel et intégral, enseignées en première année du premier cycle, étant supposées connues).

S'il est donc nécessaire de « savoir calculer » avant d'accéder à l'Analyse moderne, il faut distinguer en fait entre deux types de calcul : il y a en premier lieu le « calcul algébrique », qui permet, en un mot, d'établir des *égalités*; le prototype en est fourni par les formules de résolution d'équations (les « closed formulas » des Anglo-Saxons), qui ne sont pas, comme d'aucuns le croient, la seule raison d'être des mathématiques.

L'Analyse connaît également ce genre de relations, souvent de grande importance, comme par exemple la formule de Cauchy ou le développement en série de Fourier. Ce n'est pourtant pas là l'essence du second type de calcul, le Calcul infinitésimal; pour les physiciens, et ils ont raison d'y insister, un théorème est sans intérêt s'il ne permet pas le calcul numérique des nombres ou des fonctions que l'on étudie; à leurs yeux les « théorèmes d'existence » des purs mathématiciens sont absolument sans valeur. Mais par le calcul numérique on n'obtient que des approximations; c'est par un procédé de calcul approché (le mathématicien recherchant une approximation arbitrairement petite, l'utilisateur se contentant de beaucoup moins), que l'on peut déterminer un nombre réel. Comme l'enseignement des mathématiques, dans le premier cycle, est destiné aussi bien aux futurs physiciens et chimistes qu'aux mathématiciens, cet aspect de l'Analyse est particulièrement développé dans l'ouvrage : le calcul numérique proprement dit n'est pas abordé dans ce volume, mais on s'est efforcé d'éviter toute notion qui ne soit susceptible d'évaluation numérique, et d'indiquer systématiquement les moyens théoriques d'exécuter ces calculs.

On aurait d'ailleurs tort de mépriser le caractère concret du Calcul infinitésimal; pour acquérir le « sens de l'Analyse », indispensable jusque dans les spéculations les plus abstraites, il faut avoir appris à distinguer ce qui est « grand » de ce qui est « petit », ce qui est « prépondérant » et ce qui est « négligeable ». Le Calcul infinitésimal, tel qu'il est présenté dans ce livre, doit permettre de manier les *inégalités* bien plus que les égalités, et il pourrait être résumé en trois mots :

MAJORER, MINORER, APPROCHER

Il ne faudrait pourtant pas le réduire, par commodité, à une série de procédés mécaniques, ne réclamant aucune compréhension de leurs utilisateurs. Si par l'usage, par la multiplicité des exemples concrets, on acquiert une connaissance intuitive du mécanisme des opérations, le sens de l'Analyse n'est obtenu que lorsqu'on sait donner des définitions précises des notions que l'on emploie et s'en servir pour bâtir des démonstrations correctes.

Il peut paraître excessif, aux yeux des physiciens, de vouloir toujours démontrer des résultats en apparence évidents; de fait, on peut avoir intérêt, lorsqu'on débute, à admettre des résultats plausibles sans perdre de temps à une démonstration délicate. Cet ouvrage admet donc sans preuve un certain

nombre de théorèmes de base de l'Analyse; le cas échéant, des démonstrations longues et difficiles sont imprimées en petits caractères, permettant ainsi de s'en dispenser en première lecture.

On ne peut cependant pas suivre ces physiciens lorsqu'ils tiennent pour « évident » ce qui ne l'est pas du tout, trop confiants dans une intuition qui peut induire lourdement en erreur. Il n'est pas nécessaire, pour mettre en défaut des résultats qu'ils admettent sans discussion, d'utiliser des fonctions aussi « monstrueuses » que les fonctions continues sans dérivée; le « phénomène de Runge » (chap. IX, Appendice) montre que le procédé classique d'interpolation polynomiale peut fort bien diverger pour des fonctions tout à fait « régulières »; et il y a des fonctions *analytiques* pour $|z| < 1$, *continues* dans tout le disque $|z| < 1$, et qui pourtant transforment le cercle $|z| = 1$ en une courbe de Peano remplissant un carré.

Admettre trop facilement, c'est donc prendre des risques; le chercheur scrupuleux apporte en fait un soin extrême à s'assurer de la correction de ses mesures, écartant d'emblée les interprétations hasardeuses. Les mathématiques exigent la même rigueur, et leur enseignement ne peut s'accommoder du vague et de l'à peu près.

Mathématiques et imagination

Jean Dieudonné : choix d'œuvres mathématiques

Tome 1 Hermann 1981

L'abstraction et l'intuition mathématique

Résumé

La qualité essentielle d'un mathématicien est l'imagination; la logique ne sert qu'à mettre les démonstrations sous une forme irréfutable, elle est incapable de les suggérer. L'imagination se fonde sur une sorte d'« intuition » des objets mathématiques étudiés, mais cela n'a que très peu de rapport avec ce qu'on appelle d'ordinaire l'« intuition sensible », les objets mathématiques considérés étant le plus souvent l'aboutissement d'un long processus d'abstraction qui leur ôte toute possibilité de représentation concrète. Cette « intuition » mathématique est avant tout le résultat d'une longue familiarité avec le sujet étudié; mais en outre il peut s'opérer des « transferts » d'intuition d'une théorie à une autre; on en donne quelques exemples qui font ressortir la fécondité de tels transferts.

Tous les mathématiciens sont d'accord sur le rôle fondamental que joue l'imagination dans la création mathématique. La logique est un outil indispensable et ennuyeux (on sait, d'ailleurs, que les mathématiciens ne l'apprécient pas beaucoup en général); il faut savoir la manier proprement parce qu'elle permet de suivre et de vérifier une démonstration... mais non de l'inventer.

Or, comment s'invente une démonstration? C'est un processus qui a été bien décrit par Poincaré dans une page célèbre: l'imagination présente au mathématicien, qui se trouve en face d'un problème, une quantité de combinaisons possibles de faits connus, de théorèmes connus, et la plupart ne conduisent à rien. Lorsque, par hasard, le mathématicien tombe juste, on dit qu'il a eu une bonne intuition ou qu'il a été bien guidé par son intuition. Mais dès qu'on parle d'intuition, il y a un malentendu qui surgit aussitôt, étant donné que le mot a déjà une signification — assez vague d'ailleurs — dans le langage courant, touchant les objets ou les phénomènes qui tombent sous nos sens; et ceci nous amène directement au cœur du problème qui est abordé dans ce colloque.

Personne évidemment ne songe à nier que l'origine des notions mathématiques de base, telles que le nombre ou l'espace, doive être cherchée dans notre expérience sensible. A partir de l'âge de douze ans environ, si j'en crois les psychologues professionnels, les petits nombres entiers ou les relations spatiales simples (position, grandeur, etc.) peuvent être considérés comme des notions expérimentales stables et communes à tous les individus normaux et c'est cela qui forme le substratum des notions mathématiques correspondantes. Seulement il faut tout de suite observer une chose, sur laquelle on n'insiste pas assez à mon avis, c'est que les objets mathématiques,

qui prétendent rendre compte de ces concepts expérimentaux, sont doués par les mathématiciens de propriétés qui sortent très visiblement du champ de l'expérience. Je citerai comme exemple le nombre entier arbitraire: je doute que quelqu'un ait une intuition sérieuse d'un nombre entier supérieur à dix (j'entends par là l'intuition immédiate; il y a, je crois, des expériences psychologiques dans lesquelles on projette un certain nombre de points sur un tableau et il s'agit de dire de suite, sans compter, combien il y a de points; je crois qu'on ne dépasse jamais 7 sans se tromper). L'élaboration de cette idée du nombre entier arbitraire, du nombre qu'on peut continuer indéfiniment; l'axiome d'Archimède qui dit que si on a une règle d'un mètre et qu'on la juxtapose indéfiniment, on arrivera un jour à dépasser Sirius; voilà visiblement des conceptions qui n'ont rien d'expérimental. L'existence de la borne supérieure, l'axiome des intervalles emboîtés, qui dit que quand on rapetisse indéfiniment un intervalle, il y a toujours un point commun à tous ces intervalles, sont strictement en dehors de l'expérience. La même remarque vaut pour le postulat d'Euclide.

Après deux siècles de réflexions sur ces questions-là, nous savons maintenant que les axiomes sont des choix qui ont été opérés assez arbitrairement par les mathématiciens pour des raisons de commodité à la Poincaré ou d'esthétique; ils ne sont nullement imposés de l'extérieur par des phénomènes ou par l'intuition sensible que nous pouvons en avoir. D'ailleurs, l'histoire montre que plusieurs aspects de cette intuition sensible peuvent entrer en conflit lorsqu'il est question de choisir. Monsieur Hirsch a rappelé que les Pythagoriciens étaient conduits à considérer que la droite n'était pas la droite réelle à notre sens habituel, mais la droite rationnelle. Pourquoi y étaient-ils conduits? A cause de la mesure: on a deux longueurs et il est tout à fait naturel de penser qu'il y a une commune mesure. Cela était parfaitement logique; seulement on est entré en conflit avec une autre partie de l'intuition: quand on a voulu faire de la mesure des longueurs et de la géométrie plane, on s'est aperçu qu'il y avait des longueurs — comme la diagonale du carré — qui ne répondaient pas à cette exigence. Il a donc fallu choisir à ce moment-là si on allait faire de la géométrie plane où la diagonale du carré a une longueur, ou bien dire que la diagonale du carré n'a pas de longueur. (On pourrait très bien admettre cela d'ailleurs. La géométrie sur le corps des rationnels est une géométrie parfaitement raisonnable; seulement il y a un certain nombre de choses qui ne sont pas vraies dans cette géométrie.)

Autrement dit donc il y a un certain nombre de raisons qui sont dues au développement historique des mathématiques et qui ont conduit les mathématiciens à ajouter à des notions, qui sont *grosso modo* expérimentales, des exigences qui ne le sont pas du tout et qui s'ajoutent comme axiomes supplémentaires aux notions que nous avons choisi de mettre à la base. Après quoi il n'est naturellement pas du tout extraordinaire — bien que cela ait beaucoup choqué les gens à l'époque — que l'intuition sensible des objets en question, les nombres réels pour commencer, soit en fait totalement inexistante dans certains cas, ou alors insuffisante ou fallacieuse. Elle est inexistante dans le cas des nombres arbitrairement grands cité plus haut: si on avait une intuition immédiate des entiers arbitrairement grands, on saurait faire la théorie des nombres alors que précisément on ne le sait pas et qu'on n'y arrive qu'avec beaucoup de peine et en faisant appel à toutes sortes de ressources extérieures. Personne ne peut dire qu'il ait l'intuition que le théorème de Fermat est vrai ou faux. Quelquefois l'intuition qu'on peut avoir

de certaines notions à partir des axiomes, donne une idée de démonstration. L'exemple classique est le théorème de Bolzano disant qu'une fonction continue ne peut changer de signe sans s'annuler. On en a une intuition géométrique assez nette et elle donne même une idée de démonstration. Mais si on essaye une démonstration du théorème de Jordan qui est tout aussi intuitif, on se rend compte que l'intuition en est trompeuse. Et puis il y a, bien entendu, des objets mathématiques totalement non intuitifs, les monstres classiques: la courbe de Peano; le continu de Brouwer qui est frontière de trois domaines à la fois dans le plan; le collier d'Antoine qui est un ensemble parfait discontinu, mais tel qu'on peut trouver une courbe que l'on ne peut déformer sans le traverser. D'ailleurs, sans aller aussi loin on peut citer des exemples de fausse intuition, comme la fameuse figure par laquelle on veut démontrer que tout triangle est isocèle. Si l'on s'arrange pour que le point d'intersection de la médiatrice et de la bissectrice soit à l'intérieur du triangle (il ne l'est évidemment pas), on peut montrer facilement que le triangle est isocèle. Cela montre bien que l'intuition spatiale que nous pouvons avoir de la géométrie élémentaire peut être fallacieuse.

Il ne faut donc pas se laisser abuser; même pour des notions qui semblent proches de l'intuition sensible, les objets mathématiques sont au fond tout à fait différents de ce que nous croyons qu'ils sont. Il y eut là une source d'étonnement considérable pour la plupart des mathématiciens du 19^e siècle qui étaient persuadés que les notions qu'ils associaient aux nombres réels allaient de soi et ne pouvaient conduire à des résultats extravagants comme la courbe de Peano.

Nous ne nous étonnons plus de telles situations. C'est que, depuis la fin du 18^e siècle, les mathématiciens ont brisé le cadre classique du nombre et de l'espace et ont commencé à traiter d'objets qui n'ont aucune contrepartie sensible. On n'a jamais vu un groupe, un anneau, un corps, un module. La géométrie non euclidienne et toutes les autres géométries, les espaces à n dimensions, les nombres p -adiques, les variétés différentiables abstraites sont des créations de mathématiciens. Comment peut-on encore parler d'intuition pour ces objets? La réponse à cette question est certainement difficile à formuler parce qu'il s'agit d'un phénomène entièrement subjectif. Chaque mathématicien se fait une image mentale personnelle qui est à peu près incomparable à celle des autres. Aussi l'analyse que je vais essayer de donner est fortement liée à mes propres images mentales; il ne peut en être autrement et je n'ai pas la prétention d'énoncer des vérités générales, mais simplement de tenter de comprendre certains processus mentaux que je crois tout de même *grosso modo* communs à beaucoup de mathématiciens.

Tout d'abord il y a une constatation générale et totalement banale. C'est que l'intuition d'un sujet mathématique s'acquiert progressivement et est avant tout fonction de la familiarité que l'on a avec le sujet. Que fait le mathématicien quand il est placé devant une situation toute nouvelle qu'il n'a jamais étudiée, qu'il commence à travailler? Le plus souvent il ne sait même pas quelles questions se poser ou il se pose des questions absurdes. Ici encore l'exemple typique est celui de Poincaré. (On a la chance que Poincaré, qui a été le plus grand mathématicien de son temps, ait, de plus, bien voulu noter de façon très précise ses impressions de recherche.) Quand Poincaré a commencé ses travaux sur les fonctions automorphes, il cherchait à démontrer qu'il n'y en avait pas en dehors de celles qui étaient très connues (les fonctions modulaires entre autres); c'est ce qu'il dit lui-même dans son livre.

Cela prouve jusqu'à quel point même les plus grands mathématiciens peuvent s'engager dans des directions complètement absurdes. Poincaré s'en est aperçu et c'est justement en cela qu'il avait une grande intuition comme on dit, car, quand on étudie une question, petit à petit on se sent en pays de connaissance; par accoutumance, on finit par deviner ce qui doit se passer quand on a un objet mathématique devant soi et par imaginer quel genre d'outil il faut utiliser pour attaquer telle ou telle question; graduellement on cesse de commettre les erreurs ridicules qu'on a faites au début. On finit par avoir une certaine habitude du sujet et, si on a de la chance, on réussit à attaquer le problème et à le résoudre.

C'est évident et c'est même une banalité de dire que l'intuition résulte tout simplement de la familiarité avec le sujet. Je crois qu'il y a des cas extrêmes où il n'y a rien d'autre que la familiarité parce qu'il y a des cas où il s'agit d'objets entièrement abstraits n'ayant aucune parenté avec d'autres notions mathématiques. Pour moi, l'exemple typique (et où la question personnelle joue) est tiré d'une théorie où je n'ai jamais travaillé moi-même: la théorie des groupes finis. Un groupe fini est un objet qu'on ne voit nulle part; on n'en a aucune espèce d'intuition. Les personnes travaillant sur ces questions finissent par en avoir une telle familiarité que pour eux apparemment les notions abstraites de la théorie des groupes ont un sens.

La première conclusion que j'en tirerai, c'est qu'il n'y a certainement pas une intuition en mathématiques; il y en a toute une série de fort diverses avec des liens inattendus. La deuxième, c'est que les intuitions mathématiques ne sont pas du tout stables; elles se modifient sans cesse par de nouveaux apports, de nouveaux résultats, de nouvelles idées. Presque tous les ans, il y a un jeune mathématicien de génie qui sort une nouvelle manière de transférer une intuition d'un domaine dans un domaine complètement différent. Enfin, troisièmement, et ceci rejoint le titre de mon exposé, c'est que les progrès de l'intuition — contrairement à ce qu'on pourrait croire — vont de pair avec les progrès de l'abstraction. Plus les choses sont abstraites, plus elles fournissent l'intuition. Pourquoi? Parce que l'abstraction élimine tout ce qui est contingent dans une théorie. Si vous faites l'abstraction proprement, si vous êtes guidés par un flair (une intuition si vous voulez), vous avez éliminé les rapports contingents. Qu'est-ce qui reste? Il nous reste le squelette et, dans ce squelette, vous arrivez quelquefois à déceler des structures que vous n'auriez pas songé à mettre en évidence autrement. Si vous n'aviez pas fait l'effort d'abstraction préalable, les arbres vous auraient caché la forêt, les détails vous auraient empêché de voir ce qu'il y avait derrière ce que vous voyez là. Donc, je crois, et tout ce que j'ai dit devrait en servir d'exemple, que les progrès de l'intuition mathématique telle que j'ai essayé de la définir, sont toujours allés de pair avec les progrès de l'abstraction mathématique. C'est peut-être pénible pour les personnes qui veulent s'y initier, mais je ne crois pas qu'on puisse y échapper: c'est cela vraiment, je crois, le fond de l'intuition mathématique.
