

NOTE D'ECOUTE

A propos de l'Analyse non standard

Compte-rendu de la conférence de Pierre Cartier au séminaire de l'U.P.S.

Remarquant que parler en termes d'infinitésimaux, même seulement sur un mode métaphorique, pouvait rendre des services, P. Cartier a d'abord brossé à grands traits une histoire du traitement des infinitésimaux du 17ème au 20ème siècles, signalé leur abandon en mathématiques mais pas en physique au 19ème, présenté l'apport d'Abraham Robinson et précisé ses propres conceptions sur le rôle que pourrait jouer l'analyse non standard.

P. Cartier a rappelé de façon très rapide et un peu schématique que Cavalieri et Pascal mesuraient une figure à l'aide de ses indivisibles - indivisibles sans épaisseur mais d'écartement constant - . L'aire d'une figure, désignée par l'expression "tous les indivisibles de la figure" est en quelque sorte la somme de ces indivisibles et notée par le symbole *omn*. (du latin *omnia*, tous les ...). Leibniz a précisé qu'il considérait une aire curviligne comme une somme de petits rectangles d'épaisseur infiniment petite, désignée par dx , et introduit le symbole $\int f(x)dx$, qui représente littéralement une somme infinie d'éléments infinitésimaux (P. Cartier a rappelé que le symbole de l'intégrale définie n'a été introduit que beaucoup plus tard, par Fourier). Leibniz traite l'infiniment petit dx presque comme un nombre ordinaire. Dans cette utilisation des infiniment petits il y a cependant une contradiction récurrente. Par exemple, en confondant l'aire curviligne avec la somme des aires de petits rectangles de largeur infiniment petite, Leibniz utilise des infiniment petits dans le cours du calcul, mais les néglige à la fin de ce calcul. Lazare Carnot a, selon P. Cartier, bien analysé les contradictions et les problèmes posés par les infiniment petits dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* : pour les classiques, le signe d'égalité recouvre deux significations différentes, l'égalité stricte et l'égalité approchée (à une erreur négligeable près). D'Alembert voudra tout ramener à la notion de limite qu'il n'élucidera cependant pas. On considère que Cauchy a introduit la rigueur dans l'édifice de l'analyse, mais son langage manipule encore des infiniment petits et des infiniment grands. Cauchy a élevé au rang de principe un mode de raisonnement utilisé avant lui, en énonçant le critère de convergence qui porte son nom, qu'il énonce en termes d'infiniment grands et de quantités négligeables. Weierstrass codifie ensuite la notion de limite en termes d'épsilon et d'alpha. Il y a permanence du sens mais glissement du langage; il ne s'agit plus, à

partir de Weierstrass d'entier n infiniment grands, mais d'écrire une condition du type $|x_n| < \varepsilon$ vérifiée pour tous les n supérieurs à un certain n_0 .

Pierre Cartier nous a parlé d'une expérience d'enseignement à un jeune homme quasi-autodidacte qui avait entrepris de façon tardive de passer un bac G. Pierre Cartier avait réussi à résumer le programme d'analyse en quelques règles concises et faciles à utiliser. Il avait proposé de compléter les nombres usuels par des nombres illimités et défini l'égalité approchée de deux nombres sous la forme

$$a \approx b \Leftrightarrow (a = b \text{ (égalité stricte) ou } a \neq b \text{ et } \frac{1}{a - b} \text{ illimité})$$

En fait il faut toute une hiérarchie d'éléments négligeables et de quasi-égalités. En effet, lorsqu'on écrit $\frac{d(x^2)}{dx} \approx 2x$, on néglige un infiniment petit du premier ordre et lorsqu'on écrit $dx^2 \approx 2x dx$, on néglige un infiniment petit du second ordre. Les difficultés apparaissent véritablement lorsqu'on veut définir par exemple l'intégrale, où intervient une somme infinie de termes infiniment petits et des infiniment petits d'ordres différents. Un garde-fou devient nécessaire pour éviter les contradictions.

Le conférencier a alors présenté Abraham Robinson (1918 - 1974), le fondateur de l'analyse non standard: chassé d'Allemagne vers 1933 par le nazisme, il se réfugie en Israël où il sera l'élève du grand logicien A. Fraenkel. Un séjour d'étude à Paris est vite interrompu par la guerre; il fuit en Angleterre, où il se spécialise en aérodynamique et participe par ses recherches à l'effort de guerre. Après 1945, il est ingénieur consultant chez Boeing où il contribue à l'invention de l'aile en delta et au développement de l'aviation supersonique. Les deux tiers de son oeuvre mathématique concerneront l'aérodynamique, mais il recommence également ses recherches en logique et il est l'un des fondateurs de la théorie des modèles. Au tout début des années soixante, il applique les résultats de cette théorie à l'invention de l'analyse non standard. S'appuyant sur un résultat de Skolem, selon lequel il y a plus d'un modèle possible pour l'arithmétique, Robinson définit un modèle N^* qui contient l'ensemble N des entiers usuels et dans lequel les propriétés vraies dans N restent vraies, mais qui contient également d'autres objets, les hyper-entiers, qui sont "au-delà" des entiers. Ces hyper-entiers ω sont plus grands que tous les entiers, et vérifient par exemple les énoncés $\omega^2 > \omega$ et $2\omega > \omega$ La propriété "il y a un entier supérieur à tous les entiers" est fausse aussi dans N^* . Les démonstrations de Robinson sont assises sur une théorie logique très solide, mais aride et coûteuse. Cette théorie donne un statut rigoureux aux infinitésimaux.

Après la mort de Robinson, une école américaine où figure en particulier E. Nelson, développe une variante de la théorie de Robinson, la théorie des ensembles internes. Un peu plus tard, Reeb et l'école française vont faire un effort de simplification et tenter de rendre l'outil plus accessible, dans le but de simplifier l'exposé de l'analyse et sa pédagogie.

Pierre Cartier tient que, au cours du 20ème siècle, l'analyse mathématique et l'analyse numérique se sont progressivement séparées en deux enseignements parallèles qui ne se recoupent pas. L'analyse mathématique souvent ne s'applique pas au concret. Un point de vue influencé par l'analyse non standard permettrait de lutter contre le divorce actuel entre ces deux domaines. Cartier donne l'exemple du théorème d'Hadamard, selon lequel le déterminant d'une matrice dont les éléments dépendent continûment d'un paramètre λ est lui-même une fonction continue de λ . Cependant, sur un exemple de matrice 20×20 , P. Cartier a pu observer des variations très brusques qui infirment toute tentative d'interpolation. La fonction étudiée, est "macroscopiquement" non-continue, même si elle est "microscopiquement" continue. P. Cartier en conclut que la notion de continuité n'est pas absolue, qu'il faudrait définir des notions de continuité dépendant de l'ordre de grandeur considéré. Pour lui, l'idée importante de la théorie des modèles introduisant la non unicité du modèle, met en question l'apparent excès d'unité des théories mathématiques régnantes, trop rigides et univoques. Les méthodes infinitésimales sont l'occasion de réfléchir à ces questions, d'introduire une relativisation du point de vue. Ajoutons que Pierre Cartier prépare un ouvrage sur le calcul intégral traité dans le cadre de l'analyse non standard, où il s'attache à alléger le contenu logique nécessaire.

Michèle Grégoire



Abraham Robinson