Le volume de la pyramide

Michèle Grégoire

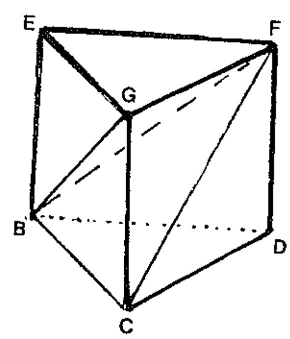
Mesurer de façon élémentaire un solide consiste à le comparer à un volume simple pris pour unité. La pyramide triangulaire est un solide simple dont le calcul du volume n'est pas immédiat. On peut, à son propos, tenter de faire faire aux élèves le lien entre la notion commune de volume et des notions plus abstraites liées à la mesure d'un volume: limites, somme des termes d'une suite, intégrale...

Un des exemples proposés est un problème destiné à une activité de type travaux dirigés pour des élèves de première ou de terminale scientifiques, qui commence par des constructions mettant en évidence qu'un prisme peut être décomposé en trois pyramides. Dans certains cas particuliers, il est évident que ces pyramides ont même volume, lorsque ces pyramides sont superposables ou symétriques. Pour démontrer que, dans le cas général, les trois pyramides ont le même volume, le problème introduit la lecture d'un extrait des *Eléments de Géométrie* de Legendre (12ème édition, 1823). La propriété est de nature infinitésimale, mais le raisonnement de Legendre évite tout recours à l'infini, grâce à un raisonnement par l'absurde. La preuve de Legendre fait sentir ce qui débouchera sur la formulation technique précise du concept de limite qu'on n'expose plus aux élèves de lycée. Elle permet aussi d'aborder en dernière partie une autre méthode, qui annonce l'usage des sommes de Riemann pour définir le volume de la pyramide.

Problème

I Constructions

1) On découpe le prisme droit BCDEFG de hauteur a et de base BCD triangle rectangle isocèle de côté a, en trois pyramides comme l'indique la figure 1. Dessiner les patrons des trois pyramides. Les construire et les assembler pour former le prisme. Comparer les patrons et les trois pyramides. Quelle relation entre les volumes du prisme et des pyramides peut-on conjecturer ?



2) Faire les mêmes constructions avec le prisme droit B'C'D'E'F'G', de base B'C'D', où B'C = a, C'D' = 2a, B'C'D' = 60°, D'F' = 3a. La conjecture ci-dessus s'applique-t-elle dans ce cas? Montrer que les pyramides ont deux à deux même hauteur et des bases d'aires égales.

II Lecture de la proposition XVII du livre 6 des *Eléments de Géométrie* de Legendre.

Les questions posées se réfèrent aux différents paragraphes du texte joint.

§ 1. Préciser les hypothèses et la conclusion recherchée. Quel mode de raisonnement emploie Legendre? Le prisme de base ABC et de hauteur A*x*. est plus loin dans le texte désigné par ABCX. Que représente-t-il?

§ 2. Posons $n = \frac{AT}{k}$. Préciser la transformation de l'espace par laquelle ABC a pour image DEF, et celle qui transforme *abc* en *def*. Quel prisme inscrit dans *sabc* a même volume que DEFG?

§ 3. Prouver la propriété énoncée. On notera V et v les volumes de SABC et de *sabc*.

§ 4. Combien de prismes ont été construits dans chaque pyramide? On notera, en partant du sommet de chaque pyramide, $P_1, P_2, .. P_i, ...,$ les prismes construits autour de SABC, et $p_1, p_2, ..., p_i, ...,$ les prismes inscrits dans *sabc*. Ecrire avec ces notations les inégalités énoncées par Legendre. Comment conclut-il?

III Application.

Soit SABC une pyramide quelconque et ABCQPS le prisme de base ABC et d' arête AS. Montrer que ce prisme se décompose en trois pyramides de même volume que SABC.

IV Une autre méthode pour calculer le volume V de la pyramide SABC.

En s'inspirant de la figure de Legendre, construire une pyramide de hauteur h coupée par des plans équidistants et parallèles à la base ABC qui définissent des prismes intérieurs $p_1, p_2, ...,$ et des prismes extérieurs $P_1, P_2, ..$ à cette pyramide. Soit $\frac{h}{n}$ la hauteur commune de ces prismes.

1) Calculer le volume des prismes p_1 puis p_2, puis p_i. En déduire le volume v_n de la réunion des prismes intérieurs à SABC.

2) Montrer que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) Calculer le volume V_n des prismes extérieurs à la pyramide.

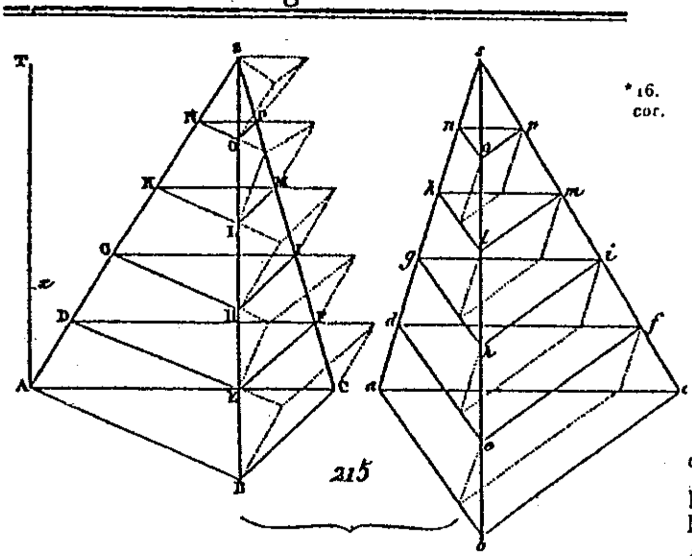
4) Expliquer pourquoi pour tout entier n, $v_n < V < V_n$. Quelle est la limite de la suite (v_n) et la limite de la suite (V_n)? Que peut-on en déduire pour V?

Avant d'aborder le problème avec les élèves, il faut leur rappeler que, son objet étant de démontrer la formule $V = \frac{1}{3}Bh$, il ne faut pas utiliser cette formule dans le cours du problème. Les constructions de patrons et de solides seront peut-être faites à la maison plutôt qu'en classe. La lecture du texte, tout à fait compréhensible par les élèves, est très utile pour continuer le problème. Il est souhaitable pour certains élèves de mener cette lecture en classe.

Legendre A.M. *Eléments de Géométrie*,
12° édition, 1823.

Livre VI, proposition XVII

Legendre *Elémens de Géométrie*



PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Deux pyramides triangulaires qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales, sont équivalentes.

fig. 215. Soient SABC, *sabc* les deux pyramides dont les bases ABC, *abc*, que nous supposons placées sur un même plan, sont équivalentes et qui ont même hauteur TA ; si ces pyramides ne sont pas équivalentes, soit *sabc* la plus petite et soit Ax la hauteur d'un prisme qui étant construit sur la base ABC, serait égal à leur différence.

Divisez la hauteur commune AT en parties égales plus petites que Ax, et soit k une de ces parties; par les points de division de la hauteur, faites passer des plans parallèles au plan des bases; les sections faites par chacun de ces plans dans les deux pyramides, seront équivalentes*, telles que DEF et *def*, GHI et *ghi*, etc. *16. cor. Cela posé, sur les triangles ABC, DEF, GHI, etc., pris pour bases, construisez des prismes extérieurs qui aient pour arêtes les parties AD, DG, GK, etc., du côté SA ; de même sur les triangles *def*, *ghi*, *klm*, *etc.*, pris pour bases, construisez dans la seconde pyramide des prismes intérieurs qui aient pour arêtes les parties correspondantes du côté *sa* ; tous ces prismes partiels auront pour hauteur commune k.

La somme des prismes extérieurs de la pyramide SABC est plus grande que cette pyramide, la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc* est plus petite que cette pyramide ; donc par ces deux raisons la différence entre les deux sommes de prismes devra être plus grande que la différence entre les deux pyramides.

Or à partir des bases ABC, *abc*, le second prisme extérieur DEFG est équivalent au premier prisme intérieur *defa*, puisque leurs bases DEF, *def*, sont équivalentes et qu'ils ont une même hauteur k ; sont équivalents par la même raison le troisième prisme extérieur GHIK et le second intérieur *ghid*, le quatrième extérieur et le troisième intérieur, ainsi de suite jusqu'au dernier des uns et des autres. Donc tous les prismes extérieurs de la pyramide SABC, à l'exception du premier ABCD, ont leurs équivalents dans les prismes intérieurs de la pyramide *sabc*. Donc le prisme ABCD est la différence entre la somme des prismes extérieurs de la pyramide SABC et la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc* ; mais la différence de ces deux sommes est plus grande que la différence des deux pyramides ; donc il faudrait que le prisme ABCD fût plus grand que le prisme ABCX ; or au contraire il est plus petit, puisqu'ils ont une même base ABC, et que la hauteur k du premier est moindre que la hauteur Ax du second. Donc l'hypothèse d'où l'on est parti ne saurait avoir lieu ; donc les deux pyramides SABC, *sabc*, de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes.