INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

Numéro spécial
I

HISTOIRES DE PYRAMIDES

Michèle GREGOIRE

MNEMOSYNE

UNIVERSITE - PARIS VII

Mnémosyne

personnification de la mémoire.

Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite;

de cette union naquirent les neuf Muses.

(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture : **"La mémoire"**

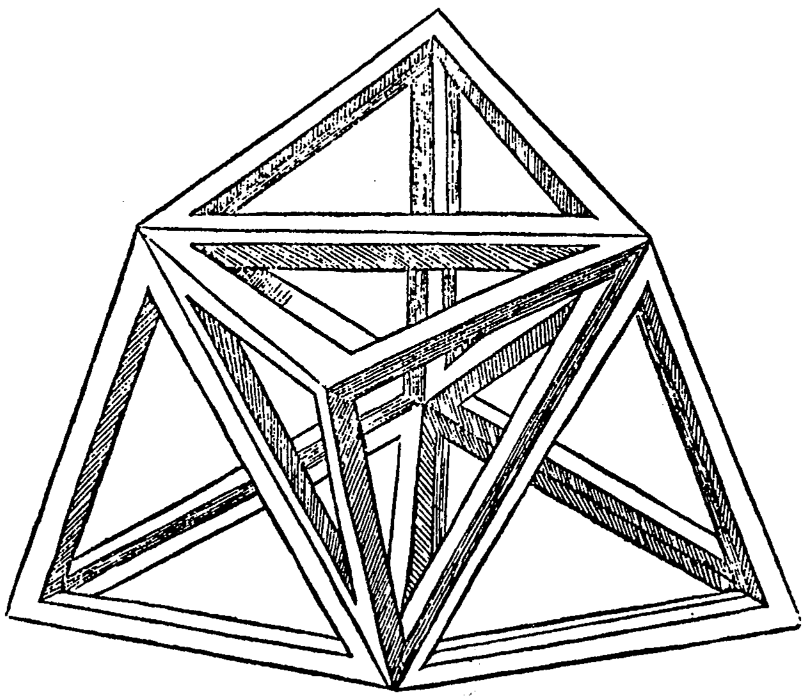
gravure allégorique d'après Gravelot (XVIII ème)

Michèle GREGOIRE

Histoires de pyramides

Les calculs de volumes de pyramides et leurs démonstrations

Ἐπηρμένον κενόν.　　　　VI



Tetraedron.epirmenon cenon.

Tetraedron.eleuatum uacuum.

Horum inuentor.Magister Lucas.Paciolus de burgo.Sancti Sepulchri.Ordinis Minorum.

Ce texte reprend un mémoire de D.E.A. soutenu à l'Université Paris-7 en 1991.

Je remercie les membres du jury , Mrs Christian Houzel, Roshdi Rashed et Jean-Luc Verley, qui m'a également permis de photocopier plusieurs textes originaux en sa possession.

Je remercie également très chaleureusement Karine Chemla, Michel Guillemot, Gérard Hamon, Jean-Pierre Le Goff, et Henry Plane qui m'ont signalé des textes intéressants.

Planche de *La Dinine Proportion* de Luca Pacioli, rééd. Librairie du Compagnonage, Paris 1980

Sommaire

Recueil de textes

Histoires de pyramides

Le sommet rejette incessamment la base dans l'insignifiance et, dans ce sens, des vagues de
G. Bataille, L'Expérience intérieure

Introduction

Le volume d'une pyramide est connu depuis la plus haute antiquité, probablement depuis près de quatre mille ans. Cependant, depuis les *Eléments* d'Euclide, des démonstrations différentes se succèdent dans les traités de géométrie. L'objet de cette étude est l'histoire de ces différentes démonstrations. Pourquoi la démonstration de ce que le volume d'une pyramide est le tiers du volume du prisme de même base et de même hauteur change-t-elle à diverses périodes, quelles sont les raisons qui motivent ou expliquent les transformations? En conclusion, je cherche à dégager un moteur plus général de ces transformations.

L'énoncé du problème est élémentaire: "Calculer le volume d'une pyramide". Sa résolution, pourtant, telle qu'on la trouve dans les traités de géométrie est moins élémentaire. Serait-il possible de calculer le volume d'une pyramide de forme quelconque par simple découpage et ré-empilement de pièces? C'est le sujet du troisième problème qu'a posé Hilbert au Congrès des Mathématiciens, en 1900; il a pour titre "De l'égalité en volume de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales". Max Dehn répond à la question de Hilbert en montrant qu'il n'est en général pas possible de prouver l'égalité des volumes de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales par une simple décomposition des deux solides en un nombre fini de morceaux qu'on réassemblerait différemment pour mettre en évidence le résultat. Alors qu'on peut faire une théorie des aires des surfaces polygonales en se passant de techniques telles que la méthode d'exhaustion, les passages à la limite ou le calcul infinitésimal, on ne peut se passer de ces techniques pour mesurer le polyèdre le plus élémentaire, une pyramide triangulaire, à partir de laquelle on peut composer tous les polyèdres. J'aborderai cet aspect de la réflexion en annexe de cette étude.

L'essentiel de l'étude porte sur les différentes démonstrations, d'Euclide jusqu'au XVIII^{ème} siècle. Dans cette histoire des démonstrations, on peut lire certains aspects de l'évolution des mathématiques à l'âge classique: en particulier la persistance, ou l'abandon, l'émergence, l'extension de certaines notions ou de méthodes mises en jeu dans les questions de mesure de volumes. On verra, par exemple, que ces démonstrations mettent en jeu le concept de grandeur, le recours ou le rejet de la divisibilité à l'infini d'une grandeur, le statut des infiniment petits. On verra émerger des méthodes des indivisibles, le calcul différentiel et intégral, la notion de limite. Ces démonstrations sont parfois contemporaines de l'étape de découverte des théories mises en jeu, plus souvent elles témoignent de la période de mise en forme de ces découvertes, à l'occasion de laquelle sont posés les problèmes de validité des méthodes utilisées, de leurs fondements, de l'évaluation des méthodes nouvelles par rapport aux anciennes.

Il y a quatre périodes principales dans cette étude.

La première est la période classique grecque, avec les *Eléments* d'Euclide, où naissent les concepts sur lesquels les mathématiques occidentales vont travailler pendant des siècles. Ces concepts vont se retrouver, plus ou moins explicitement, dans tous les textes de la tradition occidentale que j'étudie: grandeurs, théorie des proportions, méthode par exhaustion, méfiance vis à vis de l'infiniment petit. Je m'attache à préciser certains aspects de l'axiomatique euclidienne.

En contrepoint, je décris la méthode chinoise qu'on trouve dans les *Neuf chapitres sur l'art du calcul* , le traité chinois classique par excellence, qui est postérieur aux *Eléments* de quelques siècles. Cette méthode témoigne de conceptions des mathématiques et de la démonstration, tout à fait différentes des conceptions grecques. La démonstration chinoise convainc le lecteur en faisant voir le résultat. L'exemple chinois rappelle que la science grecque n'a pas été la seule à s'épanouir au début de notre ère et met en évidence, comme en négatif, combien les développements ultérieurs de la science occidentale ont été marqués de façon indélébiles par le caractère hautement spéculatif et par les canons axiomatico-déductifs de la science grecque.

La deuxième période correspond au début du XVII^{ème} siècle, où vont apparaître diverses méthodes des indivisibles. J'étudie les deux méthodes de Cavalieri, et leurs applications aux pyramides. Je présente aussi les méthodes des indivisibles inspirées de Roberval, et également de l'*Arithmétique des infinis* de Wallis. Un ouvrage didactique de l'Abbé Deidier en présente un exemple un peu tardif mais très caractéristique. Je relève l'opposition des Jésuites aux indivisibles, opposition qu'on peut considérer comme réactionnaire, mais qui va susciter d'autres démonstrations comme celle du Père Tacquet, où on voit émerger l'idée de limite.

La troisième période, très riche, s'étend de la fin du XVII^{ème} siècle jusqu'au milieu du XVIII^{ème} siècle. C'est pendant cette période que naît le calcul différentiel et intégral, sous les deux formes divergentes de Newton et de Leibniz. On verra les tentatives de leurs émules pour le présenter sous une forme satisfaisante. A partir de l'exemple du calcul de la fluxion de la pyramide, j'ai suivi les efforts de Mac Laurin pour reconstruire la théorie de Newton sur une axiomatique rigoureuse, à la manière euclidienne. Louis Carré, l'auteur très peu connu du premier traité de calcul intégral, datant de 1700, appliquant les méthodes de Leibniz, obtient de façon complètement nouvelle le volume de la pyramide.

La quatrième période sur laquelle je m'attarde est contemporaine de la révolution française. Les principes des calculs de nature infinitésimale ne sont pas encore complètement éclaircis et on trouve dans un cours de Laplace à l'Ecole Normale de l'An III, et dans les *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal* de L. Carnot, les solutions que proposent ces deux savants, à l'occasion de démonstrations du calcul du volume de la pyramide.

L'essentiel de l'étude s'arrête là. J'ai parcouru de nombreux traités du XIX^{ème} siècle, mais je ne les ai pas retenus dans cette étude, car, contrairement à ce qu'on peut observer aux périodes précédentes, ces ouvrages sont plus représentatifs des recherches didactiques des auteurs du XIX^{ème} siècle, que de leur travail de recherche et de création mathématiques. J'en dis quelques mots en annexe.

Je propose, à la suite de l'étude, un recueil de textes caractéristiques des diverses méthodes utilisées. Les textes que j'ai sélectionnés sont pour certains bien connus et déjà étudiés, d'autres le sont moins. Certains sont des textes pédagogiques ou de vulgarisation; c'est parce qu'ils témoignent de façon assez exemplaire des méthodes étudiées que je les ai choisis.

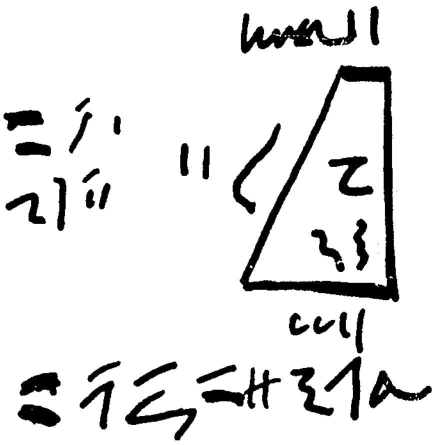
1. Les premières expressions du volume des pyramides

1. 1 Formule égyptienne

On peut imaginer que les Egyptiens, si experts en l'art des pyramides connaissaient leurs volumes. Or un seul texte sur ce sujet a été retrouvé, traitant selon toute vraisemblance, du volume d'un tronc de pyramide à base carrée. C'est le problème 14 du Papyrus de Moscou[1], écrit vers 1850 avant notre ère. Ce texte a été reproduit et traduit en allemand par W. Struve[2].

Le papyrus présente une figure plane qui peut être interprétée comme la représentation en coupe d'une portion d'un tronc de pyramide, et des colonnes de nombres, en écriture hiératique, autour et à l'intérieur de la figure. On a là une image exemplaire des réalisations mathématiques égyptiennes, et la solution d'un des problèmes les plus sophistiqués de l'antiquité égyptienne. Le texte propose, sur un exemple numérique particulier, un calcul de la quantité recherchée par une suite d'instructions permettant de calculer le volume du tronc de pyramide. Nous y voyons un algorithme sans démonstration. Le court texte qui accompagne la figure indique donc , pour un tronc de pyramide dont les dimensions sont 4, 2, 6 (côté du carré inférieur, côté du carré supérieur et hauteur), d'ajouter 4^2, 2x4 et 2^2, et de multiplier cette somme par le tiers de 6. "Le résultat est 56! tu as bien trouvé."

fig. 1



L'algorithme correspond à appliquer, pour le volume du tronc de pyramide dont les côtés des bases carrées sont a et b et la hauteur h, la formule exacte

[1] Ce rouleau a été acheté en Egypte en 1893 et il est conservé depuis au musée des Beaux-Arts de Moscou.

[2] Struve W. _Mathematischer Papyrus des staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau,_ in _Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik,_ Serie A, vol.I, Springer, Berlin, 1930, p.135.

$V = (a^2 + ab + b^2)\frac{h}{3}$. On peut imaginer que cet algorithme était considéré comme applicable à d'autres données numériques. Les nombres écrits autour de la figure rappellent les procédés classiques de calcul en Egypte ancienne: les multiplications s'effectuent par des doublements successifs et des additions (les divisions de même).

Mais cet exemple, quoique fascinant est plutôt préliminaire à mon propos qui est de s'intéresser aux procédés de démonstration. Ici nous n'avons aucune trace de justification de l'algorithme.

1.2 Démocrite et le volume de la pyramide

On sait par Archimède[1], que Démocrite, philosophe du V^{ème} siècle avant J.C., aurait été le premier en Grèce à affirmer que la pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur. Selon le témoignage d'Archimède, il n'aurait pas donné de démonstration de ce résultat. On a perdu tous les écrits de Démocrite, on ne connait de sa pensée que ce qu'en ont rapporté d'autres penseurs du monde grec. On sait qu'il défendait une théorie atomiste de la nature, expliquant que tout, même l'âme et l'esprit se composait d'atomes, particules indivisibles, se mouvant dans le vide. Aristote parle de lui à plusieurs reprises. Il explique comment les spéculations de Démocrite sur la division des grandeurs géométriques, amenaient celui-ci à poser, en mathématiques aussi, l'existence d'éléments indivisibles[2]. Démocrite examine la question: une grandeur peut- elle être entièrement divisible? Si l'on divise une figure un très grand nombre de fois, autant qu'il est possible, quelle est la nature de la dernière petite partie obtenue? Ce ne peut être une grandeur divisible, sinon on prolongerait le processus de division; il n'est pas possible que ce ne soit pas une grandeur, que ce soit par exemple un point, "car il est absurde qu'une grandeur naisse de non-grandeur"(...) "Il en irait de même dans l'hypothèse où le corps serait formé de points: il n'aurait pas de quantité." Démocrite considèrerait donc que l'infime partie de la division est un élément matériel indivisible. "Ainsi, puisqu'il y impossibilité à ce que les grandeurs soient constituées à partir de contact et de points, il est nécessaire qu'il existe des éléments matériels indivisibles et des grandeurs." [3] Plutarque rapporte les interrogations de Démocrite concernant le cône[4]. " Si un cône venait à être coupé parallèlement à sa base, que peut-on dire des superficies des sections: sont-elles égales

---

1 Archimède, la Méthode, Lettre-préface à Eratosthène...in Heath T *The work of Archimedes, Supplement. The Method*, p. 13

2 Aristote . *De la génération et de la corrruption.* I, II, 316 a 13. in *Les Présocratiques* , La Pléiade.

3 ibid.

4 Plutarque, *Des notions communes* , 39, 1079 E. in *Les Présocratiques* , la Pléiade p. 773-774.

ou inégales ? [1] Car si elles sont inégales, elles feront donc que la pyramide ronde prendra plusieurs engravures profondes et raboteuses; et si elles sont égales, les sections seront aussi égales et se trouvera que le cône fera pareil effet que le cylindre, comme s'il était composé de cercles égaux, et non pas inégaux, ce qui est fort absurde."

Plusieurs historiens des mathématiques ont émis des hypothèses sur la méthode qu'aurait pu suivre Démocrite, pour obtenir le volume de la pyramide et du cône. Joseph Ehrenfried Hofmann[2], par exemple, pense que Démocrite a dû être guidé par un découpage de la pyramide en sections parallèles indivisibles. Simplicius, par contre, rapporte que Démocrite a soutenu l'hypothèse selon laquelle les lignes seraient divisibles à l'infini[3].

Le texte du seul témoignage des réflexions de Démocrite sur le volume du cône ne me semble pas permettre d'affirmer que sa démonstration ait pu reposer sur la division effective de ce solide en sections indivisibles parallèles. Ses interrogations sur les sections du cône indiquent plutôt qu'il ne devait pas considérer comme acceptable une telle démonstration.[4]

---

[1] J'ai modifié la traduction des *Présocratiques* de la Pléiade qui est la suivante: "que faudrait-il juger touchant les superficies des sections, si elles seront aussi égales ou inégales?"

[2] J. Ehrenfried Hofmann *Wie ist wohl Demokrit zum Rauminhalt der Pyramide gekommen?*, Historia Mathematica 14, 1987, p.173-174

Hofmann suggère que Démocrite aurait pu découper un prisme triangulaire en trois pyramides, comme dans la proposition 7, XII des *Eléments* d'Euclide; (cf figure 3, p. 11) puis considéré les paires de pyramides qui ont même sommet et des bases triangulaires formant les deux moitiés d'un parallélogramme; chaque section parallèle aux bases satisfait à la même propriété que les deux triangles des sections sont les moitiés d'un parallélogramme; les deux pyramides auraient donc, selon un principe de Cavalieri, non encore formulé, même volume.

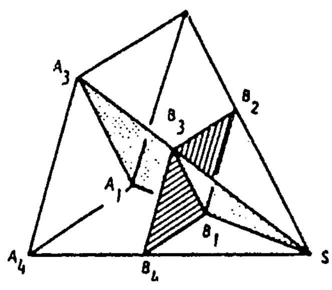


fig.2

[3] Simplicius *Commentarii in octo Aristotelis physicae auscultationis libros.* Venetiis, 1551, cité par Boyer in *the History of the Calculus*, p. 22

[4] Jean Itard, par contre, suggère que des considérations de similitude de solides intervenant dans le découpage de la pyramide utilisé par Eudoxe et Euclide, comme on le verra plus loin (cf figure , p.) ont pu guider la réflexion de Démocrite. cf J. Itard *La similitude et les méthodes infinitésimales* in *Essais d'histoire des mathématiques*, Blanchard, Paris, 1984

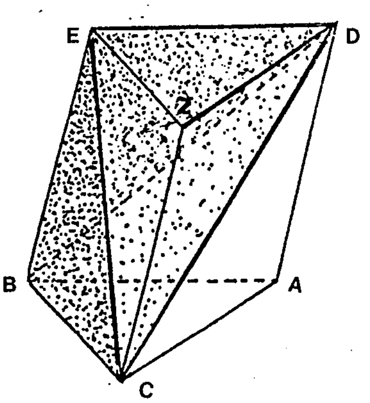
2. La méthode euclidienne

C'est encore par Archimède que l'on sait que la première démonstration du résultat trouvé par Démocrite a été donnée par Eudoxe de Cnide[1], savant du IVème siècle avant J.C., dont les traités perdus ont servi de point de départ aux *Eléments* d'Euclide. C'est cette démonstration qui serait reprise par le douzième livre des *Eléments* , et qui constitue la plus ancienne qui nous soit transmise.

Je propose une rapide description synthétique de la démonstration d'Euclide, qu'on trouve dans les propositions 4 à 7 du livre XII, avant d'analyser les diverses méthodes mises en jeu et d'en reprendre certains aspects en détail.

Euclide remarque, à la proposition 7, qu'on peut diviser un prisme à base triangulaire en trois pyramides. En les comparant, il constate qu'elles ont deux à deux même hauteur et que leurs bases sont égales (au sens de l'aire) . Les pyramides CABD et CEDB ont même hauteur (la distance de C à la face ABED) et pour bases les deux moitiés du parallélogramme ABED. De même pour DCBE et DECZ , dont les bases sont les moitiés du parallélogramme BEZC.

fig. 3



D'autre part, il a démontré, à la proposition 5, que deux pyramides P et P' de même hauteur sont proportionnelles (en ce qui concerne leurs volumes) aux aires B et B' de leurs bases; les trois pyramides qui constituent le prisme sont donc égales (au sens d'avoir même volume), et chacune vaut le tiers du prisme.

C'est pour établir cette proposition qu'Euclide est amené à mettre en jeu des instruments d'analyse et de raisonnement variés et élaborés. Il va inscrire dans

---

[1] Archimède: *La méthode* . Lettre-préface à Eratosthène... cf note 1 de la page précédente.

chaque pyramide P et P' un solide S et un solide S', composés chacun, d'un empilement de prismes - dont il connait donc les volumes[1] - et tels que le rapport de S à S' soit le même que celui des bases B et B'. Les solides S et S' *épuisent* presque les pyramides P et P', au sens où les volumes restants peuvent être rendus aussi petits que nécessaire; c'est à dire assez petits pour que, en termes modernes, chacune des inégalités $\frac{P}{P'} < \frac{B}{B'}$ et $\frac{P}{P'} > \frac{B}{B'}$ entraine une contradiction.

Plusieurs notions et procédés caractéristiques de la géométrie et de la théorie des grandeurs[2] euclidiennes sont donc ici mis en jeu. J'y distingue trois niveaux ou cadres théoriques principaux :

- le niveau élémentaire mis en place dans les deux premiers livres des _Eléments_, et complété par certaines propositions du livre XI, sur les comparaisons de figures planes et solides, qu'on peut désigner par l'intitulé "méthode des aires".
- la théorie des proportions, construite au livre V, appliquée aux figures planes au livre VI, et aux figures solides à partir du Livre XI
- enfin, les procédés liés à la méthode par exhaustion et aux conceptions sur l'infini.

Je reprends les éléments caractéristiques de chacun de ces cadres théoriques et indiquerai les résultats qu'ils permettent d'obtenir.

2. 1. La méthode des aires

2. 1. 1. Principes de la méthode des aires et son extension à l'espace

Après l'échec des tentatives pythagoriciennes d'exprimer toute la nature par des nombres (entiers), *mesurer une aire* (ou un volume) pour les géomètres grecs ne signifie aucunement associer un nombre à une grandeur, surface ou solide; cela signifie seulement comparer entre elles des figures planes ou des solides, c'est à dire des grandeurs de même nature, montrer leur *égalité,* une relation d'inégalité, ou calculer leur rapport.

La méthode des aires repose d'abord sur les notions communes, énoncées au début des _Eléments,_ applicables aussi bien aux nombres qu'aux grandeurs, notamment:

"1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

---

1 On trouve dans le Livre XI, à partir de la proposition 25, de nombreux énoncés de comparaison de volumes de parallélipipèdes et de prismes, considérés comme moitiés de parallélipipèdes.

2 Rappellons qu'Euclide ne définit pas ce qu'il appelle *grandeur.* A la lecture des _Eléments_, on comprend qu'une grandeur désigne soit une ligne, soit une surface, soit un volume, soit encore un angle rectiligne, considérés comme des objets géométriques continus, susceptibles d'être divisés autant qu'il est nécessaire, et d'être mesurés. Les grandeurs que considère Euclide, qui sont susceptibles d'avoir un rapport au sens de la théorie des proportions du Livre V, sont archimédiennes.,

2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.

3. Et si, à des choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.

5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.

6. Et les moitiés du même sont égales entre elles.

7. Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.

8. Le tout est plus grand que la partie." [1]

La méthode des aires s'appuie ensuite sur les résultats suivants:

1) - Dans un parallélogramme ABCD, les triangles ABD et BCD sont superposables, donc sont des grandeurs égales. (Pour nous ils ont même aire) (c'est la proposition 34 du livre I) (fig.4)

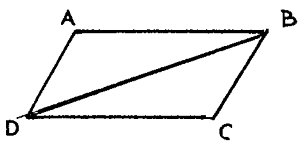


fig. 4

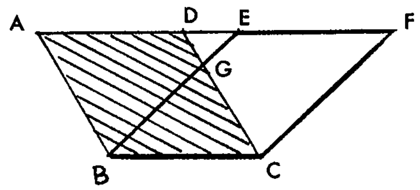
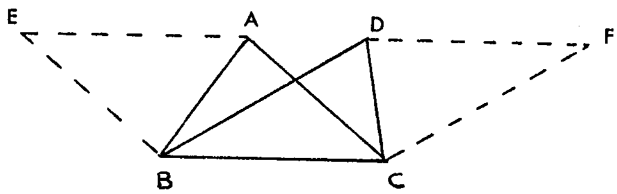


fig. 5

- Deux parallélogrammes de même hauteur et de même base ou de bases égales sont deux grandeurs égales (propositions 35 et 36). (fig. 5)

- Deux triangles de même hauteur et de même base ou de bases égales sont aussi deux grandeurs égales, les triangles étant des moitiés de parallélogrammes équivalents. (prop. 37 et 38 : ABC est la moitié du parallélogramme AEBC, BCD est la moitié du parallélogramme BCFD , équivalent à AEBC)

fig. 6



2) Au livre XI qui traite de géométrie dans l'espace, on trouve des méthodes et des propositions tout à fait parallèles.

[1] traduction de B. Vitrac, P.U.F. 1990

- Un parallélépipède est coupé en deux parties égales par le plan défini par les diagonales de deux faces opposées[1] (à condition de bien choisir une paire de diagonales coplanaires). (prop. 28) .

- Les parallélépipèdes de même hauteur et qui ont une même base sont des grandeurs égales. (prop. 29 et 30)

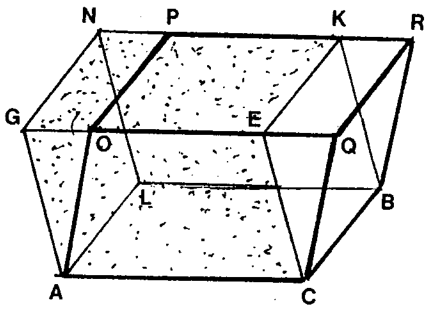


fig. 7

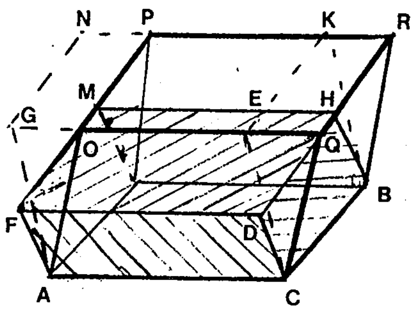


fig. 8

Les démonstrations de toutes ces propositions utilisent principalement des techniques élémentaires de *découpages* et recourent aux notions communes rappelées ci-dessus; deux figures sont égales si l'une d'elles peut être découpée en un nombre fini de pièces (triangles, prismes...) qui réarrangées composent l'autre; de même deux figures sont égales si, complétées par les mêmes pièces elles forment deux figures égales. Ces techniques de démonstration sont considérées comme validées par les principes d'équidécomposabilité et d'équicomplémentarité[2] des figures du plan et de l'espace.

3) Dans les propositions 42, 44 et 45 du premier livre, Euclide met en place une méthode qui permet de comparer des figures planes rectilignes quelconques, méthode désignée par l'expression: "l'application (ou parabole) des aires". Il explique d'abord comment construire un parallélogramme, dont un côté et un angle soient donnés, et

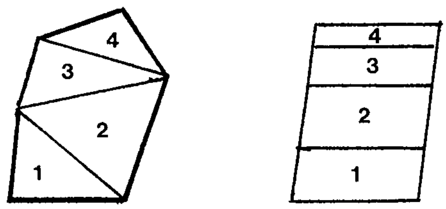
---

[1] On peut remarquer qu' Euclide, pour comparer des figures de l'espace utilise la définition 10 du Livre XI, plutôt insatisfaisante pour les commentateurs plus tardifs: " Les figures solides égales sont celles qui sont comprises par des plans semblables, égaux en nombre et en grandeur." (trad. Peyrard). Ici , on se rend compte que les deux prismes considérés ne sont pas superposables mais symétriques par rapport au centre du parallélipipède. Nous disons qu'ils n'ont pas la même orientation. On ne trouve pas ce genre de considération dans les *Eléments* d'Euclide où des figures symétriques sont implicitement covnsidérées comme des grandeurs égales. Simson mettra en évidence deux solides satisfaisant à la définition 10 mais manifestement de volumes différents. Legendre, dans la 14ème édition de ses *Eléments de géométrie* introduira une définition de l'égalité et de la similitude de solides tenant compte de l'inclinaison des faces.

[2] Deux figures F et F' sont dites équidécomposables si elles peuvent toutes deux être considérées comme la réunion des mêmes figures $f_1, f_2, \dots f_n$. Deux figures F et F' sont dites équicomplémentables si, complétées par les mêmes figures $f_1, f_2, \dots f_n$, disposées de façons éventuellement différentes, elles composent deux nouvelles figures superposables.

égal (au sens de l'aire), à un triangle donné, puis un parallélogramme égal à une figure polygonale quelconque, qu'il a décomposé en triangles. Pour comparer deux figures polygonales, il suffit de comparer les deux parallélogrammes ainsi construits. La proposition 14 du livre II indique même comment construire un carré de même grandeur qu'une figure rectiligne donnée. La quadrature de toute figure polygonale est donc possible.

fig. 9



Il n'y a pas, dans les *Eléments*, de méthode analogue qui permette de comparer toutes sortes de polyèdres.

2. 1. 2. La méthode des aires dans le calcul du volume de la pyramide.

La première étape de la démonstration concernant le volume de la pyramide fait appel à ce genre de techniques. La proposition 3 du livre XII présente le découpage d'une pyramide triangulaire (que je nomme P) en deux petites pyramides égales, au sens de la définition 10 du livre XI [1] (nous employons maintenant le mot *isométriques*), et en deux prismes *égaux* (le mot égal signifie ici *de même volume*) (cf figure 10). Pour démontrer que les deux prismes, que je nomme P_1 et P_2 sont des grandeurs égales, Euclide utilise la proposition 39 du livre XI, dont la démonstration consiste à remarquer que chacun de ces prismes est d'une facon différente la moitié du même parallélipipède.

De plus, par ce même type de technique, Euclide montre que chacun des prismes est *plus grand* que chacune des petites pyramides, car chacun des prismes contient une pyramide égale et semblable à l'une des petites pyramides. Ceci lui permet d'énoncer la deuxième partie de la proposition 3: les deux prismes valent plus que la moitié de la grande pyramide.

Mais cette proposition 3 met aussi en jeu des notions relevant de la théorie des proportions; j'en reprendrai l'étude plus loin.

1 Pour démontrer que les "petites pyramides" p et p' sont égales Euclide montre que leurs quatre faces triangulaires sont deux à deux égales; les triangles comparés ont deux côtés respectivement égaux et les angles qu'ils forment sont égaux. Il s'appuie sur la définition 10 du livre XI. (cf note de la page 10)

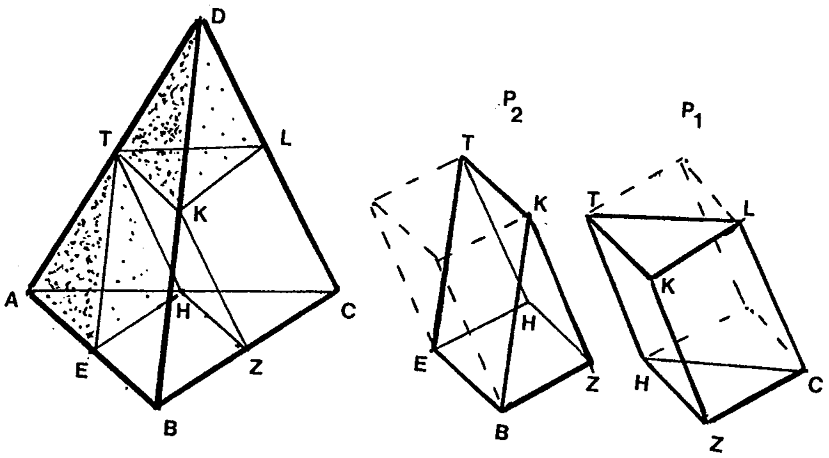


fig. 10

2. 2. La théorie des proportions

2. 2. 1. La théorie des proportions appliquée aux figures planes et solides

Les nombres entiers et leurs rapports ne suffisent pas pour comparer entre elles toutes les grandeurs. On connaît la légende qui s'est répandue autour de la découverte de l'incommensurabilité entre le côté et la diagonale du carré. La théorie des proportions, dûe à Eudoxe, a permis de surmonter la crise déclenchée par cette découverte.

Mise en place au livre V des *Eléments*, appliquée aux figures planes au livre VI, elle donne de nouveaux moyens de comparaison des figures. La définition 6 du livre V, qui permet d'établir que quatre grandeurs sont proportionnelles, est particulièrement exemplaire de l'étonnante puissance de cette théorie; les démonstrations qui nous intéressent s'y réfèrent à plusieurs reprises.

6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

Ainsi, pour établir que quatre grandeurs A, B, C, D sont proportionnelles, il faut considérer des équimultiples mA et mC de A et C, et d'autres équimultiples nB et nD de B et D (n et m pouvant prendre toutes les valeurs entières); $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ signifie

$mA > nB$ si et seulement si $mC > nD$

$mA = nB$ si et seulement si $mC = nD$

$mA < nB$ si et seulement si $mC < nD$

Nous pouvons remarquer que cette définition exprime exactement que si les quatre grandeurs A, B, C, D sont proportionnelles, tout rapport d'entiers $\frac{n}{m}$, c'est à dire tout rationnel, est simultanément soit plus grand, soit égal, soit plus petit que les deux rapports $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ des grandeurs. Un rapport de grandeurs sépare les rationnels en trois parties: les rationnels qui lui sont égaux, ceux qui lui sont strictement inférieurs, ceux qui lui sont strictement supérieurs. La définition des nombres réels par les coupures que Dedekind proposera est donc très proche de l'idée qui guide cette définition. Je ne prétends cependant pas que la réflexion d'Eudoxe ou Euclide annonce celle de Dedekind, mais plutôt qu'elle consiste à contourner la difficulté posée par les grandeurs incommensurables, difficulté qui ne sera complètement résolue qu'au XIX^{ème} siècle avec la définition des nombres réels.

De nombreuses propositions du livre V indiquent comment à partir de rapports égaux, on en obtient d'autres; c'est une véritable arithmétique des rapports qui est construite et dont on verra des exemples d'application. La théorie des proportions permet aussi de construire celle des figures semblables, et, en particulier, pour la proposition 3 du Livre XII mentionnée ci-dessus, d'énoncer que les petites pyramides de la figure sont semblables à la pyramide initiale P, à cause de la similitude de chacune des faces à celles de P.

Ces méthodes mises en place, voici les résultats sur les grandeurs qui peuvent être obtenus au livre VI et XI :

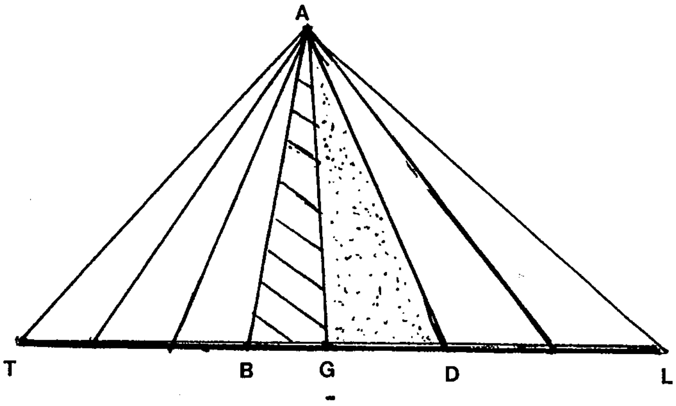
- les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases (prop. 1, Livre VI). La démonstration met en jeu des longueurs telles GT et GL multiples de GB et de GD et des triangles tels AGT et AGL, équimultiples respectivement des triangles ABG et ABD (cf fig. 11), et vérifie effectivement que, pour m et n entiers quelconques:

$m\,BG = n\,GD$ équivaut à $m\,ABG = n\,AGD$

$m\,BG > n\,GD$ équivaut à $m\,ABG > n\,AGD$

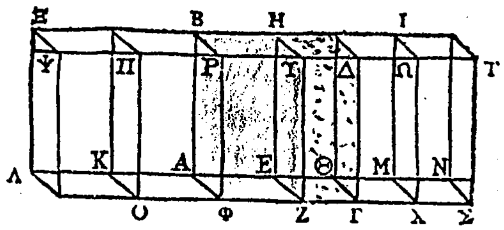
$m\,BG < n\,GD$ équivaut à $m\,ABG < n\,AGD$

fig. 11



- les parallélépipèdes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases (prop. 32, Livre XI). La démonstration de la proposition 25, correspondant à la proposition 32 dans le cas particulier de la figure 12 est menée tout à fait parallèlement à celle de la proposition 1 du Livre VI.

fig. 12



- c'est sans difficulté, que dans le lemme de la proposition 4 du livre XII, Euclide peut énoncer que deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, puisque ce sont des moitiés de parallélépipèdes.
- des triangles et des figures polygonales planes semblables sont entre eux dans le rapport double de leurs côtés homologues (prop. 19 et 20, Livre VI); des parallélépipèdes semblables sont entre eux dans le rapport triple de leurs côtés homologues (prop. 33, livre XI).

2. 2. 2. La théorie des proportions dans le calcul du volume de la pyramide.

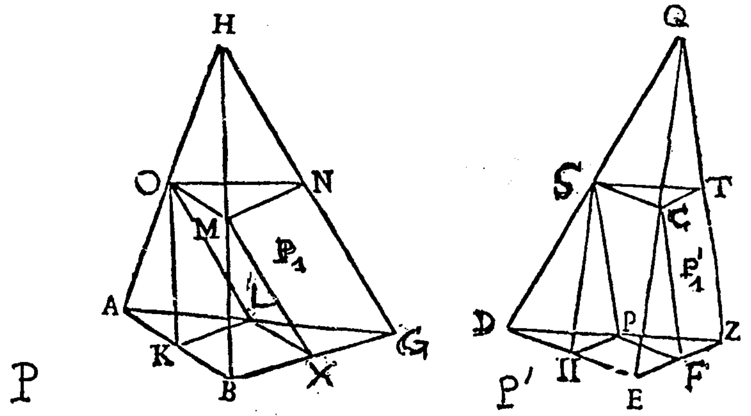
La proposition 4 est exemplaire de l'usage de la théorie des proportions à l'étude d'une figure. Elle énonce que, si on répète le même nombre de fois le découpage en prismes et petites pyramides de deux pyramides P et P' de même hauteur, (cf fig. 13) on obtiendra le même nombre de prismes, dans chacune des deux pyramides P et P' et le rapport des sommes des volumes des prismes de P et

P' ainsi obtenus est égal au rapport des aires B et B' des bases de P et P'. Avec des notations modernes [1]:

$$\frac{\Sigma \text{ prismes de P}}{\Sigma \text{ prismes de P'}} = \frac{B}{B'}$$

Je reprends la démonstration avec des notations modernes: ABGH est la pyramide P et DEZQ est la pyramide P'

fig. 13



$$BG = 2\,GX, \quad EZ = 2\,ZF \text{ donc } \frac{BG}{GX} = \frac{EZ}{ZF}$$

D'après la proposition 22 du Livre VI , les triangles semblables ABG et LXG construits sur BG et GX et les triangles semblables DEZ et PFZ construits sur EZ et ZF sont tels que $\frac{ABG}{LXG} = \frac{DEZ}{PZF}$. Par *permutation*, c'est à dire en utilisant la prop. 16 du livre V , $\frac{ABG}{DEZ} = \frac{LXG}{PZF}$

D'après le lemme ce dernier rapport est le même que celui du prisme P_1, de base LXG , au prisme P'_1 , de base PFZ . Mais P_1 est égal à P_2 et P'_1 à P'_2 donc

$$\frac{LXG}{PZF} = \frac{P_1}{P'_1} = \frac{P_2}{P'_2}$$

Par *permutation* $\frac{P_2}{P_1} = \frac{P'_2}{P'_1}$

Par *addition* , c'est à dire en utilisant une autre règle de calcul sur les proportions établie à la prop. 18 du livre V $\frac{P_2 + P_1}{P_1} = \frac{P'_2 + P'_1}{P'_1}$

Par *permutation* encore, $\frac{P_2 + P_1}{P'_2 + P'_1} = \frac{P_1}{P'_1} = \frac{ABG}{DEZ}$

[1] le signe Σ désigne "la somme des..."

La somme des deux prismes de P est donc à la somme des deux prismes de P' comme la base B de P est à la base B' de P'.
En recommençant le découpage dans les "petites pyramides" dont le rapport des bases OMN et SGT est comme celui des bases B et B', et, en désignant par P_3 et P_4 les prismes de OMN, P'_3 et P'_4 ceux de SGT, on obtient :

$$\frac{\text{prismes de OMN}}{\text{prismes de SGT}} = \frac{P_3 + P_4}{P'_3 + P'_4} = \frac{OMN}{SGT} = \frac{ABG}{DEZ}$$

Avec $\frac{P_2 + P_1}{P'_2 + P'_1} = \frac{ABG}{DEZ}$ et la prop. 12 du livre V on obtient

$$\frac{ABG}{DEZ} = \frac{P_2 + P_1}{P'_2 + P'_1} = \frac{P_3 + P_4}{P'_3 + P'_4} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{P'_1 + P'_2 + P'_3 + P'_4}$$

En continuant ainsi, la somme de tous les prismes de P est donc à la somme de tous les prismes de P' comme B est à B'.

Cependant, s'agissant de deux pyramides de même hauteur, et pour démontrer qu'elles sont entre elles comme leurs bases, Euclide doit faire appel à de nouvelles techniques de raisonnement constituant ce que l'on désigne depuis Grégoire de Saint Vincent par *la méthode d'exhaustion.*

2. 3. la méthode d'exhaustion

Lorsqu'on pense à la méthode d'exhaustion, en particulier au XVIIème siècle, où on la désigne parfois seulement par l'expression *la méthode des Anciens*, on se réfère principalement à Archimède, qui l'a exemplairement utilisée, en particulier pour la quadrature du cercle ou de la parabole. Mais ce type de technique de démonstration aurait été utilisé pour la première fois par Eudoxe, puis par Euclide à plusieurs reprises au livre XII des *Eléments* , et ensuite, par Archimède. Les auteurs grecs cependant n'ont jamais abstrait ce type de raisonnement sous forme d'une méthode autonome, et ce n'est qu'au XVIIème siècle qu'elle sera désignée par l'expression *méthode d'exhaustion* . Contrairement à Euclide, Archimède compare des figures de formes différentes, une aire curviligne et un triangle par exemple, et il établit, par un double raisonnement par l'absurde, l'égalité de ces figures. Euclide ne compare, quant à lui, que des formes analogues, un cercle avec un cercle, une pyramide avec une pyramide,..., et il reste encore dans le cadre de la théorie des proportions.

2. 3. 1. Principes du raisonnement "par exhaustion"

Pour montrer que deux pyramides sont entre elles comme leurs bases, Euclide ne peut obtenir la décomposition de ces pyramides en un nombre fini de pièces égales ou semblables; le découpage semble devoir se prolonger indéfiniment. Au Vème siècle avant J.C., les théories atomistes qui tendaient à considérer une grandeur comme un agrégat d'indivisibles sont très vivement attaquées par les Eléates, dont Parménide et son disciple Zénon. Ils s'opposent à l'hypothèse d'une ligne indivisible: conçue sans longueur, un nombre infini de telles lignes n'aurait pas de longueur; si elle avait une longueur, un nombre infini de telles lignes aurait une longueur infinie. Il me semble que le paradoxe sur la dichotomie[1], le premier des quatre célèbres paradoxes exposés par Zénon, met à jour, en particulier combien il est difficile de saisir une grandeur par le biais de l'infinité de ses parties. La réponse d'Aristote, qui sera dominante dans la pensée grecque, et même dans la pensée occidentale pendant presque deux millénaires, est dictée par le "bon-sens". Il refuse ce qui dépasse la compréhension, il refuse l'idée de grandeur infinie, n'acceptant que l'infini potentiel: "il est toujours possible de penser un nombre plus grand". Les grandeurs, par contre peuvent être divisées à l'infini. C'est ce qui caractérise sa conception du continu: par continu, il entend ce qui est divisible en parties divisibles indéfiniment divisibles.[2] La mathématique grecque élabore donc un moyen d'aborder le continu géométrique en termes de divisions successives, mais dont le nombre sera fini. Il n'y a pas de fin à la divisibilité de la pyramide, mais le raisonnement mené par Eudoxe, puis Euclide, contournera la difficulté en ne cherchant pas à mener à bout la division. Une grandeur ne sera considérée qu'à l'aide d'un nombre fini de grandeurs de même nature (et en particulier une surface à l'aide de surfaces, un solide à l'aide de solides). Enfin les grandeurs ne seront considérées que par l'intermédiaire de leurs rapports.

Euclide ne peut montrer ici des égalités de solides; il ne manipulera donc que des inégalités $\frac{V}{V'} < \frac{B}{B'}$ ou $\frac{V}{V'} > \frac{B}{B'}$. Pour obtenir l'égalité souhaitée, il introduira un raisonnement par l'absurde. Il mesure et fait diminuer l'écart entre les grandeurs comparées, jusqu'à pouvoir faire jouer une contradiction.

C'est la proposition 1 du livre X des *Eléments* qui permet de faire diminuer autant que nécessaire l'écart entre les deux grandeurs, moment essentiel de la méthode, véritable retournement du paradoxe de Zénon sur la dichotomie: "Deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié et si l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs données". Cette proposition joue un rôle analogue à celui que joue pour nous l'idée de limite. Elle repose sur l'hypothèse que les grandeurs étudiées sont archimédiennes, ce qu'Euclide explicite à la définition 5 du livre V

[1] Ce paradoxe met en question l'idée qu'un mouvement soit possible, puisque "le mobile transporté doit d'abord parvenir à la moitié avant d'accéder à son terme;" puis au milieu de la distance restante, et ainsi à l'infini... Aristote, *Physique* , Livre VI

[2] Aristote *Physique* , III, 207 b.

"Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement."

C'est pour pouvoir faire usage de cette proposition qu'Euclide, dans la deuxième partie de la proposition 4, XII, a montré que la réunion des deux prismes découpés dans la pyramide est plus grande que la moitié de la pyramide. Les petites pyramides restantes, dont la réunion vaut moins que la moitié de la pyramide initiale, seront encore découpées de la même façon, et en répétant l'opération suffisamment de fois, il restera un solide aussi petit que nécessaire.

L'hypothèse de travail du raisonnement par l'absurde s'exprime aussi dans le langage des proportions: elle équivaut à $\frac{V}{V'} < \frac{B}{B'}$ condition qu'il exprime en supposant qu'il existe un solide X plus petit que V' vérifiant $\frac{V}{X} = \frac{B}{B'}$ (avec $X < V'$). On peut remarquer qu'Euclide suppose, ici, l'existence d'une quatrième grandeur proportionnelle à B, B' et V, propriété qu'il n'a pas démontrée ou postulat qu'il n'a nulle part explicité. C'est encore une des caractéristiques de la méthode d'exhaustion euclidienne. Au livre VI (proposition 12), Euclide montre qu'étant données trois lignes, on peut en construire une quatrième qui rendent les quatre lignes proportionnelles. Mais il ne fait pas de travail analogue pour trois surfaces, ou trois solides.

2. 3. 2. La méthode d'exhaustion appliquée au volume de la pyramide

C'est dans la démonstration de la proposition 5, où Euclide établit que deux pyramides P et P' de même hauteur sont dans le même rapport que leurs bases B et B', qu'on voit à l'oeuvre la méthode par exhaustion.

Euclide découpe la pyramide P' en deux prismes et deux pyramides, puis divise les nouvelles pyramides en deux prismes et deux pyramides et ainsi de suite ...(cf. fig.13). A chaque étape, le volume des pyramides ainsi obtenues est inférieur à la moitié du volume des pyramides de l'étape précédente[1] (cf la deuxième partie de la proposition 3). Euclide peut donc faire usage de la proposition 1 du livre X, jusqu'à ce qu'il reste de la première grandeur V' une grandeur plus petite que la deuxième, la plus petite, la différence V'-X.

Euclide répète le découpage de la pyramide jusqu'à presque l'*épuiser* à l'aide de prismes seulement. A une certaine étape, le volume de la réunion des petites pyramides qui, d'autre part, est égal à V'- Σ prismes de P', est inférieur à la grandeur V'- X.

---

[1] Contrairement à Euclide et pour plus de simplicité d'exposition, je distingue, dans les notations, la pyramide P et son volume V. Pour Euclide, les pyramides sont considérées comme des grandeurs.

Donc le volume restant dans la pyramide, c'est à dire celui des prismes construits à l'intérieur de la pyramide P', (Σ prismes de P') , est supérieur au volume X. On a l'inégalité (i): Σ prismes de P' > X .

Si on effectue le même découpage de la pyramide P en prismes et pyramides, on obtient, grâce à la proposition 4 ci-desssus, et à l'hypothèse du raisonnement par l'absurde $\frac{\Sigma \text{ prismes de P}}{\Sigma \text{ prismes de P'}} = \frac{B}{B'} = \frac{V}{X}$

donc, par permutation: $\frac{\Sigma \text{ prismes de P}}{V} = \frac{\Sigma \text{ prismes de P'}}{X}$

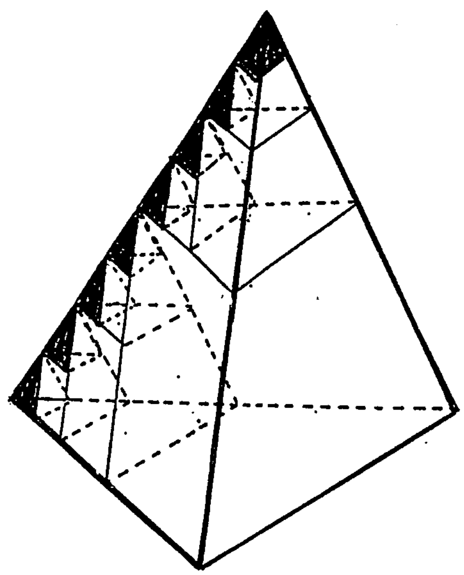


fig. 14

Les prismes de P sont inclus dans P, donc Σ prismes de P > V ; on obtient aussi l'inégalité : (i') Σ prismes de P' < X , contradictioire avec l'inégalité (i).

Puisqu'il a raisonné sur des rapports de grandeurs de même nature, Euclide, pour montrer que la supposition $\frac{V}{V'} > \frac{B}{B'}$ est tout autant à rejeter, peut en quelque sorte inverser les rôles des deux pyramides P et P' et mener rapidement le même type de raisonnement[1].

La démonstration d'Euclide est longue et complexe, mais elle ne sera jamais critiquée sur le plan de la rigueur. Elle sera très longtemps considérée comme un modèle, comme on le verra dans la suite de l'étude; les concepts qu'elle met en jeu seront les matériaux à l'aide desquels travailleront les mathématiciens.

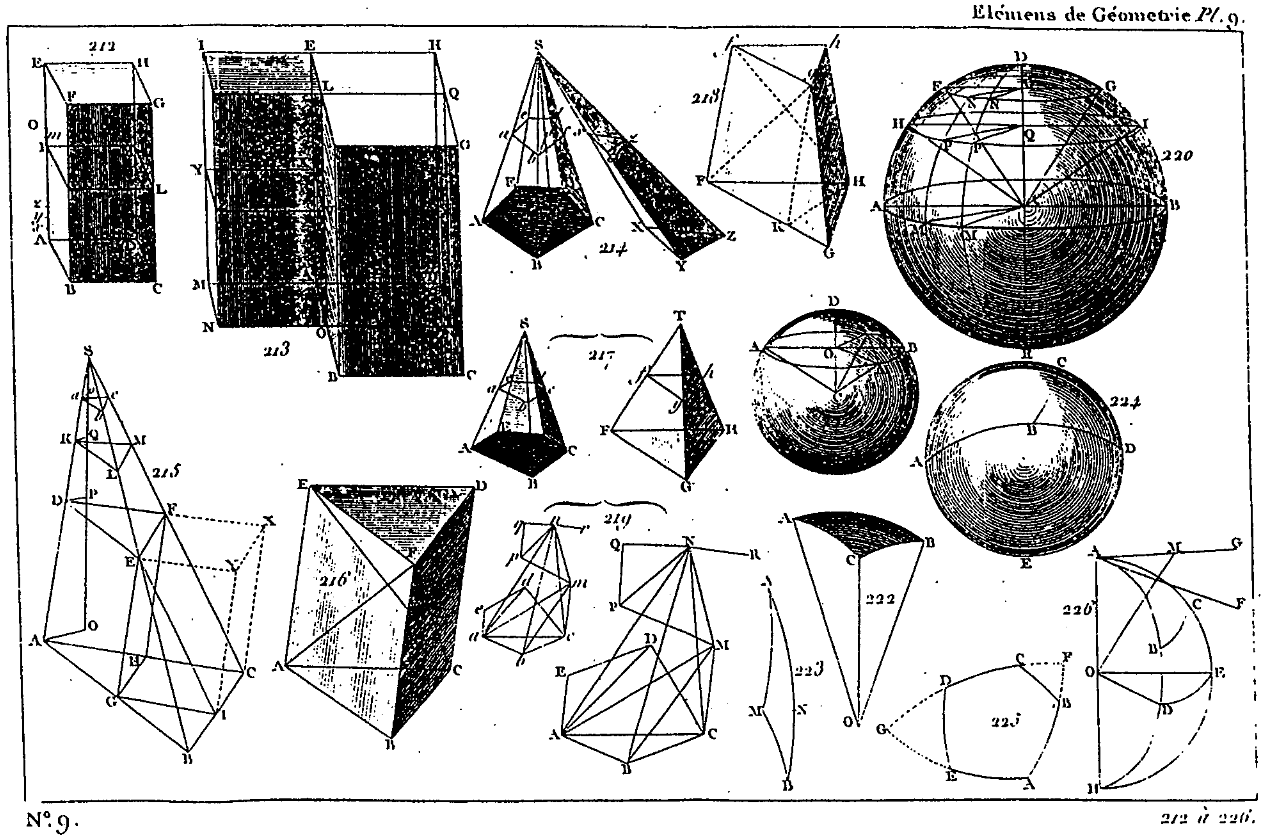


Planche des *Eléments de Géométrie* de Legendre, 1794

1 Euclide suppose l'existence d'un solide de volume X plus grand que V vérifiant $\frac{X}{V} = \frac{B}{B'}$; il déduit qu'il existe un solide du volume W tel que $\frac{B}{B'} = \frac{X}{V} = \frac{V'}{W}$ et W<V . On est ramené à la même situation que plus haut (a), une fois échangés les rôles de P et P'.

3 . La méthode chinoise

Il est difficile de savoir si les civilisations chinoises du début de notre ère avaient une quelconque connaissance de la science grecque; on sait seulement qu'elles entretenaient quelques relations avec les empires séleucides, héritiers hellénistiques des civilisations grecques. Il est très intéressant de confronter les méthodes chinoises de calcul de volumes, en particulier de calcul des volumes des pyramides avec les méthodes grecques: on trouve certaines parentés, mais les conceptions fondamentales diffèrent profondément.

3. 1 . Les méthodes manipulatoires de la Chine ancienne

Contrairement aux traités grecs, les traités chinois, depuis le début de notre ère et peut-être même avant, donnent des formules d'aires ou de volumes. Les preuves, qui ne sont pas toujours présentées, utilisent les procédés d'empilement de pièces. La géométrie chinoise repose de façon importante sur la manipulation d'objets matériels analogues à des pièces de puzzles ou de jeu de construction spatiale, et sur le principe que l'aire ou le volume ne change pas si on dispose les pièces de deux manières différentes. "Les figures (prennent des allures) étranges, mais les nombres (qui mesurent les aires ou les volumes) restent égaux", écrit Liu Hui, reprenant, au IIIème siècle après J.C., un texte du premier siècle après J.C., _Neuf chapitres sur l'art du calcul_ [1]. Ce traité est l'un des plus anciens textes mathématiques chinois qui nous soient parvenus et l'ouvrage classique par excellence auquel de nombreux auteurs de la tradition mathématique chinoise, mais aussi japonaise, coréenne, vietnamienne se réfèrent; c'est le manuel d'enseignement obligé (un peu comme, en Occident, les _Eléments_ d'Euclide). L'aire d'une figure plane rectiligne est calculée après avoir disséqué la figure de manière à pouvoir recomposer un rectangle. Les volumes sont évalués en utilisant des blocs de bois, de formes et de dimensions standards, que l'auteur et le lecteur devaient avoir en mains. Souvent les manipulations sont faites avec des pièces de dimensions particulières, mais l'auteur signale, quand c'est le cas, si les formules trouvées sont valables pour des dimensions arbitraires.

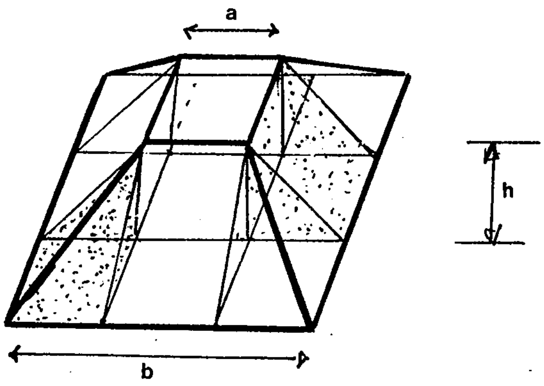
Liu Hui procède par exemple de la manière suivante pour évaluer le volume du "pavillon carré" (les dimensions sont indiquées sur la figure 15). Le pavillon est

---

[1] On trouve des traductions partielles et des commentaires des chapitres des _Neuf chapitres sur l'art du calcul_ concernant les calculs de volumes de pyramides dans les deux articles de Wagner cités en bibliographie.

décomposé en neuf pièces élémentaires (blocs de bois, peut-être, de dimensions standards que l'auteur et le lecteur devaient avoir en mains).

fig. 15



Comme leur simple empilement n'est pas suffisant pour résoudre le problème, Lui Hui imagine de calculer le volume du triple du pavillon carré. Assemblant ainsi vingt-sept pièces de façon à former trois pavés dont il peut évaluer les volumes : abh, a^2h et b^2h. Il obtient donc $V = \frac{1}{3}(abh + a^2h + b^2h)$

Le "cube" central a pour volume a^2h (cf. fig. 16); en assemblant le "cube" central et quatre prismes, on obtient un pavé de dimensions a, b, et h (cf. fig. 17); le "cube" central, huit prismes puis les douze petites pyramides assemblées trois par trois pour former un cube et placées à chaque coin forment un pavé de volume b^2h (cf. fig. 18). Remarquons que ces assemblages ne *s'emboîtent* bien que dans le cas où a = b = h. Liu Hui a cependant conscience que l'algorithme de calcul est applicable pour d'autres cas, puisqu'il effectue, selon ce modèle, des calculs de volumes pour des cas de dimensions différentes. Il propose d'ailleurs une autre démonstration de cet algorithme, qui utilise une autre décomposition du pavillon carré, mettant en jeu la formule du volume de la pyramide étudiée ci-dessous[1].

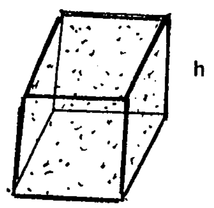


fig. 16

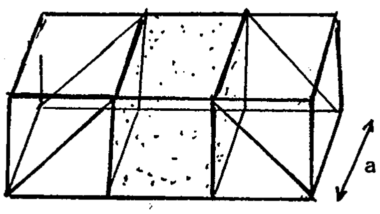
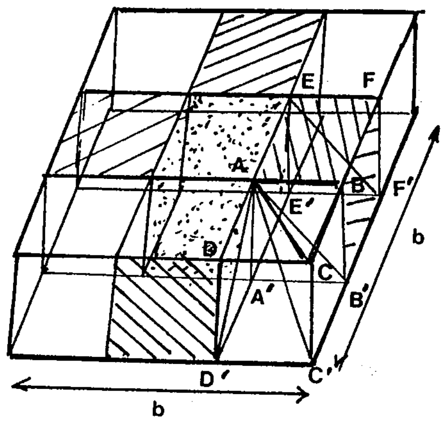


fig. 17

[1] Voir à ce sujet K. Chemla De l'algorithme comme liste d'opérations in Extrême Orient, Extrême Occident.

fig. 18



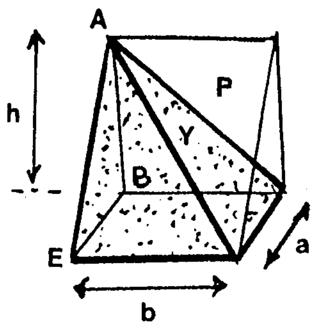
3.2. le volume du Yang-ma

Dans les *Neuf chapitres sur l'art du calcul*, on trouve aussi le calcul du volume d'une pyramide[1]. La pyramide étudiée est à base rectangulaire et une arête est perpendiculaire à la base. Elle est appelée Yang-ma.

Le principe du calcul est le suivant: Pour calculer le volume Y de la pyramide Yang-ma, on la complète par un tétraèdre (Pien-nao) de volume P de manière à obtenir un prisme triangulaire dont la base AEB est la moitié d'un rectangle. Le volume C d'un prisme ($C = \frac{1}{2}abh$) a été calculé auparavant. On a donc $C = Y + P$ et Lui Hui montre que $Y = 2P$ et obtient donc:

$$Y = 2P = \frac{2C}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{abh}{2}\right) = \frac{abh}{3}.$$

fig. 19



Remarquons qu'on pourrait écrire alors $C = 3P$. La pyramide triangulaire P est le tiers du prisme de même hauteur construit sur la même base; mais ce n'est pas ce qui semble intéresser Lui Hui, qui s'est proposé de calculer Y.

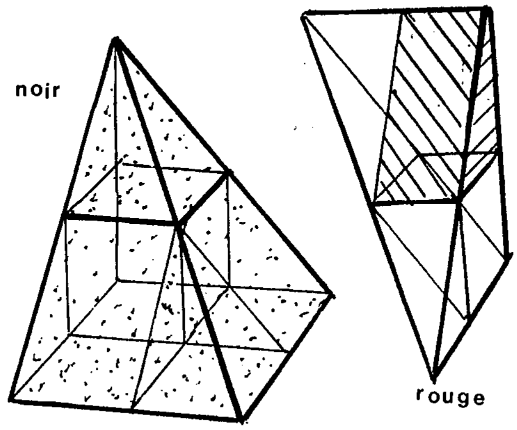
---

[1] On trouve une traduction en langue anglaise et un commentaire de l'extrait correspondant des Neuf chapitres sur l''art du calcul, dans Wagner , 1979 . J'en extrais quelque passages dans les textes ci-joints. Une traduction en français des *Neuf chapitres sur l'art du calcul* par et K. Chemla et Shuo Gun est en préparation.

Démonstration de la formule Y = 2P:

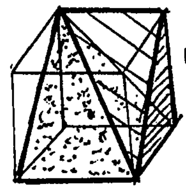
Lui Hui découpe les deux pièces Yang-ma et Pien-nao par les milieux des arêtes[1]. Il obtient ainsi dans le Yang-ma (pyramide rectangulaire), un parallélépipède rectangle, deux prismes et deux pyramides rectangulaires et dans le Pien-nao (pyramide triangulaire) deux prismes et deux pyramides triangulaires. Le volume de la réunion des deux prismes et du parallélépipède du Yang-ma est le double du volume des deux prismes du Pien- nao.

fig. 20



- Il est facile à Lui Hui de prouver cette relation dans le cas d'une pyramide Yang-ma ayant ses trois dimensions égales (a = b = h), comme c'est le cas dans la figure 21 où Yang-ma et Pien-nao forment la moitié d'un cube. Dans ce cas on peut accoler deux pièces comme le bloc P pour former le bloc Y.

fig. 21



- Si les dimensions ne sont plus les mêmes, les pièces noires en forme de prisme en s'accolant ne forment plus un parallélépipède. Mais Lui Hui vérifie que le volume de chacun des deux prismes est d'une manière différente, la moitié du volume d'un

[1] On notera la coïncidence avec le découpage euclidien.

parallélépipède de dimensions a/2 , b/2 , et h/2 . Il admet en particulier, sans le dire explicitement, que deux pièces symétriques ont même volume.

Liu Hui, qui vraisemblablement possède des blocs noirs pour composer le Yang-ma et des blocs rouges pour le Pien-nao, exprime cette propriété par l'énoncé: les volumes noirs sont doubles des volumes rouges.

Il lui reste à montrer que pour les pièces noires et rouges restantes, le rapport est le même. Or il reste deux petites pyramides noires dans le Yang-ma et deux petites pyramides rouges dans le Pien-nao , qui ont chacune la même forme que les pyramides initiales dans lesquelles elles ont été découpées, mais plus petites. Lui Hui refait donc dans chacune de ces pyramides le même type de découpage ; il obtient des prismes noirs (de la pyramide rectangulaire) et des prismes rouges (de la pyramide triangulaire) dont le rapport des volumes est encore 2. Lui Hui recommence ces découpages jusqu'à ce que les volumes restants soient "si petits qu'ils aient perdu forme". Il dit en substance : "les dimensions des morceaux restants sont de plus en plus petites. Ce qui a des dimensions extrêmement petites n'a plus de forme, pourquoi s'en inquiéter?"

On remarquera la différence entre la démarche chinoise qui néglige le petit excès de la pyramide par rapport à l'empilement des prismes et la démarche grecque qui cherche à maîtriser ce petit excès par un encadrement. Les positions de Liu Hui sur l'infini diffèrent grandement des positions de la science grecque. Environ un siècle après Zénon, l'école nominaliste chinoise s'était posé le même genre de questions, énonçant de nombreux paradoxes portant sur les questions de continu, d'infini, de division continue et de reconstruction du fini à partir d'une infinité de parcelles. "Si l'on coupe tous les jours un bâton d'un pied de long, il y aura toujours quelque chose à couper au bout de dix mille générations" . " Ce qui n'a pas d'épaisseur ne peut être empilé mais peut couvrir un millier de lis de surface."[1] Cependant contrairement aux philosophes de la Grèce antique, dont les interrogations exercèrent une profonde influence sur les développements de la science et des mathématiques en particulier, les mathématiciens chinois, principalement préoccupés de problèmes concrets, ne furent pas des figures dominantes de la société, et ils développèrent des méthodes pragmatiques pour éviter ces difficultés.

D'autre part, les mathématiques chinoises sont sans doute influencées aussi par la pensée taoïste qui proclame vigoureusement l'impossibilité de communication par la voie du discours, par la dialectique."Ne parlez pas, exprimez-vous sans parler! Tel a parlé toute sa vie qui n'a rien dit "[2] Là encore, on remarque la différence avec la

---

[1] Hui Shi, cité par J. Dhombres, in Nombre, mesure et continu , Cedic Nathan, Paris, 1978, p. 291
[2] Zhuang-Zi , cité par J. Dhombres, ibid. p.290

Grèce des cités, où le discours régnait en maître. Le mathématicien chinois manipule, montre plutôt qu'il ne démontre. L'exemple de ces développements mathématiques très élaborés, mais sur des voies plus pragmatiques, met, par opposition, encore plus en évidence, le caractère très spéculatif des développements mathématiques de la Grèce antique.

GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
F. BONAVENTVRA CAVALERIO MEDIOLAN.
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr.
Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore.
AD ILLVSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. IOANNEM CIAMPOLVM

Coll.ii Soc. Jesu Math.ci Cat.lo adscriptus

BONONIÆ, Typis Clementis Ferronij. M. DC. XXXV. Superiorum permissu.

4. Du Moyen-âge aux méthodes des indivisibles

4. 1. Le moyen-âge. Nicolas Chuquet

Au moyen-âge[1], des recherches mathématiques se développeront dans le monde arabe. Les savants de langue arabe reprennent, traduisent et prolongent les grands textes grecs, surtout jusqu'au XVème siècle. Pour ce qui est des calculs d'aires et de volumes, les arabes reprendront de façon parfois plus libre, le procédé par exhaustion. Ils obtiendront de nouveaux résultats, par exemple des volumes de solides de révolution. Je n'ai cependant pas trouvé d'exemple de reprise de calcul de volume de pyramide.

Le moyen-âge occidental n'a d'abord pas de contact direct avec les textes de la géométrie grecque. Jusqu'au XIIème siècle, seuls quelques traités élémentaires reprennent, en latin, une partie des traités grecs, en général sans les démonstrations. A partir du XIIème siècle circuleront quelques traductions plus complètes des oeuvres grecques. Certains mathématiciens[2] entretiendront des discussions sur la nature des grandeurs continues, les indivisibles, l'infini, soutenant éventuellement des positions qui s'éloignaient de la pensée scholastique héritière d'Aristote. Sera introduit le concept de variation, seront calculées des sommes de séries infinies, mais je n'ai trouvé aucune trace de ces réflexions originales dans les énoncés concernant les volumes de pyramides. Le petit extrait, cité plus loin, de _La Géométrie_ de Nicolas Chuquet, de 1484, donne l'exemple d'un ouvrage où on consigne les principaux résultats énoncés par les _Eléments_ d'Euclide sans chercher à reprendre leurs démonstrations. _La Géométrie_ de Chuquet, le premier traité de géométrie en langue française, est un ouvrage de géométrie pratique, comme la plupart des traités de géométrie du Moyen-âge, s'intéressant à l'étude des instruments tels l'astrolabe et le quadrant et proposant de petits problèmes portant sur des figures planes, des calculs d'aires ou de volumes. L'extrait cité est suivi d'autres calculs de volumes apparentés: autres pyramides, cônes, troncs de pyramides...

4. 2. Vers des méthodes par les indivisibles

On a vu que dans l'Antiquité grecque, la théorie des proportions et la méthode d'exhaustion ont permis de résoudre les problèmes de comparaison d'aires et de volumes sans avoir besoin de faire appel ni à des idées d'indivisibles, ni à l'idée

[1] Je serai brève sur cette longue période que j'ai peu étudiée.
[2] Les plus marquants sont: Bradwardine, R. Suiseth dit Calculator, N. Oresme, N. de Cuse, ...

d'infini. Archimède pourtant, comme on l'a découvert dans le traité *De la Méthode* , redécouvert au début du vingtième siècle, avait eu recours à des découpages de surfaces et de solides en fines lamelles; il considérait cependant que ce procédé était efficace pour découvrir les résultats mais non pas valable pour les démontrer. Pendant le moyen-âge les discussions sur les concepts d'infini et d'infiniment petits, les discussions sur la nature du continu reprennent. Il y a des tenants de l'existence des indivisibles, sur des positions parfois plus grossières que celles de Démocrite: Capella, Isidore de Séville, Bède pensaient que le temps était composé d'instants indivisibles. Ainsi une heure contenait 22560 instants[1]. Bradwardine soutenait, lui, qu'une grandeur continue, quoique contenant une infinité d'indivisibles, n'est pas constituée d'atomes. "Nullum continuum ex indivisibilibus integrari vel componi"; il affirme qu'une grandeur continue est composée d'une infinité de continus de même nature[2]. La fin du moyen-âge voit circuler de nouvelles traductions plus complètes des grands textes grecs, et renaît une exigence de précision dans les démonstrations, à l'image de celles d'Euclide et d'Archimède. Commandino, qui a traduit de nombreux traités grecs, poursuit les recherches des anciens sur les centres de gravité et on retrouve dans son *Liber de centro gravita Solidorum* de 1565, la méthode d'exhaustion utilisée tout à fait à la manière d'Archimède. L'ingénieur flamand Stevin apportera sur ce sujet non seulement beaucoup de résultats nouveaux, mais une certaine liberté par rapport au carcan de la méthode d'exhaustion. Il se contentera souvent d'une seule démonstration directe, sans vérifier son résultat par la double démonstration par l'absurde. Il n'utilise qu'une figure inscrite et pas, comme Archimède, de figure circonscrite. Il s'assure seulement que, par une suite de divisions successives poussées aussi loin que nécessaire, la différence entre la figure étudiée et la figure inscrite peut être rendue, plus petite que toute quantité donnée. Ce n'est pas le volume de la pyramide qu'il étudie, mais son centre de gravité[3]. Au tout début du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, Valerio tentera de systématiser ces procédures qui permettent d'utiliser le raisonnement par exhaustion de façon plus concise. Képler s'inspire de Nicolas de Cuse, qui considérait par exemple le cercle comme la réunion d'une infinité de triangles de sommet commun le centre du cercle, pour calculer de façon analogue de nombreux volumes. Il a considéré les cylindres ou les cônes comme composés d'une infinité de tranches circulaires, ou composés d'une infinité de portions issues de l'axe dont la forme est comme celle d'une fine tranche de gâteau, ou d'autres types de sections verticales ou obliques[4]. Les éléments infinitésimaux de Képler semblent

---

[1] P. Tannery *Sur la division du temps en instants au Moyen-âge.* Bibliotheca mathematica (3) , VI, 1905, p.111

[2] Boyer *The history of calculus* p. 67

[3] Stevin *la Statique* ACL Editions

[4] Kepler *Nova Stereometria Opera omnia* , IV , p. 564, 568, 576

sont conçus comme des petites surfaces ou des petits solides, figures de même dimension que la figure qu'ils composent, surface ou solide. En même temps il semble ne pas reconnaître de réelle frontière entre une aire infinitésimale et une ligne, entre le fini et l'infini, de même qu'il postule une sorte de continuité entre une ellipse et une parabole.

Cependant, c'est Bonaventura Cavalieri qui va donner à ce genre de méthode le statut d'une véritable théorie, construite sur des principes clairement explicités, à partir desquels se développeront diverses procédures que l'on réunit sous l'appellation "méthode des indivisibles".

4. 3. Les principes de la première méthode des indivisibles de Cavalieri

Cavalieri fait paraître en 1635 sa *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* , (la Géométrie au moyen des indivisibles des continus, développée par une méthode nouvelle) et, en 1647, les *Exercitationes geometricae sex.*. Pour faire comprendre sa méthode, Cavalieri écrira qu'on peut imaginer qu'une ligne est formée d'un nombre infini de points (comme un collier de perles), qu'un solide est formé d'un nombre infini de lignes (comme un tissu de fils) et qu'un solide est formé d'un nombre infini de surfaces (comme un livre de pages)[1]. Mais ceci n'est qu'une métaphore, à intention pédagogique. Cavalieri écrit par exemple à Galilée: "Pour moi, je ne me suis pas risqué à dire que le continu soit composé d'indivisibles[2].." Contrairement à de nombreux mathématiciens et philosophes qui l'ont précédé et contrairement à Galilée, Cavalieri ne prend pas position sur la nature du continu, sur l'infini et l'existence des indivisibles[3]. Il n'utilise pas le terme d'indivisible dans les énoncés ou les démonstrations des propositions de la *Géométrie* comme des *Exercitationes;* le terme n'apparaît que dans les titres, les commentaires. Il n'en donne pas vraiment une définition. Il utilise plutôt les indivisibles comme un outil, qui a disparu à la fin du calcul, comme Cardan utilisait les imaginaires pour résoudre des équations du troisième degré[4]. Pour Cavalieri, les indivisibles ne

---

[1] Cavalieri B. *Exercitationes geometriae sex*, p.3

[2] Lettre de Cavalieri à Galilée, 21 juin 1639, Ed. nazionale, Florence 1890-1909, cité par F. de Gandt , Fragments d'histoire des mathématiques, APMEP 1987

[3] *Exercitationes* p. 203

[4] *Exercitationes* p. 202-203 "Hic enim perinde sit ac apud Algebricos, qui nescientes; quae sit quam dicunt Radicem, Latus, aut Cossam, seu quales ineffabiles radices, tamen easdem multiplicantes, dividentes & denique in quaesitii inventionem quasi per has obscuras ambages manuducuntur."

la figure, ils sont seulement le produit du découpage de cette figure à l'aide d'une "règle"[1] bien précise.

Dans le plan une figure doit être entourée par deux droites parallèles et la *"règle"* est une l'une de ces droites que l'on fait glisser vers l'autre en conservant sa direction. Elle prendra toutes les positions intermédiaires entre la position initiale et la position finale. Cavalieri considère alors ce qu'il désigne par "toutes les lignes" de la figure, qui est comme la collection, l'agrégat de toutes les lignes. Dans l'espace, Cavalieri entoure le solide entre deux plans parallèles, il fait glisser un plan vers l'autre qui reste fixe ; il s'intéresse aux figures planes découpées sur ce plan par le solides, dont la collection constitue "tous les plans" du solide. Il faut remarquer que l'idée du mouvement de la règle est à la base de la théorie. Sa méthode s'appuie ensuite sur deux postulats que Cavalieri précise dans les premiers énoncés du livre II de la *Géométrie.*

- Si deux figures ont même aire, "toutes leurs lignes" sont égales, quelle que soit la *règle* utilisée (il faut entendre collectivement l'expression "toutes les lignes"). De même, si deux solides ont même volume, "tous leurs plans" sont égaux.
- Des figures ont entre elles la même raison qu'ont toutes leurs lignes, des solides ont entre eux la même raison que tous leurs plans. Ce principe est précisé : "Pour découvrir la raison de deux figures planes ou de deux solides, il nous suffit dans une figure plane de trouver la raison qu'ont entre elles toutes les lignes des figures, et dans les solides de trouver quelle raison ont entre eux tous leurs plans."[2]

Cavalieri introduit donc un nouveau concept, celui de "toutes les lignes" ou de "tous les plans" d'une figure, concept qui caractérise cette première méthode des indivisibles, qu'on a souvent, à tort, confondu avec l'idée d'une *somme* des lignes ou des plans de la figure. Ce concept peut être considéré comme un nouvel outil pour, entre autres, mesurer les figures.

---

1 Je garde volontairement l'ambiguité du mot *règle* : il désigne à la fois le dispositif (la droite ou le plan qui se déplace) et la convention à respecter.
2 *Geometria degli indivisibili,* traduction italienne p. 200

4. 4. Cavalieri et l'axiomatique euclidienne

Il faut remarquer que Cavalieri veut présenter une construction systématique et une théorie rigoureusement fondée; le modèle des *Eléments* d'Euclide reste une référence honorée sinon tout à fait fidèlement imitée. La forme d'abord se rapproche de celle d'Euclide, avec un enchaînement de définitions, de propositions qui renvoient les unes aux autres quand c'est nécessaire[1]. Et surtout, Cavalieri continue de se placer dans le cadre euclidien de la théorie des proportions. Les figures planes et solides sont des grandeurs au sens du Livre V des *Eléments* . Cavalieri postule de plus que "toutes les lignes" d'une figure (ou "tous les plans"), pensés collectivement, constituent aussi une grandeur. Il énonce dès le début du Livre II: "toutes les lignes d'une figure, prises selon une règle quelconque, et tous les plans d'un solide sont des grandeurs qui ont une certaine raison entre elles."[2] Cavalieri se réfère donc à la définition 5 du Livre V des *Eléments* , selon laquelle deux grandeurs peuvent être comparées (ou avoir une certaine raison entre elles), si multipliées, elles peuvent se surpasser mutuellement. Cavalieri était pourtant inquiet du saut qu'il faisait en étendant la notion de grandeur d'une ligne à toutes les lignes d'une figure, comme en témoigne la lettre à Galilée du 15 décembre 1621: "Je voudrais savoir si toutes les lignes d'un plan ont une certaine proportion à toutes les lignes d'un autre plan, parce que comme on en peut toujours tirer plus, il semble que toutes les lignes d'une figure donnée soient infinies, et ainsi soient exclues de la définition des grandeurs qui ont une proportion entre elles; mais puisque d'autre part, si l'on agrandit la figure, les lignes aussi se font plus grandes, comme il y a alors celles de la première figure et en plus celles qui sont dans l'excès de la figure agrandie sur la figure donnée, il semble que ces lignes ne soient pas exclues de la définition (des grandeurs entre lesquelles il y a proportion): aussi désirè-je que vous me délivriez de cette incertitude."[3] Il semble que Galilée n'ait jamais répondu à Cavalieri sur ce point. Dans les *Discours sur deux sciences nouvelles*, Salviati explique pourtant à Simplicio que des infinis "ne peuvent être dits plus grands, plus petits ou égaux à d'autres (infinis)". Dans la proposition 1 du Livre II, Cavalieri va pourtant démontrer que "toutes les lignes de deux figures peuvent mutuellement se surpasser." Il s'agit, dans cette partie du raisonnement, de

---

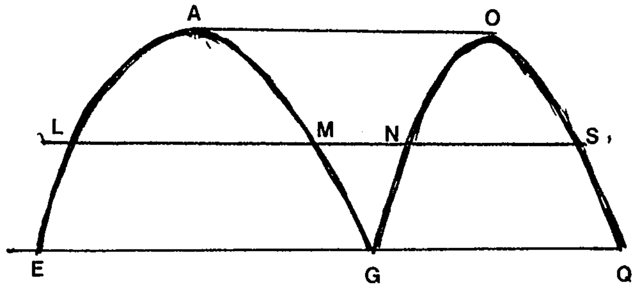
1 Ces renvois n'ont malheureusement pas été repris par la traduction italienne.

2 *Geometria indivisibilibus* , Livre II, prop. 1

3 *Opere di Galileo Galilei* , Edizione nazionale vol XIII . Florence p. 81 cité et traduit par F. de Gandt, APMEP, n°67 1987, p.102 et *Geometria degli indivisibili* , p.727-728 :
"Pare che tutte le linee d'una figura sieno infinite, e pero fuor della diffinitione delle grandezze che hano proportione. ... Ma perchè poi, se si aggrandisse la figura, anco le linee si fano maggiori, essendovi quelle della prima et anco quelle di piu che sono nell'eccesso della figura fatta maggiore sopora la data, pero pare che non sieno fuaro di quella diffinitione."

deux figures ayant la même hauteur et donc placées entre les mêmes parallèles. (cf. fig. 22)

fig. 22



"Si la droite NS est plus petite que la droite LM, elle peut, si on la prolonge indéfiniment devenir à un moment plus grande que cette dernière; si nous supposions que cela est fait pour toutes les autres lignes qui sont à même distance des règles EG et GQ, il est clair que chacune des lignes qui sont dans la figure GOQ deviennent étant prolongées, plus grandes que celles qui sont dans la figure AEG. Il est donc clair que toutes les lignes de la figure AEG seront une partie de toutes les lignes de la figure GOQ ainsi prolongées; ces dernières seront donc le tout, puisque les premières sont incluses dans les dernières. Or le tout est plus grand que la partie; donc toutes les lignes de la figure GOQ ont été prolongées de telle sorte qu'elles ont été rendues plus grandes que toutes les lignes de la figure EAG... Donc il est clair que toutes les lignes des figures EAG et GOQ ont un rapport entre elles." [1]

Remarquons que la théorie euclidienne a établi, à la proposition 12 du livre V, que ,

$$\text{si} \quad \frac{l_1}{L_1} = \frac{l_2}{L_2} = \ldots\ldots = \frac{l_n}{L_n} \qquad \text{alors,} \qquad \frac{l_1}{L_1} = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{L_1 + L_2 + \cdots + L_n}$$

(je traduis dans nos notations) ; cependant la proposition n'a jamais été établie, ni utilisée pour un nombre infini de grandeurs.

D'autre part, la démonstration de Cavalieri repose, entre autres, sur la notion commune "le tout est plus grand que la partie", dont même on sait bien, depuis Dedekind, que sa négation caractérise les ensembles infinis. Déjà Galilée avait remarqué que les entiers pairs pouvaient être mis en correspondance un à un, avec, par exemple, tous les carrés parfaits, et comme je l'ai déjà rappelé, qu'un infini ne

---

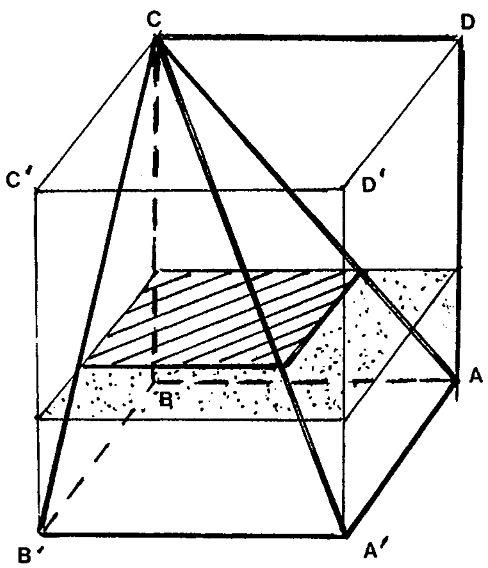
1 Geometria indivisibilibus , Livre II , prop. 1

pouvait être comparé à un autre infini. Mais ces idées ne sont pas beaucoup plus développées et ce n'est qu'au XIXème siècle qu'on en tirera les conséquences.

4. 5. Le "trésor" de Cavalieri

Par cette méthode des indivisibles - qu'on devrait plutôt désigner par la méthode de "toutes les lignes" - Cavalieri montre que "tous les carrés" du parallélogramme sont égaux à trois fois "tous les carrés" du triangle ABC[1]. La figure 23 met en évidence que cette relation équivaut, avec le principe du découpage d'un solide par des plans parallèles, à établir que le volume de la pyramide à base carrée CABB'A' est le tiers du prisme ABB'A'D'DCC'. Le résultat n'est pas nouveau, c'est celui d'Euclide , et Cavalieri considère que cette concordance apporte une preuve de la validité de sa méthode. Cependant, "tous les carrés d'une figure" est encore un concept nouveau, différent de celui de "tous les plans d'un solide", mais le lien entre les deux sera fait à la proposition 33 du livre II. Cavalieri poursuit sa démarche dans les *Exercitationes* et compare "tous les cubes" du parallélogramme et du triangle, puis "toutes les puissances quatrièmes", puis cinquièmes,... jusqu'aux neuvièmes puissances des lignes du parallélogramme et du triangle.

fig. 23



Cavalieri est très fier de ses résultats. Voici comment il raconte sa découverte, dans l'introduction de l'*Exercitio quarta*: "Parmi les problèmes que le très subtil Képler proposa aux recherches des mathématiciens, les plus fameux sont relatifs à la mesure des deux solides qu'il a nommés, dans sa *Stereometria doliorum* , fuseaux

[1] *Geometria indivisibilibus* , Livre II , prop. 24 ou *Exercitio Quarta* , prop. 20

parabolique et hyperbolique, (...). Comme un jour, que labourant du soc de mon intelligence le champ de la science, je réfléchissais à ce genre de mesure, il advint que contre toute attente je tombai sur un trésor, à mon avis beaucoup plus précieux que la mesure de ces solides qui me préoccupait si fort. (...) C'est néanmoins le fuseau parabolique auquel je réfléchissais surtout. Je remarquai qu'il était possible de trouver sa raison, à condition qu'étant donné un parallélogramme quelconque et sa diagonale, et qui prenant arbitrairement pour règle un de ses côtés, on connut la raison de la somme des carrés-carrés du parallélogramme, à la somme des carrés-carrés faits sur les segments déterminés par l'un quelconque des deux triangles. Cherchant donc cette proportion, je trouvai qu'elle était quintuple. Rapprochant ensuite ce résultat de ceux du Livre II de ma *Géométrie*, je me rappelai que dans la proposition 19, il est dit que la somme des lignes du parallélogramme est double de celle des lignes du triangle; et dans la proposition 24, que la somme des carrés de ces lignes est triple de celles des carrés des lignes du triangle. Pour ne pas laisser d'intervalle entre les carrés et les carrés-carrés, je m'appliquai à trouver aussi le rapport de la somme des cubes des lignes du parallélogramme, à la somme des cubes des lignes des dits triangles. Je découvris qu'il était quadruple. Je vis donc, non sans grande surprise, que la somme des lignes était en raison double , celle des carrés en raison triple, celle des cubes en raison quadruple, celle des carrés-carrés en raison quintuple. J'en conclus que les carrés-cubes devaient être en raison sextuple, les cubo-cubes en raison septuple, et ainsi de suite, d'après l'ordre naturel des nombres , en commençant par l'unité. Voilà le trésor, que le premier que je sache, j'ai découvert à l'occasion de la mesure du fuseau parabolique. Je l'ai signalé moi-même aux géomètres, avant 1640...[1]".

Il y a peu de textes de ce genre, où un mathématicien raconte son cheminement heuristique; et il est intéressant de voir qu'il a repris des résultats plus élémentaires obtenus quelque années plus tôt, pour les élargir ; il reprend également les mêmes techniques de démonstration. Des historiens des mathématiques ont vu, dans ces calculs, des démonstrations très précoces des calculs des intégrales

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Je ne crois pas que l'on puisse parler ainsi; les concepts de Cavalieri restent essentiellement géométriques; il n'y a pas du tout, dans les concepts de "toutes les lignes", "tous les carrés", "tous les plans", imaginés par Cavalieri, l'idée de somme.

---

[1] Traduction de M.H. Bosmans in *Un chapitre de l'Oeuvre de Cavalieri.* Mathesis, 36, 1922 Je ne pense pas que l'usage que le traducteur fait de l'expression récurrente "la somme des lignes", "la somme des carrés"... soit fidèle à l'esprit de Cavalieri qui parle toujours de "toutes les lignes ", de "tous les carrés'... Bien que donné en référence dans plusieurs ouvrages d'histoire des mathématiques, par exemple dans le *Source Book* de Struick, la traduction de Bosmans est très éloignée du texte original. On y trouve même quelques interprétations erronées du texte de Cavalieri: la comparaison du nombre de lignes de deux figures, la somme effective des lignes d'une figure...

Il n'y a pas non plus l'idée de limite... On ne trouve donc pas, dans la théorie de Cavalieri, les notions de base de ce que sera l'intégrale définie; cependant le résultat de Cavalieri est équivalent à celui exprimé par l'intégrale $\int_0^a x^n \, dx$

Je mentionerai plus loin d'autres moyens d'obtenir des résultats équivalents , que Cavalieri n'est pas le seul à obtenir en ce XVII$^{\text{ème}}$ siècle fécond.

4. 6. Démonstration de la proposition XXIV du deuxième livre de la *Géométrie*

"Tous les carrés du parallélogramme sont en raison triple de tous les carrés du triangle".

Dans le cours de sa démonstration, Cavalieri utilise la proposition XXIII, où il a décomposé une figure fermée comme ABCD en plusieurs parties en traçant deux lignes AC et AI (cf. fig. 24), et montré une relation entre tous les carrés de figures partielles ainsi obtenues[1]. Au corollaire I (section IX), il a étudié le cas particulier où l'une des sécantes coupe toutes les parallèles à la règle en leur milieu.

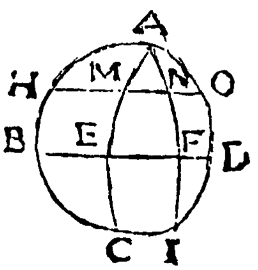


fig. 24

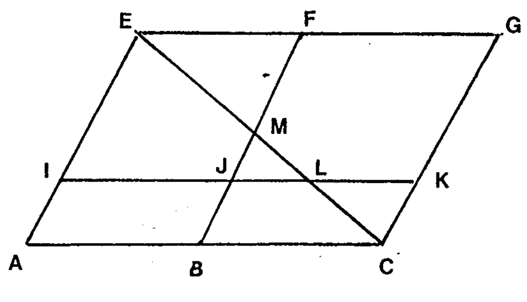


fig. 25

Appliquée au parallélogramme ACGE coupé par la médiane BF et par la diagonale CE, la relation s'écrit: [2]

[1] Cette relation est obtenue géométriquement et s'appuie sur une relation sur les carrés des segments découpés par les deux sécantes sur une parallèle à la règle comme BD écrite à la manière d'Euclide au deuxième livre des *Eléments.* Dans le cas de la figure 25, si J partage le segment IK en deux parties égales et l en deux parties inégales, on a
$IL^2 + LK^2 = 2\,(IJ^2 + JL^2)$ (Euclide, Eléments, Livre II, proposition 9) . Cavalieri étend cette relation à toutes les parallèles IK à la règle AC.

[2] Je désigne "tous les carrés de F" par l'écriture "tsls carrés de F'

(1) tsls carrés de AEC + tsls carrés de CEG =

2 (tsls carrés de ABFE + tsls carrés de CBM et EMF)

Ensuite, puisque AEC et CEG sont deux figures égales,
tsls carrés de AEC = tsls carrés de CEG ; de même, les triangles CBM et CMH sont égaux, donc : tsls carrés de CBM = tsls carrés de CMH

La relation (1) équivaut à (1')

(1') tsls carrés de CEG = tsls carrés de ABFE + tsls carrés de (CMH et EMF)

Cavalieri établit plusieurs relations faisant intervenir la quantité "tsls carrés de CMH et de EMF" que je désignerai par Q; [1] la relation (1') s'écrit donc

(1') tsls carrés de CEG = tsls carrés de ABFE + Q

Il considère les triangles semblables CEG et CMH ; leur rapport de similitude est 2 (CG = 2CH); il en déduit le rapport de tous les carrés de ces deux triangles, égal au cube du rapport des côtés, soit

tsls carrés de CEG = 8 (tsls carrés de CMH) ou (2) tsls carrés de CEG = 4Q

Pour établir ce résultat (qui est analogue à la proposition 8 du livre XII des *Eléments* [2], Cavalieri utilise plusieurs résultats établis auparavant:

- la proposition 11 du livre II, selon laquelle, pour deux parallélogrammes P_1 et P_2, de bases b_1 et b_2, et de hauteurs h_1 et h_2, le rapport de tous les carrés de P_1 à tous les carrés de P_2 est comme le produit des rapports $\frac{\text{le carré de } b_1}{\text{le carré de } b_2} \times \frac{h_1}{h_2}$.

Pour le cas particulier où les deux parallélogrammes sont semblables,

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} \quad \text{et} \quad \frac{\text{tsls carrés de } P_1}{\text{tsls carrés de } P_2} = \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^3$$

- la proposition 22, selon laquelle, si on considère l'un des deux triangles T définis dans un parallélogramme par une diagonale, le rapport de tous les carrés du triangle à tous les carrés du parallélogramme est le même pour tous les parallélogrammes. Ce résultat est établi par un raisonnement proche de la méthode par exhaustion: Cavalieri encadre les triangles T_1 et T_2 des deux parallélogrammes P_1 et P_2 par des parallélogrammes de même hauteur , qu'il peut rendre aussi petite que nécessaire, comme le montre la figure; par un raisonnement par l'absurde, il démontre que l'égalité des rapports est la seule hypothèse possible:

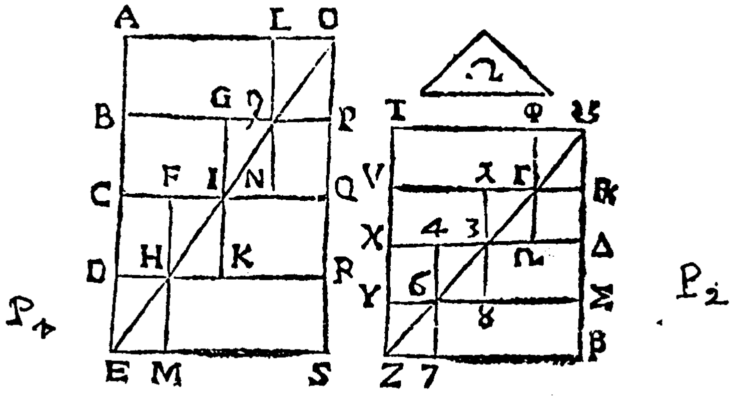
$$\frac{\text{tsls carrés de } T_1}{\text{tsls carrés de } P_1} = \frac{\text{tsls carrés de } T_2}{\text{tsls carrés de } P_2}$$

---

[1] il a bien sûr remarqué que, puisque les triangles CMH et MEF sont égaux,
tsls carrés de CMH = tsls carrés de EMF et donc Q = 2 (tsls carrés de CMH)
mais il ne se servira pas de cette relation , dans la suite du raisonnement, il fera intervenir "tsls carrés de CMH et de EMF "

[2] " Proposition 8: des pyramides triangulaires semblables sont en raison triple de leurs côtés correspondants. Porisme : des pyramides semblables de bases polygonales sont aussi en raison triple de leurs côtés correspondants. "

fig. 26



Cavalieri utilise alors les deux égalités (1') et (2) pour obtenir le rapport entre tous les carrés de ABFE et Q : (3) tsls carrés de ABFE = 3 Q

La proposition 11 lui sert également pour obtenir le rapport entre tous les carrés ACGF et ABFE, de même hauteur. Tous les carrés de ces deux parallélogrammes, selon la règle AC, sont comme tous les carrés de GE à tous les carrés de EF, soit, puisque GE = 2 EF ,

tsls carrés de GE = 4 (tsls carrés de EF) et

tsls carrés de ACGF = 4 (tsls carrés de ABFE)

d'après (3) tsls carrés de ACGF = 12 Q

et d'après (2) tsls carrés de CGE = 4 Q

donc tsls carrés de ACGF = 3 (tsls carrés de CGE)

Par conséquent, Cavalieri retrouve que le volume d'une pyramide à base carrée est le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

C'est avec des méthodes du même type que Cavalieri compare tous les cubes ou toutes les autres puissances du triangle et du parallélogramme.

Cavalieri n'est pas le seul à obtenir de tels résultats. Pascal et Fermat utilisant, chacun à leur façon, des indivisibles pour une quadrature de la parabole obtiendront également un résultat équivalent à $$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

Roberval, dans son <u>*Traité des Indivisibles*</u> , obtient aussi le résultat de Cavalieri. J'en parle rapidement au § 4. 8.

4. 7. La deuxième méthode des indivisibles de Cavalieri

Pressentant les critiques dont sa méthode pouvait être l'objet, Cavalieri développe, au livre VII de sa *Géométrie* , une deuxième méthode des indivisibles. Il explique ses intentions dans la lettre à Galilée du 22 juin 1634: "Alors que l'impression des cinq premiers livres de ma Géométrie est déjà finie..., soupçonnant que le concept de l'infinité des lignes et des plans pourrait présenter des difficultés pour beaucoup, j'ai décidé de composer le septième livre où je présente les mêmes choses d'une façon différente - différente aussi de la méthode d'Archimède." Sa deuxième méthode abandonne donc l'usage de "toutes les lignes", de "tous les plans". Les deux figures qu'il veut comparer doivent être, cette fois, toujours situées entre les mêmes parallèles, donc avoir même hauteur. Comme pour la première méthode, il considère les sections de la figure découpées par toute droite ou tout plan parallèle à la *règle*. Il compare alors les deux figures planes, suivant le principe, appelé depuis d'ailleurs principe de Cavalieri, selon lequel, si les segments de la *règle* , découpés par l'une et l'autre figure restent dans un rapport constant k , alors les surfaces des deux figures sont elles-mêmes dans le rapport k. De même pour les solides: si les surfaces découpées par la règle sont dans le même rapport k, les deux solides sont aussi dans ce rapport k. Il démontre ce principe selon les canons euclidiens[1]. Cavalieri est plus satisfait des fondements de cette deuxième méthode, mais il trouve que la première méthode est plus puissante, puisqu'elle lui permet par exemple de comparer des figures de hauteurs différentes[2]. Il continuera à utiliser beaucoup la première méthode. Il affirme que les résultats obtenus à l'aide de la première méthode pourraient être repris avec la deuxième, mais il ne le fera pas effectivement pour tous.

Cavalieri énonce et démontre à la proposition 7 du Livre VII, que "des solides coniques de même hauteur sont entre eux comme leurs bases", pour en déduire à la proposition 8 que le solide cylindrique est le triple du solide conique construit sur la même base et la même hauteur. Par solide conique ou cylindrique, il entend les cones et cylindres dont les bases sont quelconques, circulaires ou polygonales; les figures et les démonstrations mettent d'ailleurs en jeu des pyramides triangulaires. Ces résultats recoupent donc les résultats démontrés au Livre II, dans les propositions 20 à 24, que j'ai présentées ci-dessus.

Pour démontrer la proposition 7, Cavalieri considère un plan quelconque qui coupe les hauteurs AE et BF des solides coniques en C et D, et sur lequel les solides coniques découpent les figures planes GIO et XNVP (cf fig.27). Alors, - je traduis

---

1 Geometria Livre VII, propositions 2 et 3, traduction italienne p. 670, ou traductuion anglaise in Struick, *A source book*

2 cf *Exercitationes* p.5 et 30

en notations modernes - $\frac{LM}{IO} = \frac{MA}{AO} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BD} = \frac{QR}{NP}$, et les figures planes semblables étant en raison double de leurs côtés homologues :

$$\frac{KLM}{GIO} = \left(\frac{LM}{IO}\right)^2 = \left(\frac{QR}{NP}\right)^2 = \frac{SQTR}{XNVP}$$

Donc, *par permututation* , $\frac{KLM}{SQTR} = \frac{GIO}{XNVP}$; le rapport des figures GIO et XNVP, découpées par un plan quelconque parallèle à la base, est donc constant. Les figures sont, selon l'expression de Cavalieri, "proportionnellement analogues", donc les figures entières, les solides coniques de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

fig. 27

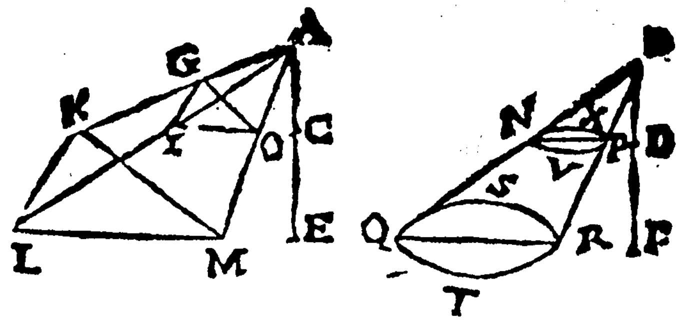
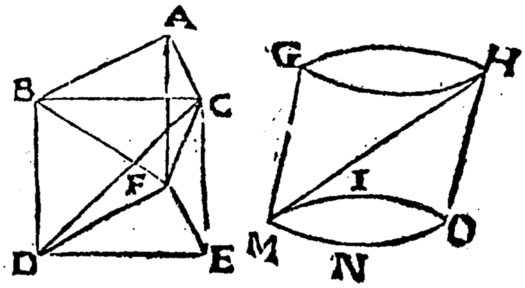


fig. 28



Rappelant, à la proposition 8, le découpage d'un prisme triangulaire en trois pyramides triangulaires de bases égales et de même hauteur effectué par Euclide[1], Cavalieri retrouve donc que le prisme est le triple de la pyramide de même base et de même hauteur, et également qu'un cône comme HMNOI, qui peut être comparé à la pyramide CFDE (de même base et de même hauteur), est le tiers du cylindre GHOM (cf. fig. 28), sans avoir besoin d'utiliser, comme Euclide un nouveau raisonnement par exhaustion. Il est bien évident que cette nouvelle méthode de Cavalieri est très élégante et efficace, et qu'une fois ses principes posés, elle économise de nombreux efforts.

Selon l'interprétation de Lucio Lombardo-Radice, si Cavalieri reprend tous ces résultats déjà démontrés par Euclide, c'est qu'il veut construire à l'aide de sa première méthode des indivisibles (la méthode de "toutes les lignes") ou de sa deuxième

[1] *Eléments*, livre XII, proposition 7

méthode des indivisibles (le principe de Cavalieri), une nouvelle théorie des mesures des surfaces et des solides. Pour la deuxième méthode, c'est la mesure des *indivisibles* lignes ou plans qui est seule mise en jeu; le rapport de deux figures *proportionnellement analogues*, est le rapport constant de leurs indivisibles. Le fait que les résultats obtenus par l'une quelconque de ses deux méthodes des indivisibles coïncident avec ceux obtenus par les méthodes euclidiennes prouvent la validité des nouvelles méthodes.[1]

C'est plutôt cette deuxième méthode qui sera imitée ou qui inspirera les mathématiciens du XVIIème et même du XVIIIème siècle. On trouve, par exemple une mise en oeuvre tout à fait caractéristique de cette méthode dans un ouvrage pédagogique, les Elémens de Géométrie , écrits par le Père Lamy en 1685 [2]. La théorie adoptée par le Père Lamy postule que les solides sont composés "d'un nombre infiny de plans qui ayant quelque épaisseur, mais insensible, sont posés parallèlement les uns sur les autres", et que deux solides de même hauteur coupés par des plans également épais ont le même nombre de plans. Pour prévenir les discussions qui pourraient être soulevées par le "nombre infini de plans", l'auteur recule un peu, et note en remarque: "par un nombre infiny, je n'entends qu'un grand nombre". Dans d'autres éditions des Elémens de géométrie , ces postulats sont discutés: " Si les plans qui composent (la pyramide) sont épais, il est évident que la surface ne sera pas unie, mais par degrés, d'autant plus grands que les plans seront plus épais et ils le seront d'autant moins qu'il y en aura plus. Si on supposait donc qu'ils fussent infinis en nombre ils n'auraient plus d'épaisseur et alors la surface de (la pyramide) serait sans degré."[3] Le principe de Cavalieri est implicitement accepté.

Le Père Lamy procède comme Cavalieri au Livre VII de sa Géométrie . Il rappelle que les sections d'une pyramide par des plans parallèles à la base sont semblables à la base; les deux sections par le même plan des deux pyramides étudiées sont des triangles semblables aux deux bases B et B' dans le même rapport. Puis il montre (théorème second), que deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases. Il suffit de suivre le texte de Lamy qui est tout à fait clair:

Theoréme ſecond.

Les pyramides de même hauteur ſont entr'elles comme leurs baſes.

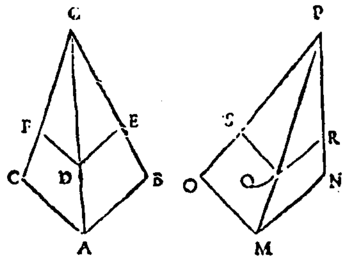
---

1 Geometria degli indivisibili , traduction et notes de L. Lombardo Radice , p.654

2 Père B. Lamy Elémens de Géométrie, Livre IV, section IV , *De la solidité des solides.* Paris 1685

3 Père Lamy Elément de Géométrie Livre V , section IV, prop.VII, 6ème édition, 1734

1° Par la premiere demande deux pyramides peuvent être conſiderées comme compoſées de plans poſez paralellement les uns ſur les autres. 2° Par la 2^e^ demande deux pyramides de même hauteur ont égal nombre de ces plans paralelles.



Il ne reſte donc qu'à prouver que tous les plans dont ces pyramides ſont compoſées, & qui ſe répondent ou ſont à la même hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes ; ce qui a été prouvé dans le dernier Lemme : Ainſi ſi les baſes ſont égales, ces deux pyramides ſont égales, puis que tous les plans pris à la même hauteur dans l'une & dans l'autre ſont égaux; ſi la baſe de l'un eſt le tiers de la baſe de l'autre, comme chaque plan de l'un pris à la même hauteur, ſera le tiers de l'autre, l'une de ces pyramides ſera le tiers de l'autre. Donc les pyramides de même hauteur ſont comme leurs baſes.

Une fois accepté le principe de Cavalieri, la démonstration se fait de façon simple et claire. C'est sans conteste la méthode la plus légère et la plus élégante de toutes celles que nous avons étudiées jusqu'à présent.[1]

4. 8. La méthode des indivisibles à la manière de Roberval

Roberval écrit aussi, indépendamment de Cavalieri, un Traité des indivisibles , qui aurait été écrit aux alentours de 1630, mais ne sera publié que de façon posthume en 1693. Il y développe une méthode des indivisibles bien différente de celle de Cavalieri. Il ne se préoccupe pas de se référer constamment, comme le fait Cavalieri, à l'axiomatique euclidienne, et ne se pose pas non plus de question philosophique sur la nature du continu, mais considère, une fois pour toutes, que la méthode des indivisibles est équivalente à la "méthode des Anciens" (la méthode par exhaustion), tout en étant plus légère. Roberval sait que pour justifier la méthode, il faut "démontrer que la quantité inconnue que l'on compare est mitoyenne entre la figure inscrite et circonscripte et que la figure inscrite et circonscripte diffèrent l'une de

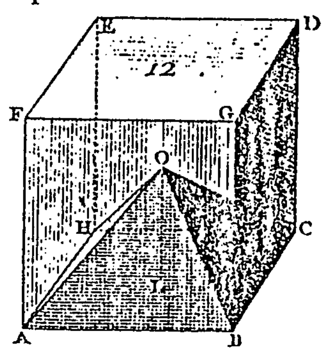


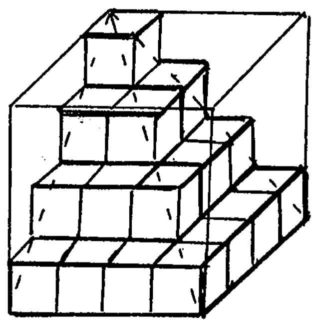
fig. 29

[1] On peut remarquer la solution originale de Clairaut: dans ses *Eléments de Géométrie* de 1741 , il établit d'abord, d'une manière apparentée à celle de Lamy que deux pyramides de bases et de hauteurs égales ont même volume; ensuite il choisit une pyramide particulière, qui a pour base B une face d'un cube et pour sommet le centre du cube, pour obtenir la relation V = (1/3) Bh .

l'autre d'une quantité moindre que toute quantité proposée.[1]" Pascal est du même avis: " Il me serait aisé de réduire cette méthode à la manière des Anciens (...) Mais, parce que cela serait un peu plus long et inutile, je la laisse, quoique je l'aie toute prête..." [2]

Roberval suppose que "toute ligne peut se diviser en une infinité de parties ou petites lignes toutes égales entre elles ou qui suivent entre elles telle progression que l'on voudra, comme de quarré à quarré,... ou selon quelque autre puissance[3]." De même "la superficie se divise aussi en une infinité de petites superficies, lesquelles sont égales ou ont une égale différence (...); les solides se divisent en une infinité de petits solides...[4]" Puis, d'une manière qui fait penser aux théories pythagoriciennes, il associe les grandeurs géométriques et les nombres. Il représente les petites lignes qui composent un segment par des points, qu'il dénombre; à chaque ligne est donc associée un nombre entier. Il représente l'infinité des petites superficies qui composent une surface par des lignes, et la surface, somme de toutes ces petites surfaces est considérée comme la somme des petites lignes qui représentent ces petites surfaces, ou la somme des nombres associés à chaque petite ligne. Les petits solides qui composent le solide total sont représentés par une infinité de petites superficies, auxquelles peuvent aussi être associés des nombres, dont la somme peut ainsi être associée au solide total. Le cas du triangle défini comme somme de points apparait dès la première page du traité. La quadrature de la parabole est obtenue en faisant une "somme de lignes qui sont comme des quarrés"[5]. On peut faire une analogie[6] entre une pyramide à base carrée et la somme des premiers carrés d'entiers, les différents petits solides composant la pyramide représentés par de petites superficie carrées d'aires 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...

fig. 30



[1] Roberval *Traité des Indivisibles* in *Divers ouvrages de Mathématiques et de physique* par l'Académie royale des sciences, Paris 1693, réédition IREM Paris VII , 1987

[2] Lettre de Monsieur Dettonville à M. Huygens de Zulichem in Pascal *Oeuvres complètes* , La Pléiade, Paris , 1963

[3] Roberval *Traité des Indivisibles* , p. .247

[4] ibid. p. 249

[5] ibid, p. 257-258

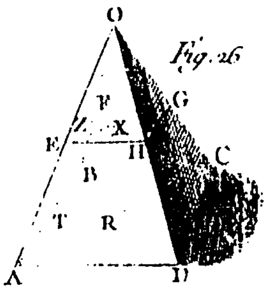
[6] l'analogie est faite par Roberval lui-même: "la somme de toutes ces lignes ou des points qui les représentent serait à la dernière prise autant de fois, comme la somme des quarréz au cube, ou comme la pyramide à la colonne.." (*Traité des indivisibles* p.248). Mais il présente là sa méthode de façon générale et ne se propose pas de calculer le volume d'une pyramide.

Si le côté du cube vaut n, son volume n^3, le volume de la pyramide est comme $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$. Cette somme, obtenue de diverses façons par plusieurs auteurs, est connue depuis Archimède, qui l'a calculée, dans un langage géométrique, à la proposition X du <u>Traité des spirales</u>. Elle vaut $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, que Roberval calcule pour n = 4 . Ensuite il introduit des considérations de comparaisons d'ordre de grandeurs différents, ce qui l'amène à ne pas tenir compte des termes $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{6}$, ce qu'il justifie ainsi: "Ainsi la ligne ou côté n'a pas de rapport au cube, (...) car les lignes prises à l'infini ne faisant qu'un quarré & y ayant une infinité de quarrés dans le cube, si l'on ajoute ou si l'on ôte un seul quarré cela n'opèrera rien."

Pascal a une démarche proche de celle de Roberval, et exprime très bien cette façon de négliger les termes d'ordre inférieur, cette sorte de passage à la limite dans le traité *Potestatum numericarum summa* , appendice au *Triangle arithmétique* : "On n'augmente pas une quantité continue lorsqu'on lui ajoute en tel nombre que l'on voudra des quantités d'un ordre d'infinitude supérieur. Ainsi les points n'ajoutent rien aux lignes, les lignes aux surfaces, les surfaces aux solides. Ou encore pour parler en nombres, comme dans un traité d'arithmétique, les racines ne comptent pour rien par rapport aux carrés, les carrés par rapport aux cubes, les cubes par rapport aux carrés-carrés... Il faut donc ne pas tenir compte des grandeurs d'ordre inférieur étant donné qu'elles ont une valeur nulle par rapport à celle de l'ordre considéré." [1]

On trouve un témoignage assez caractéristique de cette démarche appliquée au calcul du volume de la pyramide dans l'ouvrage didactique de l'Abbé Deidier publié à Paris en 1739, *La science des Géomètres ou la théorie et la pratique de la géométrie* , qui fait suite à *l'Arithmétique des géomètres* . L'Abbé Deidier se réfère principalement à l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis. Il considère les sections parallèles à la base carrée d'une pyramide, semblables entre elles, dans un rapport qui est le carré de leur côtés homologues ou le carré de leur distance au sommet de la pyramide.

fig. 31



[1] Pascal <u>Oeuvres complètes</u>, Paris , Gallimard, (ed. de la Pléiade), 1954, p.171 (...), *in continua quantitate, quodlibet quantitates cujusvis generis quantitati superioris generis additas nihil ei superaddere.* Sic puncta lineis, lineae superficiebus, superficies solidis nihil adjiciunt: seu, *ut numericis, in numerico tractatu , verbis utar* , radices quadratis, quadrata cubis , cubi quadrato-quadratis, ect., nihil apponunt. Quare, inferiores gradus, nullius valoris existentes, non considerandi sunt.

Ces distances au sommet sont pour lui, "comme les nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4, etc., à l'infini, donc les sections sont entre elles comme les carrés de ces nombres et par conséquent, la somme des sections est à la plus grande ou à la base ABCD multipliée par le nombre de termes OR, comme 1 à 3 ainsi qu'il a été enseigné ci dessus en parlant de l'arithmétique des infinis, partie II, n° 240.[1]" L'arithmétique des infinis a, selon sa propre définition, "pour objet de trouver quel est le rapport de telle de ces suites que l'on voudra à son dernier ou plus grand terme, multiplié par la somme des termes." Le paragraphe 240 rappelle une liste de résultats sur des sommes infinies; en ce qui concerne le problème précis du volume de la pyramide, le résultat utile a été établi au paragraphe 239, où le calcul de la somme infinie des carrés des entiers est faite par induction . Il calcule la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ et le défaut par rapport à n^3, pour n=2, puis 5, puis 8, etc, remarque que : " A mesure qu'on prend un plus grand nombre de quarrés, le défaut devient moindre, il s'ensuit que lorsque les quarrés seront un nombre infini, la somme des quarrés sera exactement égale au tiers du plus grand quarré multiplié par le nombre des termes."

On peut remarquer, dans les démarches de Wallis, de Roberval et la mise en application qu'en fait l'Abbé Deidier, un saut méthodologique important, peut-être là, une véritable révolution. La soumission aux règles euclidiennes et aristotéliciennes n'est plus de rigueur. Même si ces mathématiciens ne prétendent pas construire une nouvelle théorie du continu, s'ils ne prétendent pas décrire la nature, ni même décrire la nature des objets mathématiques, ils calculent, comme si les figures étaient composées d'une infinité d'indivisibles élémentaires. Ces méthodes permettent plus que la simple comparaison de deux figures, comme c'était le cas pour les méthodes développées par Cavalieri. Elles proposent des moyens directs de quadrature ou de cubature d'une figure par la sommation de l'infinité des petits éléments dont elle est composée. Il y a, de plus, dans les démarches de Roberval, de Pascal, de l'Abbé Deidier, un autre saut important hors du cadre euclidien. Ils introduisent des modes de comparaison des infiniment petits entre eux, les traitant aussi comme des grandeurs en un sens plus étendu que celui de la définition 5 du Livre V des _Eléments_ . Enfin, ils se permettent de négliger des termes incomparablement petits par rapport à d'autres. Les anciens évitaient toujours ce procédé, en usant d'inégalités et d'encadrements des grandeurs à évaluer.

---

[1] _La science des Géomètres,_ partie IV, section I , problème VI :"Mesurer une pyramide" , Paris , Jombert , 1739

5. Les Jésuites contre la méthode des indivisibles

5 . 1. Les critiques à l'égard de la méthode des indivisibles

Les théories de Cavalieri, avant même la parution de la *Géométrie* , suscitèrent de virulentes critiques, principalement de la part des Jésuites. C'est la question du continu, sur laquelle Cavalieri voulait pourtant éviter de prendre position, mais qui était pour certains, implicite dans ses écrits, qui constitua sans doute le point sensible. Les théologiens romains y voyaient un retour des théories physiques atomistes de Démocrite et de Lucrèce, tout à fait bannies par le dogme catholique, qui considérait qu'elles étaient en contradiction avec le dogme de la transubstantiation. Le Jésuite Orazio Grassi avait précisé les critiques de l'Eglise contre les théories atomistes dans un texte publié à Paris en 1626, *Ratio ponderum librae et simbellae* .[1] En 1632, une première censure "scientifique" ou "doctrinale" contre l'atomisme[2] fut prononcée par les pères "réviseurs" du Collège Romain, la plus importante université jésuite, chargée d'organiser l'enseignement de toutes les écoles de la Compagnie de Jésus , dont l'influence était grande sur l'Europe entière. Cette censure rappelait l'interdiction d'utiliser la notion d'atome indivisible aussi bien physique que mathématique dans les écoles jésuites. Cette censure fut suivie de trois autres, la dernière en 1649. Festa, dans l'article *La querelle de l'atomisme, Galilée et les Jésuites* , relève que la censure de 1632 est en relation avec une démonstration par les indivisibles faite par Galilée dans le *Dialogue sur deux sciences nouvelles* , paru la même année. Les Jésuites confondaient dans la même interdiction le recours à des notions qui doivent sans doute être distinguées, celle d'atome de "nature' et celle d'atome de "grandeur".

Outre ces critiques d'ordre métaphysique, la méthode des indivisibles fera l'objet de critiques purement mathématiques, comme celles des pères jésuites Paul Guldin et André Tacquet, tous deux enseignants, le premier à Graz en Autriche, le second à Anvers. Dans son traité *De centro gravitatis* (1635-1641), Guldin se démarquait des condamnations d'ordre métaphysique[3], mais il n'admettait pas que l'on traite des agrégats infinis comme des grandeurs euclidiennes. "Entre deux infinités, il ne peut jamais exister de proportion, ni de raison."[4] Guldin refuse la troisième proposition du

---

[1] Pietro Redondi , *Galilée hérétique* , trad. M. Aymard, Gallimard, Paris 1985, p. 269 Egidio Festa *La querelle de l'atomisme, Galilée et les Jésuites* , La Recherche n° 224, septembre 1990 , p. 1041

[2] Dans l'article de Festa, cf note précédente , le texte de la censure est reproduit.

[3] "je ne considère pas que cette méthode soit à rejeter pour des raisons que nous devons supprimer ici par un silence nullement inopportun" Guldin, *De centro gravitatis* , livre II, p. 3-4

[4] " sed infiniti ad infinitum nulla est proportio sive ratio" Guldin *Centro gravitatis* , vol.4, p.342, cité par Cavalieri dans les *Exercitationes* , p. 201

livre II de la *Géométrie* : "Je réponds à cela de façon absolue, que deux lignes peuvent avoir une raison entre elles, mais que toutes les lignes ou tous les plans ne le peuvent pas, car ce serait la raison d'une infinité à une autre." [1]

Guldin n'attaquait pas seulement Cavalieri sur les principes de sa méthode; il considérait aussi que cette méthode n'était pas fiable, qu'elle pouvait conduire à des résultats grossièrement faux. Il mit à jour des paradoxes, en étendant quelque peu l'usage d'indivisibles d'une figure dans un sens moins strict que celui que permettaient les principes de la *Géométrie* . Mais Cavaleri lui-même et d'autres mathématiciens après lui, s'étaient, pour obtenir de nouveaux résultats, écartés un peu des principes stricts établis dans les premières propositions de la *Géométrie* [2].

Le Père Tacquet est moins virulent que Guldin dans sa critique. Dans son traité de 1651, intitulé *Cylindricorum et Annularium libri*, il utilise même des méthodes par les indivisibles, par exemple pour établir une comparaison entre le volume de la sphère et celui d'une portion de cylindre[3]. Il propose quatre démonstrations du même résultat, deux utilisent une méthode des indivisibles, deux, des figures inscrites et circonscrites. Mais il ne considère pas acceptables les méthodes par les indivisibles. Pour lui, la sphère ne peut pas en toute rigueur être considérée comme composée de cercles, ni la portion de cylindre être composée de triangles. Une grandeur géométrique ne peut être composée que de grandeurs qui lui sont homogènes, un solide composé de petits solides, une surface de petites surfaces, une ligne de petites lignes. Elle ne peut être considérée à partir de grandeurs d'une dimension inférieure, comme le fait Cavalieri, du moins tel que Tacquet le comprend. Cette interprétation des méthodes de la *Geometria indivisibilibus* n'est pas fidèle aux idées de Cavalieri, comme j'ai tenté de les exposer plus haut, mais ce fut de toute façon l'interprétation la plus courante pendant longtemps. Tacquet pensait donc que le seul mode de démonstration acceptable était la méthode par exhaustion; nous verrons cependant au paragraphe suivant comment s'est transformée cette *méthode des Anciens* en ce milieu du XVII^ème siècle, en particulier sous l'influence de Grégoire de Saint-Vincent, un des maîtres de Tacquet.

Pour appuyer ses critiques, Tacquet propose aussi des exemples paradoxaux, dont, par exemple celui-ci: il considère un demi-cône de sommet a (le cône est coupé

---

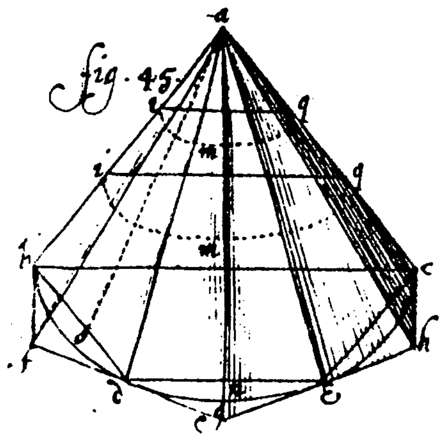
[1] '"Ad quam absolute respondimus figuras posse habere ad invicem rationes non autem omnes lineas aut omnia plani unius, ad lineas omnes aut omnia plana alterius, hoc est infiniti ad infinitum." Guldin *Centro gravitatis* , p. 343

[2] Ainsi, déjà dans la démonstration de la proposition 19 du livre II, présentée au §5., Cavalieri associe deux à deux des lignes qui ne sont pas situées sur la même droite, (ce sont deux positions différentes de la *règle*)

[3] Andreas Tacquet, , *Cylindrica et Annularia* in *Opera mathematica* , p.23-24

par un plan passant par son axe); il suppose que la surface latérale peut être considérée comme l'agrégat des demi-cercles tels que (imq), obtenus en sectionnant le cône par tous les plans parallèles à la base, et que la surface du triangle abc peut être considérée comme l'agrégat des segments tels que (iq) (cf. fig. 32)[1]. Le rapport entre la longueur du demi-cercle (imq) et celle du segment (iq), pour toutes les positions du plan parallèle à la base, est constant; il vaut $\frac{\pi}{2}$. Tacquet fait alors remarquer qu'en utilisant la méthode des indivisibles, le rapport de la surface latérale du demi-cône à celle du triangle devrait aussi être égal à $\frac{\pi}{2}$, ce qui est évidemment faux. Cavalieri aurait pu objecter, mais il n'était plus en vie, que les deux surfaces comparées n'étaient pas situées dans un même plan. [2].

fig. 32



Barrow, par contre, s'opposa à l'objection de Tacquet, mais d'une manière qui n'est pas pour nous très convaincante, car elle semble faire intervenir une comparaison entre le nombre de points de l'axe et d'une arête latérale du cône [3].

---

1 Andreas Tacquet, *Cylindrica et Annularia* in *Opera mathematica*, Anvers, 1668, vol. 3, p. 38-39

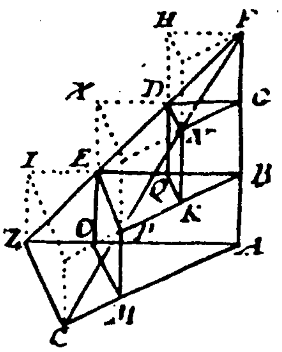
2 Cavalieri a cependant répondu aux objections de Guldin, notamment dans les *Exercitationes.*

3 Barrow *Lectiones Geometricae* in *The mathematical work of Isaac Barrow*, edité par W. Whewell, Cambridge, 1860

5. 2. Le volume de la pyramide d'après le Père Tacquet

Opposé à la méthode des indivisibles, mais la manipulant pourtant bien, enseignant les mathématiques à Anvers, le Père Tacquet fait paraître en 1654, un traité d'enseignement, _Elementa Geometriae planae ac solidae_ , qui reprend, comme l'avaient fait depuis des siècles de très nombreux auteurs, les _Eléments_ d'Euclide, en suivant de très près la structure de l'oeuvre d'Euclide, mais dans un langage et avec des méthodes "actualisées", plus conformes à l'époque de la publication. La démonstration concernant le volume de la pyramide témoigne d'un certain retour à la méthode euclidienne, mais elle est influencée cependant par l'idée des "tranches" de la méthode des indivisibles. Elle considère le découpage classique du prisme en trois pyramides (cf fig. 3 .), mais il s'éloigne d'Euclide et de Cavalieri ou de Lamy pour montrer, à la proposition V du livre XII que deux pyramides triangulaires de même hauteur sont entre elles comme leurs bases [1]. La proposition V est précédée d'un lemme qui démarque la méthode de celles que nous avons déjà rencontrées.

fig. 33



Tacquet inscrit et circonscrit des prismes de même hauteur dans une pyramide triangulaire. Il remarque que la différence entre la réunion des prismes circonscrits et celle des prismes inscrits (qui, sur la figure 33, est définie par la réunion des volumes tels FHDN, DNPEX, EPCZ..) est égale au prisme inférieur ABOCIZ (qu'il désigne par CIBA). En multipliant à l'infini le nombre de prismes, la hauteur commune des prismes, donc la hauteur AB du prisme inférieur devient plus petite que toute quantité donnée.[2] Le volume de ce prisme, qui est la différence entre celui des prismes

[1] Tacquet _Elementa Geometriae_ , 1654 , livre XII, propsition V. On remarque que les propositions suivent tout à fait la même numérotation que celle des _Eléments_ d'Euclide.

[2] "Si proinde prismatum numerus in infinitum multiplicetur, AB fiet quavis data minor."

circonscrits et celui des prismes inscrits, est plus petite que cette quantité donnée; donc la différence entre la pyramide elle-même et la réunion des prismes intérieurs est plus petite que cette quantité. Les prismes inscrits "sont finalement" la pyramide.[1] Tacquet peut alors démontrer la proposition V. Prenant deux pyramides de même hauteur, il construit, dans l'une et l'autre, des prismes intérieurs dont il montre que le rapport des volumes est égal à celui des bases. La différence entre le volume de chacune des deux pyramides et l'empilement correspondant de prismes étant aussi petite que l'on veut, Tacquet considère donc que, à la fin, le rapport entre les volumes des deux pyramides est le même que celui des prismes intérieurs et qu'il est donc aussi égal à celui des bases.

L'émergence de l'idée de limite:

On voit dans ce texte, comme dans l'oeuvre de Grégoire de Saint-Vincent, poindre des idées nouvelles et émerger, par exemple, l'idée de limite. Rappelons que Grégoire de Saint Vincent a donné une première réponse au paradoxe d'Achille, en indiquant que le terme d'une progression infinie est une grandeur qui ne peut être atteinte mais qui peut être approchée de plus près que toute quantité donnée. L'idée de limite apparait, mais rien n'est encore clair ni précis. En témoigne le vocabulaire utilisé qui fluctue: l'expression "tandem desinunt", utilisée par Tacquet, n'est pas la même que celle employée par Grégoire de Saint-Vincent, dans l'*Opus geometricum* [2], "exhauriant", pour décrire une situation équivalente. Grégoire de Saint-Vincent multiplie les parallélépipèdes à l'infini pour "épuiser" le solide. Tacquet aussi propose une subdivision répétée à l'infini de l'empilement des prismes, qui se "termine" en la pyramide. Il apparait qu'il n'y a pas ici d'infini actuel; on retrouve l'infini potentiel de la philosophie aristotélicienne, et de la notion de limite, telle qu'elle sera définie beaucoup plus tard. Le nombre de prismes augmente assez pour que le prisme inférieur soit plus petit qu'une quantité donnée, comme dans la démarche euclidienne. Cette quantité n'est cependant pas explicitée comme l'avait fait Euclide. On retrouve d'autre part un caractère archimédien de la démonstration par exhaustion, l'usage non seulement de figures inscrites, mais aussi de figures circonscrites. Les méthodes par les indivisibles sont rejetées, d'autant plus que l'ouvrage est destiné à l'enseignement, mais elles ont laissé des traces: la démonstation par l'absurde a disparu, le nombre de "tranches" prismatiques inscrites dans la pyramide est multiplié à l'infini.

Remarquons qu'il y a, dans la démarche de Tacquet, des postulats non explicités, autour d'idées que nous englobons sous le terme de *limite* . En particulier,

---

[1] "inscripta prismata in pyramidem tandem desinunt" . Peut-on traduire: "les prismes inscrits se terminent en la pyramide", ou "les prismes inscrits tendent vers la pyramide" ?

[2] Grégoire de Saint-Vincent *Opus geometricum* p. 739 "parallelipipeda illa posse multiplicari ut corpora ipsa, quibus inscribuntur, exhauriant"

Tacquet admet, sans l'expliciter, que, si les différences entre deux quantités U et U', V et V', sont plus petites que toute quantité donnée, le rapport de U' à V' est le même que celui de U à V. Valerio, une cinquantaine d'années auparavant, avait explicité une proposition de ce genre dans ses tentatives pour systématiser la démonstration par exhaustion, mais Tacquet ne le fait pas.

Le traité du Père Tacquet sera beaucoup utilisé au XVII$^{\text{ème}}$ et au XVIII$^{\text{ème}}$ siècles, et considéré comme un manuel particulièrement clair et rigoureux. Il sera plusieurs fois réédité, traduit et commenté. Mais au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, ce sont plutôt les procédés de découverte et la recherche de nouveaux résultats qui intéressent les mathématiciens. A l'exception des enseignants jésuites, nombreux seront les mathématiciens du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle qui utiliseront d'une façon plus ou moins précise l'idée du "principe de Cavalieri" : comparer les "tranches" de deux figures pour en déduire une propriété des figures entières. C'est une démonstration dans la lignée de celle de Lamy qui se retrouvera dans la plupart des traités de géométrie, (de Clairaut, de Wolf, de Lacaille, dans l'*Encyclopédie* de d'Alembert). Ces auteurs comparent les "tranches" découpées par des plans parallèles sans se préoccuper du fait que les tranches sont des troncs de pyramide dont les formes sont différentes (les inclinaisons des faces latérales sont différentes d'une pyramide à l'autre, même si les bases sont équivalentes).

Revenons au XVII$^{\text{ème}}$ siècle. On a pu noter que les points de vue et les jugements des auteurs de cette période sont très variés, plus ou moins clairs, controversés et parfois contradictoires. Les esprits sont partagés sur le recours ou non aux quantités infinitésimales, aux indivisibles, aux sommes infinies, aux quantités négligées, sur le rôle que ces techniques doivent jouer: instruments de découverte ou de démonstration? Cependant ces interrogations vont être emportées par le courant novateur qui va s'affirmer grâce au travail des fondateurs du calcul différentiel et intégral, Newton et Leibniz.

ELEMENTA GEOMETRIÆ

PLANÆ ac SOLIDÆ,

Quibus accedunt selecta

EX ARCHIMEDE THEOREMATA.

AUCTORE

ANDREA TACQUET

Societatis JESU Sacerdote, & Matheseos Professore,

TRIGONOMETRIA PLANA

Ejusdem Auctoris,

ET SPHERICA ALIUNDE DESUMPTA.

PATAVII, Typis Seminarii. MDCCLIV.
Apud Joannem Manfrè.
SUPERIORUM PERMISSU.

Tabula Libri XII.

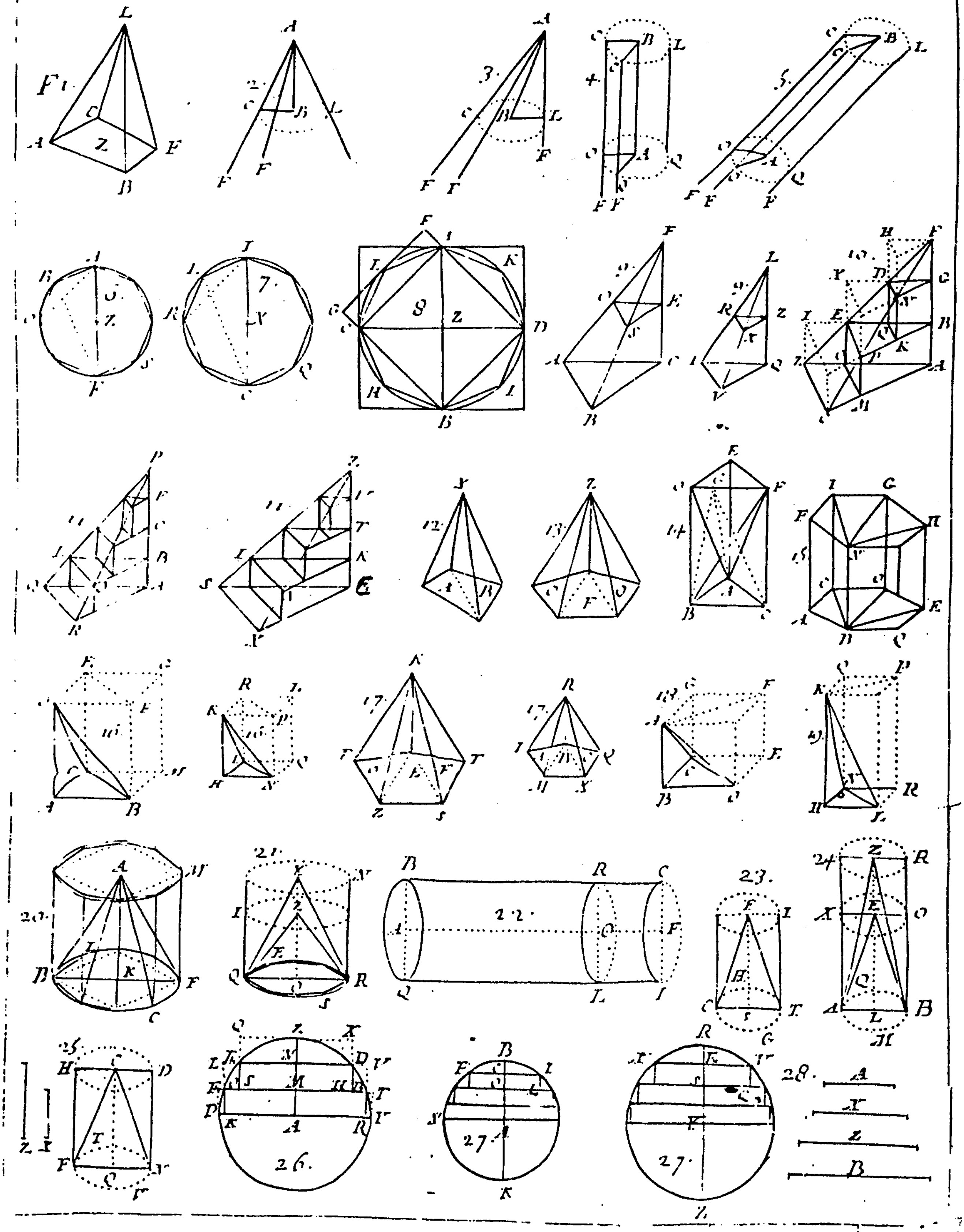


Planche des *Elements de Géométrie* de Tacquet, 1654, réédit. 1754

6. Le calcul différentiel et intégral

Au cours des siècles, et tout particulièrement au XVII^{ème}, se multiplient donc les techniques de calcul des aires curvilignes - qui peuvent s'étendre aux calculs de volumes. Un résultat nouveau, très riche de conséquences, de la fin du XVII^{ème} siècle, sera de reconnaître le lien entre le problème des quadratures et celui des tangentes. Cette découverte, qui est déjà en germe chez Torricelli et Fermat, sera mise à jour par Gregory, dans sa *Geometriae pars universalis* de 1668, peu lue cependant, puis par Barrow, dans ses *Lectiones geometriae* de 1670. Mais c'est à Newton et à Leibniz qu'on doit de mettre à jour l'importance de cette découverte, de comprendre l'intérêt de ce que l'on appelle aujourd'hui le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, qui permet de calculer des intégrales (donc des aires et des volumes), en cherchant des primitives, c'est à dire en inversant les opérations de différentiation. Ils vont commencer à systématiser et à organiser les méthodes diverses et proposer des algorithmes applicables à toutes sortes de problèmes. Ils vont proposer de nouveaux outils pour étudier des courbes complexes, préciser leurs tangentes, étudier des extrémums, déterminer des points d'inflexion, de rebroussement, des développées, résoudre des problèmes de quadratures, de calculs de volumes..., et bien sûr de nombreux problèmes qui se posent en mécanique et en physique. Grâce à ces nouveaux outils, Newton a pu fonder la physique et l'astronomie modernes.

6. 1. Quelques aspects des méthodes de Newton

Je vais mentionner quelques aspects des théories de Newton en relation avec les problèmes de quadratures et de cubatures. On a vu, pour traiter ces problèmes, deux directions se dessiner: soit utiliser des éléments infinitésimaux, soit mettre en jeu des notions de mouvement de lignes, de plans[1]. Newton balance entre ces deux directions.

Dans le *De Analysi per aequationes numero terminarium infinitas* , écrit vers 1669, qui circulera parmi ses amis mais ne sera publié qu'en 1711, Newton opère avec des quantités infiniment petites, les accroissements infiniment petits des quantités variables, qu'il appelle moments.

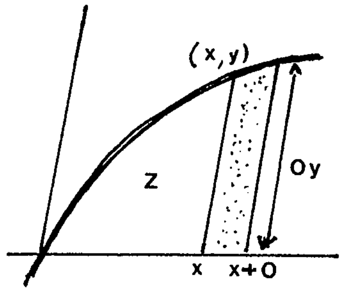
Il considère l'aire sous une courbe limitée par les axes de coordonnées et une parallèle à l'axe des ordonnées au point (x.y), suppose que cette aire z est donnée par

[1] L'idée de mouvement est présente chez Cavalieri, c'est le mouvement de la *règle* .

$z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$. Il désigne par o le moment (ou petit accroissement) de la variable x, par oy, le rectangle infiniment petit représentant le moment (ou accroissement) de l'aire correspondante. Il développe le second membre de la relation

$z + oy = \frac{n}{m+n} a (x+o)^{\frac{m+n}{n}}$ par la formule du binôme, qu'il a étendue à des valeurs rationnelles de l'exposant, puis divisant par o et négligeant les termes contenant o, il obtient $y = a x^{\frac{m}{n}}$. Newton montre aussi la réciproque: si l'ordonnée y d'un point de la courbe est donnée par $y = a x^{\frac{m}{n}}$, l'aire sous la courbe est $\frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$. [1]

fig. 34



Il n'énonce pas de résultat analogue sur les volumes, mais on peut facilement étendre ces méthodes aux calculs de volumes. Pour déterminer une aire, Newton n'additionne plus, comme ses prédécesseurs, des surfaces infinitésimales; l'aire est obtenue par l'intermédiaire de son taux de variation instantané. C'est la notion d'intégrale indéfinie qui est en germe.

Dans *La Méthode des fluxions* , écrite vers 1671, publiée en 1736, il tend à remplacer la notion de moment par celle de fluxion, ce qui sera fait définitivement dans le *De quadratura Curvarum* de 1693, et il s'intéresse aux rapports des fluxions. Les quantités variables sont alors considérées par Newton comme engendrées par un mouvement continu (de points, de lignes, de plans...)[2] ; l'idée de mouvement continu

---

[1] Newton *Opera omnia* I, p. 25-28.

[2] Newton *Tractatus de quadratura curvarum*, supplément à l'*Opticks* , 1704, traduction anglaise de J. Stewart , 1745 . Introduction : "I consider mathematical quantities in this place not as consisting of very small parts; but as described by a continuous motion. Lines are described, and thereby generated not by the apposition of parts, but by the continued motion of points; superficies by the motion of lines; solids by the motion of superficies; (...); portions of time by a continual flux;(..) These geneses really take place in the nature of things, and are daily seen in the motion of bodies. (...) Therefore considering that quantities, which increase in equal times, and by increasing are generated, become graeter or less according to the greater or less velocity with which they increase and are generated; I sought a method of determining quantities from the velocities of the motion or increments, with which they are generated; and calling these velocities of motions or increments

et de la vitesse de ce mouvement est considérée comme partagée intuitivement par tous, et ne sera pas plus définie par Newton. Le temps est donc une variable de référence universelle, dont l'écoulement régulier permet la comparaison des variations de toutes les autres quantités. La fluxion d'une quantité est la vitesse avec laquelle elle est engendrée - son taux de variation instantané. Dans la Méthode des fluxions , Newton pose le problème fondamental: une relation étant donnée entre des quantités variables, trouver la relation entre leurs fluxions et réciproquement.[1] Dans Les Principes mathématiques de la Philosophie naturelle , parus en 1687, Newton veut préciser les fondements de ses méthodes. Il introduit les concepts de "première et dernière raison des quantités qui naissent et s'évanouissent"

> Ainsi, lorsque dans la suite je considérerai des quantités comme composées de particules déterminées, & que je prendrai pour des lignes droites de petites portions de courbes; je ne désignerai point par-là des quantités indivisibles, mais des quantités divisibles évanouissantes; de même, ce que je dirai des sommes & des raisons, doit toujours s'entendre non des particules déterminées, mais des limites des sommes & des raisons des particules évanouissantes; (...)
>
> Il en est de même de la derniere raison des quantités évanouissantes, il faut entendre par cette raison celles qu'ont entr'elles des quantités qui diminuent, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles sont évanouies, mais celle qu'elles ont dans le moment même qu'elles s'évanouissent. De la même maniere, la premiere raison des quantités naissantes est celle que les quantités qui augmentent ont au moment qu'elles naissent, & la premiere ou derniere somme de ces quantités est celle qui répond au commencement ou à la fin de leur éxistence, c'est-à-dire, au moment qu'elles commencent à augmenter ou qu'elles cessent de diminuer. (···)
>
> les dernieres raisons qu'ont entr'elles les quantités qui s'évanouissent ne sont pas en effet les raisons des dernieres quantités, ou de quantités déterminées & indivisibles, mais les limites dont les raisons des quantités qui décroissent à l'infini approchent

fluxions, and the generated quantities fluents. I fell by degrees upon the method of fluxions, which I have made use of here in the quadrature of curves, in the years 1665 and 1666.

[1] Newton , Méthode des fluxions et des séries infinies, p. 20

ſans ceſſe, limites dont elles peuvent toujours approcher plus près que d'aucune différence donnée, qu'elles ne peuvent jamais paſ ſer, & qu'elles ne ſauroient atteindre, ſi ce n'eſt dans l'infini. [1]

On lit, en filigrane, que les paradoxes de Zénon sont encore présents dans les esprits des contemporains de Newton.

L'ouvrage commence par une sorte de définition, préfiguration de notre notion de limite. "Lemme premier : Les quantités et les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales."[2]

Ce lemme explicite justement la démarche, restée implicite, que nous avons remarquée dans le raisonnement de Tacquet, qui mettait en jeu ce qui s'approche de ce que nous appelons la limite, et la limite d'un quotient, (cf. paragraphe §. 5. 2) . Il faut remarquer, chez Newton, en outre, le rôle joué par le temps. Le mot explicite de limite apparaît dans le commentaire de Newton, juste après les lemmes, qui précise sa pensée, et ses positions par rapport à la méthode par exhaustion et celles des indivisibles: "J'ai commencé par ces lemmes, pour éviter de déduire de longues démonstrations *ad absurdum* , selon la méthode des anciens Géomètres. J'aurais eu des démonstrations plus courtes par la méthode des indivisibles, mais parce que l'hypothèse des indivisibles me parait trop dure à admettre, & que cette méthode est par conséquent peu géométrique, j'ai mieux aimé employer celle des premières et dernières raisons qui naissent et s'évanouissent; et j'ai commencé par faire voir, le plus brièvement que j'ai pu, ce que deviennent ces quantités, lorsqu'elles atteignent leurs limites."[3]

Dans le lemme II du premier livre des Principia , on trouve aussi, à propos d'une figure plane, exactement le même raisonnement que nous avons vu Tacquet tenir pour la pyramide. Newton montre que l'aire des parallélogrammes inscrits sous la courbe et celle des parallélogrammes circonscrits à la courbe *tendent* toutes deux vers l'aire curviligne "lorsqu'on diminue la largeur (commune) des parallélogrammes et qu'on augmente leur nombre à l'infini" (cf. fig.35). Newton l'énonce: " les dernières raisons qu'auront entre elles la figure inscrite, la circonscrite et la curviligne seront des

---

1 Newton Principes mathématiques de la philosophie naturelle , traduction de la Marquise du Chastelet, Paris 1759. Livre I , p. 47 - 49
2 Newton Principes mathématiques de la philosophie naturelle , traduction de la Marquise du Chastelet, Paris 1759.
3 Ibid, p.47

raisons d'égalité". Sa démonstration suit la même idée que Tacquet: la différence entre la figure circonscrite et la figure inscrite est égale au premier rectangle ABla dont la largeur "diminue à l'infini". Les cadres théoriques de Tacquet et de Newton sont différents, mais il est frappant de voir ici le parallélisme entre leurs modes de raisonnement et de calcul pour justifier leurs résultats.

fig. 35

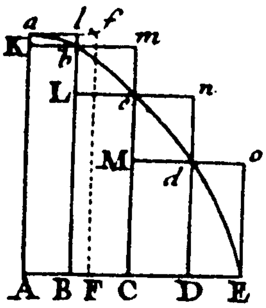


Fig. 6.

6.2. La fluxion de la pyramide dans le *Traité des fluxions* de C. Mac Laurin

On a pu remarquer que les fondements des théories de Newton restent imprécis, que certains postulats ne sont pas formulés. Ces théories seront critiquées, comme les théories des indivisibles auparavant l'avaient été. On reprochera à Newton de faire intervenir le temps dans des théories mathématiques. L'évêque Berkeley, par exemple, dans l'Analyste, publié en 1734, reprochera à Newton le recours à l'idée de vitesse instantanée, "virtualité insensible". Il lui reprochera les manières contradictoires de traiter les quantités infiniment petites, tantôt considérées dans le calcul, tantôt négligées... Mac Laurin écit en 1742, le Traité des fluxions , pour répondre aux critiques de Berkeley. Il est persuadé que les théories de Newton sont valides, même si leurs fondements n'ont pas été explicités dans le détail, et veut en mettre à jour une construction irréprochable: "Il n'y a rien dans cette méthode qui ne paraisse naturel et entièrement conforme à l'ancienne Géométrie. Mais ce que (Newton) nous a donné sur cette matière est si court, qu'il y a lieu de croire que cette grande précision a donné lieu aux objections qui ont été proposées contre cette méthode. (...) Le moyen le plus efficace de mettre la vérité dans tout son jour, et de prévenir toutes les disputes, se réduit à la déduire des principes les plus évidents, et à la manière des anciens Géomètres. C'est là tout mon dessein dans le traité suivant, où je ne prétends pas changer l'idée des fluxions que nous a donnée le Chevalier Newton, mais seulement développer et démontrer sa méthode, par les démonstrations les plus rigoureuses, en ne supposant que des principes évidents par eux-mêmes."[1] Il

[1] Mac Laurin A treatise of Fluxions, Edimbourg, 1742, traduction de Pezenas, Paris 1749

veut en particulier montrer que la méthode des fluxions peut se passer tout à fait des quantités infinitésimales. Voici comment, dans l'introduction il présente le travail de Newton:

"Isaac Newton vint à bout de ce que Cavalerius avait souhaité, en inventant la méthode des Fluxions, & la proposant d'une manière qui fût susceptible d'une démonstration rigoureuse, laquelle exige qu'on ne suppose que des quantités finies et aisées à concevoir. Le calcul de cette méthode est le même que celui des infiniment petits; mais il est appuyé sur des principes exacts & qui s'accordent avec l'ancienne Géométrie. Dans cette méthode les prémisses & les conclusions sont également exactes. On n'y rejette aucune quantité comme infiniment petite, & l'on n'y suppose pas qu'une partie de courbe se confonde jamais avec une ligne droite..."[1]

Mac Laurin appuie sa construction théorique sur certaines remarques concernant le temps, les mouvements, les vitesses, reliées à l'intuition commune; puis sur quatre axiomes[2] :

AXIOME I.

15. L'efpace décrit par un mouvement accéléré eft plus grand que celui qui auroit été décrit dans le même tems, fi le mouvement n'avoit pas été accéléré, mais continué uniformément depuis le commencement du tems.

AXIOME II.

L'efpace parcouru par un mouvement accéléré pendant le tems de l'accélération, eft plus petit que l'efpace qui auroit été parcouru dans un tems égal par un mouvement acquis par cette accélération, & continué uniformément.

AXIOME III.

L'efpace parcouru par un mouvement retardé eft moindre que celui qui auroit été parcouru dans le même tems, fi ce mouvement n'avoit pas été retardé, mais continué uniformément depuis le commencement du tems.

AXIOME IV.

L'efpace décrit par un mouvement retardé pendant le tems du retardement eft plus grand que celui qui auroit été décrit dans le même tems par le mouvement qui refte après ce retardement & continue uniformément.

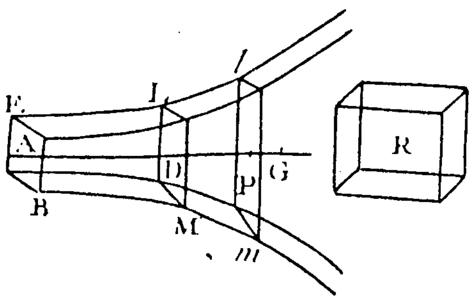
---

1 Ibid., Introduction, p.l (cinquante)
2 ibid., p. 9 et 10

Voici la définition de la fluxion que donne Mac Laurin : "la vitesse, avec laquelle une quantité flue, à chaque terme du temps pendant lequel elle est supposée se former, se nomme fluxion, qui est, par conséquent, toujours mesurée par l'incrément ou le décrément que ce mouvement aurait produit dans un temps donné, s'il avait été continué uniformément depuis ce terme sans aucune accélération ou retardement: ou bien on peut la mesurer par la quantité qui serait produite dans un temps donné par un mouvement uniforme, égal au mouvement générateur dans ce terme."[1] Remarquons bien que la fluxion est définie comme un taux de variation instantané d'un mouvement qu'on suppose prolongé fictivement de façon uniforme à partir de l'instant considéré . Il précise même sur quelques exemples, lignes (nous dirions longueur), surfaces (aires), solides : "La vitesse avec laquelle un solide flue est la même que celle d'une surface plane donnée, laquelle se mouvant parallèlement à elle-même, est supposée produire un prisme droit ou un cylindre qui est toujours égal à ce solide."[2] On remarque que, à la différence de Newton qui ne s'intéressait qu'à des rapports de fluxions - parfois un peu fictifs, puisqu'une des quantités était proportionnelle au temps - , Mac Laurin définit la fluxion d'une quantité en tant que telle. La seconde fluxion d'une quantité est la fluxion de sa fluxion, la fluxion de la quantité variable définie à chaque instant par son taux de variation, la troisième fluxion est définie de manière analogue.

Au chapitre IV du premier livre, sont étudiées les fluxions des solides. La proposition VII énonce: "La fluxion d'un solide que l'on peut concevoir formé par une surface plane qui se meut parallèlement à elle-même, & perpendiculairement à un axe donné, est mesurée par un prisme qui a pour base la surface génératrice, & pour hauteur, la ligne droite qui mesure la fluxion de son axe."[3] (cf. fig. 36)

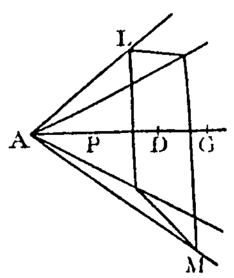
fig. 36



[1] ibid. , p. 7
[2] ibid. p. 6-7
[3] ibid., p. 85

Dans le cas où le solide est une pyramide, le plan générateur LM ne garde pas des dimensions constantes. Selon la définition donnée, la fluxion du solide est la vitesse avec laquelle est engendrée le solide à partir de l'instant où le plan mobile prend la position LM, en supposant que ce plan poursuit son mouvement de façon uniforme. Le point D est supposé se mouvoir uniformément sur l'axe. sa fluxion est représentée par DG, le plan LM est supposé garder des dimensions constantes (pas d'accélération pour le "plan"), la vitesse de génération du solide est donc représentée par le prisme R égal à un prisme de base le plan LM, de hauteur DG. Mac Laurin justifie ce résultat à l'aide d'une double démonstration par l'absurde; il montre que la fluxion ne peut être ni plus grande, ni plus petite que le prisme R en se référant aux axiomes qu'il a énoncés au début du traité. Si la fluxion R du solide, pendant que l'axe flue de la longueur DG, était plus grande que le prisme ***P*** de base LM et de hauteur DG, elle serait égale à un prisme de base lm et de hauteur DG (lm est une position de la surface génératrice, supposée croissante, postérieure à la position LM) . Le point P est l'intersection de l'axe avec cette position lm de la surface génératrice. Le théorème I auquel renvoie la démonstration énonce que "les espaces décrits par un mouvement uniforme sont en même proportion, l'un à l'autre, que les temps employés à les parcourir."[1] Or, la fluxion d'un solide pendant un incrément de temps est l'espace qui serait engendré par un mouvement uniforme à partir de l'instant considéré; si la fluxion du solide EBML correspondant à l'incrément DG est un prisme de base lm et de hauteur DG, la fluxion correspondant à l'incrément DP est le prisme P' de base lm et de hauteur DP. Mais le mouvement effectif du solide EBML est supposé accéléré et doit, d'après l'axiome I, engendrer un espace plus grand que s'il avait été engendré par un mouvement uniforme; ce dernier espace est le solide LMlm, tronc de pyramide si le solide initial est une pyramide. Cet espace n'est pas plus grand que le prisme P'. Donc la fluxion R ne peut pas être plus grande que le prisme ***P*** . Une démonstration analogue est reprise pour montrer que R ne peut être plus petite que ***P*** .

fig. 37



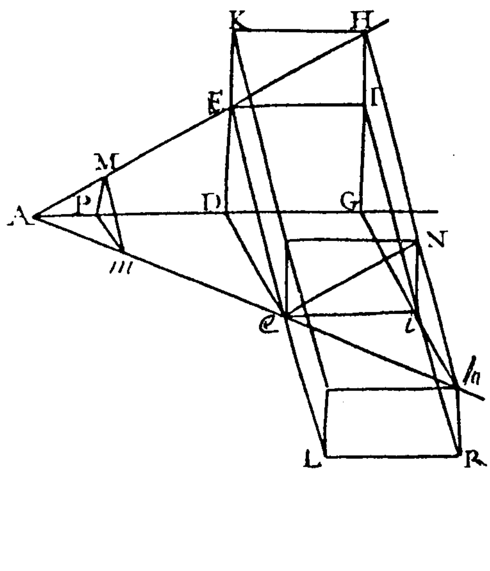
[1] ibid. , p. 9

Les démonstrations sont très fréquemment sur ce modèle, assez lourdes et laborieuses. On peut remarquer cependant, dans le langage de Mac Laurin, un certain flou entre les fluxions et les incréments.

Mac Laurin précise la proposition pour différents types de solides, dont une pyramide de sommet A, engendrée par le mouvement de la surface triangulaire variable PMm (cf. fig. 38). Il étudie une petite augmentation de volume de la pyramide ADEe, quand le point P se déplace de D en G; cette augmentation est exactement la pyramide tronquée EDehGH. Le prisme ***P*** de base DEe et de hauteur BD, représentant la fluxion de la pyramide ADEe n'est qu'une partie de cette pyramide tronquée. Mac Laurin caractérise les autres parties de ce tronc de pyramide à l'aide des notions de seconde et de troisième fluxion.

Le tronc de pyramide contient donc trois parties: le prisme ***P***, le prisme EIHeiN et la pyramide eNih. Le prisme ***P*** est la fluxion du solide ADEe, si DG est la fluxion de AD. La longueur DG étant supposée constante, IH mesure la fluxion de GI (ou DE) et donc le parallélépipède NHEe mesure la fluxion du prisme ***P***, pour le mouvement de E en H. C'est la seconde fluxion de la pyramide ADEe, et le prisme EIHeiN est la moitié de la seconde fluxion de la pyramide. Un raisonnement analogue étudie la fluxion du parallélépipède NHEe, pour DG et DE supposées constantes: c'est le parallélépipède NeLRh. La pyramide eNih est donc le sixième de la troisième fluxion de la pyramide ADEe. Le tronc de pyramide EDehHG est donc la somme de la fluxion, de la moitié de la seconde fluxion et du sixième de la troisième fluxion de la pyramide ADEe. Mac Laurin a obtenu ici une forme géométrique des premiers termes du développement de Taylor.

fig. 38



On trouve effectivement, dans le *Traité des Fluxions* de C. Mac Laurin une construction axiomatique cohérente des théories proposées par Newton, à partir des axiomes sur le mouvement, sans l'introduction de quantités infinitésimales, et sans négliger aucun terme. On pourait déduire de la fluxion de la pyramide le calcul de son volume, de façon plus rigoureuse qu'avec les méthodes qu'initiera Leibniz et qui seront développées au paragraphe 6. 6; il suffirait de chercher la fluente du prisme qui représente la fluxion de la pyramide; mais ceci n'a pas intéressé Mac Laurin.

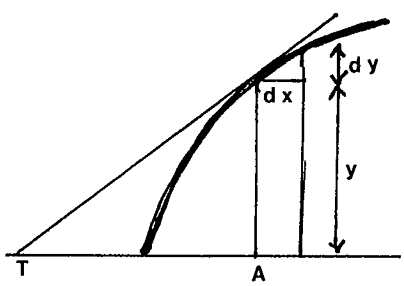
6. 3 . Les méthodes introduites par Leibniz

L'oeuvre de Leibniz, très importante également, très abondante, n'est pas organisée en traités. Leibniz publiera notamment une successsion d'articles écrits rapidement et assez difficiles à lire, dans le journal scientifique de Leipzig, les *Acta eruditorum* . Il est difficile de présenter rapidement ses apports au domaine qui nous occupe ici, d'autant plus qu'il a exploré des directions diverses. L'influence et le succès de ses méthodes furent plutôt assurés par les publications de ses émules, en particulier par celle de l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* du Marquis de l'Hospital en 1696. Cet ouvrage reprend le travail de Leibniz et des notes manuscrites de Jean Bernoulli, et en présente un exposé très didactique. Grâce à lui, le langage et les notations de Leibniz, jugées plus commodes et opératoires que celles de Newton vont se répandre et s'imposer sur le continent.

Je reprends les définitions de ce traité. La notion de base est celle de différence (ou différentielle). La différence d'une quantité variable correspond à un accroissement infiniment petit de cette quantité. Sur la figure 40, AP = x , Pp (ou dx) est la différence de x, y = PM , dy ou Mm est la différence de y [1]; si S est l'aire du domaine mixtiligne APM, dS est l'aire de PMmp ... Leibniz et le Marquis de l'Hospital considèrent comme égales deux quantités qui ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite, et donc pour un accroissement infiniment petit dx, confondent la portion de courbe Mm et la portion correspondante de la tangente en M, confond AP et Ap, l'aire mixtiligne MPpm et le rectangle MPpR; la différence entre

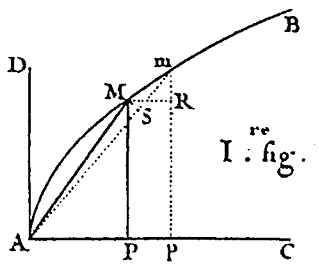
[1] Leibniz caractérise aussi la différentielle par l'intermédiaire de la tangente à la courbe; la différentielle dx de l'abcisse x est une quantité arbitraire; la différentielle dy de l'ordonnée est définie comme la quantité dont le rapport à dx est le même que celui de l'ordonnée avec la sous-tangente. Pour qu'une telle définition soit tout à fait précise il faudrait définir précisément la tangente, ce que Leibniz ne fait pas.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{AT}$$ fig. 39



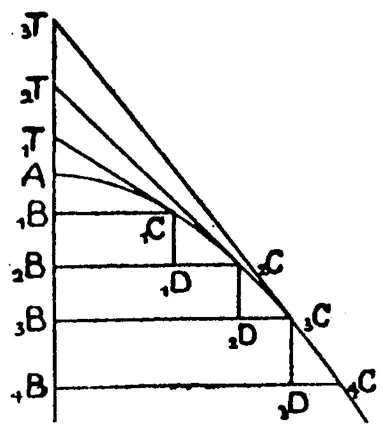
ces deux aires infiniment petites est un infiniment petit d'ordre supérieur. On retrouve, de façon moins précise l'étude faite par Mac Laurin de la seconde fluxion de la surface curviligne APM, qui serait ici le rectangle construit sur MRm.[1]

fig. 40



On trouve, dans un des très nombreux manuscrits de Leibniz le postulat suivant: "Je représente l'aire d'une figure par la somme de tous les rectangles contenus par les ordonnées et les différences des abscisses, i.e. par ${}_1B_1D + {}_2B_2D + {}_3B_3D$ + etc. En effet les petits rectangles ${}_1C_1D_2C$, ${}_2C_2D_3C$ etc, puisqu'ils sont infiniment petits comparés aux rectangles ci-nommés, peuvent être omis sans risque. Et donc dans mon calcul, je représente l'aire de la figure par y dx , ou par les rectangles contenus par chaque y et le dx qui lui correspond."[2] (cf. fig. 41). La remarque finale est intéressante: "si les dx sont pris égaux les uns aux autres, on obtient la méthode de Cavalieri".

fig. 41



Leibniz considère donc ici les aires et les volumes comme des sommes d'éléments infinitésimaux (sommes des rectangles MPpm ...), et calcule leurs valeurs en inversant les opérations de différentiation; il introduit la notation $\int$. Mais c'est l'intégrale définie qui se dessine[3]. Cette méthode sera largement adoptée par les mathématiciens du continent. On en verra des exemples dans les paragraphes suivants.

---

1 Mac Laurin *Traité des fluxions* , p.79-80

2 Child J.M. *The early mathematical manuscripts of Leibniz* , Chicago, Open Court 1920 , p. 137-138

3 l'intégrale définie ne recevra sa notation actuelle qu'au XIXème siècle.

On peut noter que Leibniz semble préférer une autre méthode pour trouver l'aire sous une courbe: "grimpant sur des hauteurs supérieures, nous obtenons l'aire d'une figure en trouvant une autre courbe, la courbe sommatrice ou quadratrice." (courbe définie par une propriété de ses tangentes) [1]. On trouve alors une démarche analogue à la recherche d'une aire par l'utilisation d'une primitive de la fonction définie par la courbe, le calcul d'une intégrale indéfinie.

Leibniz, comme presque tous les mathématiciens dont j'ai parlé essaie de convaincre ses lecteurs que ses méthodes ne violent pas les canons euclidiens et ne sont qu'une extension des techniques classiques. Il écrit par exemple: " Bien sûr, je tiens, comme Euclide (livre V, definition 5), que sont comparables toutes les quantités homogènes qui, multipliées par un nombre fini, peuvent se surpasser l'une l'autre. Et des quantités qui ne diffèrent pas de telles quantités (comparables), peuvent être considérées égales, ce qu'Archimède lui-même suppose, et tous les autres après lui. C'est ce qui est désigné par une différence moindre que toute différence donnée (...) et le résultat peut toujours être confirmé par un démonstration par l'absurde. Mais parce que la méthode directe est plus rapide à comprendre et plus utile pour découvrir de nouveaux résultats, il suffit que la méthode directe soit déduite une fois pour toutes, et lorsqu'on applique cette méthode (directe), les quantités incomparablement petites sont négligées, ce qui constitue une procédure valide..."[2]

6. 4 . Les traités de calcul intégral

Le calcul du volume de la pyramide relève du calcul intégral. La fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle voit plutôt paraître des écrits portant sur le calcul différentiel ("l'art de trouver les grandeurs infiniment petites qui sont les éléments ou les différences des grandeurs finies", comme le définit Bougainville). Le Marquis de l'Hospital avait "le dessein d'écrire un traité de calcul intégral, calcul qui consiste à remonter des infiniment petits aux grandeurs ou aux touts dont ils sont les différences"; il y a renoncé, ayant appris

---

1 ibid. p. 138-140 et Leibniz *Histoire et origine du calcul différentiel* , 1713, traduction de Régine Szeftel-Zylberbaum, Cahiers de Fontenay, n°1, 1981 p.74-75

2 Responsio ad non nullas difficultates a Dn, Bernardo Niewentiit... in C. Gerhardt *G. W. Leibniz Mathematische Schriften*, 1962, v ol. 5 p.322

" Scilicet eas tantum homogeneas quantitates comparabiles esse, cum Euclide lib.5, defin. 5 censeo, quarum una numero, sed finito multiplicata, alteram suoperare potest. Et quae tali quantitate non differunt, aequalia ese statuo, quod etiam Archimedes sumsit, aliique post ipsum omnes. Et hoc ipsum est, quod dicitur differentiam esse data quavis minorem. Et (...) res sempre deductione ad absurdum confirmari potest. Quoniam tamen methodus directa brevior est ad intelligendum et utilior ad inveniendum, sufficit cognita semel reducendi via postea methodum adhiberi, in quia incomparabiliter minora negliguntur, quae sane ..."

que Leibniz lui-même en préparait un, *De Scientia infiniti* , qui ne vit malheureusement pas le jour. Les traités importants de calcul intégral qui paraitront au XVIIIème siècle s'occuperont plutôt de trouver des méthodes pour calculer des intégrales de plus en plus complexes, que de préciser et de fonder les bases élémentaires du calcul. C'est une caractéristique de l'esprit des mathématiciens de ce siècle que d'aller de l'avant, de chercher à résoudre de nouveaux problèmes, plutôt que de fonder avec précision les méthodes. On trouve donc très peu d'écrits où soit mis en jeu le calcul intégral pour le calcul des volumes simples.

Le philosophe Malebranche, pourtant, proche du Père Lamy et des Oratoriens, des enseignants ouverts aux théories nouvelles, a incité les mathématiciens de son entourage à écrire des traités élémentaires de calcul intégral. Il demanda d'abord à son secrétaire Louis Carré, qui devint membre de l'Académie royale des Sciences. Celui-ci compila les matériaux existants et publia en 1700, une *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion et d'oscillation par l'application du calcul intégral* . Ce sera le premier traité de calcul intégral, le seul qui s'intéressera au calcul du volume du prisme et de la pyramide. (son exposé est repris au paragraphe 6. 6.). Cet ouvrage sera réédité en 1750, mais il sera peu diffusé (il contenait d'ailleurs quelques erreurs). Malebranche conscient des insuffisances de l'ouvrage, demanda au Père Reyneau de préparer un nouveau traité. Ce sera, en 1708, *l'Analyse démontrée* .[1] Cet ouvrage exercera plus d'influence que celui de Carré; il explique comment calculer des volumes de révolution, à partir de la "formule qui fera trouver l'élément du solide", mais ne s'intéresse pas au volume de la pyramide .

6. 5. Louis Carré (1663-1711)

Je vais présenter cet auteur peu connu. Fils de laboureur, dit *l'Encyclopédie* [2], élève des prêtres de l'Oratoire, il se destinait d'abord à l'état écclésiastique puis il quitta ce dessein vers l'âge de trente ans. Il était déjà secrétaire de Malebranche depuis plusieurs années, ayant succédé dans cette fonction à l'Abbé Catelan. Il devint, vers 1693, l'élève de Varignon qui le fit entrer à l'Académie Royale des Sciences en 1697. En 1699, il reçut le titre officiel d'élève géomètre, puis celui d'associé géomètre en 1702 et celui de pensionnaire mécanicien en 1706. Les nouveaux promus à

---

1 le titre complet est l'*Usage de l'analyse, ou la manière de l'appliquer à découvrir les propriétés des figures de la Géométrie simple et composée, à résoudre les Problèmes de ces sciences et les Problèmes des sciences Physico-mathématiques, en employant le calcul ordinaire de l'Algèbre, le calcul différentiel et le calcul intégral. Ces derniers calculs y sont aussi expliqués et démontrés.*

2 Article *Nangis* de *l'Encyclopédie* de d'Alembert et Diderot

l'Académie devaient présenter un projet. Incité par Malebranche, dont il avait copié deux fois au moins un petit traité intitulé *De la dimension des solides et de leurs surfaces convexes* [1], familier des oeuvres de L'Hospital et de Varignon, il présente donc à l'Académie, le 3 juin 1699, cette *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion et d'oscillation par l'application du calcul intégral*. L'ouvrage reçoit, le 29 août, l'approbation de ses examinateurs, Malebranche et Varignon, et sera publié en juin-juillet 1700. Plus tard, Jean I Bernoulli et Rémond de Montmort lui reprocheront des erreurs.[2]

Carré ne publiera pas d'autre ouvrage, mais fera passer une trentaine de communications à l'Académie sur des sujets liés au calcul différentiel et intégral et à la mécanique. Le seul mémoire auquel se réfère Malebranche a trait à une étude des chocs.[3] D'après la lettre de Montmort déjà citée, "c'était un homme appliqué au travail et qui enseignait avec succès la philosophie du Père Malebranche, surtout aux Dames! Il avait un talent particulier pour leur inspirer le goût des sciences. Je l'aimais bien et j'ai été bien fâché de sa mort." [4]

Le titre montre bien le propos de l'ouvrage. Les ambitions, modestes, de l'auteur sont précisées dans la préface : " Je ne prétends pas dire beaucoup de choses nouvelles, car outre que je ne donne pas les règles de ce calcul, lorsque la quantité proposée dont on veut avoir l'intégrale n'est pas le produit d'une différentielle par le multiple de son absolüe élevée à une puissance quelconque, je ne l'étens point aux courbes transcendantes. Je laisse cela aux Maîtres de l'Analyse qui ont plus de tems et plus d'étendue d'esprit que je n'en ai pour pénétrer dans les mathématiques abstruses, et qui ne voudraient pas descendre dans de petits détails qui sont nécessaires à ceux qui commencent & c'est en partie ce qui m'a déterminé à travailler sur ce sujet. " Il propose donc aux commençants les premiers outils du calcul intégral et leurs applications à des problèmes de géométrie pratique. Il témoigne de l'enthousiasme provoqué par les découvertes de Leibniz: " on découvre par là avec une facilité merveilleuse des choses que l'on ne pourrait trouver par la géométrie ordinaire sans beaucoup de travail et de peine".

---

[1] ce traité est resté sous forme manuscrite.

[2] Lettre de Rémond de Montmort à J. Bernoulli du 28 juin 1719 in *Oeuvres complètes* de Malebranche , tome XIX, p.686

[3] le mémoire est de 1706, intitulé *Des lois du mouvement* , repris par Malebranche dans *La Recherche de la Vérité*

[4] Lettre de Rémond de Montmort à J. Bernoulli du 28 juin 1719 in *Oeuvres complètes* de Malebranche , tome XIX, p.686

6. 6. Le volume de la pyramide par le calcul intégral, selon Louis Carré

La notation différentielle est employée dès le début de l'ouvrage de Carré, sans introduire de débat sur les principes. Il commence par préciser les postulats du calcul intégral. Lisons ce qui concerne les volumes: "Les géomètres ont coutume de considérer la plupart des Solides comme composés d'une infinité de Surfaces (...) parallèles droites ou courbes, qu'ils prennent pour autant de solides qui ont pour hauteur une grandeur infiniment petite, et qui sont les éléments d'une figure proposée. Ainsi concevant la hauteur d'une figure quelconque divisée en une infinité de petites parties égales, on les regardera comme autant de différences que l'on exprimera par la caractéristique d, et qui seront la hauteur des solides infiniment petits, qui composent une figure.

Par exemple, dans le Conoïde parabolique qui est un solide formé par la révolution de la demi-parabole AMB autour de l'axe AD, il est évident que toutes les ordonnées PM, pm (pm étant supposée infiniment proche de PM) décriront dans ce mouvement des surfaces circulaires, lesquelles multipliées par une partie Pp de la hauteur, donneront autant de petits solides qui seront les différentielles ou les éléments qui composent le solide entier, et dont la somme est égale au solide cherché."

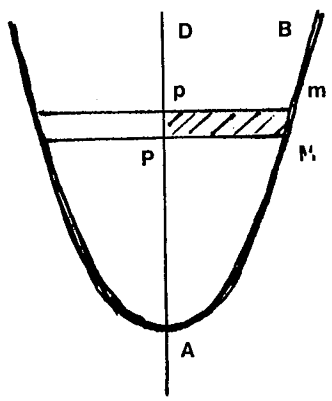


fig. 42

L. Carré donne ensuite les règles de calcul des intégrales de diverses différentielles, qui se présentent toujours sous la forme $x^p\,dx$ (p étant un nombre rationnel) .

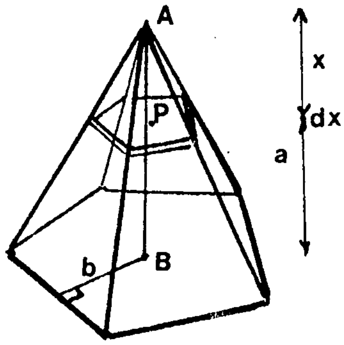
La section seconde traite de la dimension des solides et la proposition II du volume de la pyramide. Il détaille le calcul pour une pyramide régulière; son calcul reste valable pour une pyramide dont la base est un polygone régulier mais dont le sommet A n'est pas sur l'axe de la base mais Carré ne le mentionne pas.

La base de la pyramide a pour périmètre c et pour aire $\frac{bc}{2}$ (b est la distance du centre B de la base à l'un des côtés de la base) (cf. fig. 43). Par le point P de la hauteur AB , avec AP = x , AB = a , passe un plan parallèle à la base. La section est un polygone semblable à celui de la base, dans un rapport égal au carré du rapport des longueurs x et a; elle a pour aire $\frac{bc\,x^2}{2\,a^2}$ La différentielle de la pyramide est donc

$\frac{bc\ x^2\ dx}{2\ a^2}$, dont "l'intégrale" est $\frac{bcx^3}{6\ a^2}$, qui est la valeur de la pyramide qui a pour hauteur AP , ce qui donne $\frac{abc}{6}$ pour la pyramide entière.

Carré termine en remarquant que pour une base non régulière, "on ferait à peu près les mêmes raisonnements".

fig. 43



METHODE

POUR

LA MESURE DES SURFACES,

LA DIMENSION DES SOLIDES,

LEURS CENTRES DE PESANTEUR,

DE PERCUSSION ET D'OSCILLATION.

7. La "vraie métaphysique" du calcul infinitésimal

Méthode d'exhaustion, des indivisibles, premières et dernières raisons, limites, méthode des fluxions, différentielles, quantités infinitésimales..., les théories foisonnent, s'opposent, se recouvrent.. Les mathématiciens discutent parfois âprement, rejettent une méthode en défendent une autre... Les résultats sont là: beaucoup de nouveaux problèmes sont résolus, beaucoup de nouveaux domaines sont ouverts. Les mathématiciens du XVIIIème siècle seront plus soucieux, selon le mot de d'Alembert, "d'agrandir l'édifice que d'en éclairer l'entrée, de l'édifier haut que d'assurer la force des fondations". Mais la valeur même et les justifications des méthodes infinitésimales gênent les esprits. On reproche aux méthodes de Leibniz d'user d'infiniment petits sans les définir, de confondre des quantités différentes - qui diffèrent d'un infiniment petit - sans préciser si les calculs sont rigoureux ou approchés. On reproche aux méthodes de Newton d'user de rapports de quantités nulles, d'introduire dans le domaine intemporel des mathématiques le temps comme variable de référence. On a vu que la tentative de Mac Laurin, de fonder rigoureusement les méthodes de Newton, ne peut se passer de la référence au temps.

7.1. La limite, "vraie métaphysique du calcul infinitésimal"

D'Alembert, parmi d'autres, tente de fonder le calcul infinitésimal sur des bases plus rigoureuses. Il refuse l'emploi d'infiniment petits ou grands, de rapports de quantités nulles: "les fluxions doivent être considérées comme des limites de rapports de quantités non nulles et non pas comme des rapports de quantités infinitésimales."[1] C'est d'Alembert le premier qui affirme que la notion de limite est "la vraie métaphysique du calcul différentiel. La métaphysique des quantités infiniment grandes et petites est totalement inutile pour le calcul différentiel." Le mot de *métaphysique* peut surprendre un lecteur moderne. Dans les *Eléments de Philosophie* , d'Alembert explique que "la métaphysique a pour but d'examiner la génération de nos idées".[2] On peut le comprendre comme la recherche des principes, des fondements de la science considérée. Ce souci de préciser et d'assurer les fondements ne sera pas vraiment mis en pratique par d'Alembert lui-même, comme en témoigne l'article *Pyramide* de *l'Encyclopédie* , où d'Alembert reprend un langage inspiré des indivisibles: pour comparer deux pyramides de même hauteur, il les considère "composées d'un même

---

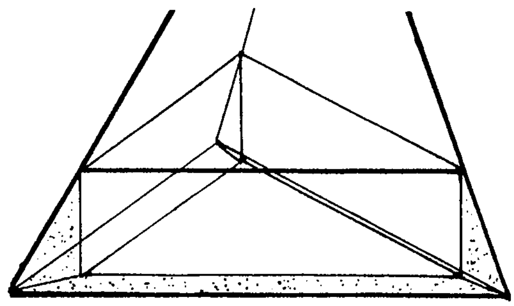
[1] Article *Différentiel* de l'*Encyclopédie*

[2] d'Alembert *Eléments de philosophie* , ch. 13

nombre infini de tranches"... , compare deux à deux les tranches, et conclut que "les sommes des tranches" des deux pyramides sont entre elles comme leurs bases.

En 1795, Laplace, dans ses Cours de l'Ecole Normale de l'An III , mettra en pratique les positions de principe de d'Alembert. " La méthode des limites sert de base au calcul infinitésimal".[1] Il en énonce un premier principe: "deux quantités dont on peut prouver que la différence est moindre qu'aucune grandeur donnée sont évidemment égales entre elles"[2], puis un second: "la limite de l'expression d'une suite de grandeurs est l'expression de la limite de ces grandeurs", qui établit une correspondance entre la limite de grandeurs géométriques et la limite de leurs mesures. Ces deux principes lui permettent dans les applications, de négliger "les quantités formées de deux dimensions qui diminuent sans cesse relativement à celles qui n'ont qu'une semblable dimension. Mais pour faire sentir la justesse de ces omissions et pour montrer qu'elles ne nuisent point à l'exactitude des résultats, il est bon de donner plus de développement aux démonstrations de ce genre dans les éléments de Géométrie."[3] Une des démonstrations de géométrie élémentaire choisies par Laplace pour initier ses élèves aux principes du calcul infinitésimal, consiste justement à démontrer que "deux pyramides triangulaires de même base et de même hauteur sont égales en solidité." L'idée directrice est de majorer la différence entre les deux pyramides par une grandeur qui peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée. Il n'est pas nécessaire, selon lui, " d'évaluer cette différence.[4]" Pour mettre en évidence que cette différence peut être ainsi majorée, il découpe les pyramides en tranches d'égale épaisseur et considère les prismes droits que l'on peut inscrire à l'intérieur de chaque tranche, qui sont deux à deux égaux pour deux tranches correspondantes des deux pyramides. La différence de deux tranches correspondantes est moindre que le volume des trois "onglets" complémentaires au prisme[5].

fig. 44



[1] Laplace Cours de l'Ecole normale de l'An III , septième scéance in Oeuvres , page 84

[2] ibid., p. 81 . Remarquons que ce principe, correct pour des quantités constantes, ne peut cependant s'appliquer à des quantités variables.

[3] ibid., p. 92

[4] ibid., p. 91

[5] Ce résultat est simple lorsqu'il est traduit algébriquement: Si T , T' , P , P', q , q' désignent les volumes des tranches, des prismes droits inscrits et des trois onglets complémentaires aux prismes dans les tranches, on a $T = P + q$, $T' = P' + q'$, $P = P'$ (les prismes ont même base et même hauteur) . Si T est supposée supérieur ou égal à T' , $T - T' = q - q' < q$

Sans avoir besoin d'évaluer ces volumes, comme il l'a fait remarquer, il considère que chaque onglet est moindre qu'un parallélépipède dont les dimensions sont: un côté de la grande base de la tranche, une arête de la tranche, la hauteur de la tranche. La somme des trois onglets de la tranche est donc moindre que le produit du contour de la base de la tranche par la plus grande des arêtes de la tranche et par la hauteur de cette tranche. La réunion de tous les onglets définis par toutes les tranches de la pyramide est moindre que le produit du contour de la base de la pyramide, par la plus grande des arêtes de la pyramide et par la hauteur commune des tranches. Or cette dernière dimension peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée; les deux pyramides sont donc égales.

C'est donc ainsi que Laplace considère qu'il peut négliger le volume des trois onglets de chaque tranche par rapport au volume du prisme de chaque tranche: l'onglet a deux dimensions qui diminuent, hauteur et arêtes, le prisme n'en a qu'une, sa hauteur. Il prépare ses élèves à confondre, par exemple, le petit trapèze mixtiligne sous la courbe et le petit rectangle, à la comparaison des infiniment petits d'ordres différents. On remarque l'effort de rigueur, de concision et de simplicité de Laplace, qui, comme de nombreux savants de l'époque révolutionnaire va mettre son savoir et son talent au service de l'enseignement des "commençants". L'effort didactique amènera aussi les savants à réfléchir sur les fondements de leurs théories.

7. 2. Lazare Carnot et la "compensation des erreurs".

Lazare Carnot, aussi, tente de rendre satisfaisantes les bases du calcul infinitésimal, dans son essai de 1797, *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal*, qu'il reprend en 1813. Carnot défend la thèse selon laquelle les diverses méthodes qui ont été développées "ne sont à proprement parler qu'une seule et même méthode présentée sous divers points de vue. C'est toujours la méthode d'exhaustion des anciens, plus ou moins simplifiée, plus ou moins heureusement appropriée aux besoins du calcul, et enfin réduite en un algorithme régulier. Mais cet algorithme est d'une haute importance, c'est un instrument avec lequel ils abrègent et facilitent le travail de l'esprit en le réduisant pour ainsi dire en travail mécanique."[1] Il va donc n'exclure aucune de ces méthodes, mais choisir, pour l'usage habituel, celle qui lui apparait la plus facile, la méthode des différentielles de Leibniz. Il accepte donc les quantités infiniment petites, qu'il définit comme des quantités "continuellement décroissantes, tellement qu'elles puissent être rendues aussi petites que l'on veut sans

[1] Lazare Carnot. *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Paris, 1797, réédition Blanchard, 1970, p. 123

qu'on soit obligé pour cela de faire varier celles dont on cherche la relation."[1] Et il considère que , bien que Leibniz néglige des quantités infiniment petites dans les relations qui traduisent le problème et dans ses calculs, les résultats finaux sont exacts, car les erreurs commises à diverses étapes du calcul se compensent. La position nous étonne, mais c'était aussi celle d'Euler et de Lagrange, et également de l'évêque Berkeley.

Pour appuyer sa thèse, il choisit deux ou trois exemples de problèmes, parmi lesquels celui du volume de la pyramide, qu'il traite successivement par les diverses méthodes qu'il étudie.

- Il expose d'abord une méthode tout à fait proche de celle que nous avons vu Laplace utiliser. Pour prouver que deux pyramides de même base et de même hauteur sont égales en volume, Carnot explique que chaque tranche infiniment mince de chaque pyramide contient un prisme et un onglet (les trois onglets de Laplace sont par Carnot désignés de façon collective), infiniment petit par rapport à la tranche. Selon le principe fondamental qu'il a énoncé: "Deux quantités non arbitraires sont rigoureusement égales entre elles, du moment que leur différence prétendue peut être supposée aussi petite qu'on le veut"[2], les tranches T et T' correspondantes vérifient: $T - q = T' - q'$. Négligeant les volumes q et q' des onglets, infiniment petits par rapport aux volumes T et T' des tranches, il obtient l'équation $T = T'$. "Comme cette équation n'est pas dégagée de l'infini[3], nous ne pouvons encore savoir si elle est exacte ou seulement imparfaite[4]; mais comme on peut appliquer à toutes les tranches qui composent les pyramides entières ce que nous venons de dire de deux d'entre elles, il suit qu'on aura $P = P'$. Or ces deux volumes des pyramides entières sont des quantités fixes. Donc l'équation $P = P'$ est entièrement dégagée de toute considération de l'infini. Donc elle est nécessairement et rigoureusement exacte."[5] Pour Carnot, en effet, le moyen de vérifier que le calcul a abouti à un résultat exact et non plus approché - il considère que les égalités qui font intervenir les différentielles, par exemple, sont des égalités approchées - est l'absence en fin de calcul des éléments infinitésimaux, "quantités arbitraires qui produisent des erreurs".[6] Remarquons que, à la différence de Laplace, il n'a pas pris soin de s'assurer que la somme des onglets, en nombre infini, était bien infiniment petite. La comparaison des deux infiniment petits, tranche et onglet lui paraît suffisante.

---

1 ibid., p.13
2 Principe fondamental, Corollaire premier, ibid., p.19
3 les tranches sont infiniment minces.
4 les équations imparfaites sont, dans le vocabulaire de Carnot, celles qui correspondent à des égalités approchées où on a négligé certains termes.
5 ibid., p.31
6 ibid., p. 12

- Il présente une autre démonstration s'appuyant sur le même principe fondamental, démonstration tout à fait semblable à celle que nous avons lue dans les *Eléments de Géométrie* de Tacquet. Chacune des deux pyramides est comprise entre deux empilements de prismes dont la différence est infiniment petite, car égale au produit de sa base par la hauteur d'une tranche. Les sommes des prismes intérieurs aux deux pyramides sont égales; de même pour les sommes des prismes extérieurs; donc la différence entre les deux pyramides est infiniment petite: les deux pyramides sont donc égales.[1]

- La méthode par exhaustion est pour Carnot, une façon d'exprimer les démonstrations précédentes. Les éléments infinitésimaux sont pour lui, des quantités auxiliaires, qui disparaissent en fin de calcul. La méthode par exhaustion se réduit également à faire intervenir des quantités auxiliaires - par exemple les empilements de prismes construits par Euclide à l'intérieur des deux pyramides - dont les propriétés se retrouvent par induction , en vertu d'une "loi de continuité", dans les quantités considérées comme les termes extrêmes des quantités auxiliaires - les volumes des pyramides, vers lesquelles tendent les empilements de prismes. La démonstration par l'absurde est là pour "constater la certitude de la relation".[2]

- La méthode de comparaison de deux pyramides par les indivisibles - Carnot reprend le schéma de la démonstration que nous avons vue à l'oeuvre dans le Livre VII de la *Géométrie* de Cavalieri ou dans les *Elémens de Géométrie* de Lamy - n'est autre chose qu'un "corollaire de la méthode d'exhaustion". Il n'argumente pas cette thèse de façon tout à fait convaincante, et se contente de se référer aux déclarations de Pascal qu'il cite longuement : "tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles se démontrera aussi à la rigueur et à la manière des anciens et (...) ainsi l'une de ces méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler." Il n'y a là donc qu'un moyen habile d'éviter le recours à la démonstration par l'absurde.[3] Carnot présente également une démonstration par la théorie arithmétique des indivisibles, à la manière de Roberval et que nous avons retrouvé dans *La Science des Géomètres* de l'Abbé Deidier. Le volume de la pyramide de base B et de hauteur H est une somme d'éléments infiniment petits qui sont de la forme $\frac{B}{H^2} \times h^2$, pour h entier croissant de 0 jusqu'à H . Il vaut $\frac{B}{H^2} \left(\frac{2H^3 + 3H^2 + H}{6} \right)$. Le nombre H étant infini, les termes $\frac{3H^2}{6}$ et $\frac{H}{6}$ "disparaissent vis à vis de ce premier terme".[4] C'est, selon

---

[1] ibid., p. 31-32
[2] ibid., p. 88
[3] ibid., p. 89-92
[4] ibid., p. 93-94

Carnot, la méthode d'exhaustion à laquelle on a adjoint le principe de négliger une quantité infiniment petite vis à vis d'une autre.

- Il applique également la méthode différentielle au calcul du volume V d'une pyramide. L'élément de pyramide, situé à la distance x du sommet, a pour volume dV:

$dV = \frac{B}{H^2} x^2 dx + q$, où q désigne le volume infiniment petit de l'onglet. En le négligeant et en prenant l'intégrale de l'équation "inexacte" $dV = \frac{B}{H^2} x^2 dx$, Carnot obtient $V = \frac{B}{3H^2} x^3 + C$. Il vérifie que cette équation est pourtant exacte en calculant une petite variation dV de ce volume. $dV = \frac{B}{3H^2} (x + dx)^3 - \frac{B}{3H^2} x^3$. Il remarque que les termes $\frac{B}{3H^2} (3x \ dx^2 + dx^3)$ sont omis dans l'expression de la différentielle et dans l'opération d'intégration; mais il considère que le procédé est valide, car leur somme peut être supposée aussi petite que l'on veut (ce qu'il ne démontre d'ailleurs pas plus avant).[1] Nous remarquons qu'il reste un flou sur le sens de la notation dV qu'il n'utilise pas ici dans le sens leibnizien. Carnot prétend avoir ainsi démontré que la méthode différentielle équivaut à la méthode arithmétique des indivisibles et aux deux premières méthodes exposées, car elles recourent toutes à la méthode algébrique "des coefficients indéterminés" de Descartes, méthode qui, exprimée par Carnot, consiste à considérer que, si dans l'équation
$A + B x + C x^2 + D x^3 + \ldots = 0$, x est une quantité variable qui peut être supposée aussi petite que l'on veut, alors $A = B = C = D = \cdots = 0$. [2]

La "vraie métaphysique" du calcul infinitésimal est sans doute[3], la notion de limite, mais une notion de limite plus précise que celle de d'Alembert ou de Laplace dans ses _Cours de l'Ecole Normale de l'An III_. C'est la notion de limite reprécisée par Cauchy et arithmétisée par Weierstrass. C'est avec le langage des limites que Cauchy a défini la notion de fonction continue, puis de dérivée, puis d'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle, et avec ce langage on peut expliquer de façon unifiante toutes les méthodes mises en jeu depuis Euclide pour le calcul du volume de la pyramide. Chacune des deux pyramides comparées a pour volume la limite de la suite des volumes des prismes définis par le découpage réitéré d'Euclide, ou des prismes définis par Tacquet ou Lagrange. L'intégrale de la fonction, qui à la hauteur x

---

[1] ibid., p. 103-104
[2] ibid., p. 95 et suivantes.
[3] Les concepts de l'Analyse non-standard prétendent aussi permettre de réinterpréter toutes ces méthodes

de la pyramide associe son volume, est la limite de la somme de Riemann de cette fonction. Les sections indivisibles des deux pyramides comparées ont pour aire la dérivée de la "fonction volume"; les "fonctions volumes" des deux pyramides ayant même dérivée et même valeur initiale (zéro, pour x=0), sont donc égales. La méthode de Roberval peut aussi se traduire dans le langage des limites; on peut considérer la suite définie comme la somme des volumes de n petits prismes d'épaisseur commune inscrits dans la pyramide; sa limite est le volume de la pyramide.

Malgré son erreur sur le choix du concept unificateur, la démarche de Carnot a son intérêt, et va dans le sens dans lequel se développeront les mathématiques du XIX^{ème} siècle : elles chercheront à fonder les théories sur des bases solides et rigoureuses, et à unifier les méthodes. Le désir de Carnot d'unifier les méthodes apparemment divergentes de l'Analyse infinitésimale, méthodes qui, mises en application sur les mêmes objets, donnent pourtant des résultats convergents, est également précurseur. Sa tentative de faire appel, pour la démarche unificatrice, à une procédure algébrique est aussi tout à fait dans le sens de l'évolution des mathématiques du XIX^{ème} siècle. S'il n'a pas fait les meilleurs choix, c'est sans doute aussi que les concepts utiles n'étaient pas encore assez élaborés: le concept de fonction et celui de limite d'une fonction; il est nécessaire également de mettre en forme un champ numérique homogène, qui permette de faire sortir le problème du cadre uniquement géométrique. Lagrange, en 1797, dans la *Théorie des fonctions analytiques* , appliquera la théorie des fonctions à la mesure des aires, et aux calculs de solidités. Le premier, il donnera une solution analytique au problème du volume d'un solide, le définissant à l'aide de la primitive d'une fonction:

" Si la fonction $f\,x$ exprimait l'aire de la section d'un solide, faite perpendiculairement à l'abscisse x on prouverait de la même manière que la solidité serait exprimée par la fonction primitive de $f\,x$. Car désignant par Fx la solidité, la différence $F(x + i) - Fx$ exprimerait la portion du solide comprise entre les deux sections $f\,(x + i)$ et $f\,x$, et cette portion serait nécessairement intermédiaire entre les deux solides prismatiques $i\;f\,x$ et $i\,f\,(x + i)$, en prenant la quantité i aussi petite qu'on voudrait; d'où l'on conclurait, comme ci-dessus, $F'\,x = f\,x$."[1]

[1] Lagrange *Théorie des fonctions analytiques* , p. 156- 157

8. Conclusion

8. 1. Les méandres de l'histoire

L'histoire des démonstrations concernant le volume de la pyramide ne présente pas un développement linéaire, cumulatif et orienté, au contraire de la vision positiviste du progrès des connaissances. Elle apparait plutôt comme un entrelacs d'avancées et de reculs, de tentatives parfois sans suite ou momentanément abandonnées, qui ressurgissent éventuellement sous des formes différentes.

On a vu ainsi la méthode par exhaustion, après avoir subi des allègements au XVI^{ème} siècle, être délaissée, au XVII^{ème} siècle, par Cavalieri et les tenants des méthodes par les indivisibles , reprise ensuite, sous une forme nouvelle, par Tacquet; on la verra reprise encore, d'une façon un peu plus euclidienne, par Legendre dans les premières éditions de ses *Eléments de Géométrie* , dont je dis quelques mots à l'Annexe I. Elle est délaissée parce qu'on la trouve trop longue, peu éclairante, mais, jusqu'au début du XIX^{ème} siècle, elle reste considérée comme la méthode qui garantit la validité des raisonnements. On a vu Cavalieri, Roberval, Newton, Leibniz s'y référer et tenir leurs propres méthodes équivalentes à la méthode par exhaustion.

On a vu, chez les tenants des méthodes faisant appel à l'outil des infiniment petits, des positions très variées: Une théorie des infiniment petits est soutenue par les philosophes atomistes à partir du V^{ème} siècle avant J.C., puis mise au ban des mathématiques; elle ressort dans certaines discussions au Moyen-âge, puis influence Cavalieri dans ses constructions théoriques, bien qu'il se défende absolument de considérer les indivisibles comme des atomes effectifs de la figure. Elle est nettement assumée par Wallis, Roberval, Pascal et d'autres, comme un outil de calcul, sinon comme une position philosophique. Pour Lamy, c'est une fiction commode. Newton utilise, puis rejette les infiniment petits, Leibniz les accepte comme instruments de raisonnement et développe, indépendamment , des théories métaphysiques apparentées; il ne demande cependant pas aux mathématiciens d'adhérer à sa théorie des monades. Les défenseurs de Newton comme Mac Laurin ou d'Alembert rejettent tout usage des infiniment petits, difficiles à concevoir ou à admettre. Carnot semble les considérer comme des objets mathématiques susceptibles d'une définition rigoureuse.

On a vu émerger l'idée de limite et quelques techniques de calcul sur les limites émerger implicitement dans le langage et la démonstration de Tacquet: la différence entre le volume de la pyramide et celui des prismes inscrits peut être rendue plus petite que toute quantité donnée. Elle réapparaît chez Newton, dans un cadre théorique nouveau, celui des premières et dernières raisons, éloigné de la position plus classique de Tacquet, mais justifiée par les mêmes types de raisonnement et de calcul. L'idée de limite est relativement absente du calcul infinitésimal qui se développe au début du XVII^{ème} siècle sur le continent, puis d'Alembert la fait ressurgir et Laplace lui donne le rôle fondamental; je signalerai à l'Annexe I, sa place primordiale dans les entreprises de rigorisation du calcul infinitésimal au XIX^{ème} siècle.

Remarquons aussi toutes les tentatives, riches d'idées fructueuses inspiratrices de techniques créatrices, mais qui seront pourtant abandonnées. La première théorie des indivisibles de Cavalieri, celle de "toutes les lignes", édifice pourtant construit avec soin, n'aura pas beaucoup de lecteurs ni d'adeptes. Le principe de Cavalieri, sa deuxième théorie des indivisibles, sera utilisé pendant plus d'un siècle, encore par d'Alembert dans *l'Encyclopédie*, par Bezout dans ses traités de géométrie, mais ne donnera plus lieu ensuite à d'autres développements. La théorie des fluxions de Newton, même après la tentative de mise en forme plus rigoureuse faite par Mac Laurin, tombera aussi en désuétude.

Si on s'attache au niveau technique des découpages de la pyramide utilisés au cours des âges, on remarque que le découpage d'Euclide, par les milieux des arêtes - qui permettait d'enlever à chaque étape du découpage plus de la moitié de la pyramide, et d'utiliser la proposition I du Livre X des *Eléments*, afin de mettre en jeu le raisonement par exhaustion - est le plus souvent abandonné au profit d'un découpage en tranches parallèles, mais les manières de considérer et éventuellement d'encadrer les restes sont très variées. On "néglige" les restes dans certaines techniques des indivisibles, ou dans les approches leibniziennes du calcul intégral, comme chez les mathématiciens chinois, mais dans des cadres théoriques bien différents; Tacquet encadre précisément les restes, d'une manière qui se retrouvera dans la douxième édition des *Eléments de géométrie* de Legendre, mais différente de celle de Laplace par exemple.

8. 2. Le progrès en mathématiques

Si, au delà de la description, on cherche, sur cet exemple, à comprendre comment procèdent les *progrès* des mathématiques, on doit me semble-t-il, relativiser les explications proposées par plusieurs modèles [1]. Pour Bachelard, on ne connaît que contre une connaissance antérieure et l'essentiel du progrès est dû au combat contre des obstacles épistémologiques. Il est vrai que les Jésuites, au XVII^{ème} siècle, héritiers de la philosophie scholastique, exercèrent une influence très négative pour l'acceptation des concepts nouveaux, qui mettaient en jeu indivisibles ou infiniment petits. La résistance des Jésuites a duré longtemps, et a peut-être ralenti le développement de la réflexion sur les méthodes infinitésimales. Mais la réflexion des

[1] Les modèles du développement des connaissances développés par l'épistémologie sont plus adéquats aux développements des sciences de la nature qu'aux mathématiques.

Jésuites comme Tacquet, a aussi ouvert la voie à des notions nouvelles; on a pu remarquer l'émergence d'une idée de limite, une forme de découpage de la pyramide et de traitement des restes qui s'imposera à partir du XIXème siècle. Et surtout, contre la position de Bachelard, il faut remarquer que les tenants des méthodes nouvelles, qui utilisaient, malgré les interdits philosophiques ou religieux les outils des infiniment petits, ne rejetaient absolument pas les théories antérieures. Au contraire, comme je l'ai déjà dit, à plusieurs reprises, les *méthodes des anciens* restent la référence qui valide leurs propres méthodes. Ils considèrent la méthode nouvelle qu'ils défendent comme équivalente aux méthodes des anciens, comme des abrégés plus performants de ces méthodes. Et lorsqu'ils se réfèrent à leurs précurseurs plus immédiats, le plus souvent, ils ne rejettent pas leurs théories et leurs résultats. Ainsi Newton ou Leibniz ont beaucoup de respect pour le travail de Cavalieri; s'ils développent une méthode nouvelle, c'est que certaines des prémisses de Cavalieri leur paraissent discutables mais pas nécessairement à rejeter complètement. La plupart des mathématiciens du XVIIème siècle ne rejettent pas non plus mutuellement leurs théories, qui se présentent souvent sous des formes et sur des fondements très différents; s'il y a querelle, c'est plutôt des querelles de personnes, d'auteurs revendiquant la priorité d'une découverte ou la propriété d'une méthode; mais ils considèrent leurs théories compatibles entre elles et compatibles avec les théories précédentes.

La naissance du calcul différentiel pourrait être adéquatement décrite par la conception kuhnienne[1] d'une avancée résultant de l'accumulation de contradictions: l'abondance des critiques et contrexemples qui s'opposent aux théories des indivisibles a poussé les mathématiciens à construire un nouvel édifice qui n'offre pas le flanc aux mêmes critiques. On peut aussi utiliser la notion de *science normale* pour décrire l'ensemble des concepts et des conventions généralement adoptés par les mathématiciens jusqu'au XVIIème siècle; on peut considérer qu'à la fin du XVIème et au XVIIème siècles, certaines barrières de la *science normale* , jusqu'alors acceptée de façon unanime, sont transgressées. Ainsi les interdits sur la division à l'infini d'une figure en éléments infiniment petits sont bravés; ainsi certains mathématiciens se permettent de négliger des quantités, de comparer entre eux des infiniment petits. Ainsi Cavalieri, puis Roberval, de façon plus osée, et enfin le courant leibnizien, vont étendre, puis faire éclater le carcan de la théorie des grandeurs euclidiennes, de la théorie des proportions. On assiste à un phénomène d'extension et de relâchement des définitions, que Lakatos[2] considère comme une étape importante du développement des mathématiques. Sans avoir construit une nouvelle théorie des

---

[1] Je fais référence ici aux théories développées par exemple dans Kuhn, La structure des révolutions scientifiques ou La tension essentielle

[2]Je fais référence ici aux théories développées par exemple dans Lakatos, *Preuves et réfutations*

grandeurs, les mathématiciens vont étendre leur champ; Cavalieri considère "toutes les lignes" d'une figure comme une grandeur susceptible d'application de la théorie des proportions; certains considèrent les quantités infiniment petites comme on avait considéré les grandeurs; Roberval, et les tenants de l'*Arithmétique des infinis* associeront des nombres aux grandeurs, avec beaucoup de liberté, puisque ces nombres sont plutôt des conventions de calcul que des mesures de ces grandeurs; avec l'introduction de ses notations très souples les tenants des méthodes leibniziennes vont petit à petit manipuler algébriquement comme des nombres, ce qu'on considérait auparavant comme des grandeurs, calculant, par exemple, sur les différentielles comme sur les nombres. [1] Cependant le concept de l'*incommensurabilité entre les anciens et les nouveaux paradigmes* s'applique mal aux mathématiques. Une caractéristique importante de l'évolution des mathématiques, qui n'a pas été souvent relevée est, par opposition aux idées mentionnées ci-dessus, la volonté d'absorption des théories antérieures, le désir de construire une théorie plus englobante, enfin le désir d'unification des méthodes qu'on a bien reconnu chez Carnot. Les théories de Cavalieri sont, pour un temps, violemment critiquées, mais quelques décennies plus tard, Leibniz par exemple, sans développer beaucoup son idée, note cependant qu'il obtient, pour un choix particulier des dx, la méthode de Cavalieri. Les tentatives de Newton et de Leibniz consistent à rendre acceptables des objets, qui sans être des atomes indivisibles, sont pourtant des infiniment petits; pour ce faire ils les considèrent plutôt négativement, en précisant dans quelles conditions on peut ne pas en tenir compte.

8. 3. Le "ressort" de l'histoire des démonstrations sur le volume de la pyramide

On peut se demander ce qui, précisément, a fait évoluer les démonstrations du calcul du volume de la pyramide. Il faut se rappeler que ces démonstrations ne sont pas composées pour convaincre le lecteur de l'exactitude du résultat, qui est établi de façon indubitable depuis Euclide; mais elles sont proposées et composées à différentes fins. Chez Cavalieri, elles doivent convaincre le lecteur de la validité de ses techniques de démonstration; pour L. Carré, cette démonstration fait connaître une nouvelle théorie mathématique; pour Laplace, la démonstration est utilisée à des fins pédagogiques, pour préparer le lecteur à l'usage des méthodes les plus sophistiquées de calcul infinitésimal.

---

[1] Le rôle primordial de Descartes dans le travail de numérisation des grandeurs géométriques est occulté par cette étude, puisqu'il ne s'est pas occupé de calculs de volumes .

Le ressort de l'évolution de ces démonstrations me paraît être une tension entre deux pôles contradictoires. L'un de ces pôles est l'autorité du modèle euclidien, de sa rigueur axiomatico-déductive, sur l'exactitude duquel un consensus se fait depuis toujours. L'autre pôle est la tentation de faire appel à des concepts qui sont en contradiction avec les constructions euclidiennes: les notions infinitésimales, par exemple, qui stimulent l'imagination des mathématiciens, qui leur ouvrent les portes pour résoudre de nouveaux problèmes. Cette tension se manifeste par le fait que ces notions qui transgressent les canons euclidiens sont masquées ou considérées comme un simple auxiliaire, commode, mais traduisible dans le langage antérieur. Ce déséquilibre constant, ce balancement toujours en puissance entre les deux pôles explique sans doute des positions contradictoires, parfois chez un même auteur: Cavalieri, par exemple, revendique que ses méthodes bien qu'évidemment très inspirées par les idées infinitésimales, n'utilisent absolument pas d'infiniment petits, il ne prétend pas qu'une figure soit composée d'une infinité de lignes, ne parle jamais du nombre de ses lignes; et pourtant son travail amènera d'autres mathématiciens à recourir aux indivisibles actuels, aux découpage d'une figure en une infinité actuelle de lignes ou de plans; Roberval reconnaît que ses méthodes, certes, utilisent des infiniment petits, mais il affirme qu'elles peuvent être validées sans recours aucun aux quantités infinitésimales. C'est cette tension qui peut expliquer que Newton, après avoir dans ses premiers écrits utilisé les "moments", entreprenne de reconstruire le nouveau calcul sur la méthode des premières et dernières raisons, prétendant exclure tout infiniment petit; que Mac Laurin essaie de faire entrer dans l'axiomatique euclidienne, comme de nouveaux objets mathématiques, conformes aux canons euclidiens, le temps, le mouvement, les notions de mouvement uniforme, accéléré, retardé, cette tension peut expliquer qu'il entreprenne de reconstruire tout l'édifice de Newton, sur la théorie des fluxions sans appel aux quantités infinitésimales et que pourtant il ne puisse éviter d'utiliser ces quantités au livre II de son *Traité des Fluxions* , pour résoudre certains problèmes. C'est aussi cette tension qui peut expliquer la contradiction entre les positions théoriques défendues par d'Alembert et la démonstration effective qu'il propose dans l'article *Pyramide* , ou qui peut expliquer le désir unificateur de Carnot. Le résultat concernant le volume de la pyramide étant classique, le travail sur sa démonstration est très proche du travail de fondation des théories utilisées, travail de fondation plus ou moins conscient suivant les auteurs, évident pour Cavalieri, sans doute moins clair chez Tacquet, par exemple, effort qu'on voit nettement à l'oeuvre dans les *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal* . On verra, dans l'annexe II, que les questions que se poseront les mathématiciens du XX^{ème} siècle sur le sujet, auront justement trait à des problèmes de fondements: comment fonder une théorie des volumes sur une axiomatique minimale.

ANNEXE I

Quelques remarques sur les démonstrations proposées au XIXème siècle.

L'évolution des méthodes proposées au XIXème siècle, période fondamentale pour l'axiomatisation de l'analyse infinitésimale resterait à faire, pour voir si les démonstrations relatives au volume de la pyramide rendent compte ou révèlent quelques traces de la manière dont ont évolué à cette époque la notion de fonction, dont ont été définies les notions de limite, de dérivée, d'intégrale... Cependant d'après les ouvrages du XIXème siècle que j'ai pu consulter, le sujet est traité dans les manuels de géométrie élémentaire, avec fort peu de recours aux nouvelles notions d'analyse. Un prototype de ces démonstrations est celle de la douzième édition[1] des *Eléments de Géométrie* de Legendre (1823). Legendre, en réaction contre les traités du XVIIIème siècle, revient à une axiomatique de type euclidien, afin de "satisfaire l'esprit en composant des éléments très rigoureux", écrit-il dans sa préface. Son traité dominera l'enseignement de la géométrie dans tout le monde occidental pendant un siècle. Il connaîtra 21 éditions successives de 1794 à 1878, et sera traduit en plusieurs langues. On retrouve, dans cette démonstration, l'idée directrice de la démonstration de Tacquet. Mais Legendre ne devait pas la connaître, pas plus que d'autres construites sur le même schéma (celle de Carnot citée en deuxième exemple, qu'on trouve reformulée par Lacroix dans ses *Eléments de géométrie* de 1811). Cette démonstration lui a été suggérée par Querret, un chef d'instruction à Saint-Malo, explique Legendre dans sa préface.

Pour prouver que les volumes V et V' des deux pyramides de même base et de même hauteur sont égaux, il inscrit et circonscrit des prismes dans les deux pyramides. Au lieu de considérer, comme Tacquet, que l'empilement des prismes peut être, à peu de choses près, confondu avec la pyramide, il utilise un raisonnement par l'absurde pour prouver que la différence entre les volumes des deux pyramides comparées ne peut être que nulle. Supposant $V > V'$, il montre deux inégalités contradictoires sur les volumes V_e et v_i des prismes circonscrits et inscrits:
$V-V' < V_e - v_i$ et $V-V' > V_e - v_i$. Il explicite tous les calculs en détail, et en particulier toutes les inégalités nécessaires à son raisonnement.

Ce raisonnement par l'absurde sera économisé ensuite par la mise en jeu de suites. La suite (S_n), somme des volumes de prismes de même hauteur égale à la

---

[1] Dans la première édition des *Eléments de Géométrie*, de 1794, Legendre donne une démonstration qui s'appuie sur la décomposition réitérée de la pyramide à la manière d'Euclide et la proposition concernant le volume est démontrée par un double raisonnement par l'absurde, proche du raisonnement par exhaustion classique.

$n^{ième}$ partie de la hauteur de la pyramide, et la suite (s_n), somme des volumes des prismes inscrits de même hauteur, ont même limite, le volume de la pyramide. Témoin, la démonstration, exemplaire de concision et de simplicité, de Jacques Hadamard dans ses *Leçons de Géométrie*, publiées en 1898, et rééditées jusqu'en 1949.

ANNEXE II

Le troisième problème de Hilbert [1]

Au second congrès international des Mathématiciens qui se tint à Paris en 1900, Hilbert posa vingt-trois problèmes touchant les différents domaines des mathématiques. Le troisième problème de Hilbert est le seul touchant aux mathématiques élémentaires. Il a pour titre: "De l'égalité en volumes de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales". Comme on peut le lire dans l'extrait ci-joint de sa communication, Hilbert fait remarquer que le problème plan analogue au troisième problème, montrer que deux triangles de bases et de hauteurs égales ont même aire peut se résoudre de façon simple, par exemple par découpage et repositionnement d'un nombre fini de pièces. On peut même montrer de cette manière l'égalité des aires de deux polygones de formes quelconques. Par contre, pour calculer le volume d'une pyramide et pour montrer que deux pyramides de bases et de hauteurs égales ont même volume, Hilbert rappelle que les mathématiciens, depuis Euclide, ont toujours eu recours à des méthodes équivalentes à la méthode d'exhaustion, des méthodes faisant intervenir l'axiome de continuité, précise-t-il en utilisant le langage des *Fondements de la Géométrie*.

Le tétraèdre étant le solide élémentaire à partir duquel on peut construire tous les polyèdres, la question posée dans le troisième problème de Hilbert peut donc être lue de la façon suivante: peut-on élaborer une théorie de la mesure des polyèdres évitant le recours à des procédés apparentés aux méthodes de limites? Hilbert cherche donc à construire de façon minimale une théorie des volumes.

[1] Cet aspect est plus développé dans M. Bühler, M. Grégoire, *Puzzle et casse-tête*, in *La figure et l'espace*, Actes du 8ème colloque inter-IREM de la commission Epistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Lyon, 1993

Déjà, Legendre, dans ses *Eléments de Géométrie*, avait affiné la notion d'égalité de figures qui avait plus ou moins persisté depuis Euclide. Il introduit le terme d'*équivalent* pour exprimer que deux figures planes sont égales en surface, ou que deux solides sont égaux en *solidité*, et réserve aux figures superposables la dénomination d'*égales* [1]. Euclide utilisait le même terme pour des figures superposables et des figures de même aire non superposables, considérant en particulier sans explication particulière, que des figures planes symétriques par rapport à un axe ou des figures solides symétriques par rapport à un point ou un plan étaient égales. Au XIX^{ème} siècle on a cherché, de plus, à comprendre plus précisément le lien entre l'égalité des aires de deux figures et la possibilité de les décomposer à l'aide des mêmes morceaux, de façon finie. Pour abréger, je désignerai cette dernière propriété par le terme d'*équidécomposabilité* [2]. Deux polygones sont équidécomposables si on peut découper l'un d'eux en un nombre fini de pièces et réarranger ces pièces pour obtenir l'autre polygone. On peut donner une définition analogue de l'équidécomposabilité de deux polyèdres. Il est bien évident que deux polygones équidécomposables ont même aire. La réciproque est-elle vraie? F. Bolyai, le père de J. Bolyai, en 1832 et Gerwien, officier prussien et mathématicien amateur, en 1833, donnent une réponse affirmative à cette question. La démonstration de Gerwien est parue dans le journal de Crelle.[3] Il est même possible de démontrer que deux polygones de même aire sont équidécomposables avec des pièces de même orientation et même avec des pièces à côtés parallèles, ce qui a été fait par Hadwiger et Glur en 1951...

Hilbert a montré dans ses *Fondements de la Géométrie*, que la théorie des aires peut être fondée sur les seuls axiomes d'association, de distribution, de congruence et des parallèles. A cet effet, Hilbert remplace l'idée intuitive d'aire par une aire formelle, qui n'est pas un nombre mais un segment; il évite ainsi la mesure des segments et l'emploi de nombres irrationnels.

Le problème analogue pour les volumes est de chercher si deux polyèdres de même volume sont équidécomposables. On peut démontrer avec les méthodes dérivées de la méthode des aires, que deux prismes de même volume sont équidécomposables avec un cube et donc équidécomposables entre eux. Je n'ai trouvé de démonstration de ce résultat élémentaire que dans l'article de H. Lebesgue *Sur*

---

1 Legendre *Eléments de Géométrie*, 1794, Livre III, def. 1

2 Je ne parlerai pas ici de l'équicomplémentarité; deux polygones (ou polyèdres) sont équicomplémentables si ont peut, en les complétant par les mêmes pièces, en nombre fini, obtenir le même polygone (ou polyèdre) . Euclide, on l'a vu à la proposition du Livre I utilise l'équicomplémentarité pour reconnaitre que des figures sont égales. On peut montrer que l'équicomplémentarité équivaut à l'équidécomposabilité, dans le plan comme dans l'espace euclidien de dimension 3. Cette équivalence en dimension 3 ne sera démontrée qu'en 1943, par J.P. Sydler.

3 *Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke*. (von Herrn Gerwien, pr. Lieut. im Königl. Preuss. 22sten Inf. Regiment) Journal de Crelle 1833.

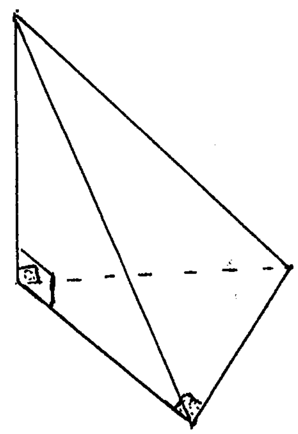
l'équivalence de polyèdres..:. de 1938. Sa démonstration s'appuie sur le fait que tout parallélogramme est équidécomposable avec un rectangle dont un côté est l'unité - l'autre définissant son aire - et tout prisme équidécomposable avec un parallélipipède dont la base est un carré de côté 1. Legendre avait, dans une note ajoutée à ses *Eléments de Géométrie* , démontré que deux tétraèdres symétriques par rapport à un plan sont équidécomposables.

Hilbert mentionne que Gerling, en 1844, démontre que deux polyèdres symétriques sont équidécomposables avec des pièces strictement de même orientation. M. J. Hill, professeur de mathématiques de l'université de Londres, se préoccupe d'éviter le recours aux méthodes des limites pour calculer le volume des tétraèdres et, en 1895, donne des exemples de plusieurs familles de tétraèdres dont le volume peut être calculé à l'aide de simples empilements de solides. En fait, on peut démontrer avec le résultats de Sydler de 1943, que ce genre de tétraèdre est équidécomposable avec un prisme ou un cube. Les tétraèdres mis à jour par Hill, sont obtenus en observant les propriétés géométriques que doivent vérifier les prismes pour qu'ils soient décomposables en tétraèdres deux à deux superposables ou symétriques. Hill précise des relations vérifiées par les arêtes de tels tétraèdres. Il y a, par exemple, une première famille dont les arêtes ont pour longueur:

$AC = a\sqrt{9-3r^2}$, $AD = BC = 2a$, $AB = BD = DC = a\sqrt{1+r^2}$

Si $r = 1$, on obtient le tétraèdre de Hill le plus simple, rectangle isocèle, sixième partie d'un cube (cf fig. 45).

fig. 45



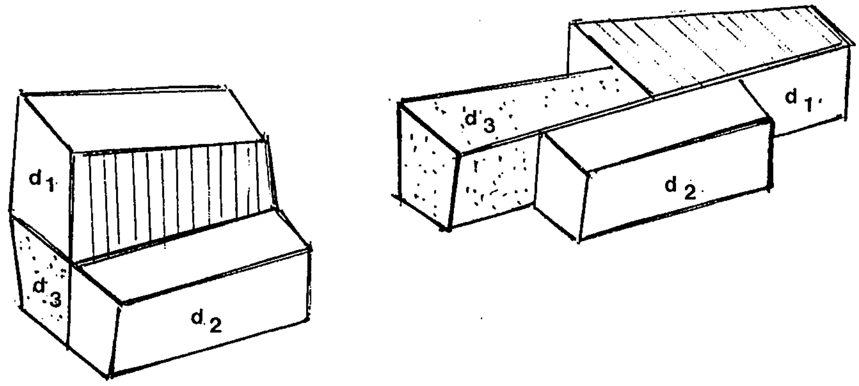
Hilbert a cependant l'intuition que ces tétraèdres ne sont que des exceptions.

Raoul Bricard, en 1896, est le premier à s'apercevoir qu'il existe une relation entre les dièdres de deux polyèdres équidécomposables, relation qu'on peut exprimer de façon simplifiée: les angles dièdres des deux polyèdres doivent être commensurables avec π [1]. Sa démonstration, simple, est malheureusement insuffisante. C'est sans doute pour cette raison qu'Hilbert n'en dit rien. Bricard

[1] R. Bricard *Sur question relative aux polyèdres* ,

suppose implicitement que la décomposition d'un polyèdre en morceaux polyédriques, d_1, d_2, ..., d_p, qui, réarrangés, composent l'autre polyèdre, respecte les arêtes; plus précisément, sa démonstration suppose qu'aucun sommet des polyèdres d_i ne soit élément d'un segment a_j , arête d'un autre polyèdre. Bricard n'envisage pas le type de situation représenté sur la figure 46, dans laquelle une arête "chevauche" plusieurs autres arêtes des autres morceaux :

fig. 46



Si on exclut donc ce type de décomposition, le long de chaque arête du polyèdre P, les dièdres des morceaux utilisés composent un dièdre égal à π, si l'arête est transportée sur une face du polyèdre P', un dièdre égal à 2π, si l'arête est transportée à l'intérieur du polyèdre P', ou un dièdre égal à un dièdre de P', si l'arête considérére est aussi une arête de P'. Il y a donc une relation linéaire à coefficients entiers entre les dièdres de P et de P' et le nombre π. Même si la démonstration de Bricard est insuffisante, la condition qu'il a exhibée doit être vérifiée si les deux polyèdres sont équidécomposables. Max Dehn, quelques mois après le congrès de Paris, avant que la communication de Hilbert ne soit publiée, met à jour de façon complète cette fois, que, pour que deux polyèdres soient équidécomposables, il faut qu'il existe une relation de dépendance linéaire à coefficients entiers entre le réel π et les dièdres d_i et d'_j des deux polyèdres: $\Sigma c_i d_i + \Sigma c'_j d'_j = 0 \pmod{\pi}$

Dans cette relation, les entiers c_j et c'_j dépendent des longueurs des arêtes; si on considère toutes les relations linéaires à coefficients rationnels vérifiées par les longueurs des arêtes a_1, a_2, ... , a'_1, a'_2,... des deux polyèdres,

$L_k(a_1, a_2, \ldots a'_1, a'_2, \ldots) = 0$, les nombres c_i et c'_j vérifient toutes ces relations. La démonstration de Dehn consiste à ramener le problème tridimensionnel des décompositions possibles d'un tétraèdre en morceaux tétraédraux à un problème plan: recouvrir un rectangle donné sans lacune ni superposition par des rectangles partiels. Il montre ensuite, comme l'avait déjà remarqué Bricard, que le tétraèdre régulier (dont les dièdres ϕ sont tous égaux), n'est pas équidécomposable avec un cube (dont les dièdres sont tous égaux à $\frac{\pi}{2}$), car ϕ n'est pas commensurable avec π. Dehn montre également que le tétraèdre régulier n'est pas équidécomposable avec un tétraèdre rectangle et isocèle (celui de la figure 45) , et même qu'il existe une infinité non dénombrable de paires de polyèdres non équidécomposables.[1]

La démonstration de Dehn est difficile. Elle fut retravaillée par Kagan en 1903, dans l'article Ueber die Transformation der Polyeder [2], puis reprise vers 1950 par le mathématicien suisse Hadwiger[3], qui la traduisit dans un langage algébrique. Il utilisa la notion de fonction additive sur un ensemble de nombres: f est additive sur l'ensemble des nombres $a_1, a_2, \ldots a_k$, si, pour toute relation de dépendance linéaire à coefficients entiers

$n_1a_1 + n_2a_2 + \ldots + n_ka_k = 0$, on a: $n_1f(a_1) + n_2f(a_2) + \ldots + n_kf(a_k) = 0$;

il utilise aussi la notion d'*invariant de Dehn* d'un polyèdre. Si $a_1, \ldots, a_k$ sont les dièdres d'un polyèdre P , $l_1, l_2, \ldots, l_k$, les longueurs des arêtes correspondantes et si f est une fonction additive quelconque sur l'ensemble des nombres $a_1, \ldots, a_k$, le nombre, noté f(P), avec $f(P) = l_1f(a_1) + l_2f(a_2) + \ldots + l_kf(a_k)$, est un invariant de Dehn du polyèdre P. Il y a autant d'invariants que de fonctions additives f sur $a_1, \ldots, a_k$ Le résultat de Dehn est reformulé par Hadwiger de la manière suivante: Si deux polyèdres P et P' de même volume sont équidécomposables, tout invariant de Dehn f, tel que $f(\pi) = 0$, vérifie $f(P) = f(P')$. Ou , s'il existe, pour deux polyèdres P et P' de même volume, un invariant de Dehn , tel que $f(\pi) = 0$ et $f(P) \neq f(P')$, alors P et P' ne sont pas équidécomposables.

A l'aide de ce théorème, il est facile de mettre en évidence que deux pyramides de même hauteur et dont les bases sont des triangles de même aire peuvent avoir des invariants de Dehn différents, et donc ne pas être équidécomposables.

Restait le problème réciproque: La condition de Dehn est-elle une condition suffisante pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables? Le problème, difficile, fut attaqué à plusieurs reprises par J.P. Sydler et finalement résolu en 1965. La condition de Dehn est nécessaire et suffisante: pour que deux polyèdres P et P' de même volume soient équidécomposables, il faut et il suffit que, pour tout invariant de Dehn f des polyèdres P et P' tel que $f(\pi) = 0$, on ait $f(P) = f(P')$. Une nouvelle démonstration a été donnée par Jensen en 1968.

---

1 Lebesgue montre, en 1938, dans l'article déjà cité, que des polyèdres réguliers ne sont pas équidécomposables entre eux.

2 V. F. Kagan Ueber die Transformation der Polyeder, Math. Ann. 57, p.421-424

3 Hadwiger 1950, Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder, Math. Arch. 2, p. 441-444,

Recueil de textes

Euclide, *Les Eléments* , traduction Peyrard, réédition Blanchard , Paris, 1966, Livre XII, énoncés des propositions III à VII.

Wagner D.B. *An early derivation of the volume of a pyramid : Lui Hui, third century A.D.* , Historia Mathematica, Toronto, 1979, vol 6, p.164-188. Extraits.

Chuquet N. *La Géométrie*, 1484, édité par l'Huillier, Paris, Vrin, 1979, p.145-147.

Cavalieri B. *Geometria indivisibilibus continuorum* , Bononiae, 1635, réed. Bologne 1653, Livre II, proposition XXIV. et , Livre VII, proposition VII.

Lamy B. *Elémens de Géométrie* , Paris 1685, Livre IV , section IV.

Deidier *La science des Géomètres*, Jombert , Paris , 1739, *La théorie et la pratique du Géomètre* , Partie IV, Problème VI, et Partie II , *De l'arithmétique des infinis* , définition XXII.

Tacquet A. *Elementa Geometriae planae ac solidae* Anvers, 1654, réédition 1754, Livre XII, propositions V, VI et VII.

Mac Laurin C. *A treatise of Fluxions* , Edimbourg, 1742, traduction de Pezenas, Paris , 1749, Livre premier, chapitre IV, proposition VII.

Carré L. *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, percussion et d'oscillation par l'application du calcul intégral,* J. Boudet , Paris,1700, rééd.Durand , Paris, 1750, Section seconde, *De la dimension des solides* Proposition II.

D'Alembert , *Encyclopédie méthodique, Mathématiques,* tome second Article *Pyramide* , (extrait.), Panckoucke, Paris 1785, réed. ACL, Paris , 1987

Laplace *Cours de l'Ecole normale de l'An III* , septième scéance , p.93-94 in *Oeuvres complètes.*, tome XIV, Gauthier-Villars, Paris, 1912

Carnot L. *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* , Paris, 1797, réédition Blanchard, Paris, 1970, p. 31-33, 93-94,100-105.

Legendre A.M. *Eléments de Géométrie* , Livre VI , proposition XVII Didot, Paris, 1794 et 12° édition , 1823.

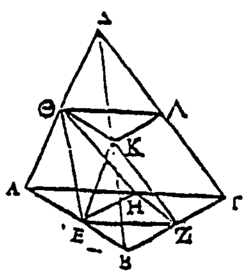
Hadamard J. *Leçons de Géométrie* , Paris, 1898, réédition 1949.

Bricard R. *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres* in Nouvelles Annales de Mathématiques 15, 1896 : p. 331-334.

Hilbert D. *Sur les problèmes futurs des mathématiques* , par David Hilbert (traduction L. Laugel) . in Duporcq E., *Compte Rendu du Deuxième congrès international des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 Aout 1900* , Paris, Gauthier-Villars, 1902, Seconde Partie, Conférences,

Euclide, *Les Eléments* , trad.Peyrard, rééd.Blanchard , Paris, 1966, Livre XII, énoncés des propositions III à VII.

PROPOSITION III.



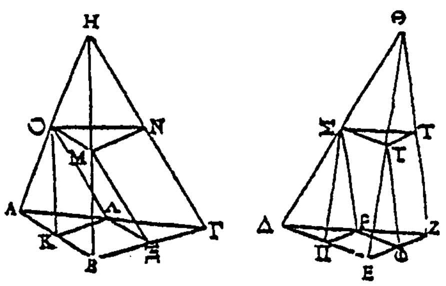
Toute pyramide triangulaire peut se diviser en deux pyramides triangulaires égales et semblables entr'elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux; et ces deux prismes sont plus grands que la moitié de la pyramide entière.

Soit la pyramide dont la base est le triangle ΑΒΓ, et dont le sommet est le point Δ; je dis que la pyramide ΑΒΓΔ peut se diviser en deux pyramides triangulaires égales et semblables entr'elles, et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux, et que ces deux prismes sont plus grands que la moitié de la pyramide entière.

PROPOSITION IV.

Si deux pyramides triangulaires de même hauteur sont divisées l'une et l'autre en deux pyramides égales entr'elles et semblables à la pyramide entière et en deux prismes égaux, si chacune des pyramides engendrées est divisée de la même manière, et si l'on fait toujours la même chose, la base de l'une de ces pyramides sera à la base de l'autre pyramide comme tous les prismes contenus dans l'une de ces pyramides sont à tous les prismes contenus dans l'autre pyramide, ces prismes étant égaux en nombre.

Soient deux pyramides triangulaires de même hauteur ayant pour bases les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, et pour sommets les points Η, Θ; que chacune de ces pyramides soit divisée en deux pyramides égales entr'elles et semblables aux pyramides entières et en deux prismes égaux; concevons que chacune des pyramides engendrées soit divisée de la même manière, et faisons toujours la même chose; je dis que la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ comme tous les prismes contenus dans la pyramide ΑΒΓΗ sont à tous les prismes contenus dans la pyramide ΔΕΖΘ, ces prismes étant égaux en nombre.



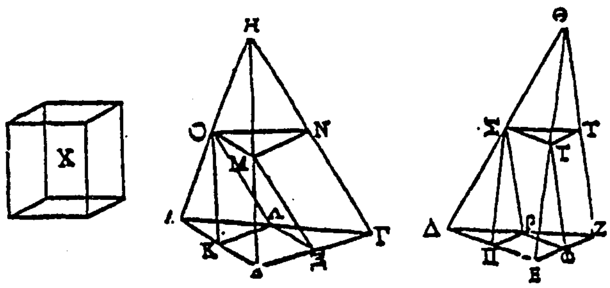
LEMME.

Nous démontrerons de la manière suivante que le triangle ΑΞΓ est au triangle ΡΦΖ comme le prisme qui a pour base le triangle ΑΞΓ opposé à ΟΜΝ, est au prisme qui a pour base le triangle ΡΦΖ opposé à ΣΤΦ.

PROPOSITION V.

Les pyramides triangulaires qui ont la même hauteur sont entr'elles comme leurs bases.

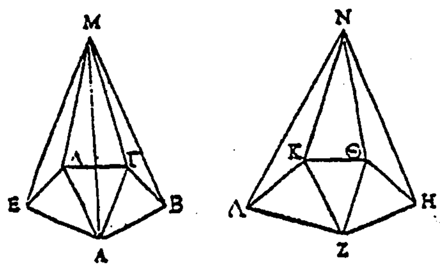
Que les pyramides dont les bases sont les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, et dont les sommets sont les points Η, Θ, ayent la même hauteur; je dis que la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ.



PROPOSITION VI.

Les pyramides qui ont la même hauteur, et qui ont des polygones pour bases, sont entr'elles comme leurs bases.

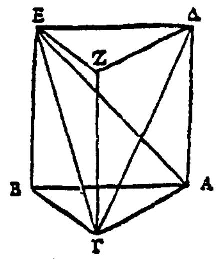
Que les pyramides dont les bases sont les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et dont les sommets sont les points Μ, Ν ayent la même hauteur; je dis que la base ΑΒΓΔΕ est à la base ΖΗΘΚΛ comme la pyramide ΑΒΓΔΕΜ est à la pyramide ΖΗΘΚΛΝ.



PROPOSITION VII.

Tout prisme ayant une base triangulaire peut se diviser en trois pyramides égales entr'elles, ces pyramides ayant des bases triangulaires.

Soit le prisme dont la base est le triangle ΑΒΓ opposé au triangle ΔΕΖ; je dis que le prisme ΑΒΓΔΕΖ peut être divisé en trois pyramides égales entr'elles, ces pyramides ayant des bases triangulaires.



COROLLAIRE.

D'après cela il est évident que toute pyramide est la troisième partie d'un prisme qui a la même base et la même hauteur qu'elle; car si l'une des bases du prisme est une autre figure rectiligne, la base opposée étant la même figure, ce prisme pourra être divisé en prismes qui auront des bases triangulaires, et dont les bases opposées seront des triangles.

Wagner D.B. *An early derivation of the volume of a pyramid : Lui Hui, third century A.D.*, Historia Mathematica, Toronto, 1979, vol 6, p.164-188. Extraits.

The shape [called] *yang-ma* is one corner of a *fang-chui*. [See section 3 above.] A corner of a hip-gabled roof [*ssu-chu wu*] is called a *yang-ma*.

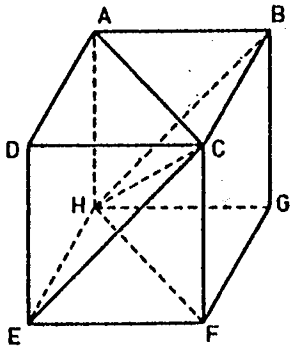


Fig. 6

Suppose the breadth, length, and height are each 1 *ch'ih*. Multiplying these together gives the volume of a cube [with the same dimensions], 1 [cubic] *ch'ih*. (1) Dividing the cube [ABCDEFGH] slantwise [along the plane of BCEH] gives two *ch'ien-tu* [BCDAHE and BCFGHE]; (2) dividing [one of the] *ch'ien-tu* [e.g., BCDAHE] slantwise [along the plane of ACFH] gives one *yang-ma* [CADEH] and one *pieh-nao* [CABH]. The *yang-ma* occupies 2 and the *pieh-nao* occupies 1: this is an unchanging proportion. Fitting together two *pieh-nao* makes one *yang-ma*, and fitting together three *yang-ma* makes one cube. Hence the division by 3.

If this is verified using blocks, the situation is clear. Cutting all of the *yang-ma* gives a total of six *pieh-nao*. Looking at the pieces, it is easy to understand that the shapes correspond. (...)

(3) If the block is long or short, or broad or narrow, so that [the sides of] the cube are not equal, it can still be cut into six *pieh-nao*. Their shapes are not the same, but the number [i.e., six] which appears is the same, and their volumes are in fact equal. (...)

(4) When the *pieh-nao* have different shapes, then so do the *yang-ma*. (...)

When the *yang-ma* have different shapes, then they cannot be compared [*ch'un-ho*]. When they cannot be compared, then it is difficult to do it [i.e., derive the formula] [7]. (...)

Why is this? "Dividing the cube slantwise gives [two] *ch'ien-tu*" [abbreviated quotation of (1) above]; here the division is necessarily in halves. "Dividing [one of the] *ch'ien-tu* slantwise gives [one] *yang-ma* [and one *pieh-nao*]" [abbreviated quotation of (2) above]; here again the division is necessarily in halves. One [division] is vertical, and one is horizontal. (...)

Wagner D. B. *Un algorithme précoce pour le volume d'une pyramide : Lui Hui, IIIème siècle avant J.C.*

L'article de D. Wagner contient une traduction commentée de passages des Neuf chapitres sur l'art du calcul dont j'ai extrait et traduit (sous toutes réserves) ces lignes.

La forme (appelée) *yang-ma* est un coin de *fang-chui.* Un coin de toit (ssu-chu wu) est appelé *yang-ma.*

Supposons que la largeur, la longueur et la hauteur soient chacune d'un *ch'ih*[1]. Le produit de ces trois termes donne le volume d'un cube, d'un *ch'ih.* En divisant le cube (ABCDEFGH) diagonalement (par un plan diagonal BCEH), on obtient deux *ch'ien-tu* (BCDAHE et BCFGHE) , en divisant l'un des *ch'ien-tu* (par ex. BCDAHE) diagonalement (par ACFH), on obtient un *yang-ma* (CADEH) et un *pieh-nao* (CABH). Le *yang-ma* occupe 2 et le *pieh-nao* 1 : cette proportion est constante. Deux *pieh-nao* assemblés forment un *yang-ma* et trois *yang-ma* assemblés forment un cube C'est pourquoi on divise par trois.

Si ceci est vérifié avec des blocs, la situation est claire. Si on coupe tous les *yang-ma* on obtient en tout six *pieh-nao*, et si on regarde les morceaux, il est simple de comprendre que les formes correspondent. Si le bloc est long ou court ou large ou étroit de sorte que les faces du cube ne soient pas égales, on peut toujours le couper en six *pieh-nao.* leurs formes ne sont pas les mêmes, mais leur nombre est le même et leurs volumes sont effectivement égaux. Qand les *pieh-nao* ont des formes différentes, c'est le cas aussi pour les *yang-ma.* Quand les *yang-ma* ont des formes différentes, ils ne peuvent être comparés (ch'un-ho) et il est alors difficile d'établir la formule.

Pourquoi? En divisant le cube diagonalement on obtient deux *ch'ien-tu*; la division se fait nécessairement en deux moitiés. En divisant l'un des *ch'ien-tu* diagonalement on obtient un *yang-ma* (et un pieh-nao); ici aussi la division se fait nécessairement en deux moitiés. Une division est verticale et l'autre horizontale. Supposons que le *yang-ma* est d'un côté de la section et le *pieh-nao* de l''autre. Même si le bloc est long ou court ou large ou étroit il y a toujours une proportion constante entre les deux parties. C'est grâce à cette propriété que l'on sait que les "formes différentes" sont aussi égales.

---

1 le ch'ih est une unité de longueur et désigne aussi plus loin l'unité d'aire (aire d'un carré de côté 1 ch'ih)

Suppose a *yang-ma* is on the inside of a division, and a *pieh-nao* is on the outside [8]. Even if "the block is long or short, or broad or narrow" [reference to (3) above], there is still this constant proportion of the divisions. It is only through this that one knows that the "different shapes" [reference to (4) above] are also equal. (...)

To make a *pieh-nao* with breadth [*a*], length [*b*], and height [*h*] each 2 *ch'ih*, use two *ch'ien-tu* and two *pieh-nao* blocks, all of them red. (...)

To make a *yang-ma* with breadth [*a*], length [*b*], and height [*h*] each 2 *ch'ih*, use one cubical block, two *ch'ien-tu* blocks, and two *yang-ma* blocks, all of them black. (...)

Joining together the red and black blocks to make a *ch'ien-tu*, the breadth, length, and height are each 2 *ch'ih*. (...)

Then divide [*hsiao*] [9] the breadth in the middle and divide [*fen*] the height in the middle. (...)

Fit the red and the black *ch'ien-tu* together, in each case forming a cube with height 1 *ch'ih* and sides [each] 1 *ch'ih*

Each division then contains one *pieh-nao* and one *yang-ma*

Each of the remaining items [12] is composed of [blocks with the same form as] the original objects.

These fit together to form a cube. (...)

Thus cubes [formed of blocks] which are different [from the original *pieh-nao* and *yang-ma*] occupy a proportion of 3, and cubes [formed of blocks] which have the same form occupy a proportion of 1. (...)

Even if the cube is elongated [13], and the blocks change [accordingly], there is clearly a constant situation. (...)

Of the remaining numbers [i.e., the volumes of the pieces resulting from the above manipulations], those which can be definitely determined are separated into one and two parts [one red cube and two black cubes]. Thus, it has been determined that the ratio [of the numbers which can be definitely determined] is 1 to 2. In terms of principle, how could this be arbitrary?

To exhaust the calculation, halve the remaining breadth, length, and height; an additional three-quarters can thus be determined.

The smaller they are halved, the finer [*hsi*] are the remaining [dimensions]. The extreme of fineness is called "subtle" [*wei*]; that which is subtle is without form [*hsing*]. When it is explained in this way, why concern oneself with the remainder?

Pour fabriquer un *pieh-nao* de largeur (a), de longueur (b), et de hauteur (h) (chacune) de 2 *ch'ih*, il faut utiliser deux *ch'ien-tu* et deux *pieh-nao*, tous rouges. Pour fabriquer un *yang-ma* de largeur , de longueur et de hauteur (chacune) de 2 *ch'ih*, il faut utiliser un bloc cubique, deux blocs en forme de prismes (*ch'ien-tu*) et deux blocs *yang-ma*., tous noirs. En assemblant les blocs rouges et noirs on fait un *ch'ien-tu* de largeur , longueur et hauteur toutes égales à 2 *ch'ih*. Ensuite on divise la la largeur en deux (par le milieu) et la hauteur également. On assemble les blocs *ch'ien-tu* rouges (d'une part) et les noirs (d'autre part) pour former dans chaque cas un cube de hauteur 1 *ch'ih* et de côtés un *ch'ih* chacun. Chaque partie contient un *pieh-nao* et un *yang-ma*.

Chacun des morceaux restants es composé (de blocs) de même forme que les objets de départ. Ceux-ci s'assemblent pour former un cube. Ces cubes (composés de blocs) de formes différentes (de ceux du *pieh-nao* et du *yang-ma* de départ) occupent une proportion de 3 et les cubes (composés de blocs) de mêmes formes occupent une proportion de 1. Même si le cube est allongé et que les blocs changent donc de forme , la situation est évidemment la même.

Des nombres qui restent (i. e. des volumes des pièces qui résultent des manipulations précédentes), ceux qui peuvent être déterminés de façon précise sont répartis en une et deux parties (un cube rouge et deux cubes noirs). Il a donc été établi que le rapport (des nombres qui peuvent être déterminés de façon précise) est de 1 à 2. En termes de principe comment ceci pourrait-il être arbitraire?

Pour venir à bout du calcul, diviser en deux la largeur, la longueur et la hauteur restantes; trois quarts supplémentaires peuvent donc être déterminés.

Plus on divise en deux, plus petits (hsi) sont les morceaux restants. La dimension la plus petite est dite subtile (wei); ce qui est subtil n'a pas de forme (hsing). Quand on adopte ce point de vue, pourquoi s'inquiéter de ce qui reste?

Chuquet N. *La Géométrie*, 1484, édité par l'Huillier, Paris, Vrin, 1979, p.145-147.

Des pyramidalz

.39. Aulcuns corps sont de figure pyramidale [a], gros [b] a l'ung des boutz et pointuz a l'aultre; et d'iceulx aulcuns sont reonds, les aultres triangulaires, les aultres quadrangulaires, et ainsi des aultres. Pour mesurer et reduire tous telz corps a porcions cubiques, il en est une telle rigle : multiplie la superficie du gros bout par le

217 r tiers de la // longueur du pyramidal, et sera fait. La longueur du pyramidal, c'est la ligne dyametrale intrinseque laquelle descend de la pointe jusques a la superficie du gros bout, faisant angles droitz sus icelle.

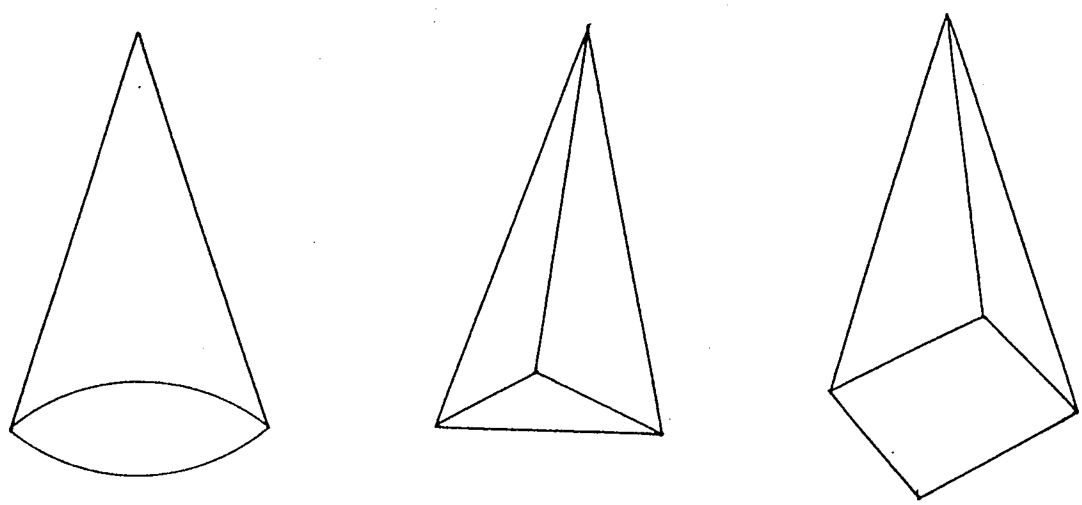
.40. Et pourtant si la superficie du gros bout est circulaire, ou triangulaire, ou quadrangulaire, ou aultre,

---

a: I: sont ce que l'on appelle pyramidalz - b: I a un texte assez différent : Aulcuns aultres corps sont comme les pyramidalz, excepté qui sont tous platz au gros bout, et non pas reondz ou spericz ainsi comme le dessusdit, mais ilz sont bien pointuz a l'aultre bout, comme seroit une quille. Desquelz les aulcuns sont reondz, les aultres triangulars, les aultres quadrangulars, et ainsi de toutes aultres manieres. Tous telz corps se doivent mesurer par la superficie du gros bout selon que enseignent les rigles du plan, et soit icelle reduicte et mesuree par porcions quarrees selon les rigles devant mises en la mensuracion des superficies, et puis celle ayre soit multipliee par le tiers de la longueur, et par ainsi l'on saura quantes porcions cubiques contient cellui corps.

et puis on doyt multiplier icelle ayre par le 1/3 de la longueur du corps, car ce qui en viendra sera ce que l'on demande. Suit en I le chapitre : Des cubicz et de tous aultres.

a: I: Aulcuns corps sont ce que l'on appelle pyramidalz, lesquelz sont tendans a la fasson d'une poyre, car ilz sont pointuz a l'ung des boutz, et a l'aultre sont en maniere de 1/2 corps speric. Telz corps se pevent ainsi mesurer, c'est assavoir primo le 1/2 corps speric se doit mesurer ainsi comme l'on fait ung corps entier, et

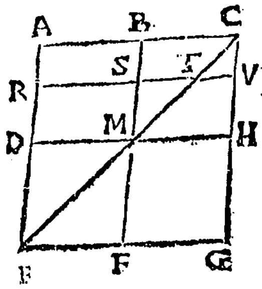


Cavalieri B. *Geometria indivisibilibus continuorum* , Bononiae, 1635, rééd. Bologne 1653, Livre II, proposition XXIV.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

Expoſito parallelogrammo quocunq; in eoque ducta diametro; omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cuiuſuis triangulorum per dictam diametrum conſtitutorum erunt in ratione tripla, vno laterum parallelogrammi communi regula exiſtente.

Sit parallelogrammum, A G, in eo ducta diameter, C E, regula vtcunque latus, E G. Dico omnia quadrata, A G, eſſe tripla omnium quadratorum trianguli cuiuſuis, A E C, ſiue, C E G. Diuidantur bifariam latera, A C, C G, in punctis, B, H, & per, B, ipſi, C G, perque, H, ipſi, C A, parallelę ducantur, B F, D H, quę ſe cum recta, C E, communiter bifariam ſecabunt in puncto, M. Quia igitur in figura, ſiue parallelogrammo, A G, ducitur linea, B F, quę omnes æquidiſtantes ipſi, E G, bifariam ſecat, &, C E, quæ eaſdem in partes inæquales diuidit, prçterquam, D H, omnia quadrata trianguli, A E C, cum omnibus quadratis trianguli, C E G, & cum omnibus quadratis duorum triangulorum, C B M, E M F, dupla erunt omnium quadratorum, A F, licet enim, D H, per lineam, C E, ſit non bifariam diuiſa, nihil tamen hoc obſtat noſtro propoſito, nam & ipſi, D H, contingit, veluti ijs, quæ inæqualiter ſecantur, quadratum ſectarum partium, ſcilicet quadrata, D M, M H, dupla eſſe quadratorum dimidiæ, nempè quadrati, D M, & eius, quæ inter ſectiones interijcitur, quæ hic nulla eſt, cum duę ſecantes, B F, C E, vniantur in puncto, M. Sunt autem omnia quadrata trianguli, A E C, æqualia omnibus quadratis trianguli, C E G, quia ſunt triangula in æqualibus baſibus, E G, A C, & eadem altitudine licet euersè poſita, & ideò omnia quadrata trianguli, C E G, ſunt æqualia omnibus quadratis, A F, cum omnibus quadratis triangulorum, C B M, M E F. Quoniam verò omnia quadrata trianguli, B M C, ſunt æqualia omnibus quadratis trianguli, C M H, omnia verò quadrata trianguli, C E G, ad omnia quadrata trianguli, C M H, ſunt in tripla ratione eius, quam habet, G C, ad, C H, quæ eſt dupla .i. in ratione octupla, & hoc, quia triangula, C E G, C M H, ſunt ſimilia, ideò omnia quadrata, C E G, erunt octupla



Per I. Corol. antec.

Vide D. lib. 7. Annot. Propoſit. 8.

Ex B. vel C. Corol. Prop. 22. huius.

om-

Théorème XXIV, Proposition XXIV

Soit un parallélogramme quelconque dans lequel on a tiré un diamètre (une diagonale), tous les carrés du parallélogramme seront en raison triple de tous les carrés d'un quelconque des triangles définis par le diamètre, si un des côtés du parallélogramme a été pris pour règle commune.

Soit le parallélogramme AG dans lequel on a tiré le diamètre CE. Que la règle soit un côtéquelconque EG. Je dis que tous les carrés de AG sont le triple de tous les carrés d'un quelconque des triangles AEC ou CEG. Les côtés AC et CG sont divisés en deux parties égales aux points B et H; menons par B la parallèle BF à CG, par H la parallèle DH à CA, qui se couperont au milieu de la droite CE au point M. Et donc dans cette figure, c'est à dire dans le parallélogramme AG, est tirée la ligne BF qui divise en deux parties égales toutes les parallèles à EG, et la ligne CE qui divise les mêmes parallèles en deux parties inégales, exception faite pour (la) DH. Tous les carrés du triangle AEC avec tous les carrés du triangle CEG seront le double de tous les carrés de AF, plus tous les carrés des triangles CBM et EMF.[1] Il est permis que DH ne soit pas divisée en deux parties inégales par la ligne CE, ce n'est pas un obstacle à notre propos; en effet cela se passe aussi pour cette ligne DH comme pour toutes les lignes qui sont inégalement divisées: les carrés des parties divisées, à savoir les carrés de DM (et de) MH sont le double des carrés de la demie ligne, je veux dire (des carrés de) DM, et de la ligne tracée entre les sections, qui est nulle ici puisque les deux sécantes, BF et CE, se coupent au point M.

Mais tous les carrés du triangle AEG sont égaux à tous les carrés du triangle CEG parce que ce sont des triangles placés sur des bases égales EG et AC et sous la même hauteur, même s'ils sont tête-bêche, donc tous les carrés du triangle CEG sont égaux à tous les carrés de AF plus tous les carrés des triangles CBM et MEF [2]. Et puisque tous les carrés du triangle BMC sont égaux à tous les carrés du triangle CMH, tous les carrés du triangle CEG sont à tous les carrés du triangle CMH en raison triple[3] de la raison de GC à CH, qui est la raison double[4], c'est à dire (tous les carrés du triangle CEG sont à tous les carrés de CMH) en raison octuple[5], parce que les triangles CEG et CMH sont semblables. Et pour cette raison, tous les carrés de

---

[1] en vertu du corollaire I précédent N. d T. ce corollaire I de la proposition XXIII est précisé au §. 4.6. de l'étude ci-dessus.

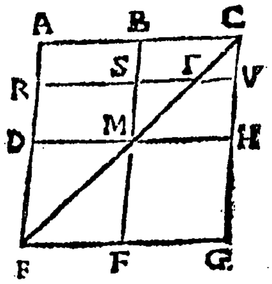
[2] en vertu du corollaire B ou C de la proposition 22 de ce livre.

[3] N.d. T.: il faut comprendre que la raison de tous les carrés du triangle CEG à tous les carrés de CMH est la raison du cube de GC au cube de CH.

[4] N.d. T. : il faut comprendre que la raison est celle de 2 à 1.

[5] N.d. T. : il faut comprendre que la raison est celle de 8 à 1.

omnium quadratorum, C M H, & quadrupla omnium quadratorum, C M H, vel, C B M, &, M E F, sunt autem omnia quadrata trianguli, C E G, æqualia omnibus quadratis, A F, cum omnibus quadratis triangulorum, C B M, M E F, ergo hæc erunt quadrupla omnium quadratorum triangulorum, C B M, M E F, & diuidendo
9. huius. omnia quadrata, A F, erunt illorum tripla, sunt autem omnia quadrata, A G, ad omnia quadrata, A F, vt quadratum, G E, ad quadratum, E F, idest quadrupla .·. vt 12. ad 3. & omnia quadrata, A F, sunt omnium quadratorum triangulorum, B M C, M E F, tripla, ergo omnia quadrata, A G, erunt duodecupla omnium quadratorum triangulorum, B M C, M E F, & sunt ad omnia quadrata, A F, vt 12. ad 3. ergo omnia quadrata, A G, ad omnia quadrata, A F, cum omnibus quadratis triangulorum, C B M, M E F, erunt vt 12. ad 4. sunt autem omnia quadrata, A F, cum omnibus quadratis triangulorum, C B M, M E F, æqualia omnibus quadratis trianguli, C E G, vel, A E C, vt ostensum est, ergo omnia quadrata, A G, ad omnia quadrata trianguli, C E G, vel, A E C, sunt vt 12. ad 4. .·. sunt eorum tripla, quod ostendendum erat.



CEG seront égaux à huit fois tous les carrés de CMH et quatre fois tous les carrés de CMH (ou CBM) et MEF. Mais tous les carrés du triangle CEG sont égaux à tous les carrés de AF plus tous les carrés des triangles CBM et MEF, et puisque ceux-ci (tous les carrés de CEG) seront quatre fois tous les carrés des triangles CBM et MEF, dividendo (en réduisant les termes semblables), tous les carrés de AF seront le triple de tous les carrés de CBM et MEF. Mais tous les carrés de AG sont à tous les carrés de AF comme le carré de GE est au carré de EF[1] c'est à dire comme un rapport quadruple ou comme 12 est à 3, et tous les carrés de AF sont trois fois tous les carrés des triangles BMC et MEF, donc tous les carrés de AG seront douze fois tous les carrés des triangles BMC et MEF et sont à tous les carrés de AF comme 12 est à 3. Donc tous les carrés de AG seront à tous les carrés de AF plus tous les carrés des triangles CBM et MEF comme 12 est à 4. Mais tous les carrés de AF plus tous les carrés des triangles CBM et MEF sont égaux à tous les carrés du triangle CEG (ou AEC) comme il a été démontré. Donc tous les carrés de AG sont à tous les carrés du triangle CEG (ou AEC) comme 12 est à 4, c'est à dire leur triple, ce qu'il fallait démontrer.

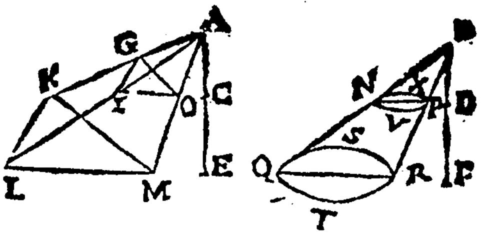
[1] en vertu de la proposition 9 de ce livre.

Cavalieri B. *Geometria indivisibilibus continuorum* , Bononiae, 1635, réed. Bologne 1653, Livre VII, proposition VII.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Conici in eadem, vel æqualibus altitudinibus existẽtes inter se sunt vt bases.

Sint quicunq; conici in eadem, vel æqualibus altitudinibus, A
E, BF, existentes, AKLM, BSQTR. Dico hos esse inter se, vt ip-
sorum bases, KLM, SQTR. Abscissis enim ab altitudinibus, AE,
BF, vtcunq; partibus æqualibus versus, A, B, ipsis, AC, BD, per,
C, ducatur planum basi, K
LM, æquidistans, & per,
D, similiter planum basi,
SQTR, æquidistans, qui-
19. lib. 1. bus in conicis producan-
21. lib. 1. tur figuræ, GIO, XNVP,
erit ergo, GIO, similis ipsi,
kLM, quarum latera ho-
mologa, IO, LM, simili-



ter, XNVP, erit similis basi, SQTR, ducto autem plano transeun-
te per altitudinem, BF, secetur basis in recta, QR, vtcunque, &
figura, XNVP, in recta, NP, superficies verò conicularis in rectis,
17. Vnde. Elem. BQ, BR, erunt ergo hæ similiter secta in punctis, N, P, ac, BF, in,
D, sicut etiam, Ak, AL, AM, erunt similiter secta in punctis, G, I,
25. lib. 1. O, ac, AE, in, C, &, QR, NP, latera homologa similium figura-
rum, SQTR, XNVP, sunt autem etiam, AE, BF, altitudines æqua-
les similiter sectæ in punctis, C, D. Cum ergo figura, KLM, simi-
15. l.b. 2. lis sit ipsi, GIO, habebit, KLM, ad, GIO, duplam proportionem
eius, quam, LM, ad, IO, vel, MA, ad, AO, vel, EA, ad, AC, seu,
FB, ad, BD, vel, RB, ad, BP, vel tandem eius, quam habet, QR,
ad, NP, sed etiam figura, SQTR, ad, XNVP, habet duplam ratio-
nem eius, quam habet, QR, ad, NP, ergo figura, KLM, ad, GIO,
est vt, SQTR, ad, XNVP, & permutando figura, kLM, ad, SQT
R, erit vt figura, GIO, ad figuram, XNVP, & puncta, C, D, sum-
pta sunt vtcunque, ac conici, AKLM, BSQTR, sunt in æquali-
bus altitudinibus, AE, BF, respectu basium, KLM, SQTR, assum-
ptis,

ptis,, ergo sunt figuræ proportionaliter analogæ, ergo dicti cy-
lindrici erunt inter se, vt bases, KLM, SQTR, quod erat demon- 3. huius.
strandum.

Théorème VII, proposition VII

Des cônes élevés sur la même hauteur ou sur des hauteurs égales sont entre eux comme leurs bases.

Soient deux cônes AKLM, BSQTR élevés sur la même hauteur ou sur des hauteurs égales AE et BF. Je dis qu'ils sont entre eux comme leurs bases KLM et SQTR. En effet, des parties égales AC et BD ayant été découpées de façon quelconque sur les hauteurs AE (et) BF, à partir de A et B, que soit par C tiré le plan parallèle à la base KLM et par D de façon similaire le plan parallèle à la base SQTR grâce auxquels sont engendrées dans les cônes les figures GIO et XNVP. Par conséquent GIO sera semblable à KLM, avec pour côtés homologues IO et LM; XNVP de façon analogue sera semblable à la base SQTR. Or si on mène un plan passant par la hauteur BF, la base sera coupée selon une droite QR et la figure XNVP sera coupée selon la droite NP; mais la surface conique sera coupée selon les droites BQ et BR. Ces droites seront donc divisées aux points N et P de manière semblable à la manière dont D divise BF; et aussi comme AK, AL (et) AM sont divisées aux points G, I (et) O de façon semblable à la façon dont AE est divisée au point C, QR et NP seront des côtés homologues des figures semblables SQTR et XNVP. Et AE et BF, les hauteurs égales, sont divisées de façon semblable aux points C et D. Donc la figure KLM étant semblable à GIO, KLM sera à GIO en raison double de celle de LM à IO, ou de MA à AO, ou de EA à AC, ou encore de CB à BD, ou RB à BP, ou enfin de la raison de QR à NP. Mais encore la figure SQTR est à la figure XNVP en raison double de la raison de QR à NP; donc la figure KLM sera à la figure GIO comme SQTR est à XNVP, et permutando, la figure KLM sera à la figure SQTR comme la figure GIO est à la figure XNVP, et les points C et D sont pris de façon quelconque. Mais les cônes AKLM, BSQTR sont de hauteurs égales relativement aux bases KLM, SQTR: ce sont donc des figures proportionnellement analogues; donc les solides coniques sont entre eux comme leurs bases KLM et SQTR. Ce qu'il fallait démontrer.

Lamy B. *Elémens de Géométrie*
Paris 1685, Livre IV , section IV.

Premiere demande.

On peut ſuppoſer que tout ſolide eſt fait d'un nombre infiny de plans, qui ayant quelque épaiſſeur , mais inſenſible, ſont poſés paralellement les uns ſur les autres.

Scholie.

Cette ſuppoſition ne peut être conteſtée par ce nombre infiny, je n'entans qu'un grand nombre.

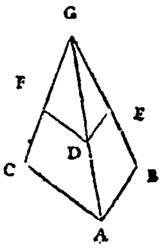
Seconde demande.

Si deux ſolides ont même hauteur , & que les plans qui les compoſent ſoient également épais, l'un & l'autre auront un égal nombre de plans.

Lemme quatriéme.

Toute ſection d'une pyramide qui ſe fait paralellement à ſa baſe , eſt ſemblable à ſa baſe.

Le plan F D E eſt paralelle à la baſe ABC, ainſi DE eſt paralelle à AB & DF à AC. *Par le Th. 16, § 1. ſup.* l'angle C A B eſt égal à l'angle EDF , ainſi les angles de la ſection E D F ſont les mêmes que ceux de la baſe ABC , & outre cela tous les côtez ſont proportionaux , car dans les triangles GAC GAB *par le Th. 4, § 1. l. 3.*



$$GD,\ GA :: \begin{cases} FD,\ CA \\ DE \quad AB \end{cases}$$

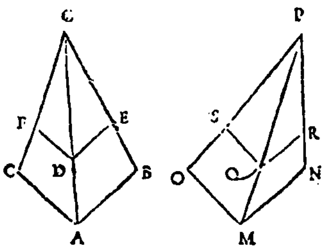
Donc *par le Th. 5. l. 2, § 2,* F D E eſt ſemblable à CAB.

Lemme cinquiéme.

Si on coupe deux pyramides de même hauteur, ou qui ſoient entre des plans paralelles , par des plans paralelles à leurs baſes , les ſections de l'une ſeront à celle de l'autre qui eſt en même hauteur, comme la baſe de l'une eſt à la baſe de l'autre.

Soient deux pyramides B A C G & NMOP entre des plans paralelles, & par conſequent de même hauteur , les plans FDE & SQR ſont paralelles aux baſes de ces pyramides , & à la même hauteur, il faut prouver que ſi les baſes ſont égales, les ſections ſont égales.

Par le Lemme preced. ces ſections ſont ſẽblables à leurs baſes , ainſi il ſuffit de démontrer que MN , QR : : AB , D E , car deux figures ſemblables ſont entr'elles en raiſon doublée de leurs côtez omologues.



Soit nommé T la hauteur de ces pyramides qui eſt la même , & V la hauteur des plans qui les coupe , qui eſt encore la même.

$$\left.\begin{matrix} MN,\ QR :: PM,\ PQ \\ AB,\ DE :: GA,\ GD \end{matrix}\right\} :: T\ V,$$

Donc , puis que deux raiſons égales à une 3ᵉ ſont égales entr'elles, M N, QR :: A B , D E, ce qu'il falloit prouver.

Theoréme ſecond.

Les pyramides de même hauteur ſont entr'elles comme leurs baſes.

1° Par la premiere demande deux pyramides peuvent être conſiderées comme compoſées de plans poſez paralellement les uns ſur les autres. 2° Par la 2ᵉ demande deux pyramides de même hauteur ont égal nombre de ces plans paralelles.

Il ne reſte donc qu'à prouver que tous les plans dont ces pyramides ſont compoſées, & qui ſe répondent ou ſont à la même hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes ; ce qui a été prouvé dans le dernier Lemme : Ainſi ſi les baſes ſont égales, ces deux pyramides ſont égales, puis que tous les plans pris à la même hauteur dans l'une & dans l'autre ſont égaux; ſi la baſe de l'un eſt le tiers de la baſe de l'autre , comme chaque plan de l'un pris à la même hauteur, ſera le tiers de l'autre , l'une de ces pyramides ſera le tiers de l'autre. Donc les pyramides de même hauteur ſont comme leurs baſes.

Theoréme huitiéme.

Vn priſme triangulaire ſe diviſe en trois pyramides triangulaires égales.

Theoréme dixiéme.

Toute pyramide poligone eſt lé tiers de tout priſmes de même hauteur, & qui eſt ſur même baſe, où ſur baſe égale.

Deidier *La science des Géomètres*, , Paris , Jombert , 1739, *La théorie et la pratique du Géomètre* , Partie IV,

PROBLEME VI.

41. *Mesurer une pyramide ABCDO* (Fig. 26.).

Cherchez la valeur de sa base, & multipliez-la par le tiers de la hauteur OR, ce qui vous donnera la valeur de la pyramide.

DEMONSTRATION.

Concevez que par tous les points de la hauteur OR, il passe des plans paralleles à la base, les sections que ces plans formeront avec la pyramide, seront des surfaces semblables à la base. Car comparant, par exemple, la section EFGH avec la base, on aura, à cause des triangles semblables OEH, OAD, EH. AD :: OH. OD, & à cause des triangles OHG, ODC, HG. DC :: OH. OD; donc EH. AD :: HG. DC, & on prouvera de même que les autres côtez GF, FE, sont proportionnels aux deux CB, BA; & quant aux angles, les droites EH, HG, étant paralleles aux deux AB, BC, il est visible que si l'angle EHG se meut parallelement à lui-même le long de HD, il tombera sur l'angle ADC, & lui sera égal, & ainsi des autres. Or toutes les sections faites par les plans qui passent par les points de la perpendiculaire OR étant semblables, elles seront entr'elles comme les quarrez de leurs côtez homologues EH, AD, ou comme les quarrez des abscisses OX, OR; car EH. AD :: OH. OD. & OH. OD :: OX. OR à cause des triangles semblables ORD. OHX. & par conséquent EH. AD :: OX. OR. mais les abscisses sont entr'elles comme les nombres naturels o. 1. 2. 3. 4. &c. à l'infini; donc les sections sont entr'elles comme les quarrez de ces nombres, & par conséquent la somme des sections est à la plus grande ou à la base ABCD, multipliée par le nombre des termes OR, comme 1. à 3. ainsi qu'il a été enseigné ci-dessus en parlant de l'Arithmetique des infinis (*Partie 2. n. 240.*); mais la somme des sections est la même chose que la pyramide; donc la pyramide est à la base multipliée par OR, comme 1. à 3. & par conséquent elle est le tiers du produit.

COROLLAIRE I.

42. On mesurera de la même façon les pyramides inclinées en observant de prendre pour la hauteur la perpendiculaire tirée du sommet sur la base.

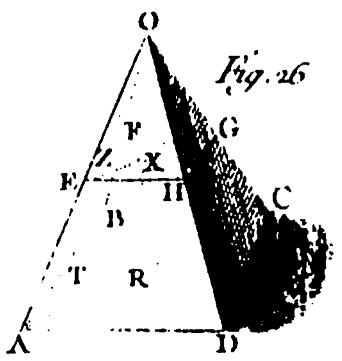


Fig. 26

Deidier *La science des Géomètres*, Paris , Jombert , 1739, Partie II , *De l'arithmétique des infinis* , définition XXII.

De l'Arithmetique des infinis.

DEFINITION XXII.

239. La progression infinie des nombres naturels o. 1. 2. 3. 4. 5. &c. qui commence par zero étant donnée, l'*Arithmetique des infinis*, apprend à trouver quel est le rapport de la somme de la progression au plus grand terme multiplié par le nombre des termes, de même quel est le rapport de la somme des quarrez, ou des cubes, ou des quatriémes puissances des termes de la progression au plus grand quarré, ou au plus grand cube, ou à la plus grande quatriéme puissance, &c. multiplié par le nombre des termes, de même quel est le rapport des racines quarrées, cubiques, &c. des termes de la progression à la plus grande racine quarrée, cubique, &c. multipliée par le nombre des termes, &c.

J'ai expliqué les principes de cette science dans mon Arithmetique des Géometres, où l'on en trouvera toutes les propositions démontrées par l'algebre; c'est pourquoi je n'en donnerai ici qu'un précis, qui ne laissera pas que d'être suffisant pour ceux qui ne voudront pas avoir recours à cet Ouvrage.

En premier lieu, si l'on a une suite infinie de grandeurs, qui soient entr'elles comme la suite des nombres naturels o. 1. 2. 3. 4. &c. la somme de ces grandeurs est à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 1 est à 2; car puisque ces grandeurs sont en progression Arithmetique, & que le premier terme est égal à zero, la somme de la progression est égale au dernier terme multiplié par la moitié du nombre des termes; ainsi cette somme est au même dernier terme multiplié par le nombre des termes tout entier, comme 1. est à 2. Dans le triangle ABC, par exemple (*Fig.* 147.), dont les élemens sont en nombre infini, & en pro-

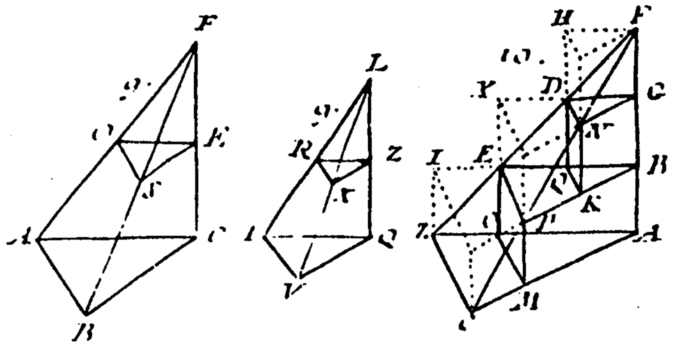
Tt

greſſion Arithmetique, dont le premier terme commence par zero, la ſomme de la progreſſion, ou l'aire du triangle eſt égale au plus grand élement BC, multiplié par la moitié de la hauteur AB, & cette ſomme eſt au même élement BC, multiplié par la hauteur entiere AB, ou au rectangle de BC, par AB, comme 1. eſt à 2.

En ſecond lieu, la ſomme des quarrés d'une ſuite infinie de grandeurs, qui ſont en progreſſion Arithmetique, comme 0. 1. 2. 3. 4. &c. eſt au plus grand quarré multiplié par le nombre des termes, comme 1. eſt à 3. Car ſi l'on prend les quarrés 0. 1. 4. des trois premiers termes, la ſomme ſera 5, & le plus grand quarré 4 multiplié par le nombre terme 3, ſera 12, dont le tiers eſt quatre & non pas cinq; ainſi il s'en faut d'un cinquiéme que ce tiers ne ſoit égal à la ſomme 5; ſi l'on prend donc les ſix premiers quarrés, la ſomme ſera 55, & le plus grand quarré 25, multiplié par le nombre des termes 6, ſera 150, dont le tiers eſt 50, & non pas 55; ainſi il s'en faut d'un onziéme que 50 ne ſoit égal à la ſomme 55, & ce défaut commence à devenir moindre que le précédent. Si l'on prend donc les neuf premiers quarrez, la ſomme ſera 204, & le plus grand 64 multiplié par le nombre des termes, ſera 576, dont le tiers eſt 192, & non pas 204; & ainſi il s'en faut d'un $\frac{1}{17}$ que ce tiers ne ſoit égal à la ſomme de ces quarrez, & ce défaut eſt encore moindre; donc puiſqu'à meſure qu'on prend un plus grand nombre de quarrés, le défaut devient moindre, il s'enſuit que lorſque les quarrés ſeront en nombre infini, la ſomme des quarrés ſera exactement égale au tiers du plus grand quarré multiplié par le nombre des termes.

0	0	
1	1	
2	4	
ſomme	5	*défaut* $\frac{1}{5}$
3	9	
4	16	
5	25	
ſomme	55	*défaut* $\frac{1}{11}$
6	36	
7	49	
8	64	
ſomme	204	*défaut* $\frac{1}{17}$

Tacquet A. *Elementa Geometriae planae ac solidae* Anvers, 1654, réédition 1754, Livre XII, propositions V, VI et VII.



Lemmata ad P. V.

I.

Fig. 9. SI *duæ pyramides triangulares secentur planis* (*OSE*, *RXZ*) *ad bases* (*ABC*, *IVQ*) *parallelis*, *quæ dividant latera* (*CF*, *QL*) *proportionaliter* (*in E*, & *Z*,) *erunt* (*OSE*, *RXZ*) *inter se ut bases* (*ABC*, *IVQ*.

Quoniam parallela plana OSE, ABC secantur a planis BFC, AFB, AFC erunt sectiones communes SE, BC, & OS, AB, & OE, AC *a* parallelæ. Ergo anguli OSE, ABC, & SOE, BAC, & OES, ACB bini, & bini æquales *b* sunt. Quare sectiones OSE, ABC *c* sunt similes. Eodem modo similes esse ostendam sectiones RXZ, IVQ. Ergo ratio sectionis ABC ad OSE est duplicata *d* rationis laterum BC ad SE, & ratio sectionis IVQ ad RXZ duplicata est rationis VQ ad XZ. Atqui rationes BC ad SE, & VQ ad XZ sunt eædem (est enim BC ad SE, ut *e* CF ad EF; hoc est per hyp ut QL ad ZL; hoc *f* est, ut VQ ad XZ). Ergo ratio ABC, ad OSE eadem est *i* cum ratione IVQ ad RXZ. Quod erat propositum.

a Per 16. l. 11
b Per 10. l. 11
c Per 4. l. 6.
d Per 19. l. 6
e Per cor. 1. p. 4. l. 6.
f Per idem corol.
i Per 11. l. 5.

II.

Fig. 10. PYramidi (*ZCAF*) *triangulum habenti basim prismata in infinitum inscripta desinunt in ipsam pyramidem*.

Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes AB, BG, GF; & per B, G tactis sectionibus GDN, & BEP basi ZAC parallelis inscripta intelligantur pyramidi prismata triangularia BEPMAO, & GDNKEQ. His deinde extra pyramidem continuatis intelligantur pyramidi esse circumscripta prismata CIBA, PXGB, NHFG. Excessus circumscriptorum supra inscripta sunt solida IM, XK, HG, quæ simul

Tacquet A.Eléments de Géométrie plane et solide, Livre XII

(traduction de J. Boyé)

Lemmes préliminaires à la proposition V

I. *Si deux pyramides triangulaires sont coupées par des plans (OSE, RXZ) parallèles aux bases (ABC, IVQ), plans qui partagent les côtés CF, QL proportionnellement (en E et Z), les sections OSE et RXZ seront entre elles comme les bases ABC et IVQ.*

Puisque les plans parallèles OSE, ABC sont coupés par les plans BFC, AFB, AFC, les sections (avec le même plan) SE et EC, puis OS et AB, puis OE et AC, seront parallèles[1]. Donc les angles OSE et ABC, puis SOE et BAC, puis OES et ACB forment des paires d'angles égaux[2]. C'est pourquoi les sections OSE et ABC sont semblables[3]. De la même façon, je montrerai que les sections RXZ et IVQ sont semblables. Donc la raison de la section ABC à la section OSE est double de la raison des côtés BC et SE [4], et la raison des sections IVQ RXZ est double des raisons de VQ à XZ. Dès lors les raisons de BC à SE et de VQ à XZ sont les mêmes (car BC est à SE comme CF à EF [5]; c'est à dire, par hypothèse comme QL à ZL, soit comme VQ à XZ [6]). Donc la raison de ABC à OSE est la même que celle de IVQ à RXZ [7]. Ce qui était proposé.

II. *Les prismes inscrits à l'infini dans une pyramide à base triangulaire s'identifient à la pyramide elle-même.*

Partageons le côté d'une pyramide en un certain nombre de parties égales AB, BG, GF; et remarquons que les prismes triangulaires BEPMAO et GDNKBQ sont inscrits sur les sections passant par B et G, soit BEP et GDN parallèles à la base ZAC. Et si l'on prolonge ceux-ci en dehors de la pyramide, remarquons que les prismes CIBA, PXGB, et NFHG sont circonscrits à la pyramide. L'excès de ces prismes circonscrits sur les prismes inscrits ci-dessus sont les solides IM, XK, HG,

---

[1] en vertu de la proposition 16 du livre 11.

[2] en vertu de la proposition 10 du livre 11.

[3] en vertu de la proposition 4 du livre 6.

[4] en vertu de la proposition 19 du livre 6. N.d T. La raison de ABC à OSE double de celle de BC à SE signifie que $\frac{ABC}{OSE} = \left(\frac{BC}{SE}\right)^2$

[5] en vertu du corollaire1 de la proposition 4 du livre 6.

[6] en vertu du même corollaire.

[7] en vertu de la proposition 35 du livre 5.

ſimul ſumpta æquantur priſmati CIBA; nam HG eſt *o* æquale DB, ac proinde HG cum XK æquatur PXGB; hoc eſt *p* MEBA. Ergo tria HG, XK, IM æquantur toti CIBA. Atqui ſi AF in plures ſine fine partes æquales dividatur, ac proinde priſmatum numerus in infinitum multiplicetur, AB fiet *a* quavis data minor. Ergo etiam *b* priſma CIBA fiet quovis dato minus. Ergo priſmatum circumſcriptorum (multoque magis pyramidis ZCAF, quæ pars eſt priſmatum ſibi circumſcriptorum) exceſſus ſupra inſcripta priſmata fiet quovis dato minor. Ergo inſcripta priſmata in pyramidem *c* tandem deſinunt. Quod erat demonſtrandum.

o Per 25. l. 11
p Per eand.
a Collig. ex lem. 1. ſcho. poſt 11. l. 6.
b Patet ex 25. l. 11.
c Per def. 6. l. 12.

PROPOSITIO V.

PYramides triangulares æque altæ eam inter ſe proportionem habent, quam baſes (AQR, ESX.) Fig. 11.

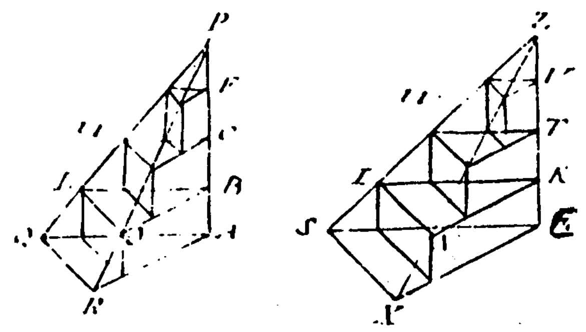
Pyramidum altitudines æquales referant latera AP, EZ, quibus in quot placuerit æquales partes, ſed æque multas utrimque diviſis, factiſque per diviſionum puncta ſectionibus ad baſes parallelis, intelligantur utrique pyramidi inſcripta eſſe priſmata trigona æque multa, & æque alta. Jam vero, quia priſmata LA, IE ſunt æque alta, erit priſma LA ad priſma IE, ut *a* baſis LOB ad baſim INK; hoc eſt, *b* ut baſis QRA ad baſim SXE. Eodem modo oſtendam, ſingula priſmata pyramidi QPAR inſcripta eſſe ad ſingula inſcripta pyramidi SZEX, ut baſis QAR ad baſim SEX. Ergo etiam *c* ſimul omnia ſunt ad omnia, ut baſis ad baſim. Quare cum ea tandem deſinant *d* in ipſas pyramides, etiam ipſæ erunt *e* ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

a Per corol. 1. 34. l. 11.
b Per lem. 1.
c Per 12. l. 5.
d Lem. 2.
e Per poriſ. univerſ. poſt. p. 2. l. 12.

PROPOSITIO VI

PYramides quæcunque æque altæ eam inter ſe rationem habent, quam baſes (AB, CFO.) Fig. 11. & 12

Re-



qui pris ensemble sont égaux au prisme CIBA; car HG est égal à DB [1], et par conséquent HG avec XK est égal à PXGB; ce dernier est égal à MEBA.[2] Donc les trois volumes HG, XK et IM sont égaux à CIBA tout entier. Et si l'on divise sans fin AF en d, enombreuses parties égales, et que par conséquent le nombre de prismes est mutiplié à l'infini, AB sera plus petit que toute longueur donnée [3]. Donc le prisme CIBA sera plus petit que tout prisme donné [4]. Donc l'excès, sur les prismes inscrits, des prismes circonscrits (beaucoup plus encore l'excès de la pyramide ZCAF, qui est une partie des prismes qui lui sont circonscrits) sera plus petit que tout prisme donné. Donc les prismes inscrits finissent par s'identifier à la pyramide.[5] Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition V

Des pyramides triangulaires également hautes ont entre elles la même proportion que leurs bases (AQR, ESX).

Si les côtés AP et EZ, représentant les hauteurs égales des (deux) pyramides, ont été divisés en autant de parties égales qu'il aura plu, également nombreuses des deux côtés, et si l'on construit par les points de de division des sections parallèles aux bases, remarquons que les prismes treiangulaires inscrits dans les deux pyramides sont également nombreux et également hauts. Dès lors, parce que les prismes LA, IE sont également hauts, le prisme LA sera au prisme IE comme la base LOB est à la base INK [6]; c'est à dire comme la base QAR est à la base SEX.[7] Je montrerai de la même manière que chaque prisme inscrit dans la pyramide QPAR est à chaque prisme inscrit dans la pyramide SZEX comme la base QAR est à la base SEX. Donc tous les prismes sont ensemble à tous les prismes comme la base est à la base.[8] C'est pourquoi, puisque ceux-ci pour finir s'identifient aux pyramides elles-mêmes[9], celles-ci seront entre elles comme leurs bases[10]. Ce qu'il fallait démontrer.

1 en vertu de la proposition 25 du livre 11.
2 en vertu de la même proposition.
3 se déduit lemme 2 et du scholie suivant la proposition 11 du livre 6.
4 évident, en vertu de la proposition 25 du livre 11.
5 en vertu de la définition 6 du livre 12
6 en vertu du corollaire 1 de la proposition 34 du livre 11.
7 en vertu du lemme 1
8 en vertu de la proposition 12 du livre 5.
9 lemme 2
10 en vertu du porisme suivant la proposition 2 du livre 12

Resolvantur bases in triangula A, B, C, F, O, pyramides vero totæ in pyramides triangulares. Pyramis AX est ad pyramidem OZ, ut *a* A ad O, & pyramis *b* BX est ad pyramidem OZ, ut B ad O. Ergo pyramides simul AX; BX (hoc est tota ABX) sunt ad pyramidem OZ, ut A, B *c* simul ad O. Eodem discursu pyramis ABX est ad pyramidem FZ, ut *d* AB est ad F; & ABX est ad CZ, ut *e* AB est ad C. Ergo ABX *f* est ad tres simul OZ, FZ, CZ, hoc est ad totam pyramidem OFCZ, ut AB ad OFC. Quod erat demonstrandum.

a Per præc.
b Per eand.
c Per 24.l.5.
d Per præc.
e Per 24.l.5.
f Per eand.

PROPOSITIO VII.

Omnis pyramis tertia pars est prismatis habentis eandem basim, & altitudinem.

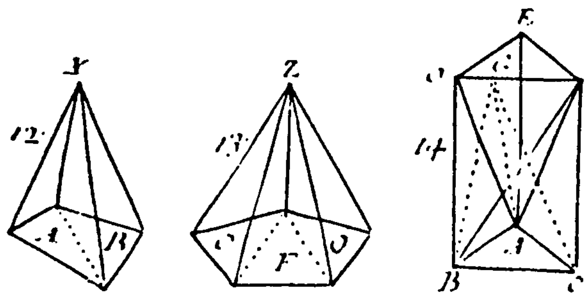
Fig. 14.

Sit primo pyramis trigona BGAC in eadem basi, & altitudine cum prismate BACFEO, ducantur BF, AO, AF. Triangula BFC, BFO sunt *a* paria. Ergo pyramis BFCA pyramidi BOFA *b* æqualis est. Ob eandem causam pyramis OEAF par est pyramidi OBAF, hoc est pyramidi BOFA; sunt enim eædem pyramides. Igitur etiam BFCA, & OEAF æquales sunt. Omnes igitur tres BFCA, OEAF, OBAF sive BOFA sunt pares. Ergo tres simul unius BFCA triplæ sunt. Atqui tres illæ constituunt prisma BACFEO. Illud ergo pyramidis BFCA, hoc est *c* BGAC, triplum est. Quod erat demonstrandum.

a Per 34.l.1.
b per 5.l.12.
c per 5.l.12.

Fig. 15.

Sit deinde pyramis quævis eandem habens basim, & altitudinem cum prismate AEFH, ductis lineis BC, BO, BE, & NI, NG, NH resolve prisma in triangularia prismata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet demonstratio ex prima parte. Nam singulæ partes prismatis triplæ erunt singularum partium pyramidis. Ac proinde totum prisma totius pyramidis triplum est. Quod erat demonstrandum.



Proposition VI

Des pyramides quelconques également hautes ont entre elles la même raison que leurs bases (AB, CFO).

Proposition VII

Toute pyramide est la troisième partie du prisme ayant même base et même hauteur.

Mac Laurin C. *A treatise of Fluxions* , **Edimbourg, 1742, traduction de Pezenas, Paris 1749, Livre premier, chapitre IV, proposition VII.**

CHAPITRE IV.

Des Fluxions des Solides, & des troisiémes Fluxions.

PROPOSITION VII.

La Fluxion d'un solide que l'on peut concevoir formé par une surface plane qui se meut parallelement à elle-même, & perpendiculairerement à un axe donné, est mesurée par un prisme qui a pour base la surface génératrice, & pour hauteur, la ligne droite qui mesure la Fluxion de son axe.

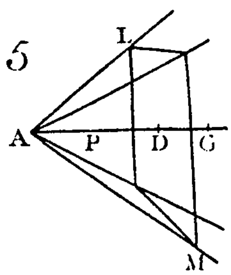
Nous appellons ici *Prisme* tout solide droit qui peut se former par un plan invariable, lequel se meut parallelement à lui-même, & perpendiculairement à une droite donnée. Lorsque la figure génératrice est d'une grandeur invariable, la proposition se démontre comme dans l'article 80. L'axe AD étant Fig. 34. supposé fluer uniformément, si le plan générateur LM croît continuellement, il est évident que le solide doit croître d'un mouvement accéléré. Supposons que ce mouvement soit continué uniformément depuis le terme où le plan LM coupe l'axe en D, & qu'il produise un solide égal à R dans le même tems que l'axe, en fluant uniformément, acquiert l'incrément D G. Le solide R sera égal à un prisme qui a pour base L M, & pour hauteur D G : car si le solide R étoit plus grand que ce prisme, soit A D prolongée jusques à P, ensorte que *l m* (section du solide par P, parallele à L M) soit à L M, comme le solide R à ce prisme ; le solide R sera égal à un prisme qui a pour base *lm*, & pour hauteur DG. D'où il suit (par le Théorême I.) que le mouvement, par lequel le solide EBML flue, étant continué uniformément, produiroit un solide égal à un prisme, dont la base seroit *lm*, & la hauteur DR, dans le tems que l'axe acquiert l'incrément DP par son mouvement uniforme. Mais le mouvement, par lequel le solide flue lorsqu'il est continuellement accéléré depuis ce même terme, produit dans le même tems le prisme tronqué compris entre les sections LM & *lm*, lequel est moindre que le prisme, dont la base est *lm*, & la hauteur DP; & si le mouvement par lequel le solide flue, étoit continué uniformément depuis ce terme, il produiroit dans le même tems un solide moindre que ce prisme tronqué, (par l'Axiome I.) & par conséquent moindre que le prisme, dont la bafe eft lm, & la hauteur DP : ce qui étant contradictoire, le folide R n'eft pas plus grand qu'un prifme, dont la bafe eft LM, & la hauteur DG. On prouvera de même qu'il n'eft pas plus petit que ce prifme. Et la démonftration s'étend aux autres cas de la propofition, comme on l'a fait dans l'article 90. Donc, la Fluxion de l'axe AD étant repréfentée par DG, celle du folide eft mefurée exactement par un prifme, dont la bafe eft LM, & la hauteur DG. Et, au contraire, lorfque la Fluxion du folide eft repréfentée par ce prifme, celle de l'axe eft mefurée exactement par DG.

Fig. 35. 126. *Corollaire I.* Si le folide ALM eft une pyramide dont le fommet eft A; foit la fection LM triple du quarré de AD: le folide ALM fera toujours égal au cube de AD. Donc la Fluxion du cube de AD fe mefure exactement par un parallelepipede, dont la bafe eft triple du quarré de AD, & la hauteur égale à DG qui mefure la Fluxion du côté AD, ou par un parallelepipede fur le quarré de AD, & d'une hauteur triple de DG. D'où il fuit, que quatre quantités étant en proportion continue, & le terme étant invariable, la Fluxion du fecond terme eft à un tiers de la Fluxion du quatriéme, comme le premier terme eft au troifiéme.

127. *Corollaire II.* Lorfque le folide ALM eft une pyramyde comme dans le dernier Corollaire, & que le mouvement par lequel AD flue eft uniforme, la Fluxion de la pyramide eft comme la fection LM, ou comme le quarré de AD. En ce cas, les droites AL, AM, &c. qui forment l'angle folide en A, fluent d'un mouvement uniforme. La fection LM & les côtés triangulaires de la pyramide croiffent par des mouvemens uniformément accélérés, par la Propofition II. Corollaire IV.

Mais le folide ALM croît d'un mouvement dont l'accélération augmente uniformément; c'eft-à-dire, que la feconde Fluxion de la pyramide croît uniformément, & que fa troifiéme Fluxion eft invariable. De même lorfque le côté d'un cube ou l'axe d'un cone croît uniformément, le mouvement flue d'un mouvement dont l'accélération croît uniformément.

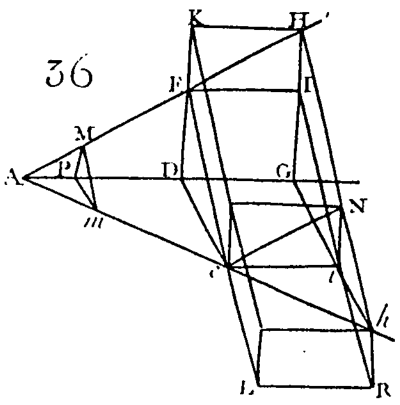
35



128 Dans l'article 93. nous avons divisé le trapeze DGHE Fig. 21.
(qui est l'incrément du triangle A D E produit pendant que A D, croissant uniformément, acquiert l'incrément D G) en deux parties, qui sont le parallelogramme EG, produit en conséquence du mouvement, par lequel le triangle flue au terme où P arrive en D, & le triangle EIH produit en conséquence de l'accélération de ce mouvement. De même, nous diviserons, dans le cas présent, l'incrément du solide formé pendant que l'axe acquiert l'incrément D G, en trois parties. La Fig. 35.
premiere est produite, en conséquence du mouvement par lequel le solide flue, au terme où son côté ou axe devient égal à A D, en le supposant continué uniformément pendant ce tems-là. La seconde est produite, en conséquence de l'accélération de ce mouvement, en supposant continué uniformément depuis le même terme, & pendant le même tems; & la troisiéme est produite, en conséquence de l'augmentation continuelle & uniforme de cette accélération.

129. Ces trois parties peuvent être distinguées l'une de l'au- Fig. 36.
tre de la maniere suivante. Que le triangle M P m se mouvant perpendiculairement à la droite A P, produise la pyramide A P m M. Pendant que P décrit DG, supposons que la pyramide acquiere l'incrément terminé par les plans E D e, H G h paralleles à M P m. Soient E I & $e\,i$ paralleles à DG, qui rencontrent G H & $g\,h$ en I & i, & e N parallele à EH qui rencontre Hh en N. La pyramide tronquée terminée par les plans E D e, H G h se divise en trois parties, qui sont, le prisme

36

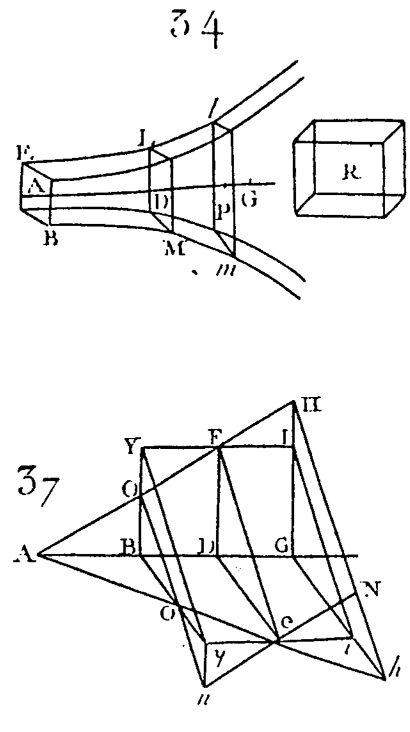


E D *e* I G *i*, le prisme E I H *e i* N, & la pyramide *e* N *i h*. La premiere des trois où le prisme E D *e* I G *i* mesure la premiere Fluxion de la pyramide A D E *e*, lorsque D G représente la Fluxion de A D, par la septiéme Proposition. La seconde où le prisme E I H *e i* N mesure la moitié de la Fluxion de la premiere, en supposant la hauteur DG invariable. Car la Fluxion du triangle E D *e*, ou I G *i* est mesurée par le parallelogramme IN (la Fluxion de D E ou G I étant mesurée par I H) par la Proposition II. Donc la Fluxion du prisme E D *e* I G *i* est mesurée par le parallelepipede N H E *e*, dont la base est I N, & la hauteur D G, lequel est double du prisme triangulaire E I H *e i* N de même base I N, & de même hauteur DG. Donc, ce dernier prisme mesure la moitié de la Fluxion du prisme ED*e*IG*i*, ou la moitié de la seconde Fluxion de la pyramide A D E *e*. La derniere partie de la pyramide tronquée E D *e* H G *h*, qui est la pyramide *e* N *i h*, mesure la sixiéme partie de la Fluxion du parallepipede N H E *e*. Car, en achevant le parallelogramme N *i* R *h*, & le parallelepipede N *h* L *e*, la Fluxion du parallelogramme I N est mesurée par le parallelogramme N R (par la Proposition I. I H étant invariable) & la Fluxion du parallelepipede N H E *e* est mesurée par le parallelepipede N *h* L *e*, dont la pyramide *e* N *i h* est la sixiéme partie. Donc cette pyramide mesure la sixiéme partie de la Fluxion de ce parallelepipede ou de la troisiéme Fluxion de la pyramide A D E *e*.

130. Ainsi les solides E D *e* I G *i*, N H E *e*, N *h* L *e* respectivement mesurent la premiere, seconde & troisiéme Fluxions de la pyramide A D E *e*, lorsque A D flue uniformément, & que sa Fluxion est représentée par D G. Les trois parties, qui composent la pyramide tronquée ED*e*HG*h* (ou l'incrément de la pyramide formé pendant que A D acquiert l'incrément DG) sont le prisme ED*e*IG*i*, le prisme EHI*e*N*i*, & la pyramide *e* N *i h*, dont la premiere mesure la premiere Fluxion; la seconde la moitié de la seconde Fluxion, & la derniere un sixiéme de la troisiéme de la pyramide A D E *e*; & cette partie *e* N *i h* étant invariable, la pyramide n'a point de quatriéme Fluxion. Le premier de ces trois solides, est celui qui auroit été produit par le mouvement avec lequel la pyramide A D E *e* flue, s'il avoit été continué uniformément pendant le tems où P décrit DG. La seconde partie, est ce qui auroit été produit de plus que la premiere, si l'accélération du mouvement générateur

avoit été continuée uniformément depuis le terme où P arrive en D, de la même maniere que le triangle EIH (fig. 21.) est l'espace produit en conséquence de l'accélération du mouvement par lequel le triangle APM flue, pendant que P décrit DG, selon ce qui a été démontré dans le 93^e article. La troisiéme partie *e*N*ih*, est ce qui est produit en conséquence de l'augmentation continuelle & uniforme de l'accélération du mouvement générateur, ou de l'augmentation uniforme de la puissance, par laquelle nous pouvons concevoir que cette accélération est produite. La premiere Fluxion de la pyramide A D E *e* est exactement exprimée par la premiere de ces parties de son incrément, & l'on doit négliger, avec raison, les autres deux en la mesurant. La seconde, sert à comparer la seconde Fluxion de la pyramide au terme où P arrive en D, avec sa seconde Fluxion en quelque autre terme, ou avec la seconde Fluxion d'un autre solide. La troisiéme partie *e*N*ih*, sert à comparer la troisiéme Fluxion de la pyramide avec celle d'un autre solide, ou avec la troisiéme Fluxion de la même pyramide, lorsque l'axe AD flue par un mouvement différent.

Traité des Fluxions — Planche IIe Page 116



Carré L. *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, percussion et d'oscillation par l'application du calcul intégral,* Paris, J. Boudet 1700, rééd., Paris, Durand 1750, Section seconde, *De la dimension des solides* Proposition II.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

59. TROUVER *la valeur d'une pyramide.*

Soit une pyramide polygone dont la hauteur $AB = a$, sa partie $AP = x$, & $Pp = dx$, soit mené du point B le rayon $BD = r$, & du point P le rayon $PM = y$; il est évident que si on coupe cette pyramide par un plan parallele à la base passant par le point P, la section sera un polygone semblable à celui de la base : Et nommant c, la somme des côtez de la base, & b la hauteur d'un des triangles, on aura $\frac{bc}{2}$ = au polygone de la base; & pour avoir celui de la section on raisonnera ainsi. Les polygones semblables sont entr'eux en raison doublée de leurs rayons; ainsi la base est à la section comme rr est à yy : mais $rr.yy :: aa.\ xx$; donc $aa.\ xx :: \frac{bc}{2}.\ \frac{bcxx}{2aa}$ = au polygone qui a pour rayon PM, & multipliant par dx, on aura $\frac{bcxxdx}{2aa}$ = au petit fragment qui a pour hauteur Pp, & qui est la différentielle de la pyramide, dont l'intégrale $= \frac{bcx^3}{6aa}$ est la valeur de la pyramide qui a pour hauteur AP, ce qui donne $\frac{abc}{6}$ pour celle de la pyramide entiere, parce qu'en B, x devient $= a$. F 1

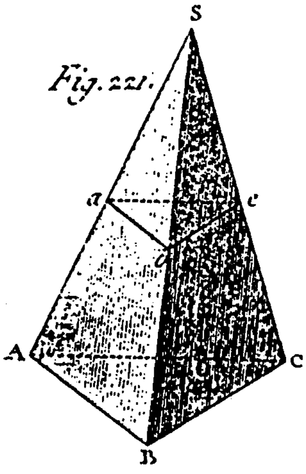
Il seroit facile de trouver par là la valeur d'un fragment quelconque coupé par un plan ou par deux plans paralleles à la base.

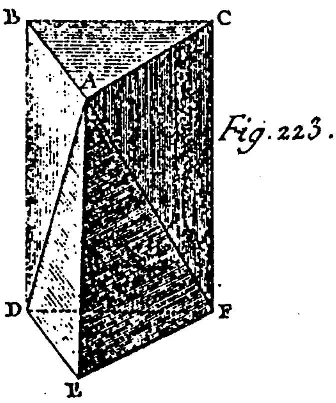
Si la pyramide n'avoit pas pour base un polygone régulier, on feroit à peu près les mêmes raisonnemens; car les polygones semblables sont entr'eux en raison doublée de leurs côtez homologues, ou bien les différentielles ou les élemens de la pyramide décroissent en raison doublée des hauteurs.

COROLLAIRE.

60. Il est évident que la pyramide est au prisme de même base & de même hauteur comme 1 est à 3.

D'Alembert , *Encyclopédie méthodique, Mathématiques,* tome second Article *Pyramide* , (extrait.), Panckoucke, Paris 1785, rééd. ACL, Paris 1987





THÉORÈME.

Deux pyramides S A B C, T N M P Q R (*fig.* 221 & 222), *qui ont des hauteurs égales* S O, T Z, *sont entr'elles comme leurs bases, quelque figure qu'aient d'ailleurs ces bases.*

DÉMONSTRATION.

Qu'on mène parallèlement aux bases, & à distances égales des sommets & des bases, les deux plans abc, $mnpqr$; & soient o, z, les points où ces plans rencontrent les hauteurs SO, TZ. Les deux polygones abc, ABC, étant semblables, on a

$$abc : ABC :: \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{So}^2 : \overline{SO}^2.$$

De même, les deux polygones $mnpqr$, $MNPQR$ étant semblables, on a

$$mnpqr : MNPQR :: \overline{mn}^2 : \overline{MN}^2 :: \overline{Tz}^2 : \overline{TZ}^2.$$

Or, à cause de $SO = TZ$, & de $So = Tz$, on a $\overline{So}^2 : \overline{SO}^2 :: \overline{Tz}^2 : \overline{TZ}^2$. Donc $abc : ABC : mnpqr : qr : MNPQR$, ou bien *alternando*, $abc : mnpqr :: ABC : MNPQR$. Ainsi, chaque section abc de la première pyramide, est à chaque section correspondante $mnpqr$ de la seconde, dans le rapport constant de la base ABC à la base $MNPQR$. Donc, en regardant ces deux pyramides comme composées d'un même nombre infini de tranches abc, $mnpqr$, on conclura, que la somme des tranches qui composent la première pyramide, ou la solidité de cette pyramide, est à la somme des tranches qui composent la seconde pyramide, ou la solidité de cette pyramide, comme la base ABC est à la base $MNPQR$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Donc, si les deux bases des deux pyramides de même hauteur sont égales en surfaces, les deux pyramides seront égales en solidités.

Une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme triangulaire de même base & de même hauteur.

DÉMONSTRATION.

Car soit le prisme triangulaire $ABCFED$ (*fig.* 223). Qu'on mène d'un angle A les diagonales AD, AF dans les faces parallélogrammiques $ABDE$, $ACFE$; & qu'on fasse passer un plan suivant ces diagonales : il partagera le prisme en deux pyramides, l'une triangulaire $ADEF$ (*fig.* 224), l'autre quadrangulaire $ABCFD$ (*fig.* 225). La première a même base que le prisme, & sa hauteur est la même que celle du prisme, puisque son sommet A est placé dans la base supérieure du prisme. Coupons la seconde par un nouveau plan, conduit suivant les arrêtes AC, AD : nous formerons deux nouvelles pyramides $ABCD$, $ACFD$, qui ont leurs sommets au même point A, & pour bases les triangles égaux BCD, FDC. Donc ces deux pyramides sont égales en solidités. Or, si nous comparons la pyramide $ABCD$ avec la pyramide $ADFF$, & si nous les considérons comme ayant leurs sommets aux points D & A, & pour bases les triangles BAC, DEF; nous verrons que ces deux pyramides sont égales, puisqu'elles ont hauteurs égales & bases égales. Donc les trois pyramides $ADEF$, $DBAC$, $ACFD$, dans lesquelles le prisme a été décomposé, sont égales en solidité. Donc, l'une $ADEF$ d'elles, qui a même base & même hauteur que le prisme, en est le tiers. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Donc, une pyramide triangulaire est le tiers du produit de sa base par sa hauteur, puisque le prisme est égal à ce produit entier.

COROLLAIRE II.

Toute pyramide $TMNPQR$ (*fig.* 222) est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur. Car, si l'on imagine une pyramide triangulaire $SABC$ (*fig.* 221), dont la hauteur SO soit égale à la hauteur TZ de la pyramide proposée, on aura $TMNPQR : SABC :: MNPQR : ABC$

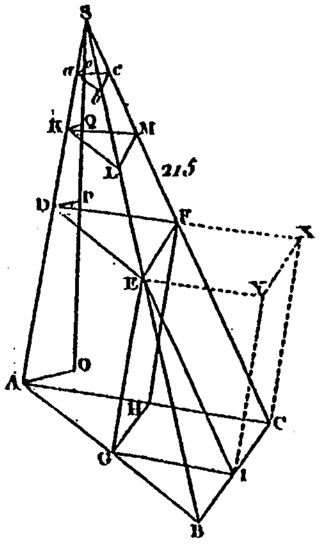
Laplace *Cours de l'Ecole normale de l'An III* , septième scéance , p.93-94 in *Oeuvres complètes.*

Deux pyramides triangulaires de même base et de même hauteur sont égales en solidité. Pour le faire voir, concevons les deux pyramides sur un même plan, et partagées en tranches de même hauteur par des plans parallèles à la base; il est facile de prouver que les sections seront respectivement égales en surface. Si l'on abaisse de chaque angle de la base supérieure d'une tranche de l'une des pyramides trois perpendiculaires sur la base inférieure, on formera un prisme droit triangulaire et trois solides, dont la somme sera plus grande que la différence entre la tranche et le prisme. La somme de ces trois solides est moindre que le produit du contour de la base inférieure de la tranche par sa hauteur et par la plus grande de ses arêtes; la différence entre le prisme et la tranche est donc moindre que le produit du contour de la base de la pyramide par la plus grande arête de la tranche et par sa hauteur. En considérant pareillement la tranche correspondante dans la seconde pyramide, on voit que la différence entre le prisme droit qui lui correspond et cette tranche est moindre que le produit du contour de la base de cette seconde pyramide par la hauteur de la tranche et par la plus grande de ses arêtes; or, les deux prismes droits sont égaux dans les deux pyramides, puisqu'ils ont même base et même hauteur; donc la différence des tranches correspondantes dans les deux pyramides est moindre que le produit de la somme des contours des bases des pyramides par la hauteur des tranches et par la plus grande arête des mêmes tranches; la différence entière des deux pyramides est, par conséquent, moindre que le produit de leur hauteur par la somme des contours de leurs bases et par la plus grande arête de leurs tranches; or, le nombre des tranches pouvant augmenter à l'infini, cette différence peut être supposée moindre qu'aucune grandeur donnée; elle est donc nulle, et les deux pyramides sont égales en solidité.

Il est facile d'en conclure, par la décomposition du prisme triangulaire en trois pyramides triangulaires, qu'une pyramide triangulaire est le tiers du produit de sa base par sa hauteur, et que cela est généralement vrai pour une pyramide quelconque et pour un cône.

Legendre A.M.*Eléments de Géométrie* , Livre VI , prop. XVII Paris, Didot, 1794

THÉORÈME.



La solidité d'une pyramide triangulaire est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

Soit SABC une pyramide triangulaire quelconque, ABC sa base, SO sa hauteur; je dis que la solidité de le pyramide SABC sera égale au tiers du produit de la surface ABC par la hauteur SO, de sorte qu'on aura SABC$=\frac{1}{3}$ABC×SO ou =SO×$\frac{1}{3}$ABC. fig. 215.

Car, si on nie cette proposition, il faudra que la solidité SABC soit égale au produit de SO par une quantité plus grande ou plus petite que $\frac{1}{3}$ABC.

Soit 1.° cette quantité plus grande, en sorte qu'on ait SABC=SO×($\frac{1}{3}$ABC+M). Si on fait la même construction que dans la proposition précédente, la pyramide SABC sera partagée en deux prismes équivalents entre eux AGHFDE, EGICFH, et en deux pyramides égales SDEF, EGBI. Or la solidité

du prisme AGHFDE est DFE×PO, et celle des deux prismes est par conséquent DFE×2PO ou DFE×SO. Retranchant les deux prismes de la pyramide entière, le reste sera égal au double de la pyramide SDEF, de sorte qu'on aura

2SDEF=SO×($\frac{1}{3}$ABC+M—DFE).

Mais, parce que SA est double de SD, la surface
15. ABC est quadruple de DFE*, et ainsi $\frac{1}{3}$ABC—DFE =$\frac{4}{3}$DFE—DFE=$\frac{1}{3}$DFE; donc

2SDEF=SO×($\frac{1}{3}$DEF+M).

Et ainsi en prenant les moitiés de part et d'autre

SDEF=SP×($\frac{1}{3}$DEF+M).

D'où l'on voit que, pour avoir la solidité de la pyramide SDEF, il faudra ajouter au tiers de sa base la même surface M qui avoit été ajoutée à la base de la grande pyramide, et multiplier le tout par la hauteur SP de la petite pyramide.

Si l'on divise SD en deux également au point K, et que par le point K on fasse passer le plan KLM parallèle à DEF, lequel rencontre en Q la perpendiculaire SP, la même démonstration prouve que la solidité de la pyramide SKLM sera égale à SQ×($\frac{1}{3}$KLM+M).

Continuant ainsi à former une suite de pyramides dont les côtés décroissent en raison double, et les bases en raison quadruple, on parviendra bientôt à une pyramide S*abc*, dont la base *abc* sera plus petite que 6M : soit S*p* la hauteur de cette dernière pyramide, et sa solidité, déduite de celles des pyramides précédentes, sera encore S*p*×($\frac{1}{3}$*abc* +M); donc, à cause de M>$\frac{1}{6}$*abc*, et par conséquent $\frac{1}{3}$*abc*+M>$\frac{1}{2}$*abc*, il s'ensuivroit que la

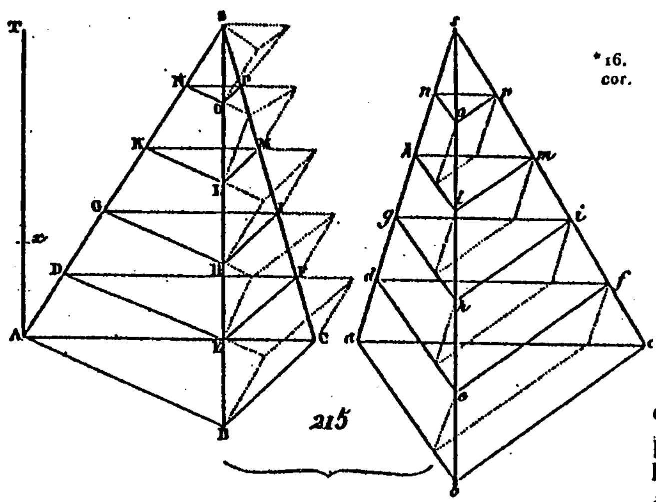
solidité de la pyramide S*abc* seroit >S*p*×$\frac{1}{2}$*abc*. Résultat absurde, puisqu'on a prouvé dans le corollaire II de la proposition précédente, que la solidité d'une pyramide triangulaire est toujours moindre que la moitié du produit de sa base par sa hauteur; donc 1.° il est impossible que la solidité de la pyramide SABC soit plus grande que SO×$\frac{1}{3}$ABC.

Soit 2.° SABC=SO×($\frac{1}{3}$ABC—M), on prouvera, comme dans le premier cas, que la solidité de la pyramide SDEF, dont les dimensions sont deux fois moindres, est égale à SP×($\frac{1}{3}$DEF—M); et, en continuant la suite des pyramides dont les côtés décroissent en raison double, jusqu'à un terme quelconque S*abc*, on aura de même la solidité de la dernière pyramide S*abc*=S*p*×($\frac{1}{3}$*abc*—M). Mais les bases ABC, DEF, LKM... *abc*, formant une suite décroissante dont chaque terme est le quart du précédent, on parviendra bientôt à un terme *abc*, égal à 12M, ou qui sera compris entre 12M et 3M, de sorte qu'alors $\frac{1}{3}$*abc*—M sera ou égal à $\frac{1}{4}$*abc*, ou compris entre $\frac{1}{4}$*abc* et zéro, et la solidité de la pyramide S*abc* sera ou =S*p*×$\frac{1}{4}$*abc* ou <S*p*×$\frac{1}{4}$*abc*. Résultat encore absurde, puisque, suivant le corollaire I de la proposition précédente, la solidité d'une pyramide triangulaire est toujours plus grande que le quart du produit de sa base par sa hauteur. Donc 2.° la solidité de la pyramide SABC ne peut être plus petite que SO×$\frac{1}{3}$ABC.

Donc enfin la solidité de la pyramide SABC= SO×$\frac{1}{3}$ABC ou =$\frac{1}{3}$ABC×SO, conformément à l'énoncé du théorème.

Legendre A.M.*Eléments de Géométrie*
Livre VI, prop. XVII, 12° édition 1823.

Legendre *Elémens de Géométrie*



PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Deux pyramides triangulaires qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales, sont équivalentes.

fig. 215. Soient SABC, *sabc* les deux pyramides dont les bases ABC, *abc*, que nous supposons placées sur un même plan, sont équivalentes et qui ont même hauteur TA; si ces pyramides ne sont pas équivalentes, soit *sabc* la plus petite et soit Ax la hauteur d'un prisme qui étant construit sur la base ABC, serait égal à leur différence.

Divisez la hauteur commune AT en parties égales plus petites que Ax, et soit k une de ces parties; par les points de division de la hauteur, faites passer des plans parallèles au plan des bases; les sections faites par chacun de ces plans dans les deux pyramides, seront
16. cor. équivalentes, telles que DEF et *def*, GHI et *ghi*, etc. Cela posé, sur les triangles ABC, DEF, GHI, etc., pris pour bases, construisez des prismes extérieurs qui aient pour arêtes les parties AD, DG, GK, etc., du côté SA; de même sur les triangles *def*, *ghi*, *klm*, *etc.*, pris pour bases, construisez dans la seconde pyramide des prismes intérieurs qui aient pour arêtes les parties correspondantes du côté *sa*; tous ces prismes partiels auront pour hauteur commune k.

La somme des prismes extérieurs de la pyramide SABC est plus grande que cette pyramide, la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc* est plus petite que cette pyramide; donc par ces deux raisons la différence entre les deux sommes de prismes devra être plus grande que la différence entre les deux pyramides.

Or à partir des bases ABC, *abc*, le second prisme extérieur DEFG est équivalent au premier prisme intérieur *defa*, puisque leurs bases DEF, *def*, sont équivalentes et qu'ils ont une même hauteur k; sont équivalents par la même raison le troisième prisme extérieur GHIK et le second intérieur *ghid*, le quatrième extérieur et le troisième intérieur, ainsi de suite jusqu'au dernier des uns et des autres. Donc tous les prismes extérieurs de la pyramide SABC, à l'exception du premier ABCD, ont leurs équivalents dans les prismes intérieurs de la pyramide *sabc*. Donc le prisme ABCD est la différence entre la somme des prismes extérieurs de la pyramide SABC et la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc*; mais la différence de ces deux sommes est plus grande que la différence des deux pyramides; donc il faudrait que le prisme ABCD fût plus grand que le prisme ABCX; or au contraire il est plus petit, puisqu'ils ont une même base ABC, et que la hauteur k du premier est moindre que la hauteur Ax du second. Donc l'hypothèse d'où l'on est parti ne saurait avoir lieu; donc les deux pyramides SABC, *sabc*, de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes.

Hadamard J. *Leçons de Géométrie* , Paris, 1898, réédition 1949.

Théorème. — *Deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalentes.*

Soient les pyramides triangulaires SABC, S'A'B'C' (*fig.* 311) dans

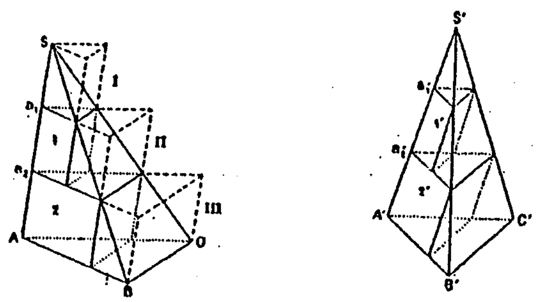


Fig. 311.

lesquelles les bases ABC, A'B'C' sont équivalentes, tandis que les hauteurs correspondantes ont la même longueur H ; soient V, V' leurs volumes.

Divisons l'arête SA en un certain nombre de parties égales, trois, par exemple, $Sa_1 = a_1a_2 = a_2A$. Par les points de division a_1, a_2, menons des sections $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ parallèles à la base : les plans de ces sections divisent la hauteur en trois parties égales. Si nous répétons la même construction sur la seconde pyramide — autrement dit, si nous divisons S'A' en trois parties égales et que nous menions par les points de division les sections $a'_1b'_1c'_1$, $a'_2b'_2c'_2$ parallèles à la base A'B'C' —, les sections obtenues sont équivalentes chacune à chacune, d'après le lemme précédent.

Construisons deux prismes, l'un ayant pour base le triangle $a_1b_1c_1$ et pour l'une de ses arêtes latérales a_1a_2 (de sorte que sa seconde base sera dans le plan $a_2b_2c_2$ et deux de ses faces latérales dans les plans SAB, SAC); l'autre ayant pour base le triangle $a_2b_2c_2$ et pour l'une de ses arêtes latérales a_2A (de sorte que sa seconde base sera dans le plan ABC, deux faces latérales étant toujours dans les plans SAB, SAC). Nous désignerons par les chiffres 1 et 2 les prismes ainsi construits, qui sont *intérieurs* à la pyramide SABC, et forment, par leur ensemble, un solide qu'on peut appeler *inscrit* à cette pyramide.

Si nous opérons de même dans la seconde pyramide, en construisant des prismes 1', 2' qui aient respectivement pour bases $a'_1b'_1c'_1$,

$a'_2b'_2c'_2$ et pour arêtes latérales $a'_1a'_2$, a'_2A', ces prismes seront respectivement équivalents aux premiers, comme ayant des bases équivalentes (ainsi que nous l'avons remarqué) et même hauteur (le tiers de la hauteur commune H).

La somme s_3 des volumes des prismes intérieurs a donc la même valeur de part et d'autre et elle est plus petite que le volume de chacune des deux pyramides.

Construisons, en second lieu, trois prismes extérieurs désignés sur la figure par les chiffres I, II, III, ayant respectivement pour bases $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, ABC et pour arêtes latérales a_1S, a_2a_1, Aa_2. Ces trois prismes forment, par leur ensemble, un solide *circonscrit* à la pyramide SABC, c'est-à-dire la comprenant tout entière à son intérieur et ayant, par conséquent, un volume plus grand. Si nous opérons de même pour la pyramide S'A'B'C', nous obtiendrons un solide circonscrit équivalent au premier, pour les mêmes raisons que précédemment, et le volume commun S_3 de ces deux solides sera supérieur au volume de chacune des deux pyramides.

Les volumes V, V' étant ainsi tous deux compris entre S_3 et s_3, leur différence est moindre que $S_3 - s_3$.

Or les prismes I, II sont respectivement équivalents (¹) aux prismes 1, 2 comme ayant mêmes bases $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ et même hauteur $\frac{H}{3}$: la différence $S_3 - s_3$ est donc égale au volume du prisme III, c'est-à-dire (405) à surf. ABC $\times \frac{H}{3}$.

Si, au lieu de diviser SA en trois parties égales, nous avions pris le nombre des divisions égales à n, nous construirions, dans chaque pyramide, n-1 prismes intérieurs, n prismes extérieurs, et le raisonnement précédent nous montrerait que la différence entre V et V' est inférieure à surf. ABC $\times \frac{H}{n}$, c'est-à-dire à la n^e partie du prisme de base ABC et de hauteur H.

Mais cette quantité peut être rendue aussi petite que l'on veut, en prenant n assez grand. La conclusion à laquelle nous arrivons ne peut donc avoir lieu si V et V' ne sont pas égaux.

C. Q. F. D.

Corollaire. — Le raisonnement qui précède montre que *le volume de la pyramide* SABC *est la limite commune des volumes* S_n, s_n, *lorsque* n *augmente indéfiniment*, puisque ce volume V diffère de chacune des quantités $S_n - s_n$ moins qu'elles ne diffèrent entre elles, et que la différence $S_n - s_n$ tend vers zéro.

Bricard R. *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres* in Nouvelles Annales de Mathématiques 15, 1896 : p. 331-334.

SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE RELATIVE AUX POLYÈDRES;

Par M. R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

La mesure de la surface du triangle s'établit, en Géométrie plane, à l'aide de considérations très simple. Il n'en est pas de même pour la question analogue de la Géométrie de l'espace, relative au volume du tétraèdre. On sait en effet que l'on démontre l'équivalence de deux tétraèdres ayant même hauteur et des bases de même surface, en les décomposant en tranches parallèles infiniment minces, équivalentes deux à deux. Cette démonstration ressortit en réalité au Calcul infinitésimal.

On peut se demander si cette décomposition est nécessaire et s'il serait possible de montrer l'équivalence des deux tétraèdres en question par une voie plus élémentaire, ce qui serait intéressant au point de vue de la doctrine. L'étude de cette dernière question, que nous avons entreprise sur le conseil de notre ami M. Hoffbauer, lieutenant d'Artillerie, mène à cette conclusion qu'il faut se prononcer pour la négative.

Posons-nous le problème général suivant :

Étant donnés deux polyèdres équivalents, peut-on toujours décomposer l'un d'eux en un nombre fini de polyèdres, qui, assemblés d'une manière différente, reconstituent le second polyèdre?

Soit P un polyèdre quelconque, et $p_1, p_2, p_3, \ldots$ les polyèdres en lesquels on le décompose par un certain nombre de plans arbitrairement tracés.

Les polyèdres p, assemblés différemment, constituent un nouveau polyèdre P'.

Dans le premier mode d'assemblage, ceux des dièdres des polyèdres p qui ont une arête commune ont pour somme un dièdre de P, ou π ou 2π. Dans le deuxième mode, la même somme a pour valeur un dièdre de P', π ou 2π.

En partant de cette remarque, on arrivera facilement à établir la congruence

$$mA + nB + \ldots + m'A' - n'B' + \ldots \equiv 0 \pmod{\pi},$$

A, B, ..., A', B', ... désignant les dièdres des polyèdres P et P', et $m, n, \ldots, m', n', \ldots$ des entiers qui ne sont pas tous nuls. Cette conclusion subsiste si, parmi les polyèdres p, quelques-uns sont extérieurs aux polyèdres P et P', de manière que ces derniers soient égaux à leur somme algébrique.

Ainsi, pour que deux polyèdres soient susceptibles d'être transformés l'un en l'autre par une décomposition de chacun en un nombre fini de polyèdres, superposables deux à deux, il faut qu'une certaine fonction linéaire de leurs dièdres, à coefficients entiers, soit un multiple de deux angles droits.

Or l'équivalence de deux polyèdres n'entraine en aucune façon une relation de ce genre. Le fait est à peu près évident; on peut s'en convaincre, si l'on veut, par l'examen d'un cube et d'un tétraèdre régulier équivalents (¹).

La transformation en question sera donc impossible dans le cas général. Il en résulte que l'on ne peut établir l'équivalence de deux tétraèdres ayant même base et même hauteur, et ne satisfaisant pas à d'autre condition particulière, sans avoir recours à la décomposition en éléments infiniment petits.

Le problème analogue relatif à deux polygones équivalents est au contraire toujours possible. C'est un fait connu et dont la démonstration est aisée. Dans ce cas, le succès tient à ce que les sommes des angles de deux polygones diffèrent toujours d'un multiple de deux angles droits.

Pour les polyèdres, la relation que nous avons trouvée est nécessaire, mais elle n'est sans doute pas suffisante. Ce serait un problème intéressant, mais difficile, que de rechercher les conditions précises permettant la transformation qui nous occupe, et le moyen de réaliser cette transformation dans les cas où elle est possible.

Nous terminerons en montrant qu'elle peut se faire dans le cas de deux tétraèdres symétriques et par conséquent dans celui de deux polyèdres symétriques, que l'on peut décomposer en tétraèdres symétriques deux à deux.

Soient ABCD, A'B'C'D' deux tétraèdres symétriques. Décomposons le premier en 12 tétraèdres, au moyen de droites joignant le centre de la sphère circonscrite aux sommets et aux centres des cercles circonscrits aux faces. Effectuons la même décomposition sur le tétraèdre A'B'C'D'. Deux éléments correspondants de ABCD et A'B'C'D' sont superposables en même temps que symétriques, car ils possèdent un plan de symétrie.

(¹) Le dièdre du tétraèdre régulier, dont le cosinus est égal à $\frac{1}{3}$, est en effet incommensurable avec π. S'il en était autrement, il existerait une équation binome ayant une racine égale à $\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{8}}{3}$, et dont le premier membre admettrait comme facteur le polynome $3x^2 - 2x + 3$, ce qui est impossible.

Sur les problèmes futurs des mathématiques , par David Hilbert (traduction L. Laugel)
. in Duporcq E., *Compte Rendu du Deuxième congrès international des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 Aout 1900* , Paris, Gauthier-Villars, 1902, Seconde Partie, Conférences,

Dans le domaine des principes de la Géométrie, je citerai d'abord le problème suivant :

III. — De l'égalité en volume de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales.

Dans deux lettres adressées à Gerling, Gauss (1) exprime le regret que certains théorèmes de Stéréométrie dépendent de la méthode d'exhaustion ou, comme on dirait aujourd'hui, de l'*axiome de continuité* (ou de l'axiome d'Archimède). Gauss cite en particulier ce théorème d'Euclide, que deux pyramides triangulaires de

(1) Gauss, *Werke*, t. VIII, p. 241 et 244.

même hauteur sont entre elles comme leurs bases. Le problème analogue relatif au plan est aujourd'hui complètement résolu (1). Gerling (2) réussit à démontrer l'égalité des volumes de polyèdres symétriques en les décomposant en parties congruentes; mais la démonstration, par ce moyen, du théorème précité d'Euclide dans le cas général, ne me semble guère possible. Il s'agirait donc alors d'une démonstration rigoureuse de l'impossibilité du problème. On serait immédiatement en possession d'une telle démonstration du moment que l'on pourrait *assigner deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales qu'il serait impossible de décomposer en tétraèdres congruents, et qui ne pourraient non plus, par l'addition de tétraèdres congruents, être transformés en polyèdres, eux-mêmes décomposables en tétraèdres congruents.*

(1) Outre les auteurs antérieurs, consulter à ce sujet Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Chap. IV, Leipzig; Teubner, 1899. Comparer aussi une Note ajoutée au Chap. IV de la traduction de cet Ouvrage (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XVII; 1900) où M. Hilbert parle des travaux fondamentaux sur ce sujet de M. Gérard, professeur au lycée Charlemagne.
(2) Gauss, *Werke*, t. VIII, p. 242.

BIBLIOGRAPHIE

D'Alembert cf. Diderot
Andersen K. ,*Cavalieri's Method of Indivisibles* Archive for the History of exact science tome 31 n°4 1985, p. 292- 367
Archimède *Oeuvres complètes*, trad. Mugler, Les belles Lettres, Paris 1971-1972
Archimède *Traité des Spirales* , in *Les oeuvres complètes d'Archimède* , trad. P.ver Eecke. Vaillant Carmanne, Liège 1960, rééd. Blanchard, Paris , 1961
Archimède *The work of Archimedes complètes*, Ed. with notes by T. Heath, Cambridge, 1897
Aristote *Physique* traduction de Carteron, Les Belles Lettres, Paris 1966
Bezout *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie* , Paris, An V (1797)
Boltianskii V. G. *Equivalent and equidecomposable figures* (trad. par A.K. Henn et C. E. Watts), D. C. Heath and co , Boston , 1963
Boltianskii V. G. *Hilbert's third problem*, traduit par R.A. Silverman, Winston and Sons, Washington, 1978
Bosmans H. *Un chapitre de l'oeuvre de Cavalieri. Les propositions XVI-XXVII de l'Exercitio quarta*. Mathesis 36 1922, p. 365-373, 446-456
Bossut *Traité élémentaire de Géométrie* , Paris, 1775
Bougainville le jeune , *Traité du calcul intégral pour servir de suite à l'Analyse des infiniment petits de M. le marquis de l'Hospital*, Paris , 1754
Boyer C. B. *The History of the Calculus, and its conceptual development* , 1949, réédition Dover, New York, 1959.
Bricard R. *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres* in Nouvelles Annales de Mathématiques 15, 1896 : p. 331-334
Bühler M. et Grégoire M. *Puzzle et casse-tête*, in *La figure et l'espace* Actes du 8° colloque de la commission inter-IREM d'épistémologie et Histoire des mathématiques, IREM de Lyon., 1993
Camus M. *Cours de Mathématiques* , Ve Ballard, Paris, 1766-1767
Carnot L. *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* , Paris, 1797, rééd. 1813 , réédition Blanchard, Paris, 1970
Carré L. *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, percussion et d'oscillation par l'application du calcul intégral*, J. Boudet , Paris, 1700, rééd.Durand , Paris, 1750
Cartier P., *Décomposition des polyèdres: Le point sur le troisième problème de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, 1984-85, n° 646, p. 646-01 à 646-28
Cauchy A. L. *Résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal* , Paris 1823 , réédit. ACL Editions, Paris, 1987
Cavalieri B. *Geometria indivisibilibus contiuorum nova quadam ratione promota*, Bononiae , 1635, reed. Bologne, 1653
Cavalieri B. *Geometria degli indivisibili* , a cura di Lucio Lombardo-Radice, Turin (UTET), 1966
Cavalieri B. *Exercitationes geometriae sex.* , Bononiae, 1647, (reprint 1980)
Chemla K. *De l'algorithme comme liste d'opérations* Extrême-Orient Extrême-Occident , n°12, 1990, p.79-94
Chemla K *Méthodes infinitésimales en Chine et en Grèce anciennes, les limites d'un parallèle* in Salanskis J. M. et Sinaceur H. *Le labyrinthe du continu* , Springer, 1992
Chemla K. *Résonances entre démonstration et procédure* . Extrême-Orient Extrême- Occident , n°14, 1992, p.91-129
Child J.M. *The early mathematical manuscripts of Leibniz* , Open Court Chicago, 1920
Chuquet N. *La Géométrie* , 1484, édité par l'Huillier H., Vrin, Paris ,1979
Clairaut A.C. *Elémens de Géométrie* , Paris , 1741

Cléro J. P. Le Rest E. *La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle* , Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences. n° 16, Centre de documentation Sciences humaines, 1981.
Dahan-Dalmedico A. Peiffer J. *Routes et Dédales* , Librairie Blanchard, Paris , 1982
Deidier *l'Arithmétique des géomètres* . , Jombert , Paris, 1735
Deidier *La science des Géomètres.* , Jombert , Paris, 1739
Deidier *La mesure des surfaces et des solides par l'arithmétique des infinis et les centres de gravité* , Jombert, Paris , 1740.
Dehn M. *Ueber raumgleiche Polyeder.* Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math. phys. Kl. 1900 , p. 345-354
Dehn M. *Ueber den Rauminhalt.* Math. Ann. 55 1902, p.465-478
Dhombres J. , *Nombre, mesure et continu* , Cedic Nathan, Paris, 1978,
Diderot, D'Alembert, et alii *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences des arts et des métiers.* Paris 1751, (articles "différentiel" , "limite", "Nangis" "pyramide")
Duporcq E. *Compte Rendu du Deuxième congrès international des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 Aout 1900* , Gauthier-Villars, Paris, 1902
Euclide *Les Eléments* , traduction Peyrard, réedition Blanchard , Paris, 1966
Euclid *The 13 books of the Elements* , traduits et commentés par Sir Thomas L. Heath, édition Dover , New-York, 1956
Festa E. *La querelle de l'atomisme, Galilée et les Jésuites* , La Recherche n° 224, septembre 1990 , p. 1041
Fontenelle B. *Eléments de la géométrie de l'infini.* Paris, 1727
Galilée G. *Discours concernant deux sciences nouvelles*, traduction de M. Clavelin, A. Colin, Paris 1970
Gandt F.de ,*Naissance et métamorphose d'une théorie mathématique: la géométrie des indivisibles en Italie* Brochure APMEP, n°67 , 1987 , p.86-124
Gerwien, *Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke* Journal für angewandte und reine Mathematik, 1833, p. 228-234
Gillings R. J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs* , Dover, New-York,
Hadamard J. *Leçons de Géométrie*, Paris, 1898, réédit. 1949
Hilbert D. *Les fondements de la géométrie* , traduits par Rossier, Dunod, Paris, 1971
Hill M. J. M.*Determination of the volumes of certain species of tetraedra without the employment of the method limits* , Proc. London Math. soc. 27, 1896, p.39-53
Houzel C. et alii *Philosophie et calcul de l'infini* , Paris, Maspéro, 1976
Hofmann J. Ehrenfried *Wie ist wohl Demokrit zum Rauminhalt der Pyramide gekommen?* , Historia Mathematica 14, Toronto, 1987, p.173-174
Itard Jean, *Essais d'histoire des mathématiques* , Blanchard, Paris, 1984
Kepler J. *Gesammelte Werke* , Ed. par Caspar, Beck, München, 1960
Kepler J. *Nova Stereometria* in *Opera omnia* , IV , ed. Frisch, Heyder et Zimmer, Frankfurt Erlangen, 1863
Koyré A. *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, Paris, Gallimard,1973
Kuhn T.S. *La structure des Révolutions scientifiques*, trad. L. Meyer, Flammarion, Paris, 1983
Kuhn T.S. *La tension essentielle* , Univ. of Chicago Press, Chicago, 1977, Flammarion, Paris, 1991
Lacaille *Leçons élémentaires de Mathématiques* , Guérin Delatour, Paris, 1759
Lacroix S. *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* , Paris, 1802
Lacroix S. *Eléments de Géométrie* Courcier, Paris , 1807
Lagrange J, L. *Théorie des fonctions analytiques* , Paris, 1797
Lakatos I. *Preuves et Réfutations . Essai sur la logique de la découverte scientifique.* , trad. Balacheff N. Laborde J.M., Hermann, Paris, 1984
Lakatos I.et Musgrave ed *Criticism and the growth of knowledge .* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974
Lamy B.. *Elémens de Géométrie* , Paris 1685

Laplace *Cours de l'Ecole normale de l'An III* , in *Oeuvres complètes*, t. XIV, Gauthier-Villars, Paris, 1912
Lebesgue, H. *Sur l'équivalence des polyèdres, en particulier des polyèdres réguliers, et sur la dissection des polyèdres réguliers en polyèdres réguliers* , Annales de la Soc. polonaise de Math. 17 ,1938, p.193-226
Lebesgue, H *Sur la mesure des grandeurs* , l'Enseignement mathématique, tomes XXI à XXIV , 1931 à 1935.
Legendre A. M. *Eléments de Géométrie* Paris, Didot, 1794 12° édition 1823
Leibniz G. W. *Histoire et origine du calcul différentiel* , 1713, traduction de Régine Szeftel-Zylberbaum, Cahiers de Fontenay, n°1, 1981
C. Gerhardt *G. W. Leibniz Mathematische Schriften*,, Olms, Hildesheim, 1962,
L'Hospital G. de, *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* , Paris 1696, réed. ACL , Paris 1988
Mac Laurin C. *A treatise of Fluxions* , Edimbourg, 1742, traduction de Pezenas, Paris, 1749
Malebranche *Oeuvres complètes* , Vrin, Paris, 1979
Martzloff J.C. *Histoire des Mathématiques chinoises*, Masson, Paris, 1988
Montucla J. F. *Histoire des mathématiques*, Agasse, Paris, an VII, réedition Blanchard, Paris, 1968
Newton I. *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* traduction de Mme du Châtelet, Paris 1759, réédition Blanchard, Paris , 1966
Newton I. *Opera omnia* Horsley, London, 1779-1785
Newton I. *Tractatus de quadratura curvarum* , supplément à l'*Opticks* , 1704,
Newton I. *Méthode des fluxions et des séries infinies*, trad. Buffon, Paris 1740, réédition Blanchard, 1966.
Pascal B. *Oeuvres complètes*, Paris , Gallimard, (ed. de la Pléiade), 1954,
Redondi P. , *Galilée hérétique* , trad. M. Aymard, Gallimard, Paris 1985,
Reyneau Ch. *Usage de l'analyse, ou la manière de l'appliquer à découvrir les propriétés des figures de la Géométrie simple et composée, à résoudre les Problèmes de ces sciences et les Problèmes des sciences Physico-mathématiques, en employant le calcul ordinaire de l'Algèbre, le calcul différentiel et le calcul intégral. Ces derniers calculs y sont aussi expliqués et démontrés. Par un Prêtre de l'Oratoire* Quillau, Paris, 1708
Roberval G. P. *Traité des Indivisibles* in *Divers ouvrages de Mathématiques et de physique* par l'Académie royale des sciences, Paris 1693, réédition IREM Paris VII , 1987
Saint-Vincent G. *Opus geometricum quadraturae circuli & sectionium coni*, Anvers, 1647
Stevin *L'art pondéraire ou dela Statique* in Les oeuvres mathématiques, Leyde, 1584, réédit. ACL Editions , Paris, 1987
Stone *Analyse des infiniment petits comprenant le calcul intégral dans toute son étendue*, Julien N. , Gandouin et Giffard, 1735
Struick D. J. *A source book in Mathematics, 1200-1800* Harvard Univ. Press, Cambridge , Mass. , 1969
Struve W. *Mathematischer Papyrus des staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, in *Quellen und studien zur Geschichte der Mathematik*, Serie A, vol.I, Springer, Berlin, 1930,
Sydler J.P. *Sur la décomposition des polyèdres*, Comment. math. Helvetica 16 , 1943-1944, p.266-273
Sydler J.P. *Sur les tétraèdres équivalents à un cube*, Element. math. 11, 1956, p.78-81
Sydler J.P. *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions* , Comment. math. Helvetica, 40, 1965 p. 43-80
Tacquet A. *Elementa Geometriae planae ac solidae* Anvers, 1654, réédition 1754
Tacquet A. *Cylindrica et Annularia* in *Opera mathematica* , Anvers, 1668,
Wagner D.B. *An early derivation of the volume of a pyramid : Lui Hui, third century A.D.* , Historia Mathematica, Toronto, 1979, vol 6, p.164- 188

Wagner D.B. _Proof in ancient Chinese Mathematics. Lui Hui on the volumes on rectilinear solids_ , thèse inédite, Copenhague, 1975
Wallis _Opera mathematica_ , _De sectionibus conicis tractatus_ et _Arithmetica infinitorum_ , Olms, Hildesheim, 1972
Wolf Ch. _Cours de mathématiques qui contient toutes les parties de cette science mise à la portée des commençants_ , Paris, 1747.

Préface de la *Métfode pour la mesure des surfaces* ... de L. Carré, 1700, rééd. 1750

PREFACE.

JAMAIS on n'a tant cultivé les Sciences que dans le ſiécle où nous ſommes, & l'on peut dire que jamais on n'y a fait tant de progrès, ſurtout dans les Mathématiques, qui ont fait de tout tems l'étude des Eſprits les plus ſublimes. Auſſi ſont-elles portées à un tel dégré de perfection, qu'il faudra dans la ſuite être un homme d'un génie rare & extraordinaire pour y faire de nouvelles découvertes. La plus belle qu'on ait faite juſqu'à préſent eſt ſans doute le *Calcul différentiel*, ...

METHODE

POUR

LA MESURE DES SURFACES, LA DIMENTION DES SOLIDES, LEURS CENTRES DE PESANTEUR, DE PERCUSSION ET D'OSCILLATION

Par l'Application du Calcul intégral.

Par M. CARRÉ, de l'Académie Royale
des Sciences.

A PARIS,
Chez DURAND, Libraire, rue Saint Jacques, à S. Landry
& au Griffon.

M. DCC. L.

AVEC APPROBATION ET PERMISSION.

Comité de lecture:

Philippe BRIN	*Lycée Technique E.Branly Créteil* *Animateur à l' IREM Paris VII*
Michèle LACOMBE	*Lycée J. Monod Clamart* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Anne MICHEL-PAJUS	*Lycée C. Bernard Paris* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Michel SERFATI	*Lycée Technique Raspail Paris* *Animateur à l' IREM Paris VII*
Jean Luc VERLEY	*Université Paris VII* *IREM Paris VII*

Pour échanger expériences et réflexions à propos de

l'histoire et l'enseignement des mathématiques

M.:	*Mathématiques*
A.	*Approche par les*
T.	*Textes*
H.	*Historiques*

de l'IREM Paris VII propose la revue : MNEMOSYNE

Extraits des sommaires

numéro 1

Bonnes vieilles pages	*La Caille*
Dans nos classes	*La section dorée dans lres 'Elèments' d'Euclide*
Etude	*La démonstration par exhaustion chez les grecs et les arabes*

numéro 2

Bonnes vieilles pages	*Vivanti*
Dans nos classes	*La quadrature de l'hyperbole d'après Grégoire de Saint Vincent*
Etude	*La querelle entre Descartes et Fermat à propos des tangentes.*

numéro 3

Bonnes vieilles pages	*Wantzel*
Dans nos classes	*A propos du volume de la pyramide.*
Etude	*Fragments d'une étude des systèmes linéaires.*

numéro 4-5

Bonnes vieilles pages	*Nicolas Chuquet*
Dans nos classes	*Une méthode de quadrature et sa légitimation par Issac Newton*
Etude	*L'Elaboration du calcul des variations et ses applications à la dynamique.*

En vente au prix de 7,00 Euros

Editeur : IREM
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Dépôt légal : Juillet 1993
ISBN : 2-86612-093-0
IREM Université Paris VII Denis Diderot
Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel : 01 44 27 53 83