

M : A.T.H.



MEMOSYNE

UNIVERSITE PARIS VII

Mnémosyne

personnification de la mémoire.

Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite;
de cette union naquirent les neuf Muses.

(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture : **"La mémoire"**
gravure allégorique d'après Gravelot (XVIII ème)

n°6

novembre 1993

MEMOSYNE

M : A.T.H.

M: *Mathématiques*

A. *Approche par les*

T. *textes*

H. *historiques*



SOMMAIRE

<i>Bonnes vieilles pages</i>	<i>p.5</i>
<i>Probabilités et imprévus chez de Morgan</i>	
<i>Texte anglais</i>	<i>Planches I, II et III</i>
 <i>Dans nos classes</i>	 <i>p.15</i>
<i>Le problème des partis</i>	
 <i>Iconographie</i>	 <i>p.26</i>
<i>Coudée égyptienne</i>	
 <i>Etude</i>	 <i>p.29</i>
<i>Leibniz et l'Ecole continentale</i>	
 <i>Contes du Lundi</i>	 <i>p.47</i>
<i>L'Almageste</i>	
 <i>Notes d'écoute</i>	
<i>Histoire de la perspective</i>	<i>p. 51</i>
<i>Histoire des probabilités</i>	
 <i>Note de lecture</i>	
<i>Routes et Dédalles</i>	<i>p.56</i>
 <i>Calendrier</i>	 <i>Séminaires pour l'année 1993-94</i>
	<i>p.57</i>

AN ESSAY ON PROBABILITIES,

and on their application to

LIFE CONTINGENCIES

AND

INSURANCE OFFICES.

BY

Augustus de Morgan, of Trinity College Cambridge.

*Professor of Mathematics in University College; and
Secretary of the Royal Astronomical Society.*



W. G. & Co. del.

J. F. Smith sc.

London:

Printed by Longman, Brown, Green, & Co., 15, Abchurch Lane.

1847.

Probabilités et imprévus chez de Morgan

Michel SERFATI¹

“ La théorie des probabilités est le Mont-Blanc de l'Analyse Mathématique ”
A. de Morgan²

Nous présentons ci-après - à titre exceptionnel en anglais³ - quelques extraits de l'*Essai sur les probabilités, et leurs applications aux contingences de la vie et aux Compagnies d'assurances*, ouvrage d'Augustus de Morgan paru à Londres en 1838 (cf. le frontispice de l'ouvrage en figure 1). Le texte est d'un genre assez particulier: écrit par un mathématicien et logicien professionnel, cet étonnant manuel à l'usage d'un large public cultivé mais aussi des techniciens comme ceux des assurances, ne contient à peu près aucune écriture symbolique, ni formule de style mathématique. Dans la présente étude, nous nous proposons d'examiner brièvement dans l'ouvrage quelques techniques mathématiques effectivement à l'oeuvre, en même temps que certains des aspects épistémologiques et philosophiques du calcul des probabilités sous-jacents dans le texte. Le titre original en est :

AN ESSAY ON PROBABILITIES
and on their application to
LIFE CONTINGENCIES
and INSURANCE OFFICES

par Augustus de Morgan
Trinity Collège

Augustus de Morgan .

Né à Madras en 1806, de Morgan a trente deux ans quand il écrit l'*Essay*.... Sa mère était la fille de John Dodson, élève et ami d'Abraham de Moivre. Il eut parmi ses élèves Todhunter⁴, Roth et Sylvester. Homme méticuleux et précis, témoignant d'un constant souci de pédagogie, il était d'une puissante foi religieuse, et en même temps ennemi de toute orthodoxie établie. Préoccupé de questions morales (en témoigne son refus des jeux de hasard), on trouve chez lui des accents utopistes, parfois lyriques, quant à l'élaboration d'un monde meilleur qui serait fondé sur un système universel d'assurances. A côté de ses traités scientifiques, il se plaisait par ailleurs à écrire sur des sujets divers, parfois futiles. Il publia par exemple huit cent cinquante

¹ Ce texte est le bref résumé d'un exposé présenté par l'auteur au séminaire : *Nécessité, Causalité, Hasard* à l'Université Paris I .

² *Dublin Review*, 1836- 1837, Volume I I, page 347 .

³ Les traductions sont de M. Serfati .

⁴ Ian Todhunter , historien du calcul des probabilités . Son ouvrage :

A History of The Mathematical Theory Of Probability From the time of Pascal to that of Laplace .
(1865 . Réédition . Chelsea Publishing Company . New-York . 1949 .) est indispensable à qui veut aborder historiquement la question des commencements en calcul des probabilités .

articles (un sixième du total) dans une revue populaire, la *Penny Cyclopaedia*

Il est surtout connu comme mathématicien⁵ et logicien: c'est lui qui inventa en 1838 le terme d' " induction mathématique " (récurrence), pour décrire un procédé qui avait été jusqu'alors utilisé - sans beaucoup de clarté ni de formalisme - par les mathématiciens. En logique, outre les lois qui portent son nom⁶, on doit à de Morgan la quantification du prédicat⁷, ainsi que l'algèbre des relations (binaires) qu'il fut le premier à introduire.

Occupant une place relativement mineure dans son oeuvre, les textes de de Morgan relatifs aux probabilités sont au nombre de trois : *L'Essay* (ci-dessous analysé), un véritable traité, la *Theory of Probabilities*, publié dans l' *Encyclopaedia Metropolitana*⁸, un article critique enfin dans la *Dublin Review*⁹, pour faire écho à la Théorie Analytique des Probabilités, l'ouvrage-monument de Laplace, paru quelque temps auparavant (1812) .

L'Essay on Probabilities.

Dans un long préambule, de Morgan expose ses intentions: il se propose de présenter à des profanes, sans aucun appareillage mathématique, deux éléments importants, nouveaux pour l'époque, et relativement peu simples de la théorie mathématique des probabilités. Ils font suite aux travaux de Bayes et de Laplace (Théorie Analytique des Probabilités) : il s'agit, d'une part, de l'application à des exemples effectifs du théorème tout nouveau à l'époque, et qu'on appelle aujourd'hui le théorème de de Moivre- Laplace (analysé ci-dessous au paragraphe : " Probabilités directes chez de Morgan "); d'autre part, à la suite du théorème de Bayes (brièvement analysé ci-dessous dans la note 29, au paragraphe " Probabilités inverses chez de Morgan "), l'emploi des probabilités " inverses ", ou " des causes ", ou encore " des hypothèses ". Qu'avec ses objectifs et ses moyens volontairement limités, de Morgan parvienne à être compris est à porter à son crédit et à des soucis de pédagogie dont il ne s'est jamais départi. Et sur ce plan de la pédagogie en effet, l' *Essay* ne manque pas d'intérêt pour le lecteur moderne. De surcroît, et en ce qui concerne les aspects interprétatifs de la théorie des probabilités, de Morgan ne manque jamais d'accompagner ses règles d'abondants commentaires, comme il convient particulièrement, pense-t-il, quand on s'adresse à des profanes. Il nous fournit ainsi, avec le fond de sa pensée, le modèle presque idéal de ce qu'on appelle aujourd'hui une interprétation purement subjectiviste des

⁵ En analyse, il publia entre autres : *The Differential and Integral Calculus* (Londres 1842) .

⁶ Comme on sait, elles fournissent le complémentaire d'une réunion et d'une intersection, et sont interprétables soit en logique, soit en théorie des ensembles .

⁷ Que nous opérons aujourd'hui par " quel que soit ", ou " il existe " .

⁸ Ou l' *Universal Dictionary of Knowledge*, Volume II (Pure Sciences) . Londres 1845 . *Theory of Probabilities* (399 - 490) . Contrairement à l' *Essay*, la *Theory of Probabilities* est un véritable traité de probabilités, contenant mathématiques et calculs probabilistes raffinés pour l'époque . Par exemple, (page 429), de Morgan démontre la formule de Stirling pour les intégrales eulériennes :

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx = s^s e^{-s} \sqrt{\pi} \left\{ \sqrt{2s} + \frac{3}{2} \frac{1}{9\sqrt{2s}} + \&c..... \right\}$$

Le même volume contient (p 305) un *Calculus of functions*, toujours par de Morgan.

⁹. Volume II, publié en Décembre 1836 et Avril 1837 . Londres . 1837 , p338 - 354 . Art IV . Théorie Analytique des Probabilités par M. le Marquis de Laplace (...) . 3^e édition . Paris 1820 . Commentaire de A. de Morgan .

probabilités, position où il se montre parfois plus laplacien que Laplace.¹⁰

De Morgan constate d'abord à regret que la théorie des probabilités est née dans le terreau bien ambigu des jeux de hasard et d'argent (le *gambling*), mais qu'ayant surmonté d'aussi douteuses origines, elle est devenue une discipline mathématique de première importance (le " Mont- Blanc "...) et aussi un indispensable outil dans la pratique, en particulier qu'elle est " consultée comme le guide de nos sens trompés et le correcteur de nos impressions trompeuses ".

Sur le fond d'autre part, de Morgan expose l'intérêt de la publication de l'*Essay* par la double nouveauté apportée par son livre par rapport aux traités du XVIII^e siècle: d'une part la simplification (*abbreviations*) des calculs et leur caractère rendu opératoire par l'emploi de la toute neuve méthode de Laplace, d'autre part la prise en compte de questions impliquant la probabilité des hypothèses: " Ces deux obstacles, cependant, la difficulté mathématique et le désir d'une méthode inverse, ont empêché la science d'élargir ses vues au delà de ces problèmes de nature simple qui se présentent dans les questions de jeu. "¹¹

Pour ce qui est de la question de la simplification des calculs numériques effectifs, de Morgan constate qu'avec un nombre d'épreuves répétées de l'ordre de mille par exemple, les calculs binomiaux deviennent impraticables en fait, sinon en droit. A quoi peut donc bien servir une théorie bien maîtrisée, si le meilleur mathématicien est embarrassé dès qu'il tâche de la mettre effectivement en oeuvre? Voici de Morgan: " Un jeté de dés ou même un seul paquet de cartes peut voir ses combinaisons épuisées par un degré modéré d'industrie: mais quand une question met en jeu un dé à mille faces, ou un millier de jets avec un dé, quoique le principe correct de sa solution aurait pu sembler aussi clair à un mathématicien du seizième siècle que si on avait jeté une demi douzaine de lancers; cependant l'étendue des nombres et en conséquence la longueur et le caractère fastidieux des opérations nécessaires aurait formé devant l'obtention du résultat une barrière aussi effective qu'une difficulté de principe, ou la recherche d'une claire perception¹². " Pour résoudre ce type de questions qui sont du registre des probabilités directes (en termes modernes: des épreuves répétées de type discret, problèmes combinatoires - binomiaux), de Morgan emploiera - au moyen de tables de la loi de Laplace-Gauss fournies à la fin de l'ouvrage - la méthode de de Moivre-Laplace. Rappelons qu'elle fournit des résultats asymptotiques: la méthode permet donc, en dernière analyse, de régler commodément des questions de fait.¹³

La seconde question, une problématique relativement neuve à l'époque où de Morgan écrit l'*Essay*, est relative aux probabilités inverses, particulièrement à l'acceptation et l'emploi des probabilités " des causes ". Elle est davantage à notre sens une question de droit: un événement étant arrivé, peut-on dégager des conclusions (probabilistes) quant aux hypothèses qui ont pu concourir à sa réalisation? Dans le contexte de l'époque, il était sans doute indispensable à de Morgan d'argumenter sur la légitimité de ce type de recherche inverse. Voici de Morgan en un très clair exposé des motifs: " Il y avait aussi une autre circonstance qui s'était mise en travers du chemin des premiers explorateurs, c'est de ne pas avoir pris en considération, ou au moins de ne pas avoir découvert la méthode de raisonner, à partir de la venue d'un événement, jusqu'à la probabilité d'une ou plusieurs de ses causes. Les questions traitées dans le troisième chapitre de ce volume ne pouvaient en conséquence être saisies par eux. Etant donnée une hypothèse

¹⁰ Le lecteur intéressé par une description moderne et pertinente des trois principales écoles philosophiques en la matière (subjectiviste - fréquentiste - logiciste) pourra consulter avec intérêt: *L'épistémologie des probabilités*, de Benjamin Matalon, in *Logique et connaissance Scientifique*. Editions de la Pléiade. Gallimard. Paris. 1967. La position de Laplace lui-même est consignée dans sa préface à la *Théorie Analytique*, publiée séparément sous le nom d' *Essai philosophique sur les Probabilités*. Courcier. Paris 1819. (Réédition Hermann. Paris.)

¹¹ Préface de l' *Essay* .

¹² Préface de l'*Essay*, page 10.

¹³ Sur tous les aspects proprement mathématiques du calcul des Probabilités, l'un des meilleurs ouvrages demeure celui de William Feller (en particulier le Tome 1) : *An Introduction to the Probability Theory and Its Applications*. Wiley and Sons. New York. Edition de 1968. (2 volumes)

qui entraînait la nécessité de l'une ou l'autre des conséquences parmi un certain nombre déterminé et pas très important d'entre elles, ils pouvaient déterminer la chance pour que se produise l'une ou l'autre, donnée à l'avance, de ces conséquences; mais se donnant un événement comme étant arrivé, et qui aurait pu être la conséquence de l'une de plusieurs causes différentes ou explicable par l'une de plusieurs différentes hypothèses, ils ne pouvaient déduire la probabilité avec laquelle l'arrivée de l'événement pouvait causer les différentes hypothèses envisagées. Mais, de même qu'en philosophie naturelle, le choix d'une hypothèse par le moyen des faits observés est toujours préalable à tout essai de découverte déductive; de même dans l'application de la notion de probabilité aux véritables affaires de la vie, le processus de raisonnement depuis les faits observés jusqu'à leurs plus probables antécédents doit précéder l'usage direct de tels antécédents, cause, hypothèse, ou quoi que ce soit qui soit appelé de la sorte . “

La définition de la probabilité chez de Morgan.

Jusqu'aux années 1930 et à l'axiomatisation par Kolmogorov de la théorie des probabilités, la partie la plus redoutable pour l'auteur de tout traité mathématique de calcul des probabilités n'avait sans doute pas manqué d'être celle de l'exposé de la *définition* même des probabilités. Et, comme à l'ordinaire, l'avènement de la théorie axiomatique eut pour conséquence d'évacuer tous préambules métaphysiques ou intuitifs qui remplissaient ordinairement les premières pages du moindre traité. S'agissant de de Morgan cependant, la présente étude épistémologique se propose d'exposer quelques points clés de sa définition des probabilités, facilement repérables dans les premiers chapitres de l'ouvrage. Nous exposerons brièvement cette suite de cinq arguments soutenus par l'auteur de l'*Essay* :

a) Il y a des sentiments de certitude ou encore des sensations d'assentiment qui sont de nature très dissemblables.

De Morgan : “ Quelqu' improbable qu'il soit, par exemple, que les barbares n'aient pas renversé l'empire romain, c'est là une *certitude sensible*, et nous n'en reconnaissons pas la même espèce dans notre *certitude morale* de ce fait dont nous disposons dans notre savoir, qui est que le feu brûle ou que deux lignes droites n'enferment pas une portion d'espace. Et nous percevons une différence dans la qualité de notre savoir, quand une modification quelconque prend place dans nos circonstances relativement aux objets extérieurs. Que le feu *brûle* effectivement est plus certain que le récit de la chute de Rome : que le feu devant être allumé *brûlera* peut ou non être plus certain que le fait historique, cela dépend du tempérament et du savoir de l'individu. Et de la sorte nous reconnaissons des différences même entre nos (soi - disant) *certitudes* . ¹⁴ “

b) Toute comparaison implique, au moins en droit, la possibilité d'une mesure du degré de comparaison.

C'est à dire, que dès que nous pouvons ressentir une différence de degré, nous pourrions être amenés à dire qu'il existe une mesure de cette différence. C'est une position fondamentale chez de Morgan, qui sera critiquée par Keynes ¹⁵.

¹⁴ cf. sur ce point Poisson : *Recherches sur la Probabilité des Jugements en Matière Criminelle et en Matière Civile précédées des Règles générales du Calcul des probabilités* : § 4 page 55: “ La *certitude* est considérée, dans la théorie des chances, comme un cas particulier de la probabilité : c'est le cas où un événement n' a aucune chance contraire ; elle est représentée dans le calcul par l'unité tandis qu'une probabilité quelconque est exprimée par une fraction moindre que 1, la parfaite perplexité de notre esprit entre deux choses contraires par 1/2, et l'impossibilité par zéro . “

¹⁵ A *Treatise on Probability*. John Maynard Keynes. Mac Millan and Co Limited. London 1921. Keynes, qui s'inscrit dans une perspective logiciste (il se place en continuateur de Leibniz), y développe une vigoureuse critique des thèses subjectivistes, en particulier de celles de de Morgan.

c) Il est possible d'étalonner les " forces d'assentiment " ainsi ressenties.

L'assignation à tout sentiment de certitude d'un degré qui soit un nombre compris entre 0 et 1 - idée dont l'origine revient sans doute à Leibniz¹⁶, à partir d'exemples tous rationnels (les proportions de boules dans une urne) - pouvait à l'époque paraître demander une argumentation soutenue. De Morgan opère par comparaison avec la situation standard du tirage d'une lettre dans une loterie: il s'efforce de prouver qu'il est possible, au moins en droit, de graduer complètement et par paliers les situations.

"Un marchand a frété un bateau, qu'il attend de voir arriver au port (il n'en est pas certain). Maintenant, on suppose une loterie, dans laquelle il est tout à fait certain que chaque ticket est marqué d'une lettre. Si je lui demande ce qui est le plus probable, de ce que son bateau va arriver au port ou de ce qu'il ne tirera aucune lettre s'il tire, il répondra sans conteste le premier, car le second ne se produira certainement pas. Si je lui demande à nouveau, ce qui est le plus probable, que le bateau arrive, ou que, s'il tire, il tirera ou un a, ou un b,...ou un x ou y, ou un z, il répondra le second, car il est tout à fait certain. Maintenant supposons que j'écrive la série suivante d'assertions:

Il ne tirera aucune lettre

Il tirera a

Il tirera a ou b

Il tirera a ou b ou y

Il tirera a ou b ou y ou z

et lui faisant observer qu'elles sont, par nature, des propositions de tous les degrés de probabilités, depuis celles qui ne peuvent être, jusqu'à celles qui doivent être, je lui demande de mettre l'assertion que le bateau arrive à sa juste place parmi elles. Ce qu'il ne sera peut-être pas capable de faire (. . .) mais il trouvera peut-être de la difficulté à assigner, à un cas ou deux près où il doit se trouver. Tout ce temps là, il essaye de comparer la grandeur de deux espèces très différentes d'assentiment ou de désaccord (comme les sources dont elles proviennent)¹⁷ "

d) La probabilité est un sentiment dans la tête de l'observateur, et non dans la chose.

" Nous devons à nouveau avertir le lecteur que la probabilité est dans sa tête, et pas dans l'urne .¹⁸ " Ce très surprenant point de doctrine chez de Morgan est cependant central pour lui : la probabilité d'être tirée n'est en aucun cas une qualité ou un attribut de la boule, comme sa couleur ou son poids (toutes choses qui seraient fondées dans une interprétation objectiviste de la probabilité), pas davantage une disposition qu'elle pourrait présenter mais, avec une référence explicite à la terminologie mécaniste, la mesure de la force d'assentiment que nous donnons au fait qu'elle sera tirée. Il est rare de trouver une conception subjective aussi explicitement et péremptoirement affirmée, les auteurs du temps, tels Laplace ou Poisson, se réfugiant prudemment derrière une définition de la probabilité associée à un modèle de schéma des urnes: cas favorables / cas possibles. Ce dernier archétype, pourtant parfois dénué d'ancrage dans la réalité - en particulier dans le cas de variables continues - n'en est pas moins longtemps demeuré un modèle conceptuel commode, peut-être parce qu'opportunément ambigu sur le point du statut de la probabilité: subjective ou

¹⁶ Par exemple dans le *De incerti aestimatione*, de 1678.

¹⁷ *Essay*, page 7 :

¹⁸ *Metropolitana*, page 414 : *We must warn again the reader that the probability is in his mind, not in the urn from which he draws !*

objective ¹⁹ ?

De Morgan cependant, nous expose ici une pièce maîtresse de sa pensée scientifique . Voici un extrait typique: " Les quantités que nous nous proposons de comparer diffèrent par les forces d'impression. La phraséologie de la mécanique est ici étendue: par force , nous entendons simplement la cause de l'action, considérée avec référence à son intensité , de sorte qu'elle est plus ou moins grande selon qu'elle produit des effets plus ou moins grands ... La probabilité est ce qui est ressenti par l'esprit, et non la propriété inhérente à un ensemble de circonstances. ²⁰ "

e) Axiomes de la probabilité.

Il y en a ici deux seulement ²¹: d'abord, c'est un nombre (que nous faisons aujourd'hui réel), avec une possibilité de gradation continue. Elle est d'autre part soumise à l'axiome d'additivité:

Axiome 1: Qu'on accorde que l'impression de probabilité est une de celles qui admet des gradations perceptibles de plus ou moins , selon les circonstances sous lesquelles un événement est susceptible de se produire .

Axiome 2: Qu'il soit accordé que quand l'un de certains événements doit se produire, et quand ces événements sont entièrement indépendants les uns des autres ²², la probabilité de l'un ou l'autre d'un certain nombre d'événements qui surviennent doit être constituée de la probabilité de plusieurs événements qui se produisent. Par exemple, dans une loterie de 26 lettres ...

En une nouvelle étape ultérieure, la nécessité d'une *même* échelle commune, de 0 à 1, pour toutes les diverses situations de probabilité est ensuite mise en avant par de Morgan.

Probabilités directes chez de Morgan.

Les premiers chapitres de l'ouvrage proposent au lecteur, supposé non averti, des exercices simples de calculs de probabilités directes discrètes par dénombrement, de type combinatoire donc, comme cet exemple: Exemple 1: Je dispose de deux dés. Par le jet d'un premier dé, je gagne autant de livres que la somme indiquée sur la face, sauf à perdre autant de livres qu'il y a de numéros sur les deux dés dans le cas où il y a un "double". Que devrais je donner pour cette chance ²³ ?

¹⁹ Le modèle du schéma des urnes avec son hypothèse d'équiprobabilité des cas élémentaires peut en effet s'interpréter soit subjectivement ,soit objectivement .

Pour les subjectivistes , si les cas élémentaires sont équiprobables ,c'est que nous n'avons aucune raison de supposer que l'un soit plus vraisemblable que l'autre . Il s'agit donc d'une équiprobabilité épistémique ,à la mesure de notre ignorance , ceci étant le fondement du *principe de raison insuffisante* .(cf. Hacking et Keynes ,op.cit) .

Pour les objectivistes au contraire ,c'est l'uniformité , la symétrie ou encore l'égalité des qualités physiques de l'urne et de la boule qui nous conduisent à postuler l'équiprobabilité élémentaire .

Sur ce point crucial de la dualité dans la théorie ,cf. Ian Hacking . *The emergence of probability . A philosophical study of early ideas about probability induction and statistical inference* . Cambridge University Press . 1975 .

²⁰ Essay , page 7 .

²¹ Il s'agit ici d'axiomes simples , à l'usage d'un texte pédagogique . Dans la *Metropolitana* , de Morgan en donnera neuf , sous forme mathématique .

²² A prendre ici dans le sens d'exhaustifs et disjoints .

²³ page 94 , chapitre 5 .

(Réponse de de Morgan : 1 livre 3/4 .)²⁴

Conformément au plan de l'ouvrage, les chapitres ultérieurs, tel le chapitre IV, vont reprendre le même type d'exercices - toujours des probabilités directes -, mais cette fois dans le cas d'un grand nombre d'épreuves répétées. D'où l'emploi des tables en fin de volume. De Morgan, qui en fait grand cas, en a préalablement et longuement commenté l'emploi. Elles mettent en application effective le résultat asymptotique essentiel de de Moivre - Laplace²⁵, qui sera le fondement des futures et diverses versions du théorème central-limite²⁶, et qui est le suivant : étant donnée une épreuve élémentaire à deux éventualités (probabilités p et $q = 1 - p$), et un schéma d'épreuves répétées indépendantes, la probabilité pour que la variable aléatoire S_n égale au nombre de succès en n épreuves, une fois réduite²⁷, appartienne à un intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, converge (n tendant vers l'infini) vers la probabilité pour que la variable gaussienne (elle aussi réduite) appartienne au même intervalle, et cette dernière probabilité se calcule par des tables. En termes modernes :

$$\lim_n P \left\{ a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b \right\} = N(b) - N(a)$$

où $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$

Voici un exemple typique d'un exercice dans lequel le calcul effectif des coefficients binomiaux, pour être possible, serait fort long (le texte original est fourni en figure 3, exemple 2. Chapitre : *Use of Tables*).

"En 200 jets quelle est la chance pour que le nombre des piles tombe entre 97 et 103 inclusivement?" Utilisant ses tables, de Morgan trouve qu'il y a donc 621 chances contre 379, ou environ 31 contre 19²⁸.

Comme toutes celles de ce volume, la solution de de Morgan se fait sous forme de l'emploi d'une règle mécanique que le lecteur, supposé naïf, doit apprendre à reproduire (cf. par exemple en figure 3, la règle en haut de la page 77).

²⁴ Il s'agit donc, en termes plus modernes, de calculer l'espérance de gain du joueur, quantité qui est en sens inverse le prix pour lui du "ticket d'entrée" dans le jeu.

Le joueur gagne 1 livre, s'il tire 1 et s'il n'y a pas double 1, donc avec la probabilité $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

Son espérance de gain est donc $\frac{5}{36} (1 + 2 + \dots + 6) = \frac{35}{12}$. Il perd par exemple deux livres s'il tire

deux fois 1, avec la probabilité $\frac{1}{36}$. Son espérance de perte est ainsi : $\frac{1}{36} \cdot 2 \cdot (1 + \dots + 6) = \frac{7}{6}$.

Son espérance mathématique est donc : $\frac{35}{12} - \frac{7}{6} = \frac{21}{12}$.

²⁵ Bien avant Laplace, de Moivre avait établi le résultat dans le cas du jeu de pile ou face : $p = q = 1/2$. (Doctrines des Chances, pages 243-254) Cf. sur ce point Todhunter, op.cité, § 335.

²⁶ cf. Feller, op. cité, Tome 1, p. 152 et 202.

²⁷ Rappelons que si X désigne une variable aléatoire pourvue d'une moyenne μ et d'un écart-type σ , on appelle variable réduite associée à X , la variable aléatoire $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

²⁸ Chapitre IV (emploi des tables), page 77. Comme chez les bookmakers, les résultats terminaux sont toujours donnés chez de Morgan en chances (*odds*) pour ou contre la réalisation d'un événement, et non en pourcentage.

Nous donnerons ici cet exemple simple et fondamental par lequel de Morgan introduit dans l' *Essay* le Chapitre III sur les Probabilités inverses (le texte original est en figure 2, Chapitre : *On inverse probabilities* , pages 53 - 54).

Quatre urnes contiennent chacune trois boules qui peuvent être noires ou blanches : la première A1 contient trois noires, la seconde A2, deux noires et une blanche, etc... Un observateur choisit une urne au hasard (c'est à dire que les quatre tirages sont équiprobables), puis choisit dans celle-ci une boule à nouveau au hasard: celle-ci est blanche: événement E. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne A2 (ceci est l' hypothèse H2). Un simple dénombrement de toutes les éventualités (il est effectué par de Morgan en figure 2: elle évite l'emploi explicite du théorème de Bayes ²⁹) montre que cette probabilité (en termes modernes $P (H_2 | E)$: probabilité de H2 , sachant que E) est égale à 1/6. De même , de Morgan détermine les $P (H_3 | E) = 1/3$, ainsi que $P (H_4 | E) = 1/2$. (il est clair que $P (H_1 | E) = 0$)

De Morgan peut alors remplacer son énoncé initial par le suivant, qu'il postule être logiquement équivalent : une urne contient trois boules dont certaines sont blanches, d'autres noires, mais en proportion inconnue : une boule est tirée. Elle est blanche . Quelle est la probabilité pour que l'urne ait contenu une blanche et deux noires, ou encore quelle est la probabilité pour que la proportion de blanches ait été un tiers (réponse donc : 1/6)? De même, sachant qu'on a tiré une blanche, quelle est la probabilité pour que la proportion de blanches ait été égale à deux tiers (1/3) , ou à un (1/2)? Ou encore en dernière analyse pour que la probabilité de tirage d'une blanche ait été 1/3 , ou 2/3 , ou 1 ?

Ecartant alors l'artifice pédagogique initial , on voit que la technique de de Morgan a consisté à remplacer l'hypothèse bayésienne d'équiprobabilité des causes dans un tirage dans une seule urne, par un tirage fictif entre urnes équiprobables, et dont l'ensemble présente toutes les distributions possibles équiprobables. Cette substitution aux vertus pédagogiques, qui lui paraît assurer en toutes circonstances l'emploi du théorème de Bayes , de Morgan l'érigera en méthode: " En déterminant la chance qui existe (dans des circonstances connues) pour la survenue d'un événement un certain nombre de fois qui tombe entre certaines limites, nous sommes entraînés dans une considération d'une certaine difficulté, c'est à dire la probabilité de la probabilité, ou comme nous l'avons appelée, la présomption de la probabilité. Pour rendre cette idée plus claire, rappelons nous que n'importe quel état de probabilité peut être immédiatement considéré comme

²⁹ Voici en termes modernes ,un bref rappel sur le **théorème de Bayes** :

A et B étant deux événements quelconques d'un espace de probabilité tels que $P (A) \neq 0$,on définit $P (B | A)$, *probabilité conditionnelle* de B lié par A (ou de B sachant que A) par la relation :

$$P (A \cap B) = P (B | A) . P (A)$$

On introduit alors le schéma suivant ,qui conduit à la formule de Bayes :

On dispose de n événements $H_1, H_2, \dots, H_n$, exhaustifs et disjoints (les "causes " , ou les "hypothèses ").

Donc , dans une épreuve quelconque , l'un et l'un seulement des événements H_i se réalise .Soit par ailleurs E un autre événement . On suppose connues :

* les probabilités *a priori* des H_i : $P (H_i)$

* les probabilités $P (E | H_i)$,probabilités conditionnelles de réalisation de E sachant que

H_i s'est réalisé .

La situation est alors la suivante : E s'est réalisé .Quelle est la probabilité conditionnelle de H_i , liée par E ? (c' est à dire $P (H_i | E)$). Le résultat de Bayes est alors :

$$P (H_i | E) = \frac{P (H_i \cap E)}{P (E)} = \frac{P (H_i) P (E | H_i)}{\sum_{k=1}^n P (H_k) P (E | H_k)}$$

l'expression du résultat d'un ensemble de circonstances, qui, si elles étaient introduites dans la question, la difficulté disparaîtrait. Le mot présomption se réfère distinctement à un acte de l'esprit, ou un état de l'esprit, alors que, dans le mot probabilité, nous nous sentons disposés plutôt à penser aux arrangements externes du savoir dont devrait dépendre la force de notre présomption, plutôt que la présomption elle-même.³⁰ Une position à laquelle Keynes objectera³¹.

Quoiqu'il en soit, la méthode de de Morgan a consisté à examiner, dans le cas de trois boules, les quatre distributions de probabilité préalablement possibles. Dans ces conditions donc, ces quatre probabilités *a priori* sur la composition de l'urne étant ainsi fixées par le fait qu'on a tiré une blanche, il est possible de mesurer la probabilité pour qu'on tire à nouveau une blanche au coup suivant. On trouve : $7/9$ ³² : c'est donc la probabilité pour tirer une blanche au second coup, sachant qu'on a tiré une blanche au premier, dans une expérimentation où la composition de l'urne est inconnue. On peut évidemment étendre le procédé à une collection de $(N+1)$ urnes, chacune contenant N boules, puis faire tendre N vers l'infini : ce qui est alors probabilisé, c'est donc l'éventail continu des distributions préalables. Le modèle conduit alors à ce qu'on appelle la "loi de succession" de Laplace³³, qui fit couler beaucoup d'encre³⁴.

De façon presque inévitable dans ce contexte, on a donc vu ici apparaître chez de Morgan ce concept bien hasardeux de probabilité d'une probabilité, dont de Morgan s'est cependant suffisamment méfié pour lui préférer l'expression de "présomption" de la probabilité (Laplace parle à ce propos des "chances").

Contingences de la vie et assurances...

Après ces premiers chapitres "théoriques" (au sens de de Morgan), la seconde partie de l'*Essay* est consacrée à des applications, c'est à dire ici l'étude d'un grand nombre de "contingences" de la vie, avec des aspects divers, parfois anecdotiques.

On notera d'abord que ces contingences sont toutes à support financier; aussi qu'elles se répartissent en quatre rubriques: tables de mortalité et questions subséquentes d'assurance vie d'une part, questions monétaires et annuités d'autre part, réunion ensuite de ces deux questions dans ce qu'on peut appeler l'"algèbre du viager", enfin considérations très diverses sur la gestion des compagnies d'assurance³⁵. Par cette seconde partie, l'*Essay* est encore aujourd'hui considéré comme une référence dans les milieux de l'actuariat. De cette partie de l'ouvrage, consacrée à l'algèbre du viager, nous donnerons d'abord deux exemples de définitions (texte original en figure 4, Chapitre : *On Annuities*, page 201) :

$|A : B$ est la valeur actuelle d'une annuité qui doit être payée aussi longtemps que A ou

³⁰ *Essay*, page 87.

³¹ Keynes, op. cit. page 408, à propos de ce procédé de substitution chez de Morgan "La clé de l'explication tient la supposition que "n'importe quel état de probabilité peut être immédiatement considéré comme l'expression du résultat d'un ensemble de circonstances". On ne peut accorder que ceci soit vrai en général; et même dans les cas où c'est vrai nous sommes renvoyés sur les probabilités *a priori* des divers ensembles de circonstances qui n'ont pas besoin, comme le suppose de Morgan, d'être des alternatives égales ou exhaustives."

³² $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2}$

³³ Sur le modèle mathématique de la loi de succession, cf. Feller, op. cit. Chapitre V. *Conditional probability. Stochastic Independence. §2 Probability defined by conditional probabilities. Urn Models.*

³⁴ Sur la critique philosophique de la loi de succession, cf. en particulier la discussion de Keynes, op. cit., page 408.

³⁵ "Le reste de l'ouvrage est consacré à la plus commune application de la théorie, la considération des contingences de la vie et des intérêts financiers qui en dépendent, en même temps que les principes essentiels de la gestion d'un bureau d'assurance." (Préface à l'*Essay*)

B est vivant.

De même, $A : B : C | D : E$ est la valeur actuelle d'une annuité qui ne doit pas être payée aussi longtemps que A et B sont tous deux vivants, ou que C est vivant, mais qui commence dès lors que l'existence de l'un des deux A, B est terminée, ainsi que celle de C, et continue aussi longtemps que D ou E est vivant.

Réunissant ses deux études précédentes, de Morgan se livre alors à des équations algébriques viagères, comme le problème logico - financier suivant :

Trouver $| A : B$, la valeur actuelle d'une annuité qui doit être payée aussi longtemps que A ou B vivra. Il trouve évidemment ³⁶ :

$$| A : B = | A + | B - | A B$$

Nous terminerons ici sur la question de la gestion des Compagnies d'assurance, par la célèbre et très édifiante histoire de la Société l' *Equitable* ³⁷. Elle raconte ceci : dans le contexte, tout nouveau pour l'époque, des sociétés d'assurances - vie, le Directeur de la Compagnie l' *Equitable*, un certain Morgan, (homonyme de notre auteur), obsédé par des questions de sécurité financière pour son entreprise, commença par proposer aux candidats à l'assurance celles des tables de mortalité qui étaient les plus désavantageuses pour eux (cf. la figure 5 pour un usage comparé des tables); d'autre part, après s'être astreint à de savants calculs censés asseoir le montant de la prime sur des réalités substantielles, telle la loi des grands nombres, Morgan appliquait ensuite aux résultats obtenus des coefficients de sécurité tels qu'au bout de quelques années d'exercice, la société dégagea des profits si considérables qu'ils en devinrent embarrassants... La règle de l' *Equitable* était en fait de " toujours réviser les calculs mathématiques par ceux de la prudence ", selon les mots du prospectus en français. Augustus de Morgan était très favorable au principe même des sociétés d'assurances - vie, où il croyait trouver une certaine forme de solidarité, et qu'il décrit dans l' *Essay* sous un jour que nous dirions aujourd'hui mutualiste. Il ne se priva cependant pas de critiques à l'encontre de l' *Equitable*, pour sa gestion par trop défavorable à l'égard de l'assuré, mais exonéra néanmoins d'intention de fraude sa direction, accusée seulement d'une prudence exagérée. Il écrivit : " Nous devrions écrire sur la porte de chaque société d'assurance mutuelle d'être *wary* (prudent); mais sur cette porte-ci, on devrait écrire de n'être pas trop *wary*, et au-dessus *Equitable Society* . "

La figure 5 (Chapitre : *On life contingencies*, pages 166 - 167) fournit sept tables de mortalité comparées, nécessaires au calcul des primes d'assurance-vie. Elles se lisent ainsi : pour chaque âge de l'existence, elle fournit (en principe ...) l'espérance de vie restante pour un sujet donné, selon la table considérée : à un sujet de 35 ans d'âge par exemple, il reste en moyenne à vivre 25,5 années selon l'hypothèse de de Moivre; 25,7 années selon les tables de Northampton, etc...

³⁶ *Essay*, page 207.

³⁷ On lira avec intérêt sur ce point l'ouvrage de Lorraine Daston : *Classical Probability in the Enlightenment*, Princeton University Press. 1988. Chapitre III. Théorie et pratique du risque.

CHAPTER III.

ON INVERSE PROBABILITIES.

IN the preceding chapter, we have calculated the chances of an event, knowing the circumstances under which it is to happen or fail. We are now to place ourselves in an inverted position: we know the event, and ask what is the probability which results from the event in favour of any set of circumstances under which the same might have happened. This problem is frequently enunciated as follows:—An event has happened, such as might have arisen from different causes: what is the probability that any one specified cause did produce the event, to the exclusion of the other causes? By a *cause*, is to be understood simply a state of things antecedent to the happening of an event, without the introduction of any notion of agency, physical or moral.

In order that we may secure a problem of sufficient simplicity, we must limit the number of possible antecedent states. Let us suppose that there is an urn, of which we know that it contains balls, three in number, and either white or black, all cases being equally probable: that is, before any drawing takes place, all we can say is, that we are going to draw out of one of the following, having no reason for supposing one in preference to another.

A BC DEF

I. (. . .) II. (o . .) III. (o o .) IV. (o o o)

A drawing takes place, and a white ball is produced, consequently I. is immediately excluded; for from it the observed event could not have been produced. This much is certain; but we are also tempted to say that

x 3

II. is rendered unlikely, because, from such an antecedent state of things, a black ball would have been more likely than a white one. On the same principle III. is more likely than II., and IV. the most likely of all. We have then to decide the relative probabilities of II., III., and IV.

Before the drawing took place, the probability of each set of circumstances was $\frac{1}{4}$; and, the lottery being given, the probability of any one ball in it was $\frac{1}{4}$. Thus the chance of III. being the lottery, and the second white ball being drawn from it, was $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$, or $\frac{1}{8}$. The same of other balls: so that, in fact, our primitive position was that of having to draw from 12 balls, 6 white and 6 black, all equally probable. But the observed event changed that position; a white ball was drawn: was it a given ball (namely, the white ball in II.), or was it one of two given balls (those in III.), or was it one of three (those in IV.)? There are *six* cases in question, namely, A, B, C, D, E, F, and one of them happened,—we do not know which. We have used all the knowledge we have (namely, that a white ball was drawn,) in excluding the black balls.

Hence the chance that A was drawn, or that

II. was the lottery is $\frac{1}{6}$:

That either B or C was drawn, or that III. was the lottery is $\frac{1}{3}$:

That either D, E, or F was drawn, or that IV. was the lottery is $\frac{1}{4}$.

In the preceding instance, owing to the number of balls being the same in every lottery, the antecedent probability of each ball was the same. Previous to deducing a rule, I take an instance in which this is not the case.

PROBLEM. A white ball has been drawn, and from one or other of the two following urns:

(2 white, 5 black) (3 white, 1 black).

What are the probabilities in favour of each urn?

The case is not now that of a lottery of 5 white and 6 black balls; for the chance of our going to the first urn (which is $\frac{1}{2}$), and thence drawing a given white

Fig 2
Les Probabilités Inverses

RULE. Divide one more than twice l by the square root already mentioned, and the quotient being made t , the value of H in Table I. is the probability required.

EXAMPLE I. In 6000 throws with a die, what is the chance that the number of aces shall not differ from 1000 by more than 50; that is, shall lie between 950 and 1050, both inclusive. Here $a = 1$, $b = 5$, $n = 1000$, $l = 50$, and the square root as before is 81.65. Divide $2l + 1$, or 101, by 81.65, which gives 1.237, which being t , H is .91977. Hence it is 920 to 80 in favour of the proposed event, or about 11½ to 1.

EXAMPLE II. In 200 tosses, what is the chance that the number of heads shall lie between 97 and 103, both inclusive? Here $a = 1$, $b = 1$, $n = 100$, $l = 3$, and the square root, as before, is 20. And $2l + 1$, or 7, divided by 20, gives .35, which being t , H is .379. Hence it is 621 to 379, or about 31 to 19, against the proposed event.

EXAMPLE III. In 12 tosses, what is the chance of the heads being either 5, 6, or 7 in number? Here $a = 1$, $b = 1$, $n = 6$, $l = 1$, and the square root, as before, is 4.9. And $2l + 1$, or 3, divided by 4.9, gives .61, which being t , H is .6117. Hence it is about 612 to 388, or 153 to 97, in favour of the proposed event. In page 47 the chance of this event is

$$\frac{792 + 924 + 792}{4096} \text{ or } \frac{2508}{4096} \text{ or } .612$$

PROBLEM IV. The odds for A against B being a to b , and n times $a + b$ trials being to be made, for what number is there a given probability H that the As shall not differ from the probable mean by more than that number?

RULE. Find in Table I. the value of t answering to that of H (page 71), multiply it by the square root already described, subtract 1, and divide by 2: the

Fig. 4

"L'algèbre des viagers" —————→

Fig 3

← Usage des tables

ON ANNUITIES.

201

I now proceed to some further instances:

$|n$ means the present value of an annuity of 1*l.* to last n years.

$m-|n$ the present value of an annuity of 1*l.*, which is to commence payment at the end of m years, and then to last $n - 1$ years, or $n - 1$ more payments.

$n|$ the present value of a perpetuity of 1*l.*, commencing at the end of n years, or first paid at the end of $n + 1$ years.

$n-|$ the present value of a perpetuity, first paid at the end of n years.

$|A$ the present value of an annuity on the life of A.

$|AB$ the present value of an annuity on the joint lives of A and B, to cease with either.

$t|A$ the present value of an annuity on the life of A, to begin in t years; that is, the first payment to be made at the end of $t + 1$ years, if A should then be alive.

$|At$ the present value of an annuity on A's life, or t years, whichever drops first.

$A|$ the present value of 1*l.* for ever, to be first received at the end of the year in which A dies.

$AB|$ the present value of 1*l.* for ever, to be first received at the end of the first year in which A or B dies.

$A|t$ the value of an annuity for t years, payment to begin at the end of the year in which A dies.

$AB|C$ the present value of an annuity which begins payment at the end of the year in which either A or B dies (the first), provided C be then alive, and which continues during the life of C.

$|A : B$ signifies the present value of an annuity which is to be paid as long as either A or B is alive.

$AB : C|D : E$ the present value of an annuity which is not to be paid as long as A and B are both alive, nor as long as C is alive, but which begins when the joint existence of A and B, and that of C, are both terminated; and continues as long as either D or E are alive.

middle classes, that from the age of 15 to that of 65, the average may be represented as follows:—of 100 persons aged 15, one dies every year till the age of 65. But the mean duration of life will serve to give a more precise idea, and a simple rule may be given, which will, for rough purposes, represent the Carlisle table between the ages of 10 and 60. Of persons aged 10 years, the average remaining life is 49 years, with a diminution of 7 years for every 10 years elapsed; thus of persons aged 20 years, the average remaining life is 49-7 or 42 years; at 30 years of age, 35 years. The following list of tables will be followed by some notice of each.

Years of age.	De Moivre's hypothesis.	Northampton.	Amicable.	Carlisle.	Equitable.	Government, male.	Government, female.	Years of age.
0	43	25.3	-	38.7	-	-	-	0
5	40.5	40.8	-	51.3	-	48.9	54.2	5
10	38	39.8	-	48.8	48.3	45.6	51.1	10
15	35.5	36.5	-	45.0	45.0	41.8	47.2	15
20	33	33.4	36.6	41.5	41.7	38.4	44.0	20
25	30.5	30.9	34.1	37.9	38.1	35.9	40.8	25
30	28	28.3	31.1	34.3	34.5	33.2	37.6	30
35	25.5	25.7	27.7	31.0	30.9	30.2	34.3	35
40	23	23.1	24.4	27.6	27.4	27.0	31.1	40
45	20.5	20.5	21.1	24.5	23.9	23.8	27.8	45
50	18	18.0	17.9	21.1	20.4	20.3	24.4	50
55	15.5	15.6	15.1	17.6	17.0	17.2	20.8	55
60	13	13.2	12.5	14.3	13.9	14.4	17.3	60
65	10.5	10.9	9.9	11.8	11.1	11.6	14.0	65
70	8	8.6	7.8	9.2	8.7	9.2	11.0	70
75	5.5	6.5	6.2	7.0	6.6	7.1	8.5	75
80	3	4.8	5.0	5.5	4.8	4.9	6.5	80
85	0.5	3.4	4.0	4.1	3.4	3.1	4.8	85
90	-	2.4	2.9	3.3	2.6	2.0	3.8	90
95	-	0.8	1.4	3.5	1.1	1.2	1.6	95
100	-	-	-	2.3	-	-	-	100

1. *De Moivre's hypothesis* was suggested by Halley's Breslau tables, made from observations of the mortality of that town in the years 1687—1691. It confessedly errs considerably at the beginning and end of life.

2. The *Northampton* tables were constructed by Dr. Price from the mortality of that town, in the years 1741—1780, the numbers of male and female deaths being very nearly equal. These tables were, and are, almost universally used by the assurance offices, and are those by which legacy duties are estimated in the act of parliament, 36 Geo. III. cap. 52.

3. The *Amicable Society's* table was formed some years ago by Mr. Finlaison, at the suggestion of that gentleman and myself to the directors, and as a means of furnishing information upon points * as to which they had consulted us. The Amicable society was founded in 1705, and the table is formed from the experience of more than half the subsequent period ending in 1831.

4. The *Carlisle* table, formed by Mr. Milne from the observations of Dr. Heysham upon the mortality of that town, in the years 1779—1787. They are to be considered the best existing tables of healthy life which have been constructed in England. The relative proportions of the sexes are 9 females to 8 males.

5. The *Equitable* table (published by the Equitable society in 1834) gives the results of the experience of that society from 1762 to 1829. The total number of deaths recorded is upwards of 5000.

6. The *Government* tables (male and female life separately). These tables were constructed by Mr. Finlaison, actuary of the national debt office, from various tontines, &c., of which the records are in the possession of the government. Each table contains about 5000

* In mentioning this subject, I may be allowed to state my full approval of the plan subsequently adopted by the society, and my conviction that the errors of their ancient system have entirely disappeared. The mean durations above given were computed by myself, from the tables of decrements circulated by the directors among the members.

Fig. 5
Tables de Mortalité

Martine Bühler

Rappelons d'abord quel est le "problème des partis" : deux joueurs jouent à un jeu de hasard (du type pile ou face) et le premier qui aura gagné un nombre déterminé de parties sera vainqueur et emportera la mise. Mais ils doivent arrêter le jeu avant qu'aucun des deux joueurs n'ait gagné le nombre nécessaire de parties. Comment doivent-ils alors partager la mise ?

Cette "juste" répartition de la mise a fait l'objet d'une correspondance entre Pascal et Fermat¹, correspondance qui marque le début du calcul des probabilités. Le problème des partis a cependant une histoire plus ancienne, dont on pourra avoir un aperçu en lisant le chapitre qui lui est consacré dans la brochure M.:A.T.H. (I.R.E.M. Paris 7, n° 61). L'étude des tentatives plus anciennes de résolution ainsi que des lettres de Pascal et Fermat a donné lieu à des travaux en classes de terminales D et A1 (voir brochure n° 61).

Le travail proposé ici est plus modeste. Il s'agit d'introduire le cours de probabilité en terminale C en étudiant le problème des partis, puis d'utiliser cet exemple pour illustrer certaines notions, enfin de traiter la généralisation qu'en fait Pascal (à la fin de sa lettre à Fermat du 29 juillet 1654) sous forme de problème à la maison.

Lors d'une première séance en classe, j'ai distribué les exercices suivants (tirés de la brochure n°61):

Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de "pile ou face".

Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne.

Le premier qui aura 3 points gagnera la mise de 64 F.

Mais Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Avant de se séparer, ils veulent se répartir la mise équitablement.

Exercice 1

1) Le vainqueur est celui qui obtient le premier 3 points.

Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 2 points et Bernard 1 point.

Comment Ariane et Bernard peuvent-ils se répartir équitablement la mise de 64 F ?

Indications : Au moment où le jeu s'arrête, il manque donc 1 point à Ariane et 2 points à Bernard pour gagner 64 F. On peut donc examiner les différents scénarios possibles pour les parties qui se joueraient si Ariane et Bernard n'étaient pas obligés de s'arrêter.

¹Oeuvres complètes de Pascal SEUIL ou aux éditions de la Pléiade

La présentation de ces scénarios sous forme d'un arbre facilitera la recherche d'une répartition équitable.

On notera A une partie gagnée par Ariane et B une partie gagnée par Bernard.

2) Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 2 points et Bernard 0 point.

Proposer une répartition équitable de la mise.

3) Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 1 point et Bernard 0 point.

Proposer une répartition équitable de la mise.

Exercice 2.

Le vainqueur est celui qui obtient le premier 3 points.

Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 1 point et Bernard 0 point.

1) Quel est le nombre maximal de parties qu'il resteraient à jouer ? Soit n ce nombre.

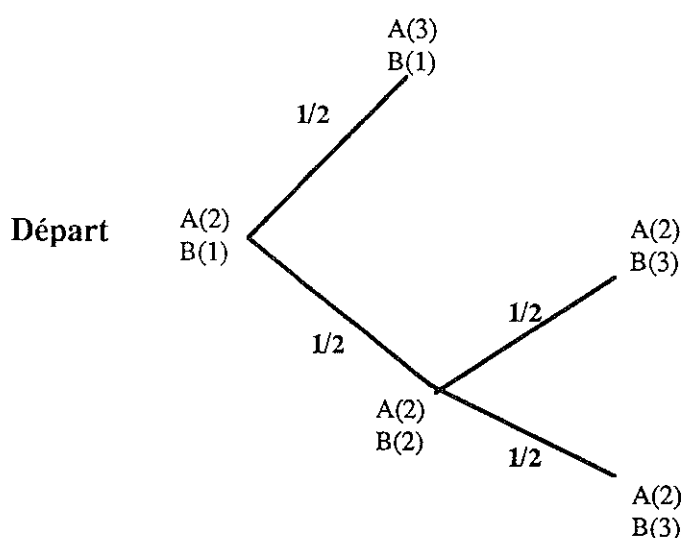
2) En notant A une partie gagnée par Ariane et B une partie gagnée par Bernard, dresser le tableau des résultats que pourraient donner ces n parties, si elles étaient toutes jouées.

3) En déduire une répartition équitable de la mise de 64 F.

Indication: Si le nombre maximum de parties était 3, l'écriture "ABA" signifierait:

- $n = 3$;
- Ariane gagne la première et la troisième partie, Bernard la deuxième.

Les élèves étaient groupés par quatre; certains étaient redoublants, et, parmi les élèves venant de première S, certains n'avaient pas traité les probabilités l'année précédente. Ces différences de cursus n'ont apparemment pas joué dans la compréhension des exercices. La plupart des groupes ont bien maîtrisé l'exercice 1, établissant un arbre des scénarios possibles et affectant des "chances" à chaque branche de l'arbre, ce qui donne par exemple pour la première question :



Certains cependant (et pas obligatoirement ceux n'ayant jamais fait de probabilités) n'ont pas "pondéré" les branches et ont considéré qu'il y avait trois possibilités équivalentes¹, ce qui leur donnait comme résultat : Bernard a une chance sur trois de gagner et Ariane deux chances sur trois. Cela a été l'occasion d'une discussion sur l'"équiprobabilité" de ces trois possibilités. Et nous avons lu ensemble un extrait de la lettre de Pascal à Fermat du 29 juillet 1654 (voir annexe 1).

L'exercice 2 a soulevé plus de difficultés, l'objection de "Roberval" étant faite spontanément par les élèves : pourquoi considérer que les quatre parties sont effectivement jouées puisque, si Ariane gagne les deux premières parties, le jeu s'arrête ? J'ai alors distribué un extrait de la lettre de Pascal à Fermat du 24 août 1654 (voir annexe 2) où Pascal répond fort clairement à M. de Roberval qui "fit cette objection : que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en quatre parties...". La réponse de Pascal a convaincu les élèves mieux que je n'aurais su le faire (du moins ceux qui ont accepté de lire le texte avec l'attention nécessaire).

Lors d'une deuxième séance, nous avons fait une synthèse et une correction collective, et nous avons cherché un début de généralisation : comment répartir la mise si le gagnant est celui qui obtient le premier 4 points (les conditions étant les mêmes : au moment de l'arrêt du jeu, Ariane a 1 point et Bernard 0 point)? Nous sommes convenus d'employer la méthode de Fermat, l'arbre de l'exercice 1 risquant de devenir trop touffu. La nécessité de raisonner pour dénombrer plutôt que d'écrire tous les cas est alors apparue: en effet, le nombre maximum de parties à jouer est alors 6 et il devient fastidieux d'énoncer les 64 résultats possibles; mais comment connaître les résultats favorables à Ariane, c'est-à-dire ceux tels qu'Ariane gagne 3 ou 4 ou 5 ou 6 parties parmi celles qu'il reste à jouer ? S'il est assez simple de constater qu'il n'y a qu'un résultat tel qu'Ariane gagne 6 parties et 6 résultats tels qu'Ariane gagne 5 parties, les cas de 3 ou 4 parties sont plus délicats. Les élèves sont alors revenus à l'écriture systématique (sauf deux doublants) et ont remarqué qu'il s'agissait, parmi les 6 parties jouées, de "placer" 4 (ou 3) parties gagnées par Ariane : par exemple, A . A . A . A est un résultat tel qu'Ariane gagne exactement 4 parties. Ils ont donc énoncé les 15 résultats correspondant à cet "événement", en remarquant qu'il était équivalent de choisir les 4 parties gagnées par Ariane ou les 2 parties gagnées par Bernard. J'ai alors annoncé le cours sur les dénombrements dont un des buts est de calculer le nombre de choix de p objets parmi n (C_n^p) et nous avons constaté que nous avions déjà déterminé $C_6^4 = 15$ et justifié $C_6^4 = C_6^2$. J'ai également à cette occasion prononcé les mots "variable aléatoire" pour désigner le nombre de parties gagnées par Ariane parmi les 6 parties jouées.

Durant le cours sur les dénombrements, il m'est arrivé de faire appel à ce travail préliminaire à titre d'exemple (n -listes² ou calcul des C_n^p).

Après le cours de probabilité, les élèves ont eu à traiter la généralisation à m parties de ce problème en devoir à la maison. Le problème est accompagné d'une lettre de Pascal à Fermat, dans

¹ erreur spontanée du débutant, même chevronné

² terme officiel du B.O. pour n -uplets

laquelle Pascal généralise le problème et donne une répartition de la mise lorsqu'il manque m parties à un joueur et $m+1$ parties à l'autre joueur (voir en annexe). Dans le *Traité du triangle arithmétique*, Pascal propose la solution générale dans le cas où il manque n parties à A et p parties à B. Remarquons que Pascal est le seul de ses contemporains à proposer ce type de généralisation.

On pourrait bien sûr introduire une variable aléatoire dans le texte du problème. Certains élèves l'ont fait d'eux-mêmes, appelant X le nombre de parties gagnées par Ariane et s'intéressant à $p(X=k)$ ($k=m, m+1, \text{etc.}$). Peu d'élèves ont traité le 6°) du III, n'arrivant pas à faire les simplifications nécessaires.

Le lien avec le nombre π a séduit et étonné la classe. La plupart ont montré un vif intérêt tout au long de ces activités qui ont facilité la mise en place de certaines notions.

DEVOIR A LA MAISON: le problème des partis
--

Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de "pile ou face". Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne. Le premier qui aura 5 points gagne le jeu. Mais Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Quand le jeu s'arrête, Ariane a 1 point et Bernard 0 point.

1°) Quel est le nombre maximum de parties qui resteraient à jouer ?

Quel est le nombre total de résultats que pourraient donner ces parties si elles étaient toutes jouées ?

2°) Parmi ces résultats, quel est le nombre de ceux tels que :

a) Ariane gagne au moins 4 parties (i.e. Ariane gagne le jeu) ?

b) Ariane gagne au plus 3 parties (répondre indépendamment du a)) ?

En déduire (sans calculs) la valeur de:

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8$$

puis la valeur de : $C_8^4 + 2(C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8)$

3°) Quelle est la probabilité p_A qu'Ariane gagne le jeu ?

La solution de Pascal

A l'origine, le problème est un problème de répartition équitable de mise. Les joueurs A et B ont misé chacun une somme s ; on a donc une mise totale $S = 2s$ à partager équitablement après l'arrêt du jeu.

1°) Si la probabilité que A gagne est p_A , que proposez-vous comme répartition ?

Voici ce que propose PASCAL (extrait d'une lettre à FERMAT, 29 juillet 1654). Pascal considère le cas où le jeu s'arrête après la première partie, gagnée par le joueur A (A a donc 1 point et B 0 point).

Il faut dire auparavant : si on a une partie de 5, par exemple, et qu'ainsi il en manque 4, le jeu sera infailliblement décidé en 8, qui est double de 4.

La valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre est la fraction qui a pour numérateur la moitié de la combinaison de 4 sur 8 (je prends 4 parce qu'il est égal au nombre des parties qui manquent, et 8 parce qu'il est double de 4) et pour dénominateur ce même numérateur plus toutes les combinaisons supérieures.

"si on a une partie de 5" signifie :

"le premier qui a 5 points a gagné le jeu"

A a 1 point et B 0 point. Donc A emporte sa propre mise s plus une fraction de la mise de B, donc A emporte $s + \alpha s$ ($0 < \alpha < 1$). Cela vous paraît-il logique et pourquoi ?

Dans le texte, "la valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre" désigne α .

2°) Écrire la valeur de α donnée par Pascal à l'aide de coefficients binomiaux.

Quelle est donc, d'après Pascal, la probabilité p_A que A gagne ? Comparez à votre résultat.

3°) Pascal écrit : "pour une partie de 5, par exemple", sa formule étant valable "pour une partie de $(m+1)$ " ($m \geq 1$) (le premier qui a $(m+1)$ points gagne le jeu).

Écrire la formule suggérée par Pascal donnant α_m pour m quelconque ($m \geq 1$), puis la probabilité p_m que A gagne dans ce cas.

4°) Revenons au cas $m = 4$.

Ainsi, si j'ai une partie de 5, il m'appartient, sur l'argent de mon joueur, $\frac{35}{128}$ c'est-à-dire que, s'il a mis 128 pistoles, j'en prends 35 et lui laisse le reste, 93.

Vérifiez les calculs de Pascal.

Or, cette fraction $\frac{35}{128}$ est la même que celle-là : $\frac{105}{384}$ laquelle est faite par la multiplication des pairs pour le dénominateur et la multiplication des impairs pour le numérateur.

Donnez la nouvelle formule que suggère le texte pour α_m .

Généralisation

Quand le jeu s'arrête, il manque m points à Ariane et $(m+1)$ points à Bernard ($m \geq 1$).

1°) Quel est le nombre maximum de parties qui resteraient à jouer ?

2°) Quel serait le nombre total de résultats que pourraient donner ces parties si elles étaient toutes jouées ?

3°) a) Parmi ces résultats, quel est le nombre de ceux tels qu'Ariane gagne exactement m parties ?

b) Quel est le nombre des résultats tels qu'Ariane gagne au moins m parties (i.e. gagne le jeu) ?

4°) Quel est le nombre de résultats tels que Bernard gagne au moins $(m+1)$ parties (i.e. Bernard gagne le jeu) ? (Répondre sans utiliser 3°).

5°) Déduire des questions précédentes :

$$\frac{1}{2} C_{2m}^m + C_{2m}^{m+1} + C_{2m}^{m+2} + C_{2m}^{m+3} + \dots + C_{2m}^{2m} = 2^{2m-1}$$

6°) Soit p_m la probabilité que A gagne le jeu.

Montrer :

$$p_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \alpha_m \quad \text{où} \quad \alpha_m = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2m-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2m}$$

Y-aurait-il un lien avec l'intégration ?

Exercice:

$$\text{On pose : } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (\text{intégrale de Wallis}).$$

1°) Montrer pour $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$

2°) a) Calculer I_0 et I_1 .

b) Exprimer I_2, I_4, I_6 à l'aide de I_0 et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

c) Exprimer I_3, I_5, I_7 à l'aide de I_1 et α_2, α_3 .

3°) Démontrer par récurrence sur n :

$$I_{2m} = \alpha_m \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m-1} = \frac{1}{\alpha_m} \times \frac{1}{2m}$$

4°) a) Déterminer le sens de variation de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire une inégalité portant sur $I_{2m+1}, I_{2m}, I_{2m-1}$, puis un encadrement de $\frac{I_{2m}}{I_{2m-1}}$.

b) Déterminer $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m-1}}$, quand m tend vers $+\infty$.

5°) a) Montrer $\lim_{m \rightarrow \infty} 2m(\alpha_m)^2 = \frac{2}{\pi}$ quand m tend vers $+\infty$.

b) En déduire $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m$ puis $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m$ quand m tend vers $+\infty$.

LETTRE DE PASCAL À FERMAT

Le 29 juillet 1654.

MONSIEUR,

L'IMPATIENCE me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse; j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des partis que celle des dés; j'avais vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le Chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avait jamais pu trouver la juste valeur des partis ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvais seul qui eusse connu cette proportion.

Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche; mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots : car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez; le hasard est égal; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi. » Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : « Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12, et moi 12, qui, avec 32, font 44. »

Or, par ce moyen, vous voyez, par les simples soustractions, que, pour la première partie, il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles; pour la seconde, autres 12; et pour la dernière, 8.

Or, pour ne plus faire de mystère, puisque vous voyez aussi bien tout à découvert et que je n'en faisais que pour voir si je ne me trompais pas, la valeur (j'entends la valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de deux est double de la dernière partie de trois et quadruple de la dernière partie de quatre et octuple de la dernière partie de cinq, etc.

Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver : elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser, et voici le problème dont je faisais tant de cas, comme en effet il me plaît fort :

Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première.

Soit le nombre des parties donné, par exemple, 8. Prenez les huit premiers nombres pairs et les huit premiers nombres impairs, savoir : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, et 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Multipliez les nombres pairs en cette sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, le produit par le quatrième, le produit par le cinquième, etc.; multipliez les nombres impairs de la même sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, etc.

Le dernier produit des pairs est le dénominateur et le dernier produit des impairs est le numérateur de la fraction qui exprime

la valeur de la première partie de huit : c'est-à-dire que, si on joue chacun le nombre des pistoles exprimé par le produit des pairs, il en appartiendra sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par le produit des impairs.

Ce qui se démontre, mais avec beaucoup de peine, par les combinaisons telles que vous les avez imaginées, et je n'ai pu le démontrer par cette autre voie que je viens de vous dire, mais seulement par celle des combinaisons.

Voilà la première proposition, qui est purement arithmétique; l'autre regarde la doctrine des partis et est telle :

Il faut dire auparavant : si on a une partie de 5, par exemple, et qu'ainsi il en manque 4, le jeu sera infailliblement décidé en 8, qui est double de 4.

La valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre est la fraction qui a pour numérateur la moitié de la combinaison de 4 sur 8 (je prends 4 parce qu'il est égal au nombre des parties qui manque, et 8 parce qu'il est double de 4) et pour dénominateur ce même numérateur plus toutes les combinaisons supérieures.

Ainsi, si j'ai une partie de 5, il m'appartient, sur l'argent de mon joueur, $\frac{35}{128}$ c'est-à-dire que, s'il a mis 128 pistoles, j'en prends 35 et lui laisse le reste, 93.

Or, cette fraction $\frac{35}{128}$ est la même que celle-là : $\frac{105}{384}$ laquelle est faite par la multiplication des pairs pour le dénominateur et la multiplication des impairs pour le numérateur.

Vous verrez bien sans doute tout cela, si vous vous en donnez tant soit peu la peine : c'est pourquoi je trouve inutile de vous en entretenir davantage. Je vous envoie néanmoins une de mes vieilles tables; je n'ai pas le loisir de la copier. Je la referai. Vous y verrez comme toujours que la valeur de la première partie est égale à celle de la seconde, ce qui se trouve aisément par les combinaisons.

LETTRE DE PASCAL À FERMAT

Du 24 août 1654.

MONSIEUR,

Je ne pus vous ouvrir ma pensée entière touchant les parties de plusieurs joueurs par l'ordinaire passé, et même j'ai quelque répugnance à le faire, de peur qu'en ceci cette admirable convenance, qui était entre nous et qui m'était si chère, ne commence à se démentir, car je crains que nous ne soyons de différents avis sur ce sujet. Je vous veux ouvrir toutes mes raisons, et vous me ferez la grâce de me redresser, si j'erre, ou de m'affermir, si j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon et sincèrement, car je ne me tiendrai pour certain que quand vous serez de mon côté.

Quand il n'y a que deux joueurs, votre méthode, qui procède par les combinaisons, est très sûre, mais quand il y en a trois, je crois avoir démonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procédiez de quelque autre manière que je n'entends pas. Mais la méthode que je vous ai ouverte et dont je me sers partout est commune à toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulières où elle est plus courte que la générale) n'est bonne qu'en ces seules occasions et non pas aux autres.

a a a a	1
a a a b	1
a a b a	1
a a b b	1
a b a a	1
a b a b	1
a b b a	1
a b b b	2
b a a a	1
b a a b	1
b a b a	1
b a b b	2
b b a a	1
b b a b	2
b b b a	2
b b b b	2

Je suis sûr que je me donnerai à entendre, mais il me faudra un peu de discours, et à vous un peu de patience.

Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti, il faut (dites-vous), voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours-là, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisque'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties); et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : ils peuvent en avoir seize, qui est le second degré de quatre, c'est-à-dire le carré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes : aaaa... bbbb.

Et parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux a le font gagner : donc il y en a 11 pour lui; et parce qu'il manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois b le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a deux joueurs; sur quoi vous dites que, s'il y en a davantage, il ne sera pas difficile de faire les partis par la même méthode.

Sur cela, Monsieur, j'ai à vous dire que ce parti pour deux joueurs, fondé sur les combinaisons, est très juste et très bon; mais que, s'il y a plus de deux joueurs, il ne sera pas toujours juste et je vous dirai la raison de cette différence.

Je communiquai votre méthode à nos messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection :

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en quatre parties, vu que, quand il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou trois, ou, à la vérité peut-être quatre :

Et ainsi qu'il ne voyait pas pourquoi on prétendait de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera quatre parties, vu que la condition naturelle du jeu, est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'était faux, cela n'était pas démontré, de sorte qu'il avait quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

Je lui répondis que je ne me fondais pas tant sur cette méthode des combinaisons, laquelle véritablement n'est pas en son lieu en cette occasion, comme sur mon autre méthode universelle, à qui rien n'échappe et qui porte sa démonstration avec soi, qui trouve le même parti précisément que celle des combinaisons; et de plus je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte :

N'est-il pas vrai que, si deux joueurs, se trouvant en cet état de l'hypothèse qu'il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue quatre parties complètes, c'est-à-dire qu'on jette les quatre dés à deux faces tous à la fois, n'est-il pas vrai, dis-je, que s'ils ont délibéré de jouer les quatre parties, le parti doit être tel que nous avons dit, suivant la multitude des assiettes favorables à chacun?

Il en demeure d'accord et cela en effet est démonstratif; mais il niait que la même chose subsistât, en ne s'astreignant pas à jouer les quatre parties. Je lui dis donc ainsi :

N'est-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas astreints à jouer les quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un aurait atteint son nombre, peuvent, sans dommage ni avantage, s'astreindre à jouer les quatre parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition? Car, si le premier gagne les deux premières parties de quatre et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné, car ces deux que l'autre a gagnées ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières; donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré : donc il est juste aussi en l'autre cas.

Voilà comment je le démontrai et, si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.

Suivons la même pointe pour trois joueurs et posons qu'il manque une partie au premier, qu'il en manque deux au second et deux au troisième. Pour faire le parti, suivant la même méthode des combinaisons, il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu sera décidé; comme nous avons fait quand il y avait deux joueurs : ce sera en trois, car ils ne sauraient jouer trois parties sans que la décision soit arrivée nécessairement.

Il faut voir maintenant combien 3 parties se combinent entre trois joueurs et combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre et combien au dernier et, suivant cette proportion, distribuer l'argent de même qu'on a fait en l'hypothèse de deux joueurs.

Pour voir combien il y a de combinaisons en tout, cela est aisé : c'est la troisième puissance de 3, c'est-à-dire son cube 27. Car si on jette trois dés à la fois (puisque'il faut jouer trois parties) qui aient chacun trois faces (puisque'il y a trois joueurs) l'une marquée a favorable au premier, l'autre b pour le second, l'autre c pour le troisième, il est manifeste que ces trois dés jetés ensemble peuvent s'asseoir sur 27 assiettes différentes, savoir :

Ou, il ne manque qu'une partie au premier : donc toutes les assiettes où il y a un a sont pour lui : donc il y en a 19.



Fig. 17.

(D'après une gravure du XVII^e siècle, tirée du cabinet de M. Guerrier de Bezaune, alors maître des Requêtes.)



Fig. 16.

Portrait de FERMAT, d'après la gravure placée en tête de ses *Œuvres*, Toulouse, 1679.

ICONOGRAPHIE

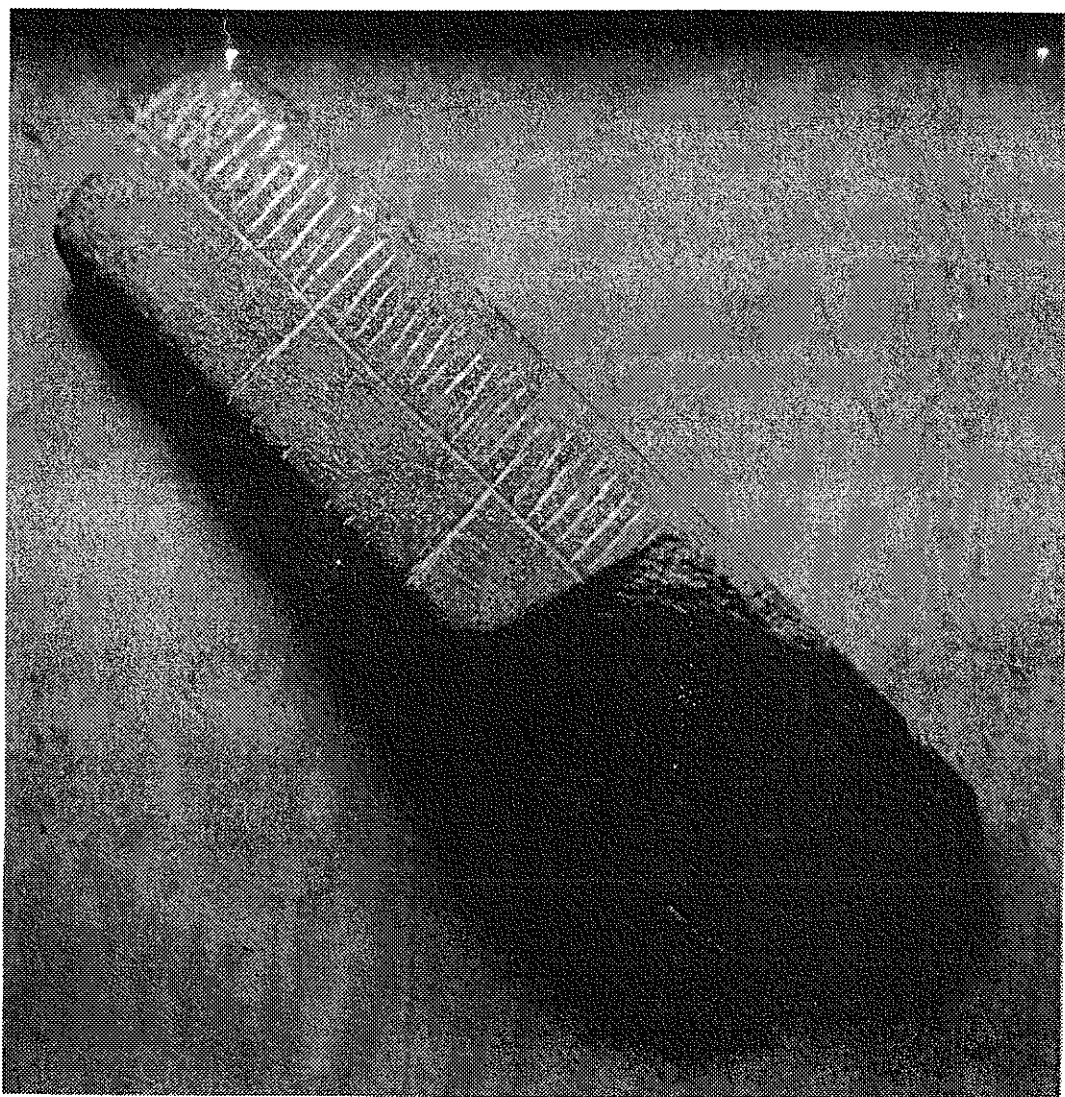


Photo (David AUSTIN - Daniel BERTHE) d'un fragment, de coudée BM 373 (British Museum LONDRES), sur lequel deux doigts complets sont fractionnés respectivement en 12 et 13 parties égales.

Cette coudée est métrologiquement douteuse. (Le travail étant visiblement baclé).

*Avec la bienveillante autorisation de la Conservatrice du département égyptologie
du British Museum de Londres*

A propos des coudées

par Daniel AUSTIN et Daniel BERTHE

La coudée égyptienne¹ est un objet dont l'étude exige une approche physique. Cela signifie qu'il faut l'observer, la toucher, la "dépouiller" de ses informations en hiéroglyphes et bien sûr en "mesurer", mais avec une grande économie de moyens², les différentes longueurs (longueur totale, longueur de différentes segmentations).

Le hasard des fouilles nous a livré une soixantaine d'objets de facture et de conservation très inégales, d'époques différentes (cf note 1). Seule une approche globale du corpus permettra d'établir une classification des différents monuments (la méthode d'étude métrologique étant unique) et d'étudier à la fois la permanence et les changements.

Pour l'instant, la tradition a retenu deux types d'instruments:

* LA COUDEE POUR "MESURER", dont l'usage serait proche de notre mètre, couverte de graduations (correctes métrologiquement), mais aussi de textes, n'ayant aucun contenu mathématique, relatifs aux titres et fonctions du propriétaire; pour fixer les idées, une coudée de ce type mesure approximativement 52,4 cm (on la nomme coudée royale. Il existe une coudée plus petite), est subdivisée en palmes (sept), elles-mêmes parfois divisées en doigts (quatre), ces doigts pouvant être fractionnés ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{16}$).

* LA COUDEE VOTIVE dont l'interprétation pose encore à ce jour d'énormes problèmes. Le contenu épigraphique foisonnant nous plonge dans l'univers religieux de l'Egypte. Ces objets auraient fonctionné comme des " almanachs " par la collection de références métrologiques, temporelle, de hauteur de crue du Nil, de lexique géographique, etc....

A ce niveau, il convient de chasser une idée reçue: ce n'est pas parce qu'une coudée a été fabriquée dans le but uniquement votif de garnir les appartements funéraires du défunt, qu'il faille la considérer obligatoirement quelconque sur le plan de la métrologie.

La comparaison entre les deux types permet de constater un déséquilibre entre " mesure " et texte. Dans le premier type, la mesure semble l'emporter sur le texte alors que dans le second type les textes sont primordiaux et pourraient mettre en évidence la relation mesure/dieux.

Enfin si on constate des permanences épigraphiques et de dénomination de la mesure, un des intérêts du sujet réside aussi dans le fait qu'il n'est pas connu à ce jour deux objets identiques dans leur facture.

Deux questions nous intéressent:

1/ y'avait-il, à une période déterminée (2000BC par exemple) en Egypte, un (des) étalon(s) de mesure de longueur? (compte tenu du matériel connu, est-on capable de répondre à cette question?).

2/ dans l'affirmative, quel était le processus de duplication?

Calais, le 27 juin 1993

¹ Période couverte: 2000BC-500AD

² C'est, à notre avis, une erreur de vouloir évaluer au 1/100 cm des objets aussi vieux avec des instruments sophistiqués.



LEIBNIZ ET L'ECOLE CONTINENTALE

Exposé de Jean Luc Verley le 11 décembre 1991
rédigé par Marie Françoise Jozeau

Dès 1666, Newton est en possession de sa méthode générale des fluxions et des suites infinies. Dans les *Principia* de 1687, il élabore une sorte de "géométrie sublime", suivant l'expression de F. De Gandt, mélange de considérations infinitésimales basées sur la notion de limite et de géométrie à la manière des anciens. Curieusement, il n'utilise pas sa méthode des fluxions. Chez Newton, le temps est un élément essentiel et notre référence au temps conduit à des notations assez lourdes et peu maniables. Après les travaux des élèves directs de Newton, Taylor, Stirling, Mac-Laurin, Moivre, les mathématiques anglaises connaîtront une période de relative stagnation.

A partir de 1684, Leibniz développe son calcul différentiel, puis son calcul intégral. Ses notations, qui sont à peu de chose près restées les nôtres, donnent à ce nouveau calcul une grande puissance d'invention. Entre les mains des frères Jacques et Jean Bernoulli puis de leurs élèves cet outil va permettre de résoudre d'innombrables problèmes de géométrie, de mécanique (résolution d'équations différentielles), de calcul des variations. L'école continentale de mathématiques vole de succès en succès et devient dominante. Peu importent les querelles de priorité entre les deux inventeurs du calcul infinitésimal. Le formalisme Leibnizien a incontestablement fait du XVIII^{ème} siècle le siècle de l'analyse sur le continent, en culminant avec les travaux d'Euler, directement influencé par Jean Bernoulli.

A) LES DIFFERENTES PERIODES.

Nous pouvons distinguer trois périodes dans l'histoire continentale du calcul différentiel, chacune ayant leur spécificité

La première période se situe entre 1680 et 1690 environ. Le calcul différentiel se développe dans un cadre très précis, tout en débordant celui de l'analyse cartésienne c'est-à-dire l'étude des courbes par

des procédés algébriques. Toutes les grandeurs qui vont intervenir sont liées à la géométrie, ont une signification géométrique.

Le formalisme de Leibniz va donc s'appliquer à des situations géométriques extrêmement précises; ce n'est que plus tard qu'il se dégagera de telles situations. Les variables ne sont pas des fonctions mais des quantités, des entités liées à une courbe. Elles doivent donc respecter le principe d'homogénéité¹. La notion de fonction n'existant pas, la notion de dérivée ne peut pas être conçue et c'est donc la notion de différentielle qui s'introduit de façon naturelle par la notion d'infiniment petit. Newton avait évité la manipulation des infiniment petits en considérant des rapports de fluxions.

La deuxième période, qui s'étend de 1691 environ à la fin du XVIIIème siècle est caractérisée par l'émergence du concept de fonction. Leibniz se trouve en plein coeur de cette mutation; il sera le premier à employer le mot de fonction.

Ayant élaboré le calcul différentiel formellement à partir de la différentielle, il va faire de la différentielle un concept fondamental dans l'étude des fonctions.

La notion de fonction à une variable correspond à une séparation de la géométrie et de l'analyse; celle-ci constitue une discipline indépendante de la géométrie. Il va être possible de raisonner sur une formule, sans se préoccuper de la signification géométrique du problème à résoudre.

Cette notion de fonction émerge chez Leibniz sous une forme très vague en 1673 puis en 1692².

Leibniz utilise l'expression suivante: "*Les quantités géométriques, abscisses, ordonnées, cordes, sous-tangentes...sont fonctions d'une courbe*". La notion de fonction d'une variable n'est pas encore dégagée. Cette notion sera précieuse en 1698 dans un texte de Jean Bernoulli puis par Euler.

Le traité du marquis de l'Hospital Analyse des infiniments petits, pour l'intelligence des lignes courbes, (Paris 1696), écrit sous l'influence directe de Jean Bernoulli, est un exposé systématique du calcul différentiel à partir d'une introduction axiomatique des infiniment petits.

Dans la troisième période, la dérivée remplace la différentielle comme opération élémentaire de l'analyse. Cette période qui débute avec d'Alembert, correspond essentiellement à Lagrange et Cauchy, fondateur de l'analyse moderne. Le calcul différentiel des fonctions à une variable repose sur la notion de dérivée, celle de différentielle étant récupérée a posteriori³.

Le début du travail de Leibniz se situe dans la première période. Il est, avec les frères Bernoulli, l'auteur principal de la deuxième période.

¹ En effet, malgré Descartes, la conception géométrique reste très proche de celle des Anciens.

² Pour plus de détail, on peut consulter, "Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXème siècle. A. Youschkevitch in A.P.M.E.P. n° 41

³ De cette façon, la notion des infiniment petits, source de difficultés, est évacuée. D'autre part ce calcul des dérivées marche bien pour des fonctions à plusieurs variables (les dérivées partielles s'introduisent facilement), et pour les dérivées d'ordre supérieur.

B) Le CALCUL INFINITÉSIMAL CHEZ LEIBNIZ (1646-1716)

1) Biographie: quelques dates repères.

De formation juridique, il pratique à peu près tous les arts de son temps, il est philosophe. Voyageant continuellement pour des missions diplomatiques, il écrit beaucoup en carrosse¹.

En 1666, il passe une thèse de logique De arte combinatoria, dans laquelle il traite de configurations sur les combinaisons. Il s'intéresse à des questions de logique formelle, au principe du tout et de la partie. En 1671, il fait un projet de machine à calculer, reprenant l'idée de Pascal². Au cours de cette étude, il travaille sur des algorithmes. Les considérations algorithmiques qu'il aborde sont très formelles, caractéristiques en général du travail de Leibniz. Il réfléchit sur ce qu'est un algorithme, une formule, une notation. Cette réflexion est caractéristique de sa conception des mathématiques.

En 1672, il vient à Paris, envoyé par Huygens. Ce dernier lui fait connaître les écrits de Pascal, Cavalieri, Grégoire de Saint-Vincent... Leibniz découvre des ouvrages fondamentaux, il apprend à calculer sur les séries... Comme le souligne Parmentier³, "*Leibniz n'a pas commencé par apprendre les mathématiques, il a réalisé la gageure d'y être à la fois néophyte et inventeur*".

Il se rend aussi à Londres, correspond avec Oldenburg, Newton⁴. C'est au cours de cette période qu'il élabore un algorithme qu'il appelle "*propre au nouveau calcul*".

Faire un algorithme qui rende compte de ce nouveau calcul.

Dans un texte de 1714, publié seulement à la fin du 19^{ème} siècle, histoire et origine du calcul différentiel⁵, Leibniz raconte l'histoire de ses découvertes de façon lucide et passionnante. Il s'agit d'une réponse à une attaque des anglais qui voulaient voir en Leibniz un plagiaire de Newton⁶.

2) Préhistoire du calcul.

Le premier article de Leibniz annonçant la découverte de son nouveau calcul date de 1684 (Nova Methodus in Acta Eruditorum, octobre 1684)⁷.

Donc, depuis 1672, une longue maturation a eu lieu. Comme nous allons le voir, pendant ces années décisives, il va tâtonner pour arriver à mettre au point, non sans quelques erreurs et hésitations, ce nouveau calcul.

¹ Sa correspondance est volumineuse; elle comporte environ 200 000 pages de manuscrits conservés à Hanovre. Certains de ces manuscrits ont été édités par Gerhardt. (Leibnizens mathematische Schifften)

² Leibniz s'attache d'emblée au problème crucial de la multiplication directe, que Pascal n'avait pas su résoudre.

³ G.W. Leibniz La naissance du calcul différentiel Marc Parmentier Vrin 1989.

⁴ voir dans un prochain numéro de Mnemosyne les deux fameuses lettres de 1676, epistola prior et epistola posterior relatives à la théorie des séries.

⁵ traduction et notes, in les cahiers de Fontenay, I. 1975, prochainement publiées dans Mnemosyne.

⁶ Attaque menée par Craig, Collins. En fait Newton n'est jamais vraiment intervenu directement à ce sujet.

⁷ G.W. Leibniz La naissance du calcul différentiel Marc Parmentier Vrin 1989.

Deux idées sont essentielles dans cette genèse : le calcul des différences et le triangle caractéristique. la première idée vient des mathématiques discrètes, de l'analyse combinatoire qu'il a étudiée dans "De arte combinatoria ". Quant à la deuxième idée, le triangle caractéristique, il dit l'avoir découverte dans les oeuvres de Pascal. Ce triangle, que Pascal utilise dans chaque cas particulier, deviendra avec Leibniz un outil fondamental du calcul différentiel, pilier de sa théorie. De nombreux manuscrits de jeunesse de Leibniz ne sont pas édités et sont donc non accessibles. Dans ce qui suit, nous avons utilisé l'article de Leibniz lui même déjà cité (note) ainsi que l' analyse donnée par Morris Kline¹.

* Le calcul des différences (1672)

Dans "l' art combinatoire", Leibniz a déjà étudié le calcul des différences.

Soit A,B,C,D,E une suite croissante (afin d'éviter d'utiliser des nombres négatifs). On introduit la suite des différences premières:

$$L = B - A$$

$$M = C - B$$

$$N = D - C$$

$$P = E - D$$

$$\text{Alors } L + M + N + P = E - A$$

Si le premier terme est zéro, alors la sommation des différences restitue le dernier terme c'est-à-dire le terme le plus grand.

Dans ce calcul, deux opérations sont utilisées: une opération de passage de la suite donnée à la suite des différences et une opération de sommation de ces différences, conduisant à la restitution du dernier terme de la suite initiale.

exemple:

0	1	4	9	16	25	36
	1	3	5	7	9	11
		2	2	2	2	2
			0	0	0	0

On vérifie que la somme des premières différences donne le dernier terme:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

Partant de là, Leibniz considère une quantité "y" (il n'utilise pas encore le mot de variable) et une suite de valeurs de y de plus en plus proches. Il introduit alors la suite des différences. Nous pourrions écrire qu'il considère un intervalle $[0,a]$ avec $y_0 = 0$ et $y_n = a$ qu'il découpe en éléments de la forme $[y_i, y_{i+1}]$, i variant de 0 à n-1.

Il considère une opération de différence (suite de la différence entre deux valeurs successives de y) et une opération de sommations de ces valeurs. La description de ces idées apparaît dans un manuscrit de 1673.

¹ Mathematical Thought from Ancient to Modern Times Oxford University Press 1972 p. 370 et suivantes.

Il emploie comme notation ℓ pour ce qui deviendra ultérieurement dy , ℓ est un accroissement générique. Il introduit une opération qu'il appelle $\text{Omn } \ell$. "Omn" vient du latin Omnia (toutes choses). Cette opération consiste à faire la somme de tous les ℓ .

Comme $y_0 = 0$ on obtient $\text{Omn } \ell = y_n$.

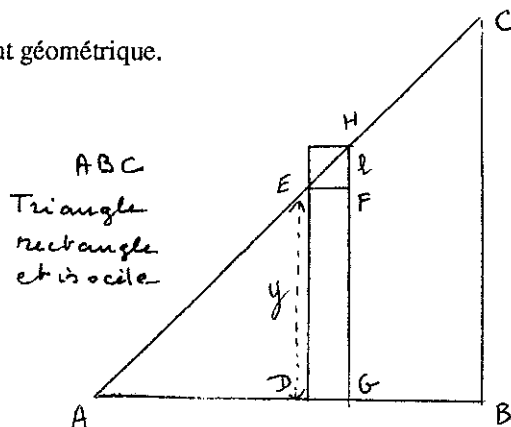
Dans ce manuscrit, Leibniz n'est pas plus précis. A cette époque, cette notion de différence est encore très vague. En particulier leur nombre n'est pas précisé; y-en-a-t-il un certain nombre, une infinité?

Leibniz évalue ensuite $\text{Omn } \ell y$ par un raisonnement géométrique.

ℓ est un accroissement de y

$y\ell$ représente donc l'aire du rectangle DEFG.

Ensuite, sans l'explicitier vraiment, Leibniz considère les ℓ arbitrairement petits; de ce fait, les aires des petits triangles EFH peuvent être négligées et il écrit que : $\text{Omn } \ell y = \frac{y^2}{2}$



Le triangle peut être obtenu comme "réunion" des aires des rectangles; ou en augmentant le nombre des rectangles, le triangle finit par être rempli, idée présente chez les Anciens.

Bien entendu, le résultat en soi n'est pas intéressant, il est connu depuis longtemps. l'intérêt, ici, réside dans la manière dont ce résultat est obtenu: par l'opération Omn , certes décrite de façon maladroite, qui sera plus tard l'intégration.

Le résultat n'est pas présenté seulement comme un résultat géométrique: un formalisme, un symbolisme y est présent.

Il est possible sur cet exemple très simple, d'entrevoir comment les idées de Leibniz se mettent à sa place. Le procédé utilisé est très général et repose en fait sur des manipulations algébriques: il forme des différences, les multiplie dans ce cas par y mais il aurait pu les multiplier par une autre expression.

Dans un autre exemple, il obtient $\text{Omn } y^2 \ell = \frac{y^3}{3}$ et une espèce de formule qui correspondrait à une intégration par parties.

Le calcul différentiel à sa naissance apparaît bien issu directement du calcul des différences.

* L'année 1675 marque un pas décisif: une notation déjà précise apparaît. Dans un manuscrit d'octobre 1675 les notations $\int$ et dy sont introduites.

Ainsi la formule $\text{Omn } \ell$ devient $\int \ell$. Il peut écrire $\int x = \frac{x^2}{2}$

Il réalise alors très clairement que les deux opérations d et $\int$ sont inverses l'une de l'autre:

d symbole différence

$\int$ symbole totalisateur

Par analogie avec le calcul des différences et le calcul des sommes pour des quantités discrètes, le caractère réciproque des deux symboles apparaît de façon naturelle, sous un aspect très formel dégagé de toute considération géométrique¹. Les infiniment petits font alors leur apparition au fur et à mesure.

* Le triangle caractéristique.

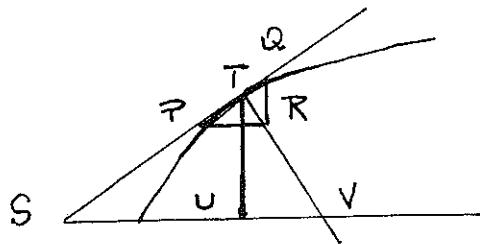
Durant l'année 1675, année cruciale intervient aussi une dimension géométrique due au triangle caractéristique.

Les valeurs de y sont toujours considérées comme les termes d'une suite mais dx et dy sont, expression utilisée par Leibniz: "*des quantités inassignables*"; les infiniment petits apparaissent ainsi.

$PR = dx$

$RQ = dy$

PQ est un segment assimilé à l'arc de courbe.



Citons Leibniz:

Il semblait toujours possible d'assigner des triangles semblables à ce triangle caractéristique bien qu'inassignables ou infiniment petit..."

Cette phrase met en évidence la différence essentielle entre Newton et Leibniz.

Dans la méthode "des témoins finis" de Newton, quand le temps s'écoulant, le triangle PQR disparaît, un témoin fini est gardé triangle fini fixe semblable à PQR.

Le point de vue de Leibniz est tout à fait différent: il admet des infiniment petits. Le triangle caractéristique est **inassignable** ou **infiniment petit**.

Les infiniment petits se prêtent à des raisonnements géométriques. Plusieurs triangles sont semblables au triangle caractéristique; les triangles STU et TUV sont les plus utilisés.

Les infiniment petits sont **actuels**. Ils interviennent de façon explicite dans les raisonnements.

Leibniz n'est guère tracassé par les nombreuses polémiques qui vont avoir lieu; il ne se pose pas de problème sur la nature des infiniment petits; l'essentiel est que les calculs marchent! Il sépare la métaphysique et les mathématiciens; à la fin de sa vie, il ne se battra pas pour l'existence des infiniment petits, reconnaissant en eux un moyen commode, un outil formel pour le calcul différentiel et le calcul intégral.

"... si quelqu'un n'admet point des lignes infinies et infiniment petites à la rigueur métaphysique et

¹ Dans la tradition du 17^{ème} siècle, le lien entre le calcul différentiel et le calcul intégral reste noyé dans des considérations géométriques, comme par exemple, chez Barrow. Même chez Newton, dans *De quadratura curvarum*, ce lien n'est pas d'une extrême clarté.

comme des choses réelles, il peut s'en servir sûrement comme des notions idéales qui abrègent le raisonnement, semblables à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune."¹

La nature et l'exigence des infiniment petits n'est pas son sujet; il s'intéresse avant tout à mettre en place un formalisme, issu de considérations algébriques et sous-tendu par des considérations géométriques.

$$\text{Il écrit: } \frac{dy}{dx} = \frac{TU}{SU} \quad (1)$$

Si, comme il le fera dans son mémoire de 1684, la sous-tangente est désignée par p , la formule (1) devient: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{p}$ ou $dy = \frac{y}{p} dx$

En novembre 1675, il s'attaque à différents problèmes appelés "problème inverse des tangentes", c'est-à-dire à la résolution d'équations différentielles.

Par exemple, soit à trouver une courbe dont la sous-normale est inversement proportionnelle à l'ordonnée.

Posons $q = UV$ Les triangles PQR et TUV sont semblables donc on a: $\frac{dy}{dx} = \frac{q}{y}$

Or par hypothèse, il existe b tel que $q = \frac{b}{y}$ ainsi $dx = \frac{y^2}{b} dy$

Il en déduit $\int dx$ par l'opération de sommation purement formelle.

$$\int dx = \int \frac{y^2}{b} dy \quad \text{d'où} \quad x = \frac{y^3}{3b} \quad \text{ce qui est donc une relation entre } x \text{ et } y. \quad ^2$$

Leibniz a donc pu montrer ici que sa méthode permet de résoudre des problèmes inverses des tangentes c'est-à-dire de résoudre des équations différentielles.

* Dans les manuscrits de novembre 1676, Leibniz est en possession de la formule

$$dx^n = nx^{n-1}dx.$$

Il la démontre pour n entier et admet la généralisation à n entier négatif et fractionnaire².

Il connaît donc aussi la formule $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(dans les manuscrits de cette époque dx n'est pas indiqué).

(Puis, ses manuscrits de 1677 nous révèlent qu'il est en possession, disons, des principales formules de dérivation: dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient...Ces formules sont de type algébriques, ce sont des formules abstraites.

¹ Lettre à Varignon, journal des savants de 1702.

² Il n'y a pas de constante d'intégration puisque le premier terme est toujours supposé nul.

² Newton, pour la série du binôme, avait fait de même.

Il n'obtient pas immédiatement la formule du produit. Il pense d'abord que $d(uv) = dudv$. Il n'avait pas encore bien clairement mis en évidence les différents ordres des infiniment petits¹.

Dans une lettre à Newton, il détaille son raisonnement:

$$(u + du)(v + dv) = uv + udv + vdu + dudv$$

$$\text{donc } (u + du)(v + dv) - uv = udv + vdu + dudv$$

Pour des questions d'homogénéité, il faut que $dudv = 0$!

D'autres techniques s'étaient mises en place. Ainsi en 1676, il cherche la différentielles d'une expression telle que: $\sqrt{a + bz + cz^2}$

Il pose $x = a + bz + cz^2$, différentie $\sqrt{x}$, puis multiplie ce résultat par $\frac{dx}{dz}$. Il a en quelque sorte effectué un changement de variable, peu rigoureux mais l'idée est présente.

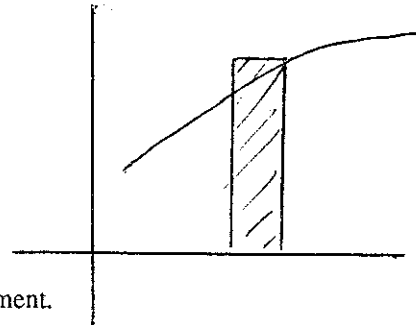
Nous voyons donc peu à peu surgir les principaux outils du calcul infinitésimal.

En 1680, l'expression "inassignable" est remplacée par celle "d' infiniment petit": " *Maintenant dx et dy sont pris infiniments petits, ou encore les deux points de la courbe doivent être considérés comme à une distance l'une de l'autre qui est inférieure à toute quantité donnée.*"

Par cette phrase, Leibniz rompt avec la géométrie euclidienne; le pas décisif est franchi; il n'aura plus recours au raisonnement apagogique des grecs². Les infiniment petits ont un statut actuel.

Leibniz appellera aussi dy l'accroissement momentané de y. Il identifie un arc de courbe avec un côté d'un polygone à une infinité de côtés. Pour obtenir l'aire sous une courbe, il somme les aires des rectangles IJKL car:

"on peut négliger les triangles parce qu'ils sont infiniments petits comparés aux rectangles et donc je représente dans mon calcul l'aire par $\int ydx$."



La hiérarchie entre l'ordre des infiniment petits apparaît ici clairement.

Il trouve : $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$,

puis il donne aussi le volume engendré par la courbe dans une rotation autour de l'axe des x, par la formule $v = \pi \int y^2 dx$

3) Commentaire du mémoire fondateur du calcul infinitésimal.

En octobre 1684, Leibniz publie son célèbre mémoire³: "Nova methodus pro maximis et

¹ La hiérarchie des infiniments petits sera présentée clairement dans le traité du Marquis de l' Hospital.

² Voir Mnémosyne n° 1: de la méthode d'exhaustion.

³ Dans cette partie, nous utiliserons abondamment l'ouvrage de Marc Parmentier: Leibniz Naissance du calcul différentiel. Vrin 1989 déjà cité.

minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus"

ou "Nouvelle méthode pour chercher les Maxima et les Minima, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les expressions fractionnaires ou irrationnelles, accompagnée du calcul original qui s'y applique".

Dans ce mémoire, Leibniz précise que sa nouvelle analyse n'est pas, comme celle de Descartes, limitée aux courbes algébriques. Elle s'applique à toutes les situations données, y compris aux courbes dites mécaniques.

Le texte est peu clair, très obscur, très formel.. Il a eu peu d'influence sur ses contemporains. Les seuls qui l'ont compris sont les Bernoulli qui étaient par ailleurs en contact avec Leibniz. Jean dans une de ses lettres écrit:

"Ce texte est plutôt une énigme qu'une explication"

Voici une description rapide de ce très court mémoire.

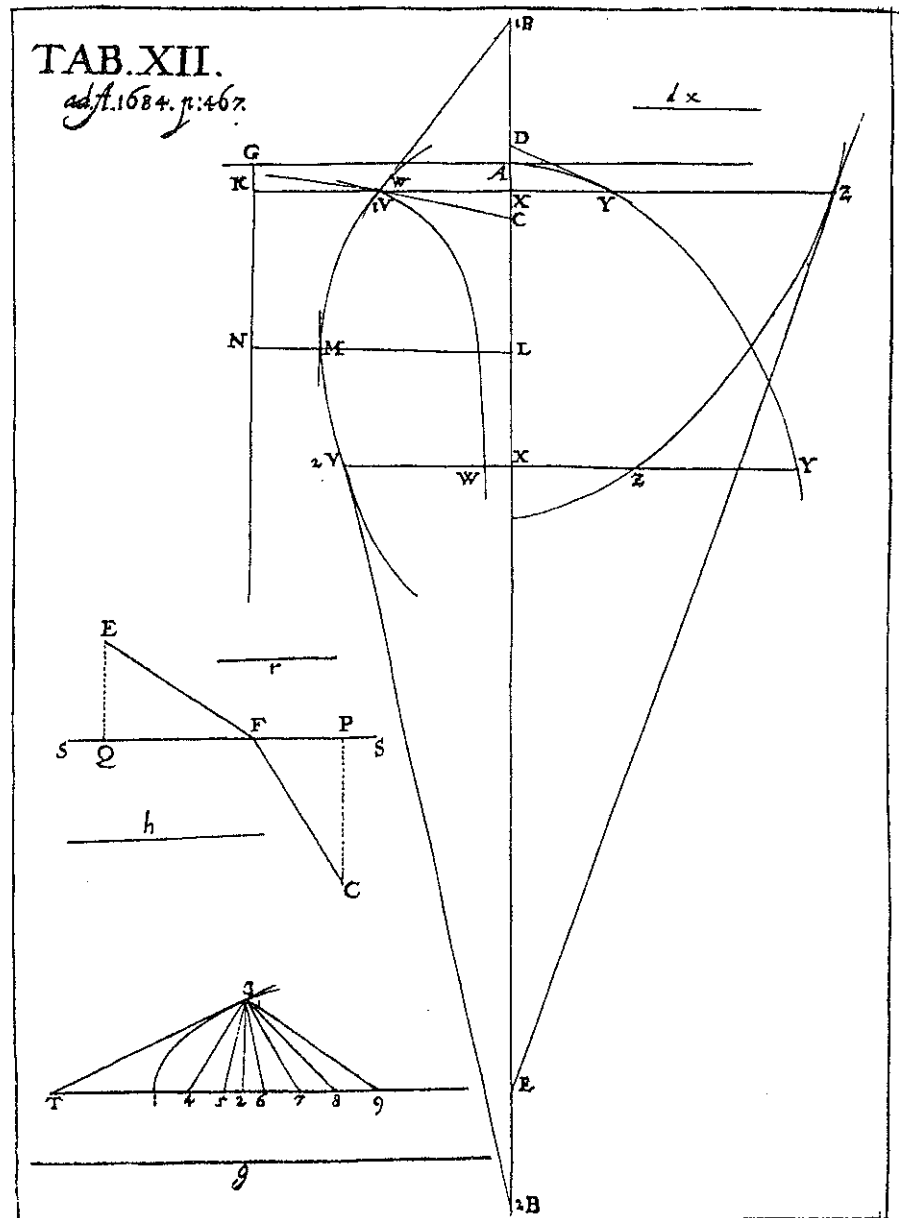
Leibniz énonce:

Soit $AX = x$ et $YX = y$
ne précisant pas le sens de dx , il écrit:

"Appelons alors dx un segment de droite choisi arbitrairement, et dv (dw , dy ou dz), c'est-à-dire différence de v , (de w , y ou z) un segment qui soit avec dx comme v (w , y ou z) avec XB (XC , XD ou XE)."

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{XD} = \frac{y}{p}$$

avec $XD = p =$ sous-tangente



Nous voyons que le texte débute mal quant à la rigueur. En effet, si on ne connaît pas à priori la sous tangente, dy n'est pas défini. On tourne en rond!

Au début de ce mémoire, dy n'est donc pas défini de façon explicite.

Dans les pages suivantes, Leibniz donne les diverses propriétés relatives au calcul "des dérivées".

La présentation est formelle, en exagérant, il procède comme Bourbaki; il introduit un opérateur d puis donne les propriétés. Les justifications sont très discutables. Nous avons vu auparavant comment ces règles se sont peu à peu mises en place mais dans ce texte rien apparaît à ce sujet: la présentation est purement formelle.

Enoncé des règles:

Soit a une constante donnée, da sera égale à 0, et $\overline{dax}$ sera égal à adx. Si y est égal à v (c'est-à-dire toute ordonnée de la courbe YY égale à l'ordonnée correspondante de la courbe VV), dy sera égal à dv ³⁸.

Addition et Soustraction : si $z = y + w + x = v$, $d z = y + w + x$, autrement dit dv, sera égal à dz - dy + dw + dx. *Multipliation* : $d xv$ égal $x dv + v dx$, c'est-à-dire, en posant $y = xv$, nous aurons dy égal à $x dv + v dx$. Car on a tout loisir d'employer soit l'expression xv, soit à sa place, une lettre, par exemple y, pour abrégier ³⁹. Remarquons que dans ce calcul x et dx sont traités sur le même pied, de même y et dy, ou toute autre lettre indéterminée et sa différentielle ⁴⁰. Remarquons également que la démarche inverse, à partir de l'équation différentielle n'existe pas toujours, ou tout au moins suppose une certaine précaution, dont je parlerai ailleurs ⁴¹.

Enfin la *Division* :

$$d\frac{v}{y} \text{ ou (en posant } z \text{ égal à } \frac{v}{y} \text{), } dz \text{ égal } \frac{\pm v dy \mp y dv}{yy} \text{ } ^{42}.$$

Remarquons que ces propriétés sont classées de manière moderne: dérivée d'une constante, linéarité, dérivée d'un produit, racines, applications aux tangentes, maximum, minimum, point d'inflexion. (p. 107 à 109 voir le texte en annexe).

"Lorsque l'on connaît en quelquesorte l'algorithme de ce calcul...."

Leibniz insiste sur le mot **algorithme**. En effet, il est bien conscient que l'on peut toujours différencier une expression. Parmentier dit: *"Aux yeux de Leibniz, le nouveau calcul est non seulement général, mais automatique: à la différence du regressus que constitue l'intégration, l'opération de différentiation ne peut qu'aboutir."*

Il s'aperçoit par contre que le calcul intégral échappe au champ des fonctions algébriques et définit des nouvelles fonctions, des fonctions transcendentes.

on peut trouver par le calcul ordinaire toutes les autres équations différentielles, celles des maxima et minima ⁵², ainsi que les tangentes, sans avoir à éliminer ni fractions, ni irrationalités, ni autres signes radicaux, ce qui était inévitable dans les Méthodes en usage jusqu'à présent. Avec l'expérience il sera aisé de démontrer tout ceci à partir de cette unique observation, dont on n'a pas encore bien mesuré l'importance : on peut considérer dx, dy, dv, dw, dz comme proportionnelles aux différences, accroissements ou diminutions élémentaires ⁵³ de (respectivement) x, y, v, w, z ⁵⁴.

On retrouve ici l'idée de Newton relative au rapport naissant, à l'ultime raison. Mais ici Leibniz l'assume vraiment en tant qu'infiniment petits: dx , dy , sont proportionnels aux accroissements de x , y , ... Leibniz ne dit pas "naissant" mais "élémentaire".

Avec le point de vue adopté ici, le $\frac{dy}{dx}$ est exactement la pente de la tangente.

On voit aussi que ma méthode s'étend aux courbes transcendentes, qu'on ne peut ramener à aucun calcul Algébrique, c'est-à-dire qui ne sont d'aucun degré déterminé⁵⁸, et cela de la manière la plus universelle, sans recourir à des hypothèses particulières qui ne sont pas toujours vérifiées, pourvu seulement qu'on s'en tienne à ceci : dans son principe, trouver la *tangente* consiste à tracer une droite joignant deux points infiniment proches de la courbe, c'est-à-dire tracer le côté d'un polygone *infinimentangulaire* qui à mes yeux, équivaut à la courbe⁵⁹. Or on peut toujours représenter cette distance infiniment petite par une différentielle connue dv , ou par une relation qui la fait intervenir, c'est-à-dire par une tangente connue. En particulier, à supposer que y soit une grandeur transcendante, comme l'ordonnée d'une cycloïde, entrant dans un calcul qui permet de déterminer l'ordonnée z d'une autre courbe, et que nous cherchions dz , autrement dit la tangente à cette seconde courbe, il s'agit de déterminer dz en fonction de dy , mais dy serait connue, puisqu'on connaît la tangente à la cycloïde. A supposer qu'on l'ignore, on pourrait la retrouver de la même façon par le calcul, à partir des propriétés des tangentes au cercle.

La connaissance de la tangente à la cycloïde permet de déterminer une différentielle de dy . En somme, il considère le problème à l'envers.

Puis il propose un exemple, un exemple inutilement compliqué, dans lequel il semble avoir rassemblé toutes les difficultés de calcul.

$$\frac{x}{y} + \frac{(a+bx)(c-xx)}{(ex+fx)^2} + ax\sqrt{gg+yy} + \frac{yy}{\sqrt{hh+lx+mx}} = 0$$

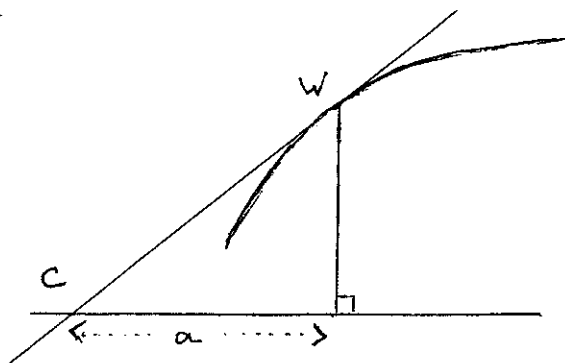
Il arrive à ses fins en bas de la page 113, montrant ainsi qu'il est toujours possible d'aboutir même si les calculs sont longs.

Il a ainsi l'occasion de montrer la virtuosité des différentes techniques dont il dispose.

"Montrons à présent leur emploi dans des exemples plus immédiatement intelligibles".

Il traite d'abord un problème de dioptrique puis il reprend le problème que Mr de Beaune a posé à Descartes, et qui a comme solution une courbe transcendante: une logarithmique¹. *"Trouver une courbe telle qu'en traçant la tangente WC jusqu'à l'axe, XC soit toujours égal à un même segment constant a".*

¹ Sous ce terme, il faut entendre en réalité la fonction inverse de la fonction logarithme, c'est à dire une fonction exponentielle.



XW, soit w , est donc par rapport à XC ou a comme dw à dx , dès lors, si on prend dx (qu'on peut choisir comme on veut) constant, c'est-à-dire invariable, à savoir égal à b , autrement dit si les x , ou AX, croissent uniformément, il viendra : $w = \frac{a}{b} dw$, et les ordonnées w seront proportionnelles à leurs accroissements ou différentielles dw , ou encore si les x sont en progression arithmétique, les w seront en progression Géométrique, et si les w sont des nombres, les x seront leurs logarithmes ; la courbe WW est donc la courbe logarithmique ⁷⁰.

4) Juin 1686: "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum."

ou Sur la géométrie profonde et l'analyse des indivisibles et des infinis.

Comme le dit Parmentier, "l'objet principal de Leibniz est ici de replacer le nouveau calcul dans la perspective la plus naturelle et la plus féconde, l'évaluation des quadratures, plus précisément, le problème inverse des tangentes...."

Cet article complète donc "Nova Methodus". Là encore, Leibniz se démarque explicitement de la "géométrie profonde". Les italiens parleront longtemps de "géométrie sublime".

Dans le titre, le mot "indivisibles" peut être sujet de polémiques. Le propos de Leibniz est de présenter un formalisme, un formalisme qui rende compte du calcul des indivisibles pratiqué au XVII^e siècle. Leibniz n'utilise pas les indivisibles, il propose un algorithme du calcul intégral, qui soit général.

Mais je ne sais pourquoi, le calcul Algébrique en cette affaire ne m'apportait pas entière satisfaction, contraint que j'étais d'en passer par le détour des figures pour établir nombre de résultats que j'aurais voulu obtenir par l'analyse ; jusqu'au jour où je découvris enfin ce véritable complément de l'Algèbre pour les transcendentes ³⁸ qu'est mon calcul des indéfiniment petits ³⁹, que je nomme également différentiel, calcul des sommations, quadratique, et assez judicieusement me semble-t-il, *Analyse des indivisibles et des infinis* ⁴⁰. A peine fut-il découvert que tout ce qui en ce domaine m'avait rempli d'admiration, me sembla divertissement et jeu ⁴¹. Il m'était alors permis d'introduire de notables simplifications, mais aussi de mettre sur pied la méthode tout à fait générale que je viens d'exposer, permettant de déterminer dans toute la mesure du possible, aussi bien les quadratrices que les autres courbes inconnues, qu'elles soient Algébriques ou transcendentes.

Il lui est donc possible d'expliciter même par une équation les courbes transcendentes. L'exemple qu'il donne est celui de la cycloïde. Soit a un arc, x le sinus verse, nous aurons :

$$a = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

et si y est l'ordonnée d'une cycloïde

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}},$$

équation qui exprime complètement la relation entre l'ordonnée y et l'abscisse x

5) Septembre 1693 "Supplementum geometriae dimensionariae...."

ou Extension des mesures géométriques grâce à une manière absolument universelle de réaliser toutes les quadratures par le Mouvement, accompagnée de différents procédés pour construire une courbe à partir d'une condition imposée à ses tangentes.

Dans cet extrait, Leibniz établit clairement le lien existant entre la dérivation et l'intégration c'est-à-dire entre la recherche des tangentes et le recherche des surfaces: ces deux problèmes sont inverses l'un de l'autre. "*Je voudrais montrer que le problème général des Quadratures revient à construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée.*"

Dans ce mémoire, il se propose de fabriquer un intégraphe, machine mécanique permettant de réaliser une quadrature c'est-à-dire de calculer une intégrale. Son projet n'aboutira pas de son vivant¹. Il explique comment il construit une courbe dont les ordonnées donne l'aire de la courbe considérée, construction géométrique.

"On peut construire cette courbe par le mouvement que j'ai imaginé."

Voilà la construction et la justification.

Je voudrais montrer à présent que le problème général des Quadratures revient à construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée ⁴⁶, c'est-à-dire sur laquelle les côtés du triangle caractéristique assignable aient entre eux telle relation donnée ; après quoi je montrerai qu'on peut construire cette courbe par le mouvement que j'ai imaginé. En effet pour toute courbe $C(C)$, je considère un double triangle caractéristique, l'un assignable TBC , l'autre inassignable GLC , semblables entre eux.

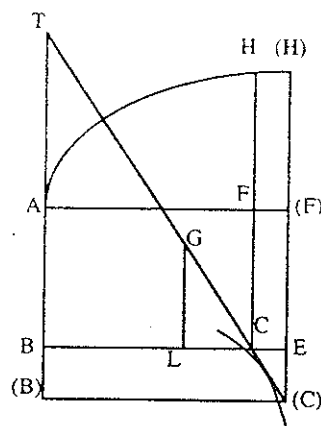


figure 31

¹ De telles machines existent au XIXème siècle, elles permettent d'obtenir une valeur approchée d'une aire.

Le triangle *inassignable* est délimité par les éléments GL et LC des coordonnées ⁴⁷ CF et CB qui en forment les côtés, et par l'arc élémentaire GC, constituant sa base ou hypoténuse. Mais le triangle assignable TBC est délimité par l'axe, l'ordonnée et la tangente, et exprime par conséquent l'angle que fait la direction de la courbe (c'est-à-dire aussi la direction de sa tangente) avec l'axe ou la base, autrement dit la pente de la courbe en un point donné C. Soit à quarrer la surface F(H) comprise entre la courbe H(H), les deux droites parallèles FH et (F)(H), et l'axe F(F); prenons sur celui-ci un point fixe A, prenons comme axe conjugué la droite AB perpendiculaire à AF passant par A, puis prenons sur chaque droite HF (qu'on aura au besoin prolongée) un point C, c'est-à-dire construisons une nouvelle courbe C(C) telle que, une fois tracées entre C et l'axe conjugué AB (prolongé au besoin), l'ordonnée conjuguée CB (égale à AF), mais aussi la tangente CT, la portion d'axe TB qu'elles délimitent soit avec BC dans le rapport de HF à la constante a, c'est-à-dire que le produit de a par BT soit égal au rectangle AFH (circonsrit au triline AFHA). Dans ces conditions, je dis que le produit de a par E(C) (différence entre les ordonnées FC et (F)(C) de la courbe) est égal à la surface F(H); de ce fait, si on prolonge la courbe H(H) jusqu'à A, le triline AFHA de la figure à quarrer est égal au produit de la constante a par l'ordonnée FC de la figure quadratrice. Mon calcul le montre immédiatement. Soit en effet

$AF = y$, $FH = z$, $BT = t$, $FC = x$, nous aurons par hypothèse $t = \frac{zy}{a}$, mais

également $t = \frac{ydx}{dy}$, expression des Tangentes selon les formules de mon

calcul, donc : $adx = zdy$ et par conséquent $ax = \int zdy = AFHA$. La courbe C(C) est donc une quadratrice pour la courbe H(H), puisque le produit de son ordonnée FC par la constante a est égal à l'aire, c'est-à-dire à la somme des ordonnées de H(H) appliquées à leurs abscisses respectives AF ⁴⁸. Partant, comme BT est avec AF dans le même rapport que FH avec a (par hypothèse) et que la relation de FH à AF (relation qui définit la figure à quarrer) est donnée, nous connaîtrons donc également la relation de BT à FH, c'est-à-dire la relation de BT à BC et donc celle de BT à TC, autrement dit la relation entre les côtés du triangle TBC. C'est pourquoi, il suffit, pour réaliser toutes les quadratures et toutes les mesures, d'être capable, à partir d'une relation donnée entre les côtés du triangle caractéristique assignable TBC, autrement dit, à partir de la loi des pentes, de tracer la courbe C(C), puisque nous avons montré qu'elle est une quadratrice.

c) Présentation du calcul infinitésimal par le marquis de l'Hospital.

En 1696, Le marquis de l'Hospital écrit le premier traité de calcul infinitésimal, faisant ainsi connaître le calcul leibnizien. Analyse des infiniments petits, pour l'intelligence des lignes courbes.

La présentation de cet ouvrage est complètement axiomatique. Les axiomes concernent les infiniments petits.

L DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. ○ On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre Ap pour AP , pM pour PM , l'espace ApM pour l'espace APM , le petit espace $MPpM$ pour le petit rectangle $MPpR$, le petit secteur AMp pour le petit triangle AMS , l'angle pAM pour l'angle PAM , &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3.  On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par exemple que la portion de courbe Mm & l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle mSm puisse être censé rectiligne.

La parution de ce traité a déchaîné à l'Académie des lutes entre les partisans des méthodes leibniziennes parmi lesquels se trouve Varignon et les conservateurs tels Rolle. L'Académie a même du interdire à ses membres de discuter des problèmes des infiniments petits en séance plénière!

Le traité du Marquis de l'Hospital commence par une préface historique d'une grande richesse. Après avoir retracé les travaux des Anciens, de Pascal, de Descartes, de Cavalieri...il annonce les travaux de Leibniz:

"Dans tout cela il n'y a encore que la première partie du calcul de M. Leibniz, laquelle consiste à descendre des grandeurs entières à leurs différences infiniments petites, & à comparer entr'eux ces infiniments petits de quelque genre qu'ils soient: c'est ce Qu'on appelle calcul différentiel. Pour l'autre partie, qu'on appelle calcul intégral, & et qui consiste à remonter de ces infiniments petits aux grandeurs ou aux tous dont ils sont les différences, c'est-à-dire dire à en trouver les sommes, j'avais aussi dessein de le donner. Mais M. Leibniz m'ayant écrit qu'il y travaillait dans un traité qu'il intitule De Scientia infiniti, je n'ai eu garde de priver le public d'un si bel ouvrage qui doit renfermer tout ce qu'il a de plus curieux par la Méthode inverse des tangentes, pour les rectifications des courbes des surfaces des corps qu'elles renferment, pour la Quadrature des espaces qu'elles renferment, pour celle des surfaces des corps qu'elles décrivent, pour la dimension de ces corps, pour la découverte des centres de gravité, &..."

Mais ce fameux traité de calcul intégral malheureusement ne sera jamais écrit. Malgré des tentatives pleines d'erreurs (Carré, Stone) il faudra attendre M. de Bougainville qui publiera beaucoup plus tard, en 1754, sous l'influence de d'Alembert un traité complétant celui du Marquis de l' Hospital, relatif au calcul intégral.

ACTA ERUDITORUM

ANNO MDC LXXXIV

publicata,

ac

SERENISSIMO FRATRUM PARI,

DN. JOHANNI

GEORGIO IV,

Electoꝛatus Saxonici Hæredi,

⁊

DN. FRIDERICO

AUGUSTO,

Ducibus Saxoniae &c.&c.&c.

PRINCIPIBUS JUVENTUTIS

dicata.

*Cum S. Caesareæ Majestatis ⁊ Potentissimi Ele-
ctoꝛis Saxoniae Privilegiis.*

L I P S I Æ.

Prostant apud J. GROSSIUM & J. F. GLETITSCHIUM.

Typis CHRISTOPHORI GÜNTHERI.

Anno MDCLXXXIV.

Acta Eruditorum (Actes des savants) de Leipzig

3ème année 1684

La page 467 est la première page de "Nova Methodus Pro Maximis et Minimis..."

La figure en page 37 provient du même ouvrage.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, itemque tangentibus, qua nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

Si axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordi-^{TAB. XII.}
nata, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respec-
tive, v, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint
VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E.
Jam recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur dx, & recta quæ sit ad
dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vo-
cetur dv (vel dw, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsa-
rum w, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu-
a dx: si sit y æqu v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuius or-
dinatæ respondentis curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Sub-*
tractio: si sit z = y + w + x æqu. v, erit dz = y + w + x seu dv, æqu
dz = dy + dw + dx. *Multiplicatio*, dx v æqu. x dv + v dx, seu posito
y æqu. x v, fiet dy æqu x dv + v dx. In arbitrio enim est vel formulam,
ut x v, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x
& dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam
indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari
semper regressum a differentiali Equatione, nisi cum quadam cautio-
ne, de quo alibi. Porro *Divisio*, d $\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu.
 $\frac{+v dy - y dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera
substituatur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa,
& pro + scribi + dz, pro - scribi - dz, ut ex additione & subtra-
ctione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesis valorum
venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an
valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa:
quod posterius cum sit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non ver-
sus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

N n n 3 z decre-

TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.								
ARCS.		CORDES.			TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.			
Degrés.	Min.	Part. du Diam.	Prim.	Secon.	Part.	Prim.	Secon.	Tierc.
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48
3	30	3	39	52	0	1	2	48
4	0	4	11	16	0	1	2	47
4	30	4	42	40	0	1	2	47
5	0	5	14	4	0	1	2	46
5	30	5	45	27	0	1	2	45
6	0	6	16	49	0	1	2	44
6	30	6	48	11	0	1	2	43
7	0	7	19	33	0	1	2	42
7	30	7	50	54	0	1	2	41
8	0	8	22	15	0	1	2	40
8	30	8	53	35	0	1	2	39
9	0	9	24	54	0	1	2	38
9	30	9	56	13	0	1	2	37
10	0	10	27	32	0	1	2	35
10	30	10	58	49	0	1	2	33
11	0	11	30	5	0	1	2	32
11	30	12	1	21	0	1	2	30
12	0	12	32	36	0	1	2	28
12	30	13	3	50	0	1	2	27
13	0	13	35	4	0	1	2	25
13	30	14	6	16	0	1	2	23
14	0	14	37	27	0	1	2	21
14	30	15	8	38	0	1	2	19
15	0	15	39	47	0	1	2	17
15	30	16	10	56	0	1	2	15
16	0	16	42	3	0	1	2	13
16	30	17	13	9	0	1	2	10
17	0	17	44	14	0	1	2	7
17	30	18	15	17	0	1	2	5
18	0	18	46	19	0	1	2	2
18	30	19	17	21	0	1	2	0
19	0	19	48	21	0	1	1	57
19	30	20	19	19	0	1	1	54
20	0	20	50	16	0	1	1	51
20	30	21	21	12	0	1	1	48
21	0	21	52	6	0	1	1	45
21	30	22	22	58	0	1	1	42
22	0	22	55	49	0	1	1	39
22	30	23	24	39	0	1	1	36

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ.									
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ.		ΕΥΘΕΙΩΝ.			ΕΞΗΚΟΤΩΝ.				
Μοιρῶν.		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.	
0	0	0	λα	πε	0	α	β	ν	
α	0	α	ς	ν	0	α	β	ν	
α	ς	α	λδ	ις	0	α	β	ν	
β	0	β	ε	μ	0	α	β	ν	
β	ς	β	λς	δ	0	α	β	μν	
γ	0	γ	η	κη	0	α	β	μν	
γ	ς	γ	λς	νβ	0	α	β	μν	
δ	0	δ	ις	ις	0	α	β	μς	
δ	ς	δ	μβ	μ	0	α	β	μς	
ε	0	ε	ιδ	δ	0	α	β	μς	
ε	ς	ε	με	ς	0	α	β	μς	
ς	0	ς	ις	μδ	0	α	β	μδ	
ς	ς	ς	μν	ις	0	α	β	μγ	
ς	0	ς	λς	λγ	0	α	β	μβ	
ς	ς	ς	ν	νδ	0	α	β	μς	
η	0	η	κβ	ις	0	α	β	μ	
η	ς	η	νγ	λε	0	α	β	λς	
θ	0	θ	κδ	νδ	0	α	β	λη	
θ	ς	θ	νς	ιγ	0	α	β	λς	
ι	0	ι	κς	λβ	0	α	β	λε	
ι	ς	ι	νη	μδ	0	α	β	λγ	
ια	0	ια	λ	ε	0	α	β	λβ	
ια	ς	ιβ	α	κς	0	α	β	λ	
ιβ	0	ιβ	λβ	λς	0	α	β	κη	
ιβ	ς	ιγ	γ	ν	0	α	β	κς	
ιγ	0	ιγ	λε	δ	0	α	β	κς	
ιγ	ς	ιδ	ς	ις	0	α	β	κγ	
ιδ	0	ιδ	λς	κς	0	α	β	κα	
ιδ	ς	ις	η	λη	0	α	β	ις	
ις	0	ις	λς	μς	0	α	β	ις	
ις	ς	ις	ι	νς	0	α	β	ις	
ις	0	ις	μβ	γ	0	α	β	ιγ	
ις	ς	ις	ιγ	δ	0	α	β	ις	
ις	0	ις	μδ	ιδ	0	α	β	ς	
ις	ς	ις	α	ις	0	α	β	ς	
ις	0	ις	μς	λς	0	α	β	β	
ις	ς	ις	λς	κα	0	α	β	δ	
ις	0	ις	μν	κα	0	α	α	νδ	
ις	ς	ις	κ	ις	0	α	α	νδ	
κ	0	κ	ν	ις	0	α	α	νς	
κ	ς	κς	κς	ιβ	0	α	α	μν	
κς	0	κς	νβ	ς	0	α	α	μς	
κς	ς	κβ	κς	νη	0	α	α	μβ	
κβ	0	κβ	νγ	μδ	0	α	α	λς	
κβ	ς	κ	κς	ις	0	α	α	λς	

L'Almageste de Ptolémée

(Trad. par l'abbé Halma)

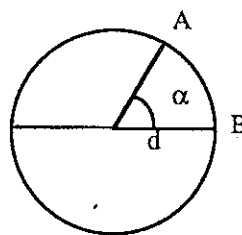
Avec la bienveillante autorisation de Madame le Directeur de la Bibliothèque Centrale du
Muséum d'Histoire Naturelle de Paris

Martine BÜHLER

Claude Ptolémée d'Alexandrie (IIème siècle après Jésus Christ) est le dernier astronome important de l'astronomie grecque. Il reprend et complète les travaux de ses prédécesseurs, en particulier Hipparque (IIème siècle avant Jésus Christ) que Ptolémée cite dans son ouvrage majeur: La Grande Syntaxe Mathématique (140 ap. J.C.), qui nous est parvenu sous le nom d'Almageste, d'après son titre arabe. Cet ouvrage servira de référence jusqu'à la révolution copernicienne: il présente le système Grec du monde, traite du mouvement du Soleil, de la Lune et des étoiles, et termine sur la théorie des planètes et les tableaux donnant leurs positions.

Dans le chapitre IX du livre I de l'Almageste, Ptolémée se propose d'établir une table des cordes: *"tous les arcs de notre table iront en croissant d'un demi-degré, constamment, et nous donnerons pour chacun de ces arcs la valeur de la sous-tendante, en supposant le diamètre partagé en 120 parties"*. La valeur 120 pour le diamètre est commode pour des calculs menés en numération sexagésimale. Les tables de Ptolémée sont l'équivalent de nos tables trigonométriques; en effet:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{AB}{d} \text{ où } d \text{ est le diamètre du cercle.}$$



Construction de pentagone et décagone

La première étape du travail de Ptolémée consiste à construire simultanément les côtés d'un pentagone et d'un décagone réguliers inscrits dans un même cercle. Il utilise pour cela deux propriétés de ces polygones, qu'on trouve démontrées au livre XIII des Eléments d'Euclide.

Proposition 9: *"Si l'on ajoute ensemble le côté de l' hexagone et le côté du décagone,....., la droite entière sera coupée en moyenne et extrême raison"¹...*

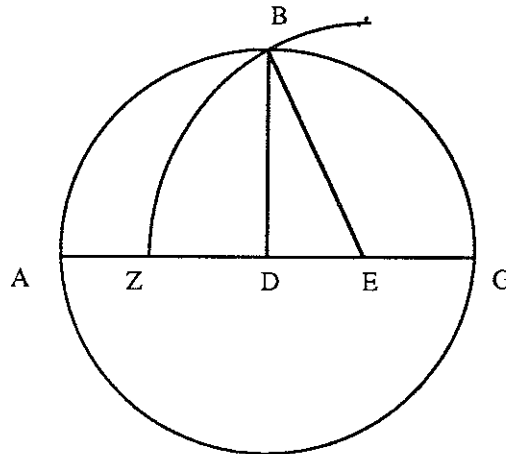
Proposition 10: *"Si l'on décrit dans un cercle un pentagone équilatéral, le carré du côté du pentagone sera égal à la somme des carrés du côté de l'hexagone et du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle."*

Au début du chapitre IX, après avoir expliqué son propos, Ptolémée donne une construction des côtés du décagone et du pentagone: *"Soit d'abord le demi-cercle ABG décrit sur le diamètre ADG autour du centre D et soit élevé, à angles droits, de D, sur AG, le rayon DB; soit DG coupée en son milieu au*

¹Rappelons que le segment [AB] est coupé en moyenne et extrême raison en C si $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$. Pour plus de détails sur ce type de partage, lié au nombre d'or, voir Mnémosyne n° 1

point E; joignez EB et prenez EZ égale à EB; enfin joignez ZB; je dis que ZD est le côté d'un décagone, et BZ celui d'un pentagone." Voici une démonstration algébrisée et modernisée de ce résultat.

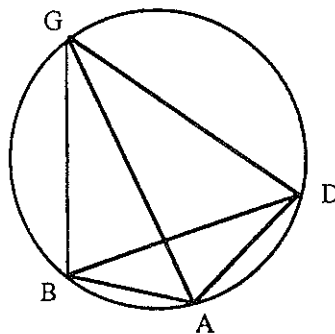
$GZ \times DZ = (EZ + EG)(EZ - ED) = EZ^2 - ED^2 = EB^2 - ED^2 = DB^2 = DG^2$
 donc [GZ] est coupé en moyenne et extrême raison en D et, comme DG est le côté de l'hexagone, ZD est celui du décagone puis $BZ^2 = ZD^2 + DB^2$ démontre (prop. 10 d'Euclide) que BZ est le côté du pentagone. Pour un diamètre égal à 120 parties (nous dirions "120 unités"), Ptolémée obtient donc:
 $EZ = EB = 67^p 4' 55''$ (que nous écririons $67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2}$) $DZ = 37^p 4' 55''$ $BZ = 70^p 32' 33''$



Il donne ensuite les côtés du carré et du triangle équilatéral inscrits dans le cercle (dont il connaît les carrés $2R^2$ et $3R^2$). A partir de ces quelques côtés, Ptolémée va pouvoir dresser la table complète des cordes de demi-degré en demi-degré.

Somme et différence d'arcs.

Ptolémée commence par démontrer un lemme (parfois appelé "théorème de Ptolémée" mais qu'on trouve dans des ouvrages antérieurs): "*Soit un quadrilatère quelconque inscrit dans le cercle ABGD; soient menées les diagonales AG , BD; il s'agit de prouver que le rectangle, construit sur AG et BD, est égal aux deux rectangles des côtés opposés ABGD et ADBG*", ce que nous traduirions par : $AB \times GD + AD \times BG = AG \times BD$

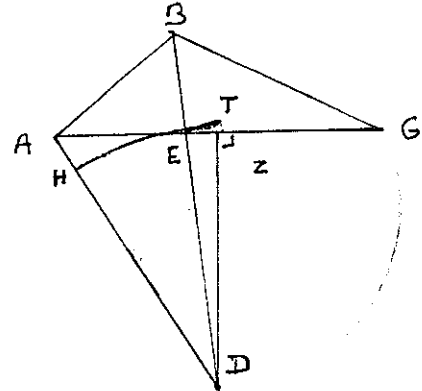


L'application de ce lemme lui permet de connaître la corde soutenant la différence et la somme de deux arcs dont on connaît la soutendante et "de trouver la soutendante de la moitié de l'arc soutendu [par une] droite [donnée]."¹

¹Le résultat obtenu dans ce dernier cas est d'ailleurs équivalent à notre formule de duplication.

Encadrement de la corde de l'arc de 1°

"Soit le cercle $ABGD$ et soient menées dans ce cercle deux droites inégales dont la plus grande est BG et la plus petite est AB ; je dis que la droite BG est à BA , en moindre raison que l'arc BG à l'arc AB "

$$\frac{BG}{BA} < \frac{\widehat{BG}}{\widehat{BA}}$$


Le secteur DET est donc plus grand que le triangle DEZ et le secteur DEH est plus petit que le triangle DEA, donc $\frac{\text{triangle DEZ}}{\text{triangle DEA}} < \frac{\text{secteur DET}}{\text{secteur DEH}}$ mais des triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases donc le rapport des aires des triangles DEZ et DEA est $\frac{EZ}{EA}$ et les secteurs sont proportionnels aux angles donc:

$$\begin{aligned} \frac{EZ}{EA} &< \frac{\widehat{ZDE}}{\widehat{EDA}} \\ \frac{EZ + EA}{EA} &< \frac{\widehat{ZDE} + \widehat{EDA}}{\widehat{EDA}} \\ \frac{AZ}{EA} &< \frac{\widehat{ADZ}}{\widehat{EDA}} \end{aligned}$$

Or Z est le milieu de [AG] donc (DZ) est la bissectrice de $\widehat{\text{ADG}}$ donc $\frac{\text{AG}}{\text{EA}} < \frac{\widehat{\text{ADZ}}}{\widehat{\text{EDA}}}$

$$\frac{GA - EA}{EA} < \frac{\widehat{ADG} - \widehat{EDA}}{\widehat{EDA}} \quad \text{d'où} \quad \frac{EG}{EA} < \frac{\widehat{EDG}}{\widehat{EDA}}$$

Or (BE) est la bissectrice de $\widehat{ABG}$ donc $\frac{EG}{EA} = \frac{BG}{BA}$ et les arcs sont proportionnels

aux angles inscrits : $\frac{\widehat{\text{EDG}}}{\widehat{\text{EDA}}} = \frac{\widehat{\text{BG}}}{\widehat{\text{BA}}}$

Ce lemme permet un encadrement de la corde de l'arc de 1° .

- Si AB soutend $(\frac{3}{4})^\circ$ (connu) est si AG soutend l'arc de 1° alors $AB < AG$ donc $\frac{AG}{AB} < \frac{\widehat{AG}}{\widehat{AB}}$ donc $AG < \frac{4}{3} AB$ On connaît $AB \cong OP\ 47' 8''$ donc $AB + \frac{1}{3} AB \cong 1P\ 2' 50''$ (résultat donné par Ptolémée au lieu de $1p\ 2' 50,6''$) d'où une majoration de la corde de 1° .

- Si maintenant AB soutend l'arc de 1° et AG celui de $(1\frac{1}{2})^\circ$, on obtient $AB > \frac{2}{3} AG$ d'où une minoration de la corde de 1° ; le calcul de Ptolémée donne $AB > 1P\ 2' 50''$ Donc, on prend comme approximation de la corde de 1° : $1P\ 2' 50''$; on peut alors calculer la corde de l'arc de $(\frac{1}{2})^\circ$: $0P\ 31' 25''$.

Remarquons la bonne précision des résultats obtenus:

$$\begin{aligned}\frac{1^\circ\ 2' 50''}{120} &= \frac{1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2}}{120} \approx 0,0087268..... \\ \sin 0,5^\circ &\approx 0,00872653 \\ \frac{0P\ 31' 25''}{120} &\approx 0,0043634 \\ \sin 0,25^\circ &\approx 0,0043633\end{aligned}$$

Le texte intégral du chapitre IX de l'Almageste, accompagné du début des tables de Ptolémée, se trouve dans " Mathématiques et Mathématiciens " de P. Dedron et J. Itard (Ed. Magnard) p. 364 à 370.

Nous n'avons encore jamais utilisé ce texte de Ptolémée avec des élèves. Cependant, il nous paraît approprié pour des activités en classe: la construction des pentagones et décagone réguliers est très simple et peut constituer une activité intéressante, associée ou non à la lecture des propositions d'Euclide en préliminaire. On peut aussi, en classe de première scientifique, sans s'attarder sur Euclide, partir du pentagone et du décagone pour comprendre la construction de la table des cordes, ancêtre de nos tables trigonométriques. L'heure de module peut alors permettre de différencier le travail suivant les élèves, certains pouvant même s'attaquer à l'encadrement (remarquable) de la corde sous-tendant l'arc de 1° .

Si vous utilisez ce texte en classe, écrivez à "Mnemosyne" pour faire part de votre expérience et nous essayerons ensemble d'écrire une suite "pédagogique" à cet article.

Histoire des probabilités : Les commencements

par B.Bru

(Séminaire de l'U.P.S)

Les mathématiciens s'accordent à dire que les probabilités sont nées en 1654, d'une correspondance entre Pascal et Fermat.

La conférence de Bernard Bru débute par cette question: Pourquoi le calcul des probabilités ne commence-t-il qu'au XVII^e siècle?

Il nous propose différentes explications sur l'origine de ce calcul, précisant que pour lui, aucune n'est satisfaisante.

Une première explication, due à Ian Hacking (1975), est de nature épistémologique et philosophique. En effet, avant de définir une notion, il est nécessaire que certains concepts soient définis clairement. Ici, deux concepts interviennent:

- un concept de probabilité indiquant un degré de certitude et un concept de probabilité aléatoire plus expérimental lié soit à une expérience objective, physique, naturelle correspondant à des paramètres cachés dans la nature soit à un relevé de fréquence déterminé de façon expérimentale.

- et d'autre part le concept d'aléatoire; cette notion est le mélange d'une probabilité objective, physique, naturelle correspondant à des paramètres cachés dans la nature et d'une probabilité fréquence déterminée de façon expérimentale.

Au XVII^esiècle, ces deux concepts ont été associés : on a mathématisé le degré de certitude par la fréquence. Mais Bernard Bru indique qu'ils existaient déjà avant notre ère et la question suivante reste en suspens: Pourquoi le XVII^esiècle aurait-il rassemblé ces deux notions?

Une deuxième explication est de nature juridique et théologique. La société marchande du XVII^es s'intéresse à des contrats aléatoires, liés à des événements incertains tels que la mort d'une personne, les transports maritimes... Ils sont écrits selon des règles d'équité pouvant même

s'appliquer à des événements aléatoires. Mais on en trouve aussi dans le droit romain alors, pourquoi l'émergence de la notion de probabilité ne s'est-elle faite qu'au XVII^e siècle? Serait-ce parce qu'à cette époque en France, les mathématiciens appartenaient au milieu des juristes?

Même la théologie apporte des éléments de réflexion pour élaborer une théorie de l'aléatoire puisque des théologiens jésuites du XVII^e siècle défendent à côté d'une voie certaine l'existence de voies probables pour le salut de l'âme.

Une troisième explication s'enracine dans les recensements effectués au début du XVII^e siècle dans les grandes administrations.

Bernard Bru ne doute pas que l'on ait parlé de probabilités avant le XVII^e siècle; mais il souligne un fait important: au XVII^e s, des théories vont se construire. Quant aux origines, peut-être sont-elles plus prosaïques: au XVII^e s, on fait des mathématiques entre gens cultivés, dans les milieux de juristes et magistrats; la culture d'une certaine aristocratie juridique s'exprime dans l'Académie Parisienne de Mersenne puis dans l'Académie des Sciences. Le goût des jeux, des récréations mathématiques, les nombreux défis favorisent l'émergence de l'idée de probabilité.

Bernard Bru cite ensuite deux problèmes qui sont à l'origine de ce calcul:

1. Le problème des dés.

Combien de fois faut-il jeter un dé pour parier avec avantage d'obtenir un 6? ou d'obtenir deux 6 au moins une fois avec deux dés?

2. Le problème des partis.

(Bernard Bru a détaillé les diverses solutions proposées à l'époque pour ce problème mais il n'est pas le lieu ici de reprendre ces solutions.)(cf. Dans nos classes p. 21)

Ces problèmes sont des problèmes de dénombrements à propos desquels, il nous fait remarquer que les "cas" sont des abstractions, des fictions, des objets mathématiques sur lesquels il y a déjà un consensus: chacun conçoit les même "cas"; on peut donc les dénombrer

" Le hasard peut être objet de géométrie "

Pascal

Il a développé principalement la solution proposée par Pascal en relation avec " le traité du triangle arithmétique" et qui fait intervenir une démarche par récurrence.

En 1657, Huygens publie " De Ratiociniis in ludo Aleae " (des raisons dans le jeu de hasard) dans lesquels, Huygens qui ne connaît pas les solutions proposées par Pascal et Fermat, donne sa solution et introduit l'idée d' "espérance". A partir de ce moment, d'autres mathématiciens entrent aussi en lice, lançant des défis et y répondant tour à tour: entre autres il

cite Jacques Bernoulli, Leibniz, Montmort, Nicolas Bernoulli... Ceux-ci s'attaquent par exemple au problème de la ruine des joueurs, à celui de la durée du jeu...

" Essay d'Analyse sur les jeux de hasard" de Montmort paraît en 1708, l' "Ars Conjectandi..." de J.Bernoulli est publié de façon posthume en 1713 par son fils. Dans cet oeuvre, J.Bernoulli répond au problème gardé longtemps secret et posé dans "La Logique de Port-Royal": Quel est le rapport entre les "chances" et le nombre de réalisations de l'événement quand on répète un certain nombre de fois une expérience?. Il pense que le calcul des probabilités peut s'appliquer aux sciences de la nature et au domaine juridique.

Il semble bien que J.Bernoulli considère son oeuvre est plus importante que la quadrature du cercle et plus utile " comme en fait foi la lettre du 26 février 1711 de Nicolas Bernoulli, neveu de Jacques, à Montmort:

"Il est grand dommage que la 4ème partie de ce traité qui devrait être la principale, ne soit achevée; [...] Ce qui en est le plus remarquable est que le chapitre dernier, où il donne la solution d'un problème fort curieux, qu'il a préféré même à la Quadrature du Cercle, c'est de trouver combien il faut faire d' observations pour parvenir à un tel degré de probabilité que l'on voudra..."

et telle qu'en témoigne le Journal des Savants de 1706 (Saurin).

"C'est dans la 4ème partie que l'Auteur étend sa méthode, et ses raisonnements, ainsi qu'on l'a dit, aux choses qui regardent la vie civile, et les affaires domestiques. Le fondement de cette dernière partie, est un Problème important, qu'il faisait plus de cas que la Quadrature du Cercle."

Bibliographie

- Todhunter (1865) A History of the Mathematical Theory of Probability
London Macmillan, Reprinted in 1965 New York Chelsea
- B. Bru Petite histoire du calcul des Probabilités
in "Fragments d'histoire des Maths." Brochure APMEP n° 41
- N. Meusnier "Jacques Bernoulli et l'Ars conjectandi"
IREM de Rouen 1987
- IREM Paris VII Brochure M: A.T.H. n°61
Solution historique du problème "des partis"

Marie Françoise Jozeau

Une histoire de la perspective.

Conférence de Jean-Pierre LE GOFF

Séminaire de l'U.P.S., séance du mercredi 20 Février.

Lors de sa conférence, Jean-Pierre Le Goff a présenté la naissance de la perspective géométrique au 15^e siècle, en indiquant les apparitions précédentes de la notion de perspective, ainsi que les prolongements auxquels elle a donné lieu.

On peut considérer que Brunelleschi "invente" la perspective mais sa théorisation est faite par Alberti dans son ouvrage *De Pictura* (1435) qui définit ainsi la perspective: "Une peinture ne sera rien d'autre qu'une intersection de la pyramide visuelle suivant une distance donnée[...] Je trace d'abord sur la surface à peindre un quadrilatère de la grandeur que je veux, fait d'angles droits, et qui est pour moi comme une fenêtre ouverte par laquelle on peut regarder l'histoire".

Cette conception est l'aboutissement des tentatives de rationalisation de la représentation. Vitruve, auteur de l'ouvrage *De Architectura Libri X* (1^{er} siècle avant J.C.) parle de scénographie (représentation plane de l'espace) par opposition à l'ichnographie et à l'orthographie qui sont des projections orthogonales sur des plans horizontaux (géométral) et verticaux (élévation). Erwin Panofski (1892-1968, professeur d'histoire de l'art à l'Université de Hambourg), dans son livre "la perspective comme forme symbolique", parle de perspective en "arête de poisson", c'est à dire d'axe de fuite dans les fresques de la Rome antique, que l'on retrouve dans certaines peintures du Moyen-âge. Quinze siècles auparavant, les Egyptiens représentaient leurs personnages de profil et les éléments du décor à l'aide d'une sorte d'élévation.

Par ailleurs, dans certaines miniatures persanes du 15^e siècle, on voit apparaître une forme de représentation que notre vision euro-centrique nous fait qualifier de perspective cavalière, par référence à l'architecture militaire du 16^e et 17^e siècle. Ce mode de représentation, généralisé sous le nom d'axonométrie deviendra l'outil privilégié en architecture.

A la fin du 14^e siècle en Europe, pour représenter un carrelage, on admet l'idée de convergence des orthogonales au tableau (fuyantes), mais les parallèles à la ligne de terre sont déterminées selon des espaces en progression géométrique (règle des 2/3) qui provoque une incurvation des diagonales. Alberti justifiera le caractère légitime de sa construction en constatant que sa méthode fournit des diagonales rectilignes.

En 1470, Piero della Francesca reprendra la construction d'Alberti dans son ouvrage "*De Prospectiva Pingendi*" et donnera la légitimation de cette construction. Il la complètera de règles donnant des coefficients en progression harmonique ainsi que d'un système de construction point par point basé sur la double projection qu'il appliquera à la représentation de la tête humaine.

Un chanoine de Toul, Jean Pélerin dit Viator, proposera une méthode du tiers point qui s'apparente à la méthode du point de distance mais n'est pas définie en ces termes. Dans un traité de Vignola-Danti(1582) l'équivalence de cette méthode avec celle d'Alberti est démontrée.

Malgré cela, les règles de la perspective linéaire ne seront pas toujours respectées. Ainsi, Vredeman de Vries réalisera des dessins inexacts du point de vue de la perspective géométrique et Serlio proposera une méthode incorrecte.

Il faudra attendre 1600 pour qu'une démonstration de la convergence des fuyantes parallèles soit donnée par Guidobaldo del Monte et c'est au 17^e siècle qu'on verra "s'éparpiller" les points de fuite en dehors de la ligne d'horizon.

Avec Desargues, la perspective devient conique et fournit les bases de la géométrie projective. Newton s'intéressera aux lignes du 3^e ordre comme projections des cinq paraboles divergentes, puis Murdoch et Mac Laurin écriront deux traités de perspective linéaire. L'intérêt des mathématiques pour la géométrie perspective s'estompera avec la création de la géométrie projective par Poncelet.

Philippe BRIN

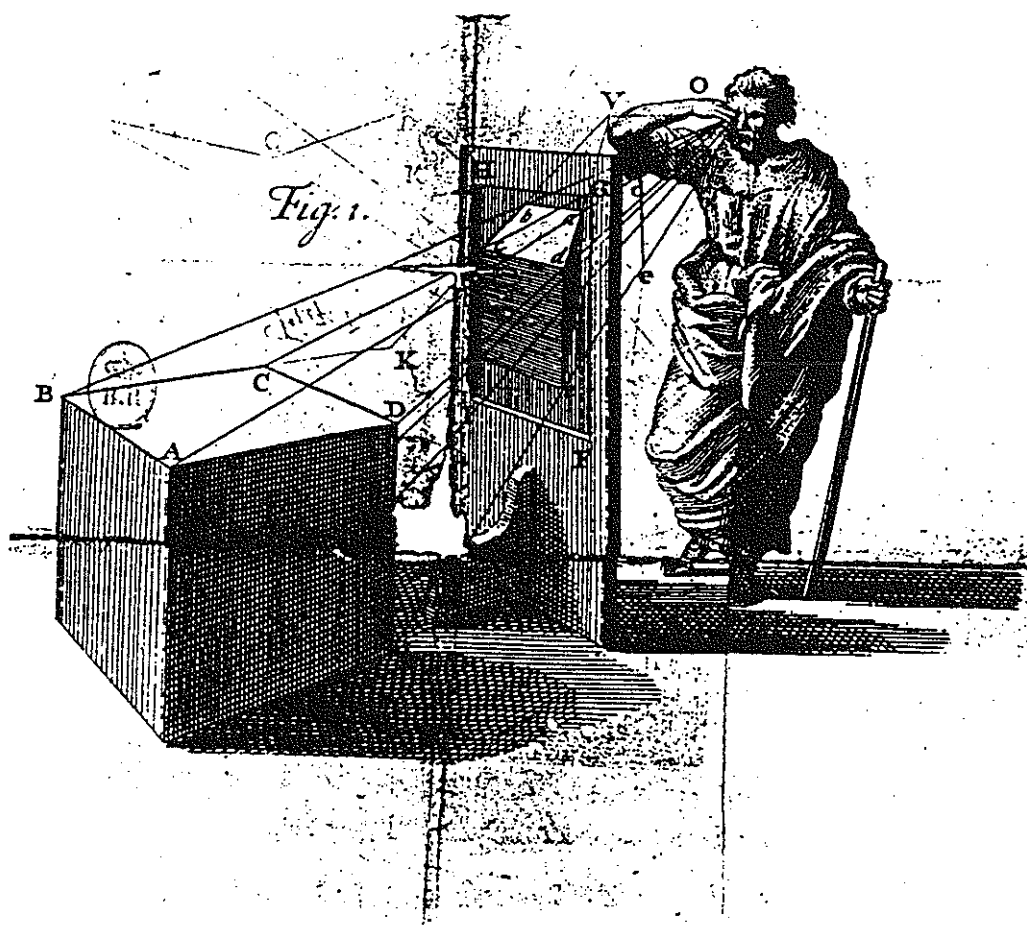


Planche extraite du traité de perspective de Brook Taylor:
New Principles of Linear Perspective, Londres, 1719.

NOTE DE LECTURE

Nous présentons ici un troisième ouvrage général d'histoire des mathématiques :

A. DAHAN-DALMEDICO / J. PEIFFER
Une histoire des mathématiques
Routes et dédales
Seuil Points-Sciences

Cet ouvrage est le parfait complément du "Collette", présenté dans Mnémosyne 3. Au lieu d'une chronologie globale, les auteurs ont choisi de privilégier l'histoire des concepts. Six chapitres présentent ainsi un parcours en "routes et dédales" des principaux champs théoriques que découpent nos connaissances actuelles:

- figures, espaces et géométries
- la limite : de l'impensé au concept (le calcul infinitésimal, les réels)
- le concept de fonction et le développement de l'analyse
- au carrefour de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie: les nombres complexes
- nouveaux objets. Nouvelles lois. L'émergence des structures algébriques.

Pour compenser le cloisonnement artificiel induit par ce découpage, les deux premiers chapitres décrivent des moments historiques significatifs, nommés "paysages" pour mettre l'accent sur le rôle du contexte social et culturel, avec une insistance particulière sur un épisode fondamental pour notre civilisation: l'émergence de la rationalité en Grèce. Ces deux chapitres constituent ainsi le premier pas idéal pour aborder l'histoire des mathématiques. Sous une forme très condensée, ils fournissent les points de repère indispensables, tout en respectant les principes qui guident tout l'ouvrage : rendre compte non seulement des moments d'axiomatisation et de synthèse et des intuitions fulgurantes, mais aussi des conjectures, hésitations et impasses, resituer les idées dans leur contexte et respecter autant que possible la formulation d'origine.

Ce livre, si agréable pour le débutant, se révèle aussi utile bien après, toutes les fois que l'on se demande "mais d'où vient cette idée, ce théorème ?" L'index terminologique permet de retrouver immédiatement le canevas de l'histoire du concept auquel on s'intéresse, le texte fournit les noms et oeuvres où il entre en jeu, et la bibliographie offre quelques références complémentaires.

La présentation et le style manifestent un grand souci de lisibilité. Les difficultés techniques de certains objets mathématiques moins familiers sont traitées dans des encadrés très clairs, illustrés de nombreuses figures.

Le point faible de l'ouvrage - mais il faut bien faire des choix - concerne les biographies des mathématiciens. L'index des noms propres permet seulement de les relier à leurs recherches et de les situer à peu près.

Signalons enfin un atout non négligeable pour ce livre : son petit format et son petit prix.

Comité de rédaction:

Philippe BRIN

*Lycée Technique E.Branly Créteil
Animateur à l' IREM Paris VII*

Michèle GREGOIRE

*Lycée Lavoisier Paris
Animatrice à l' IREM Paris VII*

Maryvonne HALLEZ

*Collège P. Bert Paris
Animatrice à l' IREM Paris VII*

Marie Françoise JOZEAU

*Lycée G. de Nerval Luzarches
Animatrice à l' IREM Paris VII*

Michèle LACOMBE

*Lycée J. Monod Clamart
Animatrice à l' IREM Paris VII*

Anne MICHEL-PAJUS

*Lycée C. Bernard Paris
Animatrice à l' IREM Paris VII*

Michel SERFATI

*Lycée Technique Raspail Paris
Animateur à l' IREM Paris VII*

Jean Luc VERLEY

*Université Paris VII
IREM Paris VII*

Avec la participation de

Martine BÜHLER

*Lycée de Noisy-le-Grand
Animatrice à l' IREM Paris VII*

Courrier à adresser à : Groupe M: A.T.H.

IREM de l'université Paris VII

Tour 55-56 3ème étage

75005 PARIS

*Pour échanger expériences et réflexions à propos de l'histoire et de
l'enseignement des mathématiques*

M: *Mathématiques*
A: *Approche par les*
T. *textes*
H. *historiques*

SOMMAIRE

Bonnes vieilles pages *Probabilités et imprévus chez de Morgan*

Dans nos classes *Le problème des partis*

Iconographie *Coudée égyptienne*

Etude *Leibniz et l'Ecole continentale*

Conte du Lundi *l'Almageste*

Note d'écoute

Note de lecture

Calendrier

*Quelques séminaires:
Programmes pour l'année 1993-94*

Editeur : IREM

Directrice responsable de la publication : M. ARTIGUE

Dépôt légal : Novembre 1993

ISBN : 2-86612-087-6

IREM Université Paris VII Denis Diderot
Tour 56-55 -3^{ème} étage, Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel: 01 44 27 53 83