

M : A.T.H.



MNEMOSYNE

UNIVERSITE PARIS VII

Mnémosyne

personnification de la mémoire.

Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite;
de cette union naquirent les neuf Muses.

(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture : **"La mémoire"**
gravure allégorique d'après Gravelot (XVIII ème)

MEMOSYNE

M: *Mathématiques*

A. *Approche par les*

T. *textes*

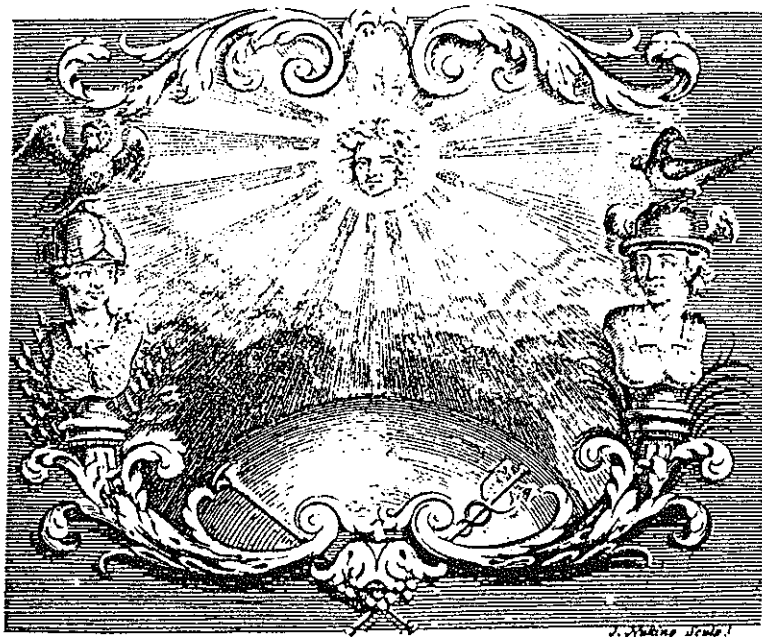
H. *historiques*



SOMMAIRE

<i>Editorial</i>		<i>p.3</i>
<i>Hommage à Jean Dieudonné</i>		<i>p.4</i>
<i>Bonnes vieilles pages</i>		<i>p.17</i>
	<i>Nicolas Chuquet : Le Triparty en la science des nombres (extrait) et commentaires de Tannery</i>	
<i>Dans nos classes</i>		
	<i>Une méthode de quadrature et sa légitimation par Isaac Newton</i>	<i>p.27</i>
<i>Etude</i>	<i>L'élaboration du calcul des variations et ses applications à la dynamique</i>	<i>p.35</i>
<i>Contes du Lundi</i>		<i>p. 65</i>
	• <i>Pavages presque- périodiques</i> • <i>Descartes et le quatrième degré</i>	
<i>Note d'écoute</i>		<i>p. 84</i>
<i>Note de lecture</i>		<i>p.87</i>
<i>Calendrier</i>	<i>Séminaires pour l'année 1993-94</i>	<i>p.92</i>

ANALYSIS
Per Quantitatum
SERIES, FLUXIONES,
A C
DIFFERENTIALS:
CUM
Enumerationem Linearum
TERTII ORDINIS.



L O N D I N I:
Ex Officina PEARSONIANA. Anno M.DCC.XI.

EDITORIAL

Ce numéro double est l'occasion:

D'accueillir une étude de problèmes variationnels, problèmes de mécanique ou le calcul infinitésimal naissant démontre sa puissance et son efficacité; le statut exact de ces problèmes (mathématiques ou mécaniques?) est longtemps resté ambigu. Cette ambiguïté est d'ailleurs redevenue d'actualité, en un moment où la distinction entre mathématiques pures et appliquées est de nouveau remise en question.

D'accueillir aussi un article d'introduction à des questions d'algèbre récentes et qui trouvent une application en cristallographie: les pavages semi-périodiques.

De rendre hommage, après sa disparition, avec un montage de citations, à Jean Dieudonné, un homme qui, pendant un demi-siècle a, de façon parfois controversée, incarné les mathématiques, et a marqué leur enseignement et leur histoire,.....

HOMMAGE A JEAN DIEUDONNÉ

Jean Dieudonné (1906 - 1992)

Jean Dieudonné, un géant des mathématiques, a incarné, pendant plus de 50 ans l'"Esprit Bourbaki". Membre cofondateur du groupe en 1934, travailleur acharné, il a été le principal rédacteur des fameux "Eléments", monumental ouvrage dont le titre - référence à Euclide - marque l'ambition : établir les fondements des mathématiques contemporaines. (Une cinquantaine de fascicules sont parus.)

Donc l'oeuvre mathématique de Jean Dieudonné est très variée: à une thèse d'analyse classique succédèrent des travaux de topologie (On lui doit les notions de partitions de l'unité et d'espaces para-compacts et il a dégagé l'importance de la Topologie faible.); en algèbre il a généralisé la Théorie de Galois et celle des groupes classiques et a collaboré avec A. Grothendieck à l'élaboration de la théorie des schémas, comme fondement de la Géométrie algébrique.

Bien qu'il se dise peu doué pour l'enseignement, il a joué un rôle important dans la réforme de 1969 de l'enseignement des mathématiques dans les collèges et les lycées et on lui doit de remarquables ouvrages d'initiation aux mathématiques contemporaines, précieux pour les étudiants : Algèbre linéaire, Calcul infinitésimal et, bien sûr, les 9 volumes des Eléments d'Analyse (toujours la référence à Euclide!)

L'érudition et l'immense culture (pas seulement limitée aux mathématiques) de Dieudonné le conduisaient naturellement à l'histoire des mathématiques et leur diffusion. Il a rédigé la quasi-totalité des notices historiques de Bourbaki et publié de nombreux ouvrages d'histoire qui sont une mine de renseignements tant pour le mathématicien que pour l'historien des sciences. Dans le domaine de la diffusion des mathématiques, il a participé activement à la conception et à l'élaboration de la partie mathématique de l'Encyclopédie Universalis, dont la qualité est universellement reconnue. Pendant des années, il a co-dirigé avec M. Loi et R. Thom le séminaire d'Histoire et Epistémologie des mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure.

Jean Dieudonné avec une oeuvre écrite considérable, est sans doute, après H. Poincaré, le dernier homme à avoir pu embrasser la totalité des mathématiques dites pures, ce qui a pu le conduire à sous estimer l'importance de certaines disciplines fondamentales comme les mathématiques appliquées ou la logique mathématique.

Jean Luc Verley

Formation

En fait, j'aimais l'école et j'apprenais aisément, récoltant les prix sans me donner beaucoup de mal. Mon père me mettait en garde contre ma facilité : il avait bien raison, comme je m'en aperçus à mon entrée à l'École Normale Supérieure. On a beaucoup médité des grandes Écoles, et je ne m'en suis pas privé moi-même. Mais en quel autre lieu, dans notre système éducatif français, un jeune homme peut-il avoir la chance de vivre en contact journalier pendant 3 ou 4 ans avec des esprits qui seront parmi les plus distingués de sa génération, et nouer des amitiés qui enrichissent toute une vie ? Et puis, l'esprit de l'École Normale fournit à qui s'en imprègne le meilleur antidote contre le poison qui guette tout intellectuel, la tendance à s'enorgueillir de son savoir au lieu de penser à tout ce qu'il ignore ; la féroce ironie des Normaliens, qui, pour reprendre la phrase de Talleyrand, ont coutume de « parler sérieusement des choses légères et légèrement des choses sérieuses » est là pour le remettre aussitôt à sa place et le rappeler à l'honnêteté intellectuelle.

Je compris donc vite que si je voulais rester dans le sillage des camarades brillants qui m'entouraient et des aînés qui déjà se faisaient un nom dans la recherche, il me faudrait travailler ferme. Cela ne m'était pas pénible, car ma passion pour les mathématiques, qui s'était éveillée vers ma 14^e année, avec la découverte de l'algèbre, n'avait fait depuis lors que croître. A Paris, j'avais tous les jours la possibilité de l'assouvir, en écoutant les leçons des maîtres éminents qui se nommaient Picard, Hadamard, Cartan, Lebesgue, Montel, Denjoy, Julia. A vrai dire, beaucoup de ce que nous apprenions ainsi, mes camarades et moi-même, passait bien au-dessus de nos têtes ; nous n'en mesurions que mieux la distance qui nous séparait de nos professeurs, et s'il nous arrivait de chaussonner les petits travers de tel ou tel d'entre eux, nous aurions eu l'impression de nous couvrir de ridicule si notre ignorance avait « contesté » leur savoir. Je dirais même que, personnellement, cette distance me paraissait presque infranchissable ; et il me fallut pas mal d'années pour que j'acquière un peu de confiance en moi et me persuade que je pouvais, moi aussi, avancer un peu dans la recherche mathématique.

Allocution prononcée à Nice le 20 novembre 1969

Le Groupe Bourbaki

L'autre événement majeur fut la création du groupe Bourbaki. Depuis la mort de H. Poincaré, l'école française de mathématiques (à l'exception de E. Cartan et de M. Fréchet) avait tendance à se spécialiser dans l'Analyse classique des fonctions de variables réelles ou complexes. Les mathématiciens de ma génération, au cours de nos premiers contacts avec l'étranger, avions eu l'occasion de constater combien nous étions ignorants des développements féconds qui, à cette époque, renouvelaient l'Algèbre, la Topologie et l'Analyse fonctionnelle en Allemagne, en Pologne ou en Russie, et nous souhaitions redonner aux mathématiques françaises leur traditionnelle universalité. Nous fûmes heureusement aidés dans cet effort par plusieurs de nos maîtres, notamment par le Séminaire organisé par M. Julia.

Ma participation aux travaux de l'équipe Bourbaki m'a apporté beaucoup plus que je n'en attendais. Dès mon enfance, j'avais toujours éprouvé un irrésistible attrait pour la compilation : les dictionnaires, encyclopédies, histoires universelles étaient ma pâture favorite et je passais des heures à en extraire pour ma délectation des listes arrangées suivant d'autres systèmes de classification. Bizarre passion, mais qui seule peut expliquer l'ardeur avec laquelle je me mis à rédiger les multiples états par lesquels doit passer tout chapitre du Traité avant d'être définitivement approuvé par la confrérie. Mais j'étais loin d'escompter l'effet qui en résulta sur mon développement intellectuel. L'entreprise exigeait que chaque membre de l'équipe se chargeât de mettre en forme des théories sur lesquelles il ne savait souvent à peu près rien. Pour moi, ce fut une gymnastique intellectuelle d'une extraordinaire efficacité. Livré à moi-même, je serais sans doute resté toute ma vie cantonné dans un étroit secteur de l'Analyse; obligé d'apprendre sans cesse du nouveau et d'essayer de le repenser avec un esprit vierge, je fus amené, presque sans le vouloir, et tout en assouvissant à plaisir ma manie classificatrice, à travailler moi-même dans des parties de plus en plus étendues des mathématiques. En outre, je ne cessais de bénéficier, au cours des multiples réunions de notre groupe, des idées souvent extrêmement originales et pénétrantes de mes coéquipiers, et ce n'est pas une exagération de dire qu'ils sont certainement de moitié dans tout ce que j'ai pu faire.

Allocution prononcée à Nice le 20 novembre 1969

Conception des mathématiques

Par « mathématiques bourbakiennes » j'entends, à très peu de choses près, l'ensemble des questions qui ont été exposées dans les séances du Séminaire Bourbaki. Les collaborateurs de N. Bourbaki ont eu, dès le début de leur travail collectif, une certaine conception des mathématiques, se rattachant à la tradition de H. Poincaré et E. Cartan en France, de Dedekind et Hilbert en Allemagne. Les « *Éléments de Mathématique* » ont été écrits pour donner à ce type de recherches des fondements solides et d'accès commode, sous une forme assez générale pour être utilisables dans le plus grand nombre possible de contextes.

A partir de 1948, le groupe Bourbaki a organisé un Séminaire, comportant en principe 18 séances annuelles, destiné à exposer les résultats récents dans les questions qui leur semblaient les plus intéressantes ; ces exposés, qui ont presque tous été publiés, sont actuellement au nombre de 500 environ, et constituent donc une véritable Encyclopédie de ces théories.

*
* *

Aucun texte publié sous le nom de N. Bourbaki n'a jamais précisé la façon dont les questions exposées dans le Séminaire ont été choisies. On peut donc seulement, en examinant de l'extérieur ces choix et la façon dont ils s'insèrent dans l'ensemble de toutes les publications mathématiques de notre époque, essayer d'en dégager des traits communs. Je tiens à préciser que les conclusions que je tire de cet examen me sont uniquement personnelles, et ne prétendent représenter en aucune manière des opinions partagées par les collaborateurs de N. Bourbaki.

Lorsqu'on étudie l'histoire des mathématiques, on voit presque invariablement qu'une théorie commence par des efforts pour résoudre un problème très particulier (exemple : la duplication du cube dans les mathématiques grecques). Il se peut que ces efforts restent vains, autrement dit on a une première classe :

I) Les problèmes mort-nés (exemples : la détermination des nombres premiers de Fermat, ou l'irrationalité de la constante d'Euler).

En second lieu, il se peut que le problème considéré soit résolu, mais qu'il n'en résulte aucun progrès pour aucun autre problème ; d'où une seconde classe :

II) Les problèmes sans postérité (c'est le cas de beaucoup de problèmes ressortissant à ce qu'on appelle la « Combinatoire »).

Une situation plus favorable est celle où, en approfondissant les techniques utilisées pour résoudre le problème de départ, on arrive (au besoin en les compliquant considérablement) à les utiliser dans d'autres problèmes similaires ou plus difficiles, sans toutefois qu'on ait le sentiment de comprendre véritablement la raison de ces succès ; on peut dire que ce sont :

III) Les problèmes qui engendrent une *méthode* (la théorie analytique des nombres et la théorie des groupes finis sont fertiles en exemples).

Dans quelques cas assez rares, l'étude du problème finit, parfois au bout d'un temps assez long, par révéler l'existence de structures sous-jacentes insoupçonnées, qui, non seulement illuminent la question posée, mais fournissent des outils généraux et puissants permettant d'en élucider une foule d'autres dans des domaines variés ; on obtient ainsi :

IV) Les problèmes qui s'ordonnent autour d'une *théorie* générale, féconde et vivante (la théorie des groupes de Lie et la Topologie algébrique sont des exemples typiques à l'heure actuelle).

Mais, comme l'a souligné Hilbert, une théorie ne prospère que par l'apport ininterrompu de problèmes nouveaux. Fréquemment, une fois résolus les problèmes les plus importants par leurs conséquences et leurs liens avec les autres branches des mathématiques, la théorie a tendance à se concentrer sur des questions de plus en plus spéciales et isolées (pouvant d'ailleurs être très difficiles) ; on a alors :

V) Les théories en voie d'*étiollement* (au moins momentané : la théorie des invariants, par exemple, est déjà plusieurs fois passée par ce stade).

Enfin, si dans une théorie un choix heureux des axiomes, motivé par des problèmes précis, a permis de développer des techniques ayant une grande efficacité dans beaucoup de parties des mathématiques, il arrive aussi qu'on cherche, sans motif apparent, à modifier assez arbitrairement ces axiomes. L'espoir de renouveler ainsi les succès de la théorie initiale s'avère le plus souvent trompeur, et l'on a, suivant l'expression de Pólya et Szegő

(*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin (Springer), 1925, Einleitung) :

VI) Les théories en voie de *délayage* (« Verdünnung ») (conformément à l'exemple de ces auteurs, nous n'en citerons pas).

Ceci dit, il m'apparaît qu'on peut caractériser la plupart des sujets exposés dans le Séminaire Bourbaki comme appartenant à la catégorie IV) et (dans une moindre mesure) à la catégorie III) dans le classement précédent. C'est là, je crois, une constatation aussi objective que possible, que je m'abstiendrai de commenter plus longuement.

Préface de J. Dieudonné

**Panorama des mathématiques pures, le choix bourbachique.
Gauthier-Villars Paris 1977**

L'Enseignement

J'ai parlé jusqu'ici de mon activité de mathématicien, et je n'ai rien dit de ma carrière de professeur. Je dois vous faire un aveu : je n'ai jamais eu la moindre vocation pour l'enseignement. Si je suis entré dans l'Enseignement supérieur, c'est parce que c'était le seul moyen de gagner ma vie tout en conservant assez de temps disponible pour poursuivre mes recherches mathématiques. Bien entendu, j'ai toujours essayé de faire mon métier de professeur aussi consciencieusement que possible, et j'y ai consacré de

longues heures de préparation, mais je n'y ai jamais apporté d'enthousiasme; et même après 40 ans de métier, je me sens toujours plus à l'aise devant une feuille de papier que devant un auditoire. Je m'embrouille très facilement au tableau et j'ai sans cesse besoin de notes pour éviter les catastrophes. C'est la nécessité de prévoir ainsi dans le détail tous mes exposés qui m'a finalement poussé à écrire dans mon âge mûr quelques ouvrages d'enseignement, dans l'espoir qu'ils éviteront peut-être à mes jeunes collègues les erreurs où je suis maintes fois tombé.

C'est sans doute aussi en raison de mon manque d'aptitudes à l'enseignement que je n'ai guidé dans la recherche que très peu d'élèves: J'ai toujours beaucoup de mal à m'intéresser à un étudiant jusqu'au jour où il arrive à un niveau où je me sens de plain pied avec lui et où nos relations sont plus celles de collaborateurs que celles de maître à élève.

Il ressort bien de tout ceci que je suis un exemple typique du savant «enfermé dans sa tour d'ivoire». Je ne m'en défends pas, et même, malgré la réprobation dont s'accompagne aujourd'hui ce terme, je crois qu'il vaut la peine de prendre le contrepied des idées reçues et de faire l'éloge de la «tour d'ivoire». Lorsqu'on demandait à H. Poincaré comment il était arrivé à ses éblouissantes découvertes, il répondait «en y pensant souvent». Nous savons que Kummer a mis 8 ans pour inventer la théorie des nombres idéaux, et Gauss lui-même, le prince des mathématiciens, a reconnu avoir cherché en vain le signe d'une expression algébrique pendant plusieurs années. Si de tels géants de la pensée estiment nécessaire une concentration aussi soutenue de leur esprit, comment imaginer que les chercheurs moins doués puissent jamais accomplir un travail fructueux sans y consacrer tout le temps dont ils peuvent disposer? Et de fait, je ne connais guère d'exemple de mathématicien qui ait mené de front des recherches difficiles et une activité extérieure exigeant du temps et de la réflexion. Du reste, pour pouvoir sortir de sa spécialité et réussir dans d'autres domaines, il faut avoir des dons naturels que je ne me targue pas de posséder; la nature m'a gratifié de l'aptitude aux mathématiques, qu'elle ne prodigue guère; j'aurais mauvaise grâce à en vouloir davantage.

Allocution prononcée à Nice le 20 novembre 1969

Spécificité des mathématiques

Préface de l'Algèbre Linéaire

Les mathématiciens du siècle passé, et plus encore les philosophes ou essayistes qui ont voulu parler de mathématiques, ont donné au public cultivé l'image d'une science immuable et figée qui ignore les tâtonnements et les incertitudes des pauvres sciences dites expérimentales. Il y a plus de cent ans que les mathématiciens professionnels sont revenus d'une si naïve assurance. La source du malentendu réside dans le fait que s'il est bien exact que les théorèmes démontrés il y a 2 000 ans sont tous aussi vrais maintenant qu'alors, les « vérités expérimentales » par contre n'apparaissent jamais que comme des approximations que l'on perfectionne sans cesse. En

mathématique comme dans toutes les autres sciences, ce qui change, c'est le point de vue d'où l'on considère les résultats déjà acquis. Et comme dans toutes les autres sciences aussi ces changements se font à l'heure actuelle avec une vitesse qui va croissant.

Sauf sur un point tout à fait accessoire, le schéma du *progrès* en mathématique n'est pas différent de ce qu'il est dans les autres disciplines. En effet les acquisitions nouvelles et les réflexions que ces disciplines suscitent amènent à *repenser* les théorèmes anciens, à examiner à la lumière des théories plus récentes leurs rapports mutuels et à les insérer de façon plus rationnelle dans un contexte renouvelé. Contrairement à ce qui se passe pour les « faits » les mieux établis de la Physique ou de la Biologie, les théorèmes des mathématiques, malgré les bouleversements périodiques que connaît cette science, demeurent intacts. Seulement il leur arrive souvent de passer du statut de « théorèmes fondamentaux » à celui de simples « corollaires » qui finiront par servir d'exercices aux apprentis mathématiciens. Pour peu que les mathématiciens professionnels en aient conscience, un tel processus ne peut que rendre plus modeste la conception qu'ils se font de leur rôle.

L'enseignement des Universités n'a pas ignoré longtemps ces remises en ordre. Mais jusqu'à une époque récente il n'y a pas eu de refonte qui touchât vraiment aux notions de base laissées traditionnellement à l'enseignement secondaire. L'étude des mathématiques dans Euclide n'était d'ailleurs pas une mauvaise préparation aux mathématiques dites « supérieures » pour un contemporain de Viète ou même de Cauchy. Pendant les deux siècles qui séparent ces mathématiciens, les méthodes nouvelles qui avaient été développées n'exigeaient cependant pas d'autres idées fondamentales que celles d'espace et de nombre, telles que les avaient conçues les géomètres grecs. La tendance des mathématiques modernes est tout autre aujourd'hui. On a cherché à *décomposer* en quelque sorte ces « idées fondamentales », un peu comme les physiciens ont analysé l'atome « insécable » des anciens. On a ainsi pu découvrir dans les produits de cette « dissociation » des outils nouveaux d'une puissance jusqu'alors insoupçonnée.

Pendant ce temps l'Enseignement secondaire en était resté, à peu de chose près, à ce qu'il était avant Grassmann et Cantor. On y étudiait la géométrie d'Euclide, l'algèbre de Viète et de Descartes et un peu de Calcul infinitésimal dans les classes terminales. Le fossé existant entre cet enseignement et celui que l'on dispense dès l'entrée à l'université ne pouvait que s'élargir. Il n'est d'ailleurs pour s'en rendre compte que de considérer les sujets suivants dont la place est encore très grande dans l'enseignement des mathématiques au lycée :

1) les constructions « par la règle et le compas » ;

2) les propriétés des « figures » traditionnelles, telles que le triangle, les « quadrilatères » variés, les cercles et « systèmes de cercles », les coniques, avec tous les raffinements accumulés par des générations de « géomètres » spécialisés et des professeurs en quête de problèmes d'examen ;

3) la kyrielle des « formules trigonométriques » et de leurs transformations kaléidoscopiques permettant de superbes « résolutions » de « problèmes » relatifs aux triangles par le moyen de « calculs logarithmiques » !

De tout ceci il n'est *jamais* même fait allusion à l'Université. S'il faut étudier une conique, on l'étudie comme toute autre courbe par les procédés généraux du calcul infinitésimal. Quand aux autres « figures » chères aux géomètres de jadis, elles ont totalement disparu.

On pourra objecter que ce qui s'enseigne au lycée est moins abstrait et plus utile aux futurs ingénieurs que ce que l'on apprend à l'université. Vaut-il mieux pourtant pour fabriquer les poutrelles d'une construction métallique, savoir que les hauteurs d'un triangle sont concourantes ou avoir acquis quelques principes fondamentaux de résistance des matériaux ? Il est bien vrai que les formules trigonométriques sont tout à fait indispensables à trois professions :

- 1) les astronomes
- 2) les arpenteurs
- 3) les auteurs de manuels de trigonométrie.

Quelques notions de trigonométrie suffisent cependant à des centaines d'autres professions, de sorte qu'il est inutile d'en faire une étude approfondie dans le secondaire.

Un des effets du progrès mathématique est de nous rendre capable de démontrer souvent en quelques lignes ce à quoi on est parvenu par des cheminement très tortueux, un siècle ou un demi siècle auparavant. L'invention du Calcul infinitésimal en est un exemple universellement connu. Des problèmes qui avaient exercé la sagacité d'un Eudoxe ou d'un Archimède ont été d'un seul coup ramenés à des calculs presque automatiques. Ce qui est moins connu (et ce pourquoi est écrit ce livre), c'est que depuis les travaux de Grassmann et Cayley entre autres, il y a plus de cent ans, on dispose en « Géométrie élémentaire », comme l'a si bien dit Choquet, d'une « route royale » par laquelle, à partir d'axiomes extrêmement simples à énoncer (au contraire de ceux d'Euclide-Hilbert) tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux. Auparavant il fallait d'abord ériger tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de revenir vaille que vaille aux sacrosaints « cas d'égalité » ou « cas de similitude » des triangles, points d'appui de toute la technique traditionnelle.

Si surprenant que cela puisse paraître au non-initié, les mathématiciens professionnels sont depuis longtemps familiers avec de tels phénomènes, où le remplacement d'un système d'axiomes par un système *équivalent*, mais mieux choisi, amène parfois des simplifications considérables. Ainsi, au lieu d'enseigner aux élèves des techniques inadéquates qu'il leur faudra oublier plus tard, il convient plutôt de leur présenter une théorie où tout s'ordonne naturellement autour de quelques idées clefs très simples.

Préface du Calcul Infinitésimal

On reproche souvent aux étudiants de ne plus savoir calculer. Pour les physiciens et les ingénieurs, la responsabilité en incombe à l'enseignement actuel des mathématiques. Certes, il est regrettable de voir en Faculté des Sciences un étudiant de seconde ou troisième année peiner pour faire un changement de variables ou une intégration par parties.

Pourtant, on ne doit pas opposer les « mathématiques modernes » aux « mathématiques classiques » ; en effet la mathématique actuelle, sans rupture profonde avec la tradition, a simplement développé en assez grand nombre des notions abstraites nouvelles, qui ont souvent permis de concentrer la recherche sur l'essentiel. Ainsi a-t-on pu progresser très sensiblement dans des domaines considérés encore comme inaccessibles il n'y a pas si longtemps (quant à faire de l'abstraction pour l'abstraction, c'est là un exercice tout à fait vain).

Grâce à cela l'enseignement des bases des mathématiques (en particulier en algèbre et en géométrie) a été débarrassé de notions devenues inutiles, voire nuisibles, et notamment simplifié. Cependant, le fondement de l'Analyse moderne reste le Calcul infinitésimal, merveilleux outil forgé au cours des trois derniers siècles, sans lequel il serait illusoire d'aborder l'Analyse fonctionnelle la plus récente.

Mais jusqu'à cette année, entre un enseignement secondaire par trop sclérosé, et celui de l'Analyse moderne que dispensent les Facultés (en liaison étroite avec la recherche, pour assurer à celle-ci une préparation efficace), l'étudiant disposait d'une seule année d'initiation au Calcul infinitésimal classique et à ses techniques. - - - - -

- - - - - Etalés sur deux ans, les nouveaux programmes devraient fournir désormais une solide base technique, et permettre ensuite d'assimiler vraiment les notions plus abstraites. Y sont inclus, notamment

en seconde année, des éléments essentiels et assez accessibles de l'Analyse classique, comme la théorie des fonctions analytiques et des équations différentielles. C'est d'abord à ces techniques fondamentales que l'ouvrage est consacré (les bases du Calcul différentiel et intégral, enseignées en première année du premier cycle, étant supposées connues).

S'il est donc nécessaire de « savoir calculer » avant d'accéder à l'Analyse moderne, il faut distinguer en fait entre deux types de calcul : il y a en premier lieu le « calcul algébrique », qui permet, en un mot, d'établir des *égalités*; le prototype en est fourni par les formules de résolution d'équations (les « closed formulas » des Anglo-Saxons), qui ne sont pas, comme d'aucuns le croient, la seule raison d'être des mathématiques.

L'Analyse connaît également ce genre de relations, souvent de grande importance, comme par exemple la formule de Cauchy ou le développement en série de Fourier. Ce n'est pourtant pas là l'essence du second type de calcul, le Calcul infinitésimal; pour les physiciens, et ils ont raison d'y insister, un théorème est sans intérêt s'il ne permet pas le calcul numérique des nombres ou des fonctions que l'on étudie; à leurs yeux les « théorèmes d'existence » des purs mathématiciens sont absolument sans valeur. Mais par le calcul numérique on n'obtient que des approximations; c'est par un procédé de calcul approché (le mathématicien recherchant une approximation arbitrairement petite, l'utilisateur se contentant de beaucoup moins), que l'on peut déterminer un nombre réel. Comme l'enseignement des mathématiques, dans le premier cycle, est destiné aussi bien aux futurs physiciens et chimistes qu'aux mathématiciens, cet aspect de l'Analyse est particulièrement développé dans l'ouvrage : le calcul numérique proprement dit n'est pas abordé dans ce volume, mais on s'est efforcé d'éviter toute notion qui ne soit susceptible d'évaluation numérique, et d'indiquer systématiquement les moyens théoriques d'exécuter ces calculs.

On aurait d'ailleurs tort de mépriser le caractère concret du Calcul infinitésimal; pour acquérir le « sens de l'Analyse », indispensable jusque dans les spéculations les plus abstraites, il faut avoir appris à distinguer ce qui est « grand » de ce qui est « petit », ce qui est « prépondérant » et ce qui est « négligeable ». Le Calcul infinitésimal, tel qu'il est présenté dans ce livre, doit permettre de manier les *inégalités* bien plus que les égalités, et il pourrait être résumé en trois mots :

MAJORER, MINORER, APPROCHER

Il ne faudrait pourtant pas le réduire, par commodité, à une série de procédés mécaniques, ne réclamant aucune compréhension de leurs utilisateurs. Si par l'usage, par la multiplicité des exemples concrets, on acquiert une connaissance intuitive du mécanisme des opérations, le sens de l'Analyse n'est obtenu que lorsqu'on sait donner des définitions précises des notions que l'on emploie et s'en servir pour bâtir des démonstrations correctes.

Il peut paraître excessif, aux yeux des physiciens, de vouloir toujours démontrer des résultats en apparence évidents; de fait, on peut avoir intérêt, lorsqu'on débute, à admettre des résultats plausibles sans perdre de temps à une démonstration délicate. Cet ouvrage admet donc sans preuve un certain

nombre de théorèmes de base de l'Analyse; le cas échéant, des démonstrations longues et difficiles sont imprimées en petits caractères, permettant ainsi de s'en dispenser en première lecture.

On ne peut cependant pas suivre ces physiciens lorsqu'ils tiennent pour « évident » ce qui ne l'est pas du tout, trop confiants dans une intuition qui peut induire lourdement en erreur. Il n'est pas nécessaire, pour mettre en défaut des résultats qu'ils admettent sans discussion, d'utiliser des fonctions aussi « monstrueuses » que les fonctions continues sans dérivée; le « phénomène de Runge » (chap. IX, Appendice) montre que le procédé classique d'interpolation polynomiale peut fort bien diverger pour des fonctions tout à fait « régulières »; et il y a des fonctions *analytiques* pour $|z| < 1$, *continues* dans tout le disque $|z| < 1$, et qui pourtant transforment le cercle $|z| = 1$ en une courbe de Peano remplissant un carré.

Admettre trop facilement, c'est donc prendre des risques; le chercheur scrupuleux apporte en fait un soin extrême à s'assurer de la correction de ses mesures, écartant d'emblée les interprétations hasardeuses. Les mathématiques exigent la même rigueur, et leur enseignement ne peut s'accommoder du vague et de l'à peu près.

Mathématiques et imagination

Jean Dieudonné : choix d'œuvres mathématiques

Tome 1 Hermann 1981

L'abstraction et l'intuition mathématique

Résumé

La qualité essentielle d'un mathématicien est l'imagination; la logique ne sert qu'à mettre les démonstrations sous une forme irréfutable, elle est incapable de les suggérer. L'imagination se fonde sur une sorte d'« intuition » des objets mathématiques étudiés, mais cela n'a que très peu de rapport avec ce qu'on appelle d'ordinaire l'« intuition sensible », les objets mathématiques considérés étant le plus souvent l'aboutissement d'un long processus d'abstraction qui leur ôte toute possibilité de représentation concrète. Cette « intuition » mathématique est avant tout le résultat d'une longue familiarité avec le sujet étudié; mais en outre il peut s'opérer des « transferts » d'intuition d'une théorie à une autre; on en donne quelques exemples qui font ressortir la fécondité de tels transferts.

Tous les mathématiciens sont d'accord sur le rôle fondamental que joue l'imagination dans la création mathématique. La logique est un outil indispensable et ennuyeux (on sait, d'ailleurs, que les mathématiciens ne l'apprécient pas beaucoup en général); il faut savoir la manier proprement parce qu'elle permet de suivre et de vérifier une démonstration... mais non de l'inventer.

Or, comment s'invente une démonstration? C'est un processus qui a été bien décrit par Poincaré dans une page célèbre: l'imagination présente au mathématicien, qui se trouve en face d'un problème, une quantité de combinaisons possibles de faits connus, de théorèmes connus, et la plupart ne conduisent à rien. Lorsque, par hasard, le mathématicien tombe juste, on dit qu'il a eu une bonne intuition ou qu'il a été bien guidé par son intuition. Mais dès qu'on parle d'intuition, il y a un malentendu qui surgit aussitôt, étant donné que le mot a déjà une signification — assez vague d'ailleurs — dans le langage courant, touchant les objets ou les phénomènes qui tombent sous nos sens; et ceci nous amène directement au cœur du problème qui est abordé dans ce colloque.

Personne évidemment ne songe à nier que l'origine des notions mathématiques de base, telles que le nombre ou l'espace, doive être cherchée dans notre expérience sensible. A partir de l'âge de douze ans environ, si j'en crois les psychologues professionnels, les petits nombres entiers ou les relations spatiales simples (position, grandeur, etc.) peuvent être considérés comme des notions expérimentales stables et communes à tous les individus normaux et c'est cela qui forme le substratum des notions mathématiques correspondantes. Seulement il faut tout de suite observer une chose, sur laquelle on n'insiste pas assez à mon avis, c'est que les objets mathématiques,

qui prétendent rendre compte de ces concepts expérimentaux, sont doués par les mathématiciens de propriétés qui sortent très visiblement du champ de l'expérience. Je citerai comme exemple le nombre entier arbitraire: je doute que quelqu'un ait une intuition sérieuse d'un nombre entier supérieur à dix (j'entends par là l'intuition immédiate; il y a, je crois, des expériences psychologiques dans lesquelles on projette un certain nombre de points sur un tableau et il s'agit de dire de suite, sans compter, combien il y a de points; je crois qu'on ne dépasse jamais 7 sans se tromper). L'élaboration de cette idée du nombre entier arbitraire, du nombre qu'on peut continuer indéfiniment; l'axiome d'Archimède qui dit que si on a une règle d'un mètre et qu'on la juxtapose indéfiniment, on arrivera un jour à dépasser Sirius; voilà visiblement des conceptions qui n'ont rien d'expérimental. L'existence de la borne supérieure, l'axiome des intervalles emboîtés, qui dit que quand on rapetisse indéfiniment un intervalle, il y a toujours un point commun à tous ces intervalles, sont strictement en dehors de l'expérience. La même remarque vaut pour le postulat d'Euclide.

Après deux siècles de réflexions sur ces questions-là, nous savons maintenant que les axiomes sont des choix qui ont été opérés assez arbitrairement par les mathématiciens pour des raisons de commodité à la Poincaré ou d'esthétique; ils ne sont nullement imposés de l'extérieur par des phénomènes ou par l'intuition sensible que nous pouvons en avoir. D'ailleurs, l'histoire montre que plusieurs aspects de cette intuition sensible peuvent entrer en conflit lorsqu'il est question de choisir. Monsieur Hirsch a rappelé que les Pythagoriciens étaient conduits à considérer que la droite n'était pas la droite réelle à notre sens habituel, mais la droite rationnelle. Pourquoi y étaient-ils conduits? A cause de la mesure: on a deux longueurs et il est tout à fait naturel de penser qu'il y a une commune mesure. Cela était parfaitement logique; seulement on est entré en conflit avec une autre partie de l'intuition: quand on a voulu faire de la mesure des longueurs et de la géométrie plane, on s'est aperçu qu'il y avait des longueurs — comme la diagonale du carré — qui ne répondaient pas à cette exigence. Il a donc fallu choisir à ce moment-là si on allait faire de la géométrie plane où la diagonale du carré a une longueur, ou bien dire que la diagonale du carré n'a pas de longueur. (On pourrait très bien admettre cela d'ailleurs. La géométrie sur le corps des rationnels est une géométrie parfaitement raisonnable; seulement il y a un certain nombre de choses qui ne sont pas vraies dans cette géométrie.)

Autrement dit donc il y a un certain nombre de raisons qui sont dues au développement historique des mathématiques et qui ont conduit les mathématiciens à ajouter à des notions, qui sont *grosso modo* expérimentales, des exigences qui ne le sont pas du tout et qui s'ajoutent comme axiomes supplémentaires aux notions que nous avons choisi de mettre à la base. Après quoi il n'est naturellement pas du tout extraordinaire — bien que cela ait beaucoup choqué les gens à l'époque — que l'intuition sensible des objets en question, les nombres réels pour commencer, soit en fait totalement inexistante dans certains cas, ou alors insuffisante ou fallacieuse. Elle est inexistante dans le cas des nombres arbitrairement grands cité plus haut: si on avait une intuition immédiate des entiers arbitrairement grands, on saurait faire la théorie des nombres alors que précisément on ne le sait pas et qu'on n'y arrive qu'avec beaucoup de peine et en faisant appel à toutes sortes de ressources extérieures. Personne ne peut dire qu'il ait l'intuition que le théorème de Fermat est vrai ou faux. Quelquefois l'intuition qu'on peut avoir

de certaines notions à partir des axiomes, donne une idée de démonstration. L'exemple classique est le théorème de Bolzano disant qu'une fonction continue ne peut changer de signe sans s'annuler. On en a une intuition géométrique assez nette et elle donne même une idée de démonstration. Mais si on essaye une démonstration du théorème de Jordan qui est tout aussi intuitif, on se rend compte que l'intuition en est trompeuse. Et puis il y a, bien entendu, des objets mathématiques totalement non intuitifs, les monstres classiques: la courbe de Peano; le continu de Brouwer qui est frontière de trois domaines à la fois dans le plan; le collier d'Antoine qui est un ensemble parfait discontinu, mais tel qu'on peut trouver une courbe que l'on ne peut déformer sans le traverser. D'ailleurs, sans aller aussi loin on peut citer des exemples de fausse intuition, comme la fameuse figure par laquelle on veut démontrer que tout triangle est isocèle. Si l'on s'arrange pour que le point d'intersection de la médiatrice et de la bissectrice soit à l'intérieur du triangle (il ne l'est évidemment pas), on peut montrer facilement que le triangle est isocèle. Cela montre bien que l'intuition spatiale que nous pouvons avoir de la géométrie élémentaire peut être fallacieuse.

Il ne faut donc pas se laisser abuser; même pour des notions qui semblent proches de l'intuition sensible, les objets mathématiques sont au fond tout à fait différents de ce que nous croyons qu'ils sont. Il y eut là une source d'étonnement considérable pour la plupart des mathématiciens du 19^e siècle qui étaient persuadés que les notions qu'ils associaient aux nombres réels allaient de soi et ne pouvaient conduire à des résultats extravagants comme la courbe de Peano.

Nous ne nous étonnons plus de telles situations. C'est que, depuis la fin du 18^e siècle, les mathématiciens ont brisé le cadre classique du nombre et de l'espace et ont commencé à traiter d'objets qui n'ont aucune contrepartie sensible. On n'a jamais vu un groupe, un anneau, un corps, un module. La géométrie non euclidienne et toutes les autres géométries, les espaces à n dimensions, les nombres p -adiques, les variétés différentiables abstraites sont des créations de mathématiciens. Comment peut-on encore parler d'intuition pour ces objets? La réponse à cette question est certainement difficile à formuler parce qu'il s'agit d'un phénomène entièrement subjectif. Chaque mathématicien se fait une image mentale personnelle qui est à peu près incomparable à celle des autres. Aussi l'analyse que je vais essayer de donner est fortement liée à mes propres images mentales; il ne peut en être autrement et je n'ai pas la prétention d'énoncer des vérités générales, mais simplement de tenter de comprendre certains processus mentaux que je crois tout de même *grosso modo* communs à beaucoup de mathématiciens.

Tout d'abord il y a une constatation générale et totalement banale. C'est que l'intuition d'un sujet mathématique s'acquiert progressivement et est avant tout fonction de la familiarité que l'on a avec le sujet. Que fait le mathématicien quand il est placé devant une situation toute nouvelle qu'il n'a jamais étudiée, qu'il commence à travailler? Le plus souvent il ne sait même pas quelles questions se poser ou il se pose des questions absurdes. Ici encore l'exemple typique est celui de Poincaré. (On a la chance que Poincaré, qui a été le plus grand mathématicien de son temps, ait, de plus, bien voulu noter de façon très précise ses impressions de recherche.) Quand Poincaré a commencé ses travaux sur les fonctions automorphes, il cherchait à démontrer qu'il n'y en avait pas en dehors de celles qui étaient très connues (les fonctions modulaires entre autres); c'est ce qu'il dit lui-même dans son livre.

Cela prouve jusqu'à quel point même les plus grands mathématiciens peuvent s'engager dans des directions complètement absurdes. Poincaré s'en est aperçu et c'est justement en cela qu'il avait une grande intuition comme on dit, car, quand on étudie une question, petit à petit on se sent en pays de connaissance; par accoutumance, on finit par deviner ce qui doit se passer quand on a un objet mathématique devant soi et par imaginer quel genre d'outil il faut utiliser pour attaquer telle ou telle question; graduellement on cesse de commettre les erreurs ridicules qu'on a faites au début. On finit par avoir une certaine habitude du sujet et, si on a de la chance, on réussit à attaquer le problème et à le résoudre.

C'est évident et c'est même une banalité de dire que l'intuition résulte tout simplement de la familiarité avec le sujet. Je crois qu'il y a des cas extrêmes où il n'y a rien d'autre que la familiarité parce qu'il y a des cas où il s'agit d'objets entièrement abstraits n'ayant aucune parenté avec d'autres notions mathématiques. Pour moi, l'exemple typique (et où la question personnelle joue) est tiré d'une théorie où je n'ai jamais travaillé moi-même: la théorie des groupes finis. Un groupe fini est un objet qu'on ne voit nulle part; on n'en a aucune espèce d'intuition. Les personnes travaillant sur ces questions finissent par en avoir une telle familiarité que pour eux apparemment les notions abstraites de la théorie des groupes ont un sens.

La première conclusion que j'en tirerai, c'est qu'il n'y a certainement pas une intuition en mathématiques; il y en a toute une série de fort diverses avec des liens inattendus. La deuxième, c'est que les intuitions mathématiques ne sont pas du tout stables; elles se modifient sans cesse par de nouveaux apports, de nouveaux résultats, de nouvelles idées. Presque tous les ans, il y a un jeune mathématicien de génie qui sort une nouvelle manière de transférer une intuition d'un domaine dans un domaine complètement différent. Enfin, troisièmement, et ceci rejoint le titre de mon exposé, c'est que les progrès de l'intuition — contrairement à ce qu'on pourrait croire — vont de pair avec les progrès de l'abstraction. Plus les choses sont abstraites, plus elles fournissent l'intuition. Pourquoi? Parce que l'abstraction élimine tout ce qui est contingent dans une théorie. Si vous faites l'abstraction proprement, si vous êtes guidés par un flair (une intuition si vous voulez), vous avez éliminé les rapports contingents. Qu'est-ce qui reste? Il nous reste le squelette et, dans ce squelette, vous arrivez quelquefois à déceler des structures que vous n'auriez pas songé à mettre en évidence autrement. Si vous n'aviez pas fait l'effort d'abstraction préalable, les arbres vous auraient caché la forêt, les détails vous auraient empêché de voir ce qu'il y avait derrière ce que vous voyez là. Donc, je crois, et tout ce que j'ai dit devrait en servir d'exemple, que les progrès de l'intuition mathématique telle que j'ai essayé de la définir, sont toujours allés de pair avec les progrès de l'abstraction mathématique. C'est peut-être pénible pour les personnes qui veulent s'y initier, mais je ne crois pas qu'on puisse y échapper: c'est cela vraiment, je crois, le fond de l'intuition mathématique.

BONNES VIEILLES PAGES

Nicolas Chuquet (1445? - 1500) est l'auteur du manuscrit, daté de 1484, intitulé *Le Triparty en la science des nombres* qui ne sera publié qu'en 1880.

Nous vous proposons un extrait dans lequel Chuquet expose une méthode d'extraction des racines carrées incommensurables. Cette méthode repose sur la propriété suivante:

deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ formant un encadrement de la racine cherchée,
le nombre $\frac{a+c}{b+d}$ permettra de définir un meilleur encadrement.

Le procédé est assez fastidieux, mais la qualité des approximations fournies par Nicolas Chuquet n'en est que plus remarquable.

A ce propos, Tannery écrit un commentaire concernant cet extrait du texte de Chuquet. Nous vous proposons donc l'intégralité de cet article paru dans la "Bibliotheca Mathematica, n° 1 de 1887", dans lequel il montre que la méthode fournit les réduites successives de la fraction continue qui représente la racine cherchée, ainsi que les "fractions convergentes intermédiaires". Tout en signalant que Chuquet ne pouvait démontrer la convergence de sa méthode, il souligne que celui-ci n'interrompt son calcul qu'en possession d'une réduite (1).

La suite de son article concerne l'influence qu'aurait pu exercer le procédé de Nicolas Chuquet dans l'invention des fractions continues ainsi que l'existence de méthodes équivalentes, antérieure au *Triparty*.

Philippe Brin

(1) La théorisation des fractions continues est due à Euler et Lagrange.
voir – l'Encyclopédie Universalis : approximations diophantiennes, nombres réels.
– l'article de François Jaboeuf dans les n° 1- 2- 3 de Quadrature.

LE TRIPARTY

EN LA SCIENCE DES NOMBRES

PAR MAISTRE NICOLAS CHUQUET PARISIEN

PUBLIÉ D'APRÈS LE MANUSCRIT FONDS FRANÇAIS N° 1346

DE LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE DE PARIS

ET PRÉCÉDÉ D'UNE NOTICE

PAR M. ARISTIDE MARRE

1881

¶ La rigle des nombres moyens.

Este rigle sert a trouuer tant de nombres moyens entre deux nombres prochains que lon veult. Par le moyen dicelle se peult trouuer plusieurs nombres et faire mains calcules que par la rigle de troys ne par vne posicion ne par deux posicions ne se peuvent trouuer. Et pour ceste rigle entendre et scauoir pratiquer lon doit sauoir que $\frac{1}{2}$. est le premier et le comancement entre les nombres routz et dicellui sourdent et saillent deux progressions naturelles dont lune progredist en augmentant comme $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{8}$. $\frac{7}{16}$. ec. et lautre progredist en diminuant comme $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. ec. Lesquelles choses entendues sens la Regle.

¶ Numerateur avec numerateur se adioustent et denoiateur avec denoiateur. Cest a entendre que quant entre deux nombres entiers prochains lon veult trouuer le premier moyen. Au moindre entier lon doit adioster $\frac{1}{2}$. et ainsi lon aura vng nombre moyen plus grant que le moindre extreme et mineur du maieur extreme. Côme entre 3. et 4. Le nombre moyen et le premier si est $3\frac{1}{2}$. Et qui plusieurs moyens voudroit trouuer entre 3. et $3\frac{1}{2}$. lon doit a 3. adioster $\frac{1}{4}$. ou $\frac{1}{8}$. ou $\frac{1}{16}$. ec. côme 3. $\frac{1}{4}$. $3\frac{1}{4}$. $3\frac{1}{8}$. ec. Et tant plus lon progredist par ceste progression tant plus lon saproche du mineur extreme qui est 3. ¶ Et qui plusieurs moyens entre $3\frac{1}{2}$. et 4. voudroit auoir Il conuiendroit adioster a $3\frac{1}{2}$. ou $\frac{1}{4}$. ou $\frac{1}{8}$. ec. et ainsi tant plus lon progrediroit tant plus lon sapprocheroit du maieur extreme qui est 4. Et par ainsi entre deux nombres entiers prochains Innumables moyens se peuvent trouuer les vngs declinans au mineur extreme et les aults tendens au maieur. Et encôres entre deux moyens prochains Innumables moyens se peult trouuer tendens pareillemt a tel extreme que lon veult En adioustant numerateur avec numerateur et denoiateur avec denoiateur côme dit la rigle Sicôme qui entre $3\frac{1}{2}$. et $3\frac{1}{4}$. voudroit trouuer vng moyen Il conuient adioster .1. avec .1. qui sont les deux numerateurs et montent 2. pour numerateur et puis 3. avec 3. qui sont les deux denoiateurs montent 3. pour denoiateur. Ainsi Jay $3\frac{3}{4}$. pour moyen entre $3\frac{1}{2}$. et $3\frac{1}{4}$. Car $3\frac{3}{4}$. est plus de $\frac{1}{4}$. et moins de $\frac{1}{8}$. Enco-

res qui entre $.3. \frac{1}{2}$. et $.3. \frac{1}{3}$. voudroit trouuer vng moyen conuient faire come dit la rigle et lon aura $.3. \frac{1}{4}$. Et qui entre $.3. \frac{1}{4}$. et $.3. \frac{1}{5}$. voudroit trouuer vng moyen Il conuient negocier come dit la rigle et lon aura $.3. \frac{1}{7}$. Et par ceste maniere lon peult continuer a linquision des moyens Jusques a ce que lon ayt trouue cellui que lon serche.

¶ L'extraction des racines Imparfaictes.

¶ Comme deuant a este dit tous nombres ne sont pas vraz quarrez en tant que deulx lon ne peult auoir racine secõde precise. Car leurs racines multipliees en elles montent tousiours plus ou moins que leurs nombres dont elles

sont racines Et pourtant sont elles dictes Racines Imparfaictes dont l'extraction dicelles nest que labeur sans vtilite. Neantmoins pour la perfection de ce liure est mise vne maniere de les s̃cher tant prochaines de perfection quil est possible. Et pour entrer en la pratique Il conuient premier scauoir que pour s̃uir a ce cas Ilz sont deux manieres de progressions cestas̃ pgression en $.32.$ augmẽla^{re} come $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$. etc. et pgression en diminucion cõe. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. etc.

¶ Ores pour extraire toutes racines Imparfaictes lon peult faire en ceste maniẽ. Comme par exẽple qui voudroit extraire la racine. seconde Imparfaicte de $.5.$ Conuient besongner p̃mierẽment en la forme et maniẽ deuant dicte es nombres quarrez en diuisant les figures du nũbre ppose de deux en deux se tant en ya et negocier ne plus ne moins que deuant est dit. ¶ Doncques la racine de $.5.$ est $.2.$ car $.2.$ foiz $.2.$ font $.4.$ et restent encores $.1.$ Puis que ainsi est que $.2.$ pour racine ne souffisent pas pour appcher souffisamment de $.5.$ Et aussi qui prendroit $.3.$ po^r racine Il prendroit trop. Et pour tant la 3^e . de $.5.$ est vng c̃tain nombre moyen entre $.2.$ et $.3.$ Et pour icellui trouuer lon doit vs̃er de la rigle des nombres moyens mise a la fin de la p̃miere partie de ce liure et prendre pour le premier moyen. $.2 \frac{1}{2}$. qui multipliez en soy montent. $5 \frac{1}{4}$. qui sont $\frac{1}{4}$. plus de $.5.$ Et pourtant prandrons moins en pcedant par la pgression de diminucion et essayerons si $.2 \frac{1}{3}$. multipliez en soy montent plus ou moins de $.5.$ Or est Il ainsi quilz montent $.5.$ moins $\frac{2}{9}$. Maintenant que nũ auons trouue deux racines dont lune fait plus et lautre moins Il nous conuient trouuer vng nombre moyen entre $.2 \frac{1}{3}$. et $2 \frac{1}{2}$. en adioustant numẽrateur avec numẽrateur et denofate^r. avec denofateur et en vient $.2 \frac{2}{3}$. Ores essaye ta racine en multipliant $.2 \frac{2}{3}$. en soy et trouueras $.5.$ moins $\frac{4}{9}$. Conuient donc trouuer vng aut^r nombre moyen entre $2 \frac{1}{3}$. et $2 \frac{1}{2}$. en adioustant cõme dessus et lon aura $2 \frac{1}{4}$. qui multipliez en soy montent $.5.$ moins $\frac{1}{16}$. Et par ceste maniere peulx pceder en adioustant le moins avec le plus. ou le plus avec le moins Jusques a ce que lon sappche bien pres de $.5.$ vng petit plus ou vng petit moins et tant quil souffise. ¶ Et doit on scauoir que tant plus lon continueroit par ceste maniẽ tant plus pres de $.5.$ lon sappcheroit. $.33.$ Mais Jamais on ne lattaindroit p̃cisemẽt | ¶ Et de tout ce sensuyt la pratique en laquelle est trouue que la racine de $.5.$ bonne et souffisante est $.2 \frac{11}{15}$. laquelle racine multipliee en soy produyt $.5.$ plus $\frac{1}{1515}$.

Par. 2.	$\frac{1}{2}$.	plus	$\frac{1}{4}$.
Par. 2.	$\frac{1}{3}$.	moins.	$\frac{1}{9}$.
Par. 2.	$\frac{2}{3}$.	m̃.	$\frac{4}{9}$.
Par. 2.	$\frac{1}{4}$.	m̃.	$\frac{1}{16}$.
Par. 2.	$\frac{3}{4}$.	m̃.	$\frac{9}{16}$.
Par. 2.	$\frac{1}{5}$.	m̃.	$\frac{1}{25}$.
Par. 2.	$\frac{4}{5}$.	pl'	$\frac{16}{25}$.

Par. 2. $\frac{13}{19}$.	m. $\frac{3}{141}$.	¶ Et qui voudroit sercher plus auant Il trouueroit par .2. $\frac{131}{1900}$ pl ² $\frac{1}{1311000}$.
Par. 2. $\frac{13}{19}$.	m. $\frac{6}{1401}$.	
Par. 2. $\frac{13}{19}$.	m. $\frac{5}{1761}$.	
Par. 2. $\frac{16}{19}$.	m. $\frac{2}{1931}$.	
Par. 2. $\frac{19}{19}$.	pl ² . $\frac{9}{11441}$.	
Par. 2. $\frac{19}{19}$.	pl ² . $\frac{1}{19361}$.	

¶ Encores cy apres sont mises les racines Imparfaictes de plusieurs nombres Lesquelles par la rigle des moyens ont este trouuees come la dessus d^o la premiere est la racine de 2. qui est $\frac{169}{101}$. qui multipliee en soy monte 2. plus $\frac{1}{1311000}$.

$\sqrt{3}$ de .3. est .1. $\frac{321}{780}$ plus $\frac{1}{1011000}$.
 $\sqrt{3}$ de .3. est .1. $\frac{161}{642}$ plus $\frac{1}{1011000}$.
 $\sqrt{7}$ de 7. est .2. $\frac{7271}{12192}$ plus $\frac{1}{133644000}$.
 $\sqrt{3}$ de .3. est .2. $\frac{943}{1129}$ plus $\frac{1}{1111731}$.
 $\sqrt{10}$ de 10. est .3. $\frac{1105}{2632}$ plus $\frac{1}{71960000}$.
 Vel sic $\sqrt{10}$ est .3. $\frac{221}{1105}$ moins $\frac{1}{1971015}$.
 $\sqrt{11}$ de .11. est .3. $\frac{179}{1107}$ plus $\frac{1}{1111000}$.
 $\sqrt{12}$ de .12. est .3. $\frac{121}{390}$ plus $\frac{1}{1311000}$.
 $\sqrt{13}$ de .13. est .3. $\frac{109}{186}$ plus $\frac{1}{311000}$.
 $\sqrt{14}$ de .14. est .3. $\frac{267}{1106}$ plus $\frac{1}{1291110}$.

¶ Des nombres routz aucuns sont quarrez de la partie du numerateur tant. 3. seulement come $\frac{14}{19}$. Aucuns de la partie du denomiateur come $\frac{17}{19}$. Et daultres sont qui ne sont quarrez ne dune part ne daultre come $\frac{3}{7}$. Et daultres sont qui sont quarrez de lune partie et de lault come $\frac{1}{5}$ donc si $\sqrt{5}$ est $\frac{2}{5}$ come cy dessus a este dit.

¶ La maniere dextraire les racines Imparfaictes de ceux qui ne sont quarrez ne dune part ne daultre si est que lon doit extraire la racine Imparfaicte du numerateur et celle du denoiateur par la forme et maniere que dessus est dit en lextraction de la racine de .6. Puis reduire lune contre laultre si elles sont distemblans et de la racine du numerateur faire numerateur et de celle du denoiateur faire denomiateur et sera fait.

¶ Pour euitter la peine et lennuoy que lon peult auoir pcher les racines de telz nombres qui ne sont quarrez ne dune part ne daultre lon peult faire quarre lunge ou laultre lequel que lon veut en ceste maniere comme de $\frac{1}{5}$. qui voudroit le faire quarre de la partie du numerateur fault multiplier 5. en soy monte .25. pour le numerateur qui est nombre quarre puis .5. fois .7. font .35. pour le denoiateur Et qui le voudroit faire quarre de la partie du denoiateur.

L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet.

Par PAUL TANNERY à Paris.

Dans son *Triparty*,¹ daté de 1484, et copié par ESTIENNE DE LA ROCHE dans son *Arithmétique* imprimée en 1520, NICOLAS CHUQUET a donné, pour le calcul des valeurs approchées en général, pour celui des racines carrées incommensurables en particulier, un procédé que l'on peut expliquer comme suit :

Soient $\frac{p_0}{q_0}$, $\frac{p_1}{q_1}$, deux valeurs approchées, l'une par excès, l'autre par défaut, on forme

$$p' = p_0 + p_1, \quad q' = q_0 + q_1,$$

et par l'élévation au carré, s'il s'agit de l'extraction d'une racine, ou par une substitution, dans le cas général, on vérifie si la nouvelle approximation $\frac{p'}{q'}$, qui est intermédiaire entre les deux précédentes, se trouve par excès ou par défaut. En la combinant ensuite par le même procédé avec celle des deux valeurs précédentes qui se trouve approchée en sens contraire, on forme de même une nouvelle valeur $\frac{p''}{q''}$, et ainsi de suite.

Supposons maintenant que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ soient deux réduites successives de la fraction continue qui représente le nombre incommensurable à calculer. Soit d'ailleurs $\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_0 + sp_1}{q_0 + sq_1}$, la réduite suivante; il est aisé de voir que le procédé donnera successivement les *fractions convergentes intermédiaires* entre $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$, fractions qui seront toutes approchées en sens contraire de $\frac{p_1}{q_1}$ et dans le même sens que $\frac{p_0}{q_0}$, jusqu'à ce que l'on arrive à $\frac{p_2}{q_2}$. Toutes ces fractions, y compris la réduite $\frac{p_2}{q_2}$,

seront donc successivement combinées avec $\frac{p_1}{q_1}$ et l'on arrivera ainsi, à la fin de ces combinaisons, à la valeur

$$\frac{p_0 + (s+1)p_1}{q_0 + (s+1)q_1} = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2},$$

c'est à dire à la première des fractions convergentes intermédiaires entre $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$. Cette première devra être combinée

avec $\frac{p_2}{q_2}$, et dès lors on aura de même toutes les convergentes suivantes, et ainsi de suite indéfiniment.

Or l'hypothèse que nous avons introduite, que l'on parte de deux réduites successives, s'applique au procédé de NICOLAS CHUQUET, celui-ci partant systématiquement des deux nombres entiers qui comprennent le nombre incommensurable à calculer. Ce procédé donne donc régulièrement *la suite complète des fractions convergentes intermédiaires et les réduites du développement de ce nombre en fraction continue.*

Si, en particulier, il s'agit de poursuivre l'approximation de la racine carrée d'un nombre entier A , jusqu'à l'obtention d'une solution de l'équation de Pell :

$$p^2 - Aq^2 = 1,$$

le procédé de NICOLAS CHUQUET conduira nécessairement à cette solution.

Il est clair que l'arithméticien qui nous a enseigné ce procédé, devait être incapable de démontrer la propriété que nous venons d'énoncer; mais il n'en est pas moins certain que le problème était posé pour lui, car, dans les exemples assez nombreux qu'il donne d'extractions de racines carrées, il s'arrête toujours à un reste ayant pour numérateur l'unité; d'un autre côté, comme il calculait effectivement tous les restes, il lui était facile de reconnaître empiriquement la périodicité des numérateurs.

Le procédé de NICOLAS CHUQUET a donc théoriquement une importance considérable, comme l'ont déjà reconnu M. SIEGMUND GÜNTHER¹ et M. LÉON RODET.² Toutefois en pratique, il est tellement fastidieux que, malgré sa publication par ESTIENNE DE LA ROCHE, il était permis de croire qu'il n'a jamais exercé une influence réelle.*

* Il convient de signaler que la méthode de CHUQUET a été men-

J'ai cependant trouvé un indice qui semble prouver le contraire et qui me conduit dès lors à modifier assez profondément certaines conclusions de mon essai: *Questions héroniennes*, inséré dans le Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 8., 1884, p. 329—344, 359—376.

J'y ai montré (pages 364—365), sur douze solutions d'équations de PELL signalées par M. PEROTT⁴ dans l'édition de 1534 du *Tratado subtilissimo de Arismetica y de Geometria* du dominicain JUAN DE ORTEGA, qu'elles pouvaient avoir été obtenues par l'application du procédé proposé par M. RADICKE.⁵ J'en ai conclu que l'existence de pareilles approximations ne pouvait suffire pour faire admettre l'emploi, par leurs auteurs, d'un autre procédé que celui-là, qui se déduit si simplement de la méthode que l'on est conduit à supposer comme connue des anciens, d'après les approximations héroniennes.

En dehors des douze approximations en question, j'ai fait quelques remarques sur une valeur fautive de $\sqrt{2000}$, indiquée par M. PEROTT comme se trouvant dans le même Traité d'ORTEGA.

Comme je le disais, la correction de cette valeur fautive, $44 \frac{2079}{2582}$, ne pouvait être qu'aventureuse. En dehors de la valeur que je supposais pouvoir être la véritable, il en était une autre, $44 \frac{2079}{2882}$, qui m'apparaissait comme étant *a priori* certainement plus probable.

Au moment où je communiquais cette seconde hypothèse à M. PEROTT, il constatait que c'était bien effectivement la valeur imprimée dans l'édition de 1534, tandis qu'il avait emprunté la fautive à l'édition de 1542.

Or cette valeur, $44 \frac{2079}{2882}$, comme approximation de $\sqrt{2000}$, est en fait très satisfaisante, sans qu'elle puisse être obtenue par le procédé RADICKE, pas plus que par aucun autre que je connaisse.

Elle est aussi par le géomètre français BUTÉON, dans l'ouvrage: *Logistica quæ et Arithmetica vulgo dicitur, in libros quinque digesta*. Lugduni, apud Gulielmum Rovillium M.D.L.IX., p. 76—77. BUTÉON applique la méthode à l'invention de $\sqrt{13}$; il trouve successivement

$$3\frac{1}{2} < \sqrt{13} < 3\frac{3}{4}$$

$$3\frac{1}{2} < \sqrt{13} < 3\frac{1}{2}$$

$$3\frac{1}{2} < \sqrt{13} < 3\frac{1}{2}.$$

Sous sa forme ci-dessus, elle ne paraît susceptible d'être obtenue directement que par des combinaisons assez improbables, qui supposent en tous cas la connaissance du procédé de NICOLAS CHUQUET;* mais ce même procédé permet de l'obtenir régulièrement sous la forme équivalente $44 \frac{189}{262}$.

Il y a donc là un indice plus ou moins grave de l'emploi par ORTEGA du procédé de NICOLAS CHUQUET; et cet indice se trouve d'autre part, corroboré par ce fait que, d'après son essence, le même procédé a pu servir au calcul des douze racines formant solution d'équations de PELL; qu'il donne enfin également les deux autres racines qui se rencontrent dans le même chapitre d'ORTEGA, et semblent, à première vue, calculées par la formule:

$$\sqrt{a^2 + r} \sim a + \frac{r}{2a}.$$

Ces deux racines sont:

$$\sqrt{9600} \sim 97 \frac{191}{194}, \quad \text{et} \quad \sqrt{4100} \sim 64 \frac{1}{32}.$$

La recherche de documents analogues, postérieurs à 1563, (date de la dernière édition d'ORTEGA), me paraît donc offrir un certain intérêt pour déterminer dans quelle mesure le procédé de NICOLAS CHUQUET aura pu continuer à être appliqué et dès lors servir à l'invention des fractions continues, invention à laquelle conduit immédiatement sa simplification.

Quant à l'origine de ce procédé, on peut aussi se demander si NICOLAS CHUQUET en est bien l'inventeur, comme il le dit. L'arithméticien du XV^e siècle a certainement eu assez d'originalité pour réduire au moins en règles systématiques une pratique d'essence en réalité très simple. Mais nous ne possédons, pour ainsi dire, aucune trace antérieure de l'emploi de telles pratiques. Si le procédé de NICOLAS CHUQUET permet d'obtenir, sauf trois,** toutes les racines héroniennes à faire entrer

* En appliquant ce procédé à l'extraction de $\sqrt{242000}$, on arrive à $484 \frac{2079}{262}$, et en divisant par 11, on retrouve la valeur d'ORTEGA.

** $\sqrt{43 \frac{11}{24}} \sim 6 \frac{111}{21326}, \quad \sqrt{356 \frac{1}{18}} \sim 18 \frac{111}{249},$
 $\sqrt{886 \frac{1}{16}} \sim 29 \frac{111}{2468}.$

en ligne de compte, si l'on pourrait l'appliquer aussi aux approximations d'ARCHIMÈDE, il ne m'en semble pas moins trop primitif d'une part, et de l'autre, trop opposé au principe de l'expression des fractions par des suites de quantités, pour que l'on doive croire qu'il ait été couramment pratiqué par les Grecs.

Comme fractions convergentes intermédiaires qui ne peuvent être fournies par des méthodes plus probables, on ne connaît guère que les approximations suivantes indiquées par M. SIEGMUND GÜNTHER.*

$\sqrt{2} \sim \frac{10}{7}$, supposée par M. CANTOR chez les Hindous, d'après une relation donnée dans les *Çulvasûtras*; (la déduction de cette valeur reste passablement douteuse).

$\sqrt{3} \sim \frac{12}{7}$, chez GERBERT.

Enfin la réduite $\sqrt{3} \sim \frac{7}{4}$, chez les Rabbins, d'ailleurs très rare, peut être assimilée aux approximations précédentes.

Ces indices sont insuffisants pour établir l'existence effective, avant NICOLAS CHUQUET, de pratiques ayant pu donner naissance à son procédé.

* *Le triparty en la science des nombres par maistre Nicolas Chuquet parisien* [publié par A. MARRE]. Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 13, 1880, p. 696—699.

* GÜNTHER, Analyse de l'ouvrage de TREUTLEIN, *Die deutsche Rechenkunst im XVI. Jahrhundert*. Zeitschr. f. d. Realschulwesen 2, 1877, p. 430.

* RODET, *Sur les méthodes d'approximation chez les Arabes*. Bullet. de la soc. mathém. de France 7, 1879, p. 162.

* PEROTT, *Sur une arithmétique espagnole du 16^{ème} siècle*. Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1882, p. 163—170.

* Voir GÜNTHER, *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden*. Abhandl. zur Geschichte der Mathematik 4 (Leipzig 1882, 8°).

* GÜNTHER, *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten*, p. 50.

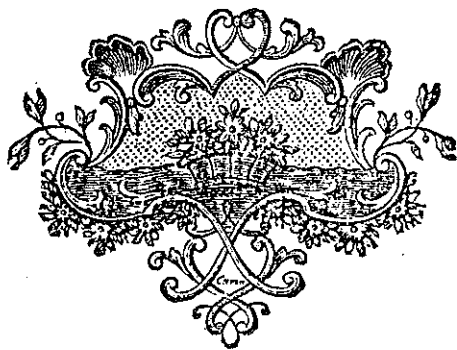
PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feu Madame la Marquise DU CHASTELLET.

TOME PREMIER.



A PARIS,

Chez { DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais,
LAMBERT, Imprimeur - Libraire, rue & à côté
de la Comédie Française, au Parnasse.

M. D. C C L I X.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÈGE DU ROI.

DANS NOS CLASSES

Une méthode de quadrature et sa légitimation par Isaac Newton.

Maryvonne Hallez

Cette activité menée en classe de Terminale A , comprend deux parties:
 -un devoir à faire à la maison intitulé "Une quadrature de parabole"
 -une lecture d'un texte de Newton avec des questions.

L'ensemble fut conçu comme travail préparatoire à la leçon sur l'intégration.¹

Le but du devoir était de démontrer que, pour x_0 fixé, l'aire $\mathcal{A}(x_0)$ limitée par la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'axe $(x'x)$ et la droite passant par le point $(x_0, 0)$, x_0 positif, vérifie l'encadrement

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} x_0^3 < \mathcal{A}(x_0) < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} x_0^3$$

La correction du devoir faite en classe se termina par le passage à la limite de l'encadrement ci-dessus pour obtenir l'égalité

$$\mathcal{A}(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} x_0^3 = \frac{x_0^3}{3}$$

Que l'aire curviligne limitée par la parabole d'équation $y = x^2$ soit donnée exactement par $\frac{x_0^3}{3}$ pour x_0 fixé et que la dérivée de la fonction $(x \rightarrow \frac{x^3}{3})$ donnant l'aire $\mathcal{A}(x)$ soit $(x \rightarrow x^2)$ relève presque de la magie pour les élèves bien qu'ils aient suivi apparemment sans difficultés la démonstration.

La deuxième partie du travail consista en la lecture des lemmes I et II du premier livre des "Principia" (Principes mathématiques de la philosophie naturelle) d'Isaac Newton en vue de généraliser un aspect de la démarche suivie dans la quadrature précédente et de lui donner une plus grande force de conviction dans l'esprit des élèves; Isaac Newton (1642 - 1727) est un des inventeurs du calcul infinitésimal, calcul de

¹ Les élèves avaient eu auparavant à démontrer de trois manières différentes l'égalité

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

dérivation et d'intégration; il écrit trois articles sur ce "nouveau calcul" qu'il élabore à partir de 1665. Son chef-d'oeuvre, les "Principia", paraît en latin en 1686 ; il est précédé d'une Ode à Newton écrite par le grand astronome Edmund Halley à qui Newton rend hommage dans sa préface pour l'aide précieuse qu'il lui a apportée; Halley conclut son ode par ces mots: "Aucun mortel, ne peut approcher les dieux de plus près."

Les "Principia" se divisent en deux livres dont les titres explicitent bien le but poursuivi par Newton

Livre I Le mouvement des corps.

Livre II Le système du monde et son traitement mathématique.

Il commence, à la manière d'Euclide, par donner les définitions, les lois et les axiomes sur le mouvement qui seront utilisés dans les deux livres des "Principia".

Le livre I débute par la donnée des lemmes I et II que nous allons lire qui sont l'exposé de la méthode qu'il a inventée. Comme dans tous les écrits fondateurs du calcul infinitésimal, le modèle des démonstrations pour calculer une aire est celui d'Archimède (3^{ème} siècle av. J.C.).

Dans une scholie du lemme XI, il écrit: *"J'ai commencé par ces Lemmes, pour éviter de déduire de longues démonstrations ad absurdum, selon la méthode des anciens Géomètres."*

Il se propose donc de simplifier les démonstrations par l'absurde tout en continuant à formuler géométriquement les preuves pour les rendre aussi "rigoureuses" que celle des anciens ;

Dans le scholie déjà cité il développe les principes de sa méthode:

"j'ai mieux aimé employer celle des premières et dernières raisons des quantités qui naissent et s'évanouissent; et j'ai commencé à faire voir, le plus brièvement que j'ai pu, ce que deviennent les quantités, lorsqu'elles atteignent leurs limites."

S'il nous faut attendre Augustin-Louis Cauchy (1798-1857) pour une définition du concept de limite faisant autorité dans la communauté mathématique, l'idée de limite est sous-jacente aux deux lemmes lus avec les élèves et explicitée par Newton lui-même comme nous venons de le lire.

Il ajoute: *"On peut dire, contre ce principe des premières et dernières raisons, que les quantités qui s'évanouissent n'ont point de proportion entre elles; parcequ'avant de s'évanouir, la proportion qu'elles ont n'est pas la dernière, et que lorsqu'elles sont évanouies, elles n'en ont plus aucune; Mais on pourrait soutenir par le même raisonnement qu'un corps qui parvient d'un mouvement uniformément retardé à un certain lieu où son mouvement s'éteint, n'a point de dernière vitesse..."* Il justifie ainsi sa méthode par cette analogie: la "dernière raison" des quantités étudiées est celle qu'elles ont au moment même où elles s'évanouissent ; avant l'"évanouissement", aussi près que l'on soit du terme du processus, aucune "proportion comme aucune vitesse ne peut être dite la dernière. Le mot "raison" est ici assez proche de l'idée de relation.

Après avoir établi ce principe, Newton encadre, suivant en cela le raisonnement d'Archimède, la surface s dont il cherche l'aire entre deux surfaces qu'il sait mesurer, l'une plus petite inscrite que l'on peut noter A' , l'autre plus grande circonscrite que l'on peut noter A'' . Les quantités A' et A'' sont telles que, comme le dit Newton, *"elles tendent continuellement à devenir égales"* ou ce qui a le même sens *"tendent à être en raison d'égalité"*.

De la "raison" d'inégalité $A' < A''$, l'augmentation du nombre de "cotés" des figures inscrite et circonscrite fait une raison d'égalité avec l'aire à calculer.

I- Problème: UNE QUADRATURE DE "LA" PARABOLE

A) Soient A et C les points de la parabole P d'équation $y = x^2$ d'abscisses respectives 1 et $1/2$, a et c leurs projections orthogonales sur (x'x); Soit $\mathcal{A}$ l'aire comprise entre la parabole, l'axe (x'x) et la droite (Aa).

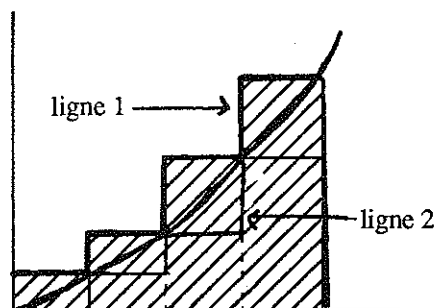
1. Comparer $\mathcal{A}$ et l'aire du triangle OAa. Déduisez-en une valeur approchée par excès de $\mathcal{A}$.
2. Comparer $\mathcal{A}$ et l'aire limitée par la ligne brisée OCA, l'axe (x'x) et la droite (Aa). Déduisez-en une autre valeur approchée par excès de $\mathcal{A}$.

B) Soient A_i les points d'abscisses respectives $\frac{i}{5}$, i entier compris entre 1 et 5 de la même parabole.

1. Tracez en noir la courbe représentative de f avec les points A_i dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 50 \text{ mm}$ et $\|\vec{j}\| = 50 \text{ mm}$.

2. Appelons ligne 1 la ligne brisée "circonsrite" au "segment de parabole" correspondant à la surface hachurée sur la figure et ligne 2 la ligne brisée "inscrite". Tracez en vert la ligne 1 et en rouge la ligne 2.

Calculez l'aire limitée par la ligne 1, l'axe (x'x) et la droite d'équation $x=1$.
même question pour la ligne 2.



N.B. ces aires sont la somme de l'aire des rectangles, vous pourrez donc utiliser $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Déduisez-en un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ limitée par la parabole, l'axe (x'x) et la droite d'équation $x=1$.

4. Reprenez les questions 1, 2 et 3 avec les points A_i d'abscisses respectives $\frac{i}{10}$, i entier compris entre 1 et 10.

5. Donnez les encadrements successifs que l'on peut ainsi obtenir de l'aire $\mathcal{A}$ avec les points A_i , i allant de 1 à n pour $n=10$, $n=25$, $n=100$, $n=1000$.

C) Soient A_i les points d'abscisses respectives $\frac{i}{n} x_0$ pour i entier allant de 1 à n.

1. Soient h_i la projection orthogonale de A_i sur (x'x), quelle est l'aire du rectangle R'_i dont trois sommets sont A_i , h_i et h_{i+1} ?
Quelle est celle du rectangle R_i dont trois sommets sont A_i , h_i et h_{i-1} ?

2. Quelle est la somme des rectangles R'_i , puis celle des rectangles R_i ?

(vous pourrez utiliser $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.)

3. Quel encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ pouvez vous en déduire?

D) Calculez $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$

II LECTURE DES LEMMES DE NEWTON.

A) Lemme II

(voir le texte ci-dessous)

Après une lecture individuelle du texte les élèves eurent à répondre par écrit aux questions suivantes :

1. Qu'est-ce qu'un lemme?
2. Comment comprenez vous le mot "raison" de la ligne 7?
3. Le mot raison ligne 18 a-t-il le même sens?
4. Pouvez-vous donner une formulation d'un lemme justifiant les trois dernières lignes?

Ce travail fut fait en classe, ne fut pas évalué mais conduisit à une mise en commun des réponses.

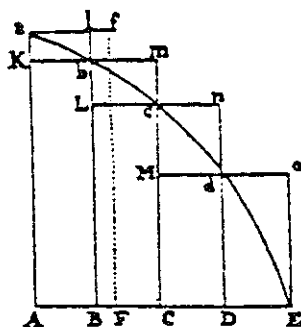
38 PRINCIPES MATHÉMATIQUES

LEMME II.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Si dans une figure quelconque $AacE$, comprise entre les droites Aa , AE , & la courbe acE , on inscrit un nombre quelconque de Parallélogrammes Ab , Bc , Cd , &c. compris sous les bases égales AB , BC , CD , &c. & sous les côtés Bb , Cc , Dd , &c. parallèles au côté Aa de la figure ; & qu'on acheve les parallélogrammes $akbl$, $bLcm$, $cMdn$, &c. qu'on diminue ensuite la largeur de ces parallélogrammes, & qu'on augmente leur nombre à l'infini : les dernières raisons qu'auront entr'elles la figure inscrite $AKbLcMdD$, la circonscrite $AalbmendoE$, & la curviligne $AabcdE$, seront des raisons d'égalité.

Car la différence de la figure inscrite & de la figure circonscrite, est la somme des parallélogrammes Kl , Lm , Mn , Do , c'est-à-dire (à cause de l'égalité de toutes les bases) que cette différence est égale au rectangle $ABla$ fait sur l'une des bases Kb & sur la somme Aa , de toutes les hauteurs ; mais ce rectangle, à cause que sa largeur diminue à l'infini, deviendra plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc (par le Lemme premier) la figure inscrite, la figure circonscrite, & à plus forte raison la figure curviligne intermédiaire seront à la fin égales. *C. Q. F. D.*



(Principes mathématiques de la Philosophie naturelle. Par Madame la Marquise du Chastellet Paris 1759)

Commentaires

Question 1 :

Les élèves n'avaient jamais rencontré le mot "lemme". La règle du jeu, donnée oralement, était d'essayer d'inventer une définition cohérente avec le contenu du texte.

Tous répondirent à la question, par exemple :

"D'après ce texte, un lemme est une sorte de théorème, une démonstration sur un principe de mathématique précis".

"D'après les trois dernières lignes, on sait qu'un lemme cherche à aboutir à un théorème, à un cas général de solution."

Question 2

Tous répondirent en utilisant des équivalents au mot "raison" : "rapport", "relation entre les figures" ...

Question 3

La réponse là encore fut unanime : le sens est différent ; "à plus forte raison" signifie "d'autant plus" ; "le mot raison a, ligne 18, un sens plus courant qui est de l'ordre de la logique et de l'argumentation permettant de dire que quelque chose est vrai".

Question 4

Une moitié de la classe seulement donna des réponses que nous lûmes à haute voix en classe:

"Si la différence entre les aires devient de plus en plus petite, elles tendent vers un rapport d'égalité".

"Si on augmente à l'infini, le nombre de rectangles, la limite de l'aire de ces rectangles est égale à l'aire sous la courbe"... .

Cette question avait pour but de permettre aux élèves de suivre la pensée de Newton en donnant eux-mêmes une formulation du lemme I avant de le lire. Il est à noter que le langage de Newton ne leur a pas paru obscur et que certains se l'approprièrent même remarquablement vite.

B.) Lemme I

(voir le texte page suivante)

Après la lecture individuelle du texte, les questions suivantes furent données aux élèves:

1. Quelle sorte de raisonnement utilise Newton dans ce lemme !
2. Quelle notion est utilisée par Newton et n'est pas apparue explicitement dans vos réponses ?
3. Etes-vous convaincu(e) par le raisonnement de Newton?

SECTION PREMIERE.

De la méthode des premieres & dernieres raisons employée dans tout cet Ouvrage.

LEMME PREMIER.

Les quantités & les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.



I on le nie, qu'on suppose qu'elles soient à la fin inégales, & que leur dernière différence soit D , puisqu'elles ne peuvent pas approcher plus près de l'égalité que de cette différence donnée D , leur différence ne fera donc pas plus petite que toute différence donnée, ce qui est contre l'hypothèse.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

(Principes mathématiques de la Philosophie naturelle. Par Madame la Marquise du Chastellet Paris 1759)

Commentaires

Les réponses données oralement furent l'occasion d'un débat. La lecture de ce lemme leur parut fort facile. Les élèves étaient déjà familiarisés avec le raisonnement par l'absurde et eurent pour la plupart la satisfaction de le reconnaître. Pour certains le lemme était l'expression d'une évidence, la démonstration leur semblait superflue. D'autres, peut-être impressionnés par la notoriété de Newton, justifièrent au contraire l'établissement du lemme; la discussion se poursuivit en répondant à la question 2 qui donna l'occasion de signaler l'importance du temps et du mouvement dans la pensée mathématique de Newton. A la question 3, la réponse affirmative fut unanime et ne donna lieu à aucun commentaire.

CONCLUSION

Une relecture des deux lemmes se fit à partir de la question suivante:

Par rapport à la quadrature de la parabole réalisée dans le travail précédent quel est l'élément nouveau qu'apporte la lecture de ces deux lemmes?

Le but était de montrer la différence entre une démonstration utilisant le calcul numérique avec un passage à la limite réalisé pour la quadrature de parabole et la démonstration géométrique de Newton utilisant une grandeur géométrique l'aire d'un rectangle dont "la largeur diminue à l'infini" et de convaincre les élèves qu'ainsi Newton avait permis la généralisation du calcul de l'aire sous une courbe représentative d'une fonction monotone positive quelconque.

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICÆ.

Autore *J* S. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos*
Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc. PRÆSES.*
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud
plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

THÉORIE
DES FONCTIONS ANALYTIQUES,
CONTENANT
LES PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL,
DÉGAGÉS DE TOUTE CONSIDÉRATION
D'INFINIMENT PETITS OU D'ÉVANOUISSANS,
DE LIMITES OU DE FLUXIONS,
ET RÉDUITS
A L'ANALYSE ALGÈBRE
DES QUANTITÉS FINIES;

Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut national.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE LA RÉPUBLIQUE.
Prairial an V.

L'ELABORATION DU CALCUL DES VARIATIONS ET SES APPLICATIONS A LA DYNAMIQUE

Florence Viot

1. Introduction

Le calcul des variations a pour principal but de résoudre le problème suivant : déterminer la courbe (ou la surface) qui rend minimale une intégrale donnée. Nous étudierons ici plus particulièrement le cas simple de la détermination de l'arc K défini par l'équation $y = \varphi(x)$, tel que $I = \int_K F(x, y, y')dx$ soit minimale. Se rattache également à cette question l'important problème dit des "isopérimètres", pour lequel on recherche l'arc K qui minimise l'intégrale précédente et qui vérifie de plus une contrainte du type $\int_K G(x, y, y')dx = \text{constante}$.

Dans cet exposé, je me propose de mettre en évidence les étapes essentielles de la genèse du concept de variation, jusqu'à l'élaboration formelle de la méthode analytique que Euler baptisa lui-même "calcul des variations" et à l'établissement de l'une des conditions nécessaires de ce problème, donnée par l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Nous montrerons enfin combien ce problème procède pour une large part de questions d'origine physique (optique et mécanique), et de quelle façon le calcul des variations a permis la mise en oeuvre d'une nouvelle formulation des principes fondamentaux de la mécanique, ouvrant ainsi le champ à ce qu'il est coutume de nommer maintenant les principes variationnels de la physique.

Notons enfin que le développement mathématique du calcul des variations n'est évidemment pas achevé avec l'établissement de la condition d'Euler-Lagrange, malgré le caractère fondateur de cette équation pour les travaux ultérieurs réalisés en physique. On se souviendra à cet effet des travaux de Legendre (1786) établissant un critère de discrimination entre maxima et minima à l'aide de l'étude de la seconde variation de l'intégrale, critère complété par Jacobi en 1837. On mentionnera également les travaux de Weierstrass (1815-1897) qui reformula l'ensemble des conditions nécessaires et établit pour la première fois une condition suffisante, travaux développés par la suite par Bolza et Hilbert.

2. Les premières mentions de concepts variationnels

Les premières questions de type variationnel étudiées sont sans conteste les problèmes d'isopérimètres. Chez les Grecs déjà, on trouve mention de la recherche de la ligne fermée la

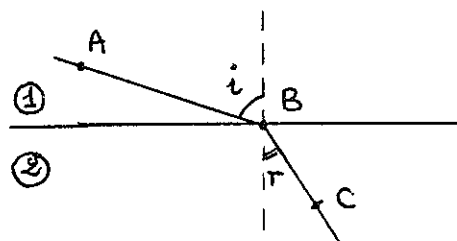
plus courte limitant une surface donnée et de celle des lignes de plus court chemin tracées sur des surfaces données (sphère, cylindre). Ces études perdurent au long des siècles, et sont essentiellement l'occasion de traitements géométriques. Cependant, les problèmes variationnels vont connaître un regain d'intérêt à partir du XVII^e S., lors du développement du calcul infinitésimal.

Citons par exemple, sans les développer, les travaux de Newton (1686) sur la détermination de la forme des surfaces de révolution des solides offrant une moindre résistance à l'avancement dans un fluide : problème dont Newton donnera la solution sans indiquer clairement la méthode utilisée.

a. Le principe de Fermat

Il est frappant de constater que le premier problème variationnel "moderne" posé l'a été en physique, de plus en Optique. Nous montrerons que, loin de constituer un avatar sans lendemain, cette question sera la pierre d'achoppement du développement des principes variationnels de la physique et que des mathématiciens comme Jean Bernoulli feront explicitement usage de sa résolution pour construire leur propre démarche.

Pierre de Fermat (1601-1665) se pose le problème suivant : démontrer à l'aide d'un principe physique clairement énoncé les lois de la réfraction d'un rayon lumineux (à la traversée d'une surface de discontinuité de l'indice). Descartes avait publié ces lois en 1637 dans sa *Dioptrique*, en les justifiant essentiellement à partir de l'analogie entre le trajet suivi par la lumière et la trajectoire d'une balle de jeu de paume et en postulant de plus que la vitesse de la lumière est d'autant plus grande que le milieu est plus dense. Ainsi en déduisait-il la relation $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, où le rapport n_1/n_2 apparaît comme étant égal au rapport des vitesses dans les milieux considérés v_1/v_2 .



Fermat, dans une lettre datée du 1^{er} Janvier 1662, propose une autre résolution qui se dégage tant de la méthode des analogies que de l'hypothèse sur les vitesses à laquelle il est farouchement opposé. Il pose alors comme principe que la lumière suit toujours le chemin qui minimise le temps mis pour aller d'un point à un autre, se référant en cela à une grande tradition philosophique des principes dit d'économie qu'il énonce explicitement : "*je reconnais...la vérité de ce principe, que la nature agit toujours suivant les voies les plus courtes*" (1657). Fermat est dès lors ramené à un simple problème de géométrie : étant donné deux points A, C et les vitesses dans les milieux considérés, trouver le point B tel que le trajet ABC soit minimal ; problème qu'il résoud facilement à l'aide de la méthode de maximis et minimis qu'il a développée quelques années auparavant. Il

en déduit, à son grand étonnement, une loi similaire à celle de Descartes sans se rendre clairement compte que dans sa démarche le rapport que j'ai noté (adoptant les conventions modernes) n_1/n_2 doit cette fois-ci être interprété comme identique au rapport v_2/v_1 .

Ainsi apparaît pour la première fois un principe physique spécifiquement variationnel, qui n'est pas d'ailleurs sans entraîner des difficultés philosophiques et épistémologiques certaines. Les cartésiens seront les premiers à dénoncer les aspects téléologiques de ce principe ; de plus le concept de variation en physique est assez délicat, puisqu'il suppose de comparer entre elles différentes trajectoires a priori envisageables (qualifiées généralement de virtuelles) alors qu'il n'existe qu'une seule trajectoire effectivement réalisable. Malgré toutes ces réticences, le principe de Fermat restera cependant un élément moteur dans le développement tant mathématique que physique du calcul des variations.

b. La brachystochrone

Le problème de Jean Bernoulli

En Juin 1696 paraît dans les *Acta eruditorum* un défi lancé par le mathématicien J. Bernoulli (essentiellement à l'adresse de son frère Jacques) et énoncé de la façon suivante :

"Etant donnés deux points A et B dans un plan vertical, déterminer la courbe AMB le long de laquelle un mobile M abandonné en A descend sous l'action de sa propre pesanteur et parvient à l'autre point B dans le moins de temps possible."

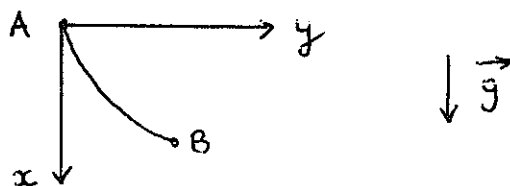
Plus loin, Bernoulli ajoute :

"bien que la droite AB soit le plus court chemin entre A et B, elle n'est cependant pas parcourue dans le temps le plus court ; et pourtant, la courbe cherchée est bien connue des géomètres ; je la nommerai si, avant la fin de l'année, personne d'autre ne l'a nommée."

Ce problème avait été énoncé pour la première fois par Galilée en 1638 dans les *Discorsi* où il affirmait de façon inexacte que la solution est un arc de cercle joignant les deux points considérés. En fait, au moment où paraît ce problème, Jean Bernoulli l'a déjà proposé à Leibniz par lettre séparée datée du 9 Juin 1696, lequel lui retourne aussitôt sa solution le 16 Juin sans qu'il soit d'ailleurs possible de savoir si Leibniz possédait ou non déjà la solution de cette question dans ses propres papiers avant de recevoir la missive de Bernoulli. Leibniz propose également de repousser la date d'expiration de ce défi en raison des délais de livraison des *Acta eruditorum* hors d'Allemagne. En mai 1697, sont finalement publiés dans cette même revue les solutions de Jean Bernoulli et celle de son frère Jacques, accompagnée d'une note de Leibniz indiquant que sa propre solution ne diffère pas notablement de celles-ci. Figurent également une solution anonyme de Newton, déjà publiée en Janvier 1697 dans les *Philosophical Transactions* ainsi qu'un mémoire du marquis de L'Hôpital basé sur une analogie avec le problème de la courbe funiculaire et un autre de Tschirnhaus.

Analyse

Décrivons rapidement, avec les notations actuelles du calcul des variations, la solution de ce problème.



La vitesse du point matériel, abandonné en A sans vitesse initiale, est $v = ds/dt = \sqrt{2gx}$, où s est l'abscisse curviligne, x l'ordonnée du point et g l'intensité de la pesanteur. On peut donc écrire :

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{2gx}}$$

où $y' = dy/dx$. Dès lors, la durée de trajet T de A à B s'écrit

$$T = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}} dx = \int_0^{x_B} F(x, y') dx$$

La courbe $y = f(x)$ telle que T soit minimale obéit à l'équation d'Euler-Lagrange. On en déduit donc

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

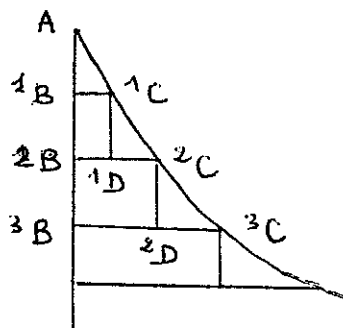
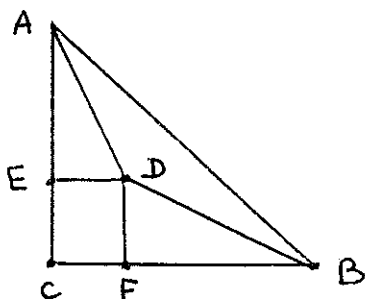
d'où

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \sqrt{\frac{y'^2}{2gx(1+y'^2)}} = \text{cste}$$

relation que l'on peut encore écrire $dy = kds\sqrt{x}$, où k est une constante quelconque. La solution de cette équation est un arc de cycloïde, courbe déjà bien connue depuis les travaux d'Huygens en 1659 sur l'isochronisme des oscillations des pendules.

La solution de Leibniz

Leibniz procède en deux temps : il considère d'abord un segment de droite AB , et se donne un point fixe E situé sur le côté vertical AC .

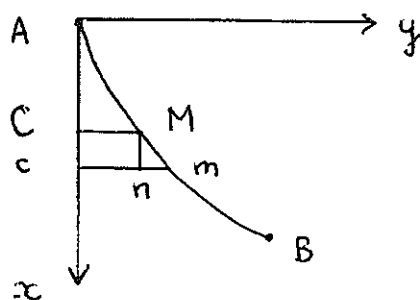


Il recherche alors la position du point D situé sur la parallèle à CB passant par E qui rend minimale le temps de chute $t_{AB} = t_{AD} + t_{DB}$, et montre qu'elle satisfait à une relation géométrique précise. Dès lors il peut s'intéresser au problème que Bernoulli nomme "brachystochrone" (signifiant "temps le plus court") et que lui nomme encore à cette époque "tachystoptote" (signifiant "descente la plus rapide"). Soit AB la courbe cherchée, et ${}^1B, {}^2B, {}^3B \dots$ des points régulièrement espacés sur l'axe vertical. Les points ${}^1C, {}^2C, {}^3C \dots$ de la courbe AB qui s'en déduisent sont suffisamment proches pour que l'on puisse confondre les arcs correspondants avec des portions rectilignes, équivalents aux segments AD, DB utilisés auparavant. L'étude précédente permet alors à Leibniz de montrer que la courbe est solution d'une équation différentielle du type $dy = k\sqrt{x}ds$ où s est l'abscisse curviligne, équation dont nous avons rappelé qu'elle est caractéristique d'une cycloïde.

La solution "indirecte" de Jean Bernoulli

L'originalité de la solution de Jean B. tient à sa volonté de rattacher le problème de la brachystochrone au premier grand principe variationnel énoncé, c'est-à-dire celui de Fermat dont nous avons parlé plus haut. Elle fut de plus riche d'enseignement pour les physiciens mathématiciens qui le suivirent, et constitue sans aucun doute une étape importante dans l'élaboration des principes variationnels de la mécanique, comme nous le verrons. Jean B. lui-même est conscient des implications étonnantes de sa découverte. Ainsi écrit-il : *"j'ai résolu en une seule fois deux problèmes importants, l'un optique, l'autre mécanique, et ai réalisé plus que ce que je demandais aux autres : j'ai montré que les deux problèmes, pris dans deux parties entièrement séparées des Mathématiques, sont de même nature"*.

Dans la leçon 46 des *Leçons de Calcul intégral* (1691-92), Bernoulli a déjà publié ses travaux concernant la courbure des rayons lumineux dans un milieu d'indice continûment variable, étudiée à partir de la loi de Descartes. Il procède dès lors par analogie, en faisant remarquer que la brachystochrone n'est autre que la courbe que suivrait un rayon lumineux dans un milieu de densité (donc d'indice) inversement proportionnel à la vitesse de chute libre d'une particule.

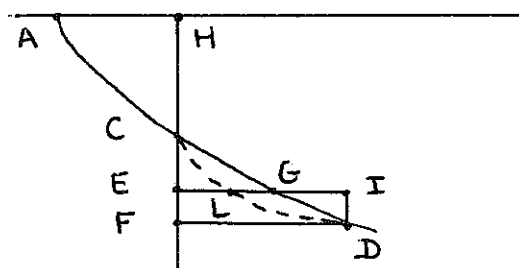


Soit M la position du point à un instant donné, repérée par son ordonnée $x = AC$, et soit c une position infiniment voisine. Bernoulli pose $Cc = dx = Mn$, et note dz l'arc Mm . La loi de Descartes lui permet d'écrire que le sinus de l'angle d'incidence, soit $mn/Mm = dy/dz$, est

proportionnel à la vitesse en M (notée t) ; d'où la relation $dy/dz = t/a$, où a est une constante quelconque. D'après l'hypothèse de Galilée sur la chute des corps $t = \sqrt{ax}$; Bernoulli obtient donc l'équation $dy = \sqrt{x/adz}$, caractéristique d'un arc de cycloïde. (voir le texte présenté en annexe)

La solution de Jacques Bernoulli

Assez proche conceptuellement de celle de Leibniz, cette présentation a l'avantage de mettre clairement en évidence quelques points fondamentaux de la méthode des variations, points que l'on retrouvera très nettement dans la technique élaborée par Euler.



Jacques montre d'abord que si AB est la courbe minimale recherchée, alors tout sous-arc CD de AB minimise également le temps de parcours correspondant t_{CD} , ce qui lui permet de ne s'occuper que de variations locales. Considérant désormais l'arc CD où " C est proche de D ", il introduit un autre arc CLD infiniment proche du premier qu'il caractérise par la position du point L situé sur l'horizontale passant par le point caractéristique G (qui apparaît comme le point de cote verticale médiane entre celles de C et D). Dès lors, le temps de trajet t_{CD} sur l'arc CGD sera minimal si $t_{CG} + t_{GD} = t_{CL} + t_{LD}$ (condition de stationnarité de la quantité étudiée). De là, après des manipulations géométriques que nous ne détaillerons pas ici, Jacques Bernoulli aboutit à la relation : $\frac{EG/\sqrt{HC}}{GI/\sqrt{HE}} = \frac{CG}{GD}$; équation qui en notation différentielle peut s'écrire (en remarquant que $CG \sim ds$, $HC \sim x$, $EG \sim dy$) sous la forme désormais classique $dy = kds\sqrt{x}$.

Nous venons donc ici de décrire succinctement les principales résolutions du problème de la brachystochrone ; elles nous ont permis de voir comment certains concepts fondamentaux du calcul des variations se mettent en place : la notion de courbe variée, l'étude locale des problèmes de minimisation et l'utilisation de l'outil différentiel. A travers l'exemple de Jean Bernoulli, nous pouvons de plus pressentir les liens étroits qui vont s'établir, au sein du calcul des variations, entre les concepts mathématiques et les principes fondamentaux de la physique. Notons que le problème spécifique de la brachystochrone va par la suite connaître de nombreuses extensions fécondes : ainsi les Bernoulli étudieront-ils la courbe de descente de durée minimale d'un point fixe à une droite verticale donnée, puis à une droite quelconque ; problème qui débouche sur l'importante

condition de transversalité qui sera formalisée par la suite par Lagrange.

c. Les isopérimètres

Nous ne ferons ici que mentionner l'existence de ce problème et des solutions qui lui furent apportées à cette époque essentiellement par les Bernoulli, à travers par exemple la recherche de la courbe de centre de gravité le plus bas.

L'une des avancées essentielles que leurs travaux permirent de réaliser est, sans conteste, le fait d'avoir compris la nécessité de disposer dans ce type de problème d'un degré de liberté supplémentaire. Ceci se traduit par l'obligation de faire varier la position de (au moins) deux points de la courbe. Cette constatation, que Jean Bernoulli n'a pas perçu dans un premier temps, est clairement utilisée par Jacques puis adoptée par son frère ; elle les conduira à la résolution de nombreux problèmes intéressants d'isopérimètres.

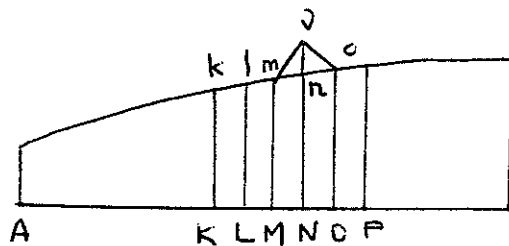
3. L'élaboration du calcul des variations

a. Les travaux d'Euler

L. Euler (1707-1783) est un élève de Jean Bernoulli, et ses premiers travaux sont écrits dans la lignée des problèmes (en particulier d'isopérimètres) posés par les frères Bernoulli. En 1744, il publie un ouvrage très important intitulé "Méthode pour trouver les lignes courbes qui possèdent une propriété de maximum ou de minimum", le *Methodus inveniendi*... Dans ce traité, Euler résout un très grand nombre de problèmes représentant un vaste éventail d'exemples de ce qui va devenir, selon les termes de Lagrange repris plus tard par Euler lui-même, le calcul des variations. Nous allons décrire sa méthode de résolution à travers un exemple simple.

La technique variationnelle d'Euler

Euler cherche à déterminer les propriétés de la courbe anz sur laquelle l'intégrale définie $\int Z dx$, prise entre les abscisses A et Z des points limites supposés fixes, est extrémale. Z est ici fonction de l'abscisse x , de l'ordonnée y du point considéré, et des dérivées successives $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$... L'intervalle AZ est ensuite divisé en sous-intervalles infiniment petits, repérés par les points équidistants $K, L, M, N, O, \dots$ d'ordonnées $Kk = y_{\dots}$, $Ll = y_{\dots}$, $Mm = y$, $Nn = y'$, $Oo = y''$,... et d'abscisses correspondantes $x_{\dots}$, $x_{\dots}$, $x = AM$, x' , x'' ...



Dès lors, Euler exprime les valeurs des dérivées successives aux points considérés par des relations du type :

$$p = \frac{y' - y}{dx} \quad p' = \frac{y'' - y'}{dx}$$

Par décomposition, Euler écrit l'intégrale étudiée, prise sur l'intervalle AZ , sous la forme

$$\int Z dx = \int_0^{x'} Z dx + Z dx + Z' dx + Z'' dx + \dots$$

expression dans laquelle j'ai rétabli les bornes d'intégration par souci de clarté, et où Z représente la valeur de la fonction au point $(x, y, p...)$, Z' sa valeur au point $(x', y', p'...)$

Afin d'examiner le comportement de l'intégrale, Euler fait ensuite varier l'ordonnée y' de N d'une quantité très petite $n\nu$, variation dont il calcule les conséquences sur l'ensemble des grandeurs $(y, p, q...)$ Ainsi, y' est-il modifié en $y' + n\nu$; p en $p + \frac{n\nu}{dx}$; p' en $-\frac{n\nu}{dx}...$ L'intégrale étudiée, extrémale sur l'arc anz original, n'est quant à elle pas modifiée par cette opération. Or, la seule partie de cette intégrale susceptible de variation est l'expression $Z dx + Z' dx$. Dans le cas particulier où dZ s'exprime sous la forme $dZ = M dx + N dy + P dp$, Euler écrit alors que la variation de $Z dx$ est $P dp dx$ soit $P n\nu$, et que celle de $Z' dx$ est $(N' dy' + P' dp') dx$ soit $N' n\nu dx - P' n\nu$.

La variation totale de l'intégrale a donc pour expression $(P + N' dx - P') n\nu$. Remplaçant alors N' par N , et $P' - P$ par dP , Euler obtient finalement l'équation

$$N - \frac{dP}{dx} = 0$$

qui n'est autre que l'équation connue maintenant sous le nom d'Euler-Lagrange.

Les apports de la méthode d'Euler

Pour la première fois, on dispose d'une méthode générale géométrico-analytique pour appréhender les problèmes variationnels. Malgré le caractère souvent complexe des calculs développés, Euler est en mesure d'appliquer sa méthode à un ensemble très varié de cas, démontrant ainsi son efficacité. Ainsi s'intéresse-t-il au cas d'intégrales définies $\int Z dx$, où Z dépend de $(x, y, p...)$ et d'une quantité elle-même définie de façon intégrale $\Pi = \int_0^x [Z] dx$; problème par exemple lié aux intégrales de fonction dépendant de l'abscisse curviligne : $\Pi = s = \int_0^x \sqrt{1 + p^2} dx$. Cette catégorie de problème constitue une étape importante vers le célèbre problème de Lagrange de minimisation avec contrainte : il s'agit en effet ici de minimiser $\int Z(x, y, y', \Pi) dx$ sous la condition $\Pi' - [Z] = 0$.

Ceci conduira Euler à l'utilisation de fait d'une méthode similaire à la règle des multiplicateurs de Lagrange, sans qu'elle soit pour autant formellement énoncée comme telle.

L'ambiguïté du symbole différentiel chez Euler

Dans un premier temps, Euler utilise la notation différentielle " d " suivant l'usage en vigueur consacré par Leibniz. Ainsi, la différentielle dx est maintenue constante, et la différentielle de

toute grandeur dépendante de x (telle que $y, p, \dots$) est définie comme la différence entre sa valeur au point x et sa valeur au point suivant, distant de dx du précédent ; Euler écrit par exemple $dy = p dx = y' - y$.

Cependant, Euler est amené à donner un autre sens au symbole de différentiation "d". Ainsi, lorsqu'il calcule le changement apporté à l'expression $Z dx + Z' dx$ du fait de la modification de l'ordonnée $y' = N n$ devenue $N \nu$, la grandeur $dZ = P n \nu$ représente cette fois la variation de Z au sens lagrangien du terme. Notons encore qu'Euler écrit en substance dans ce calcul que la modification des diverses variables est donnée par : $dx = 0, dy = 0, dp = \frac{n\nu}{dx} \dots$

La notation "d" est alors clairement utilisée ici dans deux contextes totalement différents, qui se côtoient et se confondent même chez Euler : ainsi passe-t-il insensiblement de la notion leibnizienne de la différentielle à celle de variation, pour revenir ensuite à la notion première dans son équation finale $N - \frac{dP}{dx} = 0$; dP représentant ici explicitement la différentielle usuelle $P' - P$.

b. Les travaux de Lagrange

C'est à Lagrange que revient le mérite d'avoir clairement mis en évidence cette difficulté et de l'avoir résolu élégamment, en introduisant le concept général de variation dont la traduction la plus manifeste est la naissance d'un nouveau symbole : " δ ".

Les premiers pas

C'est en 1754 que le tout jeune Lagrange, alors âgé de dix-huit ans, entreprend de faire part de ses recherches personnelles au savant universellement reconnu qu'est Euler à cette époque, et mentionne en particulier l'existence de ses propres travaux concernant les problèmes de maxima et minima. Mais la première indication claire de ses réflexions se trouve dans la deuxième lettre qu'il écrit à Euler le 12 Août 1755.

S'appuyant sur les considérations développées par celui-ci, Lagrange dit avoir recherché une démonstration plus rapide des résultats fondamentaux mis en évidence par Euler, "sans aucune construction géométrique". A cette occasion, il est intéressant de noter qu'Euler avait mis en évidence une règle mnémotechnique permettant de retrouver rapidement cette équation. Il suffisait, pour une fonction $Z(x, y, p)$ dont la différentielle s'écrit $dZ = M dx + N dy + P dp$, d'annuler le terme $M dx$ puis de remplacer le terme $P dp$ par $-pdP$, et finalement d'annuler l'expression obtenue ; ceci conduisait donc à l'équation $N dy - pdP = 0$, qui n'est autre que l'équation d'Euler (car $dy = p dx$).

Dans la deuxième lettre qu'il adresse à Euler, Lagrange justifie la nécessité d'élaborer une méthode entièrement nouvelle pour traiter ces problèmes par les propos qu'Euler lui-même tenait dans son mémoire original. Celui-ci y avait en effet noté combien il paraissait souhaitable de développer un autre type de méthode, libérée de toute considération géométrique et qui conduirait naturellement à la transformation du terme $P dp$ en $-pdP$ que nous avons évoqué plus haut. Sans

pour autant en déduire que la démarche de Lagrange a été entièrement induite par cette remarque, il est cependant certain qu'elle a dû frapper son esprit inventif, suffisamment du moins pour qu'il la considère a posteriori comme une étape importante de sa réflexion.

Néanmoins, l'élément fondamental de la nouvelle approche développée par Lagrange est sans conteste sa découverte des deux rôles conceptuellement très différents que Euler fait jouer, dans sa méthode, au symbole de différentiation classique d . Pour la première fois, Lagrange est donc amené à introduire un nouveau symbole δ qui permet de caractériser la variation d'une grandeur, sans passer obligatoirement par une représentation géométrique. Ainsi écrit-il :

"je dénoterai par δ la différentielle de y , dans la mesure où c'est y qui doit être différentié, x demeurant constant, pour obtenir la valeur maximum ou minimum de la formule donnée, cela afin de distinguer cette différentielle des autres différences de y qui entrent déjà dans cette formule."

Ce faisant, il développe assez clairement l'algorithme du calcul des variations, en prenant bien soin de distinguer dans l'esprit et dans la notation les deux différentiations qu'Euler confondait sous le symbole d . De plus, il imagine une variation arbitraire et simultanée des ordonnées de tous les points de la courbe, ce qui le libère des calculs lourds et fastidieux qu'Euler avait été obligé d'employer. Il lui suffit de poser de fait les quelques principes analytiques qui vont régir ce nouveau procédé de différentiation : règle de permutation des symboles d et δ , qui entraîne $\delta d^m F(y) = d^m \delta F(y)$ pour toute fonction de la variable y , ainsi que $\delta \int Z = \int \delta Z$ où Z est une fonction quelconque de $x, y, dx, dy, \dots$

Dès lors, Lagrange utilise les procédés usuels de dérivation des fonctions, tout en les appliquant au cas du symbole δ nouvellement introduit. Remarquons de plus que Lagrange impose ici à la variable indépendante x de rester constante dans le processus de variation. Ainsi donc, pour la fonction Z précédemment décrite telle que $dZ = Mdx + Ndy + Pd^2y + Qd^3y + \dots$, il écrit $\delta Z = N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + \dots$; ce qui, après intégration et commutation des différentielles, conduit à :

$$\delta \int Z = \int \delta Z = \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y + \dots$$

Lagrange introduit alors une des étapes fondamentales du nouveau calcul qu'il est en train d'élaborer, en effectuant une intégration par parties qui le conduit à l'expression :

$$\delta \int Z = \int N\delta y + P\delta y - \int dP\delta y + Q\delta dy - dQ\delta y + \int d^2Q\delta y + \dots$$

Lagrange est désormais en mesure de résoudre le problème de la recherche des extrema d'une formule intégrale $\int Z$ calculée entre deux extrémités fixes, telles que $\delta y = 0, d\delta y = 0, \dots$. En effet, posant $\delta \int Z = 0$, il aboutit à

$$\int (N - dP + d^2Q - \dots)\delta y = 0$$

d'où il déduit, sans aucune esquisse de justification, l'équation

$$N - dP + d^2Q - \dots = 0$$

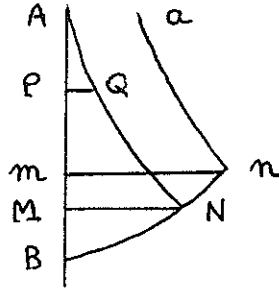
qui n'est autre que l'équation dite d'Euler. Afin de démontrer la grande fécondité de sa nouvelle méthode, Lagrange s'attache ensuite à retrouver la solution d'un problème posé par Euler dans son mémoire original, consistant à déterminer l'extremum de la formule intégrale $\int Z$, où Z dépend non seulement de $x, y, dy, d^2y, \dots$ mais aussi d'une quantité $\Pi = \int(Z)$ où (Z) est fonction de $y, dy, \dots$

La réponse d'Euler fut immédiate et enthousiaste, reconnaissant d'emblée l'immense portée des idées développées par Lagrange. Ainsi lui écrit-il :

"Vous me semblez avoir porté la théorie des maxima et des minima presque à son plus haut point de perfection, et je ne puis assez admirer l'extraordinaire sagacité de votre esprit. Car non seulement j'avais réclamé dans mon traité sur ce sujet une méthode purement analytique qui permette de déduire les règles qui y sont énoncées, mais j'avais encore consacré par la suite bien des efforts à la recherche d'une telle méthode."

L'exemple de la brachystochrone

Le problème étudié par Lagrange a pour but de déterminer la forme de la courbe qui minimise la durée de chute d'un point matériel soumis à la pesanteur (considérée comme uniforme) abandonné en un point origine fixe A , l'autre extrémité de la courbe étant supposée quelconque, mais située sur une ligne donnée BNn .



Il s'agit donc de minimiser pour cette famille d'arcs particulière l'intégrale $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$, où s représente l'abscisse curviligne sur la courbe brachistochrone, et u la "hauteur" du point (analogue à la grandeur $x = AP$ qui caractérise le point courant Q). L'application des règles du nouveau calcul δ conduit à écrire que

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{u}} = - \int \frac{ds \delta u}{2u^{\frac{3}{2}}} + \int \frac{\delta ds}{\sqrt{u}}$$

Lagrange pose $\delta u = \nu \delta y$, et utilise de plus implicitement la relation $\delta ds ds = \delta dy dy$, issue de l'identité $ds^2 = dy^2 + dx^2$ (avec $\delta x = 0$). Il en déduit

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{u}} = - \int \frac{ds \nu \delta y}{2u^{\frac{3}{2}}} + \int \frac{dy \delta dy}{ds \sqrt{u}}$$

Après permutation des différentiations d et δ , puis intégration par parties, il obtient

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{u}} = - \int \left(\frac{ds \nu}{2u^{\frac{3}{2}}} + d \frac{dy}{ds \sqrt{u}} \right) \delta y + \frac{dy}{ds \sqrt{u}} \delta y$$

Cependant, fait remarquer Lagrange, ce calcul ne tient pas compte entièrement du fait que le point d'arrivée est lui aussi variable. La formule précédemment obtenue permet en effet de calculer la variation de temps de parcours lorsque l'on passe de la courbe AQN à toute autre courbe respectant la hauteur de chute AM . Or la courbe variée an correspond elle à une hauteur de chute Am ; il est donc nécessaire de retrancher à l'expression précédente le temps de chute correspondant à mM , soit $\frac{ds}{\sqrt{u}}$. D'où l'expression finale

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{u}} = - \int \left(\frac{ds\nu}{2u^{\frac{3}{2}}} + d \frac{dy}{ds\sqrt{u}} \right) \delta y + \frac{dy}{ds\sqrt{u}} \delta y - \frac{ds}{\sqrt{u}}$$

La condition de temps minimal conduit donc aux deux expressions cherchées; la première, soit

$$\frac{ds\nu}{2u^{\frac{3}{2}}} + d \frac{dy}{ds\sqrt{u}} = 0$$

déterminant l'équation de la courbe (il s'agit, rappelons-le d'une cycloïde); la seconde, soit

$$\frac{dy}{ds\sqrt{u}} \delta y = \frac{ds}{\sqrt{u}}$$

écrite au point d'arrivée, déterminant les coordonnées de ce point. Lagrange montre d'ailleurs que cette équation traduit la très fondamentale relation d'orthogonalité, qui indique que la courbe solution coupe à angle droit la ligne sur laquelle est astreint à se déplacer le point extrémal.

Mais moins d'un an après cette première démonstration, le 2 septembre 1756 exactement, Lagrange entreprend de réécrire ce calcul en assignant cette fois une variation à la grandeur x . Les règles usuelles du calcul des variations entraînent alors (là encore, j'ai développé quelques étapes que Lagrange a omis de mentionner) :

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \int \frac{\delta ds}{\sqrt{x}} + \int ds \delta \frac{1}{\sqrt{x}}$$

soit, en utilisant cette fois $ds\delta ds = dy\delta dy + dx\delta x$

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \int \left[\frac{dy\delta dy}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx\delta dx}{ds\sqrt{x}} - \frac{ds\delta x}{2x^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Après permutation des symboles d et δ et intégration par parties, on obtient

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{ds\sqrt{x}} \delta y + \frac{dx}{ds\sqrt{x}} \delta x - \int \left[\left(d \frac{dy}{ds\sqrt{x}} \right) \delta y + \left(d \frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{ds}{2x^{\frac{3}{2}}} \right) \delta x \right]$$

Ici, pour la première fois, Lagrange utilise explicitement l'argument de l'indépendance des variations introduites δx et δy . En conséquence, il annule toutes les expressions qui sont en facteur de ces termes dans l'expression intégrale, et en déduit

$$d \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0; \quad d \frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{ds}{2x^{\frac{3}{2}}} = 0$$

équations qui conduisent toutes deux, comme il l'avait signalé dans une lettre précédente, à la même équation intégrale. De plus, Lagrange obtient l'équation relative au point extrémal, en annulant les termes de l'expression générale situés hors du signe somme, soit : $dy\delta y + dx\delta x = 0$; cette équation traduisant là aussi la condition d'orthogonalité.

Une autre présentation

En 1771, Euler entreprend de définir de façon différente la notion analytique de variation, à l'aide de l'introduction d'un paramètre variable, en l'écrivant en substance comme transition à l'intérieur d'une famille de courbes à un paramètre ; soit :

$$\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=t_0} dt$$

Cette présentation est alors partiellement reprise dans l'ouvrage de Lagrange intitulé *Théorie des fonctions analytiques* (1797), mais c'est essentiellement dans la seconde édition (1806) du traité *Leçons sur le calcul des fonctions* qu'elle sera utilisée.

Lagrange y entreprend de construire une nouvelle présentation du mécanisme variationnel, basé cette fois non plus sur les infiniment petits, mais sur une véritable conception différentielle. Il considère pour cela le problème de la détermination des extrema de la formule intégrale U d'une fonction $y = \varphi(x)$. Cette détermination nécessite, de façon évidente, le calcul de la variation de U lors des petites variations correspondantes de la fonction y . Lagrange imagine alors une modification de la fonction φ en une fonction $\varphi(x, i)$, obéissant à la condition $\varphi(x, i = 0) = \varphi(x) = y$. i joue donc ici le rôle d'un paramètre générant à partir de la courbe originelle $\varphi(x)$ une famille de courbes variées $\varphi(x, i)$. Le paramètre i pouvant être choisi aussi petit que l'on veut, Lagrange écrit la nouvelle fonction $\varphi(x, i)$ sous la forme d'un développement en puissances croissantes :

$$\varphi(x, i) = y + i\dot{y} + \frac{i^2}{2}\ddot{y} + \dots$$

où $y = \varphi(x, 0)$, et $\dot{y}$ représente la dérivée de la fonction $\varphi(x, i)$ par rapport à i au point $i = 0$.

Lagrange assimile alors l'accroissement de la fonction y au terme d'ordre 1 de ce développement, soit $i\dot{y}$, terme totalement arbitraire puisque la dépendance de $\varphi(x, i)$ par rapport à i est quelconque. Cependant, Lagrange définit ici la variation de y non pas par ce terme d'accroissement, mais par le taux d'accroissement correspondant, c'est-à-dire la grandeur $\dot{y}$. Ainsi, la variation de $y = \varphi(x, 0)$ est définie par le rapport $\delta y = \frac{\varphi(x, i) - \varphi(x, 0)}{i}$, calculé en $i = 0$.

De même procède-t-il pour calculer la variation de l'intégrale U d'une fonction $V(x, y, y', \dots)$ donnée. La transformation de y en $\varphi(x, i)$ induit une nouvelle expression de V , donc une nouvelle expression de U , toutes deux développables suivant les puissances croissantes de i . Ainsi, V devient :

$$V + i\dot{V} + \frac{i^2}{2}\ddot{V} + \dots$$

et U s'écrit :

$$U + i\dot{U} + \frac{i^2}{2}\ddot{U} + \dots$$

La notation $\dot{f}$ indiquant de même la dérivée de la nouvelle fonction considérée par rapport à i , au point $i = 0$. $\dot{V}$, $\dot{U}$ représentent donc désormais les variations des fonctions V et U . De

là Lagrange dérive, par des moyens que nous ne développerons pas ici, les équations usuelles traduisant l'existence des extrema de la fonction $U = \int V dx$.

L'approche de Lagrange concernant la présentation du calcul des variations subit ici une modification tout à fait spectaculaire.

4. Le principe de moindre action

a. Le principe de Maupertuis

En 1744 (80 ans après les travaux de Fermat), Maupertuis énonce son principe de moindre action. Il est mû d'une part par la conviction que la nature obéit à un principe d'économie, et d'autre part par le désir de se conformer à la loi newtonienne de proportionnalité des indices de réfraction aux vitesses de la lumière, persuadé que ceci remet en cause les travaux de Fermat. Considérant que quelquefois on a compris le principe d'économie comme un principe de plus court chemin (comme dans la réflexion) et d'autres fois comme un principe de plus court temps (comme dans la réfraction), et qu'il n'y a pas de raison de privilégier le temps par rapport à l'espace (ou vice-versa), Maupertuis emprunte donc une troisième voie : *"le chemin que la nature tient est celui par lequel la quantité d'action est la moindre"*. Dans ce cas, Maupertuis prend pour mesure de l'action la somme des espaces multipliés chacun par la vitesse de propagation, sans aucune justification préalable et en déduit une loi de proportionnalité des sinus pour la réfraction. Il paraît assez clair que Maupertuis a plutôt cherché à dériver des diverses lois connues et admises à l'époque un principe "réconciliateur" en accord avec sa philosophie ; ainsi écrit-il : *"les principes physiques doivent finalement prouver l'existence de Dieu même, et donc être empreints de finalité"*, donc *"notre principe, plus conforme aux idées que nous devons avoir des choses, laisse le monde dans le besoin naturel de la puissance du Créateur et est une suite nécessaire de l'emploi le plus sage de cette puissance"*.

Ce principe vague, qui ne laissera aucun souvenir dans le domaine de l'Optique où seul prévaut le principe de Fermat, va pourtant connaître un développement riche et prometteur dans le domaine de la dynamique. Maupertuis lui-même en réalise les premiers pas, en montrant que ce principe permet de retrouver les lois des chocs mous (ceux pour lesquels la vitesse relative finale est nulle) et des chocs élastiques (qui conservent l'énergie cinétique). Mais c'est à Euler que revient le mérite d'avoir montré la portée de ce principe et à Lagrange celui de l'avoir formalisé clairement et d'avoir énoncé ses conditions d'application.

b. L'énoncé d'Euler

En 1744, Euler publie dans son grand ouvrage *Methodus inveniendi...* un article traitant du mouvement des projectiles dans un milieu non résistant. Il y vérifie que les trajectoires d'un point matériel (dans un certain nombre de cas particuliers connus) correspondent bien à un extremum

de la quantité d'action définie en substance par $\int v ds$, où v est la vitesse du corps et s l'abscisse curviligne décrite.

Ainsi, si aucune force n'agit sur le point, la vitesse est constante et minimiser l'action revient à minimiser la distance parcourue : la trajectoire est donc rectiligne, conformément au principe de l'inertie. De même, Euler applique les résultats de sa méthode variationnelle, démontrés au début de son traité, au cas de la trajectoire parabolique de chute libre des corps. D'après l'hypothèse de Galilée, on a $v^2 = 2gx + \text{cste}$ où x représente l'ordonnée du point ; l'intégrale à minimiser est donc du type $\int ds\sqrt{a+gx} = \int dx\sqrt{(a+gx)(1+p^2)}$, avec $p = \frac{dy}{dx}$ où y représente l'abscisse du point. Elle obéit bien à la description du problème variationnel le plus simple résolu auparavant par Euler $\int Z(x, y, p)dx$ minimal, avec $N = \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$ et $P = \frac{\partial Z}{\partial p} = p\sqrt{(a+gx)/(1+p^2)}$. L'équation d'Euler démontrée plus haut entraîne donc que l'expression P est constante, Euler montre alors facilement que l'équation différentielle qui s'en déduit est caractéristique d'une parabole. Enfin, et ceci achèvera de convaincre ses lecteurs de la puissance de ce nouveau principe, Euler s'attaque au cas d'un corps soumis à une force centrale et retrouve les principales caractéristiques de la trajectoire.

c. La mise en forme de Lagrange

En 1761, Lagrange publie ses premiers travaux ayant trait à la présentation variationnelle de la mécanique, à l'occasion de son mémoire *Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique* dans les *Miscellanea Taurinensa*. Cette présentation est en effet directement liée aux travaux publiés dans les pages précédentes, exposant les principes généraux du calcul des variations. Elle n'est pas pour autant une simple répétition de ces principes dans le cadre particulier de la dynamique : l'écriture variationnelle de la mécanique a été l'objet de recherches constantes de la part de Lagrange, ainsi que le montre la lecture de sa correspondance avec Euler ; plus qu'une nouvelle exposition, elle constitue pour lui un véritable bouleversement dans la compréhension de cette science.

Ce mémoire *Application de la méthode exposée...* s'appuie explicitement sur les travaux d'Euler publiés dans les appendices du *Methodus inveniendi*, en se proposant d'en élargir le champ d'application à l'ensemble de la dynamique. Lagrange y pose donc :

"PRINCIPE GENERAL. Soient tant de corps qu'on voudra M, M', M'' ...qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, et qui soient de plus, si l'on veut, animés par des forces centrales proportionnelles à des fonctions quelconques des distances ; que $s, s', s'', \dots$, dénotent les espaces parcourus par ces corps dans le temps t , et que $u, u', u'', \dots$, soient leurs vitesses à la fin de ce temps ; la formule

$$M \int u ds + M' \int u' ds' + M'' \int u'' ds'' + \dots$$

sera toujours un maximum ou un minimum."

Lagrange s'intéresse d'abord au mouvement d'un "corps M attiré vers tant de centres fixes qu'on voudra par des forces $P, Q, R, \dots$ exprimées par des fonctions quelconques des distances". Le traitement de ce premier problème est assez symptomatique du type de raisonnement de Lagrange, il paraît donc utile de l'examiner en détail. Le principe général s'écrit donc ici

$$\delta \left(\int u ds \right) = 0$$

la masse, supposée constante, n'étant plus prise en compte, et donc virtuellement posée égale à l'unité. Après permutation des signes d'intégration et de variation, et développement de l'intégrand, Lagrange obtient

$$\int (u \delta ds + \delta u ds) = 0.$$

Posant alors la conservation de la force vive, Lagrange écrit

$$\frac{u^2}{2} = \text{const} - \int (P dp + Q dq + R dr + \dots)$$

p, q, r représentant les distances du point matériel aux centres de force. Après différentiation de cette équation à l'aide de δ , on obtient donc,

$$u \delta u = - \int (\delta P dp + P \delta dp + \delta Q dq + Q \delta dq + \delta R dr + R \delta dr + \dots)$$

Lagrange applique alors le procédé caractéristique de sa méthode de variations, consistant à permuter les symboles d et δ , puis à intégrer par parties, et aboutit après quelques manipulations à

$$\int (u \delta ds - P dt \delta p - Q dt \delta q - R dt \delta r - \dots) = 0;$$

utilisant pour cela le fait que $ds = u dt$, et supposant dans un premier temps que P (resp. Q, R) n'est fonction que de p (resp. q, r). Lagrange cherche ensuite à exprimer séparément les deux intégrales introduites, en utilisant un système de coordonnées de référence constitué en premier lieu par les "coordonnées rectangles x, y, z ". Il écrit dès lors ds sous la forme $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, et en déduit

$$\int u \delta ds = - \int \left(d \frac{u dx}{ds} \delta x + d \frac{u dy}{ds} \delta y + d \frac{u dz}{ds} \delta z \right) + \frac{u dx}{ds} \delta x + \frac{u dy}{ds} \delta y + \frac{u dz}{ds} \delta z.$$

De même, considérant p, q, r comme fonctions de x, y, z , Lagrange introduit

$$P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots = \Pi \delta x + \omega \delta y + \Psi \delta z.$$

Reportant ces diverses expressions dans l'équation première, Lagrange aboutit à

$$- \int \left[\left(d \frac{u dx}{ds} + \Pi dt \right) \delta x + \left(d \frac{u dy}{ds} + \omega dt \right) \delta y + \left(d \frac{u dz}{ds} + \Psi dt \right) \delta z \right] + \frac{u dx}{ds} \delta x + \frac{u dy}{ds} \delta y + \frac{u dz}{ds} \delta z = 0.$$

En supposant que les deux extrémités de la trajectoire sont fixes, et arguant du fait que les variations $\delta x, \delta y, \delta z$ sont indépendantes, Lagrange en déduit tout naturellement que chaque intégrand doit être nul et aboutit finalement à un système d'équations "qui serviront à déterminer la courbe décrite par le corps M et sa vitesse à chaque instant" ;

$$d\frac{u dx}{ds} + \Pi dt = 0$$

$$d\frac{u dy}{ds} + \omega dt = 0$$

$$d\frac{u dz}{ds} + \Psi dt = 0$$

ce qui correspond très exactement aux équations, que l'on pourrait qualifier de "newtoniennes", du mouvement à condition de remarquer que $u/ds = 1/dt$ et que (Π, ω, Ψ) apparaissent comme les opposées des composantes des forces suivant les directions repérées par les coordonnées (x, y, z) .

Avec cet exposé, Lagrange est arrivé au terme de son exploitation du principe de moindre action. Et c'est à partir d'un autre principe, que nous ne développerons pas ici, qu'il dérivera les équations fondamentales de la dynamique qui portent désormais son nom ; équations qui s'écrivent en notation moderne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

où L (le lagrangien) est la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la particule, fonction a priori de ses coordonnées q ainsi que de leurs dérivées temporelles $\dot{q}$ et du temps t .

5. Conclusion

De Fermat en passant par les frères Bernoulli jusqu'à Lagrange, nous avons vu s'esquisser l'évolution d'un des grands concepts novateurs de la pensée mathématique, évolution qui paraît indissociable de la notion correspondante qui s'est développée en physique. A travers l'exemple du calcul des variations, je souhaite avoir montré de quelle façon l'historien et le philosophe des sciences se trouvent encore une fois confrontés à la profonde interaction qui lie la formation des objets mathématiques et la mise en oeuvre des principes physiques fondateurs.



Bibliographie

Oeuvres originales

- Pierre de Fermat, *Oeuvres de Fermat*, P.Tannery et C.Henry eds., Paris, 1891-1912.
- *Acta Eruditorum*, Leipzig, juin 1696 et mai 1697.
- L.Euler, *Opera Omnia*, Serie I, vol. XXIV, Carathéodory ed., Bern, 1952.
- P.L. de Maupertuis, "accord de différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles", *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Paris, 1744 ; et *Oeuvres*, Lyon, 1768.
- J.L Lagrange, *Oeuvres*, Serret et Darboux eds., Paris, 1867-1892.

Notons que quelques uns de ces textes sont traduits en anglais dans l'ouvrage :

- D.J.Struik, *A source book in mathematics 1200-1800*, Harvard Univ. Press, Cambridge, 1969.

Articles généraux

On consultera avec profit, pour plus de détails sur certains points particuliers de notre exposé, les ouvrages ou articles suivants :

- H. Goldstine, *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*, Springer-Verlag, New-York/ Heidelberg/ Berlin, 1980.
- J. Peiffer, "Le problème de la brachystochrone à travers les relations de Jean I Bernoulli avec L'Hôpital et Varignon", *Studia Leibnitiana*, XVII, 1989.
- J. Peiffer, "Le problème de la brachystochrone, un défi pour les méthodes infinitistes de la fin du XVIIe siècle", *Sciences et techniques en perspective*, XVI, Nantes, 1991.
- M.Blay, *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVIIe et XVIIIe siècles*, Presses Univ. de France, 1992.
- C. Fraser, "J.L Lagrange's early contributions to the principles and methods of mechanics", *Archive for the History of Exact Sciences*, 28 (3), 1983.
- C. Fraser, "J.L Lagrange's changing approach to the foundations of the calculus of variations", *Archive for the History of Exact Sciences*, 32 (2), 1985.

ANNEXE 1

JOHANNIS BERNOULLI

Curvatura Radii in Diaphanis non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actis 1696, p. 269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit; & de Curva Synchrona, seu radiorum unda, construenda.

[...]

(traduction de ce texte p. 56)

Merito quidem miramur, quod HUGENIUS primus invenit, in *Cycloide vulgari* grave facere descensus tautochronos, a quocunque *Cycloidis* puncto incipiat moveri : sed nescio, an non obstupescas plane, cum dixerò, hanc ipsissimam *Cycloidem*, seu *Tautochronam Hugonianam*, esse nostram *Brachystochronam* quaesitam; ad cujus cognitionem duabus viis perveni, indirecta altera, altera directa. Insistendo priori, mirum consensum detexi inter curvitatem radii luminis in medio continue variante, & *Curvam* nostram *brachystochronam*; aliaque observavi, in quibus nescio quid arcani subest, quod proderit in Dioptriciis. Quamobrem verum erit, quod in propositione Problematis asserueram, *non in nuda speculatione, sed in aliis scientiis*, in Dioptriciis puta, *usam habere quam maximum*. Sed ut quæ diximus re ipsa confirmantur, en priorem solvendi modum !

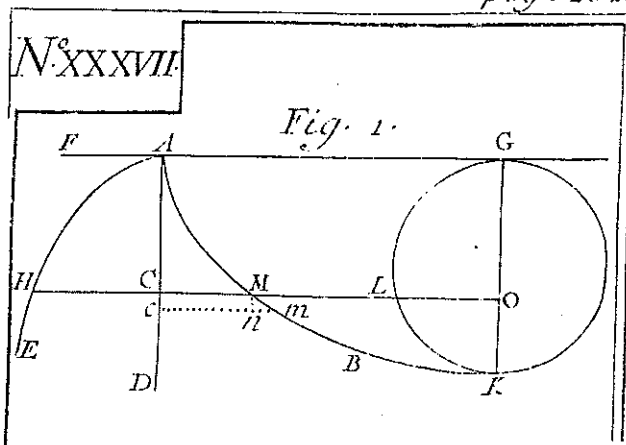
FERMATIUS in Epistola ad DE LA CHAMBRE (Vid. *Epist. CARTESII* Lat. Tom. III, p. 147, & *FERMATI Opera Mathem.* p. 156 seqq.) stabilivit, radium luminis ex medio rariore in densius transeuntem ita refringi ad perpendiculararem, ut, habita ratione temporis, radius (qui a puncto luminante ad punctum illuminatum successive procedere supponitur) viam faciam brevissimam : ex quo principio ostendit, sinum anguli incidentiæ esse ad sinum anguli refractionis in mediorum ratione data directa raritatum, vel reciproca densitatum; id est in ipsa ratione velocitatum, quibus radius media penetrat. Quod postea acutissimus LEIBNITIUS in *Act. Erud.* 1682, p. 185 seqq. & mox Celeb. HUGENIUS in suo *Tractatu de Lumine*, p. 40, succinctius demonstrarunt, ipsumque principium physicum, vel metaphysicum potius, quod FERMATIUS sua demonstratione geometrica contentus, & facile nimis de jure suo decedens, CLERSELERIO urgente, deferuisse videtur, validissimis argumentis adstruxerunt.

Si nunc concipiamus medium non uniformiter densum, sed

velut per infinitas lamellas horizontaliter interjectas distinctum, quarum interstitia sint repleta materia diaphana raritatis certa ratione accrescentis vel decrescentis; manifestum est, radium, quem ut globulum consideramus, non emanaturum in linea recta, sed in curva quadam (notante id jam & ipso HUGENIO in eodem Tractatu *de Lumine*, sed ipsam curvæ naturam minime determinante) quæ ejus sit naturæ, ut globulus per illam decurrens celeritate continue aucta vel diminuta, pro ratione graduum raritatis, brevissimo tempore perveniat a puncto ad punctum. Constat quoque, cum sinus refractionum in singulis punctis sint respectu ut raritates medii vel celeritates globuli, curvam habere eam proprietatem, ut sinus inclinationum suarum ad lineam verticalem sint ubique in eadem ratione celeritatum. Quibus præmissis, nullo negotio perspicitur, *Curvam Brachystochronam* illam ipsam esse, quam formaret radius transiens per medium, cujus raritates essent in ratione velocitatum, quas grave verticaliter cadendo acquireret. Sive enim velocitatum incrementa dependeant a natura medii magis minusve resistentis, ut in radio; sive abstrahatur a medio, & ab alia causa acceleratio eadem tamen lege generari intelligatur, ut in gravi; cum utroque in casu curva brevissimo tempore percurri supponatur, quid vetat, quo minus altera in alterius locum substitui possit?

TAB. IX.
Nº.
XXXVII.
Fig. 1.

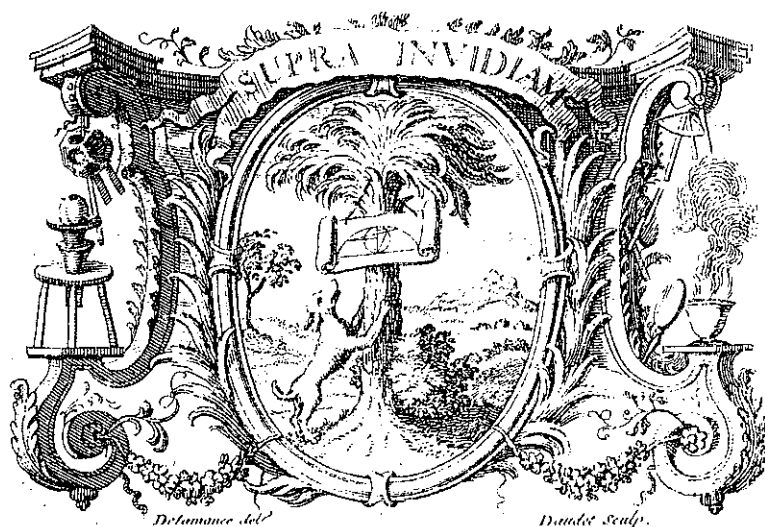
Sic generaliter solvere licet Problema nostrum, quamcunque statuamus accelerationis legem. Eo enim reductum est, ut quæretur curvatura radii in medio secundum raritates, prout libuerit, variante. Esto ergo medium FGD (*Fig. 1*) terminatum ab horizontali FG, in qua punctum radians A, verticalis AD axis curvæ datæ AHE, cujus applicatæ HC determinant raritates medii in altitudinibus AC, vel velocitates radii, seu globuli, in punctis M; radius incurvatus ipse qui quæritur, AMB. Vocentur AC, x ; CH, t ; CM, y ; differentialis Cc, dx ; diff. nm, dy ; diff. Mm, dz ; constans quadam ad arbitrium assumpta, a ; Erit accepta Mm pro sinu toto, m sinus anguli refractionis seu inclinationis curvæ ad verticalem, & proinde per ea, quæ modo diximus, m est ad HC in ratione constante, id est, $dy : t = dz : a$; quod hanc suggerit æquationem, $ady = tdz$, seu $aady^2 = ttdx^2 = ttdx^2 + ttdy^2$; quæ reducta generalem dabit æquationem differentialem $dy = tdx : \sqrt{(aa - tt)}$ pro curva AMB quæsita. Atque adeo una opera duo insignia problemata, opticum unum, mechanicum alterum, ultra quam ab aliis petebam, resolvi; ostendique, quamvis ex diversissimis Matheseos partibus sint desumpta, ejusdem tamen esse naturæ.



Sumamus jam specialem casum, & quidem hypothesin communem a GALILÆO primitus introductam & demonstratam, quod velocitates gravium cadentium sint in ratione subduplicata altitudinum emensarum; in hoc enim proprie quæstionis tenor consistit. Quo supposito, curva data AHE erit parabola id est, $tt = ax$ & $t = \sqrt{ax}$, quæ si substituantur in æquatione generali, habebitur hæc $dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$ ex qua concludo Curvam *Brachystochronam* esse *Cycloidem vulgarem*.

Jean Bernoulli

Opera Omnia, I, p189-191



La courbure d'un rayon dans un milieu diaphane uniforme, et la solution du problème proposé par lui-même dans les Actes de 1696, p.269, afin de trouver la Ligne Brachystochrone, c'est-à-dire celle sur laquelle un corps pesant tombe d'un point donné à un autre point donné dans le temps le plus bref; et de construire la Courbe Sychrone, de l'onde des rayons.

[..] Nous admirons à juste titre, le fait que Huygens fut le premier à découvrir qu'un point pesant chute dans le même temps [de façon tautochrone] le long d'une cycloïde quelconque, quelque soit le point de la cycloïde où le mouvement commence : mais je ne sais si on ne sera pas plus admiratif quand j'aurais dit que la *Cycloïde*, ou la *Tautochrone de Huygens*, est bel et bien notre *Brachystochrone* recherchée ; et j'ai acquis cette connaissance de deux manières, l'une indirecte et l'autre directe. Quand j'ai suivi la première, j'ai découvert un admirable accord entre la trajectoire courbe d'un rayon lumineux dans un milieu continûment variable et notre *Courbe Brachystochrone* ; j'ai aussi trouvé d'autres points, dans lesquels il y a je ne sais quoi de mystérieux qui sera utile pour la Dioptrique. Voilà pourquoi il sera vrai, comme je l'avais affirmé dans l'exposé du problème, que ce n'est pas du tout dans la pure spéculation, mais dans d'autres sciences, par exemple la Dioptrique, qu'on tirera le plus grand profit. Mais afin de confirmer mes dires par des faits, voici une première façon de donner une preuve !

Fermat, dans une lettre à de La Chambre [..], a montré qu'un rayon lumineux passant d'un milieu rare à un milieu dense, est dévié vers la perpendiculaire d'une façon telle que (en supposant que le rayon se meuve continûment depuis le point lumineux jusqu'au point illuminé) il suive le chemin qui nécessite le temps le plus court : avec l'aide de ce principe, il montre que le sinus de l'angle d'incidence et le sinus de l'angle de réfraction sont en raison directe de la rareté des milieux, c'est-à-dire dans le rapport même des vitesses avec lesquelles le rayon pénètre ces milieux. C'est ce que par la suite Leibniz, en esprit très fin, dans les *Actes des Savants* 1682, p.185 et peu après le célèbre Huygens dans son *Traité de la Lumière*, p.40, ont démontré de façon plus concise et par de très solides arguments, et ont établi le principe physique, ou mieux métaphysique, lui-même, que Fermat semble avoir abandonné sur l'insistence de Clerselier, se contentant de sa preuve géométrique et renonçant à ses droits trop légèrement.

Maintenant, nous allons considérer un milieu qui n'est pas uniformément dense, mais qui est séparé par des lamelles infinies superposées horizontalement, dont les interstices sont remplis d'une matière diaphane d'une certaine rareté augmentant ou décroissant suivant une loi définie. Il est alors manifeste qu'un rayon, que nous considérerons comme une particule, ne se propagera pas en ligne droite, mais le long d'une trajectoire courbe (ceci a déjà été noté par Huygens dans le *Traité de la Lumière* mentionné ci-dessus, mais il n'a pas déterminé du tout la nature elle-même de la courbe), nature qui est telle que la particule, dont les accroissements ou diminutions de

vitesse dépendent des degrés de rareté du milieu, passera de point en point dans le temps le plus court. Il est établi que, puisque les sinus des angles de réfraction aux points de séparation sont les uns aux autres comme les raretés des milieux, ou comme les vitesses des particules, la courbe a la propriété suivante : les sinus de ses angles d'inclinaison par rapport à la verticale sont partout dans la proportion des vitesses. Mais maintenant, ceci ayant été dit, il apparaît sans peine que la *Courbe Brachystochrone* est la courbe que suivrait un rayon lumineux lors de la traversée d'un milieu dont les raretés seraient dans le rapport des vitesses qu'un corps pesant acquièrerait durant sa chute verticale. En fait, que l'augmentation des vitesses dépende de la nature d'un milieu plus ou moins résistant, comme dans le cas du rayon, ou que nous fassions abstraction du milieu et considérons que, à partir d'une autre cause, la même accélération peut être conçue comme produite par une loi donnée, comme dans le cas du corps pesant ; dans les deux cas, la courbe est parcourue dans le temps le plus court, qui nous interdit de remplacer l'un par l'autre ?

De cette façon, nous pouvons résoudre le problème pour une loi arbitraire de l'accélération. Il est alors réduit à la détermination du chemin suivi par un rayon lumineux à travers un milieu de densité continûment variable. Donc soit FGD (fig.1) le milieu limité par la ligne horizontale FG sur laquelle le point lumineux A est situé ; soit la courbe donnée AHE , avec les axes verticaux AD , ses ordonnées HC déterminant les raretés du milieu à l'altitude AC ou les vitesses des rayons lumineux ou des particules au point M ; soit AMB la courbe du rayon lumineux que nous recherchons. Notons AC, x ; CH, t ; CM, y ; et les différentielles Cc, dx ; les différentielles nm, dy ; les différentielles Mm, dz ; enfin, soit a une constante arbitraire. Alors Mm est le sinus total, mn le sinus de l'angle de réfraction ou de l'angle d'inclinaison de la courbe par rapport à la verticale, et comme nous l'avons vu auparavant, le rapport de mn à HC est constant, c'est-à-dire $dy : t = dz : a$; d'où l'équation $ady = tdz$, ou $aady^2 = ttdz^2 = ttdx^2 + ttdy^2$. Ce qui donne une équation différentielle générale pour la courbe cherchée AMB : $dy = tdx : \sqrt{aa - tt}$. De cette manière, j'ai résolu en une seule fois deux problèmes importants, l'un optique, l'autre mécanique, et j'ai réalisé plus que ce que je demandais aux autres ; j'ai montré que les deux problèmes, pris dans deux parties entièrement séparées des Mathématiques, sont de même nature.

Maintenant prenons un cas spécial, à savoir l'hypothèse commune introduite et démontrée en premier par Galilée, selon laquelle les vitesses des corps en chute libre sont les unes aux autres comme les racines carrées [en raison sous-doublée] des altitudes parcourues ; c'est en cela que consiste réellement la question. Sous cette hypothèse, la courbe donnée AHE sera une parabole, c'est-à-dire que $tt = ax$ et $t = \sqrt{ax}$, si cette valeur est substituée dans l'équation générale, nous obtiendrons : $dy = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, d'où je conclus que la courbe *Brachystochrone* est la *Cycloïde* ordinaire.

Jean Bernoulli, *Opera omnia*, I, p187-193.

trad. F.Viot, avec l'amical soutien de C.Beaujean et J.C.Bos.

ANNEXE 2

J.L. Lagrange

Oeuvres, I, p334-364

ESSAI D'UNE NOUVELLE METHODE

POUR

DÉTERMINER LES MAXIMA ET LES MINIMA

DEN

FORMULES INTÉGRALES INDÉFINIES.

(*Miscellanea Taurinensia*, t. II, 1760-1761.)

Pour peu qu'on soit au fait des principes du Calcul différentiel, on connaît la méthode de déterminer les plus grandes et les moindres ordonnées des courbes; mais il est des questions *de maximis* et *minimis* d'un genre plus élevé et qui, quoique dépendantes de la même méthode, ne s'y appliquent pas si aisément. Ce sont celles où il s'agit de trouver les courbes mêmes, dans lesquelles une expression-intégrale donnée soit un maximum ou un minimum par rapport à toutes les autres courbes.

Le premier Problème de ce genre, que les Géomètres aient résolu, est celui de la *Brachistochrone*, ou ligne de la plus vite descente, que M. Jean Bernoulli proposa vers la fin du siècle passé. On n'y parvint alors que par des voies particulières, et ce ne fut que quelque temps après, et à l'occasion des recherches sur les *Isopérimètres*, que le grand Géomètre dont nous venons de parler et son illustre frère M. Jacques Bernoulli, donnèrent quelques règles générales pour résoudre plusieurs autres questions de même nature. Mais ces règles n'ayant pas assez d'étendue, le célèbre M. Euler a entrepris de réduire toutes les recherches de ce genre à une méthode générale, dans l'ouvrage intitulé : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes : sive solutio*

Problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti; ouvrage original et qui brille partout d'une profonde science du calcul. Cependant, quelque ingénieuse et féconde que soit sa méthode, il faut avouer qu'elle n'a pas toute la simplicité qu'on peut désirer dans un sujet de pure analyse. L'Auteur le fait sentir lui-même dans l'Article 39 du Chapitre II de son livre, par ces paroles : « Desideratur itaque methodus a resolutione geometrica et lineari libera, qua pateat in tali investigatione maximi minimique, loco Pdp scribi debere — $p dP$. »

Maintenant voici une méthode qui ne demande qu'un usage fort simple des principes du Calcul différentiel et intégral; mais ayant tout je dois avertir que, comme cette méthode exige que les mêmes quantités varient de deux manières différentes, pour ne pas confondre ces variations, j'ai introduit dans mes calculs une nouvelle caractéristique δ . Ainsi δZ exprimera une différence de Z qui ne sera pas la même que dZ , mais qui sera cependant formée par les mêmes règles; de sorte qu'ayant une équation quelconque $dZ = m dx$, on pourra avoir également $\delta Z = m \delta x$, et ainsi des autres. Cela posé, je viens d'abord au Problème suivant.

1.

PROBLÈME I. — Étant proposée une formule intégrale indéfinie représentée par $\int Z$, où Z désigne une fonction quelconque déterminée des variables x, y, z , et de leurs différences $dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \dots$, trouver la relation que ces variables doivent avoir entre elles, pour que la formule $\int Z$ devienne un maximum ou un minimum.

SOLUTION. — Suivant la méthode connue de *maximis* et *minimis*, il faudra différencier la proposée $\int Z$, en regardant les quantités $x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \dots$ comme variables, et faire la différentielle, qui en résulte, égale à zéro. Marquant donc ces variations par δ , on aura d'abord, pour l'équation du maximum ou minimum,

$$\delta \int Z = 0,$$

ou, ce qui en est l'équivalent,

$$\int \delta Z = 0.$$

Or, soit Z tel que

$$\begin{aligned} \delta Z = & n \delta x + p \delta dx + q \delta d^2x + r \delta d^3x + \dots \\ & + N \delta y + P \delta dy + Q \delta d^2y + R \delta d^3y + \dots \\ & + \nu \delta z + \varpi \delta dz + \chi \delta d^2z + \rho \delta d^3z + \dots, \end{aligned}$$

il en viendra l'équation

$$\begin{aligned} & \int n \partial x + \int p \partial dx + \int q \partial d^2 x + \int r \partial d^3 x + \dots \\ & + \int N \partial y + \int P \partial dy + \int Q \partial d^2 y + \int R \partial d^3 y + \dots \\ & + \int v \partial z + \int \varpi \partial dz + \int \chi \partial d^2 z + \int \rho \partial d^3 z + \dots = 0; \end{aligned}$$

mais on comprend aisément que

$$\partial dx = d \partial x, \quad \partial d^2 x = d^2 \partial x,$$

et ainsi des autres; de plus, on trouve, par la méthode des intégrations par parties,

$$\begin{aligned} \int p d \partial x &= p \partial x - \int dp \partial x, \\ - \int q d^2 \partial x &= q d \partial x - dq \partial x + \int d^2 q \partial x, \\ \int r d^3 \partial x &= r d^2 \partial x - dr d \partial x + d^2 r \partial x - \int d^3 r \partial x, \end{aligned}$$

et ainsi du reste; donc l'équation précédente se changera en celle-ci :

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int (n - dp + d^2 q - d^3 r + \dots) \partial x \\ & + \int (N - dP + d^2 Q - d^3 R + \dots) \partial y \\ & + \int (v - d\varpi + d^2 \chi - d^3 \rho + \dots) \partial z \\ & + (p - dq + d^2 r - \dots) \partial x + (q - dr + \dots) d \partial x + (r - \dots) d^2 \partial x + \dots \\ & + (P - dQ + d^2 R - \dots) \partial y + (Q - dR + \dots) d \partial y + (R - \dots) d^2 \partial y + \dots \\ & + (\varpi - d\chi + d^2 \rho - \dots) \partial z + (\chi - d\rho + \dots) d \partial z + (\rho - \dots) d^2 \partial z + \dots = 0; \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tirera premièrement l'équation indéfinie

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} & (n - dp + d^2 q - d^3 r + \dots) \partial x \\ & + (N - dP + d^2 Q - d^3 R + \dots) \partial y \\ & + (v - d\varpi + d^2 \chi - d^3 \rho + \dots) \partial z = 0, \end{aligned} \right.$$

et ensuite l'équation déterminée

$$(C) \quad \left\{ \begin{aligned} & (p - dq + d^2 r - \dots) \partial x + (q - dr + \dots) d \partial x + (r - \dots) d^2 \partial x + \dots \\ & + (P - dQ + d^2 R - \dots) \partial y + (Q - dR + \dots) d \partial y + (R - \dots) d^2 \partial y + \dots \\ & + (\varpi - d\chi + d^2 \rho - \dots) \partial z + (\chi - d\rho + \dots) d \partial z + (\rho - \dots) d^2 \partial z + \dots = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation se rapporte au dernier point de l'intégrale $\int Z$; mais il faut observer que, comme chacun de ses termes comme $p \partial x$ dépend d'une intégration partielle de la formule $\int p d \partial x$, on peut lui ajouter ou en retrancher une quantité constante. Or, la condition par laquelle cette constante doit se déterminer est qu'elle fasse évanouir le terme $p \partial x$ au point où commence l'intégrale $\int p d \partial x$; il faudra donc retrancher de $p \partial x$

sa valeur en ce point; d'où résulte la règle suivante. Soit le premier membre de l'équation (C), exprimé généralement par M, et soit la valeur de M, au point où commence l'intégrale $\int Z$, désignée par M, et au point où cette intégrale finit, désignée par M', on aura $M' - M = 0$ pour l'expression complète de l'équation (C).

Maintenant, pour se défaire dans les équations trouvées des différences indéterminées $\delta x, \delta y, \delta z, d\delta x, d\delta y, \dots$, on examinera d'abord si, par la nature du Problème, il y a entre elles quelque rapport donné, et les ayant réduites au plus petit nombre possible, on fera ensuite le coefficient de chacune de celles qui resteront égales à zéro. Si elles sont absolument indépendantes les unes des autres, l'équation (B) nous donnera sur-le-champ les trois suivantes :

$$\begin{aligned} n - dp + d^2 q - d^3 r + \dots &= 0, \\ N - dP + d^2 Q - d^3 R + \dots &= 0, \\ v - d\varpi + d^2 \gamma - d^3 \rho + \dots &= 0. \end{aligned}$$

II.

EXEMPLE. — Soit cherchée la courbe brachistochrone dans le vide. Nommant x l'abscisse verticale, et y et z les deux ordonnées horizontales et perpendiculaires l'une à l'autre, la formule qui exprime le temps sera

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}},$$

laquelle étant comparée à $\int Z$, on a

$$Z = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}};$$

et différentiant par δ , suivant les règles ordinaires des différentiations,

$$\begin{aligned} \delta Z = & - \frac{\delta x \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{2x \sqrt{x}} + \frac{dx \delta dx}{\sqrt{x} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \\ & + \frac{dy \delta dy}{\sqrt{x} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} + \frac{dz \delta dz}{\sqrt{x} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}; \end{aligned}$$

donc, posant, pour abréger,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

on a

$$n = - \frac{ds}{2x \sqrt{x}}, \quad p = \frac{dx}{\sqrt{x} ds}, \quad P = \frac{dy}{\sqrt{x} ds}, \quad \varpi = \frac{dz}{\sqrt{x} ds},$$

et toutes les autres quantités $q, r, N, Q, \dots$, égales à zéro.

III.

Premier cas. — Or, si le Problème est de trouver en général, entre toutes les courbes possibles, celle de la plus vite descente, on aura en ce cas les équations

$$u - dp = 0, \quad -dP = 0, \quad -d\pi = 0,$$

savoir

$$-\frac{ds}{2x dx} - d \frac{dx}{\sqrt{x} ds} = 0, \quad -d \frac{dy}{\sqrt{x} ds} = 0, \quad -d \frac{dz}{\sqrt{x} ds} = 0;$$

ces trois équations devant représenter une courbe unique, il faut qu'elles se réduisent à deux seulement : c'est de quoi il est facile de s'assurer par le calcul, car la seconde étant multipliée par $2 \frac{dy}{\sqrt{x} ds}$ et ajoutée à la troisième multipliée par $2 \frac{dz}{\sqrt{x} ds}$, il vient, à cause de $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$,

$$d \left(\frac{1}{x} - \frac{dx^2}{x ds^2} \right) = 0,$$

savoir, en différentiant et divisant le tout par $\frac{2 dx}{\sqrt{x} ds}$,

$$-\frac{ds}{2x\sqrt{x}} - d \frac{dx}{\sqrt{x} ds} = 0,$$

qui est la première équation.

Présentement, si l'on intègre les deux équations

$$d \frac{dy}{\sqrt{x} ds} = 0, \quad d \frac{dz}{\sqrt{x} ds} = 0,$$

on a

$$\frac{dy}{\sqrt{x} ds} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \frac{dz}{\sqrt{x} ds} = \frac{1}{\sqrt{b}},$$

d'où l'on tire d'abord

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}},$$

ce qui fait voir que la courbe cherchée est toute dans un même plan vertical, et que par conséquent elle est à simple courbure. Pour la mieux connaître, rapportons-la à deux coordonnées prises dans son même plan. Que x soit l'une et t l'autre, on aura

$$\sqrt{y^2 + z^2} = t,$$

et puisque $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, on aura en intégrant, sans ajouter de constante, parce que je suppose que l'axe des x passe par la courbe même,

$$z = y \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

d'où l'on tire

$$z = t \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \quad y = t \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}, \quad dy = dt \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dt^2},$$

et enfin

$$\frac{dy}{\sqrt{x} ds} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b} \sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{dx^2 + dt^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

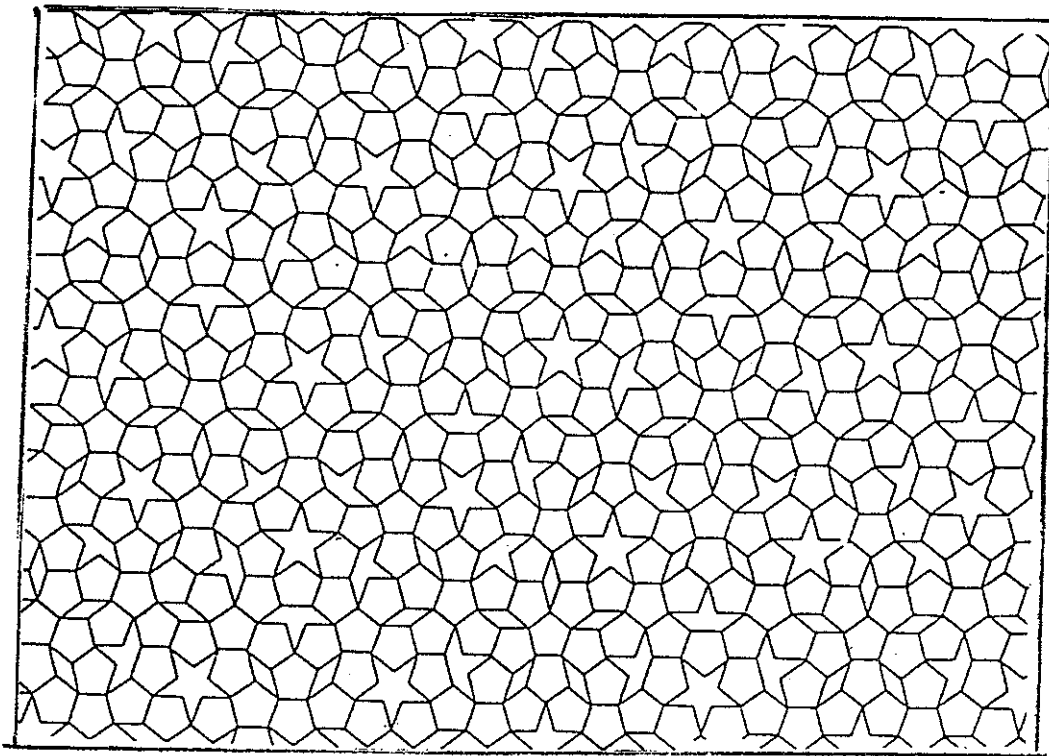
ce qui se réduit, en posant $\frac{ab}{a+b} = c$, à

$$dt = \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{c-x}},$$

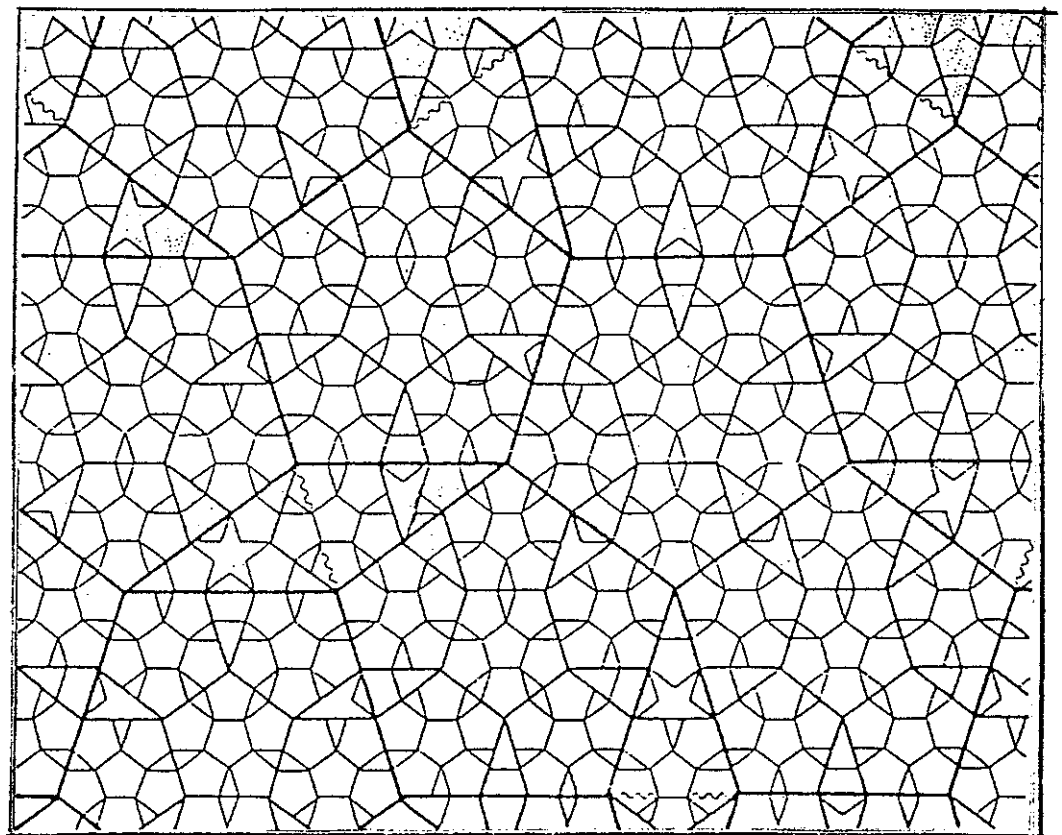
équation d'une cycloïde décrite sur une base horizontale par un cercle, dont le diamètre est égal à c .



Portrait de Lagrange



Penrose : deux exemples de pavages du plan



CONTES DU LUNDI

1) Pavages presque-périodiques

Marianne Guillemot

Quasi-cristaux et pavages.

L'histoire des pavages presque-périodiques est très récente. L'idée, plus ou moins ludique, d'un pavage non périodique du plan au moyen d'un nombre fini de formes fixes, date d'une vingtaine d'années; la découverte expérimentale des quasi-cristaux puis la théorie générale expliquant ces pavages et donnant moyen de les construire, datent de moins de dix ans.

Nous ne pouvons exposer ici les éléments de la cristallographie. Disons seulement qu'un système cristallin décrit, à l'échelle macroscopique, certaines symétries des minéraux qui reflètent des symétries existant dans la structure des molécules. Ces symétries doivent être compatibles avec les translations qui permettent de paver l'espace, sans empiètement ni lacune, avec des cristaux identiques. Cela implique que les axes de symétrie (appelés aussi axes de rotation) de ces cristaux ne peuvent être que d'ordre 2, 3, 4 ou 6. Les autres symétries autour d'un axe sont interdites, en particulier celle d'ordre 5.

C'est pourquoi grande fût la surprise provoquée, en 1984, par quatre spécialistes de la chimie métallurgique: D. Sheartman et I. Blech (Haïfa, Israël) J. W. Cahn (Gaithersburg, Etats Unis), D. Gratias (Centre d'Etudes de chimie métallurgique du CNRS à Vitry-sur-Seine). Ces chercheurs firent couler un mélange en fusion d'aluminium et de manganèse sur un tambour tournant à grande vitesse: l'alliage qui s'étalait sur le tambour, très brusquement refroidi, se détacha sous forme d'un ruban de quelques dizaines de microns d'épaisseur. En observant au microscope électronique ce ruban on obtint, avec une certaine orientation, une figure présentant une évidente symétrie d'ordre 5. En faisant tourner le ruban on trouva, à leur place exacte, les autres axes de symétrie de l'icosaèdre régulier.

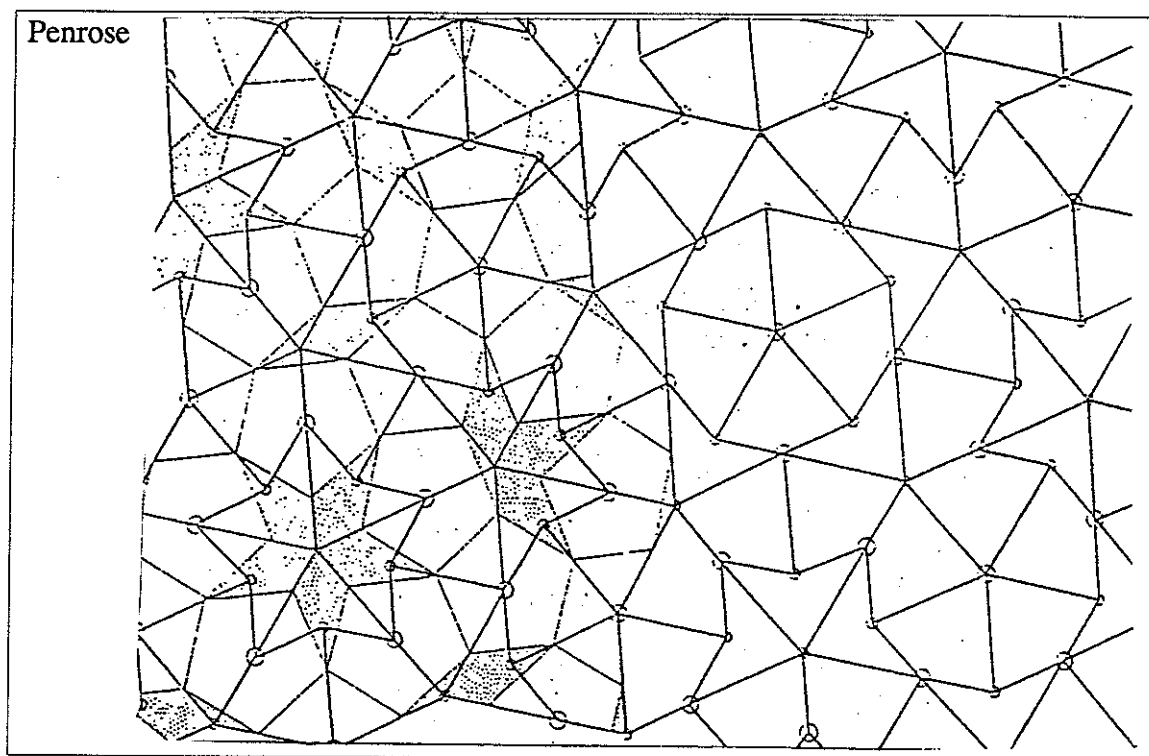
Rappelons que les symétries d'un système cristallin sont le mieux mises en évidence lorsqu'on fait diffracter un faisceau de rayons X ou d'électrons à travers les cristaux. L'image obtenue est formée de taches plus ou moins brillantes, disposées sur les noeuds du réseau conjugué du réseau de l'espace définissant le système cristallin présentant les mêmes symétries (chaque axe du réseau conjugué est orthogonal à un plan du réseau cristallin). La figure obtenue correspond à la transformée de Fourier de la densité électronique du système cristallin.

L'alliage créé par les quatre chimistes présentait donc une structure cristalline avec symétrie icosaédrique, ce qui est impossible. Comment expliquer cette situation paradoxale?

La réponse fut donnée par les mathématiques.

Des pavages non périodiques.

Les premiers travaux mathématiques dans ce domaine sont ceux du physicien et mathématicien anglais Roger Penrose qui, vers 1972, construisit des pavages non périodiques du plan de plusieurs façons différentes, dont l'une par deux types de losanges, l'un d'angles $\pi/5$, $4\pi/5$, l'autre d'angles $2\pi/5$, $3\pi/5$.. Ces pavages amenèrent Penrose à faire breveter un jeu, et ne donnèrent lieu à une publication scientifique que quelques années plus tard [1]. D'autres auteurs s'intéressèrent à ces structures, et c'est en 1986 que Michel Duneau et André Katz (Laboratoire de Physique Théorique de l' Ecole Polytechnique) réussirent à généraliser ces travaux en inventant une méthode permettant d'obtenir des pavages non périodiques d'espaces de dimension quelconque par projection de structures périodiques d'espaces de dimension supérieure.



Par exemple, un pavage du type de celui de Penrose peut être obtenu par projection d'une partie d'un réseau cubique de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^2$.

Une projection d'une partie d'un réseau cubique de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^3$ a permis à Duneau et Katz de répondre à la question des chimistes, en construisant un pavage de $\mathbb{R}^3$ par des rhomboèdres. Ce pavage, ainsi que celui de Penrose, a une structure presque périodique⁽¹⁾ - comme nous le verrons plus loin - qui permet d'expliquer l'apparition de cette symétrie d'ordre 5 [2, 3, 4].

(1) Voir le dernier paragraphe.

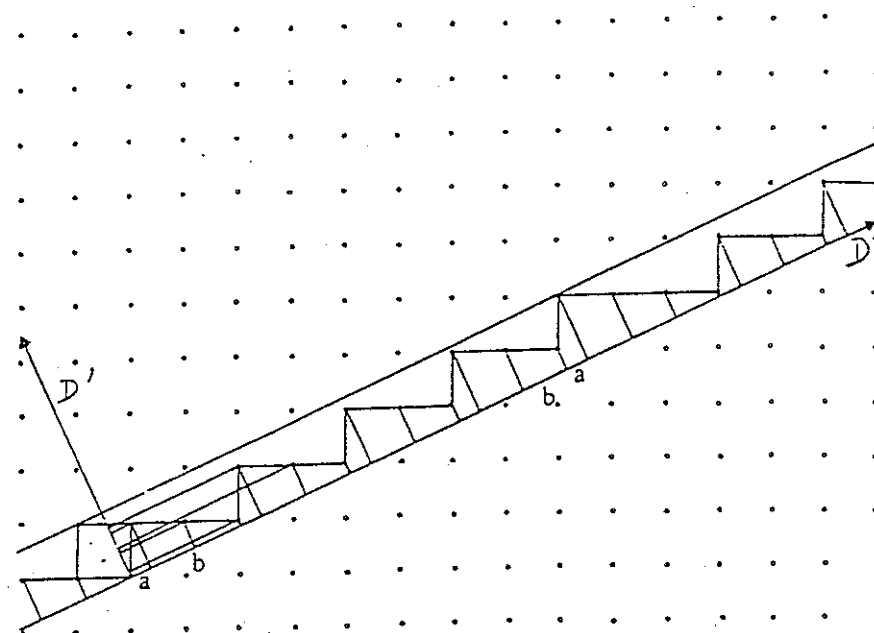
La méthode de la bande: pavage de la droite.

Pour présenter la "méthode de la bande" dont ils sont les auteurs, Duneau et Katz ont d'abord envisagé le cas de la dimension 1; idée ingénieuse, qui permet de mieux comprendre, par la suite, les constructions plus complexes faites dans des dimensions plus élevées.

On considère le plan $\mathbb{R}^2$ (figure 1), rapporté à un système d'axes rectangulaires, et le réseau $\mathbb{Z}^2$ des points à coordonnées entières. Soit K un carré de côté 1, ayant ses sommets dans le réseau $\mathbb{Z}^2$, et D une droite quelconque non parallèle aux axes du réseau. On construit la bande B du plan balayée par le carré K translaté parallèlement à la direction D ; on suppose cette bande semi-ouverte, c'est-à-dire ne contenant qu'une de ses droites frontières.

Il existe alors une ligne brisée unique L passant par tous les points de $\mathbb{Z}^2$ contenus dans la bande B et formée d'arêtes du réseau. La projection orthogonale sur D de cette ligne brisée détermine le pavage de D au moyen de deux sortes de "pavés", de longueurs respectives $|\cos \alpha|$ et $|\sin \alpha|$ ($\tan \alpha$ étant la pente de la droite D).

Figure 1: Le pavage de la droite par la méthode de la bande.



Le choix de la pente de la droite D par rapport au réseau détermine les propriétés de périodicité du pavage. Il est facile de voir que si $\tan \alpha$ est rationnel, le pavage est périodique. Si $\tan \alpha$ est irrationnel - ce que nous supposons par la suite - le pavage de D n'est pas périodique, mais possède de remarquables propriétés liées à sa presque périodicité. En particulier, toute partie finie du pavage se répète une infinité de fois dans le pavage.

En effet, toute partie finie du pavage est la projection dans D d'un morceau L_1 de la ligne brisée L . Si D' est la perpendiculaire à D dans le plan $\mathbb{R}^2$, la projection orthogonale de $\mathbb{Z}^2 \cap B$ dans l'intervalle semi ouvert $I = D' \cap B$ est injective et dense; il en résulte l'existence d'une infinité de translations de $\mathbb{R}^2$ qui conservent $\mathbb{Z}^2$ et qui chacune transforme le morceau L_1 en une copie de lui-même contenue dans B ; par unicité, cette copie de L_1 est contenue dans L , et sa projection dans D appartient donc au pavage; d'où le résultat annoncé.

La méthode de la bande:

pavage du plan à quasi-symétrie octogonale.

Envisageons le plus simple des pavages presque-périodiques présentant des éléments de symétrie interdits par la cristallographie classique: la quasi-symétrie octogonale. Ce pavage est construit en généralisant la méthode de la bande vue plus haut, en remplaçant le plan $\mathbb{R}^2$ par l'espace $\mathbb{R}^4$ et la droite D par un sous espace P de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$, appelé plan par commodité et que nous identifierons au plan que nous voulons paver. De plus, si ce plan est conservé par certaines symétries du réseau $\mathbb{Z}^4$, ces symétries se retrouvent "presque" dans le pavage, comme nous allons le voir. On vérifie facilement que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rapportée aux axes de $\mathbb{R}^4$, définit une transformation qui conserve $\mathbb{Z}^4$ et qui est une symétrie d'ordre 8.

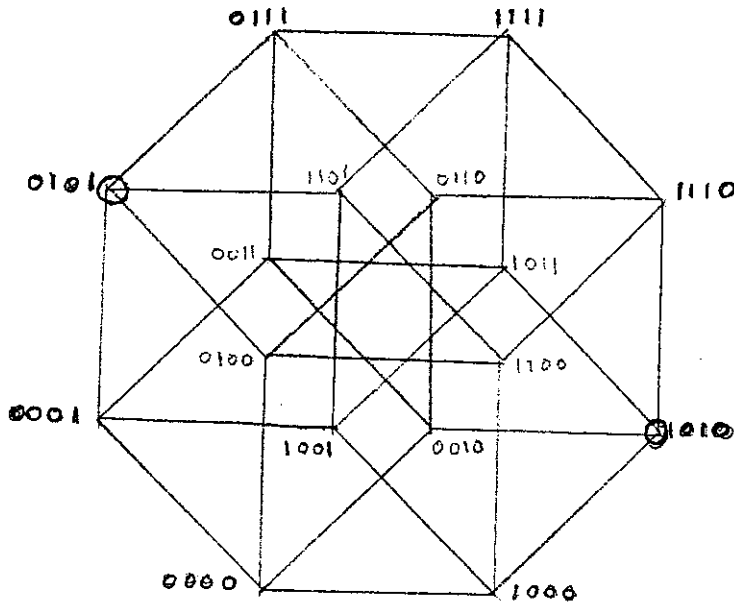
On peut construire deux plans P et P', conservés par A, orthogonaux entre eux, et une nouvelle base orthogonale de $\mathbb{R}^4$ dont les deux premiers vecteurs sont dans P, les deux autres dans P', et à laquelle est associée le changement de coordonnées suivant (x,y,z,t et X,Y,Z,T, désignant respectivement les anciennes et les nouvelles coordonnées.):

$$I \begin{cases} X = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{z-t}{2} \\ Y = \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z+t}{2} \\ Z = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z-t}{2} \\ T = \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z-t}{2} \end{cases}$$

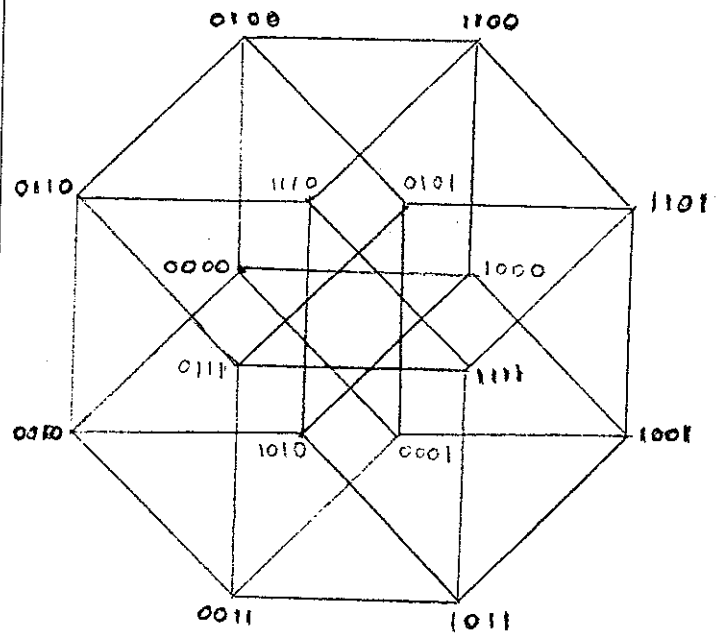
Rappelons que C^4 , cube unité de $\mathbb{R}^4$, possède 16 sommets, 32 arêtes, 24 "facettes" de dimension 2, 8 "faces" de dimension 3. On remarque que la transformation A, restreinte à P, est une rotation d'angle $-\pi/4$; cela explique que la projection sur P du cube C^4 possède la symétrie d'ordre 8; les 16 sommets de C^4 se projettent sur les sommets de deux octogones réguliers concentriques (figure 2). Les projections des arêtes de C^4 ont les directions des axes des (X,Y) de P et de leurs bissectrices, et ont toutes même longueur. Les facettes se projettent suivant des carrés et des losanges d'angles $\pi/4$ et $3\pi/4$; il y a deux orientations différentes pour les carrés et quatre pour les losanges, se déduisant les uns des autres par symétrie d'ordre 8.

La transformation A, restreinte à P', est une rotation d'angle $\pi/4$. Les projections sur le plan P' des sommets du cube C^4 forment également deux octogones concentriques, de mêmes dimensions que ceux de P; mais les sommets de C^4 qui se projettent dans P sur l'octogone "extérieur" se projettent dans le plan P' sur l'octogone "intérieur" et vice-versa. Rapportées respectivement aux axes des (X,Y) et des (Z,T), les projections des axes des x et des y de $\mathbb{R}^4$ ont mêmes directions (les bissectrices des axes) et mêmes sens; tandis que les projections des axes des z et des t ont mêmes directions (les bissectrices des axes) et sens contraires.

Figure 2



Projection dans P' du cube unité C^4
(les points notés 0101 et 1010 et la partie de la frontière située au dessus de ces points ne font pas partie de P').



Projection dans P du cube unité C^4

Appelons K' la projection dans P' de l'ensemble des points du cube C^4 , privée d'une partie de sa frontière (voir la figure 2). La bande B est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^4$ dont la projection dans P' est contenue dans K' . C'est l'ensemble des points (X, Y, Z, T) qui vérifient :

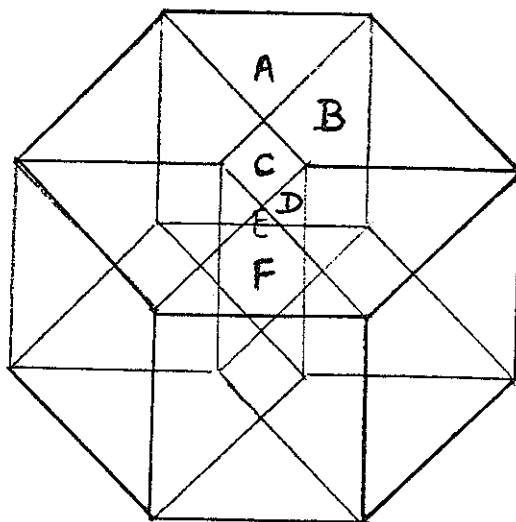
$$\text{II} \left\{ \begin{array}{lll} -\frac{1}{2} \leq Z = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z-t}{2} & < \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \leq T = \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z+t}{2} & < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \leq T+Z = \frac{x+y}{\sqrt{2}} + z & < 1 + \sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq T-Z = \frac{y-x}{\sqrt{2}} + t & < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

Le pavage est constitué par les projections dans P des facettes du réseau $\mathbb{Z}^4$ qui sont entièrement contenues dans B , c'est à dire dont les projections dans P' sont entièrement contenues dans K' , côtés et sommets compris. Il est donc formé de carrés et de losanges, répliques des projections des facettes de C^4 .

Les sommets de ce pavage sont donc les points (X,Y) donnés par les deux premières relations (I), où (x,y,z,t) sont des entiers vérifiant les inégalités (II). Il est facile de construire ce pavage de proche en proche par le calcul, à la main ou à la machine. Si on dispose d'un ordinateur, on pourra sans difficulté fabriquer un programme approprié. Mais si on veut construire à la main un début de pavage, la méthode géométrique met mieux en évidence ses propriétés.

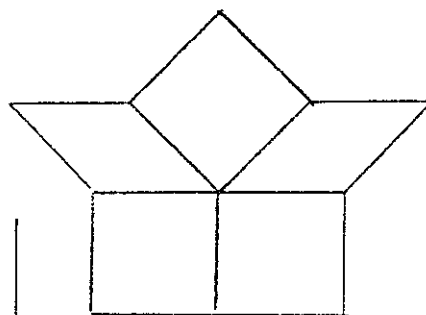
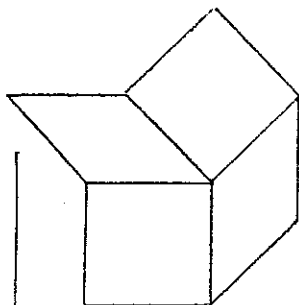
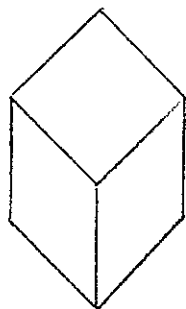
Utilisant la correspondance bijective entre m et m' , projections dans P et P' d'un même point M de $\mathbb{Z}^2 \cap B$, on voit ainsi comment le nombre et la position des facettes entourant un sommet m du pavage dépendent de la situation de m' dans K' . L'octogone K' peut être divisé en 6 zones (figure 3) limitées par les projections des arêtes de C^4 ; chacune de ces zones, sauf la zone centrale F , est formée de 8 morceaux se correspondant dans la symétrie d'ordre 8. On vérifie que si m' appartient à la zone A (resp. B, C, D, E, F), m est entouré de 3 facettes (resp. 4, 5, 6, 7, 8). Chaque répartition de facettes autour d'un sommet du pavage est donc nécessairement une des six représentées sur la figure 3— aux symétries d'ordre 8 près. les points de K' situés à la frontière de deux ou trois zones appartiennent à l'une de ces zones; le fait que K' soit privé d'une partie de sa frontière introduit dans ce problème une dissymétrie.

Figure 3

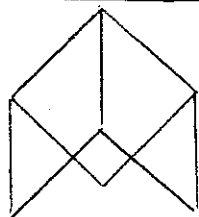


Projections

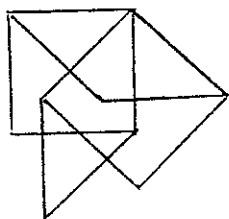
dans P



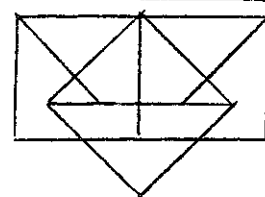
dans P'



Zone A

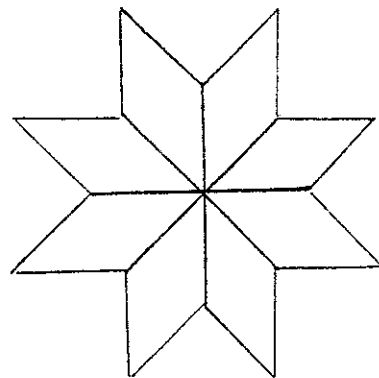
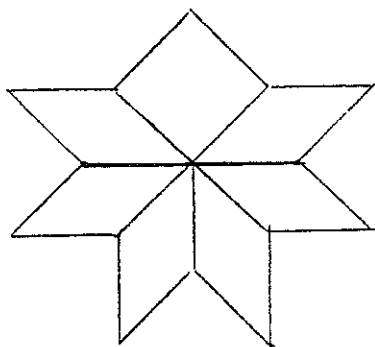
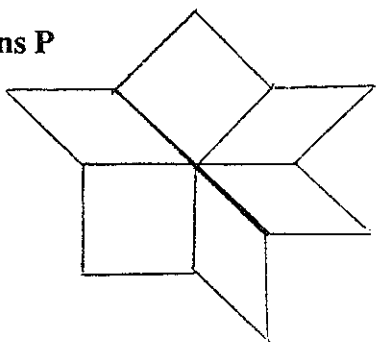


Zone B

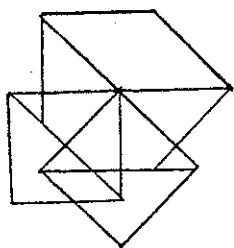


Zone C

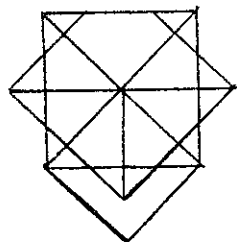
dans P



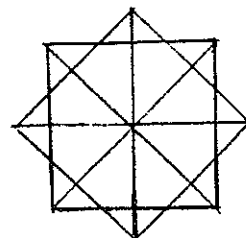
dans P'



Zone D



Zone E



Zone F

Propriétés du pavage liées à la presque périodicité.

Certaines régularités peuvent être observées dans ce pavage non périodique. Par exemple, les fréquences respectives des configurations A, B, C, D, E, F sont proportionnelles aux aires des zones de même nom dans K'; une fréquence dans le pavage étant la limite, quand n tend vers l'infini, de la fréquence de cette même configuration dans la restriction du pavage à un carré de côté n.

Cette propriété est due au fait que la projection de $\mathbb{Z}^4 \cap B$ dans K' est dense et homogène. On peut de même étudier les fréquences d'éléments particuliers du pavage, carrés ou losanges ayant une certaine orientation par exemple; ces fréquences sont proportionnelles aux aires de certains sous-ensembles de K' qu'on peut retrouver par la géométrie ou le calcul.

Le fait, examiné dans le cas de la droite, que toute partie finie du pavage se retrouve une infinité de fois dans le pavage, est vrai aussi pour notre pavage du plan et d'autres pavages du même type. De même, si la bande B est déplacée dans $\mathbb{R}^4$ par une translation, autrement dit si K' est déplacé dans P' par une translation, la même méthode donne un autre pavage de P tel que toute partie finie du premier pavage se retrouve une infinité de fois dans le second, et réciproquement; mais aucune translation, n'applique le premier pavage sur le second.

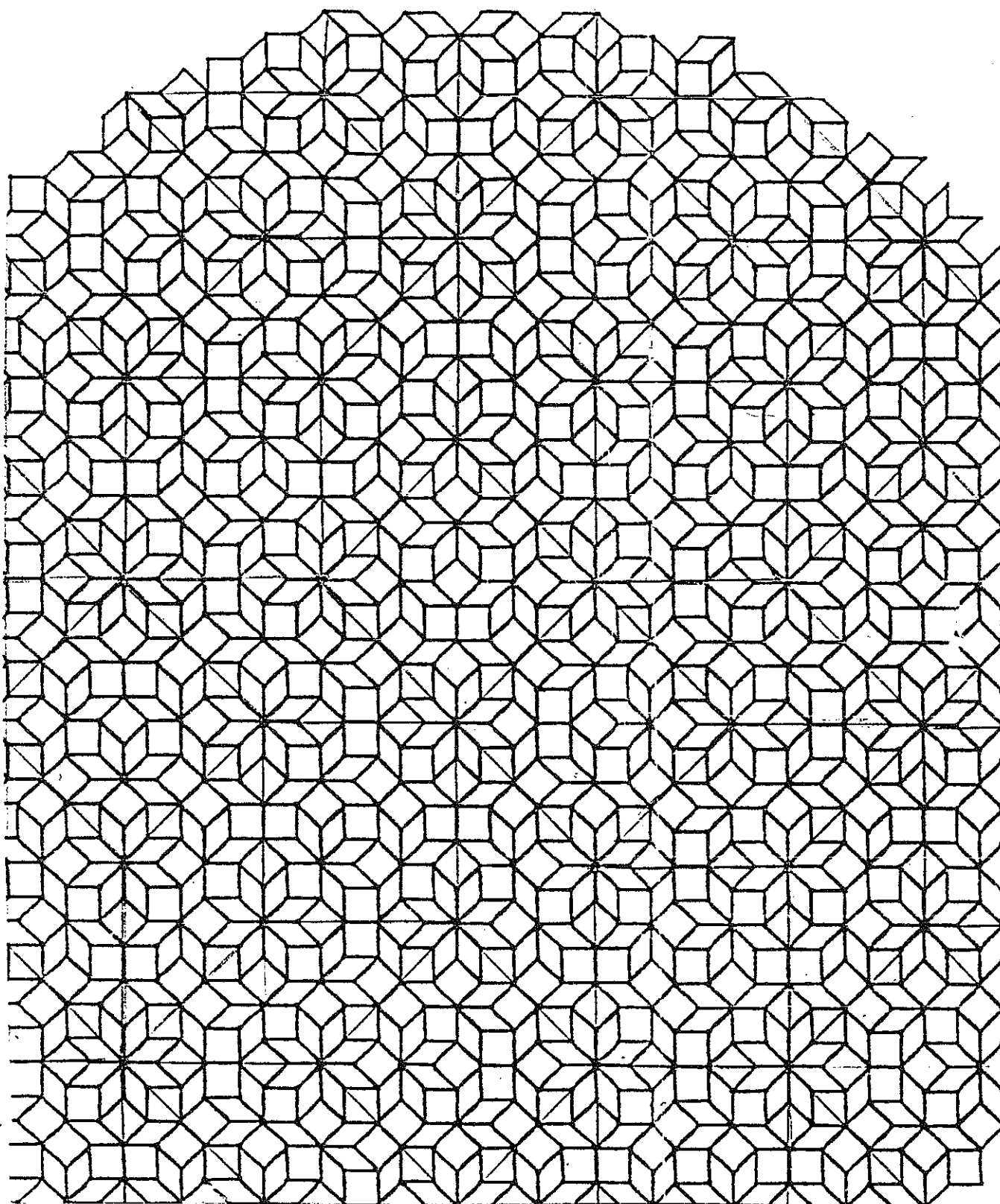
Une autre propriété remarquable du pavage est son autosimilarité. Si on "rétrécit" la bande B, celle ci contient un moins grand nombre de points de $\mathbb{Z}^4$, qui, par projection, donnent un pavage plus "grand". On peut décrire cette opération – contraction dans P', dilatation dans P – au moyen d'une matrice, rapportée aux axes (X, Y, Z, T) de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda' \end{pmatrix}$$

Nous voulons que cet opérateur conserve $\mathbb{Z}^4$; rapporté aux axes (x, y, z, t) par transposition, il doit donner une matrice à coefficients entiers. On vérifie que cela a bien lieu avec $\lambda = -(1 + \sqrt{2})$ et $\lambda' = \sqrt{2} - 1$. Cet opérateur S peut être itéré; S^2 donne une bande B_2 dont la section K_2 est homothétique de K' dans le rapport $3 - 2\sqrt{2}$. La bande B_2 peut-être translatée de façon que K_2 s'applique sur l'octogone central de K', c'est à dire sur la zone F. Il en résulte que l'ensemble des centres d'étoiles à huit branches du pavage forme un réseau semblable (en fait, "localement semblable") à celui du pavage dans le rapport $3 + 2\sqrt{2}$. (figure 4 voir page suivante)

Figure 4:

Pavage du plan à quasi-symétrie octogonale et pavage semblable des centres d'étoiles à huit branches.



Quelques mots sur la presque- périodicité.

Pourquoi ces pavages sont-ils qualifiés de presque- périodiques? Cette notion vient des fonctions presque périodiques, étudiées depuis les années 1930 [6,7]. Le modèle le plus simple en est la somme de deux fonctions périodiques dont le rapport des périodes est irrationnel, par exemple $\sin x + \sin \sqrt{2}x$. Les fonctions presque périodiques sont caractérisées par leurs séries de Fourier qui (s'il s'agit de fonctions d'une variable) sont de la forme

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n x}$$

où les c_n sont des constantes et les λ_n des nombres réels quelconques. Les conditions de convergence, pour ces séries, sont analogues à celles qui concernent les fonctions périodiques.

La théorie des distributions associe aux distributions périodiques des séries de Fourier de la même forme que celles des fonctions périodiques, mais convergeant au sens des distributions. Par généralisation, une série de la forme ci-dessus, où les λ_n sont des réels quelconques et qui converge au sens des distributions, définit une distribution presque-périodique.

Nous avons construit le pavage de la droite D par restriction de $\mathbb{Z}^2$ à la bande B, suivie d'une projection de $\mathbb{Z}^2 \cap B$ dans D. $\mathbb{Z}^2$ étant considéré comme une somme de mesures de Dirac situées aux sommets du réseau, nous pouvons appliquer la transformation de Fourier à chaque étape de cette construction; nous obtenons une expression de la forme

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} c_{m,n} \delta_{a^*m + b^*n}$$

$$\text{qui est la transformée de Fourier de } H = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} c_{m,n} e^{i(am + bn)x}$$

H est la série de Fourier de la distribution presque périodique définie par le pavage de la droite.

On peut étudier de cette façon tous les pavages construits à l'aide de la méthode de la bande. Notons que si une symétrie conserve le réseau de dimension supérieure et le plan (l'espace) du pavage, cette symétrie se retrouve dans la transformée de Fourier. Cela explique les symétries, interdites par la cristallographie, que les chimistes avaient observées au microscope électronique (car, comme il a été dit au début de l'article, ce qu'on observe correspond à une transformée de Fourier).

Figure 5:

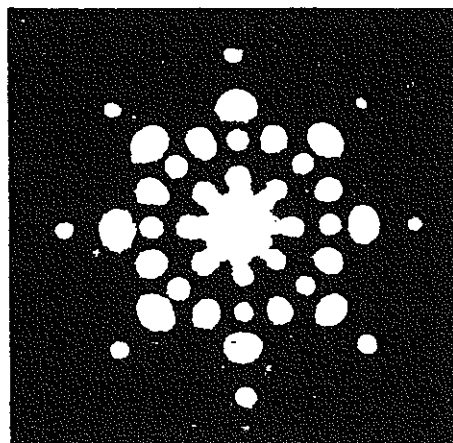


Diagramme de diffraction
à symétrie d'ordre 8
(Alliage Chrome, Nickel, Silicium)

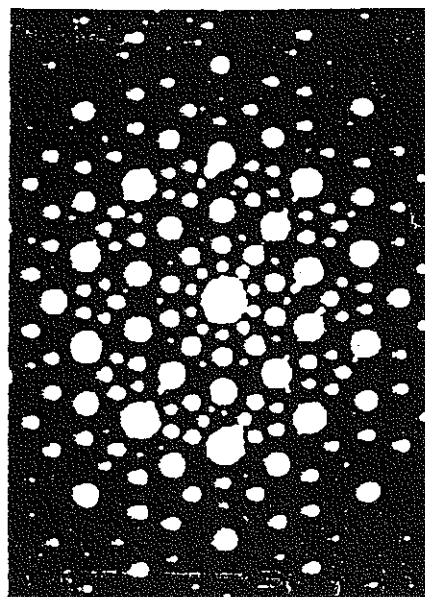


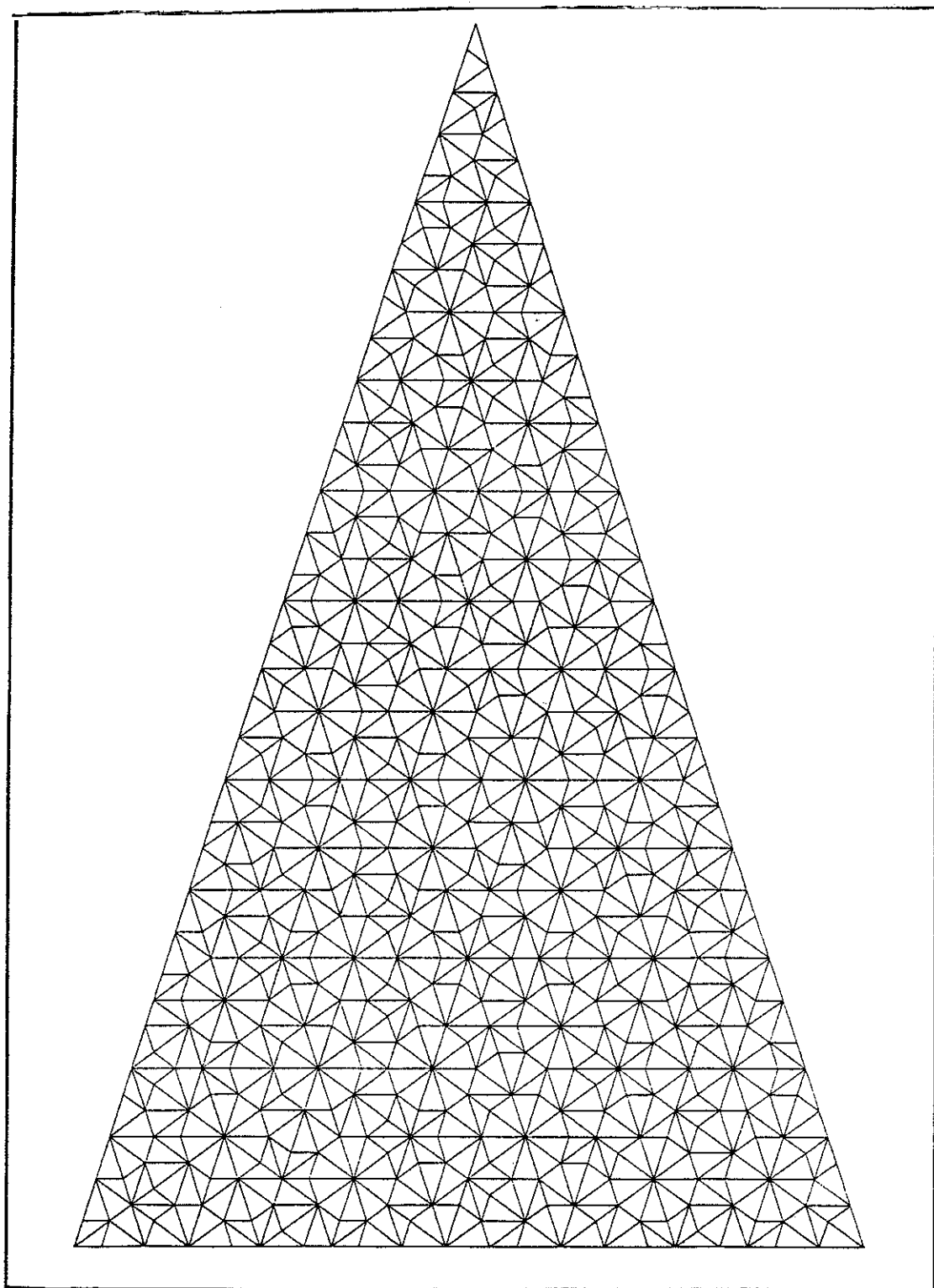
Diagramme de diffraction
à symétrie d'ordre 5
(Alliage Aluminium, Manganèse)

Bibliographie:

- 1- R. Penrose, Math. Intelligencer, 2, 32-37 (1979)
- 2- A. Katz, M. Duneau Jour. de Phys. 47 (1986) 181-196
- 3- A. Katz, M. Duneau Phys. Review letters, 54 n° 25 (1985) 2688-2691
- 4- A. Katz, M. Duneau, Images de la Physique (1986) Courrier du CNRS, 7-11
- 5- D. Gratias Cours à l'école d'été de Physique, édition interne, centre d'études de chimie métallurgique du CNRS de Vitry sur Seine.
- 6- A.S. Besicovitch Almost Periodic Functions, Cambridge Univ. Press, Dover publ. 1954
- 7- H. Bohr Almost Periodic Functions, Chelsea Publi. Company, 1947.
- 8- D. Gratias Les quasi-cristaux in La Recherche n°178 (juin 1986)
- 9- Revue du Palais de la Découverte n° spécial 40 (mai 1991)
- 10- Revue du Palais de la Découverte. n° 181 (octobre 1990)

Pavage équivalent au pavage de Penrose .

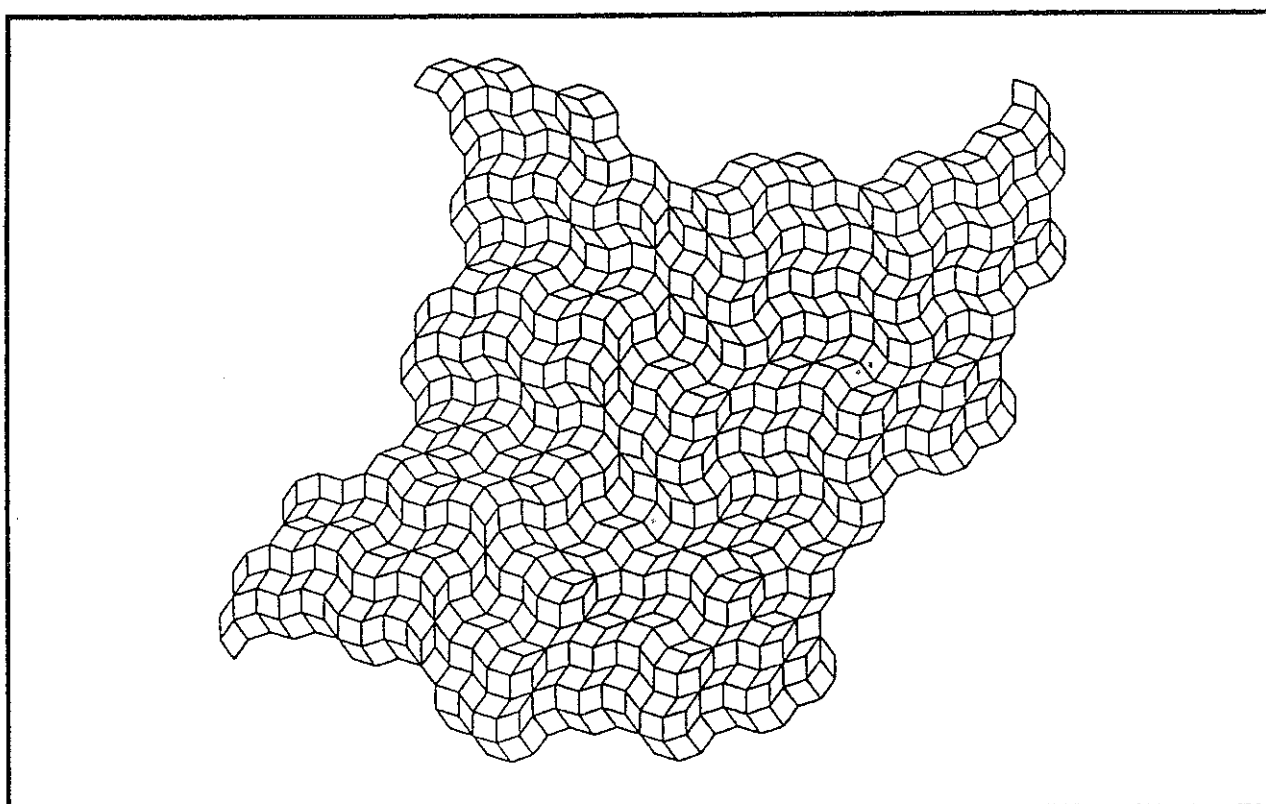
Robinson généralise le procédé de Penrose en utilisant ici des triangles. (se reporter aux articles de la revue de Palais de la Découverte [9] et [10])



Problèmes ouverts:

Il existe des pavages ni périodiques ni quasi-périodiques.

C'est le cas de la figure ci-dessous. Il est actuellement fait l'étude du spectre de Fourier pour ce pavage qui pose beaucoup de questions; en particulier la description précise de son spectre est encore inconnue. [9]



2) Equations du quatrième degré chez Descartes .

Michel Serfati.

Le début du Livre III de la *Géométrie*, de Descartes (Leyde, 1637) ¹, est tout entier consacré à l'étude des équations algébriques et de leurs racines. Un certain nombre de propriétés neuves pour l'époque sont ici annoncées; comme la factorisation de P par $X - a$, si a est une racine de P, ou bien la célèbre règle de variations de signes de Descartes ². Descartes cependant n'était guère intéressé par les problèmes algébriques en soi. Mais l'étude des racines des équations algébriques lui était devenue impérative depuis les deux premiers livres de la *Géométrie*, où il avait exposé, à partir de l'exemplaire problème de Pappus, la méthode de mise en équation de certains problèmes de géométrie. En fait, selon Descartes, tout doit se réduire à la construction géométrique des racines des équations algébriques : pour les racines des équations du second degré (équations " communes "), la règle et le compas suffisent évidemment. Descartes est alors naturellement amené à s'intéresser aux équations de degré supérieur (il vient tout juste de définir ce qu'est le degré) ³.

Or, pour le troisième et le quatrième degré, les méthodes de résolution *explicites* étaient disponibles depuis 1545 (*Ars Magna* : Cardan pour le 3° degré; Ferrari pour le 4° degré ⁴) et 1571 (*Algebra* , de Bombelli). Cependant, si les démonstrations avaient été données sous forme géométrique par l'école Italienne, les solutions effectives demeuraient nécessairement sous la forme algorithmique d'une règle-comptine. Pour donner les solutions sous forme algébrique, c'est à dire explicitées en fonction des constantes, il fallait évidemment que ces mêmes constantes fussent dénommées dans le calcul, ce qui n'avait pas été le cas avant Viète .

Nous nous référerons dans la suite , sous la forme (A.T , VI) , au Tome VI de l'Édition Adam - Tannery des *Oeuvres* de Descartes, qui contient la *Géométrie* .

² (AT , VI ,446) Cf. sur ce point :

J. BOROWCZYCK, *Sur l'histoire des démonstrations de la règle des variations de signe chez Descartes* . in : La démonstration Mathématique dans l' Histoire ,pp 275-312. Actes du Colloque d'Epistémologie et Histoire des Mathématiques .Besançon 12 et 13 Mai 1989 . Publication de IREM de Lyon . (43, Boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex) .

³ Sur ces questions de constructibilité chez Descartes, on pourra consulter : M.SERFATI , *Les Compas Cartésiens* , Archives de Philosophie, 56 , (1993) .

⁴ CARDAN J *Ars Magna sive de regulis algebraicis liber unus* . L'édition la plus utilisée est celle du Tome IV de la réédition posthume des *Oeuvres* de Cardan (Lyon . 1663) .L' *Ars Magna* contient un inventaire des équations du quatrième degré .

Pour le troisième degré, Descartes rappelle d'abord sans démonstration les formules de Cardan, et ce, sous une forme impeccable ⁵, donnant ainsi, pour la première fois dans l'histoire des Mathématiques, les formules de Cardan écrites sous forme moderne, " lisible" .

Pour le quatrième degré, Descartes fournit ici une méthode de résolution tout à fait neuve, différente de celle de Ferrari ⁶, mais utilisant également une résolvante une troisième degré. L'ensemble occupe une dizaine de pages du livre III ⁷. Fidèle cependant à une stratégie du secret, constante chez lui, Descartes fournit d'abord, sans aucune espèce d'explication⁸, les résultats, c'est à dire à la fois la résolvante et la factorisation du polynôme du quatrième degré. "

A) Le texte de Descartes .

D'abord écrit Descartes ⁹, " au lieu de :

$$x^4 * . p x x . q x . r \approx 0^{10} \quad (1)$$

Il faut écrire

$$y^6 + 2 p y^4 + (p^2 - 4 r) y^2 - q^2 = 0 \quad (2)$$

En guise d' explication, il reprend cependant plus loin la même équation ¹¹ : " au lieu de :

$$x^4 * . p x x . q x . r \approx 0$$

Il faut écrire ces deux autres :

$$+ x x - y x + \frac{1}{2} y y . \frac{1}{2} p . \frac{q}{2 y} = 0 \quad (3)$$

$$+ x x + y x + \frac{1}{2} y y . \frac{1}{2} p . \frac{q}{2 y} = 0 \quad (4) ,$$

Descartes donne ensuite deux exemples numériques :

$$x^4 - 4 x^2 - 8 x + 35 = 0 \quad (5)^{12}$$

et

$$x^4 - 17 x^2 - 20 x - 6 = 0 \quad (6)^{13}$$

⁵ (A.T , VI , 472)

⁶ Sur toutes les questions d'Histoire des équations du premier au quatrième degré inclus, on pourra consulter la suite de quatre excellentes brochures de l' I REM de Toulouse .

⁷ pages 454- 463 de l'édition A.T

⁸ .Sur laquelle néanmoins il s'explique à l'occasion : " Au reste j'ai omis icy les démonstrations de la plupart de ce que j'ai dit, à cause qu'elles m'ont semblé si faciles que, pourvu que vous preniez la peine d'examiner méthodiquement si j'ai failly, elles se présenteront à vous d'elles-même : & il sera plus utile de les apprendre en cette façon qu'en les lisant . " *Géométrie* , livre III (A.T , VI , 464)

⁹ (page 457)

¹⁰(A.T , VI , 457) . L' étoile * marque la place d'un terme manquant (en x^3) . Les points indiquent que le signe peut être + plus ou moins, devant des coefficients p , q , r ,qui sont, pour Descartes, nécessairement positifs. Le signe d'égalité est une des notations spécifiques que Descartes introduit dans sa *Géométrie* . Dans la suite du texte, nous reviendrons à des notations modernes .

¹¹ (.Géométrie, livre II 459 , 9)

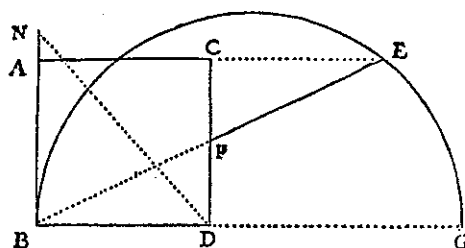
¹² page 458

¹³ idem

et un exemple littéral ¹⁴ :

$$z^4 + \left(\frac{1}{2}aa - cc\right)zz - (a^3 + acc)z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}aacc = 0 \quad (7)$$

eux-mêmes suivis d'une application géométrique encore empruntée à Pappus ¹⁵.



Mais afin qu'on puisse mieux connoître l'utilité de ^{Exemple de l'usage de ces réductions.} cete reigle il faut que ie l'applique a quelq; Problefme.
 Si le quarré A D, & la ligne B N eftant donnés, il faut prolonger le costé A C iufques a E, en forte qu' E F, tirée d'E vers B, foit esgale a N B. On apprend de Pappus, qu'ayant premierement prolongé B D iufques à G , en forte que D G soit esgale à D N, & ayant defcrit vn cercle dont le diametre foit B G , si on prolonge la ligne droite A C, elle rencontrera la circonference de ce cercle au point E, qu'on demandoit. Mais pour ceux qui ne fçauroiet point cete cōftruction elle feroit affés difficile à rencōtrer, & en la cherchāt par la methode icy propofée, ils ne s'auiferoiēt iamais de prēdre D G pour la quantité inconnuë, mais plutost C F, ou F D, a caufe que ce $Ccc\ 2$ font

Fig 1.

Le problème est le suivant :

ABCD est un carré donné, dont la longueur du coté est $\parallel AB \parallel = a$.

c est une autre constante donnée, figurée par $\parallel BN \parallel = c$.

Une droite variable pivote autour de B, rencontrant AC au point E, et CD au point F.

Déterminer la position de cette droite telle que $\parallel EF \parallel = \parallel BN \parallel = c$.

B) Etude de la méthode de Descartes .

Observons d'abord que toutes les équations du quatrième degré proposées le sont ici sans terme du troisième. Descartes montrera plus loin comment faire disparaître ce terme par changement de variable (translation) .

La méthode de résolution de Descartes consiste à rechercher une factorisation du polynôme du quatrième degré comme produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels, ce qui est toujours

¹⁴idem

¹⁵ page 462

possible. Il cherche donc à écrire le premier membre de (1), soit :

$$x^4 + p x^2 + q x + r = 0$$

sous la forme : $(x^2 - x y + \alpha)(x^2 + x y + \beta) = 0$. Développant et identifiant, ceci est équivalent à la recherche de $(y, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$, tels que:

$$\alpha + \beta - y^2 = p \quad (8)$$

$$(\alpha - \beta)y = q \quad (9)$$

$$\alpha \cdot \beta = r \quad (10)$$

(8) et (9) fournissent α et β par somme et différence, soit :

$$\alpha = \frac{1}{2} (p + y^2 + \frac{q}{y}) \quad (11) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2} (p + y^2 - \frac{q}{y}) \quad (12)$$

Injectant dans (10) ces deux valeurs, il vient :

$$r = \frac{1}{4} \left[(p + y^2)^2 - \frac{q^2}{y^2} \right], \text{ soit :}$$

$$y^6 + 2 p y^4 + (p^2 - 4 r) y^2 - q^2 = 0 \quad (2)$$

Dans cette équation du sixième degré, Descartes fait le changement $y^2 = T$,

$$T^3 + 2 p T^2 + (p^2 - 4 r) T - q^2 = 0 \quad (13)$$

pour aboutir donc à une équation du troisième degré (*résolvante de Descartes*), qui admet toujours au moins une racine réelle, qu'il peut par exemple calculer par les formules de Cardan - del Ferro. Il y a donc deux racines opposées en y : faisant choix de l'une d'elles, Descartes l'introduit dans (11) et (12) pour obtenir d'abord α et β , puis la factorisation $(x^2 - x y + \alpha)(x^2 + x y + \beta) = 0$, qui n'est autre que celle qu'il avait proposée sans explication sous la forme des relations (3) et (4), équations du second degré qu'il lui faut donc finalement résoudre.

Préoccupé par les seules racines terminales réelles positives (des longueurs, qu'il s'agit pour lui de construire géométriquement), Descartes, ne s'intéressant qu'à ses exemples numériques, ne s'est nullement soucié de connaître en général le nombre de racines réelles positives de l'équation (13), non plus que le nombre de racines réelles distinctes de l'équation (1), potentiellement engendrées par le procédé.

C) Applications numériques.

a) Exemple (6) : $x^4 - 17 x^2 - 20 x - 6 = 0$

Avec $p = -17$; $q = -20$; $r = -6$, Descartes obtient

$$y^6 - 34 y^4 + 313 y^2 - 400 = 0^{16} \quad \text{et on " trouve que } y \text{ est } 16. "$$

Faisant choix de $y = 4$, Descartes obtient $\alpha = -3$ et $\beta = 2$

d'où les deux équations :

¹⁶ page 458

$$x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + 4x + 2 = 0^{17}$$

Descartes trouve alors les quatre racines :

$$\sqrt{7} + 2 ; 2 - \sqrt{7} ; -2 - \sqrt{2} ; -2 + \sqrt{2}$$

Il déclare cependant ne retenir que la première ($\sqrt{7} + 2$), la seule "vraie" (positive), déclarant que les trois autres sont "fausses" (négatives), pour lesquelles il donne l'*opposé pour valeur*. Son texte sur ce point est curieusement ambigu¹⁸.

b) Exemple (7) :

$$z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right)z^2 - (a^3 + ac^2)z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0$$

L'équation transformée est :

$$y^6 + (a^2 - 2c^2)y^4 + (-a^4 + c^4)y^2 - a^2(c^2 + a^2)^2 = 0$$

Descartes constate - sans explications - que $y^2 = a^2 + c^2$ convient, et trouve donc les deux équations du second degré suivantes¹⁹ :

$$z^2 - \sqrt{a^2 + c^2}z + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2} = 0 \quad (14) \quad \text{et}$$

$$z^2 + \sqrt{a^2 + c^2}z + \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2} = 0 \quad (15)$$

Ignorant l'équation (15), Descartes nous livre les deux solutions de la seule équation (14) :

"D'où l'on connaît", dit Descartes que la valeur de z est :

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}} \quad (16) \quad , \text{ ou bien}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}} \quad (17)$$

c) Exemple (5) : $x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0 \quad (5)$

Avec $p = -4$; $q = -8$; $r = 35$, Descartes obtient :

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0^{20}, \text{ qui admet également pour racine } yy = 16.$$

Faisant à nouveau choix de $y = 4$, Descartes obtient $\alpha = 5$ et $\beta = 7$, d'où les deux équations : $x^2 - 4x + 5 = 0$ et $x^2 + 4x + 7 = 0$, dont aucune n'admet de racines réelles :

"Et pour ce qu'on ne trouve aucune racine, ni vraie ni fausse en ces deux dernières Equations, on connaît de là que les quatre de l'Equation dont elles procèdent sont imaginaires; & que le problème, pour lequel on l'a trouvée,

¹⁷ page 460

¹⁸ "à savoir on en trouve une vraie ,qui, est $\sqrt{7} + 2$,& trois fausses qui sont : $\sqrt{7} - 2$, $2 + \sqrt{2}$, & $2 - \sqrt{2}$." (A.T. ,VI , 460)

¹⁹ page 461

²⁰ page 461

est plan de sa nature²¹, mais qu'il ne saurait en aucune façon être construit, à cause que les quantités données ne peuvent se joindre."²²

D) Application géométrique .

Prenant $x = \parallel DF \parallel$, il vient $\parallel CF \parallel = a - x$.

La similitude des triangles FCE et FDB implique :

$$\frac{\parallel FC \parallel}{\parallel FE \parallel} = \frac{\parallel FD \parallel}{\parallel FB \parallel}, \text{ soit } \frac{a-x}{c} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Elevant au carré et ordonnant, on trouve :

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0^{23}$$

Cette équation du quatrième degré étant complète, il faut donc en éliminer le terme en x^3 , et pour cela poser $z = x - (a/2)$. L'équation transformée en z n'est alors autre que (7) :

$$z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right)z^2 - (a^3 + ac^2)z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0$$

Les solutions z_1 et z_2 étant donc fournies par (16) et (17), on aura donc

$x_i = (a/2) + z_i$. La solution (16), cependant, vérifie $z > (a/2)$, donc $x > a$, et Descartes, ne retenant - sans explications - que la solution correspondant à F situé entre C et D (soit $0 < x < a$), fournit comme unique solution celle donnée par (17) :

$$x = \parallel DF \parallel = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Cette formule qui ne contient que des superpositions de radicaux carrés, est donc constructible à la règle et au compas.

Pour Descartes cependant, ces exemples ne sont pas concluants de façon générale, car les méthodes de résolution explicites contiennent en général des radicaux cubiques, et ne sont donc pas constructibles à la règle et au compas. Utilisant alors des intersections de coniques (par exemple cercle et parabole) Descartes s'emploiera alors, dans toute la fin du texte de la *Géométrie*, à fournir des constructions géométriques des solutions (réelles positives) des équations du troisième et du quatrième degré, conformément au titre du Livre III de la *Géométrie* : *De La Construction des Problèmes qui sont Solides ou plus que Solides*.

²¹ justiciable d'une équation du second degré.

²² page 461

²³ page 462

NOTE D'ECOUTE

Les nombres premiers

par François Jaboeuf (Séminaire de l'U.P.S.)

La conférence de François Jaboeuf fut si dense et riche d'informations que je ne peux n'en donner qu'un compte-rendu partiel. En particulier je ne reprendrai pas les exemples numériques qui éclairaient agréablement les questions ou les résultats énoncés. L'importance de l'étude des nombres premiers tient à leur utilité dans divers domaines des mathématiques, et en particulier dans un usage récent en cryptographie ou théorie du codage qui développe depuis une vingtaine d'années la recherche de très grands nombres premiers ou de décomposition en facteurs premiers de très grands nombres. Les nombres premiers sont importants pour la théorie des nombres elle-même, car ils servent à construire tous les autres nombres, sans être eux-mêmes constructibles à partir d'autres. Le résultat a été énoncé par Gauss en 1801: "Tout nombre entier (différent de 0 et de 1) se décompose de façon unique en un produit de nombres premiers". Il est quasiment déjà acquis par Euclide au III^{ème} siècle avant J.C., comme en témoignent les propositions 30, 31 et 32 du 7^{ème} livre des *Eléments*.

La première question posée dans la conférence fut celle de la **reconnaissance des nombres premiers**. Eratosthène, contemporain d'Euclide, a proposé son célèbre crible qui permet de séparer les nombres premiers de ceux qui ne le sont pas. Son procédé nous a été transmis par un néo-pythagoricien du II^{ème} siècle après J.C., Nicomaque de Gérase. L'usage du crible d'Eratosthène n'est pas commode pour les tester de grands nombres. Tester tous les diviseurs potentiels inférieurs au nombre n étudié serait inutilement long, il suffit de chercher si n admet un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, procédé encore simplifié si on remarque que les nombres premiers supérieurs à 4 sont tous de la forme $6k \pm 1$.

Un autre procédé, qui a l'avantage de ne pas nécessiter de division, utile pour reconnaître un nombre ayant deux diviseurs proches (donc proches de $\sqrt{n}$), est l'algorithme de Fermat. Il est fondé sur la propriété que tout nombre impair n est différence de deux carrés ($n = x^2 - y^2$), et il y a unicité du couple (x,y) si et seulement si n est premier. L'algorithme consiste à tester si $x^2 - n$ est un carré, pour tous les entiers x consécutifs supérieurs à $\sqrt{n}$; si l'algorithme ne s'arrête que pour $x = \frac{n+1}{2}$, n est premier.

Ces méthodes sont malheureusement inopérantes pour les très grands nombres. Pour établir par exemple que $2^{216091} - 1$ (le plus grand nombre premier actuellement connu et qui s'écrit avec 65050 chiffres) est premier, il faudrait 10 000 millions d'années de calcul d'un ordinateur parmi les plus puissants à l'heure actuelle. A la fin de sa conférence, F. Jaboeuf a signalé d'autres tests. L'un d'eux est basé sur le petit théorème de Fermat (tout nombre premier p ne divisant pas a divise $a^{p-1} - 1$), dont la réciproque n'est malheureusement pas vraie. On a pu améliorer le résultat de Fermat sous la forme: n est premier si et seulement si il existe un entier a , compris entre 2 et $n-1$, tel que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ et si, pour tout diviseur premier p de $n-1$, $a^{(n-1)/p} \not\equiv 1 \pmod{n}$, ce qui a permis à Robien de proposer en 1980 un test probabiliste pour reconnaître si un nombre n est premier. En testant aléatoirement k nombres a compris entre 2 et $n-1$, on peut, si tous les nombres vérifient la condition, affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 4^{-k} , que n est premier. Pour de grands nombres la fiabilité du résultat est meilleure que celle des ordinateurs.

La deuxième question abordée fut celle-ci: **La suite des nombres premiers est-elle illimitée?** Cette question a déjà été résolue par Euclide, à la proposition 20 du 9ème livre des *Eléments*. Il montre, dans une démonstration exemplaire, qu'on peut toujours toujours construire un nombre premier plus grand que tous les nombres premiers d'une famille (finie) de nombres premiers: le produit des nombres de la famille augmenté de l'unité est premier ou bien admet un diviseur premier qui n'est pas dans la famille initiale. Une autre démonstration de ce résultat est donnée par Euler en 1768, qui fait intervenir de façon téméraire l'infini en acte, et qui mêle analyse et théorie des nombres, puisqu'elle utilise le développement en série de $\ln \frac{1}{1-x}$ pour $x = 1$.

La troisième question fut celle de **la répartition des nombres premiers dans l'ensemble des entiers**. Sont-ils régulièrement répartis, dispersés, concentrés sur de petits intervalles? A propos des nombres premiers jumeaux (dont la différence est 2, comme 5 et 7), F. Jaboeuf a signalé que la conjecture de Goldbach, qui fit l'objet du 8ème problème de Hilbert reste ouverte: y a-t-il ou non une infinité de nombres premiers jumeaux? Legendre affirma en 1785 qu'une progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux contient une infinité de nombres premiers. On peut aussi trouver un intervalle d'entiers arbitrairement grand ne contenant aucun nombre premier, par exemple l'intervalle $[n!+2 ; n!+n]$ ne contient aucun nombre premier.

Legendre, puis Gauss, au 19ème siècle, ont proposé des formules empiriques donnant une approximation du nombre $\pi(x)$ des nombres premiers inférieurs à x .

$$\text{Pour Legendre, } \pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1,08366} \quad \text{Pour Gauss, } \pi(x) \approx \int_2^x \frac{du}{\ln u}.$$

En 1896, Hadamard et La Vallée-Poussin démontrent que $\pi(n)$ est équivalent à $\frac{n}{\ln n}$ et on peut en déduire la loi de raréfaction des nombres premiers lorsque n tend vers l'infini.

Une quatrième question est celle d'une formule qui donnerait tous les nombres premiers, quête longtemps déçue. Aucun polynôme $P(x)$ ne donne que des nombres premiers pour x décrivant l'ensemble des entiers. Des formules génératrices des nombres premiers ont cependant été récemment découvertes, dont l'intérêt est plus théorique que pratique.

F. Jaboeuf nous a également parlé des nombres de Fermat (de la forme $2^{2^n} + 1$), que Fermat pensait premiers. On conjecture actuellement que ne sont premiers que les nombres de Fermat obtenus pour n inférieur ou égal à 4. Il nous a parlé des nombres de Mersenne (de la forme $2^n - 1$), qui ne sont pas tous premiers mais qui permettent de construire de grands nombres premiers. Le test de Lucas-Lehmer, spécifique aux nombres de Mersenne, a été mis au point par Lehmer en 1930. C'est lui qui a permis de découvrir le plus grand nombre premier actuellement connu.

Signalons que François Jaboeuf a écrit un chapitre consacré aux nombres premiers dans un ouvrage collectif de la commission inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques à paraître aux éditions Ellipses, intitulé "Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques".

Michèle Grégoire

NOTE DE LECTURE

Brève analyse du livre de Morris Kline : "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times"

Environ 1200 pages, dans un anglais facile à lire.

La première édition date de 1972. Le livre est vendu sous deux présentations différentes:

broché, en trois volumes, d'un prix total de 230 francs environ,

ou relié, en un seul volume vendu 570 francs.

Description succincte du contenu du livre.

Il débute par une préface assez longue, plutôt polémique, où Kline énonce ses intentions, ses buts, ses désaccords, et où il désigne le public auquel il veut s'adresser. Nous utiliserons les idées émises par Kline dans cette préface pour illustrer les différentes étapes de notre analyse.

Les cinquante et un chapitres respectent un ordre chronologique (de la Mésopotamie jusqu'aux controverses de début du 20ème siècle sur les fondements des mathématiques), avec un regroupement par grandes périodes: Antiquité, Moyen Age, Renaissance, 16ème et 17ème siècles, 18ème siècle, 19ème siècle, début du 20ème siècle. A l'intérieur de chacune de ces sept périodes, l'étude est faite par thèmes: par exemple, pour le 18ème siècle, Kline aborde successivement le calcul infinitésimal, les séries infinies, les équations différentielles ordinaires, les équations aux dérivées partielles, la géométrie analytique et différentielle, le calcul des variations et enfin l'algèbre.

A la charnière des périodes choisies, quelques chapitres de synthèse permettent de faire le point et de prendre un peu de recul (" les mathématiques vers 1800 " , par exemple).

Kline tient souvent à replacer l'évolution des mathématiques dans le contexte historique, et son livre contient de longs paragraphes d'histoire pure, essentiellement dans le premier quart du livre, de l'Antiquité à la Renaissance. Citons par exemple le chapitre 8, qui traite de "la disparition des mathématiques grecques", où figurent des passages très intéressants sur l'histoire de Rome, qui permettent d'expliquer le peu d'intérêt des Romains pour les mathématiques déductives. Certains des thèmes abordés ne figurent que rarement dans d'autres livres d'histoire des mathématiques.

La méthode choisie:

Kline ne suppose pas connue des lecteurs la substance de tous les développements mathématiques dont le livre rend compte. Aussi, sauf pour quelques domaines très élémentaires, il expose les grandes lignes des sujets dont l'histoire est traitée. Kline souhaite que son ouvrage soit une introduction historique aux mathématiques ; son souci est clairement pédagogique: il pense que c'est la meilleure voie pour acquérir compréhension et jugement. En revanche, il ne prétend pas être exhaustif et a surtout cherché à exposer les exemples les plus représentatifs. Il s'efforce constamment de ne pas perdre de vue les idées principales et omet souvent les conditions mineures ou les cas particuliers lorsqu'il cite les théorèmes et les résultats essentiels.

Kline rappelle le conseil de Pascal; "quand nous citons les auteurs, nous citons leurs démonstrations, pas leurs noms". Le livre contient peu de renseignements biographiques, car son organisation insiste plus sur les idées mathématiques dominantes que sur les hommes. Kline essaie d'illustrer les changements qui affectent chaque concept mathématique à différentes périodes, et la propre compréhension des mathématiques sur ce qu'ils sont en train d'élaborer.

De nombreux exemples montrent que l'histoire fait ses propres évaluations et que de nombreux sujets qui soulevèrent l'enthousiasme et attirèrent l'attention des meilleurs mathématiciens sont ensuite devenus plus marginaux. Kline cite par exemple les opinions de Cayley sur la géométrie projective et de Sylvester sur la théorie des invariants algébriques.

Pour être cohérent et respecter ses objectifs, particulièrement dans la période après 1700, Kline ne traite chaque notion qu'au moment où elle a mûri et où elle influe sur le cours des mathématiques. Ainsi, la géométrie non-euclidienne est présentée au 19^{ème} siècle, alors que l'histoire des efforts pour démontrer l'axiome des parallèles remonte à l'époque même d'Euclide.

Dans un souci de concision, plusieurs civilisations ont été volontairement ignorées (la Chine, le Japon, les Mayas), car elles ont eu un impact faible ou nul sur l'évolution générale des mathématiques. La théorie des probabilités n'est pas du tout abordée car, selon Kline, elle n'est devenue importante qu'au 20^{ème} siècle. (Ce point est tout à fait contestable). De la même façon, les derniers prolongements de certains sujets traités, comme les équations différentielles ou le calcul des variations, ne figurent pas dans le livre, car Kline n'a pas

souhaité inclure de paragraphes trop spécialisés, qui n'auraient intéressé que les chercheurs dans ces domaines. Les seules créations du 20ème qu'il détaille sont celles qui sont devenues significatives à cette période.(algèbre abstraite, topologie, logique mathématique).

La relative faiblesse des développements mathématiques après 1900 est donc un parti pris délibéré de l'auteur. En revanche, on peut regretter les insuffisances du chapitre 9, sur les mathématiques indiennes et arabes, car des recherches récentes ont mis en lumière qu'on peut y trouver beaucoup plus que l'amélioration de résultats secondaires, comme le prétend Kline.

Les lecteurs de Kline.

Puisqu'il a souhaité faire une introduction historique aux mathématiques, il aimerait d'abord être lu par les mathématiciens professionnels, qui ont peu l'occasion de se familiariser avec l'histoire de leur sujet de recherche. L'histoire montre que, parmi les centaines de branches qui constituent les mathématiques, certaines sont devenues stériles, et Kline est persuadé que le seul moyen de discerner les directions fructueuses est de se familiariser avec les réalisations passées et d'étudier les raisons qui ont fait disparaître certaines spécialités.

Enfin, et surtout, Kline destine son livre aux étudiants en mathématiques car, et c'est là où il devient polémique, il conteste la tendance des cours traditionnels à présenter des fragments de mathématiques qui semblent avoir peu de rapports entre eux. Il refuse une présentation organisée et logique, qui donne l'impression que les mathématiciens vont de théorème en théorème presque naturellement, qu'ils peuvent maîtriser toutes les difficultés, et que les sujets exposés sont complètement résolus et achevés. Kline pense que l'étudiant débutant a tout à gagner à constater les combats de la création mathématique, les frustrations, les échecs et la longue route semée d'embûches que les mathématiciens doivent parcourir pour parvenir à un premier résultat significatif. L'histoire enseigne que le développement d'un sujet s'est fait morceau par morceau, avec des résultats venant de directions variées, et qu'il a demandé souvent des dizaines et même des centaines d'années. En prenant conscience de cela, l'étudiant peut y gagner, non seulement une vision plus globale des mathématiques, mais aussi du courage pour aborder ses propres problèmes et ne pas être découragé par le caractère incomplet de son travail.

La thèse de Kline.

De ce livre, deux parties sont développées plus longuement: les mathématiques grecques et l'analyse au 18ème siècle. Il est intéressant de constater que Kline multiplie les exemples pour opposer ces deux phases et pour mesurer leurs influences respectives sur le développement des mathématiques.

Son idée directrice consiste en effet à affirmer que les mathématiques déductives qui figurent dans la synthèse d'Euclide ont figé les mathématiques, empêché l'imagination de se développer et agi comme un

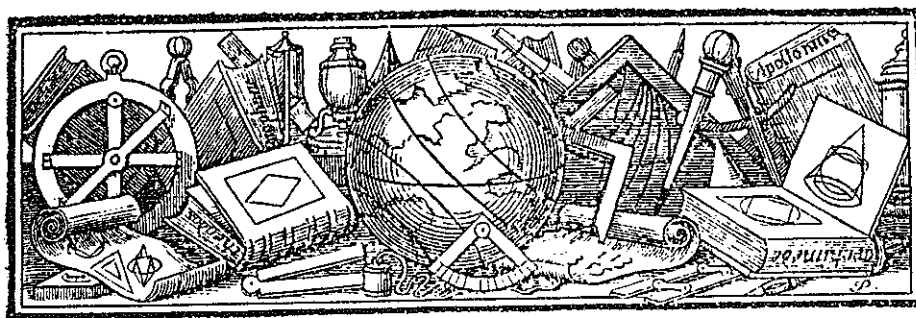
dogme stérilisant . A l'inverse, le peu de préoccupation des mathématiciens du 18ème siècle pour les problèmes de fondements ont permis à l'analyse de progresser.

Ici aussi le but de Kline est pédagogique: il reproche aux mathématiques grecques d'avoir privilégié l'idée de démonstration, au détriment de la création et de l'invention, et il estime que cette vision des choses est nuisible aux débutants.

On peut seulement regretter, sur ce point mais aussi dans l'ensemble du livre, l'absence de toute référence philosophique. En dépit de cette lacune, le livre de Kline est indispensable comme ouvrage de référence historique, mais aussi à qui veut aborder de façon complète et originale une notion classique de mathématiques. En conclusion le "Kline" demeure un ouvrage indispensable pour qui veut prendre contact avec un sujet historique inconnu, bref "débroussailler" une question.

M. Pensivy

Professeur de Mathématiques Spéciales



Le groupe M.:A.T.H. (Mathématiques : Approche par les Textes Historiques)
--

vous propose :

La revue Mnémosyne pour échanger expériences et réflexion à propos de l'histoire et de l'enseignement des mathématiques.

Numéro 1 : La démonstration par exhaustion chez les grecs et les arabes M.F. Jozeau	26F	200 gr
Numéro 2 : La querelle entre Descartes et Fermat à propos des tangentes. M. Grégoire	30 F	210 gr
Numéro 3 : Fragments d'une étude des systèmes linéaires A. Michel-Pajus	30 F	220 gr
Numéro 4-5 : Elaboration du calcul des variations et ses applications à la dynamique F. Viot	40 F	300 gr
Numéro 6 : Leibniz et l'école continentale J.L. Verley	30 F	220 gr
Numéro 7 : Autour du théorème de Fermat C. Goldstein	33 F	230 gr
Numéro 8 : Isaac Newton. Détermination de tangentes à des courbes à l'aide de la méthode des fluxions J.L. Verley	33 F	250 gr
Numéro 9 : Desargues et Pappus R. Tossut	33 F	240 gr
Numéro 10 : Le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries A. Michel-Pajus	33 F	260 gr
Numéro 11 : Des cartes-portulans à la formule d'Eward Wright : l'histoire des cartes à "rumb" M.T. Gambin	33 F	255 gr
Numéro 12 : Histoire de quelques projections cartographiques M. Benedittini	33 F	250 gr
Numéro 13 : Histoire et origine du calcul différentiel G.W. Leibniz / présentation de A. Michel-Pajus	33 F	200 gr
Numéro spécial : Histoires de Pyramides M. Grégoire	46 F	380 gr

Nous vous indiquons le prix des brochures sans le port, le poids et le tarif postal pour calculer le coût du port.

Poids jusqu'à	Ordinaires
20 g	3,00 F
50 g	4,50 F
100 g	6,70 F
250 g	11,50 F
500 g	16,00 F
1000 g	21,00 F
2000 g	28,00 F
3000 g	33,00 F

BON DE COMMANDE

Je désire recevoir les numéros suivants de Mnémosyne:

	prix	port
n°1		
n°2		
n°3		
n°4		
n°5		
n°6		
n°7		
n°8		
n°9		
n°10		
n°11		
n°12		
n°13		
n°14		
n°spécial		

Total :

Nom:

Prénom:

Adresse:

Date:

Ci-joint un chèque d'un montant de

à l'ordre de l'Agent Comptable de l'Université Denis Diderot Paris 7

Désirez-vous recevoir une facture? oui non

Comité de rédaction:

<i>Philippe BRIN</i>	<i>Lycée Technique E.Branly Créteil Animateur à l'IREM Paris VII</i>
<i>Michèle GREGOIRE</i>	<i>Lycée Lavoisier Paris Animateur à l'IREM Paris VII</i>
<i>Maryvonne HALLEZ</i>	<i>Collège P. Bert Paris Animateur à l'IREM Paris VII</i>
<i>Marie Françoise JOZEAU</i>	<i>Lycée G. de Nerval Luzarches Animateur à l'IREM Paris VII</i>
<i>Michèle LACOMBE</i>	<i>Lycée J. Monod Clamart Animateur à l'IREM Paris VII</i>
<i>Anne MICHEL-PAJUS</i>	<i>Lycée C. Bernard Paris Animateur à l'IREM Paris VII</i>
<i>Michel SERFATI</i>	<i>Lycée Technique Raspail Paris Animateur à l'IREM Paris VII</i>
<i>Jean Luc VERLEY</i>	<i>Université Paris VII IREM Paris VII</i>

avec la participation de Florence VIOT

de Michel PENSIVY

professeurs de Mathématiques Spéciales

et celle de Marianne GUILLEMOT

<u>Courrier à adresser à :</u> Groupe M: A.T.H. IREM de l'université Paris VII Tour 55-56 3ème étage 75005 PARIS
--

*Pour échanger expériences et réflexions à propos de l'histoire et de
l'enseignement des mathématiques*

M: *Mathématiques*
A: *Approche par les*
T. *textes*
H. *historiques*

SOMMAIRE

Editorial

Hommage à Jean Dieudonné

Bonnes vieilles pages : Nicolas Chuquet

Dans nos classes *Une méthode de quadrature et sa
légitimation par Isaac Newton*

Etude *Elaboration du calcul des variations et
ses applications à la dynamique*

Conte du Lundi • *Pavages presque-périodiques*
 • *Descartes et le quatrième degré*

Note d'écoute
Note de lecture

Calendrier *Quelques séminaires:
Programmes pour l'année 1993-94*

Editeur : IREM
Directrice responsable de la publication : M. ARTIGUE
Dépôt légal : Juillet 1993
ISBN : 2-86612-086-8

IREM Université Paris VII Denis Diderot
Tour 56-55 -3^{ème} étage, Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel: 01 44 27 53 83