

**PRISE EN COMPTE DU META EN DIDACTIQUE DES
MATHÉMATIQUES**

Par Aline ROBERT et Jacqueline ROBINET

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ-PARIS VII

**PRISE EN COMPTE DU META EN DIDACTIQUE DES
MATHEMATIQUES**

Par Aline ROBERT et Jacqueline ROBINET

Plan

Introduction

I Eléments de bibliographie

- 1) Métacognition, connaissances métacognitives : des origines aux orientations actuelles
- 2) Métaconnaissances et IA
- 3) En physique
- 4) En mathématiques
- 5) Bilan

II Réflexions sur la prise en compte du "méta" en didactique des mathématiques

- 1) Définitions
- 2) Réflexions sur la prise en compte du "méta" en didactique des mathématiques
- 3) Recherches à mener

III Recherches en didactique des mathématiques prenant en compte le "méta"

- 1) Elèves en difficultés dans la scolarité obligatoire
- 2) Elèves des filières scientifiques de la scolarité post-obligatoire
- 3) Analyses de discours d'enseignants en classe
- 4) Points communs à ces travaux
- 5) En guise de conclusion : comment choisir les métaconnaissances à transmettre ?

Conclusion

- 1) Bilan : pour une prise en compte en didactique ?
- 2) Questions ouvertes

Indications bibliographiques

Annexes

1. Un extrait du livre de Polya (comment poser et résoudre un problème ? Dunod, 1957)
2. Méta et discours de l'enseignant en classe de mathématiques : quels mots pour quoi dire ? (A. Robert)
3. Un extrait de la communication au colloque ARDM de juin 93 "L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année : nouveaux problèmes, nouvelles méthodologies" (J.L. Dorier, A. Robert, J. Robinet, M. Rogalski)
4. Résumés de textes
 - * Barth (1987) Chapitre Métacognition du livre "L'apprentissage de l'abstraction pour une meilleure réussite à l'école" (résumé par A. Robert)
 - * Noel (1991) La métacognition (résumé par A. Robert)
 - * Piaget et Beth (1961) "Epistémologie mathématique et psychologie" (résumé par J.L. Dorier)
 - * Polya "Comment poser et résoudre un problème" in "Fiche didactique : heuristique - analogie" (résumé par M. Artigue)
 - * Dubinski (1992) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking" (résumé par J.L. Dorier)
5. Réactions à l'exposé (oral) du texte par Mmes A. Weil-Barais et J. Rogalski

Prise en compte du méta en didactique des mathématiques (A. Robert, J. Robinet)

Introduction générale

a) Où voyons-nous du "méta" : premières approches, premières questions.

Des questions comme "as-tu compris ?" ou "comment fais-tu ?" émaillent les discours des enseignants en classe de mathématiques, sans qu'ils y accordent une attention spéciale.

Ainsi, tout comme M. Jourdain faisait de la prose sans le savoir, les enseignants utilisent naturellement des éléments *concernant la connaissance du sujet sur ses connaissances* : cela fait partie de ce qui nous intéresse ici et que nous allons regrouper sous le préfixe, substantivé pour l'occasion, de "méta" - métacognition, métaconnaissances, métacognitif ...

Allons plus loin, pour ceux qui auraient des doutes sur ce présupposé d'existence de divers niveaux de connaissances du côté du sujet : l'usage, non controversé nous semble-t-il, de l'expression "savoir qu'on ne sait pas", est bien la preuve qu'il est couramment admis qu'on peut à la fois savoir quelque chose (niveau méta) et ne pas savoir la même chose mais au niveau des connaissances : sinon il y aurait là un joli paradoxe !

Reste à prouver que le didacticien, voire l'enseignant peuvent y gagner à faire ces distinctions ! Notamment en ce qui concerne l'apprentissage des élèves...

Développons encore notre propos, pour introduire une autre facette de ce que nous allons mettre sous le mot "méta".

Lorsque l'enseignant expose des connaissances en classe (en phase d'institutionnalisation par exemple), il est amené à accompagner son discours strictement mathématique de phrases qui accompagnent ce discours, qui s'y rapportent, mais sans nécessairement contenir d'informations mathématiques stricto sensu : l'enseignant peut parler de manière qualitative des connaissances qu'il est en train de décontextualiser, il peut expliquer à quoi elles servent, comment les utiliser, il peut citer les erreurs fréquentes qu'elles occasionnent... Il y a là tout *un discours sur des mathématiques* donc, plus ou moins important, plus ou moins diffus, plus ou moins explicité comme tel, que nous classons comme discours méta en tant que discours sur les mathématiques précisément.

Donnons un exemple tiré d'un récent travail de didactique : on lit dans la thèse de M Berthelot et Mme Salin p. 134 "le professeur dit : *"ce que nous allons faire maintenant pour comprendre ce qui se passe, ça s'appelle de la géométrie"*. Et plus loin (p. 136) il est écrit *"le professeur pourra ensuite parler de ce qu'est la géométrie dans la culture : c'est un travail sur la consistance du discours sur l'espace ; ce n'est pas de dire des choses sur l'espace mais de contrôler la consistance de ce qu'on dit sur l'espace"*. Pour nous ces phrases relèvent de ce qui nous interpelle ici et notre question à leur propos est la suivante : est-ce que le professeur doit les dire explicitement, comment, à quel moment, est-ce que quelque chose peut changer selon qu'il les dise ou non, ou selon la manière dont il les dit ?

Plus généralement, on peut ainsi se demander s'il y a lieu de prendre le discours sur les mathématiques comme objet d'étude : peut-on supposer que, de même qu'il y a diverses organisations possibles de la gestion de la classe, avec les conséquences variables sur

l'apprentissage que l'on commence à connaître, il y aurait divers choix possibles pour les informations sur les mathématiques à donner aux élèves, avec, toutes proportions gardées, des conséquences variables sur l'apprentissage ?

Autrement dit, la conceptualisation des élèves par exemple pourrait-elle être facilitée par des commentaires qualitatifs apportés sciemment par l'enseignant à un moment jugé propice, comme une sorte de "catalyseur" contribuant à "transformer" ce qui est encore pour le sujet du niveau de l'action ? Et accessoirement est-ce que tous les élèves vont réagir de la même façon ?

Enfin pour faciliter l'acquisition de certains concepts particuliers, comme la convergence des suites ou les espaces vectoriels, pour lesquels il n'y a pas forcément de bonnes activités introductives du niveau des étudiants, pour des raisons d'ordre épistémologique notamment, on est amené à remplacer ces activités préparatoires manquantes par une *réflexion sur ces concepts*, dernière facette de ce que nous allons mettre sous le vocable... Cette réflexion n'est pas sans rappeler d'ailleurs l'activité des mathématiciens qui ont introduit ces concepts.

b) L'exposé : bibliographie, définitions et problèmes posés par la prise en compte du "méta" en didactique, travaux didactiques concernés par le "méta", conclusion.

Nous présentons donc l'état actuel des réflexions et des travaux sur le sujet, en donnant d'abord un **éclairage bibliographique large** (I), qui s'impose vu le caractère assez flou de ce dont nous voulons parler.

De fait, jusqu'à présent les recherches sur la métacognition ou sur la connaissance des mécanismes individuels d'accès aux connaissances sont restées assez générales, peu liées aux contenus, et peu exportables finalement. Un certain essoufflement a même eu lieu.

Cependant, des recherches récentes aussi bien en physique qu'en mathématiques (directement liées au "problem solving" notamment) ont relancé le débat.

Nous indiquons donc ensuite nos **définitions**, qui nous permettent de distinguer connaissances et métaconnaissances mathématiques mais de manière toute relative (II).

Nous abordons alors le vif du sujet : la **prise en compte de ce "méta" en didactique des mathématiques**. Il s'agit de se poser la question, a priori, de l'intérêt, de la consistance et de la légitimité d'une telle démarche.

Nous développons plusieurs dimensions, qui se traduisent par les questions suivantes, dont la première, qui aurait presque pu être abordée plus tôt, nous amène sur des "terras incognitas" :

* *Quels arguments peuvent justifier cette prise en compte du "méta" dans l'apprentissage des mathématiques ?*

* *A quels moments de la recherche peut-on concevoir d'intégrer explicitement le niveau "méta" ?*

Le niveau "méta" peut-il (doit-il) intervenir dans l'analyse des phénomènes d'enseignement (méta comme outil de diagnostic pour le chercheur) ?

Ou bien peut-on (doit-on) aussi intervenir auprès des élèves, en leur donnant accès à des éléments de connaissance sur les mathématiques, ou sur leur activité mathématique, ou sur leur apprentissage des mathématiques (méta comme objet d'enseignement) ?

** Dans ces conditions, quelles recherches mener ?*

Nous défendons la thèse suivante : des recherches en didactique des mathématiques s'appuyant sur des scénarios bien conçus, intégrant une prise en compte explicite du "méta", peuvent être menées, et c'est leur évaluation qui permettra de confirmer la légitimité de l'ensemble de la démarche.

Il s'agit donc de travailler sur le choix des éléments de métaconnaissances à introduire, sur le moment et la manière de cette introduction, puis d'expérimenter et d'évaluer les scénarios correspondants.

Nous décrivons ensuite **les premiers travaux de didactique des mathématiques qui font référence explicitement à des "métaconnaissances"** (III). Ils relèvent principalement de deux domaines : recherches sur des élèves de collège en très grande difficulté, recherches sur les élèves des filières scientifiques des lycées et des premières années d'université.

Pour ces élèves, les situations didactiques "ordinaires" ne suffisent pas toujours à déclencher les apprentissages souhaités : les chercheurs proposent de mettre ces difficultés en rapport avec l'élargissement du recrutement à des élèves peu préparés par leur milieu familial à un apprentissage mathématique, surtout au collège ; ils évoquent aussi pour les filières scientifiques à partir du lycée, le fait que les connaissances visées ne se prêtent pas toujours à une introduction basée sur un "bon" problème contribuant à donner du sens à la notion dès le début de son enseignement, (on peut ne pas trouver de problème adéquat du niveau des élèves...).

Dans les deux cas, les analyses qui sont menées pour expliquer les difficultés aussi bien que les tentatives d'amélioration qui sont proposées en conséquence ne relèvent ainsi pas seulement du niveau des connaissances mathématiques visées (définitions, théorèmes, propriétés, solutions de problèmes...) et des activités des élèves (résolutions de problèmes) : elles engagent une réflexion sur ces connaissances, sur l'accès à ces connaissances, ou encore sur la manière dont les élèves les abordent, tous éléments qui relèvent précisément de métaconnaissances portant sur les mathématiques. Ainsi tous ces travaux conduisent à *une certaine intégration du "méta" à la fois dans l'arsenal diagnostic du chercheur et dans l'élaboration d'ingénieries.*

De plus, toutes ces recherches s'appuient sur *l'hypothèse que les élèves peuvent améliorer ou faciliter leur apprentissage mathématique par la prise en compte, par l'enseignant et par eux-mêmes, de tels éléments, de niveau "méta".*

Cependant les évaluations qui en sont faites sont encore très largement insuffisantes pour confirmer ou infirmer nos hypothèses : nous dégageons en conclusion de ce tour d'horizon les difficultés spécifiques à ce type de recherches, et nous précisons certaines étapes du travail à mener pour le chercheur en didactique.

En conclusion générale, après un petit bilan, nous indiquons un certain nombre de questions ouvertes et terminons par des perspectives sur les recherches à mener.

Annonçons tout de suite que dans cet exposé ne figurera jamais *la métamathématique* : en effet ce mot, créé par Hilbert, désigne une branche particulière des mathématiques qui s'occupe des fondements logiques de certaines théories, et n'a donc rien (ou presque !) à voir avec notre propos...

I Eléments de bibliographie

Dans ces résumés, nous n'avons pas cherché l'exhaustivité, d'autant plus que certains auteurs ont développé des réflexions ou des recherches proches de celles que nous avons pu trouver mais sans utiliser les termes de métacognition ou autres méta... et qu'ils ont pu, de ce fait, nous échapper. Cela ne nous empêchera pas de revenir sur certains de ces travaux, qui développent donc des idées analogues à celles que nous recherchons, que nous jugeons importants et que nous avons repérés : dans ces travaux, qualifiés de "précurseurs", les mots clefs analysés ne figurent pas tout simplement parce que les exposés sont antérieurs à l'époque où l'usage de ces mots s'est généralisé. Précisons aussi d'emblée que les auteurs qui se réfèrent aux termes métacognition, métaconnaissances, métacognitif... ont pour visée une description des apprentissages individuels, souvent de type scolaire, si ce n'est une action sur ces apprentissages. Nous respectons cette restriction : ainsi, même si dans certains travaux, d'épistémologie notamment, nous pouvons trouver des analogies quant au niveau de la réflexion qui est proposée, nous les avons écartés : on ne trouvera pas ici de références à Bachelard, ni même à E. Morin, qui pourtant ont travaillé sur la connaissance de la connaissance...

Nous n'avons pas non plus creusé du côté des travaux sur les savants : certes, c'est souvent en référence au mode de fonctionnement expert qu'est définie la métacognition, mais les recherches correspondantes portent d'abord sur les élèves, ou tout au moins les apprenants. De ce fait, on ne trouvera pas ici de référence à Hadamard par exemple, même si ce qu'il écrit sur l'invention se place à un niveau proche de celui qu'on touche dans les recherches que nous décrivons.

Enfin, nous n'avons pas écarté de notre investigation les travaux généraux, hors du champ des didactiques des sciences, qu'ils soient surtout des réflexions ou qu'ils présentent des recherches effectives : l'usage des mots analysés ici a en effet d'abord été le fait de psychologues dits "du développement", et la réflexion portant plus spécifiquement sur les apprentissages scientifiques, et notamment mathématiques, ne s'est développée qu'ensuite.

Il nous a semblé important de respecter cette filiation, en essayant en même temps de comprendre les évolutions qui ont pu apparaître dans les recherches.

Ainsi, nous présentons ces éléments de bibliographie, que nous voulons représentatifs des grands courants qui ont traversé les recherches, en quatre parties :

- 1) Origines et travaux de psychologie sur métacognition et connaissances métacognitives
- 2) Métaconnaissances en IA et EIAO
- 3) En physique
- 4) En mathématiques
 - a) les précurseurs (Piaget, Polya, Glaeser...)
 - b) dans la littérature anglo-saxonne d'aujourd'hui : Dubinski, Schoenfeld, "problem solving."

1) Métacognition, connaissances métacognitives : des origines aux orientations actuelles

- a) Les premières recherches (Flavell, Brown) - travaux sur métamémoire et lecture

Il semble que ce soit à Flavell que la plupart des auteurs attribuent les premiers emplois du

mot dans un sens proche du sens actuel (mais vague).

Donnons lui donc la parole, en reprenant une conférence qu'il a faite à l'occasion de l'anniversaire d'Oléron (Flavell, 1985) :

"Qu'est ce que la métacognition ? Généralement la définition qu'on en donne est large et est assez vague : c'est la connaissance ou l'activité cognitive qui concerne, ou contrôle, un aspect quelconque d'une activité cognitive. On l'appelle métacognition parce que son sens profond est "la cognition de la cognition"...

Les connaissances métacognitives

Ce sont les connaissances acquises à propos de domaines cognitifs....

Grossièrement on peut dire que la métacognition concerne trois aspects : les personnes, les tâches et les stratégies...

Les expériences métacognitives

Ce sont les expériences cognitives ou affectives liées à une activité cognitive...."

Reprenant la description synthétique que dégage B. Noël (1991), nous dirons que pour Flavell, les métaconnaissances peuvent désigner :

- * les connaissances que peuvent avoir les sujets de leurs propres processus mentaux et des produits de ces processus (métacognition)
- * les connaissances des propriétés pertinentes par rapport aux apprentissages d'informations ou de données (connaissances métacognitives)
- * la régulation (guidage, contrôle..., conscients ou non) des processus cognitifs.

De plus les processus mentaux peuvent se rapporter à la mémoire, à la compréhension ou à la résolution de problèmes...

Dans la foulée de cette introduction du niveau métacognitif en psychologie, se sont développés toute une série de travaux en psychologie "développementale", dans lesquels les chercheurs se sont d'abord préoccupés des traces de métacognition chez l'enfant, notamment dans des tâches assez simples souvent de mémoire (rappel de listes, présentées sous diverses formes) ou de lecture (compréhension de textes lus) (cf. Brown et al. (1983), Forrest-Presley(1985), Melot (1981)).

Ils ont trouvé peu de traces de connaissances sur leur mémoire (ou sur leur stratégie de lecture) chez les enfants jeunes, beaucoup plus chez les enfants plus âgés, et ont souvent noté une relation chez les enfants qui présentaient un retard (en lecture par exemple) entre cette déficience et le fait qu'ils avaient une moins bonne conscience "métacognitive" (tout au moins en ce qui concerne les éléments exprimés).

Les chercheurs ont alors tenté de mettre au point des interventions par exemple sur les stratégies individuelles de mémorisation ou de lecture, se plaçant ainsi dans le registre métacognitif des élèves.

Cependant les quelques programmes d'entraînement "métacognitifs" qui ont été tentés, à la fois pour remédier aux retards éventuels des élèves et pour tester l'hypothèse d'une relation positive entre savoir métacognitif et conduites, laissent à désirer (cf. par exemple Melot (1991)) : ils ne

donnent pas toujours les bons résultats escomptés (controverses), il n'y a pas toujours maintien des améliorations qui ont pu être obtenues sur le moment, il n'y a pas toujours transfert à des tâches analogues, voire plus éloignées. Quant aux causes avancées pour leur efficacité éventuelle, elles ne sont encore qu'hypothétiques, voire idéologiques.

En fait, dans les meilleurs cas (cf. Chartier et Lautrey (1992)), les chercheurs ont obtenu (toujours sur des tâches de mémorisation ou de lecture) un maintien de l'amélioration des performances des élèves sur des tâches identiques ou analogues à celles de l'apprentissage, mais à une condition : c'est que dans l'entraînement le formateur explicite le lien entre la stratégie enseignée et l'efficacité des résolutions qui en découlent.

En réalité, de nombreux problèmes méthodologiques rendent les recherches correspondantes très délicates : en particulier les "mesures" de la métacognition (d'un sujet par exemple) sont très difficiles à faire, et plusieurs débats ont eu lieu à ce sujet : par exemple si on questionne les enfants (traces verbales) à quoi a-t-on accès exactement ?

S'il y a entraînement métacognitif, comment concevoir un tel entraînement ? S'il y a amélioration des conduites, comment l'évaluer, et dans quelle mesure est-ce dû à l'entraînement ?

Faut-il travailler sur des tâches très générales, faut-il se placer dans un domaine particulier ?

Enfin, sur la question des différences individuelles éventuelles entre enfants, peu de travaux ont été menés ; la plupart des auteurs qui s'y sont intéressés ont cherché à croiser les traces de métacognition chez les enfants sur un domaine donné et d'autres caractéristiques individuelles, comme dépendance /indépendance à l'égard du champ (cf. B. Noël (1991)), ou réflexivité/impulsivité (cf. résumé dans Chartier et Lautrey (1992)) ; les résultats vont toujours dans le sens des associations a priori raisonnables : les sujets réflexifs bénéficieraient plus d'un entraînement métacognitif que les sujets impulsifs par exemple...

b) les orientations actuelles (théories de l'esprit, éducabilité cognitive...)

Il y a moins de travaux sur le sujet, semble-t-il, dans les domaines généraux en tout cas : les chercheurs s'orientent soit vers des réflexions sur des théories de l'esprit, encore plus générales, dont la métacognition n'est qu'une composante, soit vers des remédiations générales du type "apprendre à apprendre" (Feuerstein etc...) qui correspondent à une sorte d'extrapolation des niveaux précédents, reliée à une hypothèse d'éducabilité cognitive indépendante des contenus.

Cependant, quelques auteurs reprennent l'idée d'entraînement métacognitif, notamment dans des ouvrages de vulgarisation, destinés aux enseignants ou aux formateurs.

A titre d'exemple citons l'ouvrage de Barth (1987), "l'apprentissage de l'abstraction, méthodes pour une meilleure réussite à l'école", dont le chapitre 7 s'intitule la métacognition. L'auteur milite, en donnant des exemples expérimentés à l'école élémentaire sur la conceptualisation, pour que les enseignants réfléchissent à la démarche des élèves pour apprendre et leur transmettent cette réflexion.

En intelligence artificielle le recours aux métaconnaissances se conçoit bien : pour rendre un système capable d'apprendre, de produire du nouveau, il est logique de chercher à lui fournir des connaissances sur les connaissances déjà implantées. Donnons quelques pistes bibliographiques.

2) Métaconnaissance(s) et IA

Deux éléments, parmi d'autres, ont sans doute contribué à placer l'attention des chercheurs à un certain niveau de réflexion sur les connaissances et les activités du sujet, niveau qui sera notre niveau "méta" par la suite : le développement de la cybernétique et des ordinateurs, comme source d'inspiration (de modèles) pour analyser les fonctionnements humains (le cerveau, la mémoire, etc...) et le développement des systèmes experts et de l'EAO, comme source d'inspiration pour analyser plus spécifiquement l'apprentissage des sujets. En fait, c'est plutôt en termes de dialectique qu'il faudrait parler : initialement il y a des hommes, qui pensent, qui agissent, qui créent des catégories, qui construisent des ordinateurs, et en retour il peut y avoir un niveau original de modélisation qui part de l'ordinateur par exemple, et ainsi de suite...

Dans la perspective IA, qui fait un peu la synthèse actuelle des deux courants, les chercheurs ont été amenés à se demander comment les experts travaillent, avec l'objectif d'implémenter sur leurs machines des systèmes capables d'apprendre eux aussi : il est clair qu'on ne peut alors en rester au niveau des savoirs seuls, pour engendrer des nouveaux savoirs il va falloir s'attaquer aux règles de construction et de transfert des savoirs : c'est ce niveau précisément, où on aborde les connaissances sur des savoirs qu'on appelle méta.

Mais puisque des chercheurs tentent d'apprendre à un "ordinateur" à construire ses connaissances, à partir d'une base de données et de métarègles, plusieurs problèmes viennent à l'esprit : d'abord est-ce que le choix d'implémenter des métarègles issues d'observation d'experts est bon ; ensuite, par filiation, le problème des élèves : est-ce qu'on va pouvoir faire utiliser à des élèves pour leur apprentissage des ordinateurs "bien conçus", et d'autre part, qu'il s'agisse d'apprentissages par ordinateur ou non, doit-on seulement apprendre aux élèves des connaissances, ou bien peut-on (doit-on) aborder aussi avec eux le niveau "apprendre à apprendre" ces connaissances ?

Il y a là un autre aspect du "méta", à savoir les connaissances de chaque individu sur son savoir, la gestion qu'il fait de ce savoir, que ce soit pour l'étendre ou pour résoudre des problèmes (le mettre en fonctionnement).

Ces deux aspects vont de fait intervenir dans l'acception que nous allons proposer des mots métaconnaissances, métacognition, métacognitif.

Nous n'avons pas dépouillé l'énorme bibliographie possible, nous contentant de citer trois directions qui nous semblent très représentatives des recherches qui font explicitement référence au niveau méta.

a) l'ouvrage de Pitrat (cf. Bazin (1993))

Pitrat y définit les métaconnaissances comme "les connaissances qui parlent de connaissances" (ce peut être des propriétés des connaissances, des connaissances sur les connaissances d'un individu, des connaissances qui servent à manipuler les connaissances - les acquérir, les exprimer, les utiliser, les stocker, les rechercher, les découvrir...). Il note l'ascension possible de niveaux méta.

b) les travaux de Cauzinille et Melot (1992)

Il s'agit d'étudier l'aide à la généralisation et à la réorganisation par prise de conscience et

explicitation sur activités bien choisies.

c) EIAO et métaconnaissances (Baron (1993))

Rappelons qu'il s'agit des environnements interactifs pour apprentissages avec ordinateurs...

Plusieurs aspects peuvent être considérés : certains sont directement reliés à la modélisation du domaine à enseigner, notamment tout ce qui concerne la représentation des connaissances (et des métarègles) du domaine à enseigner (cf. IA) ; mais d'autres aspects doivent intervenir, qui concernent la modélisation de l'apprenant - toute la spécificité du champ est même dans ces considérations. Et l'analyse des différentes productions possibles de l'apprenant, avec par exemple un diagnostic de ses erreurs, met nécessairement en jeu une réflexion sur les connaissances de l'apprenant, sur son raisonnement, ou encore sur ce que devrait être l'interface système-apprenant... Ces modélisations multiples du domaine à enseigner et des "élèves" mettent ainsi en jeu un niveau que les chercheurs appellent eux-mêmes "méta" dès lors qu'il s'agit d'une réflexion mettant en jeu des connaissances.

Dans l'état actuel des recherches, il y a cependant encore beaucoup de questions ouvertes, notamment toutes celles qui se rapportent aux apprenants et qui sont très proches de nos préoccupations.

3) En physique

En physique (comme en mathématiques), les didacticiens sont souvent amenés à dégager des raisonnements erronés des étudiants ou des élèves, ou des conceptions erronées, qui, en physique, se retrouvent de fait dans plusieurs contextes différents (raisonnement séquentiel par exemple). Seulement il apparaîtrait que, dans de nombreux domaines physiques, et beaucoup plus qu'en mathématiques, le travail SUR le "strict" corpus de connaissances physiques fasse partie du travail du physicien, dans la mesure où celui-ci doit sans cesse naviguer entre le réel (toujours insaisissable par essence, du moins dans sa totalité), le modèle, l'expérience, qui permet notamment de saisir l'influence de certaines variables et aussi de tester le modèle, et enfin l'explication qui permet en quelque sorte de faire le rapport entre le modèle et la réalité... Ainsi, comme le va-et-vient entre les connaissances descriptives et la réflexion sur ces connaissances fait partie intégrante de la démarche du physicien, beaucoup de recherches en didactique de la physique consistent à expliciter cette démarche et se placent donc sur les deux niveaux, connaissances et métaconnaissances (au sens de réflexion SUR les connaissances). Il s'agit notamment de dévoiler aux étudiants les causes des modèles erronés qu'ils utilisent, en explicitant la démarche scientifique de la physique, par opposition aux "expériences" du quotidien (cf. la "psychanalyse" suggérée par Bachelard). Nous allons développer deux exemples de ce type de travaux, où le recours aux métaconnaissances est explicite.

a) Le N°12 de la revue Aster (recherches en didactiques des sciences expérimentales)

Ce numéro s'intitule "l'élève épistémologue".

Il présente des réflexions et des travaux sur des sujets très proches de nos préoccupations, même si nous avons quelquefois d'autres exigences en matière de recherche didactique proprement dite. C'est pourquoi nous en donnons un compte rendu assez détaillé.

Le premier article, de présentation (par A. Verin), traite de "métacognition, épistémologie et éducation scientifique". L'auteur explique que l'expression du titre du numéro vient de Papert, qui a décrit "l'intérêt de développer des pratiques qui mettent en jeu une analyse réflexive par les enfants de leurs démarches et de leur fonctionnement intellectuel", ce qu'il fait lui-même pour la programmation.

Plus généralement, pour un certain nombre d'auteurs, les différentes façons d'apprendre sont un sujet d'intérêt car le savoir n'est pas transparent : pour se l'approprier il faut une activité d'apprentissage (non simple, non linéaire) : c'est la conduite consciente chez l'élève d'une démarche complexe qui est en jeu, disent-ils.

D'où l'hypothèse que l'élève, conçu comme organisateur de son apprentissage, gagne à prendre conscience de ses démarches de pensée pour mieux les maîtriser.

Parallèlement, des travaux explorent les possibilités de développement des réflexions épistémologiques : les élèves sont mis en situation de réfléchir sur la façon dont ils s'y prennent dans des actions de construction, d'apprentissage de connaissances, de résolution de problèmes...

On voit ainsi se dégager deux directions : certains mettent l'accent sur les concepts et les méthodologies scientifiques, dans la lignée de l'épistémologie, d'autres sur les démarches cognitives des élèves (métacognition). Ainsi vise-t-on la construction par les élèves de compétences

méthodologiques, et/ou de connaissances épistémologiques ou métacognitives selon les cas.

Dans l'article suivant, N. Bell passe en revue divers travaux sur la métacognition, conçue à travers la réflexion et la verbalisation des processus et conduites cognitifs. Les questions clefs sont "comment est-ce que tu sais ?" (cf. Le "As-tu compris" de B. Noël).

Elle explique que pour les chercheurs qui occupent ce terrain la conscience qu'a l'enfant de sa propre pensée expliquerait les progrès (et notamment le rôle moteur des conflits avec les autres).

Elle développe ensuite différents courants psychologiques qui s'opposent - tenants ou ennemis de l'introspection, considérée comme seul accès à la métacognition. Pour les uns cette introspection est impossible (scientifiquement s'entend), pour les autres il est possible d'accéder suffisamment à la conscience pour fonder des recherches.

Citons après elle Vygotski qui a postulé l'existence d'une relation directe entre la conscience qu'a l'individu de ses propres processus cognitifs et sa capacité à les contrôler. Selon lui le développement de la connaissance se caractérise par une augmentation progressive du contrôle conscient des processus cognitifs et par l'utilisation délibérée de cette connaissance par l'individu.

Rappelons que pour cet auteur toute fonction du développement culturel de l'enfant apparaît deux fois, sur le plan social d'abord, puis sur le plan psychologique...

Piaget, quant à lui, parle plutôt de prise de conscience comme nouvelle forme réorganisée de connaissance.

L'auteur souligne cependant la diversité des points de vue, des référents théoriques, comme B. Noël donc, en insistant sur le fait que la plupart des recherches sont sous-tendues par une représentation d'un individu conscient et actif quant au développement de ses ressources cognitives, qui les contrôle et les maîtrise. C'est comme si ces travaux véhiculaient une morale implicite : chacun doit contrôler ses actions...

Elle résume ensuite les recherches sur l'activité métacognitive, les tâches faciles favorisent la réflexion métacognitive (déjà vu), ainsi que les tâches nouvelles et stimulantes... Les erreurs seraient aussi stimulantes pour le développement métacognitif.

Cependant ces travaux ne se préoccupent ni vraiment des spécificités des contenus, ni des situations d'apprentissages, ni des environnements sociaux...

Il y a peu de recherches sur les relations entre le métacognitif et les comportements : on ne sait pas si la capacité de formuler explicitement le mode de résolution d'un problème change quelque chose à la résolution par exemple...

Mme Bell conclut en décrivant les méthodologies de ces travaux, fondées nécessairement sur des verbalisations, avec les limites que l'on sait, et en définissant des axes de recherches qui devraient se mener (plus précises, sur le rôle de la métacognition, ses manifestations, son influence sur la connaissance et ses variables...).

Dans l'article suivant, A.M. Drouin discute de l'expression utilisée dans le titre, revenant sur les mots mêmes de Papert "Penser sur sa pensée, c'est devenir épistémologue ; c'est entrer dans une étude critique de sa propre réflexion..."

L'auteur rappelle les différents sens du mot épistémologie ; étymologiquement réflexion sur la science, distincte donc de celle-ci, cette définition reste ambiguë, car de quelle science parle-t-on ?

Elle dégage d'abord quatre types d'orientation selon les méthodes d'approche, épistémologie "historique" [Bachelard, Canguilhem] qui éclaire ce qu'est une science donnée, et ses méthodes de validation, épistémologie plus proche de la logique, définissant ce que la science devrait être, avec des critères idéaux de validation [Popper], épistémologie plus sociologique regardant les sciences en fonctionnement avec les phases "normales" et les révolutions [Kuhn], épistémologie génétique tentant de trouver les caractéristiques du savoir scientifique dans leur genèse (chez les enfants) [Piaget]. Elle définit ensuite un sens étroit, étude critique des sciences destinée à déterminer leur origine logique, leur valeur, leur portée, et un sens plus large, théorie de la connaissance, étude des processus d'acquisition des connaissances, que d'autres appellent gnoséologie [Lalande].

Philosophie des sciences, histoire des sciences, méthodologie des sciences, gnoséologie, autant de sens qui sont, selon les cas, donnés au mot épistémologie... Il n'y a pas unanimité, des traditions traversent les différents courants philosophiques, les différents pays, les différentes langues même.

Reprenant alors l'expression de Papert, l'auteur réfléchit à sa signification, insistant sur le fait qu'il s'agit d'enfants : il faut exclure la conception d'un discours tendant à maîtriser la science, dans ses étapes et ses aspects divers, et ne garder que l'idée d'épistémologie comme réflexion sur le savoir. Il s'agit donc d'une acception générale, un peu vague, mélangeant plusieurs composantes : l'auteur propose de parler plutôt de métacognition, comme réflexion au second degré sur le savoir et ses modes d'accession. Se posent immédiatement les problèmes déjà évoqués : de quoi peut-on être conscient en ce qui concerne ses opérations de pensée ? Est-ce un gain ?

On peut alors penser à une réflexion anticipatrice, dans une phase préparatoire, d'où l'accent sur le choix de méthodes et leur justification ; on peut évoquer l'intérêt de faire un bilan de savoir, plutôt sur les contenus et leur statut respectif, on peut enfin se diriger vers des réflexions sur le statut des savoirs acquis... Enfin on peut interpréter le mot dans une direction plus pédagogique, faire transmettre (ou au moins discuter) un savoir par les enfants en cours d'apprentissage...

Au total, l'auteur conclut que si le mot n'est pas bien juste, et correspond à un abus de langage, il a le mérite d'attirer l'attention sur une question qui, elle, est fondamentale : le fait de faire coexister dans l'apprentissage des sciences l'apprentissage de notions et de méthodes, un certain recul sur les démarches et le statut du savoir... Il faut aider l'enfant à prendre conscience non seulement de ce qu'il sait mais de ce que c'est que savoir, de ce que c'est qu'un concept scientifique. Acquisition parallèle, complémentaire, contemporaine de l'apprentissage...

Les articles suivants décrivent des dispositifs pédagogiques mis au point "pour développer une réflexion sur les caractéristiques et les procédures de la pensée scientifique, en physique et en biologie. Les élèves construisent des connaissances sur ce qu'est un raisonnement expérimental, les relations entre le réel et la théorie, la façon dont on imagine les hypothèses et dont on les valide ou les infirme, le rôle de la modélisation pour rendre compte des phénomènes, le caractère provisoire des théories" et même "le caractère moteur du conflit cognitif dans l'avancée des connaissances".

Puis viennent des travaux où "l'accent est mis sur l'analyse des démarches conduites par les élèves eux-mêmes, la façon dont ils s'y prennent pour produire une explication..." d'où "production d'outils destinés à enrichir les procédures des élèves et à faciliter le contrôle conscient de sa démarche par chacun" (nous avons emprunté ce résumé à l'article de présentation).

On reconnaît deux types de travaux, les premiers plus liés à des connaissances générales, de type épistémologique, les seconds relevant plus de la métacognition...

Le dernier article est consacré à une réflexion comparative sur des dispositifs pédagogiques destinés à faire apprendre aux élèves de collège des méthodes en sciences expérimentales, par la réflexion distanciée. L'auteur retrouve l'accent mis sur la prise de conscience ou sur la réflexion pour mener à bien l'activité. Elle dégage ensuite les opérations mentales impliquées dans l'activité réflexive selon les cas (systématisation, généralisation, jugement, prescription, choix, interrogation, ..). Elle distingue ensuite dans les travaux ce sur quoi porte la réflexion, méthodes plus scientifiques ou plus personnelles...Enfin elle dégage les variables de tous ces travaux, notamment le rôle du maître, celui de l'écrit, celui des confrontations...Dans une conclusion prudente, l'auteur présente des choix entre deux exigences contradictoires, développer une attitude réflexive susceptible de générer des connaissances métacognitives nouvelles, et rechercher un succès à brève échéance de l'action.

Ses conclusions ne correspondent pas toujours à ce qu'on va voir dans les travaux présentés ici : faut-il y voir un lien avec la différence des contenus, ou des niveaux (beaucoup de nos recherches se passent dans l'enseignement post-obligatoire), ou autre ?

b) Autour de l'idée de sciences (Larochelle et Désautels)

Dans cet ouvrage, c'est une autre idée qui est développée, à savoir celle de la nécessité de travailler à la fois sur le savoir scientifique et l'accès au savoir scientifique avec les étudiants (les auteurs utilisent avec réserve le mot métacognitif pour qualifier ce niveau mais le citent tout de même). Les auteurs développent l'idée du dérangement épistémologique comme moyen d'arriver à mettre en place chez les étudiants des conceptions compatibles avec l'acquisition de connaissances scientifiques, dans le cadre d'un jeu dont les deux règles sont les suivantes : le savoir scientifique est un savoir construit, inventé, il est négocié et argumenté.

C'est un logiciel, "l'énigmatique", qui sert de support à tout ce travail.

4) En mathématiques

a) Les "précurseurs" : Piaget et l'analyse réflexive, Polya et les méthodes, Glaeser et l'heuristique..

Comme nous l'avons signalé au début de ce paragraphe I, certains auteurs ont mis en avant des idées très proches de celles qui nous intéressent ici mais sans utiliser le vocabulaire actuel.

Piaget lui-même a évoqué à plusieurs reprises des mécanismes proches de ce que d'autres appellent métacognition : citons un ouvrage dont le titre parle de lui-même comme "La prise de conscience" (1974), ou rappelons l'idée de l'abstraction réfléchissante comme moteur de la construction des connaissances. Mais il y a une autre occurrence encore où Piaget a recours à ce que nous cherchons ; c'est lorsqu'il réfléchit à la construction des mathématiques par les mathématiciens (Piaget et Beth, Piaget et Garcia) : ces auteurs prétendent que l'analyse réflexive fait partie intégrante du travail du mathématicien à certains moments de réorganisation.

Polya, quant à lui, pense qu'il faut aider les élèves à acquérir des stratégies générales de résolution de problème et aider le professeur à développer chez les élèves de telles capacités. Il

construit notamment une grille de questions (jointe en annexe 1) permettant d'explicitier ce que l'expert met en jeu quand il résout un problème (même s'il n'en est pas conscient).

Enfin, d'autres auteurs, comme G. Glaeser par exemple, ont développé des idées analogues sur le rôle nécessaire de l'heuristique et des méthodes systématiques dans la résolution des problèmes et sur le fait qu'il faut enseigner aux futurs maîtres des éléments sur l'activité mathématique : tout un chapitre de son ouvrage "Mathématiques pour l'élève professeur" est consacré à l'exposition de ce qu'est (devrait être ?) l'activité mathématique.

On peut aussi trouver dans des écrits de Freudhental, ou de Skemp ou de bien d'autres, des idées proches sur le fait qu'il faut rendre les enfants conscients par exemple ...

b) La littérature anglo-saxonne depuis 1985 : Dubinski, Schoenfeld, et le courant du "problem solving"...

Dubinski suit une démarche originale, adaptant les idées de Piaget à l'apprentissage et à l'enseignement des mathématiques complexes, ce qu'il traduit par "advanced mathematical thinking". Son hypothèse principale est que l'abstraction réfléchissante de Piaget consiste en la construction progressive d'objets mentaux et d'actions mentales sur ces objets (décomposition génétique des notions) ; il élabore donc des genèses artificielles de ces constructions, notamment en utilisant un environnement informatique. Bien qu'il n'y ait pas d'allusion explicite à la métacognition dans ses travaux, sa démarche est proche de ce qui nous intéresse ici.

En 1985, dans un article intitulé "Reflection and recursion", paru dans ESM, J. Kilpatrick donne un résumé prudent de l'état des recherches sur la métacognition et des retombées possibles en mathématiques. Il détaille les différents aspects que recouvre le mot "métacognition", et donne des interprétations en termes de modèles de la pensée. Il insiste sur le fait que ce n'est que la reprise d'une vieille idée (Polya, Ed Begle) et en soulignant la coïncidence de cette nouvelle "mode" avec l'avènement des ordinateurs.

Lester et Garofalo font aussi un bilan sur le même sujet dans un article paru dans JRME en 1985 : après avoir redonné des définitions, ils indiquent l'attention croissante des chercheurs à la prise en compte du métacognitif comme moyen d'analyse indispensable.

Ils reprennent à leur compte la distinction entre "Knowledge of cognition" et "Regulation of cognition" (Brown et Palincsar) : la première catégorie reprend celle de Flavell, concernant plus les connaissances des sujets sur leurs connaissances, avec les trois types de variables (personnelles, liées aux tâches, liées aux stratégies), la seconde concerne plus ce qui est engagé (engageable) dans des mises en fonctionnement. Ils précisent ces catégories pour les mathématiques, exhibant ce qu'on peut mettre derrière, par exemple ils classent les représentations métacognitives (beliefs) dans la première catégorie avec les tâches. Ils évoquent le cadre proposé par Schoenfeld (cf. ci-dessous) et en proposent un autre, inspiré aussi des travaux de Sternberg, dans lequel peuvent rentrer toutes les "opérations" métacognitives des apprenants : orientation (identification du problème), organisation (planification et choix des actions), exécution, vérification (séparément des deux premières phases et de la troisième). Cela sert à analyser les comportements des élèves. Ils concluent sur le problème ouvert d'un entraînement métacognitif possible pour les élèves.

Schoenfeld pour sa part dans son ouvrage de 1985 "Mathematical problem solving" développe l'idée qu'il faut travailler avec les étudiants explicitement

- * sur leurs méthodes de résolution de problèmes, (en précisant notamment par rapport à Polya),
- * sur leurs moyens de contrôles,
- * et même sur leurs représentations des mathématiques (beliefs = nos représentations métacognitives à peu près).

Ceci doit faire évoluer positivement la mise en fonctionnement des connaissances des étudiants en situations de résolution de problèmes.

L'auteur soutient en effet que les très mauvaises performances habituelles des étudiants en résolution de problèmes ne sont pas dues à de mauvaises connaissances mathématiques mais à de mauvaises façons de les mettre en oeuvre. Comme il le dit, les étudiants vont "à la chasse aux canards", alors que le mathématicien, lui, change de stratégie dès qu'il se sent sur une mauvaise voie...

D'où la nécessité d'intervenir sur les méthodes de résolution de problèmes et sur tout ce qui va avec (y compris les représentations). Il présente quelques expériences à l'appui de ces réflexions ainsi que des exemples tirés d'enseignements effectifs. Sans utiliser le mot "méta", Schoenfeld évoque ainsi un registre de travail métacognitif.

Dans un article de 1987, "What is the fuss about metacognition", Schoenfeld reprend ses travaux antérieurs en introduisant les concepts de métacognition. Il explique qu'il s'agit de s'intéresser aux connaissances sur la connaissance ("pensées sur sa pensée"), et classe, lui aussi, en trois catégories ce qu'il retiendra comme relevant de la métacognition : les connaissances sur sa propre pensée, le contrôle de sa pensée en situation de travail, les représentations (au sens de nos représentations métacognitives - conceptions sur les mathématiques et la manière d'en faire, cf. Robert et Robinet (1992)).

Schoenfeld décrit quatre manières de développer des compétences métacognitives chez les étudiants, utiliser des cassettes vidéo montrant des recherches d'étudiants mal organisées, expliciter sa propre démarche de résolution de problèmes devant les étudiants (avec les questionnements incessants et les changements de stratégie), organiser des discussions avec la classe, l'enseignant servant de "contrôleur" (cela ressemble beaucoup aux débats scientifiques de M. Legrand), enfin faire travailler les étudiants en petits groupes en intervenant au fur et à mesure sur les stratégies de résolution.

Il termine par des commentaires semi-théoriques, en indiquant des justifications aux constats positifs qu'il pense pouvoir tirer de ses expériences. Il évoque des arguments d'ordre psychologiques (se référant à Vygotski notamment) et souligne surtout qu'il évolue de plus en plus vers ce qu'il appelle la création d'un "microcosme de culture mathématique", qui lui semble finalement le plus efficace (on retrouve encore des idées proches de celles de M. Legrand).

Il existe une autre série de travaux anglo-saxons qui font référence explicitement à la métacognition et dont une partie importante se rattache aux recherches autour du "problem solving". A partir de 1987, on trouve ainsi toute une série d'articles reprenant l'idée de métacognition en mathématiques pour la résolution de problèmes, notamment dans les actes de

PME. Il y a en particulier dans les actes de PME 11 (1987) un chapitre entier consacré explicitement à la métacognition.

Plusieurs expériences sont décrites, sans qu'il y ait encore quelque chose de tout à fait concluant. Tout le monde s'accorde pour remarquer et si possible démontrer qu'il y a un certain rapport entre métacognition et bonne performance, et j'ai envie de dire que beaucoup des auteurs ont envie de justifier ce rapport mais les expériences sont difficiles à monter et à interpréter...

Certains auteurs notent des différences importantes entre les élèves ; d'autres pensent que ce sont les enseignants eux-mêmes qui sont les "professeurs de métacognition" et qu'ils ne font pas toujours ce qu'il faut pour développer chez les élèves les compétences métacognitives adéquates ; certains auteurs enfin concluent qu'on ne peut pas bien séparer le méta du reste (cf. Lester (1987) dans un article bilan du chapitre des actes de PME 11 consacré à la métacognition cité ci-dessus et intitulé "pourquoi est-ce si difficile de résoudre un problème ?")

5) Un bilan

Ainsi le préfixe "méta" accolé aux mots cognition, cognitif, connaissances,... annonce grosso modo deux types de signification (1), correspondant à diverses recherches (psychologiques à l'origine) :

* la métacognition fait référence à la conscience individuelle, voire à la connaissance qu'a le sujet de ses propres processus de sujet (apprenant ou connaissant), processus qui sont des produits ou des jugements cognitifs. Sous le terme processus, on met, entre autres, ce qui concerne les démarches de résolution de problèmes, comme le guidage et le contrôle (ou le monitoring, ou le pilotage, ou la gestion...).

mots liés : introspection, prise de conscience, régulation, analyse réflexive ou distanciée...

* moins individuelles, les connaissances métacognitives ou les métaconnaissances correspondent aux connaissances potentielles d'un sujet (élève ou ordinateur !) sur l'apprentissage, la construction des connaissances, voire les méthodes (scientifiques notamment), ou sur la connaissance elle-même ; l'accent est plus mis sur les contenus que sur la conscience qu'en a le sujet.

mots liés : épistémologie, heuristique, analyse réflexive ou distanciée...

Les deux directions ne sont pas si indépendantes qu'il peut y paraître (d'ailleurs il y a deux mots clef communs !). Ainsi, pour un sujet donné, une phrase évoquant "la nécessité d'une analyse réflexive explicite de l'apprenant" a deux lectures possibles, et la marge est très étroite entre les deux : ou l'auteur veut dire que l'individu doit procéder à une analyse de ce qu'il a à faire, lui ou son voisin d'ailleurs, appliquant pour cela, tout comme son voisin, une méthode générale qu'il a apprise (avec des questions précises par exemple), sans plus se mettre en jeu individuellement, ou il veut dire que l'individu doit réfléchir à ce qu'il a fait lui personnellement, et le juger pour le rectifier ou l'adopter...

L'analyse réflexive au cours d'une résolution de problème est-elle la même avant, pendant, après la résolution du problème considéré par exemple ?

Où commence, où finit l'introspection ?

Il n'est pas exclu que les différences individuelles jouent beaucoup à ce niveau, et il peut être imprudent de se prononcer trop strictement.

De plus les significations des mots utilisés par les divers auteurs dépendent aussi du contexte et des objectifs de ce dont ils parlent, recherches (plus psychologiques) sur les processus mentaux mis en jeu par les sujets (première direction) ou recherches (plus appliquées) de régulations positives, pour un ensemble de sujets, de l'activité cognitive sur un contenu donné (deuxième direction).

De fait, dans les recherches que nous présentons ici c'est plus la deuxième direction qui est en jeu, sauf dans deux ateliers ; les principaux travaux français sont plutôt centrés sur la détermination de métaconnaissances à transmettre à des élèves et de leur mode de transmission (scénario), avec un objectif d'apprentissage de mathématiques (et d'analyse des effets de l'enseignement).

Nous allons maintenant essayer de préciser ce que nous proposons de retenir de ces définitions en didactique des mathématiques.

(1) Nous ne reprenons pas ici la distinction que l'on trouve dans les travaux initiaux de Flavell, entre connaissances et expériences métacognitives d'une part, et au sein des connaissances métacognitives, entre les variables liées aux personnes, aux tâches et aux stratégies d'autre part.

II Réflexions sur la prise en compte du méta en didactique des mathématiques

1) Définitions

a). généralités

Nous utiliserons le préfixe *méta* devant les mots connaissances ou cognitif ou cognition pour désigner des éléments d'information ou de connaissances SUR les mathématiques, sur leur fonctionnement, sur leur utilisation, ^{ou leur application} qu'ils soient généraux ou tout à fait liés à un domaine particulier.

Ce peut être donc, avec le vocabulaire précédent, des éléments de métaconnaissance, voire de métacognition ou des connaissances métacognitives.

Cependant, il est important de mettre l'accent sur la relativité de la définition pour nous : la distinction entre mathématique et "méta"(mathématique), dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, n'est pas du tout absolue à nos yeux.

b) Relativité

La reconnaissance du caractère "méta" de certaines connaissances dépend pour nous de manière déterminante des élèves concernés par l'exposition de ces connaissances.

Ainsi certaines méthodes relèvent du méta pour des élèves NE CONNAISSANT PAS ENCORE COMPLETEMENT LE CHAMP AUXQUELLES ELLES S'APPLIQUENT, pour l'enseignant ou pour des élèves plus avancés ce sont quasiment des mathématiques, pour eux la distinction n'a pas lieu d'être en tout état de cause.

Autrement dit nous utiliserons le mot "méta" plutôt que mathématique s'il y a pour le récepteur du discours apport d'un élément sur des mathématiques à apprendre, en partie encore donc non acquises, ce qui justifie qu'on ne peut pas assimiler ces éléments à des mathématiques ou du moins qu'il soit intéressant de les distinguer des connaissances mathématiques "ordinaires".

On pourrait encore dire que certaines connaissances vont avoir un statut de connaissances ou de métaconnaissances selon le traitement qu'il est possible de leur appliquer avec les élèves.

Le statut momentané de métaconnaissance correspond un peu à un intermédiaire, où la relativité est évidente : c'est bien parce qu'il y a des experts qui savent mieux que les élèves comment s'organisent les mathématiques, que ceux-ci peuvent avoir accès, grâce aux premiers, à certains éléments qui vont peut-être leur faciliter l'apprentissage (ou l'accélérer)...

Reste que pour d'autres éléments méta, plus généraux, on ne changera pas de vocabulaire que ce soit pour les élèves ou pour les experts...

Donnons à ce propos deux exemples.

~ Considérons le théorème suivant : "soient a et b deux réels, si pour tout entier positif n on a $b \leq a \leq b + 1/n$ alors $a = b$ ".

Ce théorème est une connaissance mathématique qui, pour être utilisée à bon escient nécessite une bonne connaissance des notions de suite et de réel. Ceci est exclu compte tenu du programme de terminale. Ce théorème est alors introduit par l'enseignant de DEUG première année comme une des méthodes qui permettent de démontrer l'égalité de deux nombres réels. Un élève sortant de terminale pourra penser à utiliser ce théorème à cet effet. Le statut de "méthode", ainsi attribué, est

momentané : au bout d'un certain temps, les élèves se seront appropriés la connaissance correspondante, et l'auront intégrée à leurs connaissances sur les réels.

En revanche, il est d'autres éléments pour lesquels le statut de métaconnaissance est indépendant du niveau auquel on se place.

~ Prenons l'exercice suivant : "montrer que le point M qui vérifie

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

est l'orthocentre du triangle ABC , si O est le centre du cercle circonscrit à ABC ".

Cet exercice est jugé difficile par les élèves : en effet ils n'ont comme idée de départ que la définition ponctuelle de l'orthocentre (intersection des hauteurs) et n'arrivent pas à la "raccrocher" au résultat demandé. Ils sont débloqués si l'enseignant suggère de traduire vectoriellement la propriété "M est orthocentre".

La métaconnaissance suivante se profile ici : les notions mathématiques interviennent dans des cadres différents (affine ou ponctuel, vectoriel, analytique...) et on a intérêt pour résoudre certains exercices à se poser systématiquement la question des cadres d'intervention des notions en cause, et à envisager d'en changer par rapport à l'énoncé initial.

Ce recours assez systématique aux changements de cadres, en cas de blocage notamment, est fondé sur une certaine organisation des connaissances mathématiques, en termes de cadres précisément, c'est une métaconnaissance indépendante du niveau des sujets.

c) différentes formes d'intervention du "méta"

Reprenons notre première définition : en fait, il y a plusieurs formes ou plusieurs niveaux d'information et de connaissances sur les mathématiques, sur leur fonctionnement, sur leur utilisation, que nous devons préciser. On peut citer :

- * des informations constitutives de la connaissance mathématique (méthodes, structures, organisation),
- * des informations constitutives de l'accès à la connaissance mathématique, accès d'un individu donné ou plus général (jeux de cadres, rôle des questionnements, des exemples et des contre-exemples, et aussi rôle de la réflexion épistémologique pour apprendre)
- * des informations sur les modes de productions et le fonctionnement mathématique (contrôle, guidage).

Donnons quelques exemples succints.

~ Nous avons déjà signalé l'utilité des jeux de cadres.

~ Pour le rôle du questionnement, voici une illustration.

Un élève préparant le CAPES se trouve confronté au problème suivant : " le périmètre P d'un cercle est donné par $11.32 \leq P \leq 11.34$, sachant que $3.14 \leq \pi \leq 3.15$, trouver la meilleure approximation possible du rayon".

L'étudiant se rend compte que cette question est liée au calcul d'erreurs, chapitre jusque là délaissé (par nature), et il est amené à approfondir ses connaissances non seulement pour résoudre l'exercice mais encore pour pouvoir proposer un texte abordable en terminale (ce qui n'est pas le

cas du texte actuel !)

~ Le rôle du contrôle est évident, il permet aux élèves de repérer eux-mêmes leurs erreurs et leurs contradictions, et donc de se questionner.

~ Nous allons développer un exemple tiré d'un enseignement d'algèbre linéaire (Dorier, Rogalski) pour éclairer le rôle possible d'une réflexion épistémologique.

Il s'agit d'un travail préliminaire à l'introduction axiomatique de la notion d'espace vectoriel (cf. annexe). L'enseignant explique (par écrit) que cette notion est introduite pour résoudre de la même façon toute une série de problèmes du même type. Il propose alors de résoudre une série d'exercices concernant des espaces très différents, mais se ramenant tous en fait à des résolutions d'équations (recherche de solutions particulières) : dans l'ensemble des similitudes de centre O , dans $\mathbb{R}^3$, dans l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels...

Il leur demande à la fin d'inférer les règles de calcul communes utilisées.

Cette réflexion précède l'énoncé des axiomes d'espace vectoriel, elle est prise comme référence explicite pour le cours.

~ En ce qui concerne les informations sur le fonctionnement des mathématiques, citons l'information faite en DEUG aux étudiants sur la nature des concepts à introduire : *l'enseignant peut développer l'idée que ces concepts ne sont pas tous de la même nature, ne sont pas tous introduits pour le même type de raison. Certains servent à résoudre des problèmes particuliers (cf. nombres et mesures...), d'autres pour unifier, classifier, généraliser a posteriori (limites, algèbre linéaire...), d'autres enfin sont des extensions de concepts déjà introduits...*

~ Un autre exemple est lié à l'explicitation de l'utilisation des théorèmes (à partir de la quatrième) : *il semble important pour certains élèves d'expliciter le fait qu'il y a lieu de contextualiser les théorèmes utilisés au cours d'une démonstration, en adaptant le nom des lettres par exemple. L'enseignant peut aussi expliquer l'utilisation des équivalences dans les deux sens : le théorème de Thalès sert à démontrer que des droites sont parallèles mais aussi qu'elles ne le sont pas !*

Ainsi non seulement certains des éléments dont nous parlons peuvent être très liés à un fonctionnement personnel, d'autres concernant plus un "sujet" épistémique, mais encore certaines informations que nous qualifierons de "méta" peuvent concerner plus l'épistémologie des apprenants vis à vis de la discipline que directement la discipline.

Il apparaît ainsi que, pour l'utilisation que nous proposons, le mot recouvre des informations qui, si elles sont relatives aux apprenants, sont néanmoins assez larges.

En fait, dorénavant nous réunissons sous le même mot des catégories qui ont pu être disjointes dans la littérature (réflexion et métacognition notamment), ce qui justifie le choix du seul préfixe "méta" auquel nous nous sommes ralliés.

En résumé, ce qui va unifier le champ dont nous allons proposer de tenir compte en didactique des mathématiques n'est pas le caractère externe au sujet ou propre au sujet, mais

bien le niveau de ce dont on parle par rapport à la connaissance en jeu.

Nos définitions vont toujours être relatives à une classe de sujets (les élèves en l'occurrence). Nous considérons pour ces sujets, compte tenu de leurs connaissances mathématiques, tout ce qui concerne la réflexion sur ces connaissances, qu'elle soit ou non explicite ou consciente, qu'elle soit le fait d'un sujet particulier ou qu'elle reste potentielle : ce peut être une réflexion individuelle (du type "qu'est-ce que je peux faire sur ce problème avec mes connaissances"), ou générale (du type "comment puis-je faire pour les mettre en fonctionnement ou les accroître"), ou bien encore une réflexion sur la signification des connaissances mathématiques (qu'est-ce qu'un axiome ?)...

2) Réflexions sur la prise en compte du "méta" en didactique des mathématiques

a) Quelques arguments pour motiver la prise en compte du "méta" dans l'apprentissage des mathématiques

C'est presque une question préalable qui se pose : comment peut s'expliquer l'utilité d'une prise en compte du "méta" dans l'apprentissage des mathématiques ? Si nous n'avons pas abordé cet aspect dans la première partie, c'est qu'il n'y a pas à notre connaissance de travaux vraiment explicites à ce sujet. Nous allons donc en rester au niveau des seules hypothèses, voire des spéculations...

Peut-on d'abord évoquer des travaux de psychologie ?

Plusieurs pistes partielles, complémentaires, et relevant de dimensions différentes, nous semblent effectivement pouvoir être évoquées pour justifier le fait que des éléments "méta" aident les élèves à résoudre des problèmes, à mettre du sens et à organiser leurs connaissances mathématiques.

* Dans une perspective interactionniste (cf. Vygotski par exemple), de tels éléments peuvent faire plus facilement l'objet de communications entre les élèves que les mathématiques elles-mêmes, d'où leur intérêt, notamment pour "se lancer dans l'action". Ce sont des éléments sur les connaissances mathématiques, or résoudre un problème c'est justement agir sur les connaissances mathématiques... et il s'agit de réussir à agir assez vite, sans une trop grande dépense d'énergie à chaque fois, d'où l'intérêt d'avoir des "aides à l'action", suffisamment générales pour resservir, et même pour être recyclées, s'autorégénérer (à la différence de recettes).

* Dans une perspective constructiviste (au sens large) nous nous demandons si ces interventions ne contribuent pas à créer un certain déséquilibre, déséquilibre dynamique entre métaconnaissances et connaissances, comme un appel d'air entre ce qui est attendu, prévu, anticipé formellement, et ce qu'il faut mettre dedans. Si le déséquilibre est trop grand il ne se passe rien ; mais si la marge est suffisamment petite, les élèves sont aidés à franchir le pas dans l'inconnu... Cela est peut-être à rapprocher des théories de Brünner concernant l'anticipation.

* Enfin, on peut aussi évoquer des éléments liés à des modèles de construction des connaissances scientifiques liés à la formation même de ces connaissances. Travailler sur l'accès aux connaissances est une entrée au travail d'acquisition (cf Legrand, Desautels)...

Indiquons, pour terminer, notre vision naïve des choses, notamment sur les raisons du fait que des éléments "méta", contenus dans le discours de l'enseignant, pourraient intervenir dans la

construction des connaissances des élèves.

D'abord, pourquoi ce discours sur les mathématiques serait-il plus efficace que la pression des mathématiques elles-mêmes, ou de l'échec déjà vécu, notamment au collège ? Comment un "simple" discours peut-il modifier des pratiques issues de toute l'histoire de l'individu ? .

C'est dans la mesure où des blocages ont lieu en amont du cours de mathématiques, que nous pensons qu'il n'est pas absurde de tenter d'intervenir précisément en amont des mathématiques en donnant accès à certains éléments sur les mathématiques.

Imaginons un enfant qui refuse de manger du Smut parce qu'il pense qu'il va avoir mal au ventre : ce n'est pas sur la nourriture qu'on va agir mais bien plutôt sur le fait que manger du Smut est indispensable, et ne donne pas mal au ventre si on en mange raisonnablement...

Revenons à la construction des connaissances, et adoptons le point de vue "passage de l'ancien au nouveau". Certains éléments "méta" pourraient jouer le rôle particulier suivant : les métaconnaissances liées aux contenus aideraient les élèves au moment où des changements de points de vue, ou de niveau sont nécessaires, par explicitation de ce qui est attendu d'eux. Ces éléments pourraient faciliter les mises en relation, les anticipations car ils préparent les élèves, ils canalisent les écoutes, ils indiquent la longueur d'onde, ils évitent de trop grandes dispersions. Ils jouent comme un intermédiaire, comme un pont, une rampe, une canne entre l'ancien et le nouveau, ou même comme un engrais (seul il ne sert absolument à rien, mais il peut favoriser la pousse de certaines graines, s'il est bien adapté, s'il pleut assez, si le sol est bien préparé)...

Tout se passerait comme si, pour donner encore une image, ces éléments jouaient, pour certains élèves, un rôle de catalyseur dans l'acquisition des connaissances, à condition toutefois qu'un certain seuil quantitatif en terme d'action des élèves (temps et quantité d'exercices par exemple) soit atteint.

En fait, les éléments de type "méta" pourraient être considérés d'une certaine manière comme un interface explicité entre les élèves, tels qu'ils sont, et les mathématiques, comme corps de connaissances à acquérir : les élèves ont des représentations, des connaissances et des automatismes, il faut qu'ils intègrent les nouvelles connaissances aux précédentes, les métaconnaissances peuvent participer à cette intégration, à certains moments précis, de manière limitée et vraisemblablement différenciée selon les individus, et sous certaines conditions.

Ainsi, selon qu'on "laisse faire" ou qu'on intervienne, il se pourrait que l'on facilite l'intégration, peut-être par des mécanismes de préselection à divers niveaux : on facilite par exemple la résolution des problèmes par un centrage sur les méthodes ; de ce fait, comme les élèves ont résolu leur problème, ils donnent plus de sens aux connaissances mathématiques mises en jeu et aux méthodes elles-mêmes ; tout s'est passé comme si une certaine facilitation était liée à une mise rapide sur une longueur d'onde efficace...

De ce fait d'ailleurs, on agit aussi sans doute sur les représentations, qui en retour vont permettre une action plus efficace, qui alimentera en retour à nouveau les représentations...

Toutes les métaphores issues des connaissances actuelles sur le fonctionnement des réseaux de neurones vont dans le sens de ce type d'image : "allumage" de réseaux correspondant à de l'acquis, zone proximale de développement partiellement activée, dans cet ordre d'idées certaines de

nos métaconnaissances correspondraient au petit "coup de pouce" nécessaire pour gagner l'adjonction de nouveaux réseaux à partir des anciens, notamment si un seuil est atteint. Des modèles de diffusion de type percolation au sein des réseaux neuronaux semblent bien convenir à ce qu'on imagine...

b) Prise en compte du méta en didactique : le "méta" simple instrument pour mener des analyses ou futur objet d'enseignement ?

Se pose maintenant une question, qui même si elle n'est pas toujours explicitée dans les travaux, est fondamentale : ou bien on en reste à ces catégories pour analyser les productions des élèves notamment, ou bien on se lance dans une action relevant explicitement de ce niveau (même si c'est mélangé à d'autres niveaux) en direction des élèves.

Il y a d'ailleurs là une option : pourquoi donc faire accéder l'élève ou chercher à le faire accéder à ce niveau, doit-on réserver ce niveau à l'analyste, ou peut-être à l'enseignant, à la limite pourquoi chercher à donner à l'élève des clefs ?

Donnons un exemple : dans un article intitulé "*Le calcul algébrique au collège, un exemple*" (revue petit x n°24), M. Julien explique que les enseignants n'identifient pas certains éléments de savoir, comme le fait de faire la différence entre

* un savoir algébrique formel, suffisant pour résoudre l'exercice : développer $(X+5)^2$

* un savoir algébrique fonctionnel, indispensable pour prouver que $(X+5)^2 \geq 10X$.

L'auteur de l'article utilise le registre "méta" pour faire son diagnostic. Il n'envisage pas d'aller plus loin, et ne suggère pas que les enseignants puissent dévoiler ce fait aux élèves...

Quel parti prendre ?

Beaucoup d'auteurs, comme nous l'avons vu, ont montré que des métaconnaissances apparaissent chez les élèves plus âgés, dans des domaines comme la mémoire ou la lecture, accompagnant souvent les performances des élèves jugées satisfaisantes, et ceci "quoiqu'on fasse".

Cependant, ces mêmes auteurs ont souvent aussi montré qu'une intervention de type remédiation auprès d'élèves "moins bons", voire jeunes, était positive, mais les recherches sont très difficiles, il y a tellement de problèmes méthodologiques qu'il est facile de rester sceptique surtout si on est hostile à l'accès des élèves à ce niveau... Citons comme problèmes souvent évoqués : comment mesurer la "métacognition" chez les élèves, peut-on se contenter d'indices verbaux, comment être sûr de l'efficacité des interventions spécifiques ?

Voilà donc des questions clefs de notre travail : avant tout, y a-t-il lieu de s'intéresser à ces niveaux, dans l'enseignement des mathématiques, même pour comprendre ce qui est en jeu ? Ensuite doit-on laisser faire "la nature" et se contenter d'analyser ? Puis faut-il intervenir, et s'il faut intervenir, comment ?

De plus, on peut encore trouver plusieurs interprétations de l'introduction du méta dans l'enseignement :

c) le "méta", un moyen ou une fin pour l'apprentissage mathématique?

En fait, deux objectifs liés à ces éléments d'information "méta" peuvent apparaître, vu ce qui précède.

* le méta comme un moyen pour intervenir dans les apprentissages,

~ à titre général

Par exemple, comme nous l'avons déjà signalé, l'enseignant peut choisir de faire travailler explicitement sur le sens d'une construction axiomatique : il peut choisir d'expliquer comment la définition de la limite en (ε, N) est une généralisation de la notion donnée en terminale à partir des suites de référence.

~ à titre individuel

Certains étudiants par exemple opèrent une réorganisation systématique du cours à leur usage personnel en établissant des "fiches" tout au long de l'année scolaire. Tel étudiant rapproche la résolution des équations du second ordre linéaires à coefficients constants de la recherche des suites récurrentes du type $u_{n+1} = a u_n + b u_{n-1}$, tel autre note à chaque exercice les méthodes utilisées...

* le méta comme une fin, dans la mesure où on estime qu'un apprentissage scientifique met en jeu (i.e. à la fois exige et développe) un niveau réflexif quant à la constitution et au contrôle des connaissances.

L'enseignant peut par exemple mettre l'accent sur le fait qu'à chaque nouvelle notion se pose le même arsenal de questions, concernant les cadres mis en jeu, les invariants, les méthodes... En particulier, à chaque fois qu'est abordée une nouvelle structure algébrique, il va falloir définir les sous-trucs, les morphismes, se poser les questions de stabilité... Il s'agit du questionnement général de la démarche algébrique moderne.

Dans une certaine mesure les idées développées par M. Legrand à propos de l'explicitation de la démarche scientifique relèvent de cette catégorie.

Cet objectif (méta comme une fin) est sans doute à mettre en rapport avec les représentations des étudiants sur l'apprentissage et la mathématique : il y a une dialectique entre les représentations qu'un étudiant a des mathématiques, la manière dont il les apprend et les fait fonctionner et ... à nouveau les représentations qu'il a des mathématiques.

Mais les deux aspects ne sont pas si disjoints que cela : dans le premier aspect, est défendue l'idée que des informations "méta", sur les mathématiques, contribuent à aider les mises en fonctionnement mathématiques. Mais comme en même temps toute activité mathématique contribue à alimenter la réflexion qu'a celui qui la mène sur les mathématiques, et à renforcer l'image qu'il en a, les deux niveaux ci-dessus sont en interaction étroite.

Nous allons terminer cette série de réflexions en indiquant l'option que nous avons choisie et en tirant des conséquences pour les recherches.

3) Recherches à mener

Nous proposons de travailler en admettant l'hypothèse suivante : pour des connaissances assez

complexes, ou pour des enfants ayant eu peu d'occasions de construire un savoir se rapprochant du savoir mathématique, l'enseignement doit (et peut) proposer des situations propices à une construction efficace de l'accès au savoir, le "méta" intervenant comme un des ingrédients de choix de ces situations... Cela ne veut pas dire qu'il y ait lieu de séparer les situations de construction de savoir des autres : au contraire nous pensons qu'il y a lieu de les imbriquer, tout comme l'accès au savoir est imbriqué chez tout un chacun à son propre savoir...

Mais le problème de la construction effective de ces situations est entier : ce que nous avons exposé ne préjuge que très peu des moyens que l'enseignement doit se donner pour remplir un tel objectif ! Et dans notre conception, c'est précisément à la didactique des mathématiques de concevoir et d'expérimenter des scénarios adéquats...

Nous proposons une hypothèse sur la manière d'intégrer des éléments méta dans l'enseignement : nous pensons en effet que de tels éléments peuvent contribuer à l'apprentissage à condition de les transmettre correctement, au bon moment, et à la condition sine qua non que des activités adéquates soient proposées aux élèves, leur permettant de les utiliser. Ceci suppose que parmi les éléments transmis aux élèves, certains soient susceptibles de réinvestissement dans des activités. Certains travaux mettent déjà en oeuvre cette hypothèse (cf. ci-dessous).

En revanche, la question de l'évaluation des dispositifs correspondants, qui nous semble cruciale, a peu avancé, notamment à cause de la difficulté à distinguer leurs effets de ceux des autres éléments de l'apprentissage. Nous reviendrons sur ce point après l'exposé des premiers travaux.

III Recherches en didactique des mathématiques prenant en compte le "méta"

Les travaux présentés ici ont souvent eu comme origine le fait que des élèves, nouvellement concernés par un enseignement, ont rencontré massivement des échecs (cf. démocratisation des collèges puis des lycées et des universités). Ils constatent que ces élèves se heurtent à des difficultés qui ne tiennent pas seulement aux contenus : ils sont amenés à faire intervenir le niveau "méta", pour comprendre et pour intervenir. Les propositions qui sont alors faites vont dans le même sens : tout se passe comme si, à terme, il s'agissait de rectifier, ou pour le moins d'enrichir les représentations des élèves sur les mathématiques, sur l'activité mathématique, sur l'apprentissage des mathématiques, par des interventions sur les mathématiques, placées au bon moment, et relayées par des activités mathématiques adéquates...

Ainsi, même si l'objectif à court terme est d'augmenter les réussites lors des résolutions de problèmes, il y a, dans tous ces travaux, prise en compte d'une visée plus lointaine.

1) Les élèves en difficulté dans la scolarité obligatoire

Les auteurs s'accordent tous sur l'existence de difficultés importantes en amont du scolaire proprement dit, dans ce à quoi l'élève (ne) se prépare (pas), ce à quoi il s'attend, ou ce qu'il s'autorise..., avec implicitement l'hypothèse qu'on ne peut séparer ce que fait l'élève en classe (au sens large) et ce qu'il est en dehors de la classe...et c'est là justement que le "méta" entre en scène...

A ce diagnostic quels "remèdes" ?

Un certain nombre de chercheurs, dont des didacticiens des mathématiques comme M.J. Perrin, D. Butlen, ou P. Boero en Italie, ont pensé que devant de tels enfants, qu'on récupère en classe avec leur bagage "mental" tout prêt, il était possible d'intervenir précisément sur ce que l'enseignant attend d'eux, de rectifier en quelque sorte l'image qu'ils ont du jeu scolaire, voire mathématique.

L'enseignant explique ce qui est "normal" dans ce jeu, les difficultés prévisibles et classiques, ce qui peut ne pas être immédiat pour l'élève.

Cette rectification se fait avec des mots, dans un discours, évidemment préparé par des activités adéquates, et suivi d'autres activités susceptibles d'en montrer l'efficacité. L'enseignant espère ainsi contribuer à modifier notamment l'effort prévu, donc consenti par les élèves.

Voici un exemple, tiré d'une intervention faite fin novembre dans une classe de sixième en grande difficulté, après des entretiens et des séances de recherches collectives (cf. Butlen et Perrin (89)) :

... 3) Pour réussir en mathématiques, il faut avoir les moyens de vérifier, de savoir si ce qu'on dit est vrai, si c'est juste ou non sans demander au professeur. On peut se dire si c'est juste, il doit se passer telle et telle chose, vérifier quelle conséquence ça peut avoir...

4) Un autre moyen de vérifier c'est de comparer à ce qu'a trouvé son voisin. Evidemment pas pendant les contrôles ! Il y a des moments où vous devez savoir faire tout seuls parce qu'on pense qu'à ce moment là, vous avez appris, que vous pouvez le faire. Mais pendant qu'on est en train de chercher ou d'apprendre, on a intérêt à s'aider les uns les autres. Il y a des problèmes difficiles ou longs que vous aurez du mal à faire seuls, mais en s'y mettant à plusieurs on y arrive.

Même les adultes et les gens qui inventent des mathématiques font comme ça : quand on a des problèmes nouveaux dont personne ne connaît la solution, si quelqu'un croit en avoir une, il faut que les autres la comprennent et la vérifient. Pour ça évidemment, il faut écouter attentivement et regarder soigneusement ce que l'autre a fait pour comprendre et éventuellement critiquer si on n'est pas d'accord. De la discussion peut naître une nouvelle idée.

5) Parce qu'il arrive qu'on se trompe et qu'en se trompant, on apprend quand même des choses. C'est normal de se tromper quand on apprend, on ne peut pas toujours trouver la bonne solution du premier coup. Ce qui est important c'est de comprendre pourquoi ce qu'on a fait ne marche pas et souvent ça donne des idées pour faire autrement.

D'ailleurs dans l'histoire il est arrivé qu'on se trompe. Pendant longtemps on a cru qu'on avait une méthode pour partager n'importe quel angle en 3 parties égales en se servant seulement d'une règle et d'un compas. Maintenant on sait que ce n'est pas possible pour tous les angles.

6) Il faut se dire que quand on fait un problème et qu'on cherche vraiment, on apprend en général toujours quelque chose qui pourra resservir. Pour que ça puisse resservir, il faut se dire ce qu'on a appris en faisant ce problème...

7) Ce n'est pas parce qu'on fait des problèmes de mathématiques qu'on n'a pas le droit de réfléchir. On peut se servir de ses méninges comme dans la vie....

... Vous pouvez aussi faire des dessins, des représentations.

Vous pouvez aussi faire des essais, essayer de résoudre le problème dans des cas plus simples, prendre des exemples.

Il faut essayer de comprendre et non deviner quelle opération il faut faire. D'ailleurs il se peut que la réponse ne puisse être obtenue avec une opération...

8) Faire des problèmes c'est chercher, souvent il faut chercher longtemps... Il faut parfois chercher très longtemps pour trouver la solution de problèmes qui ont l'air simple...

On comprend bien que ce type d'intervention ne peut se répéter, qu'il faut en choisir très soigneusement le moment...

En tout cas, dans l'expérience évoquée ci-dessus, les élèves, d'habitude très agités, ont écouté très attentivement pendant une demi-heure...

Cependant, les évaluations des effets de ce type d'interventions posent de nombreux problèmes et ne font que débiter.

2) L'enseignement des mathématiques dans les filières scientifiques

Là encore la démocratisation de l'enseignement (après la seconde en France) a amené les enseignants à se poser la question d'un accès plus large à des connaissances mathématiques gardant leur sens.

Le manque d'initiative de beaucoup d'élèves devant le moindre problème nouveau, alors même que ces élèves ont "appris" les connaissances nécessaires à la résolution du problème, est à la fois un indice d'échec et un blocage pour un apprentissage authentique.

Cela a amené certains chercheurs, Schoenfeld aux USA (cf. I 4), Legrand, Robert, Tenaud, Dorier, Rogalski... à travailler sur autre chose que sur les seules connaissances mathématiques : ils proposent de rajouter dans l'enseignement des éléments de connaissances ou de réflexion SUR les mathématiques des domaines visés. Cette idée est d'autant plus plausible que les élèves sont âgés (plus de 15 ans) et sont tout à fait capables d'avoir accès à des métaconnaissances, en les distinguant des connaissances elles-mêmes (ce qui est plus problématique pour des élèves du collège, encore "syncrétiques"). Peut-être même certains élèves ressentent-ils le besoin, plus ou moins consciemment, de réflexions sur leurs apprentissages.

Ce peuvent être des méthodes, des moyens systématiques de contrôle ou de choix de stratégies, ou des activités portant sur la nature même des concepts à apprendre : on reconnaît des connaissances métacognitives.

Dans l'enseignement, il s'agit plus précisément d'associer des éléments d'information de ce type et des activités mathématiques où les élèves en ont besoin. Ainsi espère-t-on faciliter, accélérer, peut-être améliorer les apprentissages, ne serait-ce que parce qu'un tel enseignement doit permettre à beaucoup plus d'élèves de résoudre dans des conditions raisonnables beaucoup plus de problèmes...

a) Un enseignement de méthodes en géométrie (Recherche de I. Tenaud)

I. Tenaud (cf. Tenaud 1991) a expérimenté l'association d'un enseignement de méthodes concernant les problèmes de géométrie de terminale C et les recherches (pour les élèves) d'exercices sans indications de méthodes. Les élèves ont souvent besoin de réfléchir à une méthode pour aborder l'exercice proposé, sinon ils n'arrivent pas à démarrer ; de plus ils travaillent en petits groupes, ce qui facilite la discussion sur les méthodes, d'autant plus que l'enseignant est intervenu explicitement sur le sujet (à la fois sur les méthodes elles-mêmes et sur leurs conditions d'utilisation).

Dans ce cas nous appelons métaconnaissance ce qui a été enseigné sous le titre "méthodes".

Pour ces élèves ce sont des connaissances qui portent à la fois sur ce qu'ils connaissent déjà et sur ce qu'ils doivent apprendre de nouveau en géométrie ; la mise en oeuvre de ces méthodes les aide à résoudre les exercices non triviaux que l'enseignant leur propose, elles contribuent aussi à (ré)organiser leurs connaissances. D'où l'hypothèse que l'enseignant a peut-être là un moyen pour faciliter l'apprentissage des notions de géométrie visées.

Explicitons. Les méthodes sont élaborées en partie par les élèves tout au long de l'année ; elles consistent essentiellement en

* des points de repères sur les problèmes proposés à ce niveau, notamment le type des problèmes,

les cadres utilisés, les configurations de base, les outils adaptés.

* des conseils de type stratégique plus généraux, qui permettent de prendre des initiatives, comme changer de cadres, introduire des intermédiaires, ou simplement changer de points de vue...

Ainsi, pour traduire que trois droites du plan sont concourantes, plusieurs points de vue sont a priori possibles : il existe un point commun aux trois droites (on peut alors penser à l'outil barycentre par exemple), deux droites se coupent en un point qui appartient à la troisième (on peut penser à l'analytique), les droites sont les images de trois autres droites concourantes par une transformation...

Donnons un exemple d'exercice où la succession de changements de points de vue peut aider à la résolution. *Il s'agit de l'exercice suivant "trouver le lieu des foyers des paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle". Si une parabole est tangente aux trois côtés du triangle, ceux-ci sont des tangentes à la parabole... (premier changement de point de vue). Alors, si une telle parabole existe, le foyer se projette sur les tangentes (côtés du triangle) en des points appartenant à la tangente au sommet. Donc les projetés de ce foyer sont alignés (deuxième changement de point de vue). Donc le foyer appartient au cercle circonscrit au triangle.*

Réciproquement prenons un point sur le cercle circonscrit et sa droite de Simson : la parabole ainsi définie (par son foyer et sa tangente au sommet) convient (mêmes changements de points de vue). Le lieu cherché est donc le cercle circonscrit au triangle.

Cependant remarquons que pour des mathématiciens plus avertis, ces méthodes n'apparaîtraient peut-être pas comme telles, soit parce qu'ils n'éprouvent pas le besoin de distinguer dans leur démarche de résolution ce qui correspond à la mise en oeuvre de méthodes, soit parce que leurs méthodes sont plus sophistiquées (le recours systématique aux invariants est exclu en terminale par exemple).

Pour des élèves de première en revanche, il s'agit de connaissances hors de portée de ce qu'ils savent déjà, et sans doute en partie inefficaces.

Les recherches effectives ont consisté à expérimenter plusieurs années de suite le scénario mis au point la première année et à analyser les comportements des élèves, notamment pendant les recherches en petits groupes sur des exercices proposés sans indication de méthode. Les résultats vont dans le sens d'une confirmation des hypothèses, mais nécessitent d'être encore affinés.

b) Eléments d'enseignement d'algèbre linéaire incluant des activités "méta" (Recherche de J. L. Dorier)

A la suite de travaux de A. Robert et J. Robinet sur la convergence, J.L. Dorier s'attache à analyser l'enseignement en algèbre des concepts particuliers que nous avons appelé "unificateurs, formalisateurs et généralisateurs" : ce sont ces concepts, comme celui de limite ou d'espace vectoriel, qui ont été formalisés après que de nombreux mathématiciens aient su résoudre un certain nombre des problèmes où les dits concepts peuvent servir comme outil. Mais chaque résolution en était alors particulière, tandis que le recours aux concepts permet d'unifier (et souvent de simplifier) les solutions, sans parler des nouveaux problèmes qu'il permet d'aborder, mais qui sont beaucoup

plus difficiles.

Dans ces conditions, il est clairement problématique d'aborder ce type de concepts avec les étudiants : il n'est pas facile (voire impossible) de trouver de "bons" problèmes pour motiver leur introduction, puisque les problèmes du niveau des étudiants qui relèvent du champ peuvent être résolus "autrement" ; et les étudiants sont déroutés par un formalisme qui ne leur apparaît pas toujours nécessaire, même si les solutions plus familières sont plus longues, ce qui ne les rebute pas !

J.L. Dorier fait le raisonnement suivant : les mathématiciens eux-mêmes ont recours à une analyse réflexive pour construire les concepts du type qui nous intéresse (cf. Piaget Garcia), il n'y a pas de genèse artificielle évidente à mettre en oeuvre pour faciliter l'apprentissage des étudiants, donc il reste à l'enseignant à provoquer chez les étudiants une forme condensée de cette analyse réflexive sur les objets et les méthodes du champ considéré avant d'introduire les nouveaux concepts.

Cette analyse réflexive relève évidemment de notre "méta", en tant qu'élément de réflexion sur un domaine particulier des mathématiques, qui doit être ensuite reconsidéré autrement par l'étudiant.

L'auteur donne deux types d'exemples.

D'une part il organise pour les étudiants des activités qui les amènent à s'interroger sur la structure d'opération interne et de groupe, d'un point de vue axiomatique. Quelles sont les propriétés minimales à introduire pour garantir la résolution habituelle et automatique des équations linéaires ? Le problème est donc de nature inhabituelle, c'est un problème de réflexion sur des objets familiers... Chercher ce problème, de niveau "méta", permet de changer de point de vue et de mieux aborder la suite du cours : l'enseignant va ensuite faire jouer une certaine analogie pour introduire d'autres axiomes algébriques, espérant que cette première activité aura un effet sur leur appréhension de ce chapitre assez abstrait.

Dans une autre expérience, J.L. Dorier propose aux étudiants de résoudre un problème (d'interpolation, dit de Gregory) en leur faisant découvrir l'économie qu'ils font s'ils utilisent le formalisme algébrique au lieu d'un calcul direct.

Ici encore il s'agit à travers des activités non classiques, et en particulier des questions de réflexion adéquates, d'amener les étudiants à mener une analyse SUR ce qu'ils manipulent, sur la nature des êtres mathématiques rencontrés, leur raison d'être...

Les résultats des expériences, qui sont en cours, sont tout à fait encourageants mais encore insuffisants.

c) Un certificat de licence en algèbre et géométrie en formation continuée (A. Robert).

Dans ce travail, on note un premier type d'emprunt à des connaissances de niveau méta : l'enseignant transmet directement des éléments de réflexion épistémologique sur la nature des concepts visés, mais en intervenant au moment où les étudiants sont confrontés à une difficulté.

En effet, à nouveau, le statut unificateur, formalisateur, généralisateur d'un bon nombre des concepts visés dans ce certificat leur confère des particularités quant à leur enseignement, comme nous venons de l'expliquer. Et notamment les problèmes où l'utilisation de ces concepts serait

indispensable, incontournable, ne sont pas accessibles par ces étudiants débutants : dans les problèmes qu'on leur propose, qui mettent en jeu des espaces de dimension finie, d'autres outils, moins généraux que ceux que les étudiants étudient et sont sensés mettre en oeuvre, seraient utilisables, adaptés à chaque fois au contexte particulier du problème (recours aux coordonnées en particulier).

Cela donne naissance à deux difficultés importantes :

- * le fait de forcer les étudiants à utiliser le cadre algébrique plutôt qu'un autre, jugé pourtant plus facile, va relever du contrat et non de la compréhension

- * l'enseignant ne va pas pouvoir introduire les concepts comme outils

D'où les interventions sur ces questions, au fur et à mesure des besoins : l'enseignant prévient les étudiants de ces deux difficultés et les souligne à chaque occurrence favorable.

Le deuxième emprunt va être plus partagé avec les étudiants, puisqu'il s'agit de renseignements sur l'organisation et la mise en fonctionnement de connaissances (méthodes notamment). Les premiers sont donnés aux étudiants, qui ont la charge d'élaborer les suivants.

Pour prendre un exemple, l'enseignant distribue ainsi aux étudiants un organigramme de l'enseignement où sont distingués les concepts, les exemples, les types de problèmes, les méthodes et les questions pertinentes à se poser.

Ces éléments ne suffisent sans doute pas à eux tout seuls à initialiser l'apprentissage, pour suffisamment d'étudiants en tout cas. Ils servent indirectement, ils contribuent à permettre à plus d'étudiants de résoudre plus de problèmes par exemple, et ce sont ces résolutions qui sont constitutives de l'apprentissage. Mais moyennant un détour inévitable : il faut associer les renseignements sur les mathématiques qui sont indiqués à des situations de recherche de problèmes où ils servent...

L'enseignant va plus loin, et c'est constitutif du scénario : ces éléments interviennent quelquefois dans l'évaluation, pour encourager les étudiants à les apprendre, sous forme de questions de cours (comment démontrer que... ?).

On pourrait évoquer une sorte de dialectique : les étudiants sont amenés à mettre en oeuvre des méthodes pour résoudre les problèmes choisis par l'enseignant, c'est notamment quelque chose qui les aide à "démarrer" s'ils n'y arrivent pas ; résolvant ces problèmes, ils augmentent leurs connaissances (pour parler schématiquement), ils peuvent donc adapter leurs méthodes à un plus grand champ, et mettre au point (ou bénéficier) de nouvelles méthodes...

De plus, ils s'habituent à travailler d'une certaine manière, plus réflexive, à se poser des questions, à faire rentrer la réflexion dans la résolution, avant le problème, pendant et après (contrôle) : l'objectif est pour l'enseignant que cette réflexion ne soit plus une pièce rapportée, mise en oeuvre pour faire plaisir au professeur par exemple, mais soit constitutive de la démarche, vu son utilité maintes fois vécue...

Une évaluation, trop partielle pour être significative, de cette expérimentation a été menée (A. Benezra).

d) Le circuit logique de M. Legrand

Il s'agit là de transmettre explicitement aux étudiants les règles du jeu du fonctionnement logique élémentaire des mathématiques (règle du tiers exclu, implication), notamment lorsque les mots utilisés "vrai", "faux", "implique", n'ont pas le sens courant de l'usage en français. L'auteur utilise une séquence qui force les étudiants à répondre à des questions de ce type et à réfléchir par là même explicitement, compte tenu des différences qui apparaissent dans la classe, à leur validation.

M. Legrand donne d'autres exemples d'intervention sur le plan "méta", notamment le discours tenu aux étudiants de première année de premier cycle le jour de la rentrée (cf. Legrand (1990)).

Voilà des citations à propos du "méta" dans un texte récent (M. Legrand "A la recherche d'une situation ou métaphore fondamentale au sujet du concept de limite, (1993)) : *"L'expérience montre que ce n'est que très exceptionnellement qu'un élève arrive à pousser seul ses réflexions méta-scientifiques ; inversement les réflexions méta-mathématiques du professeur ne sont pratiquement pas entendues par les élèves si elles ne s'appuient pas sur des situations fortement significatives qu'ils ont manipulées eux-mêmes, si elles ne sont pas des formes de réponses à un questionnement déjà là "dans la classe"... "Nous faisons l'hypothèse que le méta-mathématique explicite peut jouer un rôle très important dans la réalisation en classe d'une situation fondamentale " ... "Les réflexions "méta" permettent donc à l'élève de jouer en adulte avec le savoir"...*

e) Un enseignement d'algèbre linéaire (M. Rogalski et al.)

Cette fois-ci, il s'agit de l'expérimentation répétée d'une expérience d'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année (évaluation en cours). Les hypothèses qui sont testées sont les suivantes : il y a lieu de mettre en oeuvre plusieurs stratégies longues, imbriquées, jouant sur le levier méta et les changements de cadres, pour obtenir de suffisamment d'étudiants un apprentissage satisfaisant. Nous joignons en annexe 2 le projet pour l'évaluation (en cours) de cette recherche.

3) Les analyses des discours des enseignants en classe

Enfin, quelques travaux didactiques, tout à fait différents des précédents, ont abordé cette dimension "méta" par l'intermédiaire de l'analyse des discours tenus en classe par les enseignants, pour voir notamment quelles traces de métaconnaissances on y trouve, s'il y a des variations, lesquelles... (cf. annexe 3).

Ces chercheurs (C. M. Chiocca, E. Josse, M.J. Perrin, A. Robert, J. Robinet) se sont attachés à l'analyse des discours non strictement mathématiques, accompagnant l'exposition stricte des connaissances. Ils se sont donc restreints à des phases proches de l'institutionnalisation (juste avant ou pendant) et à des classes après la seconde, où l'a-didactique est moins développé et où le maintien de la discipline prend moins d'importance...

Les premiers résultats indiquent des variations importantes dans le recours à un registre qu'on pourrait appeler "méta", qui se traduit par des phrases incitant les élèves à la réflexion, leur donnant notamment des justifications, ou des commentaires, souvent qualitatifs. La quantité relative de discours de ce type varie d'une part entre les enseignants, même pour un contenu tout à fait

analogue (si ce n'est identique), d'autre part pour un même enseignant selon les classes (et notamment la représentation que l'enseignant s'en fait) et même les moments de l'apprentissage.

Cependant les variations entre enseignants semblent plus importantes que les variations pour un même enseignant : il apparaîtrait une certaine marge de manoeuvre, tout se passe comme si les enseignants avaient un certain choix dans leur discours d'accompagnement, et que des régularités s'établissaient.

Ainsi certains peuvent préférer privilégier le recours à une simple communication, très liée au déroulement actuel de la classe, destinée à (re)centrer l'attention des élèves. D'autres peuvent utiliser (prioritairement ou non) des marques pour étiqueter ce qu'ils sont en train de dire, ou de faire faire, ou bien aussi pour en indiquer la structure dans le temps (étapes des démonstrations par exemple) : il s'agit alors de donner des indices liés de manière externe aux contenus, très contextualisés par rapport au déroulement de la classe, qui peuvent aider les élèves à retenir, mais qui ne sont pas décontextualisables (ni a fortiori transférables)...

4) Points communs aux travaux précédents

a) Un statut imprécis, variable, un enseignement indirect, surtout oral

Dans tous les exemples précédents, on reconnaît bien l'utilisation explicite par l'enseignant d'éléments "méta", généraux ou particuliers, à différents niveaux. Cependant selon les cas, l'enseignant fait une simple information, ou bien il donne un statut plus codifié, structurant ce qu'il dit presque comme un cours, ou encore il y revient à diverses occasions, dans certains cas (élèves plus âgés) il peut confier aux élèves des tâches d'ordre méta (activités de réflexion sur la nature des concepts), enfin quelquefois il évalue comme des connaissances ce qu'il a transmis : de l'information vague à l'activité spécifique des élèves et même à l'évaluation, ce type d'enseignement est toujours indirect dans la mesure où il vise, en dernière analyse, plus que ce qu'il dit, c'est à dire qu'il vise l'apprentissage des connaissances mathématiques SUR lesquelles il ne fait que parler...

Dans tous les cas, les interventions sont surtout orales, très souples, elles dépendent de manière essentielle de ce que les élèves ont fait ou ont à faire.

b) un paradoxe : faire apparemment plus difficile, viser plus loin, pour faire réussir plus d'élèves (en difficulté)

Remarquons d'abord que les scénarios proposés dans tous les travaux cités ne correspondent pas à des pratiques tout à fait habituelles : il existe en effet d'autres exemples où l'enseignement de ce type de choses est complètement implicite, en particulier souvent l'enseignant montre en faisant lui-même devant les élèves et c'est tout. Ou bien les enseignants ne font pas eux-mêmes les distinctions de niveaux, ou plus souvent peut-être, ils estiment que ces considérations de méthodes par exemple vont de soi, doivent venir toutes seules. Peut-on y lire un sous-entendu sélectif, ceux qui ne s'y retrouvent pas seront éliminés ?

Ou bien doit-on y lire le mythe du matheux "doué" qui n'utilise aucune méthode, grâce à sa divine intuition ? Peut-on penser que certains enseignants pensent ne pas devoir aborder des éléments qui n'apparaissent pas dans le vocabulaire officiel, autorisé (cf. Julien cité ci-dessus)?

Il faut reconnaître qu'il y a un apparent paradoxe commun à tous les travaux précédents : les auteurs proposent des choses qui peuvent apparaître plus difficiles, une réflexion inhabituelle, ne consentent à aucun compromis sur le niveau, pour permettre à plus d'élèves de réussir... L'origine de ce paradoxe est à chercher dans l'hypothèse suivante sur la construction des connaissances : les représentations des élèves sur la manière d'apprendre des mathématiques peuvent peser négativement sur cet apprentissage, et il peut être nécessaire de faire faire aux élèves un détour qui contribue à enrichir ces représentations, rendant leurs pratiques plus compatibles avec l'apprentissage cherché. Les chercheurs font aussi l'hypothèse que ce détour doit se faire au sein d'activités mathématiques, qu'il n'est donc pas question de simplifier, mais ils supposent que le recours au niveau "méta" peut favoriser la transmission. Il n'y a plus de paradoxe, mais il y a un problème de temps !

c) Une expérimentation conçue sur un temps long

Dans tous les cas envisagés, la perspective est celle du temps long : les interventions ne se conçoivent que sur une certaine durée, ne serait-ce que pour établir les changements d'habitudes qu'elles impliquent pour les élèves. De plus elles comportent des allers-retours entre les interventions du professeur et les actions des élèves (résolutions de problèmes notamment), et ne peuvent ni se mener rapidement, ni avoir des effets immédiats...

d) Des expérimentations difficiles et encore insuffisantes, notamment en ce qui concerne l'évaluation

Dans tous les cas que nous avons passés en revue, des expérimentations partielles ont été menées, mais il est encore difficile de conclure.

D'abord, comme nous venons de le souligner, les expériences sont souvent longues, et le problème de l'évaluation d'un projet long se pose dans toute son acuité (cf. A. Robert (1992)).

Ensuite, il est très délicat de départager dans les constats qu'on peut faire sur les productions des élèves ou à partir de leurs comportements ce qui est dû aux efforts pour intégrer des éléments de métaconnaissances du reste du scénario, et il est très ambigu aussi d'être sûr que le "message" méta est passé comme prévu.

Cela amène à rechercher des méthodologies originales, comme par exemple la recherche des traces indirectes du "méta" ; ainsi I. Tenaud (1989) a-t-elle demandé aux élèves impliqués dans l'enseignement précédemment décrit de rédiger un exercice en indiquant la démarche méthodologique suivie ; elle a aussi utilisé des questionnaires, en analysant le degré de transformation de ses propres expressions dans les phrases des élèves.

A. Benezra (1991) a analysé l'organisation des démarches adoptées et la teneur des justifications données dans des copies d'étudiants (comparaison aux discours et aux corrigés écrits des enseignants). Elle a aussi comparé les productions selon l'enseignement reçu (notamment en essayant de tenir compte de la part de "méta" explicite dans celui-ci). Autrement dit, il s'agit d'exploiter les perturbations introduites par la diversité des enseignants, en repérant ce qui est stable par exemple...

Dans le même ordre d'idées, M. Rogalski a demandé à ses étudiants de produire un texte d'exercice sur un sujet donné, en en justifiant les choix (cf. Dorier, Robert, Robinet, Rogalski, colloque ARDM (1993), annexe 2).

5) En guise de conclusion : comment choisir les métaconnaissances transmises aux élèves ?

Précisons d'abord que les métaconnaissances enseignées aux élèves ne visent pas, on l'a bien vu, à restituer un comportement expert : elles visent à faire apprendre à un plus grand nombre d'élèves des mathématiques, à rendre opérationnelles les connaissances enseignées, mais cette fonctionnalité n'est que celle de l'élève en situation scolaire... La comparaison des conceptions et des pratiques des experts et des élèves n'a même pas de sens dans ces conditions !

C'est pour cela que le modèle de l'expert, qu'il soit conçu comme utilisant des méthodes ou comme tout à fait étranger à ce mode de travail ne nous convient pas en tant que tel : nous ne cherchons pas à ce que les élèves imitent les experts, les élèves ne sont pas vraiment des "experts en herbe", même si certains d'entre eux peuvent le devenir.

En revanche, et malgré une certaine diversité sans doute, nous pensons qu'on peut s'inspirer de certains éléments des comportements des experts, tout le problème étant de faire le tri et d'adapter...

Ainsi lorsque l'expert cherche un nouveau problème, qu'il sèche, nous avons analysé son comportement pour voir s'il n'y avait pas d'éléments exportables ; son activité est alors en effet de la même nature que celle de l'élève, c'est pendant ce temps là que se construit une partie du sens des connaissances... A cela près que l'expert a beaucoup plus de connaissances, de références, d'expériences que l'élève, et qu'il a confiance en lui... Ceci fait qu'il va vite, avec des raccourcis, des contrôles, des prises de décision "stratégiques" presque automatiques, même si cela cache par exemple la mise en oeuvre de méthodes bien réelles, du niveau des connaissances correspondantes bien sûr.

Nous en avons déduit qu'il était intéressant de remplacer pour les élèves, de manière artificielle et partielle, ce bagage quelquefois complètement intériorisé qu'a l'expert et qu'il utilise devant un problème. Nous voulons garder la richesse de la situation de résolution de problèmes, mais la rendre effectivement accessible à plus d'élèves. D'où ce choix, d'indiquer aux élèves, pour les leur faire mettre en pratique, des mécanismes de recherche en mathématiques, de plus en plus précis et diversifiés au fur et à mesure que les élèves sont âgés et ont affaire à des connaissances complexes. Ces mécanismes sont inspirés de ceux des experts, mais sont plus lourds, plus systématiques, ils doivent correspondre aux ressources des élèves, donc être adaptés à leurs connaissances du moment et être explicités complètement.. .

Dans cette perspective, une partie du travail du chercheur en didactique est de trouver, pour des élèves précis, les méthodes à transmettre, les contrôles à encourager, les automatismes à mettre en place rapidement.

Un autre aspect a été rencontré : c'est celui de l'expert en train de réorganiser ses connaissances,

notamment pour élaborer certains concepts. Là encore, sans "copier" l'expert, les chercheurs s'inspirent de l'existence d'une réflexion sur les mathématiques, qui est à l'origine du travail du mathématicien. L'hypothèse que des analyses distanciées de ce type peuvent dans certains cas produire des effets facilitateurs, notamment pour produire du sens pour les concepts correspondants, est exportée du domaine du savoir savant à celui du savoir enseigné.

Le travail du didacticien consiste à concevoir une activité mathématique bien choisie et un contrat approprié qui provoque une réflexion adéquate sur la nature de certains concepts.

On peut dire presque les mêmes choses un peu autrement : dans la première partie, il est apparu que ce que nous regroupions sous le préfixe méta pouvait effectivement relever de deux types de savoir : le savoir privé, surtout côté métacognition au sens classique, lorsque ce qui est en jeu concerne les connaissances d'un individu, d'un sujet, sur ses propres connaissances mathématiques, ses stratégies..., et le savoir public, prêt à être transmis, externe avons-nous dit, qui concerne par exemple ce que l'enseignant veut transmettre à sa classe comme éléments de méthodes, ou comme références épistémologiques.

On peut alors interpréter une partie des travaux précédents de la façon suivante : le scientifique construit un savoir privé qui comprend des éléments d'ordre "méta" qui l'aident notamment en situation de recherche ; l'enseignement tente d'offrir aux élèves des occasions de construire et de faire fonctionner une partie de ce savoir, rendu donc public en l'occurrence...

Un autre travail pour le didacticien est de mettre en place les scénarios correspondants, qui jouent sur un temps long, et de les évaluer...

Conclusion

1) prise en compte du "méta" en didactique des mathématiques

Après cet exposé assez large, qu'avons nous apporté au dossier pour la prise en compte du "méta" en didactique des mathématiques ?

Après avoir précisé ce que nous entendons par éléments "méta", nous avons dégagé diverses pistes pour montrer que ce niveau pouvait être intéressant pour l'élève et par suite pour le didacticien, non seulement comme moyen d'analyse, mais aussi comme ingrédient de l'enseignement. Nous avons avancé des raisons d'ordre cognitif, profondément liées à l'épistémologie des connaissances et des sujets apprenants... Nous avons ensuite décrit quelques recherches prenant explicitement en compte le niveau "méta", à divers titres.

Cependant ces premiers travaux sont bien insuffisants pour permettre d'apporter des conclusions définitives. Ils indiquent en tout cas qu'il est possible d'imaginer des scénarios tout à fait réalisables en classe mettant en scène des éléments "méta" et constitue donc un "théorème d'existence" ...

Dans ces conditions, le travail reste à faire pour le didacticien d'expérimentation et d'évaluation, et de retour sur les mises en scène. Comme c'est souvent le cas, il y a là un détour incontournable pour nous permettre de valider nos hypothèses, en les affinant d'ailleurs...

Nous pensons avoir montré que le détour valait d'être tenté, malgré des difficultés certaines, notamment de définitions (notion multiforme, relative...), et d'évaluation.

2) Beaucoup de questions restent en suspens.

a) Des questions de définition : les métaconnaissances en mathématiques sont-elles des connaissances ?

Si nous avons donné des exemples de divers types de métaconnaissances et de leur introduction dans l'enseignement, nous n'avons pas donné de critères précis permettant de repérer systématiquement ces dernières, notamment par rapport aux connaissances. Par delà leur relativité, que nous avons déjà soulignée, faut-il distinguer rigoureusement métaconnaissances et connaissances à chaque étape de l'enseignement ? Est-ce possible ?

Si ces éléments ne sont utilisés que pour analyser les fonctionnements des élèves, pour expliquer des blocages ou pour constater des ressources méta chez certains (diagnostic donc), il n'est peut-être pas besoin d'en préciser plus la nature. A charge pour l'enseignant de s'adapter à chaque classe, à chaque niveau, presque à chaque moment, pour traiter telle ou telle information comme une (méta)connaissance.

Le problème se complique si on a des visées institutionnelles pour l'enseignement. Peut-on imaginer que, dans des commentaires sur les programmes on trouve par exemple : les enseignants enseigneront explicitement des méthodes de résolution de problèmes, apprendront aux élèves à distinguer différents cadres de fonctionnement des connaissances mathématiques...

Parlera-t-on de connaissances à transmettre aux élèves (voire de savoir), cherchera-t-on à les évaluer ?

b) Rapport aux cadres théoriques classiques en didactique

Reprenons rapidement certains travaux déjà évoqués.

i) l'exemple de l'enseignement de la géométrie en terminale C ou celui du certificat de licence

Les élèves utilisent leurs méthodes dans une phase de formulation, avant l'action : les éléments de type méta qui doivent être évoqués par les élèves pour enclencher l'action, participent aussi de l'institutionnalisation à deux titres, en étant eux-mêmes plus ou moins institutionnalisés et en participant comme outil à la décontextualisation des connaissances mathématiques proprement dites...

Toutefois, leur exposition par l'enseignant n'est pas du même ordre que celle des connaissances proprement dites : elle est plus qualitative, moins précise, peut-être à rapprocher d'éléments sur les raisonnements ?

De plus ces éléments ne vont pas être évalués directement, dans des contrôles spécifiques, sauf volonté explicite de l'enseignant d'y mettre un enjeu pour les élèves en les soumettant à évaluation (il y a alors essentiellement un effet de contrat). En revanche, leur évaluation est indirecte, leur assimilation est révélée par la mise en fonctionnement des connaissances mathématiques (résolution de problèmes notamment).

On aurait presque envie d'évoquer des connaissances "invisibles", que les élèves ont intérêt à savoir utiliser et même à savoir recycler, mais sans que cette utilisation apparaisse nécessairement dans le produit final... Le travail de l'enseignant est de les rendre, pour un temps au moins, visibles...

Une question se pose alors, dans le droit fil de la vision anthropologique : y aurait-il besoin pour le fonctionnement du système d'une part d'invisible ? Si on en supprime certaines opacités, y aurait-il besoin que s'en créent d'autres ?

D'autre part, on peut aussi dire que ce type de connaissances contribue au fonctionnement de situations a-didactiques, elles remplacent le professeur quelque part (d'où leur caractère "facultatif"), elles font accéder les élèves à un certain niveau anticipé d'expertise, surtout en ce qui concerne les procédures à mettre en jeu pour résoudre des problèmes.

ii) l'exemple d'enseignement d'algèbre linéaire de J.L. Dorier

L'auteur précise plusieurs aspects : il apparaît que les caractéristiques des situations qu'il met en place sont particulières, même si elles sont d'une certaine manière des situations d'action.

Leur caractère inhabituel tient d'abord à ce que les questions posées ne sont pas des questions de mathématiques mais sur les mathématiques. Ce qui change alors, ce sont les conditions d'une "bonne" dévolution : comment vraiment amener les étudiants à se placer au niveau attendu (puis à se l'approprier...) ?

Cela amène à proposer des questions qui peuvent être "mal formulées", ou paraître particulières, cela oblige à changer le contrat en le précisant, à laisser du temps aux étudiants, à forcer la discussion entre eux, enfin cela amène à des institutionnalisations au niveau méta...

A notre avis, il y a derrière tout ce que nous avons développé un type de dialectique particulier, du type réflexion/action, qui pourrait nous tenter pour introduire un nouveau type de situation didactique.

Cependant la durée de ce type de dialectique, le moment où elle peut avoir lieu ne sont pas

comparables aux dialectiques courantes déjà introduites en didactique des mathématiques.

Nous préférons lire les choses en termes de variables didactiques : là encore nous mettons l'enseignant en point de mire, à lui de choisir ses interventions de type méta et de peaufiner la dialectique entre l'introduction des connaissances et des métaconnaissances, entre les activités et les informations...

Cependant, une question reste posée en ce qui concerne l'institutionnalisation par exemple : est-ce que toute institutionnalisation n'intègre pas une forme d'intervention de type méta (notamment la décontextualisation qui comporte une certaine prise de distance)? N'est-ce pas la même chose pour toute conceptualisation (même si le concept n'est pas du type unificateur et généralisateur) ?

Mais faut-il faire faire aux élèves cette réflexion ? Est-ce qu'il faut "laisser parler" le cours (implicitement), ou expliciter la démarche ?

c) Des questions de différences individuelles, et d'effets différentiels des scénarios envisagés

Là dessus nous n'avons aucun élément de réponse !

Toutefois, nous nous permettrons de lancer une piste à ce sujet : les différents environnements qu'on peut proposer aux élèves (méta, informatique...) présentent des spécificités en matière d'acquisition de nouvelles connaissances. Le didacticien doit résoudre des problèmes de conceptions et de choix de scénarios compte tenu des caractéristiques de l'environnement, il doit savoir sur quelles variables didactiques il peut jouer, qu'est ce qu'il peut espérer accélérer...

Dans ces conditions, nous pensons qu'il serait intéressant de poser les problèmes différentiels en mettant en rapport ces caractéristiques des environnements et les représentations des élèves et de leurs enseignants. Y a-t-il des différences individuelles de sensibilité à tel ou tel environnement, peut-il y avoir des conflits entre professeurs et élèves, faut-il respecter ou au contraire compenser les "environnements préférentiels" de chacun (pour reprendre une expression utilisée pour les cadres préférentiels des étudiants de DEUG, mis en évidence chez les étudiants "moyens") ?

3) Recherches à mener

a) Un préliminaire : "morale" et méta

Beaucoup de travaux sur la métacognition ont une petite connotation "volontariste", voire humaniste. Tout se passe comme si les auteurs "avaient envie" que cette composante méta joue un rôle positif dans les apprentissages, soit parce qu'ils constatent sa présence dès qu'il y a apprentissage, et son absence (partielle) en cas d'échec ou d'apprentissage plus limité, soit parce qu'ils ont envie de donner les "clefs" du savoir aux élèves, par principe en quelque sorte, et que la clef "méta" n'est pas la moindre apparemment.

Cependant, aussi tentante que puisse être par exemple l'idée qu'il ne faut pas faire de rétention de connaissances vis à vis des élèves, cela ne suffit pas à garantir l'exactitude des hypothèses qui la traduisent : il est tout à fait indispensable de se donner les moyens et de construire les scénarios qu'on prévoit et de les évaluer avec des critères scientifiques...

Il est important de se garder de tout glissement qui consisterait à enseigner sur les mathématiques au lieu d'enseigner les mathématiques.

b) Perspectives de recherches

Plusieurs directions, déjà esquissées ou nouvelles, se dégagent.

D'une part il est intéressant de préciser, pour des élèves déterminés et des connaissances à enseigner, les éléments métacognitifs qu'on suppose pouvoir aider ces élèves dans leur apprentissage puis il faut les intégrer à un scénario (travail de conception et d'ingénierie).

Ce type de travail a été commencé, mais reste en général très partiel, limité qui plus est aux élèves de collège en difficulté ou aux élèves des filières scientifiques. Y a-t-il lieu de généraliser ces tentatives ? Aux élèves dits "littéraires", ou non scientifiques en tout cas, par exemple ?

D'autre part, et c'est évidemment lié à ce qui précède, ces ingénieries, existantes ou à concevoir, doivent être expérimentées et évaluées, ce qui suppose la mise en place de dispositifs expérimentaux lourds, spécifiques, d'autant plus qu'il ne s'agit pas d'intervenir une fois sur un sujet précis, mais au contraire que le long terme (année scolaire) intervient nécessairement et qu'il est difficile d'isoler ce qu'on cherche à évaluer du reste...

c) Enfin, un nouveau chapitre est sans doute à ajouter à ce que nous avons déjà évoqué, encore plus complexe vraisemblablement : "méta" et formation des enseignants de mathématiques.

Mais comme dit la chanson, ceci est une autre histoire !

Indications bibliographiques sur le "méta"...

Livres généraux (ou chapitres ou articles) - psychologie, psychologie développementale

- Britt-Mari Barth (1987) L'apprentissage de l'abstraction, méthodes pour une meilleure réussite à l'école, Retz (chapitre 7 : métacognition)
- Brown, Bransford, Ferrara, Campione (1983) Learning, Remembering, Understanding, in Flavell and Markman (Eds) *Handbook of child psychology*, Vol III, pp77-166, Wiley, New-York.
- Bruner (1983) *Savoir dire, savoir faire*, PUF
- Chartier et Lautrey (1992) L'apprentissage de stratégies métacognitives, *L'Orientation scolaire et professionnelle*, Vol 21 n°1
- Ehrlich M.F. et Cahour B. (1991) Contrôle métacognitif de la compréhension, *Bulletin de psychologie* n°399, T. XLIV, 147-177
- Flavell (1985) Développement métacognitif in J. Bideault, M. Richelle (Eds) *Psychologie développementale, problèmes et réalités*, Mardaga, Bruxelles.
- Forrest-Pressley D.L., Mac Kinnon G.E., Gary Waller T. Ed. (1985) *Metacognition, cognition and human performance* Academic Press (deux tomes)
- Garner R. Ed. (1987) *Metacognition and reading comprehension*, Ablex publishing corporation
- Melot A.M., (1991) Contrôle des conduites de mémorisation et métacognition, *Bulletin de psychologie* n°399, T. XLIV
- Melot A.M. et Corroyer D. (1992), Organization of metacognitive Knowledge : a condition for strategy use in memorization, *European Journal of Psychology of Education*, Vol VII n°1
- B. Noel (1991) *La métacognition*, De Boeck
- Piaget (1974) *Réussir et comprendre*, PUF
- Piaget (1974) *La prise de conscience*, PUF
- Piaget et Beth (1961) *Epistémologie mathématique et psychologie*, n°XIV, PUF
- Piaget et Garcia (1983) *Psychogénèse et histoire des sciences*, Flammarion, Paris.
- Pinard A., Bibeau M. Lefebvre-Pinard M. (1985) Le savoir métacognitif portant sur la compréhension : comparaison entre adultes analphabètes et adultes alphabétisés, in J. Bideault, M. Richelle (Eds) *Psychologie développementale, problèmes et réalités*, Mardaga, Bruxelles.
- F. E. Weinert et R. H. Kluwe Ed., (1987) *Metacognition, motivation and understanding*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates
- Sternberg (1982) A componential approach to intellectual development, in *Advances in the psychology of human intelligence*, Hillsdale, NJ : Erlbaum
- Vygotski (1985) *Pensée et langage*, Editions sociales, Messidor
- J. von Wright, (1992) Reflections on reflection, *Learning and instruction*, vol 2 59-68

En mathématiques, en intelligence artificielle et EIAO, et en physique

- Artigue M. (1993) Connaissances et métaconnaissances pour l'élève en didactique des mathématiques, in *Cahier math et méta*
- ASTER 12, (1991) l'élève épistémologue, *Revue de didactique des sciences expérimentales*, INRP

- Bachelard (1967) Formation de l'esprit scientifique, Librairie Vrin
- Balibar E. et Macheray P. Formalisme et formalisation, Encyclopédie universalis
- Baron M. (1993) Présentation des métaconnaissances en EIAO, Cahier math et méta
- Bazin J.M. (1993) Présentation des métaconnaissances en IA , Cahier math et méta
- Benezra A. (1991) Une évaluation d'un enseignement à distance, DEA de didactique des mathématiques, Université Paris 7, non publié
- Boero P. (1989) Mathematical literacy for all experiences and problems, Proceedings of PME XIII, Butlen D., Lagrange M. et Perrin M.J. (1989) Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficulté, Cahier de Didirem n°5, IREM PVII, Paris.
- Butlen D. et Pezard M. (1992) Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté, Cahier de Didirem n°13, IREM PVII, Paris.
- Butlen D. et Pezard M. (1992) Calcul mental et résolution de problèmes, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 13.1, Grenoble.
- E. Cauzinille-Marmèche et A.M. Melot (1992), Etude expérimentale de la réorganisation des connaissances par la résolution de problèmes, Ecco's 1992, Colloque du programme Cogniscience du CNRS
- Colloque IA sur la métaconnaissance, Lyon, 1990, Cahier Laforia n° 81
- Cooney T. (1985) A beginning teacher's view of problem solving, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 16 n°5, 324-336
- Deguire L. (1987) Awareness of metacognitive processes during mathematical problem solving, Proceedings of PME XI, 215-221
- Dorier J.L.(1990) Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, Cahier de Didirem n°7, IREM PVII, Paris.
- Dorier J.L. (1992) Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre linéaire, Cahier de Didirem n°14, IREM PVII, Paris.
- Dorier J.L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (1993) L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année: nouveaux problèmes, nouvelles méthodologies, Colloque ARDM
- Dubinski E. (1991) Reflective Abstraction in Advanced mathematical thinking, in Advanced mathematical thinking, D. Tall (ed.), Kluwer Academic Publishers.
- Garofalo J., Kroll D., Lester F. (1987) Metacognition and mathematicla problem solving : preliminary research findings, Proceedings of PME XI, 222-228
- Garofalo J., Lester F. (1985) Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 16 n°3, 163-176
- Glaeser G. (1971) Mathématiques pour l'élève professeur, Hermann
- Hart L.C. (1987) Interactive domain, metacognition and problem solving, Proceedings of PME XI, 236-241
- Hart L.C. (1992) Monitoring change in metacognition, Proceedings of PME XVI, 141-149
- Hirabayashi I et Shigematsu K. Metacognition : the role of the inner teacher (1), Proceedings of PME X (1986), 165-170, (2), PME XI (1987) 243-249, (3) PME XII (1988) 410-416, (4) PME XVI (1992) 322-327

- Kilpatrick J. (1985) Reflection and recursion, *Educationnal Studies en Mathematics* 16, 1-26
- Larochelle et Desautels (1992), A propos de l'idée de sciences, De Boeck
- Legrand M. (1991) Circuit ou les règles du débat mathématiques, in *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A première année*, Commission interIrem Université, Lyon
- Legrand M. (1990) Un exemple de discours sur les mathématiques et leur apprentissage, in *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A première année*, Commission interIrem Université, Lyon.
- Legrand M. (1993) A la recherche d'une situation ou métaphore fondamentale au sujet du concept de limite, preprint de séminaire
- Lester F. (1987) Why is problem solving such a problem ? *Proceedings of PME XI*, 257-266
- Mason J., Davis J. (1988) Cognitive and metacognitive shifts, *Proceedings of PME XII*, 487-494
- Palier (1988) Métaconnaissances pour la modélisation de l'élève, *Cahier Laforia n° 72*
- Perrin M.J. (1992) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 13.1, Grenoble.
- Pitrat (1990) *Métaconnaissances* Hermès
- Polya G. (1957) *Comment poser et résoudre un problème ?* Dunod, Paris
- Polya G. (1958) *Les mathématiques et le raisonnement plausible*, Gauthier-Villars, Paris
- Resnick (1989) *Knowing learning and instruction*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.
- Robert A. et Josse E. (1992) Introduction de l'homothétie en seconde : analyse de deux discours de professeurs, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 13.1, Grenoble.
- Robert A. et Robinet J. (1992) Représentations des enseignants et des élèves, *Repères Irem N°7*
- Robert A. et I. Tenaud (1988) Une expérience de la géométrie en terminale C, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 9.1, Grenoble.
- Robert A. (1990) Quelques principes directeurs, in *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A première année*, Commission interIrem Université, Lyon.
- Robert A. (1991) Un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie en formation continue), *Cahier de Didirem n°9*, IREM PVII, Paris.
- Robert A. (1991) Travaux d'étudiants en temps non limité (niveau licence), *Brochure n°80 IREM PVII*, Paris
- Robert A. (1992) Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 12.2-3, Grenoble.
- Robert A. (1993) Analyse des discours non strictement mathématiques accompagnant les cours de mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire, A paraître dans *Educationnal Studies in Mathematics*
- Robinet J. (1991) Le pourquoi et le comment d'une ingénierie (la convergence uniforme), *Cahier de Didirem n°12*, IREM PVII, Paris.
- Rogalski M. (1990) Enseigner des méthodes en mathématiques, in *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A première année*, Commission interIrem Université, Lyon.
- Rogalski (1991) Un enseignement d'algèbre linéaire en DEUG A première année, *Cahier de*

Didirem n°11, IREM PVII, Paris.

Shimizu (1992) Metacognition in cooperative mathematical problem : an analysis focusing on problem transformation, Proceedings of PME XVI, 330-337

Schoenfeld A. (1985), Mathematical problem solving, Academic Press,

(1987) (Ed.) Cognitive science and mathematics education, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.

Simon D. (1986) The role of metacognition in children's mathematical problem solving, Proceedings of PME X

Schultz K. (1987) Theoretical perspectives on inquiry into problem solving, knowledge acquisition, metacognition and teaching, Proceedings of PME XI, 250-255

Tenaud I. (1991) Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C : enseignement de méthodes et travail en petits groupes, Thèse de doctorat de l'Université Paris 7

Wolters M. (1988) Metacognition and elementary school mathematics, Proceedings of PME XII, 641-648

Annexes

1. Un extrait du livre de Polya (comment poser et résoudre un problème ? Dunod, 1957)
2. Méta et discours de l'enseignant en classe de mathématiques : quels mots pour quoi dire ? (A. Robert)
3. Un extrait de la communication au colloque ARDM de juin 93 "L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année : nouveaux problèmes, nouvelles méthodologies" (J.L. Dorier, A. Robert, J. Robinet, M. Rogalski)

Pour résoudre un problème vous devez successivement :

I — Comprendre le problème

II — Concevoir un plan

Trouver le rapport entre les données et l'inconnue.

Vous pouvez être obligé de considérer des problèmes auxiliaires si vous ne pouvez trouver un rapport immédiat.

Vous devez obtenir finalement un plan de la solution.

III — Mettre le plan à exécution

IV — Examiner la solution obtenue

COMPRENDRE LE PROBLÈME

- Quelle est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Quelle est la condition ?
- Est-il possible de satisfaire à la condition ? La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue ? Est-elle insuffisante ? Redondante ? Contradictoire ?
- Dessinez une figure. Introduisez la notation appropriée.
- Distinguez les diverses parties de la condition. Pouvez-vous les formuler ?

CONCEVOIR UN PLAN

- L'avez-vous déjà rencontré ? Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?
- Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ? Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?
- Regardez bien l'inconnue et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.
- Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ? Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ? Vous faudrait-il introduire un élément auxiliaire quelconque pour pouvoir vous en servir ?
- Pourriez-vous énoncer le problème différemment ? Pourriez-vous l'énoncer sous une autre forme encore ? Reportez-vous aux définitions.
- Si vous ne pouvez résoudre le problème qui vous est proposé, essayez de résoudre d'abord un problème qui s'y rattache. Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ? Pourriez-vous résoudre une partie du problème ? Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ? Pourriez-vous tirer des données un élément utile ? Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ? Pourriez-vous changer l'inconnue, ou les données, ou toutes deux s'il est nécessaire, de façon que la nouvelle inconnue et les nouvelles données soient plus rapprochées les unes des autres ?
- Vous êtes-vous servi de toutes les données ? Vous êtes-vous servi de la condition tout entière ? Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

METTRE LE PLAN A EXÉCUTION

- En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre. Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ? Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?

REVENIR SUR LA SOLUTION

- Pouvez-vous vérifier le résultat ? Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?
- Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ? Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?
- Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?

Méta et discours de l'enseignant en classe : quels mots pour quoi dire ?

a) Il y a nécessairement discours du maître

Tout enseignement de mathématiques en classe suppose un discours de l'enseignant, qui va plus loin que la simple discipline et l'énoncé des consignes : quelle que soit la gestion adoptée, il y a un moment où l'enseignant décontextualise les connaissances mathématiques visées, fait des démonstrations, contribue à dépersonnaliser les activités antérieures des élèves. Moment où l'élève doit donc écouter un discours du maître, supposé par ce dernier participer à l'apprentissage...

b) Mais les objectifs du discours peuvent être en partie contradictoires

Or lorsqu'il fait ainsi cours (au sens large), l'enseignant poursuit plusieurs objectifs qui peuvent être en partie contradictoires, même s'ils sont complémentaires à certains moments.

L'enseignant doit par exemple *retenir l'attention des élèves* - plusieurs moyens à sa disposition, dont certains langagiers (intonations, répétitions, phrases frappantes...). Mais faire agir les élèves est encore le meilleur moyen, qui prive en même temps l'enseignant de presque tout son discours...

Il doit aussi *indiquer ce qu'il y a à retenir*, "imprimer" des éléments de son discours dans la tête des élèves... Mais cela doit être dosé pour être entendu, et accepté, voire compris. De plus répéter pour faire apprendre (par exemple) peut amener à simplifier, à caricaturer, à dégager les traits importants au détriment d'une certaine finesse, voire d'une certaine compréhension.

Il doit par ailleurs contribuer à *"faire comprendre"* ce qu'il a à enseigner, lui donner du sens en tout cas, suffisamment pour que les élèves arrivent à résoudre les exercices qu'il proposera. Mais cela nécessite des discours supplémentaires, voire des détours, cela peut être long, ennuyeux, difficile même, et il y a un risque de faire perdre le fil à certains, entrant alors en contradiction avec le premier objectif, et même le second (pour certains élèves particulièrement).

En revanche, donner des images peut aider dans certaines limites aux trois objectifs, mais ce recours est nécessairement limité.

c) Silence, on improvise...

La difficulté de gestion de ce discours en classe, la nécessité de prendre en classe des décisions instantanées n'ayant pas à voir avec les seuls contenus mathématiques, la pression du temps, le manque d'information scientifique sur la portée réelle des différents types de discours, les différences pressenties entre les élèves, voire, pour un même élève, entre les moments du cours, amènent les enseignants à une certaine improvisation apparente sur ce sujet.

Finalement, chacun fait "comme il le sent", comme il perçoit sur le moment que c'est le plus efficace, comme il aimerait, lui, que cela soit fait s'il était élève...

Il n'y a pas apparemment là de marge de manoeuvre consciemment exploitée, pas de formation explicite notamment.

d) Et pourtant il y a des régularités

Certaines tendances générales se révèlent cependant, assez régulières semble-t-il, qui reviennent, de fait, à privilégier un des pôles signalés ci-dessus, au moins à certains moments des apprentissages (cf. Chiocca, Josse, Robert...)

C'est en particulier le cas, semble-t-il, dans les classes jugées faibles, où les élèves se perdent facilement aussi bien dans le discours que dans les mathématiques, et où ils n'ont pas d'exigences de compréhension très ancrées, habitués (conditionnés ?) comme ils le sont à ne pas (chercher à) comprendre : là les enseignants peuvent pencher (à leur insu ?) en faveur d'un discours d'étiquetage, clair, précis, simple, donnant des recettes, et vite renoncer au pôle plus explicatif, avec toutes les ressources langagières correspondant à ce choix.

e) Mais alors y a-t-il vraiment des variables, côté enseignant ?

Les énoncés mathématiques, les démonstrations, utilisent un langage mathématique codé, du moins à l'écrit, même s'il est imbriqué avec le langage courant (cf. thèse de Laborde (1982)).

A l'oral l'enseignant peut cependant s'exprimer avec beaucoup plus de liberté qu'à l'écrit.

Il a ainsi une première marge de manoeuvre, qui tient aux moyens de communication usuels. Il gagne ainsi sur l'écrit par l'introduction d'éléments supplémentaires, en langage courant, permettant à la fois d'aérer son discours et d'y mettre du relief et de l'organisation, faisant avancer les objectifs ci-dessus (soutenir l'attention, indiquer ce qu'il y a à retenir).

Il a ainsi toute une gamme de trucs langagiers qui permettent d'aérer et d'animer, ("rendre vivant") le flux du discours (vous voyez, d'accord, répétitions, phrases tronquées, plaisanteries...). Il peut aussi introduire des images (cf. l'expression "êtres mathématiques"), faire appel au registre familier (ce truc, on a affaire à...).

Il est souvent aussi amené dans les phases d'institutionnalisation à structurer son discours et en rappeler cette structure quand il pense en avoir besoin : il peut expliciter des étapes (il y a trois crans ; le premier...), accélérer ou raccourcir le discours, ou bien faire des retours en arrière, mettre des titres etc... Enfin il utilise aussi tous les rappels jugés nécessaires des actions des élèves, récentes ou plus anciennes.

Ces moyens, plus ou moins utilisés par tous les enseignants de mathématiques, se retrouveraient d'ailleurs sans doute dans le discours du professeur de physique, peut-être même d'histoire.

Peut-on les améliorer ?

f) Quel est donc le problème ?

Les questions que nous nous posons dans ces conditions sont les suivantes :

Peut-on introduire d'autres éléments que les précédents dans le discours de l'enseignant en classe de mathématiques ? Quels sont les marges de manoeuvre et les choix réels pour l'enseignant, quelles en sont les modalités possibles de gestion et leur efficacité ? Y a-t-il de meilleurs choix que d'autres, quelles sont les variables pertinentes ?

Cela revient à avancer sur la question suivante, indéniablement très difficile :

Qu'est ce qu'on peut effectivement espérer faire passer par le discours de l'enseignant, par delà les contradictions, et compte tenu des autres marges de manoeuvre dans la gestion de la classe, qui puisse aider les différents élèves dans leur apprentissage des mathématiques ?

g) Une denrée de choix pour le discours de l'enseignant en classe de mathématiques : le "méta", un vecteur de choix pour le méta : le discours de l'enseignant

Il y a en effet une autre catégorie de discours, plus liée aux mathématiques que ce qui précède, qui s'exprime bien en langage courant et qui peut être plus ou moins utilisée par l'enseignant de mathématiques : ce sont des éléments SUR les mathématiques concernées, que nous appelons ici, sans connotation particulière, méta (à cause de SUR).

Ce type de discours fait d'ailleurs son apparition dans certains manuels, et il émaille les vieux traités.

On peut en repérer tout de suite plusieurs types, tirés

- * de connaissances générales sur l'apprentissage des mathématiques (relevant de la métacognition),
- * de connaissances générales sur les mathématiques, sur l'activité mathématique aussi (relevant de l'épistémologie, de l'heuristique aussi),
- * de connaissances particulières sur un domaine donné (relevant d'un enseignement de méthodes par exemple, ou de réflexions sur la nature d'un concept donné)...

Notre hypothèse est que ce type d'informations (de connaissances, d'activités) constitue précisément un élément de choix à transmettre consciemment par le discours de l'enseignant, d'autant plus qu'il s'agit d'éléments pouvant être (ré)investis par les élèves dans leurs activités.

h) Méta et méta : où on propose une direction de recherche particulière, et accessible

C'est grâce à la restriction qui vient d'être introduite en effet que nous pouvons distinguer, parmi les commentaires sur les mathématiques qu'on trouve dans le discours enseignant (qui vont de simples appréciations qualitatives à des commentaires structurant, ou à des méthodes), ceux qu'il nous semble raisonnable de prendre effectivement en compte en premier lieu en didactique, à des fins de recherche (comprenant donc un travail de conception et d'ingénierie, d'expérimentation et d'évaluation).

En effet, nous centrer sur les éléments qui sont susceptibles d'avoir des applications en termes d'activités d'élèves, dont on peut donc identifier, le cas échéant, des traces dans les productions des élèves, permet d'avoir une entrée méthodologique pas trop compliquée.

C'est qu'il nous semble fondamental d'avancer dans un premier temps sur la recevabilité du "méta" en didactique, et donc de nous donner les moyens d'en observer des effets sur les élèves...

Certes la frontière n'est pas toujours bien définie entre ce qui pourra être utilisé par l'élève (éventuellement) et les commentaires plus généraux, d'autant plus que ces commentaires de l'enseignant (sur les mathématiques), les images, les personnalisations peuvent contribuer à ce que des élèves mettent en fonctionnement les autres éléments plus précis sur les mathématiques qui leur sont proposés. Cependant, tout ce qui relève des méthodes rentre facilement dans la catégorie étudiée, et aussi, de manière plus détournée, certaines classifications, qui permettent aux élèves de se repérer pour choisir leurs méthodes par exemple. Les activités de réflexion en font aussi partie.

Il s'agit donc de mettre au point un scénario cohérent, qui doit comporter un enseignement méta que les élèves peuvent utiliser au moins en partie, et de tenter d'en évaluer l'impact dans les productions.

Evaluer l'enseignement d'algèbre linéaire en DEUG A

a) le projet

Nous présentons d'abord le projet initial que nous avons élaboré pour évaluer l'expérimentation. Les moyens décrits ci-dessous doivent permettre ainsi d'analyser de divers points de vue l'état des connaissances des étudiants à divers moments de l'année

1°/ Evaluation des performances

La première possibilité, tout à fait classique est l'analyse de copies d'étudiants, à divers moments, qui pourrait être complétée par l'analyse de productions autres (en temps limité ou non, individuelles ou non), entretiens ou enregistrements... (analyses synchroniques).

Cela peut permettre la comparaison de comportements observés et des prévisions.

Dans ces évaluations, nous essayons d'avoir une appréciation différenciée des aspects techniques et plus conceptuels (en distinguant les aspects qualitatifs, métamathématiques, opérationnels ou heuristiques...), d'autant plus que les devoirs proposés aux étudiants sont explicitement de nature différente par rapport à ces critères, et nous essayons aussi de nous poser la question des prérequis.

2°/ Tester les hypothèses spécifiques : quel sont les effets des différents "ingrédients" qu'on a essayé d'introduire et du temps long ?

i) LE "META"

- Recherches de traces directes de questionnements sur les mathématiques chez les étudiants:

Nous pouvons utiliser à cet effet

* des questionnaires (reprendre diverses questions, internes ou externes, comme celles sur le travail à fournir, sur lesquelles un discours a été produit, pour voir s'il a été entendu, compris, et/ou approprié - du moins dans quelle mesure a-t-il été approprié)

* ou les devoirs écrits, en analysant les justifications variées, l'exposition des démarches etc... (cf. DEA de A. Benezra), et en comparant avec les corrigés écrits fournis aux étudiants

- Recherches de traces indirectes (mathématiques) :

Quels questionnements les étudiants peuvent-ils produire sur une situation mathématique donnée, seuls ou guidés ?

A quels moyens de contrôle peuvent-ils penser (seuls ou guidés) ?

Notamment, font-ils appel aux petits dessins, ou à la cohérence entre le nombre de paramètres et le nombre d'équations, entre la dimension et le nombre maximum de vecteurs libres...

Cela pourrait amener à proposer des situations où l'objectif serait d'abord un questionnement, ou un contrôle, en distribuant deux variantes (avec guide ou sans, par exemple en mettant deux parties et en intervertissant les modalités).

ii) LES CHANGEMENTS DE CADRES ET DE POINTS DE VUE

Est-ce que la notion même de jeux de cadres a été perçue, dans quelle mesure est-elle disponible ou seulement mobilisable ?

On peut donner à analyser un texte d'algèbre linéaire, soit texte d'exercices, soit texte de

mathématiques, par exemple, pour voir les catégories que les étudiants peuvent mettre en oeuvre pour apprécier un texte mathématique, avec une variante où on demande seulement de répondre à des questions précises mobilisant ces catégories.

On peut donner à traiter sans indication un problème pour lequel il est "raisonnable" de faire une modélisation linéaire non indiquée...

iii) L'ENSEIGNEMENT DE METHODES

Il s'agit de trouver des exercices nécessitant une réflexion préalable sur les méthodes utilisables, puis de détecter des indices de cette réflexion (par exemple faire rédiger, comme I. Tenaud, la démarche utilisée, avec, du coup, une critique de ce type de démarche...)

3°/ Etudes cliniques diachroniques

Il s'agit de faire la mise en rapport, pour quelques étudiants, des divers éléments repérés ci-dessus, et notamment de rechercher s'il y a une relation entre l'habileté technique, y compris initiale, l'accès à un niveau plus conceptuel et l'appropriation des divers "ingrédients" énoncés ci-dessus.

4°/ Exploitation des perturbations

Y a-t-il des "perturbations" éventuelles dans l'enseignement que le chercheur pourrait exploiter ?

Nous avons pensé utiliser la nécessaire diversité entre les enseignants de TD, pour étudier si elle introduit ou non des différences perceptibles, autrement dit chercher si ce que l'enseignant qui fait le cours a tenté d'introduire "résiste" à ce type de perturbations.

On peut aussi tenter de comparer plusieurs sections de DEUG analogues, là encore sous l'angle "perturbations".

B. NOEL (1991) La métacognition (de Boeck)

Dans cet ouvrage récent, B. Noël fait un résumé assez complet des travaux sur le sujet.

Confirmant la paternité de Flavell pour les premiers travaux sur la métacognition (1976,77), elle indique cependant que les premières définitions qu'il donne sont trop vastes à son avis, car elles portent sur trop de domaines.

Aussi B. Noël propose-t-elle de réserver le terme de connaissances métacognitives aux connaissances sur les facteurs qui favorisent l'apprentissage, indépendamment des sujets, et de garder comme définition de la métacognition la définition de Flavell des connaissances métacognitives.

La plupart des travaux qu'elle résume porte sur les connaissances métacognitives, et tout spécialement sur la mémoire (métamémoire pourrait-on dire).

Les chercheurs essaient de montrer en général que plus les sujets (enfants surtout) ont de connaissances sur les processus de mémorisation meilleures sont leurs performances mnémoniques. Cependant les corrélations sont peu probantes, sans qu'on puisse dire si c'est à cause des expériences elles-mêmes ou si c'est un vrai résultat.

L'auteur, quant à elle, a essayé de mettre en relation d'autres variables avec la métacognition (au sens restreint, de connaissance de ses propres processus mentaux, comprenant la conscience, un jugement et éventuellement une décision), notamment le style cognitif, l'anxiété, le site de contrôle la motivation, la conformité et les performances.

Ses expériences portent sur des sujets de 11 ans, et des tâches très générales, ne relevant pas du domaine scolaire. Il s'agit par exemple de définir à l'enfant un "vecteur rangée" (il ne connaît pas ce mot, c'est une ligne horizontale de nombres), de lui demander s'il a compris, de lui demander d'en inventer un, en indiquant s'il est sûr de sa réponse, et de cocher parmi toute une série de figures les vecteurs rangées (avec encore la question de la confiance en sa réponse).

L'auteur définit le jugement cognitif comme la réponse à la question "as-tu compris ?", et le compare à la fois aux performances et aux jugements de certitude. Elle attribue une "note" sur 5 à ces différents indicateurs, et définit à partir de là divers indices dont l'optimisme métacognitif (en cas de différence positive entre jugement métacognitif et performance).

Les résultats de ses expériences cliniques et statistiques, soigneusement décrites, confirment les hypothèses qu'elle énonce : il y a plus de jugements justes que faux, optimistes que pessimistes, le jugement métacognitif est d'autant meilleur que la tâche est réussie, plus la tâche est difficile plus l'optimisme augmente, les principales causes d'erreur (association d'un "j'ai bien compris" à une performance ou un jugement de certitude erronés) tiennent à des préreprésentations ou des prérequis erronés, incomplets, à des recours à des exemples incomplets, à des indices de la situation mal choisis, à une absence de représentation de la situation ou à une modification de celle-ci. Autrement dit la difficulté à émettre un jugement métacognitif correct est associée au recours à des processus cognitifs erronés ou inadaptés. Ce que l'auteur propose à l'enseignant de traiter comme symptôme signalant une difficulté.

Enfin, elle montre que les sujets ayant un indice de métacognition élevé (correct) sont les sujets indépendants, internes, non anxieux, très motivés, conformes et bien jugés par le maître...

Britt-Mari Barth L'apprentissage de l'abstraction, méthodes pour une meilleure réussite à l'école (Retz, 1987)

Chapitre 7 la métacognition

Plusieurs définitions sont indiquées (celle du dictionnaire : qui concerne l'art de connaître), en sous titre : apprendre à conduire consciemment sa pensée, dans le glossaire à la fin de l'ouvrage : revenir sur sa démarche mentale pour en prendre conscience, et activité pédagogique qui consiste à aider l'élève à prendre conscience de sa pensée).

Dans ce chapitre l'auteur explique qu'il s'agit d'une démarche méthodologique : il faut analyser et réfléchir sur la démarche cognitive, et la capacité de mettre en oeuvre consciemment un raisonnement.

Dans une première étape, si on ne fait rien de spécial, l'élève a seulement une imprégnation, mais rien n'est dégagé ; dans une deuxième étape on peut conduire les élèves à une prise de conscience des méthodes de pensée ; il en résulte une possibilité de mobilisation volontaire par la suite.

Cette prise de conscience aura lieu suite à une réflexion et un retour sur des démarches mentales provoquées par l'enseignant (d'où la définition en termes d'acte pédagogique).

Ce qui est nouveau, précise l'auteur, c'est d'insister sur la façon dont on apprend, considérée comme plus formatrice que ce qu'on apprend. C'est cela qu'on va apprendre aux élèves : les façons d'apprendre.

Pour amener les élèves à réfléchir sur leur méthode de pensée, l'auteur donne plusieurs exemples empruntés tous à l'école primaire et à la conceptualisation au sens des psychologues.

Elle expose comment montrer aux élèves la succession des opérations mentales pour arriver à l'abstraction et à la généralisation (toujours dans le cadre de la conceptualisation), comment leur donner des grilles de questions à se poser systématiquement notamment dans un entraînement à la perception, à la comparaison, à l'inférence et à la vérification ...

Elle indique des réussites chez ses élèves.

FICHE DIDACTIQUE : HEURISTIQUE - ANALOGIE

Le mot "heuristique" d'origine grecque désignait au départ une science assez mal définie que l'on rattachait tantôt à la logique, tantôt à la psychologie et dont l'objet était l'étude des règles et méthodes de la découverte et de l'invention. Divers mathématiciens se sont intéressés à l'heuristique. Pour Pappus (III^{ème} siècle après J.C.) par exemple, l'heuristique enseigne les méthodes de l'analyse et de la synthèse, la première consistant à, partant de la conclusion ou du problème supposé complètement résolu, à remonter aux données ou hypothèses, la seconde à progresser en sens inverse des données à la conclusion.

Pour le mathématicien de notre époque, le terme d'heuristique évoque immédiatement le mathématicien hongrois Georges Polya qui lui a consacré divers ouvrages. Le plus célèbre est sans doute : "How to solve it ?", paru en français sous le titre : "Comment poser et résoudre un problème ?", dont l'objet est d'aider l'élève à acquérir des stratégies générales de résolution de problèmes et d'aider le professeur à développer chez ses élèves de telles capacités. Dans ce but, G.Polya construit une grille de questions (jointe à cette fiche), questions de bon sens selon lui, mais permettant d'explicitier ce que l'expert met en jeu souvent d'ailleurs sans en être lui-même conscient. Cette grille découpe la démarche de résolution en quatre phases : comprendre le problème, concevoir un plan, mettre le plan à exécution, revenir sur la solution.

Il en illustre le fonctionnement sur la base de dialogues fictifs maître-élève, commentés, à propos de problèmes précis comme : trouver la longueur de la diagonale d'un parallépipède rectangle connaissant ses largeurs, longueurs et hauteurs, construire un carré s'appuyant sur un côté d'un triangle et ayant ses deux autres sommets sur les deux autres côtés....

L'analogie joue ici un rôle heuristique fondamental : on ne résout pas un problème à partir de rien mais en faisant judicieusement appel à l'expérience acquise et c'est via la recherche d'analogies que ce recours à l'expérience s'effectue. Par exemple, dans le problème du parallépipède, G.Polya fait l'hypothèse qu'en invitant l'élève à se rappeler des problèmes ayant même type d'inconnue, l'élève va penser à des problèmes de calculs de longueurs dans des triangles rectangles, ou qu'en cherchant un problème ressemblant mais plus simple, l'élève va penser au calcul de la diagonale d'un rectangle, et il se base successivement sur ces deux hypothèses pour continuer un dialogue socratique qui ne pourrait survivre sans cela.

Ce rôle essentiel de l'analogie dans le travail mathématique est réaffirmé dans la partie de son ouvrage : "Les mathématiques et le raisonnement plausible" intitulée : "Induction et analogie en mathématiques". Il y écrit :

"Il n'existe sans doute pas de découverte, en mathématiques élémentaires ou supérieures, et par suite dans aucun autre domaine, qui puisse être effectuée sans l'aide de ces opérations [particularisation, généralisation, analogie], en particulier sans l'aide de l'analogie."

Il définit l'analogie comme une ressemblance conceptuelle mais imprécise, ambiguë tant qu'elle n'a pas été élucidée, et montre, en s'appuyant sur des exemples historiques, recherche de sommes de séries en particulier, que la recherche d'analogies si elle

constitue un processus fondamental de la découverte mathématique, est aussi un processus moins solide que ceux de généralisation et de particularisation qu'il évoque par ailleurs. C'est un processus à la limite de la légalité mathématique, échappant au contrôle démonstratif, validé a posteriori par les résultats obtenus :

"La démarche décisive du raisonnement d'Euler était audacieuse. En toute logique, il s'agissait d'une véritable erreur : il appliquait une règle à un cas pour lequel elle n'était pas faite, une règle concernant les équations algébriques à une équation qui n'était pas algébrique. Logiquement la démarche d'Euler n'était pas justifiée. Mais elle l'était par l'analogie, par l'analogie confirmée par les succès d'une science naissante qu'il appela lui-même quelques années plus tard "Analyse de l'infini"."

Il est difficile de nier l'importance de l'analogie dans le fonctionnement mathématique. Cependant, le peu d'efficacité reconnu des cours d'heuristique, comme les recherches menées sur la résolution de problèmes ont clairement mis en évidence que l'on ne peut assurer un fonctionnement épistémologiquement satisfaisant et efficace de l'analogie dans l'enseignement en fournissant aux élèves des heuristiques générales comme celles décrites par G.Polya. Comme l'écrit A.Schoenfeld dans "Mathematical Problem Solving" :

"The successful use of such strategies calls not only for "knowing" the strategies, but for good executive decision making and an extensive repertoire of subskills. The straightforward solution of Polya's geometry problem by means of an easier, related problem called for (1) knowing to use the right strategy, (2) knowing the appropriate versions of it for that problem, (3) generating appropriate easier, related problems, (4) assessing the likelihood of being able to solve and then exploit each of the easier problems, (5) choosing the right one, (6) solving the chosen problem, and (7) exploiting its solution. Learning to use the strategy means learning all of these skills.

A third point is that one cannot expect too much of heuristics strategies. One's success in any domain is based on a foundation of one's resources in that domain, and even a good mastery of heuristics cannot be expected to replace shaky mastery of the subject matter."

Les exemples qu'il traite, dont certains ont été déjà traités par G.Polya comme la construction d'un carré inscrit dans un triangle, illustrent bien la complexité des choix à effectuer et la maîtrise du domaine nécessaire pour, au delà d'indices de similarité superficielle, aller chercher et exploiter ensuite efficacement des analogies productives parce que conceptuelles.

En fait, les heuristiques générales pour fonctionner, doivent pouvoir s'appuyer sur des connaissances et métaconnaissances relatives aux domaines concernés (cf. activités - thème 1 dans cette brochure). Divers travaux de recherche se développent actuellement pour étudier les possibilités offertes par des enseignements explicites de méthodes dans des champs conceptuels bien délimités. Nous renvoyons le lecteur par exemple aux travaux de M.Rogalski portant sur des méthodes de recherche de primitives, d'étude de convergences de suites et d'étude qualitative d'équations différentielles au niveau du DEUG, ainsi qu'à la recherche de A.Robert et I.Tenaud dont l'objet était de mettre au point, expérimenter et évaluer l'efficacité d'un enseignement de méthodes adapté à la résolution des problèmes de géométrie de niveau terminale C. L'enseignement construit est basé sur une classification des types de problèmes, des types d'outils, une mise en relation outils/problèmes pour les cas les plus classiques, un recensement des

configurations de base les plus utiles et l'explicitation de quelques heuristiques plus générales mais reformulées dans le contexte géométrique.

L'analogie est aussi à la source de théories d'apprentissage des mathématiques comme celle développée par Dienes dans le cadre du mouvement des mathématiques modernes. Elle consiste à faire rencontrer à l'élève un ensemble de situations isomorphes quant à leur structure mathématique et à faire l'hypothèse que l'élève va reconnaître la similarité des situations et identifier la source de cette similarité : la structure mathématique dont l'enseignement est visé.

Le processus d'enseignement résultant de cette théorie est formé de 6 phases :

La première phase est celle du jeu libre : l'apprentissage étant conçu comme une adaptation à des situations, elle vise à faire rencontrer à l'enfant des situations qui le conduiront à former les concepts dont l'apprentissage est visé (l'environnement des blocs logiques par exemple s'il s'agit de concepts logiques). Passée une première familiarisation avec cet environnement vient la seconde phase, celle des jeux avec des règles artificiellement imposées, des règles reflétant bien sûr la structure mathématique en jeu dans la situation. La troisième phase, celle des jeux de dictionnaire ou d'isomorphisme consiste à faire jouer l'enfant à des jeux qui présentent la même structure mathématique sous des apparences différentes : c'est là que l'analogie de structure entre en jeu : "Ainsi, écrit Dienes, l'enfant dégage la structure commune des jeux et se débarrasse des parties non pertinentes [...] C'est à ce moment que l'enfant se rendra compte de ce qui est pareil dans les jeux divers qu'il a pratiqués, c'est à dire qu'il aura réalisé une abstraction." La quatrième étape est celle de l'introduction d'une représentation qui permettra d'exprimer ce qui a été abstrait, la cinquième celle de l'invention d'un langage et de la description de la représentation à partir de ce langage, une telle description formant la base d'un système d'axiomes. La sixième étape enfin sera celle du jeu de la démonstration qui permettra d'accéder à des théorèmes à partir des axiomes.

Cette théorie a connu, dans le contexte structuraliste de la réforme des mathématiques modernes, un grand succès. Pourtant différents travaux, tant en didactique des mathématiques que de la physique ont bien montré que la validité de l'hypothèse qui la fondait n'allait pas de soi, en mettant en évidence le rôle joué par le contexte dans la résolution par les élèves de problèmes mathématiquement isomorphes et justement la difficulté qu'ils rencontraient à faire abstraction des composantes contextuelles d'une situation pour raisonner en termes de structures.

Dans plusieurs textes, G.Brousseau a essayé de démonter cette contradiction apparente en recourant à des interprétations en termes de contrat : si un enseignement basé sur la théorie peut fonctionner, ce n'est pas parce que les élèves découvrent spontanément l'analogie de structures mais parce qu'ils décodent correctement les attentes du professeur : chercher des ressemblances et que, d'autre part, cette identification des ressemblances est favorisée par la présence de signaux didactiques clairs. D'où le phénomène suivant :

"On observe qu'avec les novateurs, ceux qui veulent montrer que la méthode réussit, elle réussit effectivement : les élèves apprennent ce que le maître leur propose. Elle échoue, au contraire, avec les enseignants qui croient à la vérité de la théorie didactique de Dienes : ils proposent bien, les uns après les autres les fiches convenables mais

l'apprentissage ne se produit pas. L'explication est qu'ils attendent que le processus agisse comme une loi physique et qu'ils n'exercent aucune pression sur le contrat didactique."

La méfiance de G.Brousseau vis à vis de l'exploitation didactique de l'analogie dépasse la seule critique de la théorie de Dienes. Dans son article : "Fondements et méthodes de la didactique", l'analogie apparaît dans le chapitre : "Phénomènes didactiques" à côté de "l'effet Topaze", "l'effet Jourdain", du glissement métacognitif... sous le titre : "Usage abusif de l'analogie". Après avoir affirmé que "l'analogie est un excellent moyen heuristique lorsqu'elle est utilisée sous la responsabilité de celui qui en fait usage", il y montre que dans la relation didactique usuelle, elle constitue plutôt un redoutable moyen de produire des effets Topaze et Jourdain⁽¹⁾ : Topaze parce que la situation a été préparée, simplifiée pour que l'élève puisse produire la solution par un décodage qui ne suppose pas un réel investissement mathématique, Jourdain parce que l'enseignant peut d'emprarer de cette réponse pour y lire la manifestation d'une connaissance savante.

Nous renvoyons à la première partie de cette brochure pour quelques éléments complémentaires d'analyse sur les difficultés que rencontre système didactique à gérer convenablement l'analogie.

(1) L'effet Topaze est défini par G.Brousseau, en référence à la scène de la dictée de "Topaze" de Marcel Pagnol comme le phénomène didactique suivant : l'enseignant ayant déterminé la réponse que doit fournir l'élève, s'il ne l'obtient pas spontanément, essaie le plus souvent de l'obtenir par une succession de questions de plus en plus faciles. Il y a effet Topaze si, dans ce processus, les connaissances initialement engagées disparaissent complètement.

L'effet "Jourdain" est défini en référence à la scène du Bourgeois Gentilhomme de Molière où le maître de philosophie révèle à Jourdain ce que sont les voyelles et la prose. Il est associé didactiquement au phénomène suivant : l'enseignant donne une signification savante à des comportements motivés par des causes et des significations banales. Un exemple souvent cité est celui d'activités sur les structures de groupes à l'Ecole Élémentaire dans la période des mathématiques modernes. Notons qu'un effet Topaze se conclut naturellement par un effet Jourdain.

Lectures conseillées en priorité :

G.Polya : Comment poser et résoudre un problème ? - Dunod, 1957

G.Polya : Les mathématiques et le raisonnement plausible - Gauthiers Villars, 1958.

A.Schoenfeld : Mathematical problem solving - Academic Press - 1985.

M.Rogalski : Enseigner des méthodes en mathématiques et Comment étudier la convergence d'une suite réelle, un exemple de méthode - Enseigner autrement les mathématiques - pp. 65-80 et 197-204, Ed. Commission inter-IREM Université, 1990.

A.Robert et I.Tenaud : Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C - Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 9.1, pp. 31-70, 1989.

Z.P.Dienes : Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématiques - OCDL, 1970.

G.Brousseau : Fondements et méthodes de la didactique - Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7.2, pp. 33-115, 1986.

par M. ARTIGUE

J. PIAGET et E.W. BETH (1961)

Epistémologie mathématique et psychologie
(Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle)
Bibliothèque Scientifique Internationale,
Etude d'épistémologie génétique n° XIV, PUF.

Ce livre se présente en deux parties, chacune ayant été rédigée par un des deux auteurs. Nous nous intéressons, ici, seulement à la deuxième partie rédigée par Piaget, et plus particulièrement au chapitre VIII.

En préambule et faisant suite aux propos de Beth, Piaget met clairement en évidence la distinction de champ d'intervention et de démarche entre les problèmes de psychologie et les problèmes de logique. Pour lui, les premiers sont une tentative d'explication causale et relèvent donc d'une démarche de constatation et d'expérience, alors que les seconds sont des questions de fondement, et se caractérisent donc par une démarche déductive.

Une fois posée cette séparation radicale entre les questions de validité ou de norme et celles de faits ou de genèse causale, il soulève le problème fondamental : "Comment expliquer psychologiquement la possibilité (au sens de réalisation possible et non de validité possible) d'une logique et d'une mathématique "pure" (au sens d'indépendante de tout contenu) ?". Il se propose donc de "tenter de comprendre en vertu de quels processus génétiques" s'expliquent telles ou telles constructions mathématiques".

Après un chapitre consacré à un historique des relations entre la logique et la psychologie, l'auteur nous dit qu'il va "appliquer la méthode génétique à l'étude de quelques problèmes psychologiques généraux, que soulève la pensée mathématique".

Il fait d'abord remarquer que cette démarche se fait selon deux axes principaux de questionnements :

- ceux relatifs au développement formateur (du point de vue des actions et des opérations)
- ceux relatifs à la conscience du sujet.

Le premier problème qu'il aborde (et le seul que nous examinerons ici), est celui des structures (chapitre VIII).

La question soulevée ici est de "savoir si les structures mathématiques correspondent à des structures mentales générales dans les mécanismes opératoires du sujet ou si elles ne sont dues qu'à une élaboration technique récente". Ainsi "si elles sont "naturelles" en tant qu'enracinées plus ou moins profondément dans l'activité du sujet, il reste à établir comment elles se développent génétiquement en fonction soit des conditions internes de cette activité, soit d'expériences diverses, soit du langage, etc."

Après avoir cité Bourbaki, Piaget conclut : " Il n'existe pas de déduction a priori des structures et leur détection relève bien plus d'une analyse réflexive et rétroactive (*plus loin, il emploiera le terme d'analyse régressive*) que d'une construction directe. Là où la construction progressive a conduit à un compartimentage de plus en plus poussé, l'analyse comparative découvrant des structures remonte au contraire aux formes communes les plus générales, mais n'y remonte qu'en brisant ces compartimentages."

Plus loin il complète : "aucun sujet avant de l'avoir apprise, ne possède une "notion" de ce qu'est un groupe (ou tout autre structure). " Il en déduit donc que, pour savoir si les structures sont "naturelles", on ne peut pas travailler sur le terrain de "la pensée réfléchie, envisagée du point de vue de l'individu", mais qu'il faut plutôt se "demander si, dans les coordinations spontanées de ses opérations (en tant qu'actions intériorisées), le sujet témoigne de structures coordinatrices apparentées avec des structures mathématiques."

Les paragraphes qui suivent sont consacrés à l'exposition des résultats des recherches de Piaget sur les structures élémentaires dans le développement de l'enfant et à la mise en évidence de leur parenté avec les structures mathématiques (les premières sont notées structures G et les secondes structures M). Mais il souligne également une différence fondamentale : les SM sont un objet de réflexion de la part du sujet alors que celui-ci n'a même pas conscience des SG, qui n'apparaissent que dans l'interaction avec un observateur.

En fait il ne saurait être question de construire une sorte d'isomorphisme entre SM et SG, mais on peut détecter plutôt une filiation génétique, dont Piaget dégage les caractéristiques (cf. p. 202-204), que l'on peut schématiquement résumer ainsi :

1) "Si le mathématicien, n'utilise, quand il construit les êtres mathématiques, que la pensée "naturelle" (le formalisme n'intervient qu'a posteriori), simplement affinée par une série ininterrompue d'abstractions progressives, procédant non pas à partir des objets empiriques, mais à partir des actions et des opérations qu'il exerce sur les objets, il est nécessaire d'admettre que cette construction des êtres mathématiques sera conditionnée par les caractères des SG. "

2) Le mathématicien procède ensuite à une analyse réflexive, régressive, comparative et "quasi-inductive", dans laquelle il se place d'emblée à un niveau très général et un degré supérieur d'abstraction.

3) Il procède donc à une *abstraction réfléchissante*, qui consiste à tirer d'un système d'actions ou d'opérations de niveau inférieur certains caractères dont elle assure la réflexion sur des actions ou des opérations de niveau supérieur.

Ainsi Piaget conclut à une filiation génétique, mais il insiste, en conclusion, sur l'impossibilité de réduire à une simple introspection, le passage d'une structure naturelle à des êtres mathématiques.

Ed. DUBINSKY (1992)

Reflective abstraction in advanced mathematical thinking
in *Advanced Mathematical Thinking*

Ed. D. Tall; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays Bas, pp. 95-124.

Les travaux de Dubinsky reposent sur l'idée que le concept d'abstraction réfléchissante (introduit par Piaget), peut être un outil puissant dans l'étude de la "pensée mathématique avancée" (advanced mathematical thinking).

Dans un premier temps, il fait une analyse personnelle de Piaget pour expliciter ce qu'il entend par abstraction réfléchissante. C'est un processus qui part non pas des objets, mais des actions ou des opérations que le sujet exerce sur ces objets, pour en tirer certains caractères, et en assurer la réflexion (au sens quasi-physique du terme) sur des actions ou des opérations de niveau supérieur. C'est donc un processus entièrement intériorisé, dans lequel l'individu projette sur des plans supérieurs de pensée où d'autres actions sont présentes aussi bien que sur des modes de pensée plus puissants.

Dubinsky insiste sur le fait qu'une abstraction réfléchissante induit un processus de construction de nouvelles combinaisons par conjonctions de diverses abstractions.

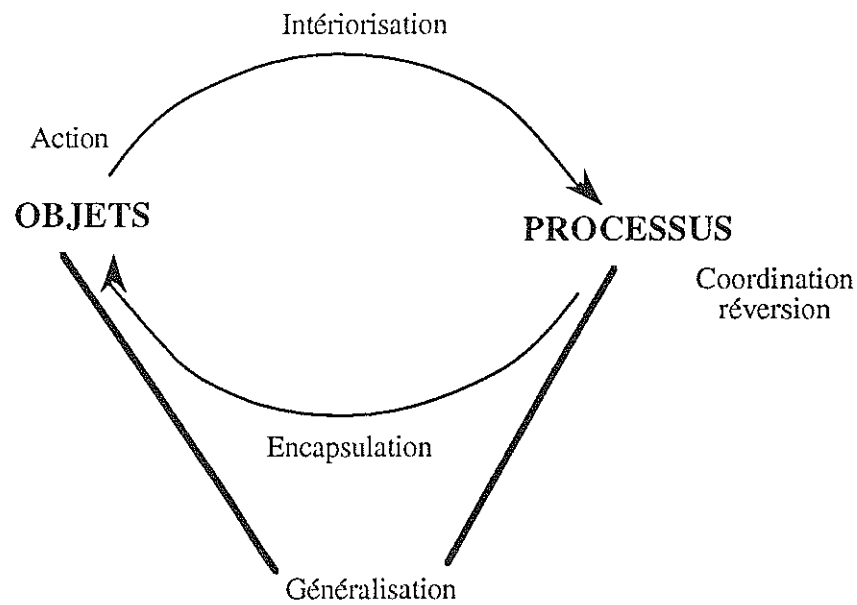
Il distingue cinq grands types de processus de construction liés à l'abstraction réfléchissante : l'intériorisation, la coordination, "l'encapsulation", la généralisation (extensive), la réversion.

Dans un deuxième temps, Dubinsky explique comment il va mettre en place une théorie du développement de la "pensée mathématique avancée". Son hypothèse est que l'abstraction réfléchissante consiste en la construction d'objets mentaux et d'actions mentales sur ces objets. Le terme d'objet peut être associé à un objet physique ou mental, par contre le terme de processus (mental) est préféré pour désigner une action mentale, pour insister sur sa nature interne (au sujet). Le terme de schème désigne enfin un ensemble plus ou moins cohérent d'objets et de processus. Une description explicite d'une partie de l'organisation complexe des différents schèmes liés à un concept mathématique donné, est appelé par Dubinsky, une **décomposition génétique** du concept. L'auteur s'empresse de dire qu'il n'y a pas une décomposition génétique, valide pour tous les étudiants, mais qu'une décomposition génétique représente un moyen de décrire ce que les étudiants ont fait pour construire un concept.

Dans cette théorie, la propension d'un étudiant à répondre à un problème de façon plus ou moins consistante sera analysée en terme de schème. Si le sujet réussit, on dira que le problème a été assimilé par le schème. Sinon, dans des conditions favorables, les schèmes déjà en place pourront être accommodés pour faire face au nouveau phénomène (par une abstraction réfléchissante).

Dubinsky présente ensuite des exemples, en explicitant, pour chaque concept étudié, le type ou la conjonction des types de construction (selon les cinq types explicités plus haut) qui sont, ou qui devraient être, mis en jeu. Il précise que son argumentation s'appuie aussi bien sur des observations, que sur des suppositions issues de la mise en place de la théorie. Par ailleurs il insiste sur le fait que la décomposition génétique d'un concept ne signifie pas que les types de construction mis en évidence ont un caractère automatique, naturel ou facile, pour les étudiants et que, de plus, la théorie n'explique pas pourquoi les étudiants font ou ne font pas les constructions mises en évidence, ni comment il faudrait s'y prendre pour les y aider.

Avant de donner les décompositions génétiques plus ou moins complètes de l'induction mathématique, du calcul de prédicat et de la notion de fonction, il précise, à l'aide d'exemples, les notions d'objets, d'actions, de processus et de schèmes et leurs interactions dans sa théorie. Il résume la construction d'un schème par le diagramme suivant, qu'il faut voir sous un aspect dynamique et non linéaire :



Enfin dans un chapitre de conclusion, Dubinsky réfléchit aux implications possibles de sa théorie sur l'enseignement ou l'apprentissage. Il commence par remarquer que l'enseignement traditionnel fonctionne plus par monstration et imitation d'algorithmes qu'en essayant de donner aux étudiants des moyens pour construire des schèmes liés aux concepts. Dans ce sens il suggère que sa théorie peut interagir avec des théories de l'apprentissage pour permettre une alternative. Une décomposition génétique peut aider par exemple à repérer les schèmes requis pour la construction de nouveaux schèmes liés à un concept donné, ou encore à mieux analyser les erreurs ou les manques des étudiants en terme de non construction de schèmes appropriés et, par là, aider à la gestion du dépassement de ce dysfonctionnement.

Dubinsky pense qu'il est nécessaire de construire des situations propres à favoriser certaines abstractions réfléchissantes et nous dit en conclusion qu'il en a expérimentées certaines dans un environnement informatique et qu'il poursuit ses recherches dans cette voie.

**Septième Ecole d'été de Didactique des Mathématiques
1993**

Saint-Sauves d'Auvergne

Réaction à la conférence d'Aline ROBERT et Jacqueline ROBINET

Prise en compte du "méta" en didactique

par

Annick Weil-Barais

Maître de Conférences en Psychologie

LIREST-GDSEP7

Quand Aline ROBERT m'a demandé d'intervenir sur le "méta" en didactique, il y a de cela presque un an, ma première réaction a été l'étonnement et le doute quant à l'intérêt de la chose. Ces réactions étaient alors alimentées par deux constats:

- d'une part, les recherches sur la méta-cognition qui a semblé être à un moment donné un sujet porteur de découvertes nouvelles en psychologie du développement se sont très vite taries;

- d'autre part, en didactique des sciences physiques, les rares recherches qui ont été conduites notamment dans le domaine de la résolution de problèmes n'ont pas donné les résultats escomptés.

La piste du métacognitif semblant déjà assez minée, qu'allaient donc y chercher mes deux collègues? Leur recherche était-elle susceptible de déboucher sur des questions intéressantes pour la didactique des mathématiques ?

A ma grande surprise, l'entreprise s'est avérée plus fructueuse que je l'escomptais. D'une part au plan de la recension des travaux qui a été faite et d'autre part au plan de la clarification conceptuelle qui nous est proposée. Apparemment, il semble que l'intérêt pour ce qui est de l'ordre du méta ait attiré l'attention des didacticiens sur des problèmes nouveaux pour eux. Cela suffit à mon avis pour justifier l'intérêt accordé au méta.

Ceci n'exclut pas qu'on continue à examiner de manière critique les approches du méta.

Je me permettrai donc de faire quelques remarques.

La première se rapporte aux origines théoriques du concept de *méta-connaissance*.

Le rapprochement ou l'amalgame parfois fait entre les "méta-connaissances" telles que les conçoivent les psychologues très influencés par l'approche *traitement de l'information* et les idées de Piaget sur la "Prise de conscience" ne me semble pas judicieux.

L'intérêt de Piaget pour la prise de conscience est lié à l'importance qu'il accorde à l'*abstraction réfléchissante* dans la formation des connaissances. Pour Piaget, comme pour un rationaliste comme Cassirer, les concepts sont des produits du fonctionnement de l'esprit. Ils s'opposent en cela aux empiristes qui mettent en avant l'extraction de régularités (l'*abstraction empirique* dans la terminologie piagétienne). Pour un esprit rationaliste comme Piaget, la pensée ne peut se développer que s'il y a une conscience. La conscience étant première, on comprendra tout l'intérêt de Piaget pour l'émergence de la prise de conscience chez l'enfant.

De mon point de vue, les méta-connaissances telles qu'elles sont définies par les psychologues s'inscrivant dans le courant "traitement de l'information" ont un statut

propositionnel. Ce sont des *informations* qui permettent de gérer d'autres informations. L'introduction de *méta-connaissances* dans les systèmes artificiels qui simulent le fonctionnement de la pensée répond à un problème de gestion des informations stockées en mémoire. L'introduction du concept de méta-connaissance permet de continuer à travailler avec le "noyau dur" des propositions qui fondent l'approche computationnelle de la pensée.

On sait maintenant que même si on ajoute des méta-connaissances dans les systèmes artificiels, ceux-ci ne sont guère susceptibles de produire des connaissances nouvelles. Le fait qu'on y soit pas arrivé ne veut pas dire que ce soit une mauvaise piste. Toujours est-il que pour le moment il y a lieu d'être circonspect et de ne pas se laisser enfermer dans une telle piste.

Je terminerai mon intervention sur quelques remarques tirées des travaux que j'ai effectués avec Gérard Lemeignan sur l'apprentissage des concepts physiques. Partant d'un point de vue rationaliste, nous avons toujours accordé à la prise de conscience une importance cruciale: **prise de conscience des invariants, prise de conscience des opérations intellectuelles en jeu dans la formation et l'utilisation des concepts et des modèles, prise de conscience de la fonctionnalité des systèmes de représentation symbolique, prise de conscience des différences entre le fonctionnement de la pensée commune et du fonctionnement de la pensée en physique, prise de conscience des modes de contrôle de l'activité intellectuelle, etc.** Selon nous, les prises de conscience sont constitutives de la formation des concepts. Aussi toutes les mises en scène didactique que nous avons expérimentées ont tenté d'inciter à ces prises de conscience nécessaires à la maîtrise des concepts (Lemeignan & Weil-Barais, 1993).

La prise en compte des phénomènes de prise de conscience plutôt que la prise en compte de "méta-connaissances" a des incidences très importante sur la manière dont les séquences didactiques sont organisées.

– La prise de conscience ne se transmet pas; c'est quelque chose d'individuel qui intervient lors de confrontation avec soi-même ou avec autrui. Pour que ceci ait lieu, il faut que le sujet aient déjà une certaine fréquentation avec les objets de connaissance. Il faut aussi qu'il ait l'opportunité d'être surpris, de s'interroger, d'avoir à se justifier, à communiquer, etc. La prise de conscience est le plus souvent seconde par rapport à un ensemble d'activités.

– Dans le cas des méta-connaissances, celles-ci peuvent être transmises (je n'ai pas dit reçues). Dans leur papier, Aline Robert et Jacqueline Robinet évoquent à de nombreux endroits un processus de transmission par le langage. Elles s'interrogent alors sur le moment des interventions, sur le contenu des propositions énoncées et sur leur recevabilité par les élèves.

Selon qu'on pense prise de conscience ou méta-connaissance, les modes d'intervention envisagés sont très différents et bien entendu les questions de recherche qu'on est amené à se poser le sont également.

Référence

Lemeignan, G. & Weil-Barais, A. *Construire des concepts en physique*. Pédagogies pour demain, Hachette, 1993.

L'approche des métaconnaissances en ergonomie cognitive

Janine Rogalski CNRS-Université Paris8

L'ergonomie cognitive s'intéresse aux activités cognitives dans les situations professionnelles. Les buts sont : la connaissance de processus cognitifs dans ces activités complexes et institutionnelles; la recherche des éléments de fiabilité et d'infirmité dans l'activité (humaine) de travail; la conception d'aides à l'opérateur, de systèmes d'organisation, de dispositifs de formation professionnelle. Les points communs avec la didactique des disciplines scientifiques sont le rôle des contenus de savoir et de pratique et la place cruciale des processus institutionnels. Les différences sont la centration en ergonomie sur la tâche à accomplir, et non les connaissances à acquérir -centration en didactique -même si dans les deux cas "savoir" et "pouvoir" sont en forte interaction.

Les objectifs visés de compréhension de l'expertise professionnelle, de définition de la compétence, d'amélioration de la fiabilité, de l'efficacité du travail collectif, de maîtrise des processus de formation a conduit à des questions qui se situent "au-delà" de la tâche proprement dite, objet actuel de l'étude et des observations. Ces questions peuvent être étiquetées comme "méta" dans la mesure où il y a un changement dans l'objet de connaissance visé. Toutefois, à l'exception des travaux de Valot sur les métaconnaissances, le terme "méta" n'est qu'épisodiquement présent. Les autres termes explicités pour des "objets" semblables sont -dans le texte- "trust", "awareness" and "reflexivity", "subjective assessment", "self-knowledge".

Ces termes réfèrent essentiellement à la connaissance sur sa propre connaissance : évaluation de son savoir et son savoir-faire (anticipation) ou de son activité (réflexion sur). "Je sais ce que je peux faire, sais faire, sais", "je sais comment je fais, je sais, j'apprends..". Ces métaconnaissances jouent un rôle fonctionnel dans la régulation de sa propre activité et la gestion des ressources et contraintes internes -en particulier sous contrainte temporelle externe.

C'est l'existence de telles métaconnaissances (sur soi) qui explique des différences dans les choix de stratégie d'accomplissement d'une mission par des pilotes militaires (cf Valot et al.). Dans le domaine médical, Boreham souligne que les médecins font plus aisément un diagnostic selon les maladies (disease) qu'ils savent traiter. Il conclut que "cela suggère une autre dimension de l'expertise dans le diagnostic médical : à côté de la connaissance des entités de dysfonctionnement et de la connaissance des patients, le médecin a besoin d'auto-connaissance (self-knowledge)".

Dans l'analyse de l'expertise on relève : la place de la conscience des similarités et différences entre situations, avec une place donnée aux méthodes de traitement de

situations, aux limites de ces méthodes et aux raisons des choix (identification des invariants et de la variabilité des situations à traiter); l'évaluation du domaine de validité de la connaissance (les modèles de fonctionnement d'un processus physico-chimique, les modèles d'évolution d'un feu, les savoirs médicaux,...). On relève aussi les compétences à décrire, expliquer et justifier son activité, et ainsi par exemple à jouer un rôle de tutorat pour des professionnels débutants.

On relève également des connaissances d'ordre général sur les connaissances et la compétences : ainsi des mécaniciens avion ou hélico experts (nombre de machines sur lesquelles ils sont qualifiés) explicitent que "quand on connaît le principe de fonctionnement d'un type de moteur, il est facile de voir comment tel ou tel moteur particulier fonctionne". Un type voisin de "méta" est le changement de niveau dans le traitement : au-delà de l'activité en jeu pour traiter la tâche actuelle (niveau fonctionnel actuel des connaissances, ou niveau tactique), une activité "méta-fonctionnelle" porte sur les tâches potentielles ultérieures (niveau stratégique) (par exemple utilisation et développement dans l'action d'un outil cognitif opératif).

Deux difficultés apparaissent pour l'étude du "méta" :

- il s'agit de notions intrinsèquement relatives (la métaconnaissance est relative à une K)
- il s'agit de notions dynamiques (la métaK devient une connaissance).

Par exemple, la prise de conscience de <quelque chose> dans sa propre activité est une avancée de nature "métacognitive" lorsqu'elle se produit, mais la conscience de ce <quelque chose> doit ensuite s'effacer pour permettre l'efficacité opérationnelle, devenant alors un automatisme à contrôle interne. Ce processus est crucial pour ne pas entrer dans une boucle infinie de contrôle du contrôle (et de récursivité sans fin du méta).

Traiter les problèmes de "méta" (pour les identifier ou pour s'en servir à buts d'évaluation, d'aide ou de formation) implique de gérer des relations entre "actuel" et "potentiel", et à rechercher des invariants (nécessaires pour définir des différences pertinentes) -entre individus, entre situations ou entre domaines de tâches- de haut niveau, concernant des "relations entre relations".

- Valot C. (1990) Les métaconnaissances de l'opérateur sur ses propres compétences ou quels problèmes saurais-je résoudre? ERGO'IA 90, 304-315.
- Valot C., Amalberti R. (1992) Metaknowledge for time and reliability : luxury or necessity? Reliability Engineering and System Safety, 36, 199-206.
- Valot C., Grau J.-Y., Amalberti R. (1993) Les métaconnaissances : des représentations de ses propres compétences. In : A. Weill-Fassina, P. Rabardel, D. Dubois (Eds) Les représentations pour l'action. Toulouse : Octarès.

TITRE :

Prise en compte du méta en didactique des Mathématiques

AUTEUR (S) :

Robert Aline - Robinet Jacqueline

RESUME :

Après une revue bibliographique conséquente, les auteurs réfléchissent à la prise en compte en didactique des mathématiques d'éléments de réflexion ou de commentaires sur les mathématiques (méta). Elles en proposent une définition (relative aux niveaux de scolarité considérés) et des pistes de recherche. Elles suggèrent que ce niveau peut être intéressant pour les analyses du didacticien, dans la mesure où la présence de "méta" et sa qualité pourraient être des variables des apprentissages des élèves. De nombreuses annexes (extraits et résumés d'ouvrages notamment) enrichissent le dossier.

MOTS CLES :

méthodes – réflexion – réflexivité - prise de conscience - métaconnaissances

Editeur : IREM

Université PARIS 7-Denis Diderot

**Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE**

Case 7018 - 2 Place Jussieu

75251 PARIS Cedex 05

Dépôt légal : 1993

ISBN : 2-86612-115-5