

L'INGENIERIE DIDACTIQUE

Un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports
entre l'enseignement et l'apprentissage

Par Régine DOUADY

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE - PARIS VII

L'INGENIERIE DIDACTIQUE

un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports
entre l'enseignement et l'apprentissage

Régine DOUADY

Ce document constitue une partie d'un cahier
qui comportera d'autres problèmes commentés.

L'INGENIERIE DIDACTIQUE

un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports
entre l'enseignement et l'apprentissage

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au rapport entre ce que le maître se propose d'enseigner en mathématiques et ce que les élèves auxquels il s'adresse en classe sont susceptibles d'apprendre effectivement. Les mots *enseigner*, *apprendre*, *savoir* peuvent recouvrir différents sens. Nous préciserons le sens que nous leur donnons.

Dans ce contexte, le terme d'*ingénierie didactique* désigne un ensemble de séquences de classe conçues, organisées et articulées dans le temps de façon cohérente par un *maître-ingénieur* pour réaliser un projet d'apprentissage pour une certaine population d'élèves. Au cours des échanges entre le maître et les élèves, le projet évolue sous les réactions des élèves et en fonction des choix et décisions du maître. Ainsi, l'ingénierie didactique est à la fois un produit - résultat d'une analyse a priori - et un processus - résultat d'une adaptation à la mise en oeuvre du produit dans des conditions dynamiques de classe. Nous nous intéressons aux différents facteurs qui président à l'élaboration d'une ingénierie didactique, et à leur interdépendance, chacun de ces facteurs étant soumis à des contraintes souvent contradictoires.

L'ingénierie didactique désigne aussi une méthodologie de la recherche particulièrement intéressante pour prendre en compte la complexité de la classe. Cette méthode est très développée dans les recherches françaises. Nous renvoyons le lecteur intéressé à R.Douady (1987a), M.Artigue (1989).

Dans le présent chapitre, il ne s'agit pas de faire le compte rendu d'une recherche, il s'agit sur des exemples de faire des propositions d'enseignement correspondant à des choix didactiques analysés, argumentés, justifiés à partir de recherches. Nous verrons comment bâtir une ingénierie satisfaisant autant que possible à des conditions exprimées au préalable et comment faire des prévisions. Nous envisageons aussi comment le processus peut évoluer : soit se réguler quand les marges de manoeuvre sont suffisantes et produire les effets attendus chez un nombre assez grand d'élèves de la classe, soit changer de nature lorsque les contraintes du contrat didactique entravent la réalisation prévue.

Ce faisant, nous nous interrogeons sur les contraintes qui pèsent sur l'enseignant, sur les choix possibles et les décisions qu'il

peut prendre pour atteindre un équilibre entre la prise en charge des contraintes et la réalisation de ses aspirations propres.

Tout ce travail de construction, d'analyse et de prévision repose sur un questionnement didactique. Nous dégagerons les concepts didactiques que nous utilisons. Nous espérons pouvoir les mettre à disposition d'autres enseignants pour construire et gérer en classe d'autres ingénieries. Nous espérons ainsi que les exemples proposés ne seront pas perçus comme des modèles d'enseignement mais plutôt comme des supports pour comprendre le sens et la fonctionnalité des outils didactiques proposés. Ainsi compris, ils devraient apporter une aide aux enseignants pour mieux repérer et gérer leurs marges de manoeuvre, pour mieux s'adapter à la variabilité du public et de l'environnement didactique.

Un point important va nous occuper. Il s'agit des rapports entre la *construction du sens* et la *capitalisation du savoir* du côté des élèves, de leur importance pour le maître et du rôle qu'il entend leur faire jouer à travers les réalisations didactiques que les élèves vont vivre sous sa conduite.

Toutefois, en amont des analyses et propositions annoncées se pose une question cruciale, d'ordre sociologique mais qui conditionne le sens des actions didactiques envisageables :

Quelle est la place du savoir à l'école pour l'enseignant, pour les élèves ? Est-il un enjeu de la relation didactique ?

Dans la vie réelle, nous savons que la réponse à ces questions est complexe et ne peut s'exprimer en "tout ou rien" ou en "oui, non". Toutefois, dans ce qui suit, nous avons choisi de repérer et présenter les différents cas selon la tendance principale.

Dans la première partie, nous envisageons les effets sur les choix et décisions des enseignants suivant que le savoir mathématique est ou n'est pas le principal enjeu de la relation didactique. Dans la deuxième partie, nous donnons des exemples d'ingénierie didactique. En conclusion, nous regroupons des éléments essentiels de la progression du savoir chez les élèves.

I. LE SAVOIR MATHEMATIQUE DANS LA RELATION DIDACTIQUE.

I.1 Qu'est ce que savoir des mathématiques? Qu'est ce qu'apprendre?

Lorsqu'un maître et des élèves se retrouvent dans une classe, la règle veut que le maître soit là pour enseigner un certain savoir et les élèves pour apprendre ce même savoir.

Nous précisons ci-dessous le sens que nous donnons aux mots "savoir, enseigner, apprendre".

Savoir des mathématiques revêt un double aspect. C'est d'une part avoir la disponibilité fonctionnelle de certaines notions et théorèmes mathématiques pour résoudre des problèmes, interpréter de nouvelles questions... Dans un tel fonctionnement scientifique, les notions et théorèmes mathématiques ont statut d'outil. Les outils sont inscrits dans un *contexte*, sous le contrôle de *quelqu'un* (ou d'un groupe) à un *moment donné*. Les situations où les problèmes dans lesquels évoluent des notions mathématiques sont générateurs de *sens* pour ces notions.

Savoir des mathématiques, c'est aussi identifier des notions et des théorèmes comme éléments d'un corpus scientifiquement et socialement reconnu. C'est aussi formuler des définitions, énoncer des théorèmes du corpus et les démontrer. Nous disons alors que les notions et théorèmes mathématiques concernés ont statut d'objet. Ils sont *décontextualisés*, *dépersonnalisés* (même s'ils sont désignés par un nom propre) *et a-temporels*.

Le travail de décontextualisation et dépersonnalisation participe à la **capitalisation du savoir**. *Le travail de recontextualisation et le traitement des problèmes qui en découlent permettent d'en élargir le sens*. Ceci n'empêche pas de capitaliser des pratiques ou des connaissances particulières, voire provisoires.

Les notions, tout comme les théorèmes, peuvent être travaillés, modifiés selon les situations où ils sont sollicités et déboucher sur de nouvelles notions, à leur tour matière à travail, interprétation, modification, généralisation.... Pour les théorèmes, on peut explorer le domaine de validité : imaginer des variantes, les démontrer, ou au contraire construire des contre-exemples pour s'assurer que cela n'est pas possible...

Ce travail mathématique peut se faire sur les outils dans le cadre d'un problème, comme sur les objets pour en élargir la portée sans finalité précise ou par souci esthétique.

Enseigner, pour un maître, c'est créer les conditions qui produiront à terme du savoir chez ses élèves.

Apprendre, pour un élève, c'est s'impliquer dans une activité intellectuelle dont la conséquence est à terme la disponibilité d'un savoir avec son double statut outil et objet. Pour qu'il y ait enseignement et apprentissage, il faut donc que le savoir soit un objet important, voire essentiel d'échange entre le maître et ses élèves, que le savoir soit un enjeu important de l'école.

La réalité peut effectivement être celle-là, et le travail du maître est alors de choisir des mises en scène du savoir acceptables pour les élèves et efficaces par rapport à l'objectif d'apprentissage. Diverses modalités sont possibles. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

Mais la réalité peut aussi être tout autre. Le savoir peut être un enjeu pour le maître, mais ne pas l'être du tout, pour un certain

nombre d'élèves. Alors deux éléments vont influencer les décisions du maître et en tout cas, moduler ses attentes :

- 1) Que représente pour de tels élèves le fait d'aller à l'école, qu'est ce qu'ils attendent de l'école ? Qu'est ce qu'apprendre?
- 2) Quelle est la proportion d'élèves de la classe pour laquelle le savoir n'est pas un enjeu de l'école ?

Dans une même classe, il se peut que certains viennent à l'école pour acquérir des connaissances alors que d'autres cherchent à *passer de classe en classe, aller le plus loin possible* pour avoir un bon métier. Ils viennent en classe pour apprendre à vivre, à se socialiser, à se débrouiller dans la vie. Peu importe qu'on y fasse des mathématiques ou quoi que ce soit d'autre. La discipline est le support de la communication avec le professeur pour répondre à sa demande, et d'ailleurs aux moindres frais (B.Charlot et E.Bautier 1993)

Toutefois quelles que soient les intentions en arrivant à l'école chaque élève va plus ou moins réussir ou échouer dans son projet. Par ailleurs, selon l'histoire personnelle de l'enseignant, sa propre représentation et sa propre connaissance des mathématiques, sa conception de l'apprentissage des mathématiques, sa volonté de convaincre et la force des contraintes auxquelles il est soumis, il tentera de défendre et faire valoir ses convictions ou au contraire, il essaiera seulement de survivre. Et parfois ce ne sera déjà pas si mal!

Ainsi, s'offrent à l'enseignant deux possibilités dont il pourra user effectivement ou qu'il pourra moduler, selon les circonstances :

- soit il maintient son exigence sur le savoir comme enjeu de sa relation avec les élèves

- soit il y renonce. C'est la situation que nous envisageons dans le paragraphe qui suit.

I.2 Le savoir mathématique n'est enjeu ni pour le maître, ni pour les élèves

Dans ce cas, pour que le maître puisse faire son métier de maître et pour que les élèves fassent leur métier d'élèves, la classe est contrainte de vivre une fiction didactique : le maître "enseignera" quelque chose et les élèves "apprendront" quelque chose. Ceux-ci seront évalués et auront des notes acceptables dans leur ensemble.

Mais où sont les mathématiques? Que peut faire le maître?

Une réponse usuelle est la suivante : proposer aux élèves d'exécuter des tâches, tâches qui seront parcellisées en sous tâches plus élémentaires algorithmisées selon les besoins des élèves, jusqu'à ce qu'un pourcentage acceptable d'élèves de la classe ait répondu de façon assez satisfaisante.

La conséquence d'un tel choix est que le sens de l'activité mathématique est sacrifié. Les élèves ne disposent d'aucun moyen de contrôler leur production autre que de refaire le travail dans les mêmes termes. On connaît le peu de fiabilité d'un tel contrôle. D'ailleurs la question de la légitimité même du contrôle se pose. Corriger, c'est le travail du maître. L'aspect magique prend le pas sur l'aspect rationnel. La mémoire est de plus en plus sollicitée mais avec peu de possibilité de la structurer. Le recours aux exercices répétitifs est incontournable. Les élèves comprennent de moins en moins pourquoi on les oblige à faire des mathématiques. Dans ces conditions, il faudra sans doute parcelliser et algorithmiser de plus en plus. Mais le maître pourra faire avancer ses leçons. A condition de bien choisir les épreuves d'évaluation - de petites questions conformes aux habitudes - assez d'élèves pourront passer dans la classe supérieure. Pour le maître et les élèves, la survie est assurée.

Reste le sort des élèves qui refusent ce jeu ou le sort de ceux qui sont en échec malgré leur bonne volonté.

I.3 Le savoir mathématique est un enjeu pour le maître mais non pour les élèves

Là encore, deux éventualités se présentent du moins au début de l'année scolaire :

- le maître accepte d'entrer dans la logique des élèves au moins provisoirement et s'attache progressivement à faire évoluer le contrat.

- le maître engage tout de suite le conflit avec les élèves.

Il s'agit pour le maître d'obtenir une modification du rapport aux mathématiques d'une majorité d'élèves de la classe. Alors, ce peut être un très grand défi pour le maître qui va se trouver engagé, à travers les mathématiques, dans un processus de modification du rapport à l'école, de la relation maître-élève et des relations entre élèves.

En effet, une modification du rapport aux mathématiques nécessite pour ces élèves, une prise de sens des contenus de cette discipline. Cela demande de pouvoir entrer dans une activité intellectuelle et d'être convaincu que cela en vaut la peine. Cela veut dire que le maître met ses élèves en situation d'avoir à faire des choix, à en tester les effets, les contrôler, éventuellement revenir sur les premiers choix et en faire d'autres... Le maître doit alors s'assurer que ses élèves disposent d'un minimum de moyens pour ce faire. Cela veut dire au niveau du contrat, que les élèves acceptent de s'engager dans un rôle d'acteur et ne se réfugient pas dans l'unique rôle d'exécutant. C'est dans ce contexte d'apprentissage que le *jeu de la dévolution* (G.Brousseau1990) est

incontournable pour le maître. Pour G.Brousseau, *"La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert"* Nous citons un exemple d'une telle situation sous forme d'une brève chronique dans la deuxième partie.

Nous reviendrons plus loin sur des conditions favorables à la réalisation d'un tel contrat. Disons pour l'instant qu'il s'agit là d'une situation difficile à gérer et à faire avancer avec des élèves refusant le jeu mathématique.

Alors le maître peut tenter de jouer sur la dimension affective. Cela marchera peut être un moment, voire une année, mais il n'y a pas la stabilité suffisante pour assurer la construction d'une masse critique de connaissances propre à enclencher un nouveau rapport aux mathématiques.

La tentation est grande pour le maître de renoncer au savoir et de se rabattre sur un apprentissage de techniques et algorithmes plus ou moins bien mémorisés mais qui éloigne d'autant les élèves de ce qui pourrait faire sens pour eux.

I.4 Le savoir mathématique est un enjeu et pour le maître et pour les élèves

C'est la situation favorable du point de vue des mathématiques. Toutefois, la construction du sens n'implique pas nécessairement la capitalisation du savoir. Sous certaines conditions, elle en favorise la structuration, condition de sa mémorisation. C'est tout le travail qui doit être conçu à cet effet.

La théorie des champs conceptuels (G.Vergnaud 1991), la théorie des situations (G.Brousseau 1987, 1990), la dialectique outil-objet, les jeux de cadres et fenêtres conceptuelles (R.Douady 1987, 1991, 1992), les représentations métacognitives (A.Robert et J.Robinet 1989, ...) sont des outils pour comprendre et/ou organiser le rapport au savoir mathématique des différents acteurs du système didactique et aider les élèves dans leur effort pour conceptualiser le réel.

Certes de nombreuses questions didactiques restent ouvertes et les problèmes d'adéquation entre ce qui est enseigné d'une part et ce qui est effectivement appris d'autre part sont loin d'être réglés. Cela conduit à envisager les études réalisées et les résultats obtenus à la fois avec modestie et optimisme.

Dans la partie qui suit, nous relatons d'abord une chronique significative de la modification du rapport aux mathématiques d'une classe d'élèves de 10-11 ans. Puis nous proposons deux exemples d'ingénierie didactique. L'une est centrée sur le calcul algébrique. L'enjeu principal est le sens de certaines écritures

algébriques. Il s'agit d'une micro-ingénierie articulée autour d'un problème où plusieurs notions relevant de cadres différents interagissent. Il est prévu qu'elle dure trois séances d'une heure et demie chacune. L'autre est centrée sur les jeux de cadres comme moteur de la progression didactique. C'est une partie d'une longue ingénierie. Sa présentation comporte deux parties.

La première ingénierie et la première partie de la deuxième ont été réalisées dans diverses classes. Leur construction et leurs réalisations, les analyses préalables et les analyses a posteriori ont été des objets d'étude en situation de formation d'enseignants et formation de formateurs. C'est ainsi qu'on trouvera dans la suite des éléments d'analyse a priori et de temps en temps des références à des réalisations. La deuxième partie de la deuxième ingénierie correspond à un projet.

II DES EXEMPLES D'INGENIERIE DIDACTIQUE

II.1 Calcul mental au CM2

(élèves de 10-11 ans, 5e année d'école primaire)

Chronique

Les circonstances

L'histoire se passe dans une école toute neuve de banlieue, dans un groupe de grands immeubles tout neufs à vocation sociale, habités en priorité par de grandes familles en situation sociale et économique difficile.

Le maître est nouvellement nommé dans cette école. Mais c'est un maître expérimenté et un membre de notre équipe de recherche en didactique des mathématiques à l'école élémentaire depuis plusieurs années.

Il prend contact avec sa nouvelle classe en septembre et s'adresse à ses 24 élèves selon ses habitudes. Il s'aperçoit très vite que 11 des 24 élèves ne peuvent pas lire un texte relativement simple : ils n'ont pas compris le principe de l'articulation des syllabes. Ils ont autant de difficultés à écrire. Dans ces conditions, comment faire des mathématiques ?

Un bon point de départ possible : le calcul mental. Il s'agit d'une activité mathématique essentiellement pensée, dont les séances sont, en général, courtes et périodiques (tous les jours environ 10 minutes). En fait, c'est un véritable processus qui évolue dans le temps. Son expression est principalement orale avec une toute petite place pour l'écrit, écrit auquel on pourrait renoncer au début du processus dans des cas particuliers. C'est par ailleurs une

très bonne voie d'accès vers l'écrit comme nous le verrons plus loin. Le maître en a une bonne expérience comme méthode pour contribuer à la conceptualisation des nombres et de leurs propriétés opératoires. C'est une voie qui nous semble tout à fait adaptée aux difficultés de la classe, porteuse d'espoir pour l'expérience que nous en avons

La méthode

- Le maître propose oralement une opération à faire.
- Les élèves écoutent et mémorisent la question. Ils effectuent mentalement l'opération.
- A un signal du maître, ils écrivent la réponse sur leur ardoise, puis la lèvent pour que le maître puisse lire les réponses de tous. Certaines sont justes, d'autres fausses. C'est la situation standard (Gotlib 1978). (Cf. annexe).
- Le maître interroge, à tour de rôle, plusieurs élèves (aussi bien parmi les réponses justes que parmi les fausses) sur leur procédé de calcul.
- Chacun doit être en mesure de décrire sa suite de calculs. Le cas échéant, l'élève interrogé peut repérer une erreur et la corriger oralement à condition d'expliquer ce qui n'allait pas et pourquoi. Les autres élèves écoutent, prêts à intervenir en cas de contestation.
- Le maître appelle alors les élèves qui auraient calculer autrement à se manifester (ils lèvent le doigt) et à exprimer leur méthode.
- Les élèves, de façon collective, au cours d'échanges verbaux (entre élèves) régulés par le maître, comparent les méthodes, leurs avantages, inconvénients, la rapidité, les possibilités de contrôle.

Au cours de ce travail, beaucoup de propriétés des nombres et des opérations, des propriétés de l'ordre et de la compatibilité avec les opérations sont à l'oeuvre, explicitement dans les usages mais sans dénomination théorique. Ces propriétés interviennent avec leur statut d'outil pour guider les calculs, faire des choix, justifier les réponses ou repérer des incohérences. Il se développe des pratiques explicites de calcul et de contrôle des résultats. Par exemple,

"je suis sûr que son résultat est faux parce que 12×11 c'est plus grand que 12×10 , et il trouve moins de 120"

Par ailleurs, l'attention et l'écoute mutuelle sont sollicitées et développées ainsi que la mémoire, de manière intense mais pendant une durée qui, en général, ne dépasse pas 10 minutes ou 1/4 d'heure.

La réalisation

En fait, ce beau programme s'est trouvé en défaut dès la première étape. Pour un grand nombre d'élèves, il ne faisait pas partie de leur contrat qu'ils devaient écouter le maître lorsque celui-ci s'adressait à eux. Le seul rapport au maître qu'ils concevaient à ce moment là était un rapport d'autorité. Le maître avait alors le choix entre accepter leur logique et enclencher une relation d'autorité ou tenter de les convaincre avec des mots, qu'il valait mieux pour eux changer de logique.

Ce dernier choix était, pour beaucoup de raisons que nous n'exposerons pas ici, voué à l'échec. Finalement, les décisions du maître relèveront du premier choix. Comme on voit, ce n'est plus un choix, mais la seule voie possible de communication avec la majorité des élèves.

Les objectifs premiers du maître sont les suivants :

- *écoute et respect* dans la relation entre le maître et les élèves ou dans les relations entre élèves : quand le maître s'adresse aux élèves ou qu'un élève s'adresse aux autres élèves, ceux qui ne parlent pas écoutent et essaient de comprendre ce que dit celui ou celle qui parle.

- *le contenu des échanges* est essentiellement mathématique.

Ici , le thème étant le calcul mental, il s'agit de travailler avec des nombres et des opérations.

Les connaissances supposées des élèves, et qui dans un premier temps vont suffire au maître, sont des *noms* de nombres et les noms des opérations.

Première consigne ou l'autorité du maître :

M (le maître) : *Je vais vous proposer des opérations et je vais demander à certains d'entre vous de répéter ce que j'ai dit. Je ne vous demande pas de calculer ou de trouver un résultat, mais seulement de répéter exactement.*

Tout élève peut répondre à la demande du maître, sauf s'il refuse le jeu de l'école. Et d'ailleurs brouhaha et protestations parmi certains élèves.

Le maître persiste et signe.

M : 14 multiplié par 4 Pierre, 5 multiplié par 22 Paul, 40 divisé par 8
Marie...

Des demandes analogues vont se renouveler pendant quelques jours en complexifiant à chaque fois un peu plus les énoncés.

Les variables de situation à disposition du maître sont ici pour les mathématiques

- le champ des nombres sollicités (entre 0 et 100 au début)

- la nature des nombres : entiers ou non entiers
- les opérations : familières, moins familières
- la complexité de l'énoncé (une opération, plusieurs opérations).
- * pour la gestion de la classe
- le nombre d'élèves interrogés
- la durée de l'activité chaque jour
- le nombre de séances

Deuxième consigne et changement de contrat

M : *Je vais vous proposer des opérations et je vais demander à certains d'entre vous de les répéter autrement. Par exemple, pour 15×3 vous pouvez proposer $5 \times 3 \times 3$ ou $(10+5) \times 3$ ou tout autre expression qui aurait le même résultat si on faisait le calcul mais on ne fait pas le calcul. On ne répète pas deux fois la même expression.*

- *Celui qui est interrogé a le droit de se faire aider par un autre élève s'il n'a pas d'idée.*
- *Les autres doivent bien écouter pour dire si on peut accepter l'expression proposée ou non et pourquoi.*

Nouvelle variable à disposition du maître :
suggérer ou non aux élèves d'écrire leurs propositions.

Ainsi, après quelques séances sous le complet contrôle du maître, ceux qui ont des connaissances numériques ont l'occasion de les exprimer dans un contexte relativement peu contraignant, mais tout de même délimité. Ils ont assez de choix à l'intérieur d'un cadre établi et somme toute sécurisant. Par ailleurs, ils doivent répondre à une demande du maître, ils ne risquent pas d'être pris pour des "petits prof" et rejetés par les copains moins armés mathématiquement.

Plusieurs séances, pendant deux ou trois semaines, seront consacrées à cette consigne.

Troisième consigne et prise de responsabilité du côté des élèves : vers un nouvel objet d'étude

M : *Je vais encore vous proposer des opérations et je vais vous demander de les répéter autrement mais chacun a le droit de proposer sa réponse. La seule condition est qu'elle n'ait pas déjà été dite. J'en veux une nouvelle à chaque fois.*

Le maître veut orienter le travail des élèves, d'une part vers l'écrit, d'autre part vers l'étude explicite des propriétés des nombres et des opérations. Pour cela, il compte sur une évolution du jeu de l'oral vers l'écrit et sur une interaction entre les deux modes. Il lui faut donc organiser cette évolution. L'analyse qui suit explique ses décisions.

L'expression orale est suffisante tant que l'information que les élèves doivent recueillir et traiter ne dépasse pas leur capacité de mémoire. Pour que l'expression écrite soit nécessaire, il faut que l'expression orale soit mise en défaut, donc les capacités de mémoire largement dépassées. Il y a au moins deux raisons à cela : couvrir la diversité des élèves et rendre inopérant un effort de mémoire. Ainsi, pour obtenir l'évolution souhaitée, le maître joue sur la valeur de la variable "nombre d'élèves interrogés". Il va lui faire subir un *saut* en changeant la règle du jeu : chacun a le droit de proposer sa réponse.

Le maître compte sur la familiarité développée dans cette pratique du calcul mental pour obtenir *beaucoup* de propositions.

Pour que les élèves soient effectivement en mesure de répondre à l'attente du maître, ils ont besoin de savoir écrire des expressions numériques variées, portant sur un champ de nombres "raisonnable", incluant signes opératoires et parenthèses. C'est l'objet d'une autre partie de l'apprentissage qui s'est enclenchée et développée progressivement, parallèlement et en référence au travail oral à partir de la deuxième consigne et aussi à un travail sur la lecture et l'écriture hors mathématique.

Du côté des élèves, la réaction attendue se produit au bout de deux ou trois séances : "on ne peut plus tout se rappeler, il faut écrire". "il faut se mettre d'accord sur les propositions qui sont pareilles et sur celles qui sont nouvelles".

Les propriétés opératoires sont ici *outils implicites* de classement, exprimées en terme d'action, dans un certain contexte. L'*explicitation* orale demandée à chaque élève dans des conditions d'"écoute active" de la part des autres a pour but de favoriser la *dépersonnalisation* des procédures et d'avancer dans la conceptualisation des propriétés sous-jacentes.

Quatrième consigne et changement de problématique

M : *Trouver des règles pour trier les propositions entre celles qui se ressemblent et celles qui sont différentes.*

Du point de vue mathématique, les objets d'études se situent toujours dans le cadre numérique. Toutefois ce ne sont plus directement les nombres et les rapports entre nombres et opérations qui sont à l'étude mais les propriétés des opérations.

Bilan

La *dévolution* du calcul mental tel qu'il était conçu par le maître et les interactions oral/écrit ont bien pris deux mois à se mettre en place à raison de 10 à 30 minutes selon les jours, cinq jours par semaine. Cette pratique s'est déroulée et enrichie dans ses

modalités avec l'évolution des connaissances des élèves, tout au long de l'année. Des problèmes qu'il était inconcevable d'envisager d'aborder ont pu être étudiés : problèmes de géométrie et de mesures en coordination avec l'introduction des nombres décimaux par exemple.

En ce qui concerne les objectifs du maître, on peut dire que plusieurs facteurs se sont conjugués pour faire évoluer les relations sociales au sein de la classe d'une part, les relations au savoir d'autre part. Parmi ces facteurs, l'activité de calcul mental, telle qu'elle a été vécue, a joué un rôle clé. Signalons un autre facteur qui a joué un rôle très important, c'est la prise en charge de la classe par deux enseignants en forte coordination, notamment dans le travail de symbolisation : un maître pour les disciplines scientifiques et une maîtresse ayant une formation psychologique et une expérience des élèves qui connaissent des difficultés en lecture pour les autres champs disciplinaires (pour respecter les règles institutionnelles, ces deux enseignants ont pris deux classes en responsabilité, avec la même répartition des tâches).

Calcul mental et résolution de problèmes

A propos des perspectives qu'offrent le calcul mental, une question plus large se pose : celle du réinvestissement dans l'étude d'un problème, des compétences numériques issues du calcul mental. Nous avons observé, dans le cadre de nos recherches, que la pratique régulière de calcul mental tel qu'il a été décrit, entraînait pour la quasi totalité des élèves une grande rapidité de calcul. De plus la facilité de certains élèves à calculer mentalement et rapidement intervenait à plusieurs occasions lorsqu'ils étaient confrontés à un problème :

- au début de l'étude, pour recueillir assez d'information pour se faire une idée de la situation à traiter. Donnons un exemple.

étant donné un rectangle, chercher un autre rectangle de périmètre plus grand et d'aire plus petite.

Pour répondre à cette question, nous avons observé une première méthode à l'oeuvre. Elle consistait à choisir plusieurs rectangles de périmètre plus grand et à calculer l'aire, ou plusieurs rectangles d'aire plus petite et à calculer le périmètre, avant de pouvoir envisager les variations conjointes. La possibilité de faire de nombreux calculs mentalement et rapidement était un atout dans cette étude.

- en cours d'étude pour éviter de poser les opérations simples et aller plus vite, par exemple les multiplications ou division par 2, ou encore pour optimiser les choix numériques dans des situations d'encadrement.

- à la fin pour contrôler les résultats d'un algorithme. Par exemple, résoudre une équation en appliquant un algorithme, puis tester la validité du résultat en le substituant dans l'équation.

Une question se pose : la calculatrice peut-elle se substituer au calcul mental . Sinon, qu'est ce qui est spécifique de chacun des modes de calcul : mental, écrit, calculatrice et comment peuvent-ils se conjuguer dans un travail où le numérique est important?

II.2 Calcul algébrique

à l'articulation Collège/lycée (élèves de 14-15 ans)

Un état des lieux

- Si l'on se réfère au programme, le calcul littéral, c'est à dire, le calcul sur des expressions comportant des lettres et des nombres est introduit en France timidement dès la 5ème (deuxième année du collège, élèves de 12 ans). L'apprentissage de la résolution d'équations du premier degré à une inconnue débute en 4ème (troisième année du collège, 13ans). L'introduction d'*identités remarquables*, la pratique des *développements* et des *factorisations* se fait progressivement en 4ème, 3ème et Seconde (troisième, quatrième année de collège et première année de lycée, élèves de 13-15 ans).

- Du point de vue mathématique, il s'agit de calculer sur des polynômes en une variable numérique écrits sous forme de combinaisons linéaires de monômes à coefficients réels ou de produits de facteurs. Bien sûr, ces termes mathématiques ne font pas partie du discours de la classe, ni du côté enseignant, ni du côté élèves a fortiori.

- En classe, dans la pratique traditionnelle, il s'agit en général d'un travail sur les écritures, coupé des problèmes qui en font l'intérêt et leur donnent du sens. Il est question de calcul littéral et non de calcul algébrique, présenté et traité soit dans le prolongement du calcul numérique ("c'est pareil mais avec des lettres") soit sous forme de règles à appliquer ("il suffit d'apprendre les règles"). Certes, la description est un peu caricaturée. Mais hors d'un certain milieu engagé dans la réflexion didactique et pédagogique, la réalité est à peu près celle décrite.

- Du côté des élèves, les erreurs persistantes et récurrentes, c'est à dire résistantes aux efforts des enseignants pour éviter qu'elles apparaissent ou à défaut pour les corriger, sont nombreuses. Elles sont largement répertoriées tant par les professeurs eux-mêmes que par les très nombreux chercheurs qui se sont penchés sur la question. Citons, à titre d'exemple, l'étude de D.Tall et M.Thomas (1991).

A propos de sens

- Comme beaucoup d'autres, chercheurs, enseignants, formateurs,... nous accordons une grande importance à la construction du sens des notions mathématiques chez les élèves, pour qu'elles soient disponibles lorsqu'ils ont à traiter une situation nouvelle. Autrement dit, le sens est une composante importante des concepts mathématiques, et en particulier des concepts de l'algèbre dans leur aspect outil.

Toutefois, en ce qui concerne l'algèbre au moins, le sens ne suffit pas. Nous avons besoin de prendre en compte l'influence du sens dans l'élaboration d'algorithmes. C'est en terme d'équilibre entre la construction du sens et la familiarité avec des algorithmes qu'il faudra analyser un des registres de l'apprentissage en algèbre. *Question* : En prenant les remarques précédentes comme hypothèse, comment les traduire dans une ingénierie didactique?

Tall et Thomas, dans l'expérience qu'ils rapportent, constatent un heureux effet de l'ordinateur dans le processus d'apprentissage du calcul algébrique à court terme. Quand le travail sur ordinateur est supprimé, ils repèrent encore des effets positifs à moyen terme, effets qui ne sont plus visibles à long terme. Ils soulignent que l'introduction de l'ordinateur permet de développer *a versatile thinking*.

Ce point, très important dans leur analyse, est à rapprocher de ce que permettent les *jeux de cadres* dans notre théorie didactique. Tall et Thomas ont donné une explication des effets observés qui relève sans doute du contrat didactique. Nous pensons qu'on doit aussi considérer les situations mathématiques d'interaction que les élèves ont vécues et leurs caractéristiques relativement aux deux dimensions, sens et algorithme. D'abord une interaction élèves/ordinateur au cours de laquelle les lettres désignent principalement des variables. Ensuite une interaction de deux problématiques de l'algèbre chez chaque élève du groupe-ordinateur lorsque cet élève a réintégré une classe à pédagogie traditionnelle sans ordinateur, axée sur l'apprentissage de règles. C'est ainsi qu'on peut comprendre les résultats aux tests. Les élèves du groupe expérimental semblent avoir une meilleure compréhension des mathématiques que les autres élèves, à court et moyen terme après l'apprentissage utilisant l'ordinateur. Cependant, le temps faisant son oeuvre d'oubli, quand l'une des problématiques a pu s'estomper, les effets bénéfiques de l'interaction se sont eux aussi estompés.

Notre expérience est que même si la classe ne dispose pas d'ordinateur, il est possible de bâtir une ingénierie organisée autour d'un problème dont le fil conducteur est la construction du sens

pour les élèves, de certains éléments du calcul algébrique. C'est ce que nous nous proposons d'exposer à travers un exemple.

Précisons bien des évidences : pour que les élèves disposent en pleine responsabilité d'une compétence algébrique maîtrisée, un problème et même plusieurs problèmes ne suffisent pas. C'est une affaire de longue haleine qui demande une vigilance intellectuelle permanente. Par exemple, les interconnexions entre cadres différents ou les changements de point de vue à l'intérieur d'un cadre réalisés pour avancer dans un problème sont des moyens par lesquels se manifestent la souplesse de pensée. Ils offrent des occasions pour confronter des idées, rechercher des cohérences, contrôler des résultats. Cependant, mettre en oeuvre de telles procédures ne va pas de soi. Cela demande une véritable éducation. Nous reviendrons plus loin sur des conditions favorables à cela.

Une ingénierie à propos d'algèbre

Nous nous plaçons dans le cas où enseignant et élèves sont réunis en classe de mathématiques essentiellement pour faire des mathématiques.

Dans notre exemple, il s'agit d'algèbre. Nous allons d'abord décrire le contexte scolaire concerné puis les objets d'étude visés. Nous proposons ensuite un problème construit pour mettre en oeuvre dans sa résolution les objets d'étude choisis. Nous ferons une analyse mathématique et didactique de l'énoncé où nous exposerons les variables sur lesquelles l'enseignant peut jouer, les choix faits et les raisons de ces choix, et aussi ce que nous attendons des élèves.

Le contexte scolaire

Nous nous intéressons à des élèves entrant au lycée (16ans). De tels élèves ont, dans leur ensemble, déjà eu l'occasion de manipuler des expressions algébriques en général de petits degrés. Ils ont eu à faire des transformations d'écritures selon les règles du calcul littéral : développements (de la forme "produit" en la forme "somme"), et dans des cas limités des factorisations. Ils ont déjà résolu quelques équations du 1er degré à une inconnue. Les équations sont soit formulées directement dans le cadre algébrique, soit issues de mise en équation de petits problèmes de géométrie, mesure, vie quotidienne ou autre. Les élèves utilisent à diverses occasions des calculatrices. Ils ont aussi une certaine expérience du marquage de points sur un plan repéré par deux axes gradués orthogonaux.

Les objets algébriques qui nous intéressent ici sont essentiellement des polynômes en une variable, de petits degrés : de degré 1 dans les résolutions d'équation, de degré 2 ou 3, rarement plus, dans les factorisations ou développements d'expressions algébriques.

Beaucoup d'erreurs d'élèves ont été repérées dans la pratique scolaire du calcul algébrique (résolution d'équation, transformation des produits en sommes ou des sommes en produits), des erreurs récurrentes et persistantes, révélatrices d'obstacles plus profonds. Citons

- faire glisser, selon les "besoins" du calcul, des nombres en position de coefficient vers ceux en position de puissance ou réciproquement, dont l'effet est de regrouper en un seul terme, des termes de degré différent.

- mal gérer les parenthèses.

- changer de signe systématiquement dans le passage d'une expression (éventuellement réduite à un nombre ou une lettre) d'un membre à l'autre d'une équation, même s'il s'agit seulement d'effectuer une multiplication ou une division.

Citons aussi la chute des performances si au lieu de demander de résoudre une équation, on demande si tel nombre est solution de l'équation.

A partir de tels constats, nous posons la question de la pertinence et de la disponibilité de connaissances (parfois chèrement acquises en termes d'effort et de temps pour l'enseignant et pour les élèves), dans des contextes où elles seraient des outils adaptés.

Les objets d'étude

Dans le cadre algébrique, il s'agit de factorisations et de développements de (fonctions-)polynômes. Il s'agit d'étudier les relations entre formes d'écriture et questions à traiter, comme chercher les valeurs d'annulation d'un polynôme, résoudre des équations.

Dans le cadre graphique, il s'agit de représentations graphiques de polynômes et de la mise en évidence de certaines de leurs propriétés.

Objectifs pour le choix du problème

* Coordonner des sujets abordés et traités séparément, et qui du point de vue mathématique entretiennent des relations de signification.

Le point de départ est le suivant : l'écriture est le moyen privilégié de la communication des mathématiques, mais elle est

aussi le moyen de sa progression. Ici, l'écriture factorisée et l'écriture développée facilitent l'accès à des propriétés différentes des polynômes. Le problème doit mettre en relief ce point là. Les élèves auront ainsi les moyens de mettre du sens dans les écritures algébriques et d'avancer dans la compréhension et la connaissance des propriétés qu'elles expriment.

Pour répondre à cette exigence, nous choisissons de faire intervenir, dans le problème, les objets d'étude comme **outils adaptés** pour le résoudre. Cela nous amène à élargir le champ mathématique sur lequel faire porter le problème. En particulier, nous allons faire interagir et non juxtaposer les études se situant dans les cadres algébrique et graphique et implicitement, introduire un point de vue "fonction".

* Donner aux élèves des moyens d'exercer un contrôle d'ordre scientifique sur ce qu'ils font ou disent.

* Créer de nouveaux objets. La résolution doit aboutir à une nouvelle connaissance qui a du sens pour les élèves et que l'enseignant peut institutionnaliser dans la classe.

Les objectifs que nous venons d'exprimer sont centrés sur un point d'algèbre : les factorisations et les développements. En fait, leur mise en oeuvre va amener un élargissement de la situation didactique de façon telle que bien d'autres éléments mathématiques - notions, méthodes - dans des cadres différents, vont être travaillés du point de vue du sens et de la technique.

choix mathématiques et raisons des choix

Pour annuler une expression polynomiale de degré supérieur ou égal à 2, il est en général plus intéressant qu'elle soit formulée en un produit de facteurs du premier degré, puisqu'en annulant l'un quelconque des facteurs on annule le produit. Ainsi, dans le problème, on posera une question extérieure au cadre algébrique, cependant pour y répondre, il faudra annuler une expression polynomiale.

Pour calculer la valeur numérique d'une telle expression, la forme développée est peut-être plus commode.

Pour résoudre une équation du second degré dont une partie est écrite sous forme développée et une autre sous forme factorisée, il faut transformer l'une des formes pour homogénéiser l'écriture : tout sera développé ou tout factorisé. Si la technique de résolution à l'aide du discriminant n'est pas disponible, alors la factorisation est le seul espoir de résoudre l'équation.

Résoudre une équation $A(x) = 0$, par exemple $ax+b = 0$ ou $(ax+b)(cx+d) = 0$ ou $ax^2 + bx + c = 0$, c'est trouver les valeurs de l'inconnue x pour lesquelles l'expression $A(x)$ est égale à 0, c'est aussi trouver les valeurs de la variable x pour lesquelles la

fonction $x \mapsto A(x)$ s'annule. Nous ferons appel, selon le cas explicitement ou implicitement, à ces deux points de vue dans le problème.

En termes graphiques, annuler un polynôme, résoudre une équation se traduit par chercher les points où la représentation graphique de la fonction concernée rencontre l'axe des abscisses.

Nous poserons les questions dans le cadre graphique, mais pour y répondre il faudra travailler dans le cadre algébrique soit à faire des calculs numériques après choix d'une valeur numérique pour x , soit à résoudre des équations, travail pour lequel le choix de l'écriture pourra être déterminant.

Choix de sa présentation

Proposer un énoncé que presque tous les élèves doivent pouvoir attaquer avec leurs connaissances du moment, sans imposer de procédure.

Le problème

Le plan est muni d'un repère constitué de deux axes gradués, orthogonaux.

A) *On s'intéresse aux points du plan dont les coordonnées (x,y) sont liées par la relation : $y = (x + 3)(8 - x/2)$
On note E l'ensemble de ces points.*

1) *Proposer 5 couples de coordonnées correspondant à des points de E et 5 couples de coordonnées correspondant à des points du plan n'appartenant pas à E .*

2) *Représenter graphiquement le plus possible de points de E .*

3) *Y a-t-il des points de E sur l'axe des abscisses ? sur l'axe des ordonnées ?*

Si oui, donner si possible les coordonnées de ces points.

Si non, dire pourquoi

4) *Y a-t-il des points de E qui ont la même abscisse ? la même ordonnée ?*

Si oui, donner des exemples. Si non, dire pourquoi.

B) *On s'intéresse maintenant à l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) sont liées par la relation : $y = x^2 - 9$*

Répondre aux mêmes questions qu'au A)

C) *Y a-t-il des points communs à E et F ?*

Si oui, donner si possible les coordonnées de ces points.

Compétences supposées chez les élèves

1) pour aborder le problème

**dans le cadre graphique,*

- tracer des axes orthogonaux, les graduer,
- placer des points dont on connaît les coordonnées,
- lire les coordonnées de points marqués.
- vocabulaire supposé connu avec sa signification : repère, axes orthogonaux, graduation, coordonnées, abscisse, ordonnée.

**dans le cadre algébrique,*

- substituer des valeurs numériques aux lettres dans les expressions algébriques et calculer leur valeur

**dans le cadre numérique*

- bien calculer avec les entiers naturels.
- calculer de façon plus ou moins maîtrisée avec les entiers relatifs, les décimaux, les fractions.
- Utiliser une calculatrice comme aide au calcul.

2) Compétences algébriques sans doute disponibles et qui selon le cas apporteront une aide ou au contraire agiront en obstacle

- développer des expressions algébriques polynomiales du 1er ou 2ème degré où interviennent des produits de facteurs
- factoriser dans des cas très particuliers
- résoudre une équation du premier degré à une inconnue

Les cadres du problème

Les questions sont posées dans le cadre *graphique* , mais dans les données, les points sont sélectionnés par une relation *algébrique*. Le cadre *numérique* est ambiant.

Les outils (conceptuels)

- les notions sous-jacentes aux compétences supposées comme outils explicites, notamment la mise en facteur.
- le théorème "pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul" comme outil implicite.

Un outil technologique

La calculatrice si possible programmable : elle permet, une fois la méthode de travail décidée (substituer des valeurs numériques aux lettres dans les expressions algébriques et calculer leur valeur) de programmer la calculatrice et d'obtenir les coordonnées d'une grande quantité de points de E puis de F et d'avoir une vue géométrique de ces ensembles.

Les variables du problème

**concernant les relations algébriques*

- le degré : 2 ou 3
- l'expression écrite : factorisée ou développée
- l'ordre des monômes : dans une lecture de gauche à droite, d'abord le terme en x ou d'abord la constante
- les coefficients numériques : entiers, non entiers, positifs, négatifs...
- les valeurs d'annulation

**concernant le graphique*

- le nombre de points à marquer : fini ou infini
- la position des points à sélectionner : n'importe où, sur l'un des axes dans les limites du support matériel du graphique ou hors de ces limites, hors des axes mais avec une condition restrictive

**concernant le numérique : recueil et traitement d'une information numérique pertinente*

- l'usage ou non d'une calculatrice. Si oui, d'une calculatrice simple ou programmable.

Les choix didactiques qui fixent les variables et les attentes de l'enseignant

Dans la partie A), la première attente de l'enseignant est que les élèves donnent du sens à l'expression " x et y sont liés par la relation ...". Pour tester cela, on demande de placer 5 points dont les coordonnées vérifient la relation et 5 points qui ne la vérifient pas. En cas de difficulté, l'enseignant peut engager une discussion dans la classe sur le sens à accorder à cette expression.

* La deuxième attente concerne la connaissance plus ou moins grande des points de E . La calculatrice programmable permet, une fois la méthode de travail décidée (substituer des valeurs numériques aux lettres dans les expressions algébriques et calculer leur valeur) de programmer la calculatrice et d'obtenir les coordonnées d'une grande quantité de points de E , puis ensuite de F . Il est possible alors d'avoir une vue géométrique de ces ensembles. Cela permettra plus tard de concevoir les points communs à E et F comme les points d'intersection de deux courbes.

Le choix de deux paraboles dont la concavité est de sens opposé et les sommets pas trop éloignés l'un de l'autre correspond à une volonté de faciliter chez les élèves la conviction d'existence géométrique des points d'intersection. Il restera à faire un travail technique à l'aide d'outils algébriques, à savoir calculer les

coordonnées de ces points, pour en prouver effectivement l'existence.

Nous venons de décrire ce que nous appelons un *jeu de cadres* entre les cadres algébrique et graphique, en exploitant dans chacun d'eux ce qui est facile et qui, par transfert dans l'autre, permet d'avancer dans le problème. Nous reviendrons plus loin sur cet outil didactique.

* La troisième attente est que les élèves mettent en relation les éléments suivants :

- tel point est sur l'axe des x avec son ordonnée $y=0$

- la question : chercher les valeurs de x qui annulent y avec la question résoudre l'équation $y=0$

et en déduisent un moyen pour trouver les points de E sur l'axe des abscisses. La relation algébrique choisie est écrite sous forme d'un produit de deux facteurs du premier degré pour faciliter la recherche des valeurs de x annulant y . Toutefois, vu la familiarité des élèves avec les expressions développées, on peut penser qu'un certain nombre d'entre eux auront tendance à développer le produit de facteurs. Or ces élèves ne savent pas résoudre les trinômes du second degré. L'expression développée les mène à une impasse, d'où certains arrivent à se tirer par des amalgames audacieux!

Les coefficients sont choisis de façon que

- une des racines soit égale à un entier petit et puisse être trouver après un petit nombre d'essais de valeurs entières pour x .

- l'autre prenne une valeur assez grande pour échapper aux essais et corresponde à un point hors de la feuille support du graphique. Il faut alors explicitement résoudre une équation du premier degré.

* La quatrième attente est que les élèves transforment une méthode : "je choisis une valeur pour x , n'importe laquelle, celle que je veux, je fais mon calcul en suivant la formule, je trouve la valeur de y " en une propriété de la relation : "à chaque valeur de x correspond une valeur de y et une seule". Et par suite en une caractéristique de l'ensemble E : à toute valeur de x correspond un point de E et un seul.

Dans la partie B), la demande est analogue à la précédente mais à partir d'une relation algébrique qui est une identité remarquable "différence de 2 carrés". L'enseignant attend une résolution très rapide de cette partie. Son intérêt est double :

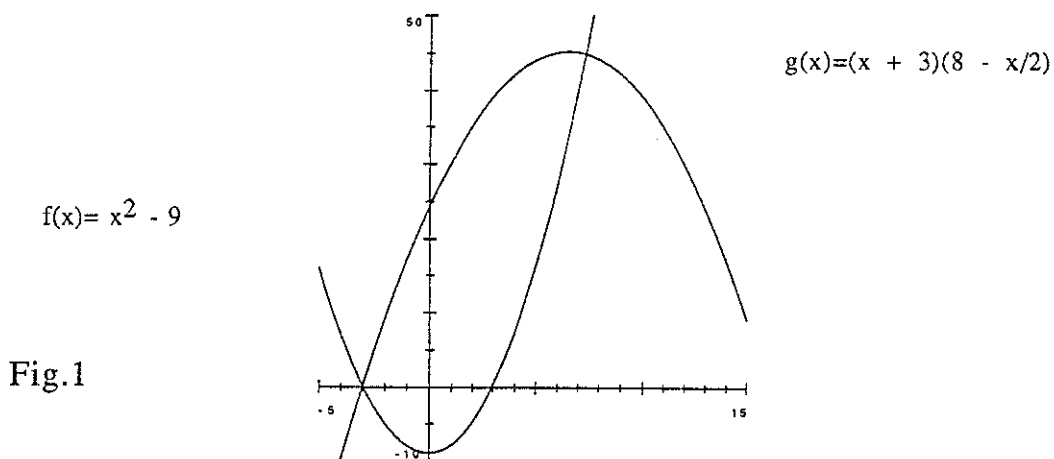
- évaluer les élèves sur ce qu'ils ont appris de la partie A) et en tout cas, leur donner l'occasion de se reposer les mêmes questions et le cas échéant de mieux les comprendre.

- préparer la partie C), véritable enjeu du problème.

Dans la partie C), on demande aux élèves de trouver des points communs aux deux ensembles décrits respectivement en A) et en B).

Graphiquement, un point commun à E et F a des coordonnées (x,y) où y s'exprime différemment en fonction de x suivant qu'on le considère comme point de E ou point de F (notons les y_E et y_F). Le travail précédent doit en principe mener les élèves à la traduction algébrique de la question. Or, algébriquement, il va falloir que le signe " $=$ " prenne une autre signification que celle qu'il a pu prendre au cours de l'étude des parties précédentes. En effet, l'ordonnée y était alors le résultat d'un calcul et le signe " $=$ " voulait dire "a pour résultat". La référence graphique - un point a un unique couple de coordonnées - suggère d'écrire $y_E = y_F$ pour exprimer que l'ordonnée d'un point commun à E et à F peut s'écrire de deux manières, ce qui n'a rien à voir avec le résultat d'un calcul. Par ailleurs, cette égalité n'a lieu que pour les points communs à E et à F. Autrement dit, il y a autant de points communs que de valeurs de x réalisant cette égalité.

Algébriquement, cela se traduit par la résolution d'une équation du second degré comportant des termes en x dans les deux membres. Or il s'agit là d'une difficulté bien repérée par les enseignants et les chercheurs sur le sujet, même si l'équation est du premier degré. Pour faciliter la tâche, nous avons choisi l'un des points sur l'axe des x de sorte qu'il fait partie des points déjà repérés graphiquement, dans les deux ensembles. Il correspond à $x + 3 = 0$. Vu les choix décrits plus haut des positions relatives des paraboles, l'autre point est visible graphiquement.



Pour que la résolution algébrique soit nécessaire, il faut choisir les coordonnées de ce point, donc les coefficients des équations, de façon qu'elles ne puissent pas être trouvées après quelques essais empiriques.

Ainsi, pour résoudre l'équation $x^2 - 9 = (x + 3)(8 - x/2)$ le développement et le regroupement des termes de même degré mènent à l'impasse, du moins si les règles du calcul algébrique sont respectées. L'expression du premier membre sous la forme d'un

produit $(x - 3)(x + 3)$ est incontournable. La factorisation est un outil. La résolution de $x - 3 = 8 - x/2$ est un autre outil. La valeur $x = 22/3$ ne peut pas être trouvée par hasard.

Du côté des élèves

Au cours de ce travail, les élèves peuvent commettre beaucoup d'erreurs. Ils peuvent notamment produire des calculs non valides mathématiquement comme regrouper des termes de degré différent si cela leur permet d'aboutir à une réponse. C'est alors que la référence graphique est intéressante s'il est d'usage dans la classe de chercher des cohérences entre les résultats de deux procédures différentes pour une même question.

En effet, rechercher des cohérences peut demander beaucoup de temps. Si un élève s'engage dans un tel travail et n'aboutit pas à un résultat convaincant et si le travail ainsi fourni n'est pas officiellement reconnu par le professeur, cet élève aura peu envie de recommencer. Pourtant, la prise en charge au moins partielle du contrôle des productions par les élèves eux-mêmes peut être un moteur de la progression des apprentissages. Un tel travail demande des compétences mathématiques. Il demande aussi de s'inscrire dans le contrat didactique.

Revenons au problème. Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, la connaissance graphique de la situation peut agir en *guide*, mais elle peut agir aussi en *contrôle* de la situation algébrique. Un des points communs est déjà connu, il faut le retrouver dans la résolution algébrique. L'autre est accessible en résolvant une équation du premier degré à petits coefficients $x - 3 = 8 - x/2$ pour le calcul de x . Il restera ensuite à calculer la valeur de y correspondante.

Les coordonnées doivent correspondre à des valeurs acceptables graphiquement.

Du côté de l'enseignant

En faisant varier les coefficients des polynômes, l'enseignant peut changer ses objectifs. Si l'objectif est d'abord d'ordre conceptuel, il peut faciliter la tâche technique des élèves tout en préservant la force et la signification des concepts en jeu. Cela se traduira soit en faisant des choix en ce sens dans les données du problème, soit en mettant à portée des technologies (calculatrices, ordinateur) qui aident les élèves à maîtriser les difficultés techniques, soit les deux à la fois comme dans le problème ci-dessus.

Si l'objectif est plutôt de créer des familiarités ou de tester les possibilités de réinvestissement dans des situations plus complexes où ce qui vient d'être appris n'est qu'un élément de la situation, alors l'enjeu peut être technique.

Institutionnalisation locale, attachée au contexte

Après tout le travail de la classe sur le problème, il revient à l'enseignant de sélectionner ce qui a pris sens du côté des élèves, qui est mathématiquement intéressant et réinvestissable et qui fait partie soit directement de ses objets d'enseignement, soit en est un préalable, soit une pratique du champ des objets du programme. En faisant cela l'enseignant organise explicitement le savoir de la classe. S'il est attaché à la classe, nous parlerons d'institutionnalisation locale. S'il est relativement décontextualisé et dépersonnalisé donc susceptible d'être communiqué et compris à l'extérieur sans en connaître l'histoire de sa production, les connaissances en jeu ont plutôt statut d'objet et nous parlons d'institutionnalisation. Pour résumer, nous dirons que l'enseignant va faire cours.

Dans le cas que nous étudions ici, nous avons à faire essentiellement de l'institutionnalisation locale

- du *vocabulaire* : $y = (x + 3)(8 - x/2)$ est appelée équation de E ,
 $y = x^2 - 9$ est l'équation de F . Ces équation sont de degré 2 (en expliquant d'où vient le 2).

- des *mises en relation* entre *graphique* et *algèbre*

* les points de E sur l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(x,0)$. Donc x est solution de $(x + 3)(8 - x/2) = 0$

* les points de F sur l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(x,0)$ où x est solution de $x^2 - 9 = 0$

- une *nouvelle connaissance en algèbre*

* il y a des cas où on sait résoudre des équation du second degré :

quand il n'y a pas de terme en x comme dans l'équation de F .

quand on peut l'écrire sous forme d'un produit de facteurs, par exemple en repérant un facteur commun ou une identité remarquable. Alors si l'un des facteurs est nul, le produit est nul.

Réciproquement, si un produit $A.B = 0$ c'est que soit $A = 0$ soit $B = 0$

* une méthode : pour résoudre une équation du second degré de la forme $A.B = 0$, on résout deux équations du premier degré : $A = 0$ et $B = 0$. Chacune de ces deux équations a une solution qui est aussi solution de l'équation du second degré proposée.

On notera que, du côté de l'enseignant, l'institutionnalisation est un processus qui débute avec le choix du problème, avec les décisions qui organisent la situation didactique et que le cours n'est

qu'une étape du processus. Mais, du côté des élèves, le processus n'est peut-être pas vécu comme tel, c'est à dire comme un ensemble d'étapes articulées de façon cohérente par rapport à un objectif d'apprentissage. En particulier, l'enseignant pourra trouver des difficultés avec certaines populations d'élèves à réaliser la situation qu'il a conçue à des fins didactiques (cf. & I). Réaliser veut dire faire la dévolution du problème : les élèves vont se trouver en interaction scientifique avec le problème pendant un moment sans médiation du maître pour dire ce qu'on a le droit de faire. Cela veut dire ensuite que ces élèves sont conscients que la situation (a-didactique) conçue par leur maître et qu'ils viennent de vivre est constitutive du sens de ce qui sera institutionnalisé plus tard.

M.J.Perrin, dans sa recherche sur les élèves de milieu populaire (1992) met bien en évidence le fait que, la plupart d'entre eux n'établissent aucun rapport entre le travail pour résoudre un problème que le maître a proposé d'une part et le cours que le maître fait ensuite en croyant s'appuyer sur les actions des élèves d'autre part. Les conditions de cette articulation ne sont sans doute pas toujours faciles à établir. Les leviers pertinents ne sont pas forcément accessibles à l'enseignant. En tout état de cause, c'est une question à prendre en compte dès le début de la réflexion sur l'organisation de la situation didactique. C'est une des raisons pour lesquelles nous avons présenté l'exemple du calcul mental.

Des conditions pour qu'un problème soit source et occasion d'apprentissage

La situation d'apprentissage que nous venons de présenter est centrée sur la recherche d'un problème qui répond à certaines conditions. Énonçons les plus importantes :

* *à l'aide de ses connaissances antérieures, un élève peut comprendre l'énoncé.* Cela veut dire donner un certain sens aux mots et aux phrases employés. De plus, il a des idées pour aborder le problème, il peut démarrer.

* *avec ses connaissances, l'élève ne peut pas résoudre complètement le problème.* Il ne s'agit pas d'une simple application de notions ou méthode connues.

Les raisons peuvent être diverses. Il se peut que les notions mathématiques pertinentes ne fassent pas explicitement partie des connaissances de l'élève. C'est ce qui se passe dans les parties A) et B) question 2) du problème proposé où la notion pertinente est celle de fonction. Il se peut que l'élève dispose de ces notions mais dans un autre contexte et il peut avoir des difficultés à les adapter au nouveau contexte. C'est ce qui se passe dans la partie C) où la factorisation des deux membres de l'équation est l'outil adapté pour la résoudre.

* les objets d'enseignement, ce que l'enseignant veut que les élèves apprennent et retiennent, sont des outils adaptés à la résolution du problème.

Dans le problème ci-dessus, la factorisation est outil de résolution d'équations du second degré.

* le problème s'exprime dans au moins deux cadres.

Ici, les cadres graphique et algébrique interagissent pour faire avancer l'étude : suggérer des procédures et en contrôler les effets.

Familiarisation et réinvestissement

Même si la situation d'apprentissage se déroule selon les attentes de l'enseignant, la question se pose de savoir ce que les élèves auront effectivement appris et ce qu'ils seront capables de réinvestir dans des problèmes relevant d'un même contexte mais plus complexe ou relevant d'un contexte tout différent, de complexité comparable ou plus complexe.

En fait, avant de pouvoir réinvestir, les élèves ont besoin de *se familiariser* avec leur nouveau savoir. Un moyen est de leur proposer d'abord de traiter des exemples de problèmes proches de celui qu'ils ont déjà étudié. Par exemple,

- résoudre l'équation $x^2 - 4 + (x + 2)(2x - 5) = 0$

La factorisation est ici l'outil adapté, mais le texte ne dit rien à ce sujet. Toutefois, $x^2 - 4$ est une différence visible de deux carrés.

- résoudre d'autres questions du même ordre.

Réinvestir dans des problèmes plus complexes

- des questions où la factorisation est moins évidente et où la représentation graphique sera bien utile :

* Y a-t-il des points communs aux deux ensembles d'équations $y = x^2 - x - 6$ et $y = (x + 2)(8x - 7)$

* Même question pour les ensembles d'équation

$$y = 5x^2 + x - 18 \text{ et } y = (x + 2)(8x - 7)$$

Ici, le contexte n'a pas changé.

A travers ces deux dernières questions, un problème nouveau est abordé.

Comment factoriser une expression qui n'a pas de "facteur commun" apparent ou presque apparent comme $(x + 2)$ dans la première équation ?

L'outil adapté et inconnu des élèves est le théorème suivant : "si l'expression s'annule pour $x = a$, alors il est possible de factoriser par $(x - a)$ ". Or c'est la proposition réciproque qui a été à l'oeuvre dans les exercices de résolution d'équations du second

degré très particulières qui ont été traitées. Pour avancer, on a besoin d'explicitier la relation entre les facteurs du premier degré de la factorisation et les solutions trouvées à l'équation. On peut ensuite tenter d'en dégager une méthode valable dans certains cas.

Pour factoriser une expression du second degré, on cherche par toutes sortes de moyens (calcul, graphique) des valeurs de x qui l'annulent.

- Si on en trouve deux, tant mieux et on peut écrire les deux facteurs, au besoin en ajustant le coefficient de x^2 .

- Si on en trouve un, on peut écrire le facteur correspondant à cette valeur et se débrouiller pour en trouver un autre de façon qu'en redéveloppant, on retrouve l'expression de départ à une constante près.

- Si on n'en trouve pas du tout, on ne sait rien faire.

Notons que l'ingénierie décrite ci-dessus peut s'étaler sur une longue période de quelques mois. Au cours de cette période, la question est étudiée, laissée au repos, reprise dans des problèmes différents. Ce qui est visé, c'est l'étude ultérieure des polynômes, un objet important en mathématiques. Pour une telle étude, le travail proposé permet de poser des jalons qui ont du sens pour les élèves.

Nous venons de décrire un exemple de déroulement de la *dialectique outil-objet* avec des *jeux de cadres* (R.Douady 1984, 1985, 1987) entre le graphique et l'algébrique. Elle s'enclenche à partir d'un problème qui satisfait certaines conditions que nous avons énoncées.

Les *fenêtres conceptuelles* (R.Douady 1991) que les élèves mobilisent diffèrent d'un élève à l'autre. Nous désignons de cette façon l'ensemble des parties de cadres qu'un élève fait interagir ou combine pour étudier le problème qui lui est soumis. Elles comprennent ici, des représentations graphiques constituées d'ensembles de points, des éléments du cadre algébrique (certaines identités remarquables, des équations, des expressions algébriques diverses, quelques règles opératoires), des nombres et des moyens de calcul, quelques fonctions linéaires ou affines. Pour un élève donné, la fenêtre évolue au cours du travail en relation avec les questions et les méthodes que sa connaissance lui suggère. Les fenêtres constituent les supports des jeux de cadres. Il peut s'agir aussi d'un ensemble d'éléments d'un cadre qui trouve comme auparavant sa pertinence dans le problème posé et les stratégies développées pour l'étudier (par un élève ou un groupe d'élèves à un moment donné). Au cours de l'étude, différents registres ou différents points de vue peuvent interagir dans ce cadre. Ici, par exemple, le registre des équations et de leur résolution, celui des variations numériques d'une expression algébrique et de ses

valeurs d'annulation, celui de la factorisation. Tout cela se passe dans le cadre algébrique.

II.3 Une ingénierie autour de l'approximation

L'approximation est une méthode très générale et très puissante en mathématiques. L'ingénierie ci-dessous est centrée sur un problème dont l'enjeu est la recherche de mesures de longueur. Dans le cas où ces mesures sont irrationnelles, l'approximation à l'aide de fractions ou de nombres décimaux est l'outil adapté.

Nous ne ferons pas d'étude aussi détaillée que la précédente sur la situation didactique que nous allons proposer. C'est une partie d'une longue ingénierie, elle est complexe et son analyse nous entraînerait trop loin. Nous allons cependant suivre le plan précédent.

Nous exposons les objectifs, puis nous énonçons le problème. Après une brève analyse mathématique, nous précisons les cadres concernés dans l'énoncé du problème ou ceux susceptibles d'être sollicités comme auxiliaires de travail, les outils, les variables didactiques et les choix faits en fonction des objectifs et ce que l'enseignant attend des élèves.

Le contexte scolaire et les objectifs du problème

Le problème se pose à des élèves qui ont une bonne connaissance des entiers, une certaine connaissance technique des nombres décimaux et de quelques fractions, aucune connaissance des irrationnels. A travers le problème que nous proposons ci-dessous, nous voulons mettre à l'épreuve la connaissance des fractions et des décimaux comme outils pour approcher des mesures irrationnelles. Nous pensons à des élèves de début de collège (11-13 ans) pour le premier problème, début lycée si nous voulons proposer les deux problèmes (16-17 ans). La première partie de l'ingénierie (problème 1) a été testée dans plusieurs classes, par divers enseignants. La deuxième partie (problème 2) est un projet qui doit donner lieu à réalisation et être testé dans le cadre de la rénovation des lycées.

Pour que la question puisse être abordée, nous avons besoin d'introduire un contexte non numérique où les éléments correspondant à des mesures irrationnelles ont du sens pour les élèves, puisque ces mesures n'existent, du point de vue numérique, que pour l'enseignant. Nous choisissons un contexte géométrique : aire et périmètre de rectangles. Ainsi, les élèves devront être familiers avec ce contexte.

Puisqu'il s'agit d'approcher des mesures irrationnelles à l'aide de fractions et de décimaux, c'est que ces mesures sont décrites

indirectement. Elles vont l'être par l'intermédiaire de relations entre des mesures connues. Il faudra exprimer ces relations qui feront intervenir des inconnues : les mesures cherchées. Cela va se traduire par des mises en équation. Les élèves devront avoir manipulé déjà des relations entre lettres et nombres.

Au lycée, il sera possible d'enclencher à cette occasion, la résolution algébrique des équations polynomiales du second degré.

Les variations de mesures vont être au coeur du problème. Nous avons besoin d'un cadre de représentation de ces variations pour les recueillir, les interpréter, pour suggérer des choix de calculs et contrôler les résultats. Les élèves devront être familiers avec les repérages graphiques.

Au lycée, il sera possible d'aborder dans un contexte particulier la notion de suite numérique, suite décimale illimitée et de convergence de suite. C'est un premier pas vers des nombres réels non rationnels.

Problème 1

On se fixe deux nombres a et b . On cherche un rectangle de périmètre $2a$ cm et d'aire b cm²

Les choix numériques de a et b résultent de l'analyse qui suit. Il ne s'agit pas de les laisser sous forme de lettres. Tout au moins dans une première phase du travail.

Analyse mathématique du problème

Le problème reçoit immédiatement une traduction algébrique. Il s'agit de chercher deux nombres x et y dont on connaît la somme et le produit. D'où le système $x + y = a$ et $x \times y = b$

Selon les valeurs entières ou rationnelles choisies pour a et b , trois cas peuvent se produire :

- il existe une solution et les dimensions du rectangle sont entières ou rationnelles.
- il existe une solution et les dimensions du rectangle sont irrationnelles
- il n'existe pas de solution

La résolution serait immédiate dans $\mathbb{R}$ pour des élèves qui connaîtraient la théorie des équations du second degré, en particulier les relations entre les coefficients et les racines. Il s'agirait alors de résoudre l'équation $x^2 - ax + b = 0$ en exercice d'application.

Les questions intéressantes pourraient se situer dans le cadre numérique. On pourrait s'intéresser aux propriétés numériques des

solutions selon les choix numériques de a et b . Par exemple, si a et b sont rationnels, on sait que, selon les valeurs de (a,b) , les solutions peuvent être rationnelles ou irrationnelles. Est-il possible que les solutions soient l'une rationnelle et l'autre irrationnelle? Ou encore, si a et b sont rationnels avec des dénominateurs modérés (dans leur expression réduite), est-il possible que les solutions s'écrivent (en forme réduite) avec de très grands dénominateurs ?

En revanche, pour des élèves qui n'ont pas cette connaissance (relations entre les coefficients et les racines d'une équation du second degré), c'est une situation de recherche très riche par les nombreux domaines qu'elle met en relation, les différents niveaux d'interrogation et les nouvelles questions qu'elle va susciter dans les différents cadres.

C'est une situation très simple du point de vue mathématique où l'approximation d'un irrationnel par des rationnels, en particulier par des décimaux, est posé de front.

Une méthode pour chercher la solution quand elle existe, est :

- choisir deux nombres x et y tels que $x + y = a$
 - calculer le produit $x.y$ et comparer à b
 - * si $x . y = b$, le problème est résolu
 - * sinon, choisir un autre couple (x,y) tel que le produit $x.y$ soit plus proche de b , de plus en plus proche de b .
- Alors, soit on aboutit effectivement à b , soit on se rapproche de b , l'écart à b diminue et devient de plus en plus proche de 0 , soit les valeurs semblent plafonner et b reste inaccessible.

Les cadres

Le cadre géométrique : rectangles, côtés, longueur des côtés i.e dimensions, périmètre et aire sont des *objets mobilisés* directement (périmètre, aire) ou indirectement (dimensions) dans l'énoncé.

Le cadre algébrique : équations, inconnues, solutions d'une équation, système d'équations vont être des outils pour *formuler autrement* le problème.

le cadre des fonctions : la variation de deux variables liées par une relation (fonction affine), la détermination de deux variables liées par deux relations correspondent à des *études intermédiaires* pour traiter le problème dans sa formulation algébrique.

Le cadre graphique : report graphique des variations enregistrées, représentation graphique d'une fonction affine sont des *aides* pour les études intermédiaires mentionnées ci-dessus..

Le cadre numérique : entiers, certaines fractions, décimaux, munis de l'ordre et des opérations sont les *outils de base* pour toutes les étapes de l'étude quel que soit le cadre où elle se situe.

Les outils

Des outils disponibles

En plus de ceux déjà mentionnés ou en relation avec eux :

* une connaissance dans le cadre numérique : "entre deux nombres décimaux, il y a d'autres décimaux" et un procédé pour en désigner.

* une pratique dans le cadre graphique : la représentation des couples (x,y) tels que $x + y = a$ et celle des couples (x,y) tels que $x \times y = b$, ces représentations étant séparées ou sur un même graphique

Un outil géométrique à créer

"parmi les rectangles de périmètre fixé, le carré est celui qui a la plus grande aire"

un outil implicite dans le cadre des fonctions : la fonction qui, aux deux dimensions d'un rectangle fait correspondre son aire à la propriété suivante : "parmi les rectangles de périmètre fixé, si l'un des rectangles a une aire A plus petite qu'une valeur visée et un autre une aire A' plus grande que cette valeur visée, alors il existe un rectangle dont l'aire est égale à la valeur visée".

- Une méthode à établir pour essayer de l'atteindre : chercher des rectangles dont l'aire est de plus en plus proche de b . Pour cela, choisir des couples (x,y) qui vérifient $x + y = a$, calculer le produit $x \times y$. Parmi ces couples, chercher à en sélectionner deux dont le produit encadrent b . Si c'est possible, sélectionner de nouveaux couples dont le produit encadrent b de façon plus étroite, de plus en plus étroite...

- Une question : est-il possible d'atteindre b ?

Les variables du problème

Les valeurs de a et b : entiers, rationnels ? petits, grands ? autrement dit, propriétés et taille des nombres.

Ce sont des variables didactiques. En effet, suivant les choix faits, le problème a ou n'a pas de solution. Quand il en a une, elle peut s'exprimer en nombres entiers, rationnels ou irrationnels. Le problème mathématique change fondamentalement et les procédures des élèves aussi.

Les choix didactiques

1) a et b sont des entiers, les solutions existent et sont des nombres entiers. Par exemple $a = 15$ et $b = 36$

2) a et b sont des entiers, les solutions existent et ne sont pas des nombres entiers. Par exemple $a = 41$ et $b = 402$

3) a et b sont des entiers, il n'y a pas de solution. Par exemple $a = 39$ et $b = 402$

Beaucoup d'autres choix numériques sont possibles dans chacune des catégories, avec le même intérêt didactique.

Remarque : choisir pour a et b des valeurs non entières mais connues des élèves, c'est à dire des fractions ou des décimaux compliquerait beaucoup la tâche technique sans faire avancer le problème conceptuel de l'approximation déjà posé de front avec des entiers. La remarque est la même pour la recherche de preuve de la non existence de solution.

Les procédures attendues et qui permettent d'avancer dans le problème

Nous n'envisageons pas ici les erreurs, les échecs ou les blocages (R.Douady 1993), mais seulement des procédures raisonnables et vraisemblables.

1) $x + y = 15$ et $x \times y = 36$

chercher deux nombres dont la somme est 15 et parmi ces couples, chercher ceux dont le produit des deux nombres est 36 . Ou la procédure analogue en échangeant les rôles de somme et produit.

Un petit nombre d'essais sur des entiers mène au résultat.

2) $x + y = 41$ et $x \times y = 402$

- La même procédure que dans le premier cas va prendre plus de temps. Il y a beaucoup de couples de nombres entiers dont la somme est 41 . On attend que les élèves organisent leurs résultats en tableau à 4 colonnes : x , y , $x + y = 41$, $x \times y$ et cherchent 402 dans la dernière colonne. Ils constateront que ce nombre n'y est pas! En revanche,

$$25 + 16 = 41 \quad 25 \times 16 = 400$$

$$24 + 17 = 41 \quad 24 \times 17 = 408$$

Le nombre 402 est compris entre 400 et 408

Nous attendons une interprétation géométrique de ce fait numérique et une conviction ou une question exprimée : "il doit y avoir un rectangle entre "25,16" et "24 ,17" ou bien y a-t-il un rectangle entre "25,16" et "24 ,17". Comment le chercher ?"

- Le dessin géométrique ou la représentation graphique au secours pour faire de nouveaux choix.

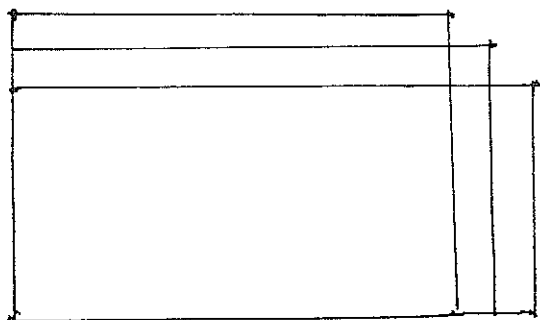


Fig.2

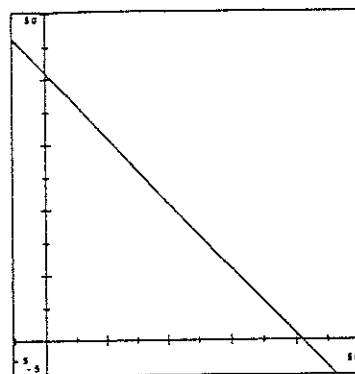


Fig.3

La représentation géométrique de couples (x, y) de somme 41 par des rectangles superposés ou la représentation graphique de ces mêmes couples concentre l'information et fait apparaître des tendances. Un rectangle repéré graphiquement par ses deux dimensions est représenté par deux points de coordonnées (x, y) et (y, x) symétriques par rapport à la première bissectrice, droite d'équation $y = x$ (une remarque d'élève, souvent entendue dans l'étude de cette question : "couché ou debout, c'est le même rectangle, mais sur le graphique, on marque deux points"). Les couples (x, y) tels que $x + y = 41$ sont représentés par des points alignés. En notant à côté de chacun des points marqués l'aire correspondante, on observe que si l'écart entre les deux dimensions diminue, l'aire augmente. En sens inverse, si l'écart augmente, l'aire diminue. La variable pertinente, c'est l'écart entre x et y .

- choisir un nombre entre 24 et 25 plus près de 25 et son complément à 41. Il se trouve entre 16 et 17. Faire le produit. Recommencer l'opération pour s'approcher de plus en plus de 402. Si les nombres sont bien choisis, la différence à 402 est de plus en plus petite, mais arrivera-t-on à 402 exactement ? La question est ouverte au collège.

Toutefois, en retenant systématiquement à chaque étape pour x et pour y la valeur approchée à 10^{-k} près par défaut, on construit des suites de nombres qui vont en croissant. Cela se voit sur les écritures décimales : à chaque fois, on annexe une décimale de plus à l'écriture précédente, c'est à dire sans changer les décimales déjà écrites. Au lycée, nous pourrions travailler à construire, par ce procédé, des suites décimales illimitées, à les additionner, les multiplier, les comparer. Somme toute, une manière d'aborder des nombres réels non rationnels.

3) $x + y = 39$ et $x \times y = 402$

- On attend la même procédure que dans le cas précédent. Cette fois, il n'y a pas, dans le tableau, de nombres qui encadrent 402. Ils sont tous plus petits.

- Pour augmenter l'aire, il faut se déplacer "vers le carré". C'est un résultat du problème précédent. Mais même le carré a une aire plus petite que 402.

* Une nouvelle question se pose : *peut-on obtenir une aire plus grande que celle du carré ?*

- L'enseignant peut proposer aux élèves de *choisir un carré et de chercher un rectangle de même périmètre et d'aire plus grande que celle du carré.*

Le problème ci-dessus est formulé en termes géométriques. C'est sans doute le bon cadre pour l'étudier et les élèves peuvent l'étudier dans ce cadre. Toutefois, nous n'attendons pas cela tout de suite. C'est que le contexte du problème est familier aux élèves, les traitements numériques leur sont familiers et les traductions graphiques aussi. Nous attendons donc plutôt en premier une mise en oeuvre des procédures familières. Celles-ci vont sans doute susciter chez les élèves des convictions. Certains s'arrêteront à ces convictions et ils les prendront pour des certitudes. D'autres pourront prendre l'initiative d'examiner le problème d'un point de vue géométrique. Ainsi, un scénario attendu est le suivant :

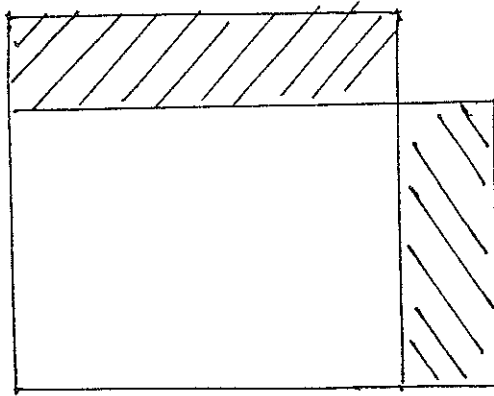
* des essais numériques : ils ne fournissent pas de tel rectangle.

* la représentation graphique des couples : il est possible d'observer, comme précédemment, qu'en se déplaçant vers le centre (x,x) l'aire augmente et que passé (x,x) , l'aire recommence à diminuer. Ceci n'est pas étonnant puisque deux points symétriques par rapport au point de coordonnées (x,x) représentent le même rectangle.

* une étude géométrique du problème que le maître peut demander de faire. Il peut demander de dessiner un carré, de le déformer en rectangle de même périmètre et d'examiner géométriquement les conséquences sur l'aire.

Alors, si pour les élèves l'aire n'est pas seulement le résultat d'un calcul mais a aussi un sens géométrique, s'ils peuvent comparer des aires directement sans nécessairement passer par leur traduction numérique, il leur est possible de se convaincre du fait suivant : dès qu'on s'écarte de la forme carré, en comparant les aires des petites bandes qui font passer du carré au rectangle, l'aire ne peut que diminuer.

Fig.4



Donc le carré a la plus grande aire.
Conséquence : aucun rectangle ne peut répondre aux exigences 39 et 402 . Le problème n'a pas de solution.

Problème 2

On s'intéresse au système d'équations

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x \times y &= b \end{aligned}$$

Preliminaires

Dans le problème 1 , nous avons vu un exemple où le système avait une solution en nombres entiers, un exemple où il n'y avait pas de solution, un exemple où il y avait des solutions approchées amenant à un développement décimal illimité.

Nous admettons qu'un tel développement représente un nombre. Nous considérons donc le troisième cas comme un cas où le système a une solution.

Question

Représenter graphiquement, en deux couleurs différentes, les couples (a,b) pour lesquels il existe une solution et ceux pour lesquels il n'existe pas de solution.

les objectifs du problème

Etablir un critère qui permette, relativement vite, de répondre au problème : en termes géométriques, en termes graphiques, en termes algébriques.

Prendre conscience qu'il y a des cas où il faut être rigoureux sur le langage employé et des cas où les abus de langage facilitent la communication.

Les procédures attendues

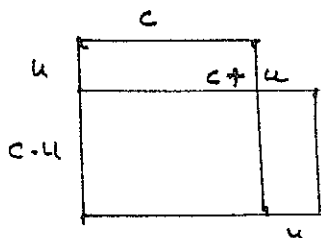
* Des choix numériques pour a et b et une étude qui ramène au problème 1. Cela permet de conclure à l'existence ou la non existence d'une solution pour chaque choix de (a,b) et par suite d'attribuer une couleur au point qui représente graphiquement le couple (a,b) .

* Une réflexion sur la procédure précédente : impossible de résoudre 1000 problèmes s'il faut colorier 1000 points.

Question : En quoi consiste exactement la méthode ? Est-il possible de déduire de la couleur d'un point, la couleur d'un tas d'autres points, comme cela a été possible dans d'autres problèmes. N'y a-t-il pas une méthode plus économique ?

Ces questions amènent à expliciter la méthode utilisée au début pour conclure dans le problème 1 et à la repenser dans un contexte plus général.

- on choisit une valeur pour a et une valeur pour b
- on cherche le carré de la famille, son côté mesure $c = a/2$
- on calcule son aire $c \times c = a/2 \times a/2$
- on modifie le carré en rectangles de même périmètre. Pour cela, on peut utiliser une procédure de compensation sur les côtés et noter les dimensions du rectangle comme des modifications de celle du carré : $c - u$ et $c + u$ où u est bien sûr plus petit que c .



- on calcule l'aire d'un tel rectangle $(c - u) \times (c + u) = c^2 - u^2$
 - on compare l'aire du carré à l'aire de ces rectangles. On retrouve par un calcul algébrique qu'aucun rectangle de la famille ne peut avoir une aire plus grande que celle du carré.
 - on compare l'aire du carré à b
- si b est plus grand que $a/2 \times a/2$, il n'y a pas de solution
si b est plus petit que $a/2 \times a/2$, il y a une solution
si b est égal à $a/2 \times a/2$, la solution est le carré

Conséquence :

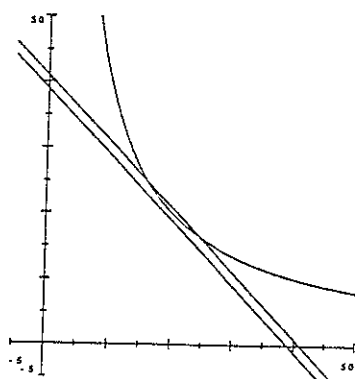
une nouvelle connaissance

* Parmi les rectangles ayant un périmètre fixé, le carré est celui qui a la plus grande aire.

* L'ensemble des couples (a,b) tels que, $a>0$, $b>0$ et $b = a^2/4$ sépare les couples pour lesquels le problème a une solution et ceux pour lesquels le problème n'a pas de solution.

* Le système d'équations
$$\begin{array}{ll} x + y = a & a > 0 \\ x \times y = b & b > 0 \end{array}$$

a une solution si $b \leq a^2/4$ et n'a pas de solution si $b > a^2/4$



Un nouveau problème algébrique

Peut-on étendre à toutes les valeurs de a et b positives, négatives ou nulles le critère selon lequel le système d'équations $x + y = a$ $x \times y = b$ a une solution.

les objectifs du problème

L'interprétation géométrique n'a plus de sens. Mais la traduction graphique et la traduction algébrique peuvent se prolonger au plan tout entier.

Les procédures attendues

dans le cadre graphique

Les points du graphique symbolisent des situations géométriques (rectangles) ou numériques (mesures). Toutefois, en tant que parties du plan, il est intéressant de considérer les propriétés géométriques des courbes. C'est ainsi que nous référerons ci-dessous aux notions de symétrie, bissectrice, tangente.

Méthode

Représenter sur un même graphique une droite D_a d'équation $x + y = a$ et une courbe C_b d'équation $x \times y = b$. Celle-ci a deux branches dans deux quadrants différents.

Si $b > 0$, elle est symétrique par rapport à la 1ère bissectrice Δ d'équation $x = y$. Les droites d'équation $x + y = a$ sont de pente -1 et perpendiculaires à Δ . Pour un choix fixé de b , selon les valeurs de a , la droite coupe la courbe en deux points symétriques par rapport à Δ , ou bien lui est tangente en un point T sur Δ de coordonnées $(a/2, a/2)$ ou bien ne la coupe pas du tout. La position tangente correspond donc au cas où $b = a^2/4$.

Si $b < 0$, la courbe C_b est symétrique de C_{-b} par rapport à l'un des axes. Ainsi, l'une quelconque des droites D_a coupe n'importe quelle courbe C_b en deux points, un sur chaque branche.

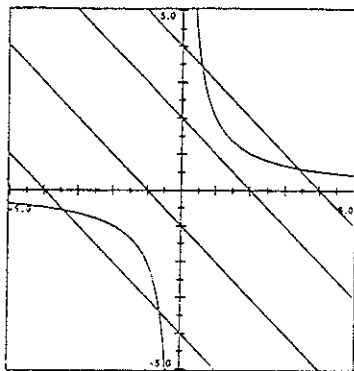


Fig.5

$$\begin{aligned} a &> 0 \text{ ou } a < 0 \\ b &> 0 \end{aligned}$$

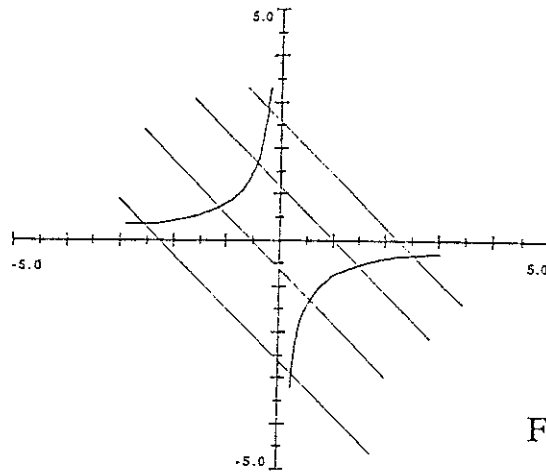


Fig.6

$$\begin{aligned} a &> 0 \text{ ou } a < 0 \\ b &< 0 \end{aligned}$$

Conclusion : l'observation graphique permet de se convaincre que, pour toutes valeurs de a et b , le système d'équations

$$x + y = a$$

$$x \times y = b$$

a une solution si $b \leq a^2/4$ et n'a pas de solution si $b > a^2/4$

Travail dans le cadre algébrique

La traduction algébrique de l'étude géométrique conduit à remplacer les deux inconnues x et y liées par la relation $x + y = a$ par une seule inconnue u telle que $x = a/2 - u$ et $y = a/2 + u$. L'autre équation $x \times y = b$ devient $a^2/4 - u^2 = b$

Il s'agit maintenant de résoudre une équation du second degré à une inconnue $a^2/4 - u^2 = b$ ou encore $u^2 = a^2/4 - b$. Pour qu'il y ait une solution, le second membre doit être positif ou nul. On retrouve la condition déjà exprimée $a^2/4 - b \geq 0$ valable cette fois pour toutes valeurs de a et b . En effet, le signe de a n'intervient pas dans la condition, et si $b < 0$ la condition est automatiquement vérifiée.

La résolution de cette équation peut se faire par approximation, et par passage à la limite aboutir à une suite décimale illimitée, comme précédemment.

On peut aussi désigner les solutions de l'équation à l'aide du symbole $\sqrt{}$ et écrire $u = + \sqrt{(a^2/4 - b)}$ ou $u = - \sqrt{(a^2/4 - b)}$ et obtenir $x = a/2 - \sqrt{(a^2/4 - b)}$ $y = a/2 + \sqrt{(a^2/4 - b)}$ ou le contraire.

Conséquence à institutionnaliser

Une méthode algébrique de résolution des équations du second degré.

Conclusion

Cette ingénierie prévoit de mettre en oeuvre plusieurs jeux de cadres et d'aboutir à un enrichissement des connaissances des élèves dans chacun des cadres.

Dans le *cadre géométrique*, un *théorème* : Parmi les rectangles ayant un périmètre fixé, le carré est celui qui a la plus grande aire.

Dans le *cadre numérique*, des *nombres non rationnels* qui désignent des mesures et qu'on peut exprimer à l'aide de développements décimaux illimités

Dans le *cadre graphique*, une *exploitation du double statut des représentations* : elles symbolisent des situations extérieures au cadre et comme parties du plan, elles sont munies de la structure géométrique induite. Elles peuvent être source de conjectures, guide de démonstration ou outil de contrôle.

Dans le *cadre algébrique*, une *méthode* algébrique de résolution des équations du second degré.

III Conclusion

Les ingénieries que nous avons présentées sont des exemples de mise en scène de la dialectique outil-objet. Elles empruntent aussi des éléments importants de la théorie des situations de G.Brousseau comme le contrat didactique. Elles sont organisées autour de problèmes qui donnent du sens aux notions mathématiques impliquées. Elles accordent une place importante au processus de contextualisation, changement de contexte,

reformulation des problèmes, décontextualisation et aussi à la personnalisation, diffusion des procédures ou connaissances personnelles, dépersonnalisation. Autrement dit, il s'agit pour le maître d'organiser la transformation des statuts outil en objet et vice versa. Son objectif est de permettre aux élèves de capitaliser du savoir qui, en situation, est disponible et prend sens pour eux. Dans ce travail, l'exploitation de changements de cadres ou changements de points de vue au sein d'un cadre joue un rôle clé. Tout cela demande que le maître soit dans des conditions lui permettant d'assurer le dévolution du problème et donc l'entrée des élèves dans une interaction directe avec le problème, ce qui exclut le maître dans sa fonction d'autorité mais non comme partenaire scientifique. Or ceci n'est pas toujours le cas. Les recherches d'A.Robert et d'autres chercheurs dans son environnement montrent l'importance de la mise en place et de l'exploitation de métaconnaissances, de l'usage d'un discours *sur* les mathématiques pour faciliter l'accès à certains concepts ou à certains domaines mathématiques.

Par ailleurs, admettons que cette étape soit réalisée, que les élèves aient effectivement travaillé au problème et produit des résultats attachés au problème. Il reste encore au maître à engager la décontextualisation et la dépersonnalisation de certains éléments qu'il choisit pour des raisons liées à ses intentions d'enseignement et aux comportements des élèves dans le traitement du problème qui leur était proposé. Autrement dit, le maître doit institutionnaliser certains éléments : notions, méthode, pratique en s'appuyant sur les réalisations des élèves. Or là encore, il y a des populations d'élèves pour qui la relation entre ces deux étapes n'a rien d'évident : travailler à un problème n'implique pas qu'on fera quelque chose plus tard de ce travail. Pourtant, cette relation est une condition nécessaire pour que la situation de recherche dans laquelle un élève s'est effectivement impliqué ait une fonction d'apprentissage pour cet élève.

Au cours de nos expériences didactiques, nous avons pu repérer des situations particulièrement intéressantes pour favoriser les relations nécessaires mentionnées ci-dessus. Ce sont *les situations de rappel* .

Nous entendons par là un moment en début de séance où l'enseignant demande aux élèves de rappeler les points essentiels des séances antérieures sur un thème donné encore en cours d'étude. Le compte rendu est sous le contrôle mutuel des élèves. L'enseignant renvoie les questions, éventuellement en pose, reprend les informations exprimées mais n'en apporte aucune lui-même. C'est une phase très importante dans la sélection et la mémorisation des événements importants, dans la mise en relation avec les séances ultérieures, dans la décontextualisation et dans la

dépersonnalisation de ce que le maître voudra institutionnaliser plus tard. En effet, la pratique des rappels sous la responsabilité des élèves est intéressante à instituer car à chaque séance ou presque, le travail demandé va se situer par rapport au travail, aux questions ou aux résultats antérieurs. Ainsi, chaque élève sait qu'il doit retenir les points essentiels du déroulement d'une séance en prévision de la suivante. En fait, les situations sont souvent complexes et un élève ne peut remplir à lui seul le contrat. Mais l'ensemble de la classe en général le peut.

Notons cependant que si le maître est impatient ou exigeant sur les rappels à faire et assure lui-même cette fonction, les rappels sont effectivement assurés convenablement, mais la situation ne remplit plus du tout son rôle didactique pour les élèves. Elle ne participe plus à la décontextualisation et à la dépersonnalisation nécessaire.

Pour conclure, énumérons des objectifs prioritaires que M.J.Perrin(1993) a relevé à la suite de son travail avec des élèves de milieu populaire.

- *faire dévolution d'un enjeu général à travers des enjeux plus ponctuels*
- *favoriser la création de représentations mentales de l'action permettant un début de décontextualisation, et pour cela donner aux élèves plusieurs occasions de les construire*
- *favoriser le travail personnel de l'élève et notamment le travail à la maison, et pour cela faire en sorte qu'ils soient capables d'utiliser le manuel*
- *rendre possible et développer des formes de communication et d'interactions entre élèves dans le travail collectif ou en groupes,*
- *faire évoluer leur rapport à l'évaluation pour le rendre plus compatible avec un fonctionnement scientifique.*

Comme on peut le constater, certains sont bien pris en charge dans les ingénieries que nous avons présentées. D'autres, tels le travail à la maison et l'utilisation de manuels sont à intégrer dans le déroulement de l'ingénierie.

Bibliographie

- ARTIGUE M. (1989) Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 9.3, p 281-308 La Pensée Sauvage, Grenoble
- BAUTIER E. et ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de pédagogie* n° 84 p. 13-19, INRP, Paris.
- BOERO P. (1989) Mathematical literacy for all experiences and problems. *Actes du colloque PME 13*, Paris, juillet 1989, 62-76.

- BROUSSEAU G. (1987) Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 7.2, 33- 115 La Pensée Sauvage, Grenoble
- BROUSSEAU G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 9.3, 309-336 La Pensée Sauvage, Grenoble
- BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 12.2.3 La Pensée Sauvage, Grenoble
- CHARLOT B. et BAUTIER E. (1993) *Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques* Repères IREM n° 10
- DOUADY R. (1984) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet , *Cahier de Didactique* n° 3, IREM PARIS 7
- DOUADY R. (1987a) L'ingénierie didactique, une méthodologie privilégiée pour la recherche...*Actes du colloque PME 11 , Montréal, Canada*
- DOUADY R. (1987b) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 7.2, 5-32 La Pensée Sauvage, Grenoble
- DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, *Educational Studies in Mathematics* n°20, 387-424
- DOUADY R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement *Repères - IREM* , n°6
- PERRIN-GLORIAN M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes "faibles", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 13.1, La Pensée Sauvage, Grenoble
- ROBERT A. et ROBINET J. (1989a) Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier de DIDIREM* n°1, IREM PARIS 7
- ROBERT A. et ROBINET J. (1989b) Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels. *Cahier de DIDIREM* n°4, IREM PARIS 7
- ROBERT A. et TENAUD I. (1989) Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C (scientifique section, 16-18 years old) *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 9.1, 31-70 La Pensée Sauvage, Grenoble
- VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 10.2.3, La Pensée Sauvage, Grenoble

IREM, PARIS 7
Janvier 1993

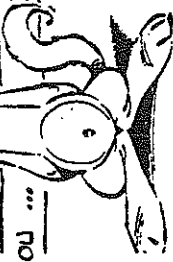
La rubrique-à-l'orac* :

Des extraits

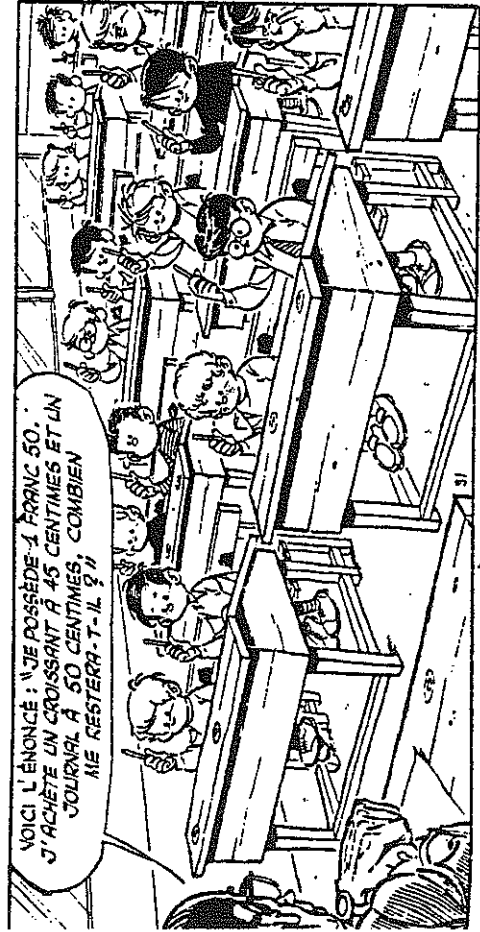
LE MATHEUX

DU CÔTÉ DE CHEZ FRED.

par GOTT-IE

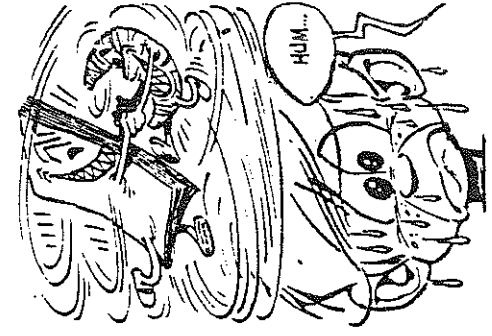
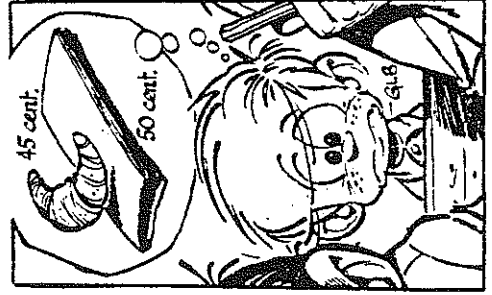
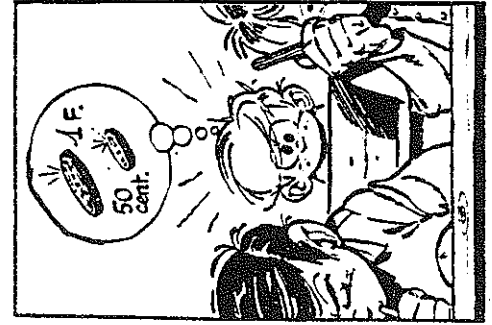


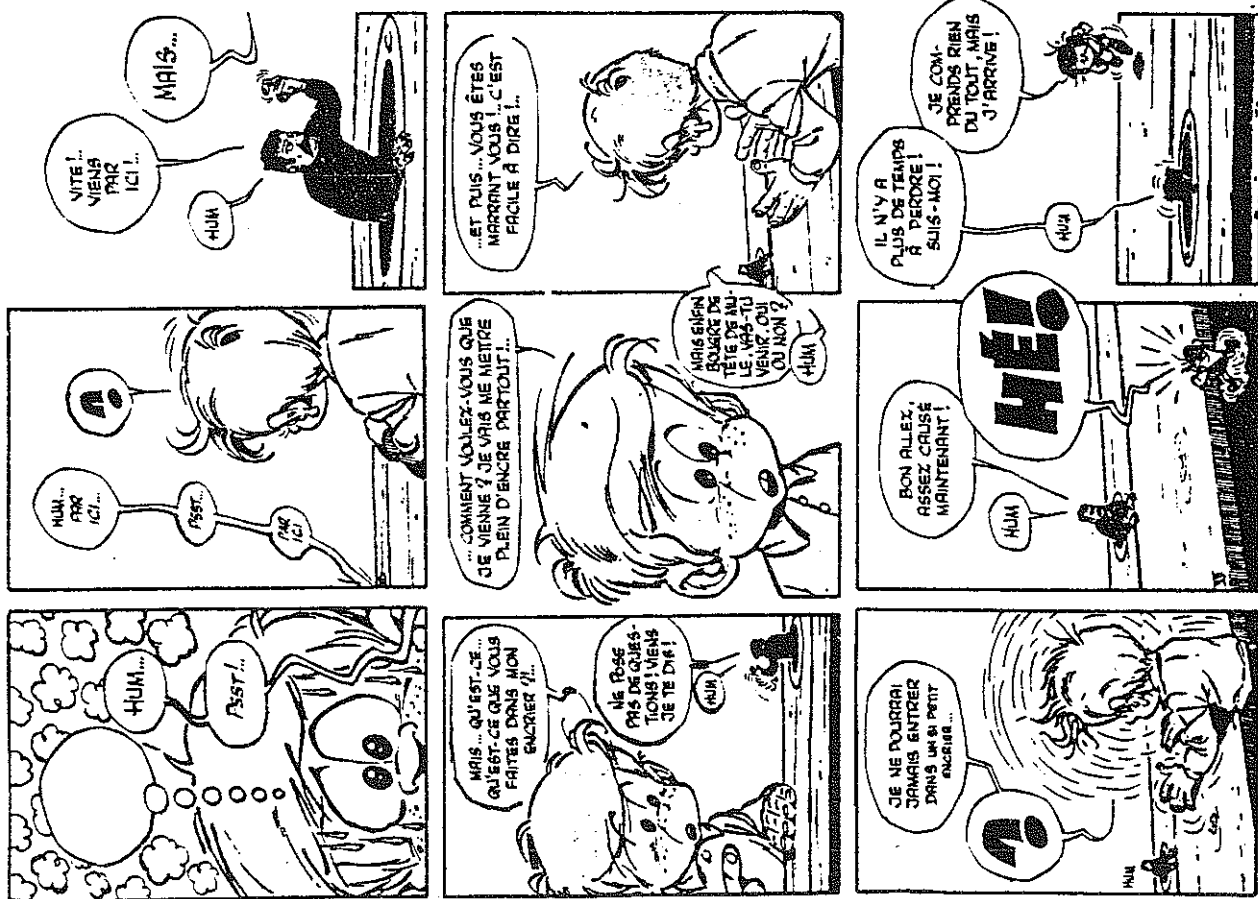
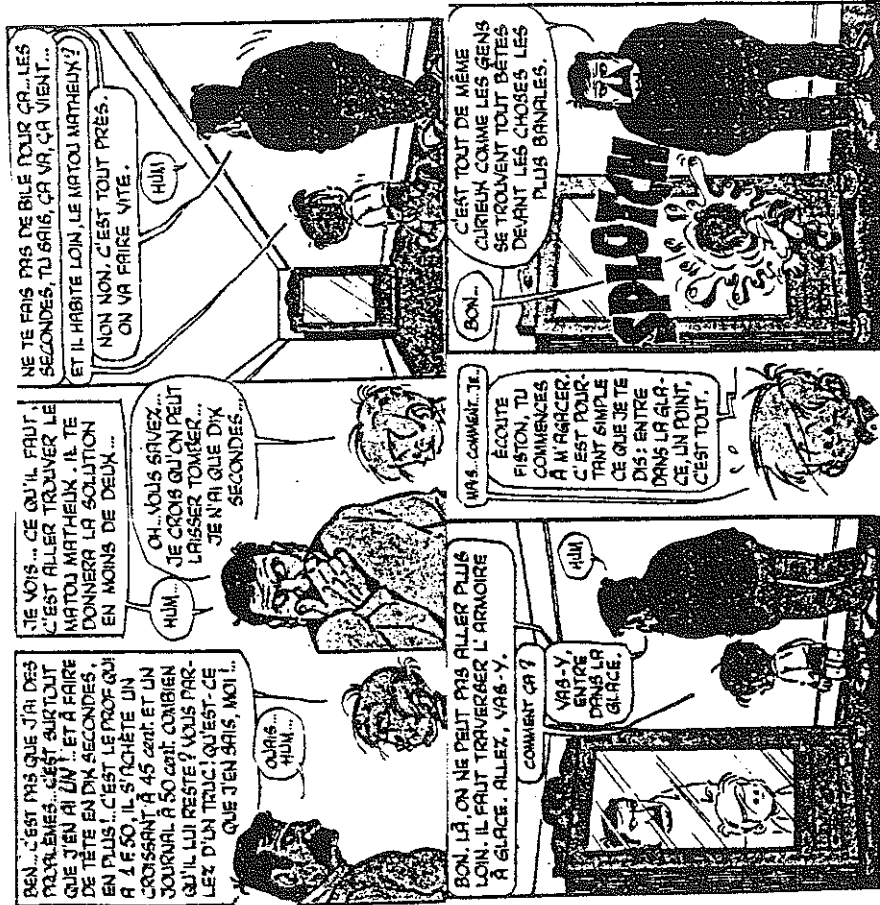
PRÊTS POUR L'ÉPREUVE DE CALCUL MENTAL, MESSIEURS ? LEVEZ VOS CRAYONS BIEN HAUT. J'ÉPOSE LE PROBLÈME. À MON "TOP", VOUS AUREZ DIX SECONDES POUR INSCRIRE LA SOLUTION ...

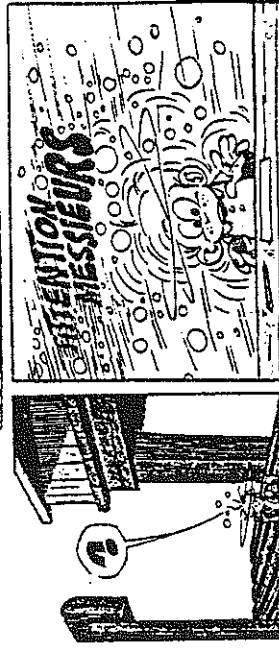
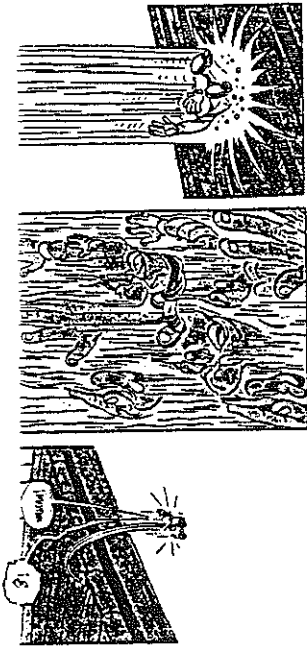
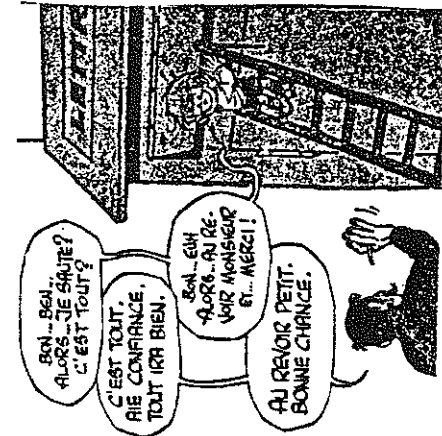
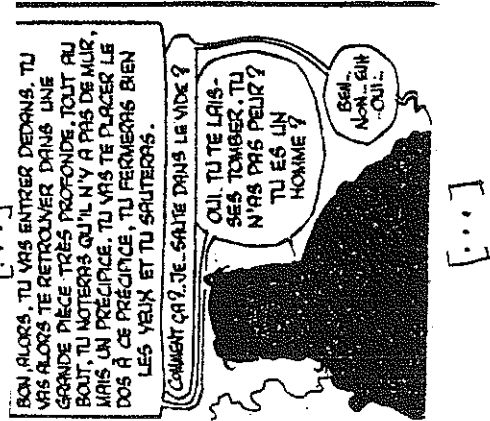
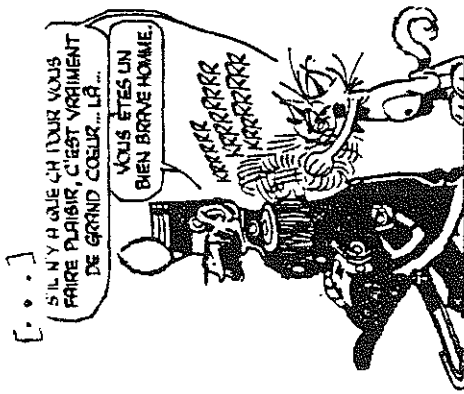


VOICI L'ÉNONCÉ : "JE POSSÈDE 1 FRANC 50. J'ACHÈTE UN CROISSANT À 45 CENTIMES ET UN JOURNAL À 50 CENTIMES, COMBIEN ME RESTERA-T-IL ?"

* Tome 2 (2^e partie) p. 41-64 DARGAUD Editeur 47







Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

<http://www.irem-paris7.fr.st/>

- Demander notre catalogue en écrivant à

**IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05**

TITRE :

L'ingénierie didactique

Un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage

AUTEUR :

Régine DOUADY

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : janvier 1993
ISBN : 2-86612-112-0